К а р а с е в М. В., М а с л о в В. П. **Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 368 с.— ISBN 5-02-014325-1.

Рассматриваются механизмы возникновения нелинейных вырожденных скобок Пуассона в гамильтоновой механике, деформации скобок и их когомологии. Подробно изучается геометрический объект, являющийся аналогом группы Ли для нелинейных скобок. Излагается с полными доказательствами предложенная авторами конструкция асимптотического квантования на общих симплектических и пуассоновых многообразиях, и в частности,—правило квантования двумерных пленок.

Кроме того, содержит элементарное введение в теорию квазиклассического приближения, большой справочный материал по исчислению функций от некоммутирующих операторов и сводку результатов по алгебрам с нелиевскими перестановочными соотношениями.

Для специалистов по дифференциальной геометрии, алгебре, математической физике, асимптотическим методам; для аспирантов и студентов математических факультетов.

Ил. 40. Библиогр. 287 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6
Введение 9

Глава I. **Пуассоновы многообразия** 15

§ 1. Скобки Пуассона, связанные с группами Ли 15
1.1. Симплектические листы и теорема Дарбу (16). 1.2. Линейные скобки. Фазовое пространство над группой Ли (21). 1.3. Скобки, порожденные 1-формами. Коциклы биалгебр Ли (26). 1.4. Примеры согласованных скобок на группах. Уравнения Янга—Бакстера над алгебрами Ли (30).

§ 2. Редукция скобок Пуассона 35
2.1. Лагранжевы и коизотропные подмногообразия. Гамильтоновы потоки (35). 2.2. Бирасслоения и скобки на их базах (38). 2.3. Редукция Ли—Картана. Переменные действие—угол (43). 2.4. Примеры редуцированных скобок (45). 2.5. Скобки, порожденные 2-формами. Скобка Дирака (52).

§ 3. Деформации и когомологии скобок Пуассона 61
3.1. Задача об инфинитезимальных деформациях. Примеры (61). 3.2. Структура пуассонова многообразия вблизи невырожденных листов (64). 3.3. Свободные скобки. Неизотропные деформации (69). 3.4. Аномалии в тождестве Якоби (75). 3.5. Башня препятствий. Общая схема вычисления тензорных когомологий, коциклов и кограниц (79).

Глава II. **Аналог групповой операции для нелинейных скобок Пуассона** 82

§ 1. Фазовое пространство над пуассоновым многообразием . . . 82
1.1. Симплектические группоиды (82). 1.2. Аналоги прямых теорем Ли (85). 1.3. Система уравнений Ли (88). 1.4. Склейка фазового пространства. Аналог 3-й обратной теоремы Ли (90). 1.5. Умножение в фазовом пространстве. Аналоги 1-й и 2-й обратных теорем Ли (94).

§ 2. Примеры симплектических группоидов 97
2.1. Действия группоидов и бирасслоения (98). 2.2. Полярный группоид (101). 2.3. Нильпотентные и разрешимые скобки (103). 2.4. Структура Картана (106). 2.5. Группоид для структуры Картана. Аффинные скобки (110).

§ 3. Конечномерные псевдогруппы и связности на пуассоновых многообразиях 113
3.1. Действия конечномерных псевдогрупп (115). 3.2. Восстановление псевдогруппы по каноническим векторным полям и структурным функциям (119). 3.3. Канонические действия на

симплектических многообразиях (123). 3.4. Линейная связность и базис псевдоалгебры (124). 3.5. Скобки Пуассона на группах и согласованные с ними псевдогруппы (128). 3.6. Сопряженная почти-скобка и почти-пуассоновость действия (132). 3.7. Локальное уничтожение кручения и негамильтоновости действия (137). 3.8. Симплектический группоид, порожденный псевдогруппой (139).

Глава III. **Скобки Пуассона в $\mathbf{R}^{2n}$ и квазиклассическое приближение** 145

§ 1. Лагранжевы подмногообразия как фронты волновых пакетов 145
1.1. Квантовая плотность пакета (146). 1.2. Гауссовы и осциллирующие пакеты (149). 1.3. Теорема о лагранжевости фронта (152). 1.4. Функториальные свойства плотности (154). 1.5. Локализация волновых пакетов (158). 1.6. Голография (159).

§ 2. Принцип соответствия на языке лагранжевой геометрии 163
2.1. Сплетение классических и квантовых переменных (163). 2.2. Одномерные препятствия. Индекс путей (168). 2.3. Формулы для сплетающего оператора (174). 2.4. Квантование решений гамильтоновых систем. Задача на собственные значения (178). 2.5. Задача Коши. Осциллятор и повороты на 90° (182).

Глава IV. **Асимптотическое квантование** 189

§ 1. Обзор различных подходов к квантованию 189
1.1. Общие идеи и обозначения (189). 1.2. Квантование симплектических многообразий (192). 1.3. Квантование вырожденных скобок Пуассона (194).

§ 2. Пучок волновых пакетов над симплектическим многообразием 196
2.1. Действие пуассоновых преобразований на волновых пакетах (196). 2.2. Нелокальный коцикл псевдогруппы пуассоновых преобразований (201). 2.3. Двумерные препятствия для склейки пучка. Глобальное $*$-произведение символов (207). 2.4. Связь с теорией геометрического квантования (215). 2.5. Тор, сфера и рогатая сфера (218).

§ 3. Квантование двумерных пленок 230
3.1. Индекс двумерных пленок (230). 3.2. Правило квантования (234). 3.3. Сплетающий оператор в квантованном симплектическом многообразии (236). 3.4. Пример: асимметричный SO (3)-волчок (238). 3.5. Квантование пуассоновых преобразований. Поднятие асимптотик из приведенного пространства (240).

§ 4. Нелинейные коммутационные соотношения в квазиклассическом приближении 248
4.1. Квадратичные соотношения с малым параметром (249). 4.2. Квантовые поправки к скобкам Пуассона (251). 4.3. Генераторы $*$-произведения на осциллирующих символах (252). 4.4. Представление коммутационных соотношений $\hbar$-псевдодифференциальными операторами (258). 4.5. Свертка, соответствующая нелинейным скобкам Пуассона (261).

Приложение 1. **Сводка формул некоммутативного анализа** 268

1.1. Упорядоченные функции от операторов и функции Вейля (268). 1.2. Формулы дифференцирования и выпутывания (274). 1.3. Перестановка операторов. Формула коммутации с экспонентой (280). 1.4. Функции от функций от операторов (287). 1.5. Приведение к нормальной форме (290). 1.6. Парадоксы формальных вычислений с функциями от операторов (294).

П р и л о ж е н и е 2. **Исчисление символов и перестановочные соотношения** 298

2.1. Обобщенные условия Якоби и свойство Пуанкаре—Биркгофа—Витта (298). 2.2. Смена упорядочения и $*$-произведения над алгеброй Гейзенберга (307). 2.3. Полулинейные коммутационные соотношения (310). 2.4. Сильно нелинейные и разрешимые соотношения (315). 2.5. Квантовое уравнение Янга—Бакстера (322). 2.6. Приведение к «треугольному» виду (326). 2.7. Спектр и коспектр квадратично-линейных соотношений (330). 2.8. Преобразование масштабных и структурных констант (337). 2.9. Алгебры, эквивалентные алгебрам Ли (347).

Список литературы 354

Добавление к списку литературы 365

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наша книга посвящена двум старым математическим задачам. Первая из них — это проблема построения аналога группы Ли для общих нелинейных скобок Пуассона. Вторая — проблема квантования таких скобок в квазиклассическом приближении (а для простейших классов скобок — проблема точного квантования).

В современной теории дифференциальных уравнений и в квантовой теории эти задачи постепенно начинают выходить на передний план, поскольку конструкции алгебр и групп Ли в каком-то смысле оказываются исчерпанными.

Основная наша цель: подробно описать новые объекты, возникшие при решении этих задач. Здесь сходятся и синтезируются многие идеи алгебры, современной дифференциальной геометрии, алгебраической топологии, операторной теории. И конечно, нетрудно предсказать, что эту область ждет стремительное развитие.

В настоящий момент на вопрос, возможно ли построение аналога теории групп Ли, теории представлений и гармонического анализа для случая нелинейных скобок Пуассона, мы уже с уверенностью отвечаем утвердительно. В последние годы, по-видимому, удалось выявить структуры, на которых может основываться такой аналог.

Здесь, конечно, нужно различать чисто квантовый, квазиклассический и классический уровни этой проблемы. На квантовом уровне в случае общих нелинейных скобок еще мало что известно; лишь для простейших квадратично-линейных скобок прогресс налицо. Но на квазиклассическом уровне мы уже имеем последовательную теорию для произвольной нелинейной скобки. В частности, проквантованы в квазиклассическом приближении произвольные симплектические многообразия, т. е. невырожденные скобки.

И наконец, на классическом уровне, т. е. на уровне дифференциальной геометрии, картина ясна в деталях, хотя многие важные взаимосвязи остаются пока неизученными. Эта геометрия излагается в главах I и II. Здесь подробно рассматривается связь скобок Пуассона с симплектическими группоидами. Описываются аналог алгебры Ли — псевдоалгебра пуассонова многообразия — и аналог группы Ли — конечномерная псевдогруппа (специальное семейство неассоциативных луп).

Показано, как эти структуры взаимодействуют с разного рода геометрическими и алгебраическими аномалиями: в тождествах Якоби, в законе ассоциативности, в согласовании скобок Пуассона и связности, в согласовании скобок и группового умножения, в гамильтоновости действия группы симметрий. Попутно выявляются новые свойства симплектических листов пуассоновых многообразий и их когомологий, вычисляются препятствия к деформации скобок, изучается обобщение скобок Дирака и их взаимоотношения с уравнением Янга — Бакстера. Подробно изложена также классическая схема редукции Ли — Картана.

Главы III и IV посвящены квазиклассическому приближению. В них речь идет об асимптотиках по «длине волны де Бройля» $\hbar \to 0$ или, точнее, о свойствах некоммутативных алгебр в приближении, когда коммутаторы между их образующими считаются малыми. В отличие от теории возмущений (деформаций) квазиклассическое приближение позволяет сохранить в пределе $\hbar \to 0$ основные топологические характеристики спектра исходной алгебры. А иногда этот предельный переход выявляет неожиданные геометрические структуры. Мы демонстрируем это в главе IV для общих фазовых многообразий, где отсутствует глобальное разделение переменных на «координаты» и «импульсы». Например, взамен условий Бора — Зоммерфельда здесь возникают правила квантования двумерных незамкнутых пленок и появляется понятие целочисленного индекса таких пленок, обобщающее понятие индекса пути.

Кроме того, в главах III и IV специалисты найдут новые результаты, относящиеся, казалось бы, ко вполне устоявшимся объектам, например теоремы о геометрии фронтов осцилляций, о полуцелом индексе путей на лагранжевых подмногообразиях не в общем положении, о нелокальном коцикле группы пуассоновых преобразований, об отсутствии препятствий к деформационному квантованию ($*$-квантованию) симплектических многообразий и др.

Техника асимптотического квантования симплектических многообразий, которая развивается в § 1 — 3 гл. IV, позволяет обобщить и объединить известные конструкции геометрического и деформационного квантования. Она не использует результатов глав I и II. В то же время асимптотическое квантование вырожденных скобок Пуассона (§ 4 гл. IV) существенно опирается на геометрические исследования глав I и II.

Все результаты чисто квантового уровня, т. е. не связанные напрямую с геометрией и квазиклассикой, собраны в приложении 2. Здесь изложен ряд технических приемов точного вычисления регулярного представления и коспектра (аналога группы) для различных классов алгебр с нелиевскими перестановочными соотношениями. Основное внимание уделено квадратичным и квадратично-линейным соотношениям.

Конечно, тематика, которой посвящена эта книга, сейчас быстро развивается и далека от завершения. Мы находимся здесь еще в самом начале пути. Авторы ставили целью лишь последовательно изложить некоторые из своих результатов, полученные за последние примерно пятнадцать лет. Весь материал публикуется в монографической литературе впервые, за исключением пп. 1.1, 1.2, 2.1 гл. I, пп. 1.1, 2.3—2.5 гл. III и пп. 1.1—1.3, 2.1, 2.5 приложений.

Изложение сориентировано в том числе и на студентов. Все утверждения подробно доказываются. Специально помещено приложение 1, которое служит своего рода справочником по формулам некоммутативного анализа. Вычисления, проводимые в ряде параграфов книги, можно рассматривать как тренировочные упражнения на применение этих формул. Кроме того, гл. III является, по существу, элементарным введением в теорию квазиклассического приближения. Здесь, например, в качестве иллюстрации дается математическое обоснование процесса плоской голографии.

Мы благодарны Д. В. Аносову, В. И. Арнольду, В. С. Буслаеву, А. М. Вершику, А. М. Виноградову, В. С. Владимирову, П. И. Голоду, Д. И. Гуревичу, Б. А. Дубровину, А. А. Кириллову, В. В. Козлову, Г. Л. Литвинову, М. А. Семенову-Тян-Шанскому, В. В. Трофимову, В. Г. Тураеву, Л. Д. Фаддееву, А. Т. Фоменко, И. В. Череднику, с которыми в разное время обсуждались темы этой книги.

Мы признательны также профессорам Мишель Аудин, Алану Вейнстейну, Пьеру Дазору, Андре Лихнеровичу и Янушу Чижу за полезные контакты, замечания и комментарии.

Нам были очень важны дискуссии с В. В. Беловым, Ю. М. Воробьевым, В. Г. Даниловым, С. Ю. Доброхотовым и А. М. Чеботаревым. Авторам приятно поблагодарить их, а также всех коллег по кафедре прикладной математики Московского института электронного машиностроения, оказавшим большую помощь при подготовке книги.

ВВЕДЕНИЕ

Теорию скобок Пуассона нужно отнести, по-видимому, к области дифференциальной геометрии или теории дифференциальных уравнений первого порядка. Механики XIX в. многие десятилетия эксплуатировали этот объект, но, конечно, называли скобкой Пуассона лишь стандартную, каноническую скобку в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$ [230] либо общую невырожденную скобку, которая, как показал Дарбу, заменой переменных сводится к канонической.

На этом фоне почти необъяснимым был рывок Софуса Ли [209], осознавшего, что как раз *вырожденные* скобки заключают в себе богатейшие геометрические и алгебраические структуры, тесно связанные с зарождавшимися уже тогда элементами некоммутативного анализа.

Любопытно, что Ли в первых своих трудах (см. об этом исторический очерк Бурбаки [17]) изучал общие нелинейные вырожденные скобки — «функциональные группы», как он их называл, — и лишь позже рассмотрел простейший частный случай: линейные скобки *), открыв, таким образом, свою знаменитую теорию алгебр Ли и затем — непрерывных групп. Он двигался совсем не так, как, скажем, Ф. Клейн. Не понятие группы было для него первично, а именно скобка Пуассона.

Но затем эта мысль была прочно забыта и, по-видимому, только Э. Картан [75, 162] сразу по следам Ли еще стремился развивать пуассонову геометрию. В XX в. победила концепция группы; она доминировала в анализе и геометрии до самого последнего времени. Работы, затрагивающие скобки Пуассона, неизменно сворачивали в сторону интерпретаций пуассоновых алгебр как бесконечномерных алгебр Ли, а соответствующими групповыми объектами были бесконечномерные псевдогруппы пуассоновых преобразований.

Так обстояли дела в математике. Физика же рождала новые модели; Поль Дирак [43] показал, что механика со связями — это теория с вырожденными нелинейными скобками Пуассона. Здесь была изобретена совершенно уникальная скобка; как Дирак

*) Скобка называется *линейной*, если существует система координат, в которой тензор, задающий скобку, линейно зависит от координат.

до нее додумался, мы не знаем и свойства ее до сих пор до конца не оценили. Но Дирак задал сразу же и другую задачу: проквантовать общую нелинейную скобку — вырожденную или невырожденную [44].

Квантовая механика к тому времени усилиями Гейзенберга, Вейля, самого Дирака и многих других была вполне алгебраизована. Все понимали, что квантованность — в определенном смысле синоним некоммутативности, и что следует изучать разнообразные некоммутативные алгебры Ли для того, чтобы получить богатство квантовых моделей. Дирак впервые указал на необходимость исследования не одних только алгебр Ли.

Несколько раньше Фейнман [136, 137] своим операторным исчислением и эвристической концепцией континуального интеграла, основанной, по существу, на классических геометрических идеях Гамильтона и Якоби, придал иное направление задаче квантования. ДеВитт [169], Фаддеев и Попов [116, 130], сумели реализовать этот подход для общих систем со связями и скобок Дирака (что в дальнейшем повлекло за собой BRST-симметрии, ghosts или «ду́хи» Фаддеева — Попова, интерпретацию аномалий).

Первыми, кто в теории представлений групп вернулись к понятию скобки Пуассона, были, по-видимому, Кириллов в своем методе орбит [78, 79] и Березин в теории квантования симметрических пространств [10, 11]. Затем на этой базе последовали теории геометрического квантования Костанта [200, 201] и Сурьо [242—244], а также деформационного квантования Вея [250] и Лихнеровича с соавторами [155, 208].

Все перечисленные результаты относились к т о ч н о м у квантованию скобок Пуассона — именно здесь заключалась нетривиальность этих конструкций: они действовали пусть для узкого класса скобок или узкого класса квантуемых символов (например, для линейных или квадратичных гамильтонианов), пусть иногда нестрогими эвристическими методами, но зато давали квантовую алгебру точно, без приближения по каким-либо параметрам.

В то же время с самых истоков квантовой механики и даже много раньше — еще в оптике и электродинамике — параллельно поиску точных решений квантовых (волновых) уравнений развивалась концепция квазиклассических или коротковолновых асимптотик. Шаг, связывающий эти асимптотики с геометрией скобок Пуассона, был сделан одним из авторов этой книги в [97]. Причем связь устанавливалась не на элементарном уровне:

квантовое уравнение Гейзенберга $\to$ классическое уравнение Лиувилля,

а на существенно более глубоком уровне л а г р а н ж е в ы х п о д м н о г о о б р а з и й фазового пространства. Благодаря этому была получена, например, топологическая интерпретация правила квантования Бора с вакуумной поправкой.

Введенные в [97] лагранжевы подмногообразия и индексы путей на них были затем успешно использованы как один из исходных объектов и в методе орбит (в геометрическом квантовании [77]), и в развитии классической теории представления Вейля симплектической группы [18, 19, 90, 91, 167, 187, 194, 205, 210, 213, 214].

В то же время опыт построения квазиклассических асимптотик показал, что эти подмногообразия могут применяться для квантования существенно более общих объектов, чем линейные скобки Пуассона и линейные или квадратичные гамильтонианы. Например, может быть асимптотически проквантована бесконечная группа всех пуассоновых (т. е. сохраняющих скобки) преобразований данного фазового пространства. Такое обобщение представления Вейля в итоге и позволило решить *проблему квантования произвольных невырожденных скобок Пуассона в квазиклассическом приближении*, т. е. с точностью $O(\hbar^\infty)$ по «постоянной Планка» $\hbar \to 0$ [69—72].

Было построено полное исчисление $\hbar$-псевдодифференциальных операторов в произвольном замкнутом симплектическом многообразии, где, вообще говоря, нет глобального разделения переменных на «координаты» и «импульсы». Это исчисление, в частности, дало решение задачи деформационного квантования на таких многообразиях. А на многообразиях с поляризацией (с лагранжевым слоением) и в специальном классе линейных по импульсам гамильтонианов оно совпало с конструкцией метода орбит.

В работах [69—72] было получено правило квантования двумерных циклов фазового пространства — то же самое, что и в методе Кириллова — Костанта — Сурьо. На этой основе затем возникло правило квантования двумерных пленок (не циклов) и новое понятие целочисленного индекса пленки [60, 62, 197], непосредственно обобщающее индекс пути [97]. Эти примеры в какой-то степени характерны: асимптотический подход к квантованию здесь оказался источником новых геометрических конструкций, порой неожиданных для самих геометров.

Такой подход позволил решить в квазиклассическом приближении и более общую задачу о квантовании вырожденной нелинейной скобки Пуассона.

Здесь центральной проблемой было отсутствие какого-либо аналога конечномерной группы Ли для нелинейных скобок. Развитое в [96] операторное исчисление дало в квантовом случае подход к этой проблеме и ряд примеров, связанных с квадратичными коммутационными соотношениями [100]. Этими методами было построено регулярное представление для класса сильно-нелинейных соотношений [56, 101], а также для квадратичных соотношений, сводящихся к линейным с помощью вспомогательной ghost-группы [68] *).

*) Подход работы [68, § 1.6], близкий к идеям супергрупп Ли [12], развивался затем в [37, 107]; см. также [236, 248].

В глубоком и богатом приложениями цикле работ по квантовому методу обратной задачи возникли квадратичные «R-матричные» соотношения [85, 123, 125, 131, 267], стимулировав изучение проблемы с точки зрения деформационного квантования [47]. Одновременное движение происходило со стороны теории алгебр Хопфа (кольцевых групп), начиная с работ [76, 247], что привело к понятию псевдопространств и псевдогрупп [263—265], а также квантовых групп [49, 175, 196].

С другой стороны, естественно было рассчитывать, что квазиклассическое приближение как эффективный путь от квантовых алгебр к «предельным» геометрическим объектам может кратчайшим путем привести к правильному аналогу группы Ли для общих нелинейных скобок Пуассона. С такой точки зрения и по аналогии с конструкцией кокасательного расслоения над группой Ли в [68, 69] было определено фазовое пространство для общих скобок. Этот объект локально для скобок постоянного ранга строил уже Ли, применив соображения, сходные с теоремой Дарбу. Теперь выяснилось, что существует явная и очень простая конструкция [59] фазового пространства, глобальная по базе — пуассонову многообразию (см. такую же локальную конструкцию в [256]).

Наконец, в [63] и затем в [257] на фазовом пространстве была обнаружена естественная структура гладкого группоида. Этот факт дал возможность получить для нелинейных скобок аналоги классических теорем Ли, а также интерпретировать редукцию гамильтоновых систем с нелинейными скобками между интегралами в духе обычной редукции по действию группы [63, 165, 220, 257, 259].

Однако пуассоновы действия симплектических группоидов в отличие от действий групп исключают возникновение «коциклов» (которые несут на себе важную геометрическую и физическую нагрузку [132, 133]). Причина — в массивности группоида; его размерность в два раза выше, чем у исходного многообразия со скобкой Пуассона; действует он как целое, не оставляя степеней свободы для скобки *). Это обстоятельство и ряд соображений, связанных с процедурой квантования, заставляют рассматривать симплектические группоиды, которые порождены псевдогруппами половинной размерности [63, 67].

Такая псевдогруппа однозначно соответствует паре: пуассоново многообразие и линейная плоская связность на нем. Умножение в псевдогруппе зависит от точки на исходном пуассоновом многообразии как от параметра. Эта зависимость вносит аномалии в закон ассоциативности **) (в тождество Якоби для структурных функций) и в сопряженную почти-скобку Пуассона на псевдогруппе. Происходит очень интересное взаимодействие между

*) На базе отображения момента.

**) Подобная неассоциативная структура уже давно была известна в алгебре и дифференциальной геометрии [7, 8, 95, 103, 109, 118, 152, 199, 223], но до сих пор вне всякой связи с теорией скобок Пуассона.

исходной скобкой, ее «коциклами», кручением связности, структурными функциями псевдогруппы, сопряженной почти-скобкой и почти-пуассоновыми действиями псевдогруппы на симплектических многообразиях [67].

Случай нулевого кручения, к которому картина локально всегда сводится, соответствует привычным гамильтоновым действиям, сохраняющим симплектическую структуру. В этот случай вкладывается обычная схема редукции Ли — Картана для гамильтоновых систем с группами симметрий.

Случай постоянного ненулевого кручения и постоянных структурных функций соответствует теории R-матрицы, биалгебрам Ли, пуассоновым группам, пуассоновым, но негамильтоновым действиям и т. п. [46, 119—121, 211, 258].

Скобки, с которыми согласованы непостоянные структурные функции и тем самым существенно неассоциативные псевдогруппы, особенно интересны и пока мало изучены. Целые серии таких структур возникают, например, в конструкциях типа дираковской скобки на группах Ли (см. [66]) и связаны с уравнениями Янга — Бакстера, биалгебрами Ли и их коциклами.

Вообще примеры, где естественно появляются нелинейные скобки Пуассона, поначалу считались некоторой экзотикой: настолько сильно было пристрастие к группам и к соответствующим им линейным скобкам. Но под влиянием теории скобок Дирака, а также многочисленных примеров скобок на приведенных многообразиях в системах, допускающих редукцию по группе симметрий, и под влиянием примеров квантового метода обратной задачи мы приходим к выводу, что нелинейные вырожденные скобки Пуассона и вообще пуассоновы многообразия чрезвычайно содержательны и с геометрической, и с алгебраической точки зрения, а также с точки зрения приложений в теории дифференциальных уравнений и квантовой физики.

Одним из потребителей является классический и квантовый метод усреднения в той его части, которая связана с устранением деформаций (возмущений, аномалий) скобки Пуассона. С такими деформациями традиционно связывали бесконечномерные комплексы и когомологии типа Шевалье и Хохшильда [135, 207, 250]. Но может быть предложен и другой подход, позволяющий эффективно решить задачу в терминах обычных дерамовских когомологий симплектических листов скобки Пуассона [25—27]. При этом обнаруживается нетривиальное геометрическое устройство общих нелинейных скобок Пуассона по сравнению с линейными.

Решение задачи деформации в таких терминах позволяет явно описать и конструкцию квантовых поправок к нелинейной скобке Пуассона. Необходимость учета таких поправок очевидна, например, из сравнения классического тождества Якоби для скобки и квантового тождества для коммутатора. Только в случае линейных скобок они совпадают. Уже в случае квадратичных скобок появляются так называемые обобщенные условия Якоби [101] и квантовое уравнение Янга—Бакстера [175, 203]. После того как скобка подготовлена к квантованию, т. е. правильным образом деформирована, может быть построена и соответствующая групповая (сверточная) алгебра с любой точностью по параметру $\hbar \to 0$, т. е. в квазиклассическом приближении *). Получающаяся свертка задана на псевдогруппе и характеризуется тем свойством, что ее генераторы являются $\hbar$-псевдодифференциальными операторами, а старшие символы этих операторов совпадают с компонентами отображений сокращения в группоиде, порожденном псевдогруппой [61, 62, 68, 69].

Таким образом, обнаруживается связь сверточных алгебр или операторов обобщенного сдвига [9, 89, 92, 93, 234] с теорией псевдодифференциальных операторов, с проблематикой квантования и пуассоновой геометрией. Вместе с конструкциями метода R-матрицы, квантовых групп и псевдогрупп, а также с общей программой некоммутативной дифференциальной геометрии [164] это позволяет рассчитывать в ближайшем будущем на дальнейшие продвижения в той задаче, которой посвящается эта книга, т. е. задаче построения аналогов «групповых» объектов для общих нелинейных скобок Пуассона.

---

*) Операторы, задающие свертку, осциллируют и не имеют регулярных разложений по степеням $\hbar$. Не следует путать такое квазиклассическое приближение с теорией деформаций по $\hbar$.

ГЛАВА I

ПУАССОНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

С классической гамильтоновой механикой, т. е. с динамическими системами вида

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,\ p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,\ p), \quad (q,\ p) \in \mathbf{R}^{2n},$$

связаны обычные, стандартные скобки Пуассона

$$\{f,\ g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}.$$

С системами типа Эйлера для вращения твердого тела [2]

$$\dot{\xi} = \left[\xi \times \frac{\partial H}{\partial \xi}\right], \quad \xi \in \mathbf{R}^3,$$

связаны скобки Ли — Пуассона

$$\{f,\ g\} = \left\langle \xi,\ \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \times \frac{\partial g}{\partial \xi}\right]\right\rangle.$$

И те и другие скобки — основа любой схемы интегрирования указанных динамических систем. Оба класса скобок тесно взаимодействуют между собой. И те и другие являются частными случаями общих скобок Пуассона на многообразиях. Цель данной главы — дать систематическое изложение теории таких общих скобок. Эта пуассонова геометрия оказывается более богатой, чем симплектическая геометрия, и в конечном счете именно на нее опираются все схемы интегрирования и квантования гамильтоновых систем.

§ 1. Скобки Пуассона, связанные с группами Ли

Начнем с простейших свойств скобок Пуассона и с простейших типов таких скобок. Помимо классической теоремы Дарбу и возникающих попутно результатов о локальной структуре скобки мы сосредоточим внимание в этом параграфе на примерах скобок, так или иначе ассоциированных с группами Ли. Конструкция этих примеров была найдена совсем недавно в связи с развитием квантового метода обратной задачи. Здесь мы вводим их не так, как они возникли исторически [46, 121, 123], а с помощью общего понятия согласованной скобки Пуассона. Это понятие ниже (в § 3 гл. II) окажется исходным при построении наших основных геометрических объектов: конечномерной псевдогруппы и симплектического группоида.

Среди тем данного параграфа центральными для дальнейшего являются:

— алгебра Ли (1.4) дифференциальных 1-форм на пуассоновом многообразии;

— согласованные скобки на группах Ли (§ 1.3) и коциклы биалгебр Ли (1.43);

— варианты классического уравнения Янга—Бакстера над алгеброй Ли (1.51), (1.54); квадратичные скобки Пуассона (пример 1.3).

1.1. Симплектические листы и теорема Дарбу. Договоримся об обозначениях. Пусть $\mathcal{N}$ — гладкое вещественное многообразие, $M^k = M^k(\mathcal{N})$ — пространство всех контравариантных антисимметричных тензоров степени k на $\mathcal{N}$, в частности M^1 — пространство всех векторных полей, M^2 — пространство бивекторных полей. Обозначим также через $\mathcal{F}^k(\mathcal{N})$ пространство всех дифференциальных k-форм на $\mathcal{N}$, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}^0(\mathcal{N})$ — пространство всех гладких вещественных функций на $\mathcal{N}$.

Если на $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ задана билинейная антисимметричная операция $\{\ldots, \ldots\}$, которая является дифференцированием по отношению к умножению функций

$$\{fg,\ k\} = f\{g,\ k\} + g\{f,\ k\}$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{\{f,\ g\},\ k\} + \{\{g,\ k\},\ f\} + \{\{k,\ f\},\ g\} = 0,$$

то многообразие $\mathcal{N}$ называется *пуассоновым*, а пространство $\mathcal{F}$ — *пуассоновой алгеброй*. Операция $\{\ ,\ \}$ — *скобка Пуассона* — задается тогда некоторым бивекторным полем: $\{f,\ g\} = \Psi(df,\ dg)$, где $\Psi \in M^2$. Если рассматривать бивекторное поле Ψ как отображение расслоений $\Psi\colon T^*\mathcal{N} \to T\mathcal{N}$ (линейное на слоях), то скобку Пуассона можно записать еще так: $\{f,\ g\} = \langle df,\ \Psi dg\rangle$, где угловые скобки обозначают спаривание формы и векторного поля. В локальных координатах $\xi^1, \ldots, \xi^n$ на $\mathcal{N}$ имеем

$$\{f,\ g\} = \Psi^{jk}\partial_j f\, \partial_k g, \tag{1.1}$$

где $\partial_j = \partial/\partial\xi^j$; по повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование. Тождество Якоби, записанное через компоненты тензора Ψ^{jk}, выглядит так:

$$\underset{(j,\,l,\,m)}{\mathfrak{S}}\ \Psi^{jk}\partial_k\Psi^{lm} = 0, \tag{1.2}$$

где буква $\mathfrak{S}$ обозначает суммирование по циклическим перестановкам.

Ранг $r = \operatorname{rank}\Psi(\xi)$, вообще говоря, меньше размерности многообразия $\dim\mathcal{N}$ и может меняться от точки к точке. Если $r = \text{const}$, то будем говорить, что скобка Пуассона на $\mathcal{N}$ имеет *постоянный ранг*. Если $r = \dim\mathcal{N}$, то скобка называется *невырожденной*; в этом случае размерность $\mathcal{N}$ обязательно четная, $\mathcal{N}$ называется *симплектическим многообразием*, а замкнутая невырожденная 2-форма

$$\omega = \frac{1}{2}\Psi(\xi)^{-1}\, d\xi \wedge d\xi \tag{1.3}$$

называется *симплектической формой.*

Подчеркнем, что симплектическая форма замкнута, но не обязательно точна. В частности, на компактном многообразии размерности $2n > 0$ симплектическая форма заведомо не точна, так как иначе была бы точной форма объема $\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n}$ и, следовательно, объем был бы нулевым. Поэтому на компактном симплектическом многообразии обязаны существовать нестягиваемые 2-циклы. Например, на сфере S^4 симплектическая структура заведомо не существует. Детальные исследования геометрии симплектических многообразий можно найти, в частности, в работах [1, 4, 13, 32, 34, 128, 139—141, 161, 164, 174, 255].

Вернемся теперь к общим пуассоновым многообразиям. Мы введем структуру алгебры Ли в пространство 1-форм $\mathscr{F}^1(\mathscr{N})$. Эта структура играет в дальнейшем очень важную роль: ее определение было дано в [40, 45] (см. также [63, 202, 259]). В § 2.5 ниже появится ее обобщение на произвольные k-формы.

Лемма 1.1. (а) *Пространство векторных полей $M^1(\mathscr{N})$ — алгебра Ли относительно коммутатора. Пространство 1-форм $\mathscr{F}^1(\mathscr{N})$ — алгебра Ли относительно операции*

$$\begin{gathered}[\mu,\ \nu] = d\Psi(\mu,\ \nu) + \Psi(d\mu,\ \nu) + \Psi(\mu,\ d\nu),\\ [\mu,\ \nu]_i = \partial_i(\Psi^{jk}\mu_j\nu_k) + \Psi^{jk}(\partial_j\mu_i - \partial_i\mu_j)\,\nu_k + \Psi^{jk}\mu_j(\partial_k\nu_i - \partial_i\nu_k).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Соответствие

$$\mu \to \Psi^\star(\mu) \overset{\text{def}}{=} -\Psi\mu, \quad \Psi^\star\colon \mathscr{F}^1(\mathscr{N}) \to M^1(\mathscr{N}),$$

является гомоморфизмом.

(b) *Пусть* $\pi(\xi) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ran}\Psi(\xi) \equiv \operatorname{Ker}\Psi(\xi)^\perp$; *тогда распределение плоскостей $\{\pi(\xi)\} \subset T\mathscr{N}$ интегрируемо и на соответствующих интегральных слоях корректно определена замкнутая невырожденная 2-форма* (1.3).

Доказательство. Соотношение $[\Psi^\star(\mu),\ \Psi^\star(\nu)] = \Psi^\star([\mu,\ \nu])$ — это следствие тождества Якоби (1.2). Поскольку поля $\Psi^\star(\mu)$ принимают значения в плоскостях $\pi(\xi)$, то из гомоморфности $\Psi^\star$ следует интегрируемость $\{\pi(\xi)\}$ (критерий Фробениуса [50]). Корректность определения и невырожденность формы (1.3) на интегральных слоях очевидны. На векторные поля вида $\Psi^\star(\mu)$ эта форма действует так:

$$\omega(\Psi^\star(\mu_1),\ \Psi^\star(\mu_2)) = \Psi(\mu_1,\ \mu_2).$$

Поэтому по формуле Картана (см., например, [81]) имеем

$$d\omega(\Psi^\star(\mu_1),\ \Psi^\star(\mu_2),\ \Psi^\star(\mu_3)) = \\ = \underset{(1,\,2,\,3)}{\mathfrak{S}} (\Psi^\star(\mu_1)(\omega(\Psi^\star(\mu_2),\ \Psi^\star(\mu_3))) + \\ + \omega([\Psi^\star(\mu_1),\ \Psi^\star(\mu_2)],\ \Psi^\star(\mu_3))) = \\ = \underset{(1,\,2,\,3)}{\mathfrak{S}} (\langle[\mu_2,\ \mu_3],\ \Psi^\star(\mu_1)\rangle + \omega(\Psi^\star([\mu_1,\ \mu_2]),\ \Psi^\star(\mu_3))) = \\ = \underset{(1,\,2,\,3)}{\mathfrak{S}} (-\langle[\mu_2,\ \mu_3],\ \Psi(\mu_1)\rangle + \Psi([\mu_1,\ \mu_2],\ \mu_3)) = 0$$

для любых $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \in \mathcal{F}^1(\mathcal{N})$. Следовательно, форма ω замкнута. Лемма доказана.

Слои распределения $\{\pi(\xi)\}$ называются *симплектическими листами* в $\mathcal{N}$ [4, 80, 207].

Отображение пуассоновых многообразий называется *пуассоновым*, если оно сохраняет скобки. Векторное поле называется *пуассоновым*, если его поток (локально) пуассонов.

Следствие 1.1. *Поле $\Psi^\star(\mu)$ пуассоново тогда и только тогда, когда сужение формы μ на каждый симплектический лист замкнуто.*

Если форма μ замкнута на $\mathcal{N}$, то поле $\Psi^\star(\mu)$ назовем *гамильтоновым*, а если $\mu = df$ точна, то поле $ad(f) \overset{\text{def}}{=} \Psi^\star(df) = -\Psi dg$ назовем *строго* гамильтоновым (но слово «строго» всегда опускается, если это не приводит к путанице). Все эти поля, конечно, пуассоновы. Очевидно, что $\mathrm{ad}(f)\,g = \{f,\ g\}$, и отображение $f \to \mathrm{ad}(f)$ — гомоморфизм из $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ в $M^1(\mathcal{N})$.

Итак, гамильтоновы поля касаются симплектических листов. И на листах транзитивно действует группа $\mathcal{G}(\mathcal{N})$, порожденная потоками γ_f^t этих гамильтоновых полей (здесь $(\gamma_f^t)^* = \exp(t\,\mathrm{ad}(f))$ — сдвиг по траекториям поля $\mathrm{ad}(f)$ за время t). Таким образом, листы являются $\mathcal{G}(\mathcal{N})$-орбитами.

Функции из $\mathcal{F}(\mathcal{N})$, аннулируемые всеми гамильтоновыми полями, называются *функциями Казимира* на $\mathcal{N}$. Они постоянны на листах.

Может случиться так, что единственными функциями Казимира на $\mathcal{N}$ будут константы. Так будет, если какой-нибудь симплектический лист погружен в $\mathcal{N}$ всюду плотно. Пример дают «дикие» алгебры Ли [78].

Но даже локально пуассоновы многообразия могут быть устроены не просто. Правда, в окрестности *регулярных* точек на $\mathcal{N}$, где $\operatorname{rank}\Psi$ максимален, структура $\mathcal{N}$ тривиальна и дается обобщенной теоремой Дарбу, доказанной еще в [209] *). Это доказательство, которое мы приводим ниже, дает некоторую информацию о пуассоновой структуре и в окрестности нерегулярных точек.

---

*) Изложение этого и других результатов Ли содержится, например, в книге [148]; см. также подробности и ссылки в [141].

Лемма 1.2. *В окрестности любой точки* ξ^0 *на пуассоновом многообразии существуют координаты* $q^1, \ldots, q^k$; $p^1, \ldots, p^k$; $z^1, \ldots, z^r$ *такие, что*

$$\begin{aligned} &\{p^i, q^j\} = \delta^{ij}, \quad \{q^i, q^j\} = \{p^i, p^j\} = 0, \\ &\{z^s, z^l\} = \Phi^{sl}(z), \quad \{p^i, z^s\} = \{q^i, z^s\} = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

причем $\Phi|_{\xi^0} = 0$ *и* $2k = \operatorname{rank} \Psi(\xi^0)$. *Если точка* ξ^0 *регулярная, то* $\Phi \equiv 0$.

Доказательство. Если $k = 0$, то координаты q^i, p^j отсутствуют, а z^s можно взять произвольно. Если $k \geqslant 1$, то в окрестности ξ^0 существует функция p^1, для которой гамильтоново поле $\operatorname{ad}(p^1)$ не обращается в нуль. Время на траекториях этого поля обозначим через q^1. Тогда $1 = \operatorname{ad}(p^1)\, q^1 = \{p^1, q^1\}$. Далее, пусть уже выбраны независимые функции $q^1, \ldots, q^m$; $p^1, \ldots, p^m$ так, что $\{q^i, q^j\} = \{p^i, p^j\} = 0$, $\{p^i, q^j\} = \delta^{ij}$. Тогда поля $\operatorname{ad}(q^i)$, $\operatorname{ad}(p^j)$ независимы и коммутируют. Множество функций R_m, аннулируемых этими полями, очевидно, замкнуто относительно скобки Пуассона. Независимые функции из R_m задают координаты на $\mathcal{N}$, дополнительные к $q^1, \ldots, q^m$; $p^1, \ldots, p^m$. Если $\{f, g\}(\xi^0) = 0$ для любых $f, g \in R_m$, то построение закончено: $k = m$ и координаты $z^1, \ldots, z^r \in R_m$ выбираем произвольно. В противном случае найдется функция $p^{m+1} \in R_m$ такая, что $\operatorname{ad}(p^{m+1}) \neq 0$ в окрестности ξ^0. Выберем в качестве q^{m+1} время на траекториях поля $\operatorname{ad}(p^{m+1})$. Получаем новый набор функций $q^1, \ldots, q^m$; $p^1, \ldots, p^m$; q^{m+1}, p^{m+1}. Для него повторяем всю схему, и т. д. до тех пор, пока на каком-то шаге будет $\{f, g\}(\xi^0) = 0$ для любых $f, g \in R_k$. Лемма доказана.

Предположим, что симплектический лист Ω, на котором лежит точка ξ^0, задан уравнениями $z^1 = \ldots = z^r = 0$. Тогда вблизи ξ^0 имеем

$$\Phi^{sl}(z) = z^t \lambda_t^{sl} + z^t z^q \mu_{tq}^{sl} + \ldots \tag{1.6}$$

Линейная часть этого ростка задает структуру алгебры Ли на ортогональном дополнении к Ω, т. е. на пространстве

$$\mathfrak{g}_{\xi^0} \equiv \operatorname{Ker} \Psi(\xi^0) = \{x \in T^*_{\xi^0}\mathcal{N} \colon \Psi(\xi^0)\, x = 0\}.$$

Коммутатор в этой алгебре Ли определяется так: если $x = x_s\, dz^s$, $y = y_s\, dz^s$, то

$$[x, y]_{\mathfrak{g}_{\xi^0}} = (\lambda_t^{sl} x_s y_l)\, dz^t. \tag{1.7}$$

Лемма 1.3. *Операция* (1.7) *задает структуру алгебры Ли на* $\mathfrak{g}_{\xi^0}$, *не зависящую от выбора локальных координат. При переходе от точки* $\xi^0 \in \Omega$ *к другой точке из того же симплектического листа* Ω *алгебра Ли* $\mathfrak{g}_{\xi^0}$ *заменяется на изоморфную. Если* Ω — *лист общего положения* (*т. е.* ξ^0 — *регулярная точка*), *то алгебра* $\mathfrak{g}_{\xi^0}$ *абелева.*

Доказательство. Коммутатор (1.7) можно задать инвариантной формулой

$$[x, y]_{\mathfrak{g}_{\xi^0}} = d(\Psi(X, Y))|_{\xi = \xi^0},$$

где X, $Y \in \mathcal{F}^1(\mathcal{N})$ любые формы на $\mathcal{N}$, принимающие в точке ξ^0 значения x и y. Пусть ξ' другая точка на Ω. Тогда $\gamma(\xi')=\xi^0$ для некоторого $\gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{N})$. Если формы X', Y' принимают в точке ξ' значения x' и y', то

$$[x', y']_{\mathfrak{g}_{\xi'}} = d_{\xi'}\Psi(X', Y') = d_{\xi'}\Psi(AX, AY) = d_{\xi'}A^*\Psi A(X, Y).$$

Здесь $A = d\gamma(\xi')^*$ и X, Y — образы форм X', Y' при сдвиге γ. Поскольку сдвиг — пуассоново отображение, то $A^*\Psi(\xi')A = \Psi(\gamma(\xi')) \equiv \Psi(\xi^0)$. Поэтому

$$[x', y']_{\mathfrak{g}_{\xi'}} = A(d_{\xi_0}\Psi(X, Y)) = A[x, y]_{\mathfrak{g}_{\xi_0}},$$

где $x = X_{\xi^0} = A^{-1}X'_{\xi'} = A^{-1}x'$ и аналогично $y = A^{-1}y'$. Мы видим, что $A\colon \mathfrak{g}_{\xi^0} \to \mathfrak{g}_{\xi'}$ изоморфизм алгебр Ли. Лемма доказана.

Итак, с каждым листом $\Omega \subset \mathcal{N}$ в пуассоновом многообразии связаны некоторая *алгебра Ли* $\mathfrak{g}_\Omega$ и соответствующая ей *группа Ли* G_Ω.

Если ξ^0 не регулярная точка, то линейный росток скобки Пуассона, конечно, не определяет всей скобки. В (1.6) могут доминировать как раз квадратичные и последующие члены. Только в некоторых частных случаях удается сделать еще одну замену переменных по z, убрав в (1.6) нелинейные добавки *). Иногда эти добавки оказываются малыми из-за растяжения $z = \varepsilon \cdot z'$, $\varepsilon \to 0$ (например, в методе усреднения, при асимптотическом квантовании). В этом случае основную роль действительно играет линейный росток, т. е. нормальное расслоение над Ω и связность в нем [27]. Инфинитезимальная структура пуассоновых многообразий на листах общего положения подробно рассматривается ниже в § 3.

Пример 1.1. Рассмотрим скобку Пуассона на $\mathbf{R}^3$, упомянутую во введении к этой главе:

$$\{f, g\} = \left\langle \xi, \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \times \frac{\partial g}{d\xi}\right]\right\rangle, \quad \xi \in \mathbf{R}^3.$$

Здесь знаком $[\ldots \times \ldots]$ обозначено векторное произведение в $\mathbf{R}^3$. Тензор Ψ (1.1), задающий такую скобку, имеет вид $\Psi(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{bmatrix}$. Очевидно, что $\operatorname{Ker}\Psi(\xi) = \{\lambda\xi \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ и $\pi(\xi)$ — плоскость, ортогональная вектору ξ (см. лемму 1.1). Интегральные слои распределения плоскостей $\{\pi(\xi)\}$ здесь — сферы с центром в точке $\xi = 0$. Симплектическая структура (1.3) на каждой такой сфере $\Omega = \{|\xi| = r\}$ с точностью до множителя совпадает с 2-формой площади поверхности: $\omega_\Omega = r \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$, (θ, φ) — сферические углы в $\mathbf{R}^3$. Функция Казимира у данной скобки Пуассона всего одна: $K(\xi) = |\xi|^2$.

---

*) Обсуждение этого вопроса и примеры имеются в [2, прил. 9] и в [22, 82, 163, 256].

Особая точка $\xi=0$ — точка падения ранга Ψ. Эта точка является нульмерным симплектическим листом. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ этого листа, согласно (1.7), задается соотношениями

$$[X^{(1)}, X^{(2)}]=X^{(3)}, \quad [X^{(2)}, X^{(3)}]=X^{(1)}, \quad [X^{(3)}, X^{(1)}]=X^{(2)},$$

где $X^{(i)}=d\xi^i|_{\xi=0}$. Таким образом, $\mathfrak{g}_0 \approx \mathrm{su}(2)$.

Рассмотрим теперь более сложную *скобку Склянина* [123] на $\mathbf{R}^4$ заданную тензором

$$\begin{aligned} &\Psi^{10}=2(c_2-c_3)\xi^2\xi^3, \quad &&\Psi^{20}=2(c_3-c_1)\xi^3\xi^1, \quad &&\Psi^{30}=2(c_1-c_2)\xi^1\xi^2, \\ &\Psi^{12}=-2\xi^0\xi^3, &&\Psi^{23}=-2\xi^0\xi^1, &&\Psi^{31}=-2\xi^0\xi^2, \end{aligned}$$

где ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — координаты в $\mathbf{R}^4$, а числа c_1, c_2, c_3 связаны неравенствами $c_1>c_2>c_3>0$.

Одна функция Казимира у этой скобки такая же, как у рассмотренной выше скобки на $\mathbf{R}^3$:

$$K_0(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{3}(\xi^\alpha)^2.$$

Следовательно, эта скобка вырождена и, значит, должна существовать еще одна функция Казимира. Прямым подсчетом убедимся, что в качестве таковой можно взять

$$K_1(\xi)=(\xi^0)^2+\sum_{\alpha=1}^{3}c_\alpha(\xi^\alpha)^2.$$

Симплектические листы Ω в данном случае — это совместные поверхности уровня функций K_0 и K_1. В общем положении эти листы двумерны (так как $\operatorname{rank}\Psi=2$) и топологически устроены так:

— если $K_1>K_0c_1>0$ или $K_0c_2>K_1>K_0c_3>0$, то $\Omega\approx S^2$;
— если $K_0c_1>K_1>K_0c_2>0$, то $\Omega\approx T^2\equiv \mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$.

В тех точках, где какое-то из неравенств заменяется на равенство, листы вырождаются и становятся нульмерными. В частности, это происходит в точках перетяжки, где торы разделяются на две сферы, например при $K_1=K_0c_1>0$ и $\xi^0=\xi^2=\xi^3=0$. Здесь алгебра Ли $\mathfrak{g}_\Omega$ (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} &[X^{(1)}, X^{(2)}]=\pm 2(c_1-c_3)\sqrt{K_0}\,X^{(3)}, \\ &[X^{(3)}, X^{(1)}]=\pm 2(c_1-c_2)\sqrt{K_0}\,X^{(2)}, \\ &[X^{(2)}, X^{(3)}]=\mp 2\sqrt{K_0}\,X^{(0)}, \\ &[X^{(1)}, X^{(0)}]=[X^{(2)}, X^{(0)}]=[X^{(3)}, X^{(0)}]=0. \end{aligned}$$

1.2. Линейные скобки. Фазовое пространство над группой Ли. Если скобка Пуассона (1.1) задана на линейном многообразии $\mathcal{N}\approx\mathbf{R}^n$ и тензор $\Psi(\xi)$ — линейная функция точки ξ, т. е.

$$\Psi(\xi)^{jk}=\lambda_s^{jk}\xi^s, \quad \lambda_s^{jk}=\mathrm{const}, \tag{1.8}$$

то набор констант λ_s^{jk} антисимметричен по j, k и в силу (1.2) удовлетворяет тождествам

$$\lambda_i^{jk}\lambda_k^{lm}+\lambda_i^{lk}\lambda_k^{mj}+\lambda_i^{mk}\lambda_k^{jl}=0$$

(напомним, что по повторяющимся индексам — везде суммирование). Следовательно, операция

$$x,\ y\to[x,\ y],\quad [x,\ y]_i\overset{\text{def}}{=}\lambda_i^{jk}x_jy_k$$

задает на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}=\mathcal{N}^*$ структуру алгебры Ли:

$$[x,\ y]=-[y,\ x],\quad [[x,\ y],\ z]+[[y,\ z],\ x]+[[z,\ x],\ y]=0.$$

И наоборот, всякой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует линейная скобка (1.8) на $\mathcal{N}=\mathfrak{g}^*$. Пространство $\mathfrak{g}^*$ с такой скобкой называется *коалгеброй Ли*.

Случай линейных скобок замечателен тем, что бесконечномерный объект $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ (пуассонова алгебра) обладает здесь *конечномерной* подалгеброй Ли, состоящей из линейных функций:

$$\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*),\quad x\to f_x,\quad f_x(\xi)\overset{\text{def}}{=}\langle\xi,\ x\rangle,$$

и сдвиги γ_x за единичное время вдоль траекторий соответствующих гамильтоновых полей $\operatorname{ad}(f_x)$ образуют локальную *конечномерную группу*

$$\gamma_y\gamma_x=\gamma_{x*y}\quad\text{или}\quad e^{\operatorname{ad}(f_x)}e^{\operatorname{ad}(f_y)}=e^{\operatorname{ad}(f_{x*y})}. \tag{1.9}$$

Действительно, если через $\operatorname{ad}(x)$ обозначить оператор коммутирования $\operatorname{ad}(x)\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad}(x)\,y\overset{\text{def}}{=}[x,\ y]$, то $\gamma_x(\xi)=(e^{\operatorname{ad}(x)})^*\xi$. Поэтому в (1.9) умножение $*$ определяется формулой (1.12) приложения 1:

$$e^{\operatorname{ad}(x)}e^{\operatorname{ad}(y)}=e^{\operatorname{ad}(x*y)},$$

$$x*y=y+\int_0^1 d\tau\,\psi\left(e^{\tau\operatorname{ad}(x)}e^{\operatorname{ad}(y)}\right)x, \tag{1.10}$$

где $\psi(t)\equiv\ln t/(t-1)$ и предполагается, что x, y достаточно малы, например $|x|+|y|<\ln 2$.

Итак, на малой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ задана групповая операция $(x,\ y)\to x*y$ и имеется гомоморфизм $x\to\gamma_x$ этой локальной группы Ли в группу пуассоновых преобразований на $\mathfrak{g}^*$.

Более того, известная цепочка теорем Леви — Мальцева, Адо, Э. Картана [17, 115] утверждает существование глобальной группы Ли G, у которой касательное пространство в единице e отождествлено с $\mathfrak{g}\approx T_eG$, причем в окрестности нуля на $\mathfrak{g}$ задан диффеоморфизм $\exp\colon\ \mathfrak{g}\to G$, переводящий операцию (1.10) в умножение на G.

Пусть $\operatorname{Ad}(\alpha)$ — дифференциал в точке $\beta=e$ внутреннего автоморфизма группы $\beta\to\alpha\beta\alpha^{-1}$. Тогда

$$\operatorname{Ad}(\exp(x))=e^{\operatorname{ad}(x)}=e^{\operatorname{ad}(f_x)}\big|_{\mathfrak{g}},$$

и формулы (1.9) глобально означают, что Ad — это представление группы G линейными преобразованиями в $\mathfrak{g}$ или в $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, сохраняющими скобки (присоединенное представление). Аналогично Ad^{*-1} — это *коприсоединенное представление* группы G пуассоновыми преобразованиями в $\mathfrak{g}^*$.

Очевидно, что орбиты коприсоединенного действия совпадают с симплектическими листами $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, а симплектическая форма на них имеет вид [78]

$$\omega_\Omega(\mathrm{ad}(f_x),\ \mathrm{ad}(f_y)) = \{f_x,\ f_y\}_{\mathfrak{g}^*} = \langle \xi,\ [x,\ y]\rangle.$$

Далее, фазовое пространство T^*G с помощью левого сдвига отождествляется с $G \times \mathfrak{g}^*$:

$$(\alpha,\ p) \to (\alpha,\ dL(\alpha)^* p), \quad \alpha \in G, \quad p \in T^*_\alpha G.$$

Стандартная симплектическая форма $dp \wedge d\alpha = d(p\,d\alpha)$ на T^*G при таком отождествлении переходит в форму

$$\omega_{G\times\mathfrak{g}^*} = -d(\langle \xi, \theta\rangle) \equiv \theta' \wedge dM + \frac{1}{2}\Psi(M)\,\theta' \wedge \theta' \equiv$$

$$\equiv -\theta \wedge d\xi - \frac{1}{2}\Psi(M)\,\theta' \wedge \theta'. \qquad (1.11)$$

Здесь Ψ — скобочный тензор (1.8),

$$M(\alpha,\ \xi) = \mathrm{Ad}(\alpha)^{*-1}\xi, \quad (\alpha,\ \xi) \in G \times \mathfrak{g}^*,$$

а 1-формы

$$\theta = -dL(\alpha)^{-1}\,d\alpha, \quad \theta' = dR(\alpha)^{-1}\,d\alpha \qquad (1.12)$$

— это лево- и правоинвариантные формы на G со значениями в $\mathfrak{g}$.

Невырожденная скобка Пуассона на $G \times \mathfrak{g}^*$, соответствующая форме (1.11), имеет вид

$$\{\varphi,\ \chi\}_{G\times\mathfrak{g}^*} = -\{\varphi,\ \chi\}_{\mathfrak{g}^*} + \langle D_\alpha\varphi,\ d_\xi\chi\rangle - \langle D_\alpha\chi,\ d_\xi\varphi\rangle, \qquad (1.13)$$

где $\varphi = \varphi(\alpha,\ \xi)$, $\chi = \chi(\alpha,\ \xi)$ гладкие функции, d_ξ — дифференциал по $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $D_\alpha = dL(\alpha)^* d_\alpha$ — левый дифференциал по $\alpha \in G$.

Лемма 1.4. *Отображение M: $G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ пуассоново, т. е. сохраняет скобку. Отображение проектирования π: $G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ антипуассоново. Между собой M и π полярны (кососортогональны).*

Доказательство. Левоинвариантное векторное поле D на группе G принимает значения в коалгебре $\mathfrak{g}^*$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ поле $\langle x,\ D\rangle$ принимает скалярные значения и задает правый сдвиг:

$$e^{\langle x,\ D\rangle}\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha \cdot \exp(x)).$$

Поэтому

$$e^{\langle x, D\rangle}\,\mathrm{Ad}(\alpha) = \mathrm{Ad}(\alpha)\cdot e^{\mathrm{ad}(x)}.$$

Дифференцируя левую и правую части этого равенства по x_k в точке $x = 0$, получаем

$$D^k\,\mathrm{Ad}(\alpha) = \mathrm{Ad}(\alpha)\cdot \mathrm{ad}^{(k)}, \quad \mathrm{ad}^{(k)} = ((\lambda_j^{ki})). \qquad (1.14)$$

Следовательно,

$$(\Psi^{ks}(\xi)\,\partial_s + D^k_\alpha)\,(\mathrm{Ad}(\alpha)^{-1*}\xi) = 0,$$

где $\partial_s = \partial/\partial\xi^s$. И поскольку $\operatorname{ad}(\pi^* f) = -\langle df, \ \Psi\partial + D\rangle$, то $\{\pi^* f, \ M\}_{G\times\mathfrak{g}^*} = 0$ для любого $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, т. е. отображения π и M полярны (или слои $\pi^{-1}(\xi)$ и $M^{-1}(\zeta)$ косоортогональны в каждой их общей точке).

Из явного вида скобки (1.13) очевидно, что π антипуассоново. Далее,

$$\{M^i, \ M^s\}_{G\times\mathfrak{g}^*} = \partial_k M^s \{M^i, \ \xi^k\}_{G\times\mathfrak{g}^*} - D^k(M^s)\partial_k M^i.$$

Первое слагаемое справа равно нулю, как мы только что доказали. А второе слагаемое, используя (1.14) и пуассоновость отображений $\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1*}$, т. е. тождество

$$\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1*}\Psi(\xi)\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1} = \Psi(\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1*}\xi), \tag{1.15}$$

преобразуем так:

$$-D^k(M^s)\partial_k M^i = \Psi^{kl}(\xi)\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1}{}_l^s \operatorname{Ad}(\alpha)^{-1}{}_k^i = \Psi^{is}(\operatorname{Ad}(\alpha)^{-1*}\xi).$$

Следовательно,

$$\{M^i, \ M^s\}_{G\times\mathfrak{g}^*} = \Psi^{is}(M),$$

что и означает пуассоновость M. Лемма доказана.

Таким образом, *фазовое пространство $G\times\mathfrak{g}^*$ (или T^*G) снабжено двумя полярными пуассоновыми расслоениями*:

$$\begin{tikzcd} & G\times\mathfrak{g}^* \arrow[dl, "M"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathfrak{g}^* & & \mathfrak{g}^{*(-)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T^*G \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "r"] & \\ \mathfrak{g}^* & & \mathfrak{g}^{*(-)} \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

$$M(\alpha, \ \xi) \equiv \operatorname{Ad}(\alpha)^{-1*}\xi, \qquad \begin{aligned} l(\alpha, \ p) &\equiv dR(\alpha)^* p, \\ r(\alpha, \ p) &\equiv dL(\alpha)^* p. \end{aligned}$$

Здесь и всюду ниже минус в скобках в верхнем индексе $(\ldots^{(-)})$ обозначает смену знака у скобки Пуассона.

Подчеркнем, что все сказанное верно лишь для линейных скобок Пуассона, чем и объясняется особое внимание к этому частному случаю. Но, как мы увидим ниже, общие нелинейные скобки обладают замечательными аналогами всех введенных выше групповых объектов. Основную роль при этом будут играть различные обобщения диаграммы (1.16).

Закончим этот раздел сводкой нескольких полезных вычислительных формул из теории групп Ли.

Уравнения Маурера—Картана:

$$d\theta = \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta], \quad \text{или} \quad d\theta_i = \frac{1}{2}\lambda_i^{kj}\theta_k \wedge \theta_j, \tag{1.17}$$

$$d\theta' = \frac{1}{2}[\theta' \wedge \theta'].$$

Представления группы: если T — представление G с генераторами X^k, то $T(\exp(x)) = \exp(x \cdot X)$ и (аналогичо (1.14))

$$D^k T(\alpha) = T(\alpha) X^k, \quad D'^k T(\alpha) = X^k T(\alpha), \tag{1.18}$$

где

$$D = dL(\alpha)^* \partial/\partial\alpha, \quad D' = dR(\alpha)^* \partial/\partial\alpha$$

— левые и правые векторные поля на G со значениями в $\mathfrak{g}^*$.

Инвариантность:

$$\begin{gathered} D'_\alpha \varphi(\alpha^{-1}) = -(D\varphi)(\alpha^{-1}), \\ D'_\alpha \varphi(\beta\alpha) = D_\beta \varphi(\beta\alpha), \quad D'_\alpha \varphi(\beta^{-1}\alpha) = -D'_\beta \varphi(\beta^{-1}\alpha), \\ D'_\beta \varphi(\beta\alpha) = (D'\varphi)(\beta\alpha), \quad D_\alpha \varphi(\beta\alpha) = (D\varphi)(\beta\alpha). \end{gathered} \tag{1.19}$$

Коммутационные соотношения:

$$[D^i, D^j] = \lambda_k^{ji} D^k, \quad [D'^i, D'^j] = \lambda_k^{ij} D'^k, \quad [D^i, D'^j] = 0. \tag{1.20}$$

Структурные константы группы:

$$\lambda_k^{ji} = \left(\frac{\partial^2 (\alpha\beta)_k}{\partial\alpha_j \, \partial\beta_i} - \frac{\partial^2 (\alpha\beta)_k}{\partial\alpha_i \, \partial\beta_j} \right)_{\alpha=\beta=e}. \tag{1.21}$$

Экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ задает однопараметрические подгруппы $\alpha(t) = \exp(xt)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\alpha} = dR(\alpha)\, x, \quad \alpha|_{t=0} = e. \tag{1.22}$$

При этом

$$\begin{aligned} dL(\exp(x))^{-1} \cdot d\exp(x) &= \frac{I - e^{-\operatorname{ad}(x)}}{\operatorname{ad}(x)}, \\ dR(\exp(x))^{-1} \cdot d\exp(x) &= \frac{e^{\operatorname{ad}(x)} - I}{\operatorname{ad}(x)}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Мера Хаара: $d\rho$ и $d\rho'$ — левая и правая на G:

$$\begin{aligned} d\rho(\exp(x)) &= \left| \det \left(\frac{I - e^{-\operatorname{ad}(x)}}{\operatorname{ad}(x)} \right) \right| dx, \quad d\rho(\alpha^{-1}) = d\rho'(\alpha), \\ d\rho'(\exp(x)) &= \left| \det \left(\frac{e^{\operatorname{ad}(x)} - I}{\operatorname{ad}(x)} \right) \right| dx. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Векторные поля D, как дифференциальные операторы первого порядка, антисимметричны относительно правой меры $d\rho'$, а поля D' — относительно левой меры $d\rho$.

Операторы сдвига:

$$\begin{aligned} \exp(x \cdot D)\, \varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha \cdot \exp(x)), \\ \exp(x \cdot D')\, \varphi(\alpha) &= \varphi(\exp(x) \cdot \alpha). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Свертка на группе:

$$(\psi * \varphi)(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \int \psi(\beta)\, \varphi(\beta^{-1}\alpha)\, d\rho(\beta) = \int \psi(\alpha\beta^{-1})\, \varphi(\beta)\, d\rho'(\beta)$$

инвариантна:

$$D'(\psi * \varphi) = (D'\psi) * \varphi, \quad D(\psi * \varphi) = \psi * (D\varphi). \tag{1.26}$$

1.3. Скобки, порожденные 1-формами. Коциклы биалгебр Ли. Мы видим, что особые свойства линейных скобок основывались на существовании в пуассоновой алгебре функции $\mathscr{F}^0(\mathscr{N})$ конечномерной подалгебры Ли. Этой подалгебре функций соответствует в $M^1(\mathscr{N})$ подалгебра Ли гамильтоновых векторных полей или на самом деле подалгебра замкнутых 1-форм в $\mathscr{F}^1(\mathscr{N})$. Фактически именно на этом основано существование группы Ли G и диаграмм (1.16) для данной линейной скобки.

В качестве прямого обобщения естественно было бы рассмотреть подалгебры Ли в $\mathscr{F}^1(\mathscr{N})$, состоящие, возможно, из незамкнутых форм. Это будет сделано в § 3 гл. II. Сейчас в качестве примера мы рассмотрим лишь простейший случай подалгебр левоинвариантных 1-форм на группах Ли.

Итак, пусть $\mathscr{N}$ — односвязное пуассоново многообразие и одновременно группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$. Имеется естественное отображение

$$\varepsilon\colon\ \mathfrak{n}^* \to \mathscr{F}^1(\mathscr{N}),\quad \varepsilon(X) = \langle X,\ dL(\xi)^{-1}\,d\xi\rangle, \tag{1.27}$$

сопоставляющее вектору из $\mathfrak{n}^*$ левоинвариантную форму на $\mathscr{N}$. Будем называть $\mathfrak{n}$ *биалгеброй Ли*, если на $\mathfrak{n}^*$ задана структура алгебры Ли так, что ε—гомоморфизм. Скобку на $\mathscr{N}$ назовем *согласованной* с биалгеброй Ли.

Покажем прежде всего, что это определение биалгебры Ли в терминах дифференциальных форм эквивалентно алгебраическому определению, введенному в [46]. В $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^*$ фиксируем двойственные друг другу базисы.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^*$ — алгебры Ли со структурными константами f^i_{lm} и λ^{jk}_s. Тогда $\mathfrak{n}$ — биалгебра Ли, если и только если выполнены условия*

$$f^i_{lm}\lambda^{l'm'}_i = f^{l'}_{ls}\lambda^{sm'}_m - f^{l'}_{ms}\lambda^{sm'}_l + \lambda^{l's}_m f^{m'}_{ls} - \lambda^{l's}_l f^{m'}_{ms}. \tag{1.28}$$

Доказательство. Скобку Пуассона на группе $\mathscr{N}$ выразим через лево- и правоинвариантные поля $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$:

$$\{f,\ g\}_{\mathscr{N}} = \eta(\mathscr{D}f,\ \mathscr{D}g) = \sigma(\mathscr{D}'f,\ \mathscr{D}'g). \tag{1.29}$$

Операторы η и σ отображают $\mathfrak{n}^*$ в $\mathfrak{n}$ и связаны друг с другом и с тензором Ψ (1.1) так:

$$\sigma(\xi) = \mathrm{Ad}(\xi)\,\eta(\xi)\,\mathrm{Ad}(\xi)^* = dR(\xi)^{-1}\,\Psi(\xi)\,dR(\xi)^{*-1}.$$

Мы в дальнейшем отождествляем $\mathrm{Hom}(\mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}) \approx \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$, так что $\eta(\xi),\ \sigma(\xi) \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$.

Пусть $\mathfrak{n}$ — биалгебра Ли. Представим $\varepsilon(X)$ (1.27) в виде $\varepsilon(X) = x_i\varepsilon^i$, где ε^i — базисные левоинвариантные 1-формы на $\mathscr{N}$. В силу уравнения Маурера — Картана (1.17) имеем

$$d\varepsilon^i = -\frac{1}{2} f^i_{kj}\,\varepsilon^k \wedge \varepsilon^j.$$

Используя эти соотношения, можно записать условие гомоморфности

$$\varepsilon([X, Y]_{\mathfrak{n}^*}) = [\varepsilon(X), \varepsilon(Y)]_{\mathcal{F}^1(\mathcal{N})} \tag{1.30}$$

в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка для тензора η:

$$\mathcal{D}_m\eta + \mathrm{ad}_m\,\eta + \eta\,\mathrm{ad}_m^* = \lambda_m, \tag{1.31}$$

или для тензора σ:

$$\mathcal{D}_m\sigma(\xi) - \mathrm{Ad}(\xi)\,\lambda_m\,\mathrm{Ad}(\xi)^* = 0. \tag{1.32}$$

Здесь $\mathrm{ad}_m = ((f^l_{mj})): \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ и $\lambda_m \equiv ((\lambda^{ij}_m)): \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$. Последнюю систему перепишем так:

$$d\sigma(\xi) = \mathrm{Ad}(\xi)\,\lambda_m\,\mathrm{Ad}(\xi)^*(\varepsilon^m)_\xi. \tag{1.33}$$

Необходимое условие ее разрешимости — замкнутость 1-формы, стоящей в правой части. Прямое дифференцирование с использованием тождества (1.14) показывает, что замкнутость этой формы эквивалентна (1.28). Наоборот, пусть выполнено (1.28). Тогда гарантирована разрешимость (глобальная, так как $\mathcal{N}$ односвязно) уравнения (1.33) в классе антисимметричных элементов $\sigma \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$. Решение σ определено с точностью до константы. Рассмотрим такое единственное решение $\sigma = \tilde{\sigma}$, которое равно нулю в единице группы $\mathcal{N}$:

$$\tilde{\sigma}(e) = 0. \tag{1.34}$$

Тогда элемент $\tilde{\sigma}$ задает по формуле (1.29) скобку Пуассона на $\mathcal{N}$. Это следует из двух вспомогательных лемм.

Лемма 1.5. *Билинейная операция* (1.29), *порожденная антисимметричным решением* σ *уравнения* (1.33), *является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда элемент* $\Gamma \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$,

$$\Gamma^{rml} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} \left((\sigma - \sigma(e))^{rs} f^m_{sk} (\sigma - \sigma(e))^{kl} + (\sigma - \sigma(e))^{rs} \lambda^{ml}_s\right)$$

тождественно нулевой: $\Gamma^{rml} \equiv 0$, *и, кроме того, в единице группы выполнены соотношения*

$$\underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} \left(\sigma(e)^{rs} f^m_{sk} \sigma(e)^{kl} - \sigma(e)^{rs} \lambda^{ml}_s\right) = 0. \tag{1.35}$$

Лемма 1.6. *Если* σ — *антисимметричное решение* (1.33) *и для структурных констант выполнено условие* (1.28), *то тензор* Γ^{rml} *удовлетворяет системе уравнений*

$$\mathcal{D}'_j\Gamma^{rml} = \underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} (f^r_{jn}\Gamma^{nml}), \quad \Gamma^{rml}(e) = 0, \tag{1.36}$$

и потому тождественно нулевой: $\Gamma^{rml} \equiv 0$.

В нашем случае для решения $\tilde{\sigma}$ задачи (1.33), (1.34) автоматически выполнены соотношения (1.35) и поэтому $\tilde{\sigma}$ порождает скобку Пуассона на $\mathcal{N}$. Далее, (1.33) — это то же самое, что и

(1.30); поэтому мы доказали, что из (1.28) следует (1.30), т. е. что $\mathfrak{n}$ — биалгебра Ли. Теорема доказана.

Доказательство леммы 1.5. В силу левоинвариантности (1.19) имеем из (1.32):

$$(\mathscr{D}_m)_\xi\, \sigma(\eta\xi) = (\mathscr{D}_m\sigma)(\eta\xi) = \mathrm{Ad}(\eta)\,\mathrm{Ad}(\xi)\,\lambda_m\,\mathrm{Ad}(\xi)^*\,\mathrm{Ad}(\eta)^* = \\ = \mathrm{Ad}(\eta)\,\mathscr{D}_m\sigma(\xi)\,\mathrm{Ad}(\eta)^*,$$

где ξ, $\eta \in \mathscr{N}$ и $\eta\xi$ — произведение в группе $\mathscr{N}$. Следовательно,

$$\sigma(\eta\xi) = \mathrm{Ad}(\eta)\,\sigma(\xi)\,\mathrm{Ad}(\eta)^* + \mathrm{const}(\eta).$$

Константу интегрирования найдем из начального условия при $\xi = e$. Итак,

$$\sigma(\eta\xi) = \mathrm{Ad}(\eta)\,(\sigma(\xi) - \sigma(e))\,\mathrm{Ad}(\eta)^* + \sigma(\eta). \tag{1.37}$$

Дифференцируя теперь по η в точке $\eta = e$ и учитывая, что в силу (1.32) справедливо соотношение

$$(\mathscr{D}'_s\sigma)(e) = \lambda_s, \tag{1.38}$$

получаем уравнение для σ, аналогичное (1.31):

$$\mathscr{D}'_s\sigma - \mathrm{ad}_s(\sigma - \sigma(e)) - (\sigma - \sigma(e))\,\mathrm{ad}^*_s = \lambda_s. \tag{1.39}$$

Теперь для скобки (1.29) запишем тождество Якоби в терминах σ:

$$\underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} (-\sigma^{rs}\mathscr{D}'_s\sigma^{ml} + \sigma^{rs} f^m_{sn}\sigma^{nl}) = 0$$

и подставим сюда производную $\mathscr{D}'_s\sigma$ из (1.39). Получим

$$\underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} (\sigma(e)^{rs} f^m_{sk}\sigma(e)^{kl} - \sigma(e)^{rs}\lambda^{ml}_s) - \Gamma^{rml}(\xi) = 0.$$

В единице $\xi = e$ это дает (1.35). Лемма доказана.

Доказательство леммы 1.6. Обозначим $\tilde\sigma = \sigma - \sigma(e)$. Прямое дифференцирование Γ^{rml} с учетом (1.39) дает

$$\mathscr{D}'_j\Gamma^{rml} = \underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} [f^r_{jn}(\tilde\sigma^{ns} f^m_{sk}\tilde\sigma^{kl}) + f^l_{jn}(\tilde\sigma^{rs} f^m_{sk}\tilde\sigma^{kn}) + \\ + f^s_{jn} f^m_{sk}\tilde\sigma^{rn}\tilde\sigma^{kl} + f^s_{kj} f^m_{sn}\tilde\sigma^{rn}\tilde\sigma^{kl} + \lambda^{rk}_j f^m_{sk}\tilde\sigma^{ls} + \lambda^{kl}_j f^m_{sk}\tilde\sigma^{rs} + \\ + \lambda^{ml}_k f^k_{js}\tilde\sigma^{rs} + f^r_{jn}(\tilde\sigma^{ns}\lambda^{ml}_s) + \lambda^{rs}_j\lambda^{ml}_s]. \tag{1.40}$$

Последнее слагаемое пропадает в силу тождества Якоби для структурных констант λ^{rs}_j. Аналогично в силу тождества Якоби для констант f^s_{jn} два слагаемых во второй строчке (1.40) дают $f^m_{jn}(\tilde\sigma^{rs} f^n_{sk}\tilde\sigma^{kl})$. Обозначим для краткости

$$F^{rnl} \equiv \tilde\sigma^{rs} f^n_{sk}\tilde\sigma^{kl}, \quad \Lambda^{nml} \equiv \tilde\sigma^{ns}\lambda^{ml}_s.$$

Тогда после перегруппировки квадратичных по $\tilde\sigma$ членов суммы уравнение (1.40) запишется так:

$$\mathscr{D}'_j\Gamma^{rml} = \underset{(r,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} [f^r_{jn}(\underset{(n,\,m,\,l)}{\mathfrak{S}} F^{nml}) + f^r_{jn}\Lambda^{nml} + \\ + (\lambda^{mk}_j f^l_{sk} + \lambda^{kl}_j f^m_{sk} + \lambda^{ml}_k f^k_{js})\,\tilde\sigma^{rs}]. \tag{1.41}$$

Коэффициент при $\tilde{\sigma}^{rs}$ в этой сумме в силу условия согласования (1.28) равен $f_{jn}^{l}\lambda_s^{mn}+f_{jn}^{m}\lambda_s^{nl}$. Поэтому линейные по $\tilde{\sigma}$ члены в (1.41) имеют вид

$$\underset{(r,m,l)}{\mathfrak{S}}(f_{jn}^{r}\Lambda^{nml}+f_{jn}^{l}\Lambda^{rmn}+f_{jn}^{m}\Lambda^{rnl})=\underset{(r,m,l)}{\mathfrak{S}} f_{jn}^{r}\Big(\underset{(n,m,l)}{\mathfrak{S}}\Lambda^{nml}\Big).$$

В итоге

$$\mathscr{D}_j'\Gamma^{rml}=\underset{(r,m,l)}{\mathfrak{S}} f_{jn}^{r}\Big(\underset{(n,m,l)}{\mathfrak{S}}(F^{nml}+\Lambda^{nml})\Big),$$

что совпадает с (1.36). Лемма доказана.

Напомним, что сейчас $\mathscr{N}$ — группа Ли, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{n}$. Обозначим через $\mathscr{N}^*$ группу Ли, отвечающую алгебре Ли $\mathfrak{n}^*$, и назовем ее *сопряженной группой*.

Скобку Пуассона $\{f, g\}_{\tilde{\mathscr{N}}}=\tilde{\sigma}(df, dg)$ на $\mathscr{N}$ назовем *инвариантной*, если групповое умножение $\mathscr{N}\times\mathscr{N}\to\mathscr{N}$ является пуассоновым отображением. Это эквивалентно выполнению тождества

$$\tilde{\sigma}(\zeta\xi)=\mathrm{Ad}(\zeta)\,\tilde{\sigma}(\xi)\,\mathrm{Ad}(\zeta)^*+\tilde{\sigma}(\zeta) \tag{1.42}$$

для любых ξ, $\zeta\in\mathscr{N}$. В частности,

$$\tilde{\sigma}(\xi^{-1})=-\mathrm{Ad}(\xi)^{-1}\,\tilde{\sigma}(\xi)\,\mathrm{Ad}(\xi)^{-1*}.$$

Лемма 1.7 [46]. (a) *Условия* (1.28) *самодвойственны, т. е. сохраняются, если поменять ролями структурные константы f и λ. Таким образом, если $\mathfrak{n}$ — биалгебра Ли, то и $\mathfrak{n}^*$ — биалгебра Ли.*

(b) *Биалгебре Ли однозначно соответствует инвариантная скобка Пуассона на односвязной группе Ли. Элемент $\tilde{\sigma}$ задает инвариантную скобку на группе тогда и только тогда, когда он удовлетворяет задаче* (1.32), (1.34).

Доказательство. (a) При замене $f_{jk}^{i}\leftrightarrow\lambda_i^{jk}$ первое слагаемое в правой части (1.28) двойственно четвертому, а второе и третье самодвойственны.

(b) Для заданной структуры биалгебры на $\mathfrak{n}$ решение задачи (1.32), (1.34), как показывает теорема 1.1, порождает скобку Пуассона на $\mathscr{N}$, причем в силу (1.37) выполнено тождество (1.42). Наоборот, если $\tilde{\sigma}$ порождает инвариантную скобку на $\mathscr{N}$, то дифференцирование (1.42) по ξ при $\xi=e$ дает

$$\mathscr{D}_j\tilde{\sigma}(\eta)=\mathrm{Ad}(\eta)\,\lambda_j\,\mathrm{Ad}(\eta)^*,\quad \lambda_j\equiv\mathscr{D}_j\tilde{\sigma}(e).$$

Таким образом, выполнено (1.33), причем в силу (1.34) константы λ_i^{jk} задают структуру алгебры Ли на $\mathfrak{n}^*$. В теореме 1.1 было показано, что из (1.33) следует (1.28) и $\mathfrak{n}$ — биалгебра Ли. Лемма доказана. См. также детали в [121, 211, 258].

Из леммы 1.7 следует, что *инвариантная скобка, заданная тензором $\tilde{\sigma}$, согласована с биалгеброй* $\mathfrak{n}$. Но интерес представляют и неинвариантные скобки.

Определение 1.1. Элемент $c \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$ (или оператор $c: \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$) назовем *коциклом биалгебры Ли* $\mathfrak{n}^*$, если

$$\underset{(r,\, m,\, l)}{\mathfrak{S}} \left(c^{rs} f^{m}_{sk} c^{kl} - c^{rs} \lambda^{ml}_{s}\right) = 0, \quad c^{ij} = -c^{ji}. \tag{1.43}$$

В силу леммы 1.6 набор чисел $c^{ij} = -\tilde{\sigma}^{ij}(\xi_0)$ (где $\xi_0 \in \mathcal{N}$) является коциклом биалгебры $\mathfrak{n}^*$. Такой коцикл назовем *тривиальным*.

Теорема 1.2 [67]. *Любая согласованная скобка на* $\mathcal{N}$ *отличается от инвариантной скобки на коцикл биалгебры* $\mathfrak{n}^*$:

$$\{f,\, g\}_{\mathcal{N}} = \tilde{\sigma}(\mathcal{D}'f,\, \mathcal{D}'g) + c(\mathcal{D}'f,\, \mathcal{D}'g). \tag{1.44}$$

Если коцикл с тривиальный, то скобка левым сдвигом превращается в инвариантную.

Доказательство. Первое утверждение — следствие из (1.35). Предположим теперь, что

$$\sigma(\xi) = \tilde{\sigma}(\xi) - \tilde{\sigma}(\xi_0).$$

Тогда в силу (1.42)

$$\sigma(\xi_0 \xi) = \mathrm{Ad}(\xi_0)\, \tilde{\sigma}(\xi)\, \mathrm{Ad}(\xi_0)^*.$$

Следовательно,

$$L(\xi_0)^* \{f,\, g\}_{\mathcal{N}} \equiv \sigma(\mathcal{D}'f,\, \mathcal{D}'g)(\xi_0\xi) = \\ = \tilde{\sigma}(\xi)\left(\mathrm{Ad}(\xi_0)^* \mathcal{D}'f(\xi_0\xi),\ \mathrm{Ad}(\xi_0)^* \mathcal{D}'g(\xi_0\xi)\right).$$

Определение правых и левых полей, и (1.19) дает

$$(\mathcal{D}'f)(\xi_0\xi) = \mathrm{Ad}(\xi_0\xi)^{-1*} \mathcal{D}f(\xi_0\xi) = \\ = \mathrm{Ad}(\xi_0)^{-1*} \mathrm{Ad}(\xi)^{-1*} \mathcal{D}_{\xi}(f(\xi_0\xi)) = \mathrm{Ad}(\xi_0)^{-1*} \mathcal{D}'_{\xi}(f(\xi_0\xi)).$$

Поэтому

$$L(\xi_0)^* \{f,\, g\}_{\mathcal{N}} = \tilde{\sigma}(\xi)\left(\mathcal{D}'_{\xi}(f(\xi_0\xi)),\ \mathcal{D}'_{\xi}(g(\xi_0\xi))\right) = \\ = \{L(\xi_0)^* f,\ L(\xi_0)^* g\}_{\tilde{\mathcal{N}}},$$

где скобка $\{\ldots,\, \ldots\}_{\tilde{\mathcal{N}}}$ инвариантная. Таким образом, левый сдвиг $\xi \to \xi_0^{-1}\xi$ переводит скобку на $\mathcal{N}$, заданную тензором σ, в инвариантную скобку, заданную тензором $\tilde{\sigma}$. Теорема доказана.

Для согласованных скобок на группах, как будет показано в § 3 гл. II, *существует аналог фазового пространства и пуассоновых расслоений* (1.16).

1.4. Примеры согласованных скобок на группах. Уравнения Янга — Бакстера над алгебрами Ли.

Пример 1.2. *Аффинные скобки*. Если группа Ли $\mathcal{N} \approx \mathbf{R}^n$ абелева, аддитивная, то из (1.32) следует, что инвариантная скобка на $\mathcal{N}$ — это линейная скобка (1.8): $\sigma(\xi) \equiv \Psi(\xi) \equiv \lambda_i \xi^i$ и $\mathcal{N} \equiv \mathfrak{n} = \mathfrak{g}^*$, причем $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{g}$ (как алгебра Ли). Условие коцикличности (1.43) сводится к такому:

$$c^{rs}\lambda^{ml}_{s} + c^{ls}\lambda^{rm}_{s} + c^{ms}\lambda^{lr}_{s} = 0.$$

Оно означает, что коцикл биалгебры $c \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* \approx \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*)$ является обычным 1-коциклом алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$c(x, [y, z]) + c(y, [z, x]) + c(z, [x, y]) = 0.$$

Соответствующая этому коциклу согласованная скобка на $\mathcal{N} = \mathfrak{g}^*$

$$\{f, g\} = \xi^i \lambda_i^{jk} \partial_j f(\xi) \partial_k g(\xi) + c^{jk} \partial_j f(\xi) \partial_k g(\xi) \qquad (1.45)$$

называется *аффинной*. Центральным расширением группы G (и, следовательно, расширением пуассонова многообразия $\mathcal{N}$) формально можно убрать из (1.45) коцикл c^{jk}, включив его в набор координат и сделав аффинную скобку линейной [2, 78].

На сопряженной группе $\mathcal{N}^* = G$ инвариантная скобка тождественно нулевая; условие коцикличности (1.43) имеет вид

$$c_{rs}^* \lambda_m^{sk} c_{kl}^* + c_{ls}^* \lambda_r^{sk} c_{km}^* + c_{ms}^* \lambda_l^{sk} c_{kr}^* = 0, \qquad (1.46)$$

и поэтому сопряженной согласованной скобкой на G будет правоинвариантная скобка

$$\{\varphi, \psi\}^{\mathrm{right}} = c^*(D'\varphi, D'\psi), \qquad (1.47)$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(G)$. Условие (1.46) — это уравнение Янга — Бакстера в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и скобка (1.47) — частный случай семейства скобок из следующего примера.

Пример 1.3. *Классическое уравнение Янга — Бакстера.* Пусть $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли, $r\colon \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$ — линейный антисимметричный оператор. Положим [46]

$$\lambda_m = \mathrm{ad}_m \cdot r + r \cdot \mathrm{ad}_m^* \quad \text{или} \quad \lambda_m^{ij} = f_{ms}^i r^{sj} + r^{is} f_{ms}^j. \qquad (1.48)$$

Тогда в силу (1.14) уравнение (1.32) тривиально интегрируется:

$$\sigma(\xi) = \mathrm{Ad}(\xi) \cdot r \cdot \mathrm{Ad}(\xi)^* + r_1, \qquad (1.49)$$

где r_1 (константа интегрирования) — антисимметричный оператор $\mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$. Условия (1.28) автоматически обеспечены. Формула (1.48) дает структурные константы λ_m^{ij} алгебры Ли на $\mathfrak{n}^*$:

$$[x, y]_m = \lambda_m^{ij} x_i y_j, \quad x, y \in \mathfrak{n}^*,$$

или

$$\langle [x, y], u \rangle = \langle x, [u, ry]_{\mathfrak{n}} \rangle - \langle y, [u, rx]_{\mathfrak{n}} \rangle, \qquad (1.50)$$

если и только если для λ_m^{ij} выполнены тождества Якоби, т. е. в данном случае

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{(i,j,k)} f_{ml}^i \Big(\mathop{\mathfrak{S}}_{(j,l,k)} r^{jn} f_{ns}^l r^{sk} \Big) = 0, \quad r^{ij} = -r^{ji}. \qquad (1.51)$$

Полученную биалгебру обозначим $\mathfrak{n}_r$.

Как следует из теоремы 1.2, тензор (1.49) будет задавать на группе $\mathcal{N}$ скобку Пуассона

$$\{f, g\}_{\mathcal{N}} = r(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g) + r_1(\mathcal{D}'f, \mathcal{D}'g) \qquad (1.52)$$

при условии, что $c = r + r_1$ — коцикл биалгебры $\mathfrak{n}_r$. Если подставить в условие коцикличности (1.43) константы λ_m^{ij} из (1.48), то это условие сведется к тождеству

$$\underset{(j,\,l,\,k)}{\mathfrak{S}}\left(r^{jn}f^l_{ns}r^{sk}+r^{jn}_1f^l_{ns}r^{sk}_1\right)=0. \tag{1.53}$$

Определение 1.2. *Специальными уравнениями Янга — Бакстера* в алгебре Ли со структурными константами f^l_{ns} назовем тождества

$$\underset{(j,\,l,\,k)}{\mathfrak{S}} r^{jn}f^l_{ns}r^{sk}=0, \quad r^{ij}=-r^{ji}. \tag{1.54}$$

Тождества (1.51) назовем *общими* уравнениями Янга — Бакстера. Обсуждение терминологии см. в [46, 119]. Обычно именно (1.54) называют уравнениями Янга — Бакстера.

Мы доказали следующую теорему [46, 119, 121].

Теорема 1.3. (a) *Пусть* $\mathfrak{n}$ — *алгебра Ли. Коммутатор* (1.50) *задает структуру алгебры Ли на* $\mathfrak{n}^*$, *если и только если элемент* $r\in\mathfrak{n}\otimes\mathfrak{n}$ *удовлетворяет общим уравнениям Янга — Бакстера* (1.51). *При этом* $\mathfrak{n}$ — *биалгебра Ли* (*обозначим ее* $\mathfrak{n}_r$).

(b) *Пусть элемент* $r_1\in\mathfrak{n}\otimes\mathfrak{n}$ *антисимметричен. Формула* (1.52) *задает скобку Пуассона на группе* $\mathcal{N}$, *если и только если выполнены условия коцикличности* (1.53). *Эта скобка согласована с биалгеброй* $\mathfrak{n}_r$.

(c) *При выполнении общих уравнений Янга — Бакстера* (1.51) *формула*

$$\{f,\, g\}^{\sim}=r(\mathcal{D}f,\ \mathcal{D}g)-r(\mathcal{D}'f,\ \mathcal{D}'g) \tag{1.55}$$

задает на группе $\mathcal{N}$ *инвариантную скобку, отвечающую биалгебре* $\mathfrak{n}_r$.

(d) *Если* r *и* r_1 *удовлетворяют специальным уравнениям Янга — Бакстера в алгебре Ли* $\mathfrak{n}$, *то выполнены утверждения* (a), (b), (c). *При этом каждое слагаемое по отдельности в* (1.52) *задает скобку Пуассона на* $\mathcal{N}$.

Специальные уравнения Янга — Бакстера однородны. Поэтому, если τ, $t\in\mathbf{R}$, то элементы τr и tr_1 также задают скобки на $\mathcal{N}$. Следовательно, в условиях п. (d) теоремы 1.3 на группе $\mathcal{N}$ имеется семейство скобок Пуассона $\tau\{f,\, g\}^{\text{left}}+t\{f,\, g\}^{\text{right}}$, где

$$\{f,\, g\}^{\text{left}}=r(\mathcal{D}f,\ \mathcal{D}g), \quad \{f,\, g\}^{\text{right}}=r_1(\mathcal{D}'f,\ \mathcal{D}'g). \tag{1.56}$$

В такой ситуации говорят, что скобки $\{\ldots,\ \ldots\}^{\text{left}}$ и $\{\ldots,\ \ldots\}^{\text{right}}$ образуют *пуассонову пару* [4, 5, 29, 30, 51, 128, 140, 141].

Пример 1.4. *Квадратичные скобки Пуассона* [46, 123, 175]. Оказывается инвариантным скобкам на группах и уравнениям Янга — Бакстера соответствует некоторый класс квадратичных скобок Пуассона.

Пусть группа Ли $\mathcal{N}$ снабжена инвариантной скобкой (1.55). Пусть T — представление $\mathcal{N}$ в векторном пространстве и t — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Тогда (см. (1.18))

$$\langle u,\ \mathcal{D}-\mathcal{D}'\rangle T=[T,\ t(u)]$$

для любого $u \in \mathfrak{n}$. Поэтому

$$\{T \otimes T\}^{\sim} = (r^{ij}\mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}_j)\, T \otimes T - (r^{ij}\mathcal{D}'_i \otimes \mathcal{D}'_j)\, T \otimes T =$$
$$= [T \otimes T,\ (t \otimes t)(r)]. \quad (1.57)$$

Обозначим

$$\tilde{r} = (t \otimes t)(r),$$

и пусть T^{μ}_{ν}, $\tilde{r}^{\mu\mu'}_{\nu\nu'}$ — матричные элементы операторов представления. Тогда соотношения (1.57) запишутся так:

$$\{T^{\mu}_{\nu},\ T^{\mu'}_{\nu'}\}^{\sim} = \tilde{r}^{\varepsilon\varepsilon'}_{\nu\nu'} T^{\mu}_{\varepsilon} T^{\mu'}_{\varepsilon'} - \tilde{r}^{\mu\mu'}_{\varepsilon\varepsilon'} T^{\varepsilon}_{\nu} T^{\varepsilon'}_{\nu'}. \quad (1.58)$$

Если r-оператор удовлетворяет не общим (1.51), а специальным уравнениям Янга — Бакстера (1.54), то кроме инвариантной скобки (1.55) можно рассмотреть левые и правые (1.56). Это дает две квадратичные скобки для матричных элементов представления T:

$$\{T \otimes T\}^{\text{left}} = (T \otimes T) \cdot \tilde{r} \quad (1.59)$$

или

$$\{T \otimes T\}^{\text{right}} = \tilde{r}_1 \cdot (T \otimes T). \quad (1.60)$$

Они образуют пуассонову пару.

Рассмотрим в качестве простейшего примера скобки (1.58) — (1.60), связанные с группой Ли $\mathcal{N} = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Выберем базис в алгебре Ли $\mathfrak{n} = \mathrm{sl}(2)$

$$[t_1,\ t_2] = t_3, \quad [t_3,\ t_1] = 2t_1, \quad [t_3,\ t_2] = -2t_2$$

и фундаментальное представление t этой алгебры:

$$t_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.61)$$

Ненулевые структурные константы на $\mathfrak{n}$ следующие:

$$f^3_{12} = -f^3_{21} = 1, \quad f^1_{31} = -f^1_{13} = 2, \quad f^2_{23} = -f^2_{32} = 2.$$

Поэтому специальное уравнение Янга — Бакстера (1.54) выглядит так:

$$r^{1n} f^2_{ns} r^{s3} + r^{2n} f^3_{ns} r^{s1} + r^{3n} f^1_{ns} r^{s2} = 0,$$

а общее уравнение Янга — Бакстера (1.51) — так:

$$(f^1_{m1} + f^2_{m2} + f^3_{m3})\,(r^{1n} f^2_{ns} r^{s3} + r^{2n} f^3_{ns} r^{s1} + r^{3n} f^1_{ns} r^{s2}) = 0.$$

Поскольку $f^1_{m1} + f^2_{m2} + f^3_{m3} = 0$, то это последнее уравнение выполнено для любых r^{ij} автоматически, в то время как специальное уравнение Янга — Бакстера накладывает ограничение

$$u^2 = 4vw, \quad (1.62)$$

где $r^{12} = u$, $r^{13} = v$, $r^{23} = w$.

Вычислим теперь матрицу $\tilde{r}=(t\otimes t)(r)$. Ненулевыми ее элементами будут

$$\tilde{r}^{12}_{21}=-\tilde{r}^{21}_{12}=u,$$
$$\tilde{r}^{11}_{21}=-\tilde{r}^{11}_{12}=\tilde{r}^{21}_{22}=-\tilde{r}^{12}_{22}=v,$$
$$\tilde{r}^{21}_{11}=-\tilde{r}^{12}_{11}=\tilde{r}^{22}_{21}=-\tilde{r}^{22}_{12}=w.$$

Обозначим через $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ матрицы из SL (2), отвечающие представлению (1.61). Тогда $AD-BC=1$. С учетом этой связи можно рассматривать A, B, C, D как координатные функции на группе SL (2).

Выпишем скобку (1.60), например левую, между этими координатными функциями:

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}^{\mathrm{left}}=-uAB-vA^2-wB^2,\\
&\{A, C\}^{\mathrm{left}}=-w(AD-BC),\\
&\{A, D\}^{\mathrm{left}}=-uBC-vAC-wBD,\\
&\{B, C\}^{\mathrm{left}}=uAD+vAC+wBD,\\
&\{B, D\}^{\mathrm{left}}=-v(AD-BC),\\
&\{C, D\}^{\mathrm{left}}=-uCD-vC^2-wD^2.
\end{aligned}\tag{1.63}$$

Условие (1.62) обеспечивает выполнение тождества Якоби.

Аналогичный вид имеет правая скобка (1.60), образующая с (1.63) пуассонову пару:

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}^{\mathrm{right}}=-v_1(AD-BC),\\
&\{A, C\}^{\mathrm{right}}=u_1AC-v_1C^2-w_1A^2,\\
&\{A, D\}^{\mathrm{right}}=u_1BC-v_1CD-w_1AB,\\
&\{B, D\}^{\mathrm{right}}=u_1BD-v_1D^2-w_1B^2,\\
&\{B, C\}^{\mathrm{right}}=u_1AD-v_1CD-w_1AB,\\
&\{C, D\}^{\mathrm{right}}=-w_1(AD-BC),
\end{aligned}\tag{1.63a}$$

где $u_1^2=4v_1w_1$.

Разность скобок (1.63) и (1.63a) при $u_1=u$, $v_1=v$, $w_1=w$ (и уже без каких-либо ограничений на числа u, v, w) дает все возможные *инвариантные скобки на группе* SL (2). В частности, при $v=w=0$, $u=1$ получается скобка, приведенная в работе [20]:

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}=-AB, \quad \{B, C\}=0,\\
&\{A, C\}=-AC, \quad \{B, D\}=-BD,\\
&\{A, D\}=-2BC, \quad \{C, D\}=-CD.
\end{aligned}$$

Отметим, что все *эти квадратичные скобки на самом деле являются скобками Пуассона на* $\mathbf{R}^4$. Функция $AD-BC$ служит для них функцией Казимира. Скобки Пуассона на группе SL (2) получаются после сужения на поверхность $AD-BC=1$.

§ 2. Редукция скобок Пуассона

Теперь мы рассмотрим один из наиболее часто встречающихся механизмов возникновения нетривиальных скобок Пуассона — так называемую редукцию скобок. Грубо говоря, редукция — это уменьшение числа степеней свободы путем отбрасывания части координат, служащих симметриями (первыми интегралами) данной системы. После такого «отбрасывания» система оказывается заданной на новом фазовом пространстве — обычно на симплектическом листе новой, редуцированной скобки Пуассона.

Не менее интересен и в каком-то смысле обратный механизм поднятия или восстановления скобки по заданным ее симплектическим листам. Это известная конструкция скобки Дирака. Мы увидим, что за ней стоит общая структура супералгебры форм на пуассоновом многообразии.

Центральные темы параграфа:

— бирасслоения (2.6) симплектических многообразий (теорема 2.1), изотропные бирасслоения (следствие 2.1);

— лагранжевы подмногообразия, ассоциированные с бирасслоениями;

— скобки на многообразиях инвариантов внутренних автоморфизмов группы Ли (примеры 2.4—2.6);

— супералгебра тензоров и скобка Схоутена; супералгебра форм и скобка (2.34) над пуассоновым многообразием;

— скобки Пуассона (2.37), (2.39), порожденные 2-формами; скобки Дирака (пример 2.8);

— скобки Пуассона, порожденные инвариантными 2-формами на группе Ли (следствия 2.8—2.10);

— кубические и тетраэдные скобки (пример 2.9).

2.1. Лагранжевы и коизотропные подмногообразия. Гамильтоновы потоки. Пусть $\mathfrak{X}$ — симплектическое многообразие с замкнутой невырожденной 2-формой, заданной антисимметричным тензором J:

$$\omega_{\mathfrak{X}} = \frac{1}{2} J(z)\, dz \wedge dz, \quad z \in \mathfrak{X}, \tag{2.1}$$

или, что то же самое, с невырожденной скобкой Пуассона:

$$\{F, K\} = \langle dF, J^{-1} dK \rangle.$$

Подмногообразие $M \subset \mathfrak{X}$ называется *изотропным*, если оно аннулирует симплектическую форму: $\omega_{\mathfrak{X}}|_M = 0$, т. е. для любых векторных полей u, v, касающихся M, их кососкалярное произведение равно нулю:

$$\omega_{\mathfrak{X}}(u, v) \equiv \langle Ju, v \rangle = 0.$$

Таким образом, в каждой точке $z \in M$ изотропного подмногообразия тензор J переводит касательную плоскость в ортогональное дополнение к ней:

$$J(T_z M) \subset (T_z M)^{\perp}. \tag{2.2}$$

Поэтому размерность изотропного подмногообразия не может превышать $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{X})$. Изотропные подмногообразия максимальной размерности $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{X})$ называются *лагранжевыми* [97].

Если перевернуть включение (2.2), получим определение *коизотропного* подмногообразия M:

$$J(T_z M) \supset (T_z M)^{\perp}. \tag{2.3}$$

Размерность такого подмногообразия, наоборот, не может быть меньше $\frac{1}{2}\dim \mathfrak{X}$. Коизотропные подмногообразия минимальной размерности лагранжевы. О свойствах изотропных и коизотропных подмногообразий см., например, [4, 32, 59, 99, 185].

Простейшие изотропные подмногообразия — точка и кривая; простейшие коизотропные — полномерная область и поверхность коразмерности 1.

Лемма 2.1. *Коизотропность подмногообразия M эквивалентна одному из следующих свойств*:

(I) *Гамильтоново поле* $\mathrm{ad}(H)$ *любой функции H, постоянной на M, касается M (т. е. его поток сохраняет M).*

(II) *Скобка Пуассона любых двух функций, постоянных на M, равна нулю на M.*

(III) *Подмногообразие M локально задано уравнениями $g_1 = \ldots = g_r = 0$, где $\{g_i, g_j\}|_M = 0 \ \forall i, j$.*

(IV) *Пусть t_z — ядро сужения формы ω_z на $T_z M$; тогда* $\dim t_z = \operatorname{codim} M$ *и распределение плоскостей $\{t_z\}_{z \in M}$ интегрируемо.*

Доказательство. Очевидно, что (I) — это другая запись условия (2.3). Покажем, что (I) $\Rightarrow$ (II). Имеем

$$\{f, g\}(\gamma_f^t(z)) = \frac{d}{dt} g(\gamma_f^t(z)). \tag{2.4}$$

Если f, g постоянны на M, то из (I) следует, что γ_f^t сохраняет M, т. е. $g(\gamma_f^t(z)) \equiv g(z)$ и, значит $\{f, g\} = 0$.

Очевидно, (II) $\Leftrightarrow$ (III). Поэтому, если выполнено (III) и функция f постоянна на M, то из (II) $\Rightarrow \{f, g_i\}|_M = 0$, и поэтому, в силу (2.4), поток γ_f^t сохраняет M, т. е. выполнено (I).

Далее, $t_z = (J(T_z M))^{\perp} \cap T_z M$, и если выполнено (I) или (2.3), то $t_z = J^{-1}(T_z M)^{\perp}$, т. е. плоскость t_z задается гамильтоновыми полями $\mathrm{ad}(f)_z$, где $f|_M = \mathrm{const}$. Коммутатор двух таких полей в силу (II) — это поле такого же вида, т. е., согласно критерию Фробениуса, выполнено (IV). И наоборот, из (IV) следует

$$t_z = J^{-1}(T_z M)^{\perp} \subset T_z M.$$

Поэтому, если $f|_M = \mathrm{const}$, то $\mathrm{ad}(f)_z = J^{-1} df(z) \in t_z \subset T_z M$, т. е. выполнено (I). Лемма доказана.

Отметим, что интегральные слои распределения $\{t_z\}$ изотропны. Таким образом, на каждом коизотропном подмногообразии имеется изотропное слоение, размерность которого равна коразмерности подмногообразия. Те случаи, в которых это слоение является расслоением, представляют особый интерес; мы рассмотрим их в следующем разделе.

Пункт (IV) леммы 2.1 указывает также на возможность расширения класса коизотропных подмногообразий при отказе от ограничения $\dim t_z = \operatorname{codim} M$. Такие подмногообразия занимают промежуточное положение между изотропными и коизотропными [59]; слои бирасслоений, рассматриваемых ниже, как раз являются такими подмногообразиями.

Далее, пункт (II) леммы 2.1 позволяет распространить понятие колагранжевости (и лагранжевости) на подмножества, не являющиеся гладкими подмногообразиями.

Лагранжевы подмногообразия как частный случай коизотропных, конечно, обладают всеми свойствами, указанными в лемме 2.1.

Особая ситуация возникает для лагранжевых подмногообразий в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n_x \oplus \mathbf{R}^n_p$ с симплектической формой $dp \wedge dx$.

Лемма 2.2 [97]. *Лагранжево подмногообразие в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ обладает атласом локальных карт, каждая из которых диффеоморфно проектируется на одну из лагранжевых координатных плоскостей в $\mathbf{R}^{2n}$.*

Изложение вопросов лагранжевой геометрии содержится в [2—5, 22, 32, 90, 104, 141, 245, 251, 252, 255]. Глубокие алгебраические свойства проявляются в K-теории [112], а связи лагранжевых подмногообразий с теорией функций обнаруживаются при переходе к квантовой механике [97]; этому посвящена гл. III.

В заключение данного раздела приведем одно простое, но очень полезное утверждение о локальных пуассоновых преобразованиях, которое нам понадобится в п. 1.1 гл. IV.

Пусть γ: $\mathscr{D}' \to \mathscr{D}$ пуассоново отображение областей $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}^n_x \oplus \mathbf{R}^n_p$ (т. е. диффеоморфизм, сохраняющий форму $dp \wedge dx$). Тогда *график* $\operatorname{Gr}(\gamma) \subset \mathscr{D} \times \mathscr{D}'^{(-)}$ лагранжев относительно симплектической структуры $dp \wedge dx - dp' \wedge dx'$. Мы покажем, что $\operatorname{Gr}(\gamma)$ можно получить сдвигами вдоль гамильтонова поля из диагонали $\operatorname{diag}(\mathscr{D} \times \mathscr{D}') = \operatorname{Gr}(\mathrm{id})$.

Лемма 2.3 [74]. *Если область $\mathscr{D}' \subset \mathbf{R}^{2n}$ звездная (линейно стягиваемая в точку), то любой ее пуассонов диффеоморфизм γ можно получить как сдвиг за время $t = 1$ по траекториям некоторой гамильтоновой системы*

$$\frac{d}{dt} Z = \operatorname{ad}(H_t)(Z), \quad Z|_{t=0} = z' \in \mathscr{D}', \tag{2.5}$$

т. е. $\gamma(z') = Z(z', t)|_{t=1}$. Здесь H_t — некоторое семейство гладких функций, заданных на $\mathscr{D}'$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что центр области $\mathscr{D}'$ — это начало координат и $\gamma(0) = 0$. Поскольку $d\gamma(0) \in \operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ и группа $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ связна, то существует гладкое семейство $d_\tau \in \operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ такое, что $d_0 = I$, $d_{1/2} = d\gamma(0)$.

Положим

$$\tilde{\gamma}_\tau(z') = \begin{cases} d_\tau z' & \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ \dfrac{\gamma((\tau-1/2)z')}{\tau-1/2} & \text{при} \quad 1/2 < \tau < 3/2, \end{cases}$$

где $z' \in \mathcal{D}'$. Очевидно, преобразования $\tilde{\gamma}_\tau$ пуассоновы, причем $\tilde{\gamma}_0 = \mathrm{id}$, $\tilde{\gamma}_{3/2} = \gamma$. Далее, $\tilde{\gamma}_\tau$ непрерывно зависит от τ. Для того чтобы сделать эту зависимость гладкой, введем C^∞-функцию σ: $[0, 1] \to [0, 3/2]$ такую, что $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 3/2$, $\sigma(1/2) = 1/2$, $\sigma^{(k)}(1/2) = 0$ при $k \geqslant 1$, и σ строго монотонна. Положим

$$\gamma_t = \tilde{\gamma}_{\sigma(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

Это семейство пуассоновых преобразований гладко зависит от t и соединяет исходное преобразование γ с тождественным id. Из пуассоновости следует гамильтоновость векторных полей $v(t)_z = \dot{\gamma}_t(\gamma_t^{-1}(z))$. Таким образом, существует функция H_t на $\mathcal{D}'$ такая, что $v(t) = \mathrm{ad}(H_t)$. Очевидно, сдвиги по траекториям системы (2.5) совпадают с отображениями γ_t. Лемма доказана.

2.2. Бирасслоения и скобки на их базах. Один из распространенных механизмов возникновения вырожденных скобок Пуассона — редукция невырожденных скобок. Эта процедура была предложена в работах С. Ли и Э. Картана.

Пусть $\mathfrak{X}$ — симплектическое многообразие. Рассмотрим в $\mathfrak{X}$ локальное слоение $\mathcal{A}$ постоянной размерности. Плоскость, касательную к слою в точке z, обозначим $\pi(z)$. Плоскость $\tilde{\pi} = (J\pi)^\perp$, где J — тензор симплектической структуры (1.64), называется *косоортогональным дополнением* к π. Если распределение плоскостей $\{\tilde{\pi}(z)\}$ интегрируемо, то соответствующее слоение $\tilde{\mathcal{A}}$ назовем *полярным* к $\mathcal{A}$, а само $\mathcal{A}$ назовем *бислоением.*

Согласно этому определению, множество функций $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{A}}}$, постоянных вдоль слоев полярного слоения, находится в инволюции с множеством функций $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, постоянных вдоль слоев бислоения $\mathcal{A}$. Или еще иначе: слои $\mathcal{A}$ совпадают с орбитами группы пуассоновых преобразований

$$\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{A}}) = \{\gamma_f \mid f \in \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})\}$$

и одновременно слои $\tilde{\mathcal{A}}$ совпадают с орбитами группы $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Лемма 2.4. *Слоение $\mathcal{A}$ является бислоением тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — алгебра Ли относительно скобок Пуассона.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — алгебра Ли и $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Тогда $da \in \pi^\perp$ и $\mathrm{ad}(a) \in \tilde{\pi}$. Очевидно, локально можно найти $k = \dim \tilde{\pi}$ независимых функций $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ таких, что поля $\mathrm{ad}(\mathcal{A}^1), \ldots, \mathrm{ad}(\mathcal{A}^k)$ образуют базис в каждой плоскости $\tilde{\pi}(z)$. Поскольку $\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, то коммутаторы $[\mathrm{ad}(\mathcal{A}^i), \mathrm{ad}(\mathcal{A}^j)] = \mathrm{ad}(\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\})$ разлагаются по базису в $\tilde{\pi}$:

$$[\mathrm{ad}(\mathcal{A}^i), \mathrm{ad}(\mathcal{A}^j)] = c_k^{ij}(z)\,\mathrm{ad}(\mathcal{A}^k).$$

В силу критерия Фробениуса это и означает интегрируемость $\{\tilde{\pi}(z)\}$.

Наоборот, если $\{\tilde{\pi}(z)\}$ интегрируемо, то из того же разложения коммутаторов следует, что $\operatorname{ad}(\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\}) \in \tilde{\pi}$, т. е. скобки $\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Любая функция $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ имеет вид $a = f(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)$. Поэтому скобки двух таких функций

$$\{a, b\} = \{f(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k), g(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)\} = \\ = \partial_i f(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)\, \partial_j g(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)\, \{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\}$$

постоянны вдоль $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — алгебра Ли. Лемма доказана.

Один из важных примеров бислоений дает лемма 1.4. Ниже мы, как и в лемме 1.4, рассматриваем глобальные (локально-тривиальные) р а с с л о е н и я симплектического многообразия $\mathfrak{X}$.

Л е м м а 2.5. *Расслоение $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ является бислоением тогда и только тогда, когда на базе $\mathcal{N}$ существует скобка Пуассона, относительно которой $\mathcal{A}$ — пуассоново отображение. Эта скобка единственная.*

Итак, пусть бислоение $\mathcal{A}$ симплектического многообразия является расслоением, и пусть полярное ему слоение $\tilde{\mathcal{A}}$ также является глобальным расслоением

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\mathcal{A}"'] \arrow[dr, "\tilde{\mathcal{A}}"] & \\ \mathcal{N} & & \tilde{\mathcal{N}} \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Предположим также, что слои $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ и их пересечения $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$ связны. Будем называть тогда $\mathcal{A}$ *бирасслоением.* В координатной записи $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)$, $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}^1, \ldots, \tilde{\mathcal{A}}^m)$ имеем

$$\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\}_{\mathfrak{X}} = \Psi^{ij}(\mathcal{A}), \tag{2.7a}$$

$$\{\mathcal{A}^i, \tilde{\mathcal{A}}^k\}_{\mathfrak{X}} = 0, \tag{2.7b}$$

$$\{\tilde{\mathcal{A}}^l, \tilde{\mathcal{A}}^k\}_{\mathfrak{X}} = \tilde{\Psi}^{lk}(\tilde{\mathcal{A}}). \tag{2.7c}$$

Тензоры Ψ и $\tilde{\Psi}$ задают вырожденные скобки Пуассона на $\mathcal{N}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ по формуле (1.1). Пуассоново многообразие $\tilde{\mathcal{N}}$ назовем *полярным* к $\mathcal{N}$ *относительно бирасслоения* $\mathcal{A}$. Размерность слоев $\mathcal{A}$ будем кратко обозначать $\dim \mathcal{A}$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — бирасслоение симплектического многообразия $\mathfrak{X}$* (2.6). *Тогда*

(а) *Симплектические листы $\Omega \subset \mathcal{N}$ и $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом:*

$$\Omega \leftrightarrow \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)).$$

Прообраз $\mathcal{Y} = \mathcal{A}^{-1}(\Omega) = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}(\tilde{\Omega})$ коизотропен в $\mathfrak{X}$.

(b) *Выполнены равенства*

$$\operatorname{codim}\Omega=\operatorname{codim}\tilde{\Omega} \quad \text{или} \quad \operatorname{corank}\Psi(\mathcal{A}(z))=\operatorname{corank}\tilde{\Psi}(\tilde{\mathcal{A}}(z)),$$
$$\dim\mathcal{N}+\dim\tilde{\mathcal{N}}=\dim\mathfrak{X} \quad \text{или} \quad \operatorname{rank}\mathcal{A}(z)+\operatorname{rank}\tilde{\mathcal{A}}(z)=\dim\mathfrak{X}.$$

(c) *Слои $\mathcal{A}\cap\tilde{\mathcal{A}}$ изотропны и, если они компактны, то диффеоморфны фактору группы G_Ω по дискретной подгруппе. Кроме того,*

$$\dim\mathcal{A}\cap\tilde{\mathcal{A}}=\operatorname{corank}\Psi(\mathcal{A})=\operatorname{codim}\mathcal{Y}.$$

(d) *Каждый слой $\mathcal{A}$ расслаивается слоями $\mathcal{A}\cap\tilde{\mathcal{A}}$ над базой $\tilde{\Omega}$, в частности*

$$\dim\mathcal{A}\geqslant\operatorname{corank}\Psi(\mathcal{A}) \text{ или } \operatorname{rank}\mathcal{A}\leqslant\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{X}+\operatorname{rank}\Psi(\mathcal{A})). \quad (2.8)$$

Знак неравенства здесь заменяется на равенство тогда и только тогда, когда слои $\mathcal{A}$ изотропны.

Доказательство [59]. Рассмотрим линейную оболочку $\pi(z)+\tilde{\pi}(z)$ плоскостей, касательных к слоям $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ в точке z. Тогда, если $a=\mathcal{A}(z)$, то $d\mathcal{A}(\pi+\tilde{\pi})=d\mathcal{A}(\tilde{\pi})=d\mathcal{A}\cdot J^{-1}(\pi^{\perp})=$ $=d\mathcal{A}\cdot J^{-1}d\mathcal{A}^*(T_a^*\mathcal{N})$, поскольку $\pi^{\perp}=J\tilde{\pi}$ или $\pi^{\curlyvee}=\tilde{\pi}$. В силу (2.7а) $d\mathcal{A}\cdot J^{-1}\cdot d\mathcal{A}^*=\Psi(a)$. Следовательно,

$$d\mathcal{A}(\pi+\tilde{\pi})=\Psi(a)\,T_a^*\mathcal{N}=T_a\Omega. \quad (2.9)$$

Таким образом, $\pi+\tilde{\pi}$ совпадает с касательной плоскостью к прообразу листа $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$. И аналогично $\pi+\tilde{\pi}$ совпадает с касательной плоскостью к прообразу $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(\tilde{\Omega})$ симплектического листа $\tilde{\Omega}\subset\tilde{\mathcal{N}}$, проходящего через точку $\tilde{\mathcal{A}}(z)$. Поскольку оба эти прообраза связны, то они совпадают друг с другом: $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)=\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(\tilde{\Omega})$, т. е. $\tilde{\Omega}=\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{-1}(\Omega))$. Пункт (а) доказан.

Далее по построению $\operatorname{codim}\pi=\dim\tilde{\pi}$, и потому $\dim\mathcal{N}=$ $=\operatorname{codim}\pi=\dim\mathfrak{X}-\dim\tilde{\mathcal{N}}$. Кроме того, в силу (2.9) $\dim\Omega=$ $=\dim(\pi+\tilde{\pi})-(\dim\mathfrak{X}-\dim\mathcal{N})$. Следовательно, $\operatorname{codim}\Omega=$ $=\operatorname{codim}(\pi+\tilde{\pi})$, и потому $\operatorname{codim}\Omega=\operatorname{codim}\tilde{\Omega}$. Пункт (b) доказан.

По построению векторы из $\pi\cap\tilde{\pi}$ характеризуются следующим свойством: они косоортогональны всем векторам из $\pi+\tilde{\pi}$. Таким образом, $\operatorname{Ker}d\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker}d\tilde{\mathcal{A}}=\pi\cap\tilde{\pi}$ совпадает с ядром сужения симплектической формы $\omega_{\mathfrak{X}}$ на $\pi+\tilde{\pi}=T_z\mathcal{Y}$, а это ядро в свою очередь совпадает с $(J(T_z\mathcal{Y}))^{\perp}$. Поэтому $\operatorname{codim}\mathcal{Y}=\dim\pi\cap\tilde{\pi}$ или $\operatorname{codim}\Omega=\dim\mathcal{A}\cap\tilde{\mathcal{A}}$.

Остается рассмотреть, как действует группа G_Ω на слоях $\mathcal{A}\cap\tilde{\mathcal{A}}$. Пусть $k^1,\ldots,k^r$ — независимые функции на $\mathcal{N}$, постоянные на Ω, $r=\operatorname{codim}\Omega$. Тогда формы $dk^i(a)$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}_a$ (1.7). Действие элемента группы $\exp(x_i dk^i(a))$ на точку

$z \in \mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$ такую, что $\mathcal{A}(z) = a$, задается формулой

$$\exp(x \cdot dk(a)) \circ z = \gamma_{\mathcal{A}^*(x \cdot k)}(z)$$

(здесь γ_F, как и всюду раньше, обозначает сдвиг за единичное время вдоль траекторий поля $\mathrm{ad}(F)$). Если поля $\mathrm{ad}(\mathcal{A}^* k^i)$ полны на $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$, то эта формула определяет транзитивное действие группы G_Ω на $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$, и, следовательно [227], слой $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$ — это фактор G_Ω по дискретной подгруппе. Пункт (c) доказан.

Если $a \in \Omega$ и $z^0 \in \mathcal{A}^{-1}(a)$, то $\tilde{\mathcal{A}}(z^0) = \tilde{a}^0 \in \tilde{\Omega}$. Любую $\tilde{a} \in \tilde{\Omega}$ можно соединить с $\tilde{a}^0$ гамильтоновыми потоками $\tilde{a} = \gamma_{f_N} \ldots \gamma_{f_1}(\tilde{a}^0)$, где $f_i \in \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{N}})$. Тогда точка $z = \gamma_{\tilde{\mathcal{A}}^* f_N} \ldots \gamma_{\tilde{\mathcal{A}}^* f_1}(z^0)$ лежит в $\mathcal{A}$-слое над точкой a и одновременно в $\tilde{\mathcal{A}}$-слое над точкой $\tilde{a}$:

$$\mathcal{A}(z) = a, \quad \tilde{\mathcal{A}}(z) = \tilde{a}.$$

Поэтому образ $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ совпадает с $\tilde{\Omega}$ (то, что образ принадлежит $\tilde{\Omega}$, следует из п. (a)). Следовательно, имеется расслоение $\tilde{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}^{-1}(a) \to \tilde{\Omega}$ со слоем $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$. В частности, $\dim \tilde{\Omega} = 0$ тогда и только тогда, когда в (2.8) реализуется равенство. В этом случае слой $\mathcal{A}$ — то же самое, что слой $\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}$, и утверждение (d) следует из (c). Теорема доказана.

Расслоение назовем *(ко) изотропным*, если его слои (ко)изотропны.

Следствие 2.1. *Если $\mathcal{A}$ — изотропное бирасслоение, то полярное ему бирасслоение коизотропно, и наоборот. Бирасслоение изотропно тогда и только тогда, когда в* (2.8) *стоит знак равенства, т. е. когда размерность r слоя совпадает с корангом матрицы, составленной из скобок Пуассона компонент расслоения. При этом если слой компактен, то он диффеоморфен тору* $\mathbf{T}^r$.

Отметим, что в силу п. (c) теоремы 2.1 всякое бирасслоение $\mathcal{A}$ в регулярных точках (где невырожден ранг $\Psi(\mathcal{A})$) порождает изотропное расслоение. Точнее, пусть $\mathcal{N}'$ подобласть в $\mathcal{N}$, расслоенная симплектическими листами, а $\tilde{\mathcal{N}}'$ соответствующая подобласть в $\tilde{\mathcal{N}}$. Обозначим через $\mathcal{N}' \circ \tilde{\mathcal{N}}' = \bigcup_{\Omega \subset \mathcal{N}'} (\Omega \times \tilde{\Omega})$ сумму Уитни $\mathcal{N}'$ и $\tilde{\mathcal{N}}'$ относительно этих расслоений. Подобласть $\mathfrak{X}' = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{N}')$ назовем областью регулярных точек $\mathcal{A}$.

Следствие 2.2. *Область $\mathfrak{X}'$ регулярных точек бирасслоения $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ допускает изотропное бирасслоение*

$$\mathcal{A} \cap \tilde{\mathcal{A}}\colon\ \mathfrak{X}' \to \mathcal{N}' \circ \tilde{\mathcal{N}}'.$$

Такие бирасслоения с изотропными слоями играют важную роль в методе редукции гамильтоновых систем (см. разд. 2.3).

Обратим также внимание на изотропные расслоения, не являющиеся бирасслоениями. Они существуют, поскольку существуют расслоения траекториями негамильтоновых полей. Загадочными являются те из них, которые инвариантны относительно заданного гамильтонова потока.

В заключение раздела приведем список лагранжевых подмногообразий, ассоциированных с бирасслоениями. Каждое из этих подмногообразий реализуется как фронт осцилляций волновых пакетов, используемых при решении задачи квантования (см. гл. IV, а также [60, 62]). В классической механике они связаны с редукцией уравнения Лиувилля по пуассонову набору интегралов.

Тип I. (a) Пусть $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X}\to\mathcal{N}$ изотропное бирасслоение и $\Omega\subset\mathcal{N}$ симплектический лист. Тогда $\mathcal{Y}(\Omega)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ лагранжево в $\mathfrak{X}$.

(b) Пусть задано бирасслоение (2.6), и пусть $\Lambda\subset\Omega$, $\tilde\Lambda\subset\tilde\Omega$ изотропные (лагранжевы) подмногообразия. Тогда подмногообразие

$$\Lambda\circ\tilde\Lambda=(\mathcal{A}\times\mathcal{A})^{-1}(\Lambda\times\tilde\Lambda)=\{z\,|\,\mathcal{A}(z)\in\Lambda,\quad \tilde{\mathcal{A}}(z)\in\tilde\Lambda\}$$

изотропно (лагранжево) в $\mathfrak{X}$.

Тип II. (a) Пусть задано бирасслоение, в котором скобки Пуассона на полярных базах различаются лишь знаком:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ {}^{l}\swarrow & & \searrow^{r} \\ \mathcal{N} & & \mathcal{N}^{(-)} \end{array} \tag{2.10}$$

(сравните с (1.16); симплектическое многообразие $\mathcal{E}$ — это аналог T^*G). Тогда подмногообразие

$$\Lambda(\Omega)\overset{\text{def}}{=}(l\cap r)^{-1}(\operatorname{diag}\Omega\times\Omega)=\{r\,|\,l(z)=r(z)\in\Omega\}$$

лагранжево в $\mathcal{E}$.

(b) Пусть заданы бирасслоение (2.10) и симплектический лист $\Omega\subset\mathcal{N}$. Тогда подмногообразие

$$\Xi(\mathfrak{X},\ \Omega)=\{(z;\ \xi,\ \xi')\,|\,l(z)=\xi\in\Omega,\quad r(z)=\xi'\in\Omega\}$$

лагранжево в $\mathfrak{X}\times\Omega^{(-)}\times\Omega$.

Тип III. (a) Пусть задано бирасслоение (2.6) и $\Omega\subset\mathcal{N}$, $\tilde\Omega\subset\tilde{\mathcal{N}}$ — соответствующие друг другу симплектические листы (так что $\mathcal{Y}=\mathcal{A}^{-1}(\Omega)=\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(\tilde\Omega)$). Тогда подмногообразие

$$\mathcal{Y}\circ\mathcal{Y}=\{(z,\ z')\,|\,\mathcal{A}(z)=\mathcal{A}(z')\in\Omega,\quad \tilde{\mathcal{A}}(z)=\tilde{\mathcal{A}}(z')\in\tilde\Omega\}$$

лагранжево в $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)}$.

(b). Пусть задано бирасслоение (2.6) и Λ — изотропное (лагранжево) подмногообразие в листе $\Omega\subset\mathcal{N}$. Тогда подмногообразие

$$\Lambda^{\#}=\{(z,\ z')\,|\,\mathcal{A}(z)\in\Lambda,\quad \mathcal{A}(z')\in\Lambda,\quad \tilde{\mathcal{A}}(z)=\tilde{\mathcal{A}}(z')\}$$

изотропно (лагранжево) в $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)}$.

(c) Пусть задано бирасслоение (2.6) и Ω — лист в $\mathcal{N}$. Тогда подмногообразие

$$\Xi\mathcal{A}=\{(z,\ z';\ \xi,\ \xi')\,|\,\mathcal{A}(z)=\xi\in\Omega,\quad \mathcal{A}(z')=\xi'\in\Omega,\ \tilde{\mathcal{A}}(z)=\tilde{\mathcal{A}}(z')\}$$

лагранжево в $(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)})\times(\Omega^{(-)}\times\Omega)$.

Описание подобных многообразий с точки зрения сумм Уитни (расслоенных произведений) см. в [32, 185].

2.3. Редукция Ли — Картана. Переменные действие-угол. В теории гамильтоновых систем бирасслоения (2.6) или системы функций (2.7) возникают в связи с задачей редукции, т. е. понижения числа степеней свободы гамильтонова поля на поверхности уровня его интегралов.

Пусть $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k$ независимые интегралы гамильтонова поля $\mathrm{ad}(H)$ на $\mathfrak{X}$, т. е.

$$\{H,\ \mathcal{A}^i\}=0,\quad i=1,\ \ldots,\ k.$$

Тогда условие (2.7a), т. е. замкнутость набора интегралов относительно скобки Пуассона, обеспечивает существование координатных функций $\tilde{\mathcal{A}}^s$, для которых выполнены (2.7b), (2.7c). Поэтому H постоянна вдоль слоев $\tilde{\mathcal{A}}$, т. е. $H(z)=f(\tilde{\mathcal{A}}(z))$, и поле $\mathrm{ad}(H)$ после проектирования вдоль $\tilde{\mathcal{A}}$ переходит в гамильтоново поле $\mathrm{ad}(f)$ на $\tilde{\mathcal{N}}$:

$$d\tilde{\mathcal{A}}(\mathrm{ad}\,H)=\mathrm{ad}(f),\quad \mathrm{ad}(f)\equiv-\Psi\,df.$$

Поле $\mathrm{ad}(f)$, как мы знаем, можно рассматривать как гамильтоново на симплектических листах $\tilde{\Omega}\subset\tilde{\mathcal{N}}$. Это завершает редукцию:

$$\mathfrak{X},\ \mathrm{ad}(H)\rightarrow\tilde{\Omega},\ \mathrm{ad}(f).$$

Размерность фазового пространства $\dim\mathfrak{X}$ понижена до размерности листа

$$\dim\tilde{\Omega}=\dim\mathfrak{X}-(\mathrm{rank}\,\mathcal{A}+\mathrm{corank}\,\Psi(\mathcal{A}))$$

(см. теорему 2.1 (d)). Пункт (c) теоремы 2.1 в этой ситуации дает

Следствие 2.3. *Пусть функция H на $\mathfrak{X}^{2n}$ имеет два набора интегралов $\mathcal{A}=(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k)$, $\tilde{\mathcal{A}}=\{\tilde{\mathcal{A}}^1, \ldots, \tilde{\mathcal{A}}^{2n-k})$, причем связная поверхность уровня*

$$T_{a,\tilde{a}}=\{z\,|\,\mathcal{A}(z)=a,\ \tilde{\mathcal{A}}(z)=\tilde{a}\};\quad a=\mathrm{const}\in\mathbf{R}^k,\ \tilde{a}=\mathrm{const}\in\mathbf{R}^{2n-k}$$

непуста и в ее окрестности интегралы в наборах $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ независимы: $\mathrm{rank}\,\mathcal{A}=k$, $\mathrm{rank}\,\tilde{\mathcal{A}}=2n-k$. *Пусть также в этой окрестности выполнены соотношения* (2.7a) — (2.7c), *причем матрицы* $((\Psi^{ij}))$, $((\tilde{\Psi}^{ks}))$ *удовлетворяют условию*

$$\mathrm{corank}\,\Psi(a')=\mathrm{corank}\,\tilde{\Psi}(\tilde{a}')$$

для всех $(a', \tilde{a}')$, *близких к* $(a, \tilde{a})$, *для которых* $T_{a', \tilde{a}'} \approx \varnothing$. *Тогда в окрестности поверхности* $T_{a, \tilde{a}}$ *каждая траектория гамильтонова поля* $\operatorname{ad}(H)$ *лежит на одной из поверхностей* $T_{a', \tilde{a}'}$, *которая*

— *имеет размерность* $\operatorname{corank} \Psi(a')$,

— *изотропна,*

— *если она компактна, то является фактором группы Ли, отвечающей алгебре Ли* (1.7), *по некоторой ее дискретной подгруппе.*

В частной ситуации, когда интегралы $\tilde{\mathcal{A}}^1, \ldots, \tilde{\mathcal{A}}^{2n-k}$ тривиальны, т. е. сводятся к функциям Казимира от интегралов $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k$ (так что $\operatorname{corank} \Psi = 2n - k$), группа Ли, о которой шла речь выше, абелева, и тогда поверхности $T_{\xi, \tilde{\xi}}$, если они компактны, диффеоморфны тору $\mathbf{T}^{2n-k}$. Это известная теорема о «некоммутативной интегрируемости», различные варианты которой см. в [105, 106, 141].

Теорема 2.2 (*о некоммутативной интегрируемости*). *Пусть функция* H *на симплектическом многообразии* $\mathfrak{X}^{2n}$ *имеет* $k \geqslant n$ *интегралов* $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k$, *независимых в окрестности связной поверхности уровня*

$$T_a = \{z \mid \mathcal{A}(z) = a\}, \quad a = \mathrm{const} \in \mathbf{R}^k. \tag{2.11}$$

Пусть $\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\} = \Psi^{ij}(\mathcal{A})$, *причем* $\operatorname{rank} \Psi(a') = 2(k-n)$ *для всех* a', *близких к* a. *Тогда:*

(1) *В окрестности* T_a *траектории гамильтонова поля* $\operatorname{ad}(H)$ *лежат на изотропных поверхностях* $T_{a'}$, *имеющих размерность* $2n-k$.

(2) *Если* $T_{a'}$ *компактны, то они являются торами и поток поля* $\operatorname{ad}(H)$ *на них условно-периодический.*

Выше не было доказано лишь самое последнее утверждение теоремы. Обратимся для этого к конструкции переменных действие-угол [110].

Прежде всего отметим, что в окрестности тора T_a симплектическая форма точна:

$$\omega_{\mathfrak{X}} = d\theta,$$

что является следствием замечательной теоремы Костанта (см. [32, с. 131]).

Теорема 2.3. *Окрестность лагранжева подмногообразия* $\Lambda \subset \mathfrak{X}$ *пуассоново диффеоморфна окрестности нулевого сечения в* $T^*\Lambda$.

Поскольку симплектическая форма в $T^*\Lambda$ точна, то и ее прообраз в окрестности Λ — точная форма.

В нашем случае тор T_a не лагранжев, а лишь изотропен. Но мы можем рассмотреть изотропную площадку размерности $k-n$, трансверсальную T_a, и взять объединение торов $T_{a'}$ по a' из этой площадки. Получим лагранжево «кольцо» Λ, в окрестности которого и применим теорему 2.3.

Следующие координаты можно ввести в $T^*\Lambda$, а значит, и в окрестности T_a: угловые координаты на торах $0 \leqslant \tau_j \leqslant 2\pi$ ($j=1, \ldots, r=2n-k$); координаты $x_1, \ldots, x_{k-n}$ вдоль трансверсальной площадки; сопряженные к τ_j и x_i «импульсы» s_j и p_i (рис. 1). Тогда

$$\omega_{\mathfrak{X}} = dp \wedge dx + ds \wedge d\tau.$$

Функции x, p, s можно рассматривать как координаты Дарбу (лемма 1.2), в которых матрица скобок Пуассона $((\Psi^{ij}))$ имеет блочный вид $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. При этом $\theta = p\,dx + s\,d\tau$, и поэтому

$$s_j = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma_j} \theta, \tag{2.12}$$

где интеграл от первообразной симплектической формы берется по базисным циклам $\Gamma_j \subset T_{a'}$. Поскольку торы $T_{a'}$ изотропны, т. е. форма θ на них замкнута, то s_j не зависят от гомотопных шевелений циклов Γ_j.

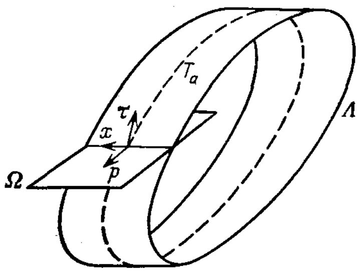


Рис. 1

Функции s и τ называются координатами *действие* и *угол*.

Очевидно, τ_j — это время на траекториях гамильтонова поля $\mathrm{ad}(s_j)$. Таким образом, эти траектории периодичны с периодом 2π и гомотопны базисному циклу $\Gamma_j \subset T_a$. Кроме того, функции действие находятся друг с другом в инволюции: $\{s_j, s_i\} = 0$.

Далее, пусть $\mathcal{N}$ — база расслоения $\mathcal{A}$, слоями которого служат торы $T_{a'}$. Пусть Ω симплектический лист в $\mathcal{N}$. Тогда по теореме 2.1 слои полярного расслоения $\tilde{\mathcal{A}}$ — это поверхности уровня функций действие: $\mathcal{Y} = \mathcal{A}^{-1}(\Omega) = \{s = \mathrm{const}\}$. Эти коизотропные поверхности расслоены торами $T_{a'}$ над базой Ω.

Поэтому любая функция H, находящаяся в инволюции со всеми $\mathcal{A}^i$, постоянна вдоль слоев $\tilde{\mathcal{A}}$, т. е. представима в виде $H = f(s_1, \ldots, s_r)$. Таким образом, ее гамильтоново поле $\mathrm{ad}(H) = \partial_j f(s) \cdot \mathrm{ad}(s_j)$ имеет условно-периодический поток с частотами $\partial_1 f(s), \ldots, \partial_r f(s)$. Это завершает доказательство теоремы 2.2.

2.4. Примеры редуцированных скобок. Примеры, с которых мы начнем, порождены классической редукцией по действию группы симметрий, т. е. восходят к теореме Нетер (см., например [2, 5]).

Пример 2.1. *Угловой момент.* В фазовом пространстве $T^*\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3_x \oplus \mathbf{R}^3_p$ рассмотрим действие группы $\mathrm{SO}(3)$:

$$(x, p) \to (\alpha x, \alpha^{*-1} p), \quad \alpha \in \mathrm{SO}(3).$$

Кроме того, пусть $M(x, p) = [x \times p]$ вектор углового момента. Если $r \equiv |x|$, то $|p|^2 = p_r^2 + (|M|/r)^2$, где p_r — импульс, сопряженный координате r. Действие группы, очевидно, сохраняет r, p_r, $|M|$. Скобки $\{r, M^i\}=\{p_r, M^i\}=\{|M|, M^i\}=0$ тождественно нулевые. Поэтому, взяв $\mathcal{A}=M$, $\tilde{\mathcal{A}}=\{r, p_r, |M|\}$, получим бирасслоение вида (2.6). Скобка на $\mathcal{N}$ совпадает с линейной скобкой на SO (3)*:

$$\{M^1, M^3\}=M^3 \quad (+\text{ циклические перестановки}),$$

а скобка на $\tilde{\mathcal{N}}$ такая:

$$\{p_r, r\}=1, \quad \{p_r, |M|\}=\{r, |M|\}=0.$$

Симплектический лист

$$\Omega=\{(M_1)^1+(M_2)^2+(M_3)^2=\text{const}\}\approx \mathbf{S}^2\subset\mathcal{N}$$

соответствует листу

$$\tilde{\Omega}=\{|M|=\text{const}\}\approx \mathbf{R}^2\subset\tilde{\mathcal{N}}.$$

Симплектические формы на них стандартные:

$$\omega_\Omega=|M|\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi, \quad \omega_{\tilde{\Omega}}=dp_r\wedge dr,$$

где θ, φ сферические углы на $\mathbf{S}^2$.

Пример 2.2. *Двумерный осциллятор*. В фазовом пространстве $T^*\mathbf{R}^2=\mathbf{R}^2_x\oplus\mathbf{R}^2_p$ гамильтониан $H=|x|^2+|p|^2$ имеет набор первых интегралов

$$\mathcal{B}_1=\frac{(x_1^2+p_1^2)-(x_2^2+p_2^2)}{2}, \quad \mathcal{B}_2=x_1x_2+p_1p_2, \quad \mathcal{B}_3=p_1x_2-x_1p_2$$

и, конечно, интеграл «энергии» $\mathcal{B}_0\equiv H$. Скобки между ними такие:

$$\begin{aligned}&\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}=\mathcal{B}_3 \quad (+\text{ циклические перестановки}),\\ &\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_j\}=0, \quad j=1, 2, 3.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Поэтому имеем отображение $\mathcal{B}$: $T^*\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^4\approx u(2)^*$.

Но нужно заметить, что компоненты $\mathcal{B}$ функционально зависимы:

$$(\mathcal{B}_1)^2+(\mathcal{B}_2)^2+(\mathcal{B}_3)^2=(\mathcal{B}_0)^2. \tag{2.14}$$

Таким образом, линейная пуассонова структура (2.13) ограничивается на конус (2.14) и дает нелинейную пуассонову структуру на многообразии $\mathcal{N}$ первых интегралов осциллятора. Бирасслоение $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$: $T^*\mathbf{R}^2\to\mathcal{N}$ одномерно; его слои — это траектории поля ad(H), т. е. окружности. Слои полярного расслоения $\tilde{\mathcal{A}}$ трехмерны — это уровни энергии $\{H=\text{const}\}\approx\mathbf{S}^3$; они расслаиваются траекториями над базой $\Omega\approx\mathbf{S}^2$ (расслоение Хопфа). Полярное пуассоново многообразие «уровней энергии» $\tilde{\mathcal{N}}$ одномерно, и скобка на нем нулевая.

В этом примере задействован общий механизм возникновения нелинейных скобок из линейных: берется скобка на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ и ограничивается на нелинейное подмногообразие $\mathcal{N}\subset\mathfrak{g}^*$.

Лемма 2.6. *Скобка Пуассона корректно сужается на подмногообразие тогда и только тогда, когда это подмногообразие является объединением симплектических листов.*

Доказательство. Пусть локально подмногообразие задано уравнениями

$$k^1 = \ldots = k^l = 0, \quad \operatorname{rank} \partial k = l.$$

Пусть f, g — две функции на подмногообразии и $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ — их произвольные гладкие продолжения. Нам нужно, чтобы скобка $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}$ после сужения на подмногообразие не зависела от способа продолжения функций f и g. Поскольку $d\tilde{f}|_{k=0} = df + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial k^i}\right|_{k=0} dk^i$, то нужно, чтобы $\Psi|_{k=0} dk^i = 0$ $\forall i$. Это означает, что все функции k^i должны быть постоянны на симплектических листах, т. е. листы не должны быть трансверсальны подмногообразию. Лемма доказана.

Пример 2.3. *Трехмерный осциллятор.* В фазовом пространстве $\mathbf{R}^3_x \oplus \mathbf{R}^3_p$ гамильтониан $H = |x|^2 + |p|^2$ имеет набор первых интегралов:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_1 = (x_1)^2 + (p_1)^2, && \mathcal{B}_2 = (x_2)^2 + (p_2)^2, && \mathcal{B}_3 = (x_3)^2 + (p_3)^2, \\ &\mathcal{B}_4 = x_1x_2 + p_1p_2, && \mathcal{B}_5 = x_1x_3 + p_1p_3, && \mathcal{B}_6 = x_2x_3 + p_2p_3, \\ &\mathcal{B}_7 = x_2p_3 - x_3p_2, && \mathcal{B}_8 = x_3p_1 - x_1p_3, && \mathcal{B}_9 = x_1p_2 - x_2p_1, \end{aligned}$$

образующих девятимерную алгебру Ли $\mathfrak{g} = u(3)$. Эти интегралы функционально зависимы:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 = (\mathcal{B}_4)^2 + (\mathcal{B}_9)^2, && \mathcal{B}_1\mathcal{B}_3 = (\mathcal{B}_5)^2 + (\mathcal{B}_8)^2, \\ &\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3 = (\mathcal{B}_6)^2 + (\mathcal{B}_7)^2, && \mathcal{B}_1\mathcal{B}_7 + \mathcal{B}_4\mathcal{B}_8 + \mathcal{B}_5\mathcal{B}_9 = 0. \end{aligned}$$

Поверхность $\mathcal{N}^5 \subset u(3)^*$, задаваемая этими уравнениями, служит базой изотропного бирасслоения $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: $\mathbf{R}^6 \setminus \{0\} \to \mathcal{N}^5$ окружностями $\mathbf{S}^1$, т. е. замкнутыми траекториями поля $\operatorname{ad}(H)$. Полярное ему $\tilde{\mathcal{A}}$ — это коизотропное расслоение уравнениями энергии $\mathcal{Y} = \{H = \text{const}\} \approx \mathbf{S}^5$. Скобка Пуассона на $\mathcal{N}^5$ либо индуцируется из $\mathbf{R}^6$ с помощью $\mathcal{A}$ (лемма 2.5), либо сужается из $u(3)^*$ (лемма 2.6). Результат будет один и тот же.

Симплектические листы $\Omega^4 \subset \mathcal{N}^5$ диффеоморфны CP^2 (это база $\mathbf{S}^1$-расслоения сферы $\mathbf{S}^5$) и задаются уравнением

$$H \equiv (\mathcal{B}_1)^2 + (\mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{B}_3)^2 = \text{const}.$$

В объемлющей коалгебре $u(3)^*$ эти поверхности Ω^4 являются вырожденными (маломерными) симплектическими листами; листы общего положения в $u(3)^*$ шестимерны.

Отметим, что первый класс Чженя c_1 на листах общего положения в коалгебрах Ли всегда четный [158]. *Приведенный пример показывает, что на вырожденных листах это не так: значение класса c_1 на образующей в $H_2(CP^2)$ равно* 3 [28]. В то же время для пуассонова многообразия $\mathcal{N}^5$ листы $\Omega^4 \approx CP^2$ — общего положения.

Пример 2.4. *Симметрия фазового пространства над группой Ли.* Вначале напомним классическую схему возникновения скобок Пуассона из действий групп (симметрий) на фазовом пространстве [2, 5, 186, 216, 217].

Если группа Ли G действует на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$ пуассоновыми преобразованиями:

$$
\begin{gathered}
z \to \alpha \circ z, \quad \alpha \in G, \quad z \in \mathfrak{X}; \\
\{f(\alpha \circ z),\ g(\alpha \circ z)\}_z = \{f,\ g\}(\alpha \circ z),
\end{gathered} \tag{2.15}
$$

то каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ соответствует гамильтоново поле (генератор действия) $\mathrm{ad}(H_X)$. Линейное отображение $X \to H_X$ из $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ не обязательно гомоморфизм, поскольку функции H_X восстанавливаются по генераторам $\mathrm{ad}(H_X)$ лишь с точностью до константы. Поэтому

$$\{H_X,\ H_Y\} = H_{[X,Y]} + c(X,\ Y), \quad c(X,\ Y) = \mathrm{const}.$$

Из тождества Якоби очевидно, что функция $c\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ коцикл алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. удовлетворяет (1.45). Таким образом, если $H_X(z) = \mathcal{A}^i(z)\, x_i$, где x_i — координаты элемента X, то

$$\{\mathcal{A}^i,\ \mathcal{A}^j\} = \lambda_m^{ij} \mathcal{A}^m + c^{ij}, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ k = \dim \mathfrak{g}.$$

Отображение $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{N} \subset \mathbf{R}^k$ задает бирасслоение. Индуцированная скобка на базе $\mathcal{N}$ — это аффинная скобка из примера 1.1; и, в частности, если коцикл тривиален: $c^{ij} = \lambda_m^{ij} a^m$, то после сдвига $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + a$ скобка на $\mathcal{N}$ совпадает с линейной скобкой на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$. Полярное расслоение $\tilde{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{X} \to \tilde{\mathcal{N}}$ — это расслоение G-орбитами (конечно, нужно требовать, чтобы действие группы задавало глобальное расслоение). Полярное пуассоново многообразие $\tilde{\mathcal{N}}$ или симплектические листы $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ иногда называют *приведенным фазовым пространством.* Если G — группа симметрий гамильтониана H, т. е. $H(\alpha \circ z) \equiv H(z)$ $\forall \alpha \in G$; то $H = \tilde{\mathcal{A}}^* f$ и гамильтоново поле $\mathrm{ad}(H)$ проектируется вдоль G-орбит в гамильтоново поле $\mathrm{ad}(f)$ на $\tilde{\mathcal{N}}$ (на $\tilde{\Omega}$). Это частный случай процедуры редукции из п. 2.3.

Теперь рассмотрим один интересный вариант такой конструкции. Поскольку группа G действует на себе внутренними автоморфизмами

$$q \to \alpha \cdot q \cdot \alpha^{-1}, \quad \alpha \in G, \quad q \in G,$$

то она действует и на T^*G

$$(q,\ p) \to (\alpha \cdot q \cdot \alpha^{-1},\ L(\alpha)^{-1*} R(\alpha)^* p). \tag{2.16}$$

Эти преобразования пуассоновы (т. е. выполнено (2.15)) и расслаивают область $\mathfrak{X} = \{(q,\ p) \mid L(q)^* p \neq R(q)^* p\}$ над некоторой базой $\tilde{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{X} \to \tilde{\mathcal{N}}$. Полярное бирасслоение $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ имеет вид $\mathcal{A} = l - r$, где $l(q,\ p) = R(q)^* p$, $r(q,\ p) = L(q)^* p$ (сравните с (1.16)).

Таким образом, на многообразии $\tilde{\mathcal{N}}$ однозначно индуцируется некоторая скобка Пуассона, относительно которой отображение $\tilde{\mathcal{A}}$ пуассоново. Любая гамильтонова система в T^*G с гамильтонианом, инвариантным относительно внутренних автоморфизмов (2.16), редуцируется к системе на $\tilde{\mathcal{N}}$ (а значит, на листах $\tilde{\Omega}\subset\tilde{\mathcal{N}}$). Приведем простой пример.

Пример 2.5. *Гамильтониан Леггетта и маятник.* При описании спиновой динамики B-фазы сверхтекучего ^{3}He возникают фазовое пространство $T^*\mathrm{SO}(3)$ и гамильтониан Леггетта

$$H(q,\ p)=|dL(q)^*p|^2+\mu(1/2-\mathrm{tr}(q))^2,\quad \mu>0. \qquad (2.17)$$

Здесь q точка группы $\mathrm{SO}(3)$, реализованной 3×3-матрицами вращения, $\mathrm{tr}(q)$ — след матрицы. Первое слагаемое $|dL(q)^*p|^2$ — это гамильтониан свободной «частицы» на $G=\mathrm{SO}(3)$ (в инвариантной метрике, порожденной формой Киллинга на $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(3)$).

Оба слагаемых в (2.17) инвариантны относительно внутренних автоморфизмов (2.16). Поэтому, как в предыдущем примере, можно рассмотреть расслоение $\tilde{\mathcal{A}}$: $T^*\mathrm{SO}(3)\to\tilde{\mathcal{N}}$ и редуцировать систему Леггетта на $\tilde{\mathcal{N}}$. Причем на приведенном многообразии $\tilde{\mathcal{N}}$ возникает нелинейная скобка Пуассона. Она была вычислена в [181] (подробности и широкие обобщения содержатся в обзоре [111]). Оказывается, эта скобка Пуассона в подходящей системе координат имеет простой квадратичный вид.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}_1=|dL(q)^*p|^2$, $\tilde{\mathcal{A}}_2=3-\mathrm{tr}(q)$. Тогда [63]:

$$\{\tilde{\mathcal{A}}_1,\ \tilde{\mathcal{A}}_2\}=2\tilde{\mathcal{A}}_3(4-\tilde{\mathcal{A}}_2),\quad \{\tilde{\mathcal{A}}_3,\ \tilde{\mathcal{A}}_2\}=\tilde{\mathcal{A}}_2,\quad \{\tilde{\mathcal{A}}_1,\ \tilde{\mathcal{A}}_3\}=\tilde{\mathcal{A}}_1+(\tilde{\mathcal{A}}_3)^2. \qquad (2.18)$$

Первое из этих соотношений служит определением $\tilde{\mathcal{A}}_3$. Функция Казимира здесь имеет вид

$$k(\zeta)=\zeta_1\zeta_2-(\zeta_3)^2(4-\zeta_2),\quad \zeta_i\equiv\tilde{\mathcal{A}}_i(q,\ p).$$

Система в $T^*\mathrm{SO}(3)$ с гамильтонианом Леггетта $H=\tilde{\mathcal{A}}_1+\mu(5/2-\tilde{\mathcal{A}}_2)^2$ редуцируется к гамильтоновой системе на двумерной поверхности

$$\tilde{\Omega}=\{k(\zeta)=k=\mathrm{const}\}\subset\tilde{\mathcal{N}}$$

с симплектической формой $\omega_{\tilde{\Omega}}=\frac{1}{2}(\zeta_1\zeta_2(4-\zeta_2))^{-1/2}d\zeta_1\wedge d\zeta_2$. Траектории — это совместные линии уровня

$$\zeta_1\zeta_2-(\zeta_3)^2(4-\zeta_2)^2=k,\qquad \zeta_1+\mu(5/2-\zeta_2)^2=\lambda$$

и устойчивая точка покоя

$$\zeta_3=0,\quad \zeta_1=\mu\zeta_2(2\zeta_2-5),\quad \zeta_1\zeta_2=k\quad \text{при}\quad 0<k<12\mu.$$

Отметим, что квадратичная скобка (2.18) реализуется еще и таким способом:

$$\tilde{\mathcal{A}}_1=p^2,\quad \tilde{\mathcal{A}}_2=4\sin^2(x/2),\quad \tilde{\mathcal{A}}_3=p\,\mathrm{tg}\,(x/2),$$

где $x \in (-\pi, \pi)$ (при этом скобки $\{\ldots, \ldots\}$ в (2.18) нужно брать относительно стандартной симплектической формы $dp \wedge dx$). Через эти образующие записывается, например, классический гамильтониан маятника:

$$H = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2) = \frac{1}{2}p^2 - \cos x + 1.$$

Линейная аппроксимация скобки (2.18) в нуле:

$$\{a_1, a_2\} = 8a_3, \quad \{a_3, a_2\} = a_2, \quad \{a_1, a_3\} = a_1$$

— это скобка на $\mathrm{so}(2, 1)^*$. Таким образом, (2.18) можно воспринимать как значение при $\varepsilon = 1$ нелинейной деформации этой линейной скобки:

$$\{a_1, a_2\} = 8a_3 - 2\varepsilon a_2 a_3, \quad \{a_3, a_2\} = a_2, \quad \{a_1, a_3\} = a_1 + \varepsilon (a_3)^2.$$

Пример 2.6. *Расслоение орбитами внутренних автоморфизмов группы.* Пусть группа Ли снабжена инвариантной скобкой (см. (1.42)). Она действует на себе внутренними автоморфизмами. Предположим, что орбиты этого действия расслаивают некоторую подобласть $\mathcal{N}$ в группе. Обозначим такое расслоение через $\mathcal{A}$: $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{N}}$, а его слои (орбиты) обозначим буквой $\mathcal{O}$.

Теорема 2.4. (a) *Класс $\mathcal{F}^{\mathrm{inv}}(\mathcal{N})$ функций, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов группы, замкнут относительно скобки Пуассона. В частности, расслоение $\mathcal{A}$ однозначно индуцирует пуассонову структуру на многообразии инвариантов $\overline{\mathcal{N}}$.*

(b) *Если скобка на группе задана с помощью решения общего уравнения Янга—Бакстера, т. е. по формуле* (1.55), *то пересечения орбит внутренних автоморфизмов с симплектическими листами $\Omega \subset \mathcal{N}$ коизотропны в Ω.*

Доказательство. (a) Запишем скобку на $\mathcal{N}$ двумя способами:

$$\{f, g\} = \tilde{\sigma}(\mathcal{D}'f, \mathcal{D}'g) = \tilde{\eta}(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g), \tag{2.19}$$

где $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ — правые и левые поля. Инвариантность скобки означает, что

$$\{f(\xi\zeta), g(\xi\zeta)\}_\xi + \{f(\xi\zeta), g(\xi\zeta)\}_\zeta = \{f, g\}(\xi\zeta) \tag{2.20}$$

(нижние значки ξ и ζ указывают переменные на $\mathcal{N}$, по которым берется скобка).

Продифференцируем (2.20) по ξ при $\xi = e$ с помощью правого поля $\mathcal{D}'_i$, причем в первом слагаемом (2.20) используем представление скобки (2.19) через тензор $\tilde{\sigma}$. Учитывая, что $\tilde{\sigma}(e) = \tilde{\eta}(e) = 0$ и что $\mathcal{D}'_i\tilde{\sigma}(e) = \mathcal{D}_i\tilde{\eta}(e) = \lambda_i$ — это матрица структурных констант (1.38), получаем

$$\lambda_i(\mathcal{D}'f, \mathcal{D}'g) + \{\mathcal{D}'_i f, g\} + \{f, \mathcal{D}'_i g\} = \mathcal{D}'_i\{f, g\}. \tag{2.21}$$

Аналогично дифференцируем (2.20) по ζ при $\zeta = e$ с помощью левого поля $\mathcal{D}_i$, причем во втором слагаемом (2.20) используем представление скобки (2.19) через тензор $\tilde{\eta}$. Получаем

$$\{\mathcal{D}_i f,\ g\}+\{f,\ \mathcal{D}_i g\}+\lambda_i(\mathcal{D}f,\ \mathcal{D}g)=\mathcal{D}_i\{f,\ g\}. \tag{2.22}$$

Вычитая (2.21) из (2.22), найдем

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_i-\mathcal{D}_i')\{f,\ g\}=\{(\mathcal{D}_i-\mathcal{D}_i')f,\ g\}+\{f,\ (\mathcal{D}_i-\mathcal{D}_i')g\}+\\ +\lambda_i((\mathcal{D}-\mathcal{D}')f,\ \mathcal{D}g)+\lambda_i(\mathcal{D}'f,\ (\mathcal{D}-\mathcal{D}')g).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Предположим теперь, что функции f и g инвариантны относительно внутренних автоморфизмов, т. е. что

$$(\mathcal{D}-\mathcal{D}')f=(\mathcal{D}-\mathcal{D}')g=0.$$

Тогда из (2.23) следует $(\mathcal{D}-\mathcal{D}')\{f,\ g\}=0$, т. е. функция $\{f,\ g\}$ также инвариантна. Итак, на базе $\overline{\mathcal{N}}$ индуцируется скобка Пуассона такая, что $\mathcal{A}$: $\mathcal{N}\to\overline{\mathcal{N}}$ — пуассоново расслоение. Сужение $\mathcal{A}$: $\Omega\to\overline{\mathcal{N}}_\Omega$ также пуассоново.

(*b*) Если скобка на $\mathcal{N}$ задана формулой (1.55), то она аннулируется на инвариантных функциях, и поэтому скобка на $\overline{\mathcal{N}}$ и на $\overline{\mathcal{N}}_\Omega$ нулевая. Следовательно, в этом случае слои $\mathcal{A}|_\Omega$ коизотропны. Теорема доказана.

Результат этой теоремы — основа метода обратной задачи; подробности изложены в обзорах [49, 119, 175] (обычно группа $\mathcal{N}$ реализуется как группа матриц, а в качестве функций из $\mathcal{F}^{\mathrm{inv}}(\mathcal{N})$ берутся функции вида $\xi\to\operatorname{tr}\varphi(\xi)$, где tr обозначает след, $\varphi(\xi)$ — это функция от матрицы ξ).

Замечание 2.1. В условиях теоремы 2.4 (b) еще нельзя гарантировать, что гамильтоновы поля из $\mathcal{F}^{\mathrm{inv}}(\mathcal{N})$ интегрируемы на Ω. Но в силу коизотропности пересечений $\mathcal{O}\cap\Omega$, коразмерности орбит $\mathcal{O}$ в Ω не превышают половины размерности Ω, т. е. половины ранга матрицы $\tilde{\sigma}(\xi)=\operatorname{Ad}(\xi)\,r\operatorname{Ad}(\xi)^*-r$. Полагая $\xi=\exp(\varepsilon u)$, где $u\in\mathfrak{n}$, мы при достаточно малом ε будем иметь (см. (1.48)):

$$\operatorname{rank}\tilde{\sigma}(\exp(\varepsilon u))\geqslant\operatorname{rank}\lambda(\varepsilon u). \tag{2.24}$$

С другой стороны, коразмерность орбиты $\mathcal{O}$ совпадает с размерностью коммутанта $\{v\in\mathfrak{n}\,|\,[u,\ v]_{\mathfrak{n}}=0\}=\operatorname{Ker}\operatorname{ad}(u)$, т. е.

$$\operatorname{codim}\mathcal{O}=\operatorname{corank}\operatorname{ad}(u). \tag{2.25}$$

Из (2.24), (2.25) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\operatorname{rank}(\operatorname{ad}(u)\,r+r\operatorname{ad}(u)^*)\leqslant\operatorname{corank}(\operatorname{ad}(u)) \tag{2.26}$$

для всех $u\in\mathfrak{n}$ и любого решения r общего уравнения Янга — Бакстера над $\mathfrak{n}$. Если неравенство (2.26) для некоторого u превращается в равенство, то при всех достаточно малых ε пересечения $\mathcal{O}\cap\Omega$, проходящие через точки $\exp(\varepsilon u)$, лагранжевы в Ω и инвариантны относительно гамильтоновых полей любых функций из $\mathcal{F}^{\mathrm{inv}}(\mathcal{N})$.

Действительно, в случае равенства в (2.26) имеем

$$\operatorname{codim} \mathscr{G} = \frac{1}{2} \dim \Omega, \tag{2.27}$$

т. е. $\mathscr{G} \cap \Omega$ лагранжево.

Пример 2.7. *Расслоения, порожденные пуассоновыми парами.* Пусть тензоры Ψ и Φ задают пуассонову пару на многообразии $\mathscr{N}$ (см. пример 1.3). Скобки Пуассона на $\mathscr{N}$, порожденные тензорами Ψ или Φ, будем обозначать через $\{\cdot, \cdot\}_\Psi$ или $\{\cdot, \cdot\}_\Phi$, их симплектические листы — через Ω_Ψ или Ω_Φ, а функции, постоянные на листах, будем называть Ψ- или Φ-функциями Казимира соответственно.

Теорема 2.5. *Пусть скобки, заданные тензорами Ψ и Φ, образуют пуассонову пару. Тогда*

(a) *Ψ-скобка двух Φ-функций Казимира также является Φ-функцией Казимира;*

(b) *пересечения листов $\Omega_\Psi \cap \Omega_\Phi$ образуют бислоение в Ω_Ψ;*

(c) *если все Φ-функции Казимира коммутируют относительно Ψ-скобки, то пересечения листов $\Omega_\Psi \cap \Omega_\Phi$ коизотропны.*

Доказательство. Имеем для любых Φ-функций Казимира h_1, h_2:

$$\Phi d(\{h_1, h_2\}_\Psi) = 0, \tag{2.28}$$

поскольку Φ и Ψ образуют пуассонову пару (см. ниже лемму 2.7 и тождество Якоби для скобки Схоутена). Отсюда следует (a). Далее поскольку функции, постоянные на $\Omega_\Psi \cap \Omega_\Phi$, выражаются через Ψ- и Φ-функции Казимира, то их Ψ-скобка постоянна на $\Omega_\Psi \cap \Omega_\Phi$ (или равна нулю в случае (c)). Теорема доказана.

2.5. Скобки, порожденные 2-формами. Скобка Дирака. Имеется важный частный случай скобок, связанных с бирасслоениями. Он интересен тем, что дает новую пуассонову структуру не на базе расслоения, а в исходном пространстве.

Пусть $\mathscr{A}\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{N}$ бирасслоение (2.6), (2.7) симплектического многообразия $\mathfrak{X}$, причем

$$\operatorname{rank} \Psi(\mathscr{A}) = \operatorname{rank} \mathscr{A},$$

т. е. скобка Пуассона на базе $\mathscr{N}$ невырождена. Тем самым $\mathscr{N}$ — симплектическое многообразие. Прообраз симплектической формы

$$S = \mathscr{A}^* \omega_{\mathscr{N}} = \frac{1}{2} (\Psi^{-1})_{ij}\, d\mathscr{A}^i \wedge d\mathscr{A}^j \tag{2.29}$$

является замкнутой 2-формой на $\mathfrak{X}$. Ниже мы докажем, что она порождает следующее семейство скобок Пуассона:

$$\{F, H\}_\varepsilon = \{F, H\}_0 + \varepsilon S(\mathrm{ad}_0(F), \mathrm{ad}_0(H)), \tag{2.30}$$

где $F, H \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$, ε — вещественный параметр. Скобка $\{\ldots, \ldots\}_0$, а также гамильтоновы поля $\mathrm{ad}_0(\ldots)$ здесь берутся относительно исходной симплектической структуры на $\mathfrak{X}$, т. е.

$$\{F, H\}_0 \equiv \mathrm{ad}_0(F) H \equiv \omega_{\mathfrak{X}}(\mathrm{ad}_0(F), \mathrm{ad}_0(H)).$$

В координатной записи семейство скобок (2.30) выглядит так:

$$\{F, H\}_\varepsilon = \{F, H\}_0 + \varepsilon (\Psi^{-1})_{ij} \{\mathcal{A}^i, F\}_0 \{\mathcal{A}^j, F\}_0,$$

где, напомним,

$$\Psi = ((\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\}_0))$$

есть невырожденная матрица, составленная из скобок между компонентами $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^k$ бирасслоения $\mathcal{A}$ (k четное).

Интересно, что при $\varepsilon = 1$ можно отказаться от приставки «би», означающей замкнутость набора функций $\mathcal{A}^i$ относительно скобок Пуассона (лемма 2.4) или, что эквивалентно, — замкнутость формы (2.29). Это удивительный и совсем нетривиальный факт был обнаружен, так сказать, «в экспериментальном порядке» Дираком [43].

Скобка (2.30) при $\varepsilon = 1$ называется *скобкой Дирака*, а форма (2.29) — *формой Дирака.*

Мы докажем все сформулированные утверждения (см. пример 2.6), предварительно максимально обобщив конструкцию Дирака. Будем рассматривать произвольные 2-формы вместо (2.29) и произвольные пуассоновы многообразия вместо $\mathfrak{X}$. Это приведет к дифференциальному аналогу уравнения Янга — Бакстера.

Начнем с напоминания, что над любым многообразием $\mathcal{M}$ в пространстве антисимметричных контравариантных тензоров определена билинейная операция — *скобка Схоутена* [237]:

$$M^r(\mathcal{M}) \times M^n(\mathcal{M}) \to M^{r+n-1}(\mathcal{M}).$$

Если рассматривать тензоры как поливекторные поля

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r!} R^{i_1 \ldots i_r} \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_r}, \quad R \in M^r(\mathcal{M}),$$

то скобку Схоутена можно задать так [1, 207]:

$$[\![u_1 \wedge \ldots \wedge u_r, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n]\!] = \\ = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [u_i, v_j] \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \\ \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_j \wedge \ldots \wedge v_n.$$

В частности, на 1-тензорах, т. е. на векторных полях, скобка Схоутена совпадает с обычным коммутатором. Скобка между 2-тензором Φ и векторным полем u — это 2-тензор

$$[\![\Phi, u]\!]^{ij} = \Phi^{is}\partial_s u^j - \Phi^{js}\partial_s u^i - u^s \partial_s \Phi^{ij}, \tag{2.31}$$

а скобка между 2-тензором Φ и 2-тензором Ξ — это 3-тензор

$$[\![\Phi, \Xi]\!]^{ijk} = \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} (\Phi^{is}\partial_s \Xi^{jk} + \Xi^{is}\partial_s \Phi^{jk}) \tag{2.32}$$

и т. д.

Отметим, что скобка Схоутена задает в пространстве контравариантных тензоров структуру супералгебры Ли (см., например, [135]):

$$[\![R,\ L]\!] = (-1)^{d(R)\,d(L)}[\![L,\ R]\!],$$

$$(-1)^{d(R)\,d(Q)}[\![[\![R,\ L]\!],\ Q]\!] + (-1)^{d(L)\,d(R)}[\![[\![L,\ Q]\!],\ R]\!] + (-1)^{d(Q)\,d(L)}[\![[\![Q,\ R]\!],\ L]\!] = 0,$$

где $d(R)$ — степень тензора R.

Предположим теперь, что $\mathcal{M}$ пуассоново многообразие со скобкой Пуассона

$$\{f,\ g\} = \Phi(df,\ dg).$$

Тензор $\Phi \in M^2(\mathcal{M})$, задающий скобку Пуассона, будем в этом параграфе для краткости называть *скобочным тензором* (используется также термин «гамильтонов оператор»).

Лемма 2.7. *Антисимметричный тензор Φ скобочный тогда и только тогда, когда $[\![\Phi,\ \Phi]\!] = 0$. Два скобочных тензора Φ и Φ_1 задают семейство скобочных тензоров $(t\Phi + \tau\Phi_1)$ (т. е. соответствующие скобки Пуассона образуют пуассонову пару) тогда и только тогда, когда $[\![\Phi,\ \Phi_1]\!] = 0$.*

Сопоставим теперь каждой r-форме $\sigma \in \mathcal{F}^r(\mathcal{M})$:

$$\sigma = \frac{1}{r!}\sigma_{i_1\ldots i_r}(\zeta)\,d\zeta^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\zeta^{i_r},\quad \zeta\in\mathcal{M},$$

тензор (или r — поливекторное поле) $\Phi^\star\sigma \in M^r(\mathcal{M})$ по формуле

$$\Phi^\star\sigma(f_1,\ \ldots,\ f_r) \stackrel{\text{def}}{=} -\sigma(\operatorname{ad}(f_1),\ \ldots,\ \operatorname{ad}(f_r)). \tag{2.33}$$

Здесь

$$f_j \in \mathcal{F}(\mathcal{M}),\quad \operatorname{ad}(f_j) = -\Phi\, df_j.$$

В координатной записи формула (2.33) выглядит так:

$$(\Phi^\star\sigma)^{i_1\ldots i_r} = -\Phi^{i_1 j_1}\ldots\Phi^{i_r j_r}\sigma_{j_1\ldots j_r}.$$

Мы получаем линейное отображение

$$\Phi^\star\colon \mathcal{F}^r(\mathcal{M}) \to M^r(\mathcal{M}),\quad r = 1,\ 2,\ \ldots$$

и может теперь определить в пространстве дифференциальных форм $\mathcal{F}^r$ бинарную операцию так, чтобы это отображение оказалось гомоморфизмом.

Пусть μ и ν две дифференциальные формы на $\mathcal{M}$ степеней r и n соответственно. Введем вспомогательное обозначение

$$\Phi(\mu,\ \nu)_{i_1\ldots i_{r+n-2}} = \mathop{\mathfrak{S}}_{(i'_1\ldots i'_{r+n-2})} (-1)^{e(i'_1\ldots i'_{r+n-2})} \times \mu_{s i'_1\ldots i'_{r-1}}\Phi^{sm}\nu_{m i'_r\ldots i'_{r+n-2}},$$

где сумма берется по всем циклическим перестановкам набора индексов $i_1,\ \ldots,\ i_{r+n-2}$, а $e(\ldots)$ — четность перестановки. Положим [66]:

$$[\mu,\ \nu] \stackrel{\text{def}}{=} d\Phi(\mu,\ \nu) + \Phi(d\mu,\ \nu) + (-1)^{\deg(\mu)+1}\Phi(\mu,\ d\nu). \tag{2.34}$$

Эта операция естественным образом распространяет понятие коммутатора 1-форм над пуассоновым многообразием (1.4) на формы произвольной степени. Коммутатор форм степени r и n — это форма степени $r+n-1$. Справедлива следующая ключевая теорема [66].

Теорема 2.6. *Операция* (2.34) *наделяет пространство дифференциальных форм над пуассоновым многообразием структурой супералгебры и отображение* $\Phi^{\star}$ — *ее гомоморфизм в супералгебру антисимметричных тензоров, т. е.* $[\![\Phi^{\star}(\mu), \Phi^{\star}(\nu)]\!] = \Phi^{\star}([\mu, \nu])$. *Кроме того,*

$$[\![\Phi, \Phi^{\star}(\nu)]\!] = \Phi^{\star}(d\nu).$$

Рассмотрим теперь произвольную 2-форму S на пуассоновом многообразии $\mathcal{M}$. Подсчитаем ее самокоммутатор $[S, S]$. Матрица этой 3-формы такая:

$$[S, S]_{ijk} = 2 \underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} (S_{is}\partial_j \Phi^{sm} S_{mk} + S_{is}\Phi^{sm}\partial_m S_{jk}). \tag{2.35}$$

Из теоремы 2.6 получаем целую серию следствий [66].

Следствие 2.4. *Пусть $\mathcal{M}$ пуассоново многообразие со скобочным тензором Φ и S — дифференциальная 2-форма на нем. Тензор $\Phi^{\star}S$ будет скобочным на $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда выполнено тождество $\Phi^{\star}[S, S] = 0$ и, в частности, когда $[S, S] = 0$, т. е.*

$$\underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} (S_{is}\partial_j \Phi^{sm} S_{mk} + S_{is}\Phi^{sm}\partial_m S_{jk}) = 0 \tag{2.36}$$

для всех i, j, k.

Если исходная скобка невырождена, то условие (2.36), конечно, не только достаточное, но и необходимое. В общем случае условие (2.36) можно воспринимать как дифференциальный аналог уравнения Янга — Бакстера (1.54).

Итак, при выполнении (2.36) мы имеем новую скобку Пуассона на $\mathcal{M}$:

$$\{f, g\}^S \overset{\text{def}}{=} S(\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g)). \tag{2.37}$$

Следствие 2.5. *Если 2-форма S на $\mathcal{M}$ невырождена и тем самым существует тензор S^{-1}, то при условии $[\![\Phi, S^{-1}]\!] = 0$ формула* (2.37) *задает скобку Пуассона на $\mathcal{M}$. Если S к тому же замкнута, то эта скобка образует пуассонову пару с исходной.*

Доказательство. Первое утверждение — непосредственное следствие (2.35) и определения скобки Схоутена (2.32):

$$[S, S]_{ijk} = -2 \underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} (S_{is}S_{jl}S_{km} [\![\Phi, S^{-1}]\!]^{slm}). \tag{2.38}$$

Далее, очевидно, имеем

$$[\![\Phi - \varepsilon\Phi^{\star}S, \Phi - \varepsilon\Phi^{\star}S]\!] = \varepsilon^2\Phi^{\star}[\![S, S]\!] - \\ - 2\varepsilon[\![\Phi, \Phi^{\star}S]\!] + [\![\Phi, \Phi]\!] = -2\varepsilon\Phi^{\star} dS,$$

поскольку по условию $[\![\Phi, \Phi]\!] = [\![\Phi, S^{-1}]\!] = 0$ и, кроме того, $[\![\Phi, \Phi^\star S]\!] = \Phi^\star dS$.

Таким образом, если $dS = 0$, то тензор $(\Phi - \varepsilon\Phi^\star S)$ скобочный при всех $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Следствие доказано.

Итак, в предположениях следствия 2.5 мы получаем на $\mathscr{M}$ семейство скобок Пуассона

$$\{f, g\}_\varepsilon = \{f, g\} + \varepsilon S(\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g)). \tag{2.39}$$

Можно теперь отказаться от невырожденности формы S.

Следствие 2.6. (a) *Пусть матрица 2-формы S на пуассоновом многообразии $\mathscr{M}$ удовлетворяет условию*

$$\underset{(i, j, k)}{\mathfrak{S}} (S_{is}\partial_j\Phi^{sm}S_{mk} + S_{is}\Phi^{sm}\partial_m S_{jk} - \partial_i S_{jk}) = 0. \tag{2.40}$$

Тогда формула (2.39) *при* $\varepsilon = 1$ *задает новую скобку Пуассона на* $\mathscr{M}$.

(b) *Если S замкнута, то выполнение* (2.36) *эквивалентно замкнутости формы $\Phi(S, S)$, и при этом условии скобка* (2.37) *образует пуассонову пару с исходной, т. е.* (2.39) *при всех* $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *задает скобку Пуассона на* $\mathscr{M}$.

Доказательство. Мы видели в (2.38), что

$$[\![\Phi - \varepsilon\Phi^\star S, \Phi - \varepsilon\Phi^\star S]\!] = \varepsilon\Phi^\star(\varepsilon[S, S] - 2dS).$$

Равенство нулю правой части в силу (2.35) эквивалентно следующему условию:

$$\underset{(i, j, k)}{\mathfrak{S}} (\varepsilon(S_{is}\,\partial_j\Phi^{sm}S_{mk} + S_{is}\Phi^{sm}\,\partial_m S_{jk}) - \partial_i S_{jk}) = 0.$$

При $\varepsilon = 1$ это совпадает с (2.40), а если $dS = 0$, то $\underset{(i, j, k)}{\mathfrak{S}} \partial_i S_{jk} = 0$, и это условие совпадает с (2.36) при всех ε. Далее в силу (2.34)

$$[S, S] = d\Phi(S, S) - 2\Phi(S, dS). \tag{2.41}$$

Поэтому, если $dS = 0$, то (2.36) совпадает с условием замкнутости формы $\Phi(S, S)$. Следствие доказано.

Пример 2.8. *Скобка Дирака.* Рассмотрим набор функций $\mathscr{A}^1, \ldots, \mathscr{A}^k$ на пуассоновом многообразии $\mathscr{M}$ такой, что матрица $((\{\mathscr{A}^i, \mathscr{A}^j\}))$ невырожденна (тем самым k четно). Дифференциальная 2-форма

$$S = \frac{1}{2} S_{ij}(\xi)\, d\xi^i \wedge d\xi^j, \quad S_{ij} = ((\{\mathscr{A}, \mathscr{A}\}))^{-1}_{lm}\,\partial_i\mathscr{A}^l\,\partial_j\mathscr{A}^m$$

обладает следующими свойствами: $\Phi(S, S) = -2S$, $\Phi(S, dS) = -2dS$. Поэтому в силу (2.41)

$$[S, S] = d\Phi(S, S) - 2\Phi(S, dS) = 2dS,$$

т. е. выполнено условие (2.40). Таким образом, на $\mathscr{M}$ имеется скобка Пуассона (2.39) при $\varepsilon = 1$

$$\{f, g\}_{\mathrm{Dirac}} = \{f, g\} + ((\{\mathscr{A}, \mathscr{A}\}))^{-1}_{lm}\{\mathscr{A}^l, f\}\{\mathscr{A}^m, g\}.$$

Симплектические листы этой скобки совпадают с пересечениями листов скобки на $\mathcal{M}$ и совместных поверхностей уровня функций $\mathcal{A}^j$. Если все функции $\mathcal{A}^j$ независимы, то замкнутость формы S эквивалентна выполнению коммутационных соотношений

$$\{\mathcal{A}^i, \mathcal{A}^j\} = \Psi^{ij}(\mathcal{A}).$$

В этом случае на $\mathcal{M}$ имеется скобка (2.37) вида

$$\{f, g\}^S = \Psi(\mathcal{A})^{-1}_{lm}\{\mathcal{A}^l, f\}\{\mathcal{A}^m, g\},$$

которая образует пуассонову пару с исходной.

Если $\mathcal{M} \equiv \mathfrak{X}$ симплектическое многообразие с бирасслоением $\mathcal{A}$ (2.6), (2.7), причем $\operatorname{corank}\Psi = 0$, то вместе со скобкой $\{\ldots, \ldots\}^S$ на $\mathfrak{X}$ определена еще и полярная скобка

$$\{f, g\}^{\tilde{S}} = \tilde{\Psi}^{-1}_{lm}\{\tilde{\mathcal{A}}^l, f\}\{\tilde{\mathcal{A}}^m, g\},$$

которая также образует пуассонову пару с исходной.

Существуют и другие интересные ситуации, в которых реализуются условия (2.36), (2.40). Приведем как простой частный случай: $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$ — линейное пространство. Простейшие замкнутые формы на $\mathcal{M}$ — это формы с постоянными матрицами

$$S = \frac{1}{2} r_{ij}\, d\zeta^i \wedge d\zeta^j, \quad r_{ij} = \text{const}.$$

Условие (2.36) в этом случае имеет вид $\underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}}(r_{is}\partial_j\Phi^{sm}r_{mk}) = 0$. Оно не будет зависеть от точки на $\mathcal{M}$, если $\partial_j\Phi^{sm} = \text{const}$, т. е. если скобочный тензор Φ линейный: $\Phi^{sm} = \lambda^{sm}_j\xi^j$. Условие (2.36) при этом переходит в специальное уравнение Янга—Бакстера (1.54), а скобка (2.37) переходит в скобку из работы [38].

Следствие 2.7. *Если $\mathcal{M} = \mathfrak{g}^*$ — коалгебра Ли с обычной линейной скобкой Пуассона, а $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ решение уравнения Янга—Бакстера над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то на $\mathfrak{g}^*$ имеется квадратичная скобка*

$$\{f, g\}^S = (r_{ij}\lambda^{is}_k\lambda^{jl}_m)\zeta^k\zeta^m\,\partial_s f(\zeta)\,\partial_l g(\zeta), \quad \zeta \in \mathfrak{g}^*,$$

которая образует с исходной линейной скобкой пуассонову пару•

Простейшие примеры незамкнутых форм — это инвариантные формы на некоммутативных группах. Выпишем условия (2.36), (2.40) в такой ситуации.

Пусть $\mathcal{N}$ группа Ли со структурными константами f^i_{jk} и скобка Пуассона на $\mathcal{N}$ задается через правые векторные поля как в (1.29):

$$\{f, g\} = \sigma(\mathcal{D}'f, \mathcal{D}'g).$$

Рассмотрим также 2-форму на $\mathcal{N}$:

$$S = \frac{1}{2} Q_{ij}\theta'^i \wedge \theta'^j. \tag{2.42}$$

Здесь θ'^i базис правоинвариантных 1-форм (1.12), Q_{ij} — гладкие функции на $\mathcal{N}$. Пересчет условий (2.40) через тензоры $\sigma\colon \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$

и Q: $\mathfrak{n} \to \mathfrak{n}^*$ дает

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}} [Q_{is}(\mathcal{D}'_j\sigma^{sl} - f^s_{jm}\sigma^{ml} - \sigma^{sm}f^l_{jm})Q_{lk} + Q_{is}f^s_{jk} - \\ - \mathcal{D}'_iQ_{jk} + Q_{is}\sigma^{sl}\mathcal{D}'_lQ_{jk}] = 0.$$

Условия (2.36) выглядят аналогично, но без слагаемых линейных по Q. Будем называть их *укороченными.*

Если скобка на $\mathcal{N}$ согласованная, то в силу (1.39) выражение в круглых скобках в выписанной выше сумме равно $(\lambda^{sl}_j - f^s_{jm}c^{ml} - c^{sm}f^l_{jm})$, где $c = \sigma(e)$ — коцикл биалгебры $\mathfrak{n}^*$ (см. теорему 1.2), а λ^{sl}_j — структурные константы $\mathfrak{n}^*$. Поэтому для согласованных скобок условия (2.40) выглядят так:

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}} [Q_{is}(\lambda^{sl}_j - f^s_{jm}c^{ml} - c^{sm}f^l_{jm})\,Q_{lk} + Q_{is}f^s_{jk} - \\ - \mathcal{D}'_iQ_{jk} + Q_{is}\sigma^{sl}\mathcal{D}'_lQ_{jk}] = 0.$$

Отсюда при $Q_{jk} = \mathrm{const}$, т. е. в случае правоинвариантной формы (2.42), получаем.

Следствие 2.8. *Пусть $\mathfrak{n}$ биалгебра Ли, $\mathcal{N}$ соответствующая группа Ли, c: $\mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}$ коцикл биалгебры $\mathfrak{n}^*$. Пусть $Q = \mathrm{const}$ подчинено условию*

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}} [Q_{is}(\lambda^{sl}_j - f^s_{jm}c^{ml} - c^{sm}f^l_{jm})\,Q_{lk} + Q_{is}f^s_{jk}] = 0. \qquad (2.43)$$

Пусть тензор σ задает согласованную скобку на $\mathcal{N}$ (1.44), отвечающую коциклу c. Тогда на группе $\mathcal{N}$ имеется еще одна (несогласованная) скобка Пуассона

$$\{f, g\}_1 = (\sigma - \sigma Q\sigma)\,(\mathcal{D}'f, \mathcal{D}'g) \qquad (2.44)$$

(т. е. скобка (2.39) при $\varepsilon = 1$). Если выполнено укороченное условие (2.43) (без линейных по Q слагаемых), то на $\mathcal{N}$ имеется скобка Пуассона

$$\{f, g\}^Q \equiv \langle\sigma\mathcal{D}'f,\ Q\sigma\mathcal{D}'g\rangle. \qquad (2.45)$$

Отметим, что участвующие в (2.43) константы

$$\tilde{\lambda}^{sl}_j = \lambda^{sl}_j - f^s_{jm}c^{ml} - c^{sm}f^l_{jm}$$

являются структурными константами алгебры Ли тогда и только тогда, когда

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}} f^i_{ml}\lambda^{lj}_s c^{sk} = 0.$$

В этом случае они задают структуру новой биалгебры Ли $\tilde{\mathfrak{n}}$ и (2.43) — это условие того, что $Q^* = -Q$ — коцикл этой биалгебры Ли.

Простейшая ситуация: $c = 0$, что означает инвариантность исходной скобки на $\mathcal{N}$.

Следствие 2.9. (а) *Пусть исходная скобка на группе $\mathcal{N}$ инвариантна (т. е. $\sigma(e) = 0$), и пусть Q^* — коцикл соответствующей биалгебры Ли $\mathfrak{n}$. Тогда формула (2.44) задает скобку Пуассона на $\mathcal{N}$.*

(b) *Если исходная скобка на $\mathcal{N}$ инвариантна и Q решение специального уравнения Янга — Бакстера над* $\mathfrak{n}^*$ (1.46), *то* (2.45) — *скобка Пуассона на группе $\mathcal{N}$.*

Второй простой случай: константы λ_j^{sl} заданы формулой (1.48), а коцикл $c=r$ — решение специального уравнения Янга — Бакстера над $\mathfrak{n}$ (1.54). В этом случае $\tilde{\lambda}_j^{sl}=0$ и условие (2.43) сводится к тому, что Q — коцикл алгебры Ли $\mathfrak{n}$, т. е. форма (2.42) замкнута:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{(i,\,j,\,k)} Q_{is} f_{jk}^s = 0.$$

Следствие 2.10. *Пусть $r \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$ решение специального уравнения Янга — Бакстера над алгеброй Ли $\mathfrak{n}$. Тогда на соответствующей группе Ли $\mathcal{N}$ помимо левых и правых скобок* (1.56) *имеется другой класс скобок Пуассона*:

$$\{f, g\}^Q = \langle \mathrm{Ad}(\xi)\cdot r\cdot \mathcal{D}f(\xi),\ Q\cdot \mathrm{Ad}(\xi)\cdot r\cdot \mathcal{D}g(\xi)\rangle, \qquad (2.46)$$

где $\xi\in\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$ — левые поля на $\mathcal{N}$, а $Q\in\mathfrak{n}^*\wedge\mathfrak{n}^*$ произвольный элемент. Если Q коцикл алгебры Ли $\mathfrak{n}$, то скобка (2.46) *образует пуассонову пару со скобкой $\{\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\}^{\mathrm{left}}$* (1.56). *В частности, тривиальный коцикл $Q_{ij}=x_s f_{ij}^s$ (где $x\in\mathfrak{n}^*$) порождает на группе $\mathcal{N}$ семейство скобок Пуассона*

$$\{f, g\}_\varepsilon = \{f, g\}^{\mathrm{left}} + \varepsilon\langle \mathrm{Ad}(\xi)^* x,\ [r\mathcal{D}f,\ r\mathcal{D}g]_{\mathfrak{n}}\rangle. \qquad (2.47)$$

Пример 2.9. *Кубичные и тетраэдные скобки*. Появление в формулах (2.46), (2.47) операторов присоединенного представления Ad позволяет связывать с решением уравнения Янга — Бакстера не только квадратичные скобки (1.58) — (1.60), но и скобки высших степеней однородности.

Матричные элементы $a_j^i=\mathrm{Ad}(\xi)_j^i$ являются функциями на присоединенной группе Ли. Из (2.47) получаем следующие скобки между этими функциями.

Квадратичная скобка:

$$\{a_j^i,\ a_{j'}^{i'}\}^{\mathrm{square}} = [r]_{j,\,j'}^{s,\,s'} a_s^i a_{s'}^{i'}$$

и *кубичная скобка*:

$$\{a_j^i,\ a_{j'}^{i'}\}^{\mathrm{qube}} = x_n [r;\ r]_{jj'}^{sls'} a_s^i a_l^n a_{s'}^{i'},$$

которая образует с квадратичной пуассонову пару. Здесь введены обозначения

$$[r]_{j,\,j'}^{s,\,s'} = r^{kk'} f_{kj}^s f_{k'j'}^{s'},\quad [r,\ r]_{jj'}^{sls'} = f_{jk}^s r^{km} f_{mm'}^l r^{m'k'} f_{k'j'}^{s'}.$$

Аналогично из (2.46) получаем *тетраэдную скобку*:

$$\{a_j^i,\ a_{j'}^{i'}\}^{\mathrm{tetra}} = [r;\ Q;\ r]_{jj'll'}^{mm'} a_s^i a_m^l a_{m'}^{l'} a_{s'}^{i'},$$

где

$$[r;\ Q;\ r]_{jj'll'}^{mm'} = f_{jk}^s r^{km} Q_{ll'} r^{m'k'} f_{k'j'}^{s'}.$$

Если Q — коцикл, то тетраэдная скобка образует пуассонову пару с квадратичной.

Записать скобки между матричными элементами можно, конечно, не только для присоединенного, но и для любого другого представления T группы Ли $\mathcal{N}$ (как в примере 1.3). Отметим, что операторы $\mathrm{Ad}(\xi)$ переходят в $T(\xi)(\ldots)T(\xi)^{-1}$, и для того, чтобы выразить матричные элементы $T(\xi)^{-1}$ вновь через матричные элементы $T(\xi)$, удобно предполагать унитарность представления T.

Итак, пусть T — унитарное представление группы $\mathcal{N}$, а t — представление ее алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Пусть $r \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}$ решение специального уравнения Янга — Бакстера (1.54), и пусть

$$\widetilde{[r \wedge r]} \overset{\text{def}}{=} (t \otimes t \otimes t)\,[r \wedge r],$$

где

$$[r \wedge r]^{ijk} = r^{si} f^{j}_{sl} r^{lk} \in \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n}.$$

Формула (2.37) показывает, что между матричными элементами T^{μ}_{ν} помимо квадратичных скобок (1.59) имеются тетраэдные:

$$\{T^{\mu}_{\nu},\ T^{\mu'}_{\nu'}\}^{\text{tetra}} = X^{\delta}_{\rho}\,\widetilde{[r \wedge r]}^{\sigma\varepsilon\varepsilon'}_{\omega\nu\nu'} T^{\rho}_{\sigma} T^{*\omega}_{\delta} T^{\mu}_{\varepsilon} T^{\mu'}_{\varepsilon'}, \tag{2.48}$$

образующие пуассонову пару с квадратичными (здесь X — произвольная матрица из $\mathfrak{n}$).

Аналогично из (2.46) и (2.44) возникают скобки *шестой степени* между матричными элементами T^{μ}_{ν}.

Пример 2.10. *Тетраэдная скобка на* SL(2). Над алгеброй sl(2) рассмотрим решение специального уравнения Янга — Бакстера r (1.62) и представление этой алгебры t (1.61) (неунитарность в двумерном случае роли не играет). Элементы матрицы $\widetilde{[r \wedge r]}$ подсчитываются по формулам:

$$[r \wedge r]^{1jk} = 2\,(r^{3j} r^{1k} - r^{1j} r^{3k}), \quad r^{1j} t_j = \begin{bmatrix} v & 0 \\ u & -v \end{bmatrix},$$
$$[r \wedge r]^{2jk} = 2\,(r^{2j} r^{3k} - r^{3j} r^{2k}), \quad r^{2j} t_j = \begin{bmatrix} w & -u \\ 0 & w \end{bmatrix},$$
$$[r \wedge r]^{3jk} = (r^{1j} r^{2k} - r^{2j} r^{1k}), \quad r^{3j} t_j = \begin{bmatrix} 0 & -v \\ -w & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, выберем $X = x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{sl}(2)^*$. Тогда тетраэдная скобка (2.48) между матричными элементами представления $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ группы SL(2) выглядит так:

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \overset{\otimes}{,} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right\}^{\text{tetra}} = 2\,(x_1 A^2 - x_2 C^2 - x_3 AC)\,(\mathcal{K} \otimes \mathcal{S} - \mathcal{S} \otimes \mathcal{K}) +$$
$$+ 2\,(-x_1 B^2 + x_2 D^2 + x_3 BD)\,(\mathcal{S} \otimes \mathcal{L} - \mathcal{L} \otimes \mathcal{S}) +$$
$$+ 2\,(-x_1 AB + x_2 CD + x_3 (AD + BC)/2)\,(\mathcal{K} \otimes \mathcal{L} - \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}). \tag{2.49}$$

Здесь $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$ линейные матричные функции от A, B, C, D, заданные формулами:

$$\mathscr{K}=\begin{bmatrix} vA+uB & -vB \\ vC+uD & -vD \end{bmatrix},\quad \mathscr{S}=\begin{bmatrix} wA & vA \\ wD & vC \end{bmatrix},\quad \mathscr{L}=\begin{bmatrix} wA & wB-uA \\ wC & wD-uC \end{bmatrix}.$$

Скобка (2.49) образует пуассонову пару с квадратичной скобкой (1.63).

§ 3. Деформации и когомологии скобок Пуассона

Центральные темы параграфа:

— описание 1-коциклов (3.20) скобки Пуассона; описание пуассоновых векторных полей (3.25) и коформных полей (3.28);

— препятствия к тому, чтобы скобка была свободной (теоремы 3.2 и 3.4); вычисление ортогенераторов деформаций (теорема 3.3);

— описание 2-коциклов (3.44) скобки Пуассона;

— понятие дефекта (3.58), (3.63) 3-коцикла скобки Пуассона; описание 3-кограниц, т. е. аномалий в тождестве Якоби (теорема 3.6);

— описание 3-коциклов (3.65) скобки Пуассона;

— вычисление тензорных когомологий (3.69), (3.70) через двойной комплекс.

3.1. Задача об инфинитезимальных деформациях. Примеры. Если скобка Пуассона невырождена, то ее малые возмущения, по крайней мере локально, легко устраняются по теории возмущений. Совсем иная картина в вырожденном случае: здесь малые возмущения скобочного тензора могут привести к глобальному изменению топологии симплектических листов.

Пример 3.1. *Деформация* $e(3)\to so(4)$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^6=\mathbf{R}^3_M\oplus\mathbf{R}^3_X$ семейство линейных скобок, зависящих от параметра $\varepsilon\geqslant 0$:

$$\{M_\alpha,\ M_\beta\}=M_\gamma,\quad \{M_\alpha,\ X_\beta\}=X_\gamma,\quad \{X_\alpha,\ X_\beta\}=\varepsilon M_\gamma \tag{3.1}$$

(здесь α, β, γ — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3). При $\varepsilon>0$ — это скобка коалгебры Ли $so(4)^*$, а при $\varepsilon=0$ — скобка на $e(3)^*$. Две функции Казимира

$$k_1=M\cdot X,\quad k_2=|X|^2+\varepsilon|M|^2$$

задают симплектические листы: при $\varepsilon>0$ в общем положении они диффеоморфны $\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2$, а при $\varepsilon=0$ диффеоморфны $T^*\mathbf{S}^2$. Таким образом, не существует глобальной гладкой гомотопии (замены переменных в $\mathbf{R}^6$), переводящей невозмущенную $e(3)^*$-скобку в возмущенную $so(4)^*$-скобку.

Но иногда бывает достаточно знать лишь «росток» такой гомотопии, т. е. первое приближение по ε. Например, пусть требуется найти преобразование $\mathbf{R}^6$, переводящее $e(3)^*$-скобку в скобку (3.1) с точностью $O(\varepsilon^2)$ (т. е. в правых частях (3.1) допускаются произвольные добавки порядка $O(\varepsilon^2)$). Такое преобразование нетрудно предъявить [25]:

$$(m, x) \to (M^\varepsilon, X^\varepsilon) = (m, x) + \varepsilon v(m, x) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$v(m, x) = \left(m, \frac{(m \cdot x)\, m - |m|^2 x}{2|x|^2}\right), \quad (m, x) \in e(3)^*.$$

Векторное поле v на $\mathbf{R}^6 = e(3)^*$ (генератор преобразования) имеет особенность при $|x| = 0$, которая связана с попаданием в нерегулярные точки на $e(3)^*$, где вырождается ранг скобки.

Итак, в общем случае мы приходим к большой серии задач об инфинитезимальных деформациях скобок Пуассона (постановки этих задач в той или иной форме содержались во многих работах по геометрии и дифференциальным уравнениям, например в [22, 29, 135, 155, 207, 208, 250]; список, который мы приводим ниже, взят из [26]).

Пусть $\mathcal{N}$ пуассоново многообразие со скобкой (1.1), заданной тензором Ψ. Мы знаем (лемма 2.7), что все *инфинитезимальные деформации*, т. е. тензоры Φ, для которых операция

$$\Psi(df, dg) + \varepsilon\Phi(df, dg) \tag{3.2}$$

по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^2)$ является скобкой Пуассона,— это решения уравнения

$$[\![\Psi, \Phi]\!] = 0. \tag{3.3}$$

(I) Перечислить все *локально-тривиальные деформации* Φ, т. е. решения уравнения (3.3), для которых в окрестности любой точки на $\mathcal{N}$ существует семейство преобразований

$$\xi \to \zeta = \xi + \varepsilon v(\xi) + O(\varepsilon^2), \tag{3.4}$$

переводящих исходную скобку (1.1) в «почти-скобку» (3.2).

(II) Перечислить *глобально-тривиальные деформации*, для которых векторное поле v (генератор) в (3.4) существует глобально на $\mathcal{N}$.

(III) Перечислить все *глобальные генераторы*. В частности, описать класс пуассоновых векторных полей на $\mathcal{N}$, не изменяющих скобки (1.1).

(IV) Описать класс *однородных скобок*, т. е. однородных первой степени относительно некоторого действия группы $\mathbf{R}_+$ на $\mathcal{N}$; указать класс *конформных векторных полей*, т. е. генераторов таких действий.

(V) Связать классы нелокально-тривиальных и неглобально-тривиальных деформаций с топологией симплектических листов исходной скобки Пуассона.

(VI) Перечислить все инфинитезимальные *аномалии в тождестве Якоби*, нарушающие условие (3.3), т. е. описать класс 3-тензоров Γ, для которых разрешимо относительно Φ уравнение

$$[\![\Psi, \Phi]\!] = \Gamma. \tag{3.5}$$

Выделить локальные и глобальные аномалии Γ.

(VII) Перечислить все решения Φ уравнения (3.5) при заданной Γ, т. е. *контрдеформации* (которые отдаляют почти-скобку (3.2) от теории пуассоновых многообразий, но зато учитывают предписанную поправку в тождестве Якоби).

Пример 3.2. *Усреднение в системах с возмущенной скобкой Пуассона.* Общий подход метода усреднения приводит к задачам (I)—(V) в тех случаях, когда возмущению подвергается не гамильтониан системы, а пуассонова структура (например, структурные константы алгебры Ли, как в (3.1)). В динамических системах такого вида:

$$\dot{\zeta} = (\Psi(\zeta) + \varepsilon\Phi(\zeta))\,\partial H(\zeta) \tag{3.6}$$

учет возмущающей добавки $\Phi(\zeta)$ может быть выполнен за два шага [25]. На первом шаге преобразованием (3.4), не зависящим от структуры гамильтониана, задача (3.6) приводится к виду

$$\dot{\xi} = \Psi(\xi)\,\partial H_\varepsilon(\xi) + O(\varepsilon^2), \quad H_\varepsilon = H + \varepsilon v(H) + O(\varepsilon^2). \tag{3.7}$$

На втором шаге метод усреднения применяется уже к системе (3.7), гамильтоновой относительно исходной скобки (1.1) (по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^2)$). Как известно, гамильтонов вариант метода усреднения существенно проще общей негамильтоновой схемы. Трудность, таким образом, перемещается здесь в решение задачи (I)—(III).

Выпишем уравнение для поля v в (3.4). Условие того, что преобразование $\xi \to \zeta$ переводит по $\operatorname{mod} O(\varepsilon^2)$ скобку (1.1) в (3.2), выглядит так:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Psi(\xi)\frac{\partial\zeta^*}{\partial\xi} = \Psi(\zeta) + \varepsilon\Phi(\zeta) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя сюда (3.4), получаем искомое уравнение:

$$\Psi^{is}\,\partial_s v^j - \Psi^{js}\,\partial_s v^i - v^s\,\partial_s\Psi^{ij} = \Phi^{ij}$$

или по определению скобки Схоутена (2.31):

$$[\![\Psi, v]\!] = \Phi. \tag{3.8}$$

Вычисление глобальных решений этого уравнения, по существу, и составляет содержание задач (I)—(V). В частности, пуассоновы векторные поля u на $\mathcal{N}$ (задача III) — это решения уравнения

$$[\![\Psi, u]\!] = 0,$$

а конформные поля (задача IV) — это решения уравнения

$$[\![\Psi, u]\!] = \Psi.$$

Пример 3.3. *Гомотопия скобок Пуассона.* Вернемся вновь к задаче о гомотопии скобок, с которой мы начали этот раздел. Пусть на многообразии $\mathcal{N}$ имеется семейство скобок Пуассона

$$\{f, g\}_\varepsilon = \langle df, \Psi_\varepsilon dg\rangle.$$

Переход от скобочного тензора Ψ_ε к $\Psi_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$ осуществляется с помощью преобразования типа (3.4). Поэтому преобразование $\xi \to \Xi(\xi, \varepsilon)$, переводящее скобку Пуассона $\{\ldots, \ldots\}_0$ в скобку $\{\ldots, \ldots\}_\varepsilon$, задается решением задачи Коши

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Xi = v_\varepsilon(\Xi), \quad \Xi\big|_{\varepsilon=0} = \xi,$$

в которой векторное поле v_ε подчинено уравнению вида (3.8):

$$[\![\Psi_\varepsilon, v_\varepsilon]\!] = \frac{d}{d\varepsilon}\Psi_\varepsilon. \tag{3.9}$$

Если удастся найти решение v_ε уравнения (3.9) так, чтобы оно имело лишь слабые особенности, то существование гомотопии будет обеспечено. В интересных примерах именно устранение особенностей представляет главную трудность.

Мотивировки задач (VI), (VII) относятся уже к квантовой теории и будут подробно разбираться в гл. IV. Отметим здесь, что проблема квантования нелинейных скобок Пуассона является важным стимулом для изучения всего приведенного списка задач. В работах [155, 207, 208, 222, 250] эти задачи связывались с конструкциями бесконечномерных когомологий Шевалье и Хохшильда (см. ниже § 1 гл. IV). Но, как мы увидим, решение может быть получено в рамках конечномерных когомологий де Рама. Для простоты здесь рассматриваются лишь скобки постоянного ранга (все точки $\mathcal{N}$ регулярны); случай деформаций на вырожденных листах разобран в [27]. Приведенные в этом параграфе результаты взяты из работ [25, 26].

3.2. Структура пуассонова многообразия вблизи невырожденных листов. Будем считать, что все точки пуассонова многообразия $\mathcal{N}$ регулярны и $\mathcal{N}$ расслаивается симплектическими листами. Обозначим базу расслоения через $\mathcal{N}/\Omega$. Пусть $\mathcal{F}^k(\Omega)$, $Z^k(\Omega)$ и $H^k(\Omega)$ — пространства соответственно k-форм на Ω, замкнутых k-форм и их классов когомологий де Рама. Введем пространства гладких отображений: $\mathcal{F}^k[\Omega] = C^\infty(\mathcal{N}/\Omega \to \mathcal{F}^k(\Omega))$, $\mathrm{Z}^k[\Omega] = C^\infty(\mathcal{N}/\Omega \to Z^k(\Omega))$, $\mathrm{H}^k[\Omega] = C^\infty(\mathcal{N}/\Omega \to H^k(\Omega))$. Элементы из $\mathcal{F}^k[\Omega]$ $(\mathrm{Z}^k[\Omega])$ — это формы (замкнутые формы) на Ω, гладко зависящие от координат на $\mathcal{N}/\Omega$ как от параметров. Очевидно, что $\mathrm{H}^0[\Omega] \equiv \mathrm{K}(\mathcal{N})$ — множество функций Казимира на $\mathcal{N}$. Обозначим $r = \operatorname{corank}\Psi = \dim \mathcal{N}/\Omega$ (здесь Ψ: $T^*\mathcal{N} \to T\mathcal{N}$ — это 2-тензор, задающий скобку Пуассона (1.1) на $\mathcal{N}$) и введем множество $V(\mathcal{N})$ всех векторных полей на $\mathcal{N}$, сохраняющих $\mathrm{K}(\mathcal{N})$.

Для произвольного k-тензора $A \in M^k(\mathcal{N})$ и функций $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ через $A(g_1, \ldots, g_m)$ обозначим $(k-m)$-тензор:

$$A(g_1 \ldots g_m)(df_1, \ldots, df_{k-m}) \overset{\text{def}}{=} A(dg_1, \ldots, dg_m, df_1, \ldots, df_{k-m}).$$

Назовем тензор $A \in M^k(\mathcal{N})$ *специальным*, если он аннулирует $\mathrm{K}(\mathcal{N})$, т. е. $A(s) = 0$ для произвольной функции $s \in \mathrm{K}(\mathcal{N})$. Обозначим через $M^k[\Omega]$ множество всех специальных k-тензоров (т. е.

поливекторных полей) на $\mathcal{N}$; очевидно, оно образует алгебру относительно внешнего умножения.

Лемма 3.1. (a) *Если тензор $A \in M^k(\mathcal{N})$ специальный, то на каждом симплектическом листе Ω корректно определена следующая k-форма:*

$$\alpha(A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} A^{i_1 \ldots i_k} \Psi^{-1}_{j_1 i_1} d\xi^{j_1} \wedge \ldots \wedge \Psi^{-1}_{j_k i_k} d\xi^{j_k}, \quad \xi \in \Omega. \tag{3.10}$$

При этом

$$\alpha(A \wedge B) = \alpha(A) \wedge \alpha(B), \quad A \in M^k[\Omega], \quad B \in M^m[\Omega]. \tag{3.11}$$

(b) *Отображение $\Psi^\star$, действующее по формуле* (2.33), *сопоставляет каждой форме $\eta \in \mathcal{F}^k[\Omega]$ специальный k-тензор $\Psi^\star(\eta) \in \in M^k[\Omega]$ такой, что*

$$-\alpha\Psi^\star(\eta) = \eta. \tag{3.12}$$

Следствие 3.1. *Формула* (3.10) *определяет изоморфизм α: $M^k[\Omega] \to \mathcal{F}^k[\Omega]$, причем обратным отображением является $\alpha^{-1} = -\Psi^\star$.*

Заметим, что симплектическую структуру (1.3) на Ω можно представить в виде

$$\omega_\Omega = \alpha(\Psi).$$

Приведем теперь некоторые вспомогательные факты, связанные со скобкой Схоутена на $\mathcal{N}$, введенной в п. 2.5.

Скобка Схоутена 2-тензора Ψ и произвольного k-тензора $A \in M^k(\mathcal{N})$ порождает оператор D: $M^k(\mathcal{N}) \to M^{k+1}(\mathcal{N})$:

$$D(A) \overset{\text{def}}{=} [\![\Psi, A]\!],$$

причем $D^2 = 0$ (следствие тождества Якоби: $[\![\Psi, \Psi]\!] = 0$). Таким образом, D — кограничный оператор в тензорном комплексе над $\mathcal{N}$ [207].

Соответствующие пространства *тензорных коциклов* и *кограниц* степени k обозначим через $\mathcal{Z}^k(\mathcal{N})$ и $\mathcal{B}^k(\mathcal{N})$.

Лемма 3.2. (a) *Имеют место тождества*

$$\Psi^\star(d\eta) = D(\Psi^\star\eta), \quad \eta \in \mathcal{F}^k[\Omega], \tag{3.13}$$

$$(DA)(s) = -D(A(s)), \quad A \in M^k(\mathcal{N}), \quad s \in \mathrm{K}(\mathcal{N}), \tag{3.14}$$

$$D(A \wedge B) = D(A) \wedge B + (-1)^k A \wedge DB. \tag{3.15}$$

(b) *Форма $\eta \in \mathcal{F}^k[\Omega]$ замкнута (точна) на Ω тогда и только тогда, когда тензор $\Psi^\star(\eta)$ — коцикл (кограница) относительно оператора D.*

(c) *Для произвольного векторного поля $v \in V(\mathcal{N})$ 2-тензор Dv специальный, и, следовательно, формула* (3.10) *задает 2-форму $\alpha(Dv)$, причем эта форма замкнута: $\alpha(Dv) \in Z^2[\Omega]$, и если $v \in M^1[\Omega]$ специальный, то она точна.*

Доказательство. Рассмотрим известную формулу Картана [50]:

$$d\eta(X^1, \ldots, X^{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} X^l (\eta(X^1, \ldots, \hat{X}^l, \ldots, X^{k+1})) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X^i, X^j], X^1, \ldots, \hat{X}^i, \ldots, \hat{X}^j, \ldots, X^{k+1}),$$

где $X^1, \ldots, X^{k+1}$ — произвольные векторные поля и η — k-форма на Ω. Положив в этом равенстве $X^j = -\Psi d\xi^j$ и вспомнив определение скобки Схоутена, получим

$$-d\eta = \alpha(D(\Psi^{\star}\eta)). \tag{3.16}$$

Применение к обеим частям (3.16) операции $\Psi^{\star}$, в силу свойства (3.12), дает тождество (3.13). Равенства (3.14), (3.15) получаются непосредственно из определения оператора D. Пункты (b), (c) являются следствиями тождеств (3.13), (3.14). Лемма доказана.

Таким образом, классы когомологий 2-форм вида $\alpha(Dv)$, $v \in V(\mathcal{N})$, порождают в $H^2(\Omega)$ подпространство, фактор по которому обозначим через $\tilde{\mathrm{H}}^2(\Omega)$. Определим также $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega] = C^\infty(\mathcal{N}/\Omega \to \tilde{\mathrm{H}}^2(\Omega))$.

Перейдем теперь к описанию пуассоновых и конформных полей на $\mathcal{N}$, а также однородных скобок Пуассона. Заметим, что множество пуассоновых полей совпадает с пространством коциклов $\mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$.

Введем следующие объекты. Обозначим через $V_0(\mathcal{N})$ множество тех векторных полей $v \in V(\mathcal{N})$, для которых 2-форма $\alpha(Dv)$ точна на всех симплектических листах Ω:

$$\alpha(Dv) = d\gamma_v, \quad \gamma_v \in \mathcal{F}^1[\Omega]. \tag{3.17}$$

Рассмотрим также $V_0(\mathcal{N}/\Omega)$ — проекцию $V_0(\mathcal{N})$ на базу расслоения $\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}/\Omega$.

Лемма 3.3. *Имеет место соотношение*

$$V_0(\mathcal{N}/\Omega) = \pi_*(\mathcal{Z}^1(\mathcal{N})), \tag{3.18}$$

при этом $V_0(\mathcal{N}/\Omega)$ — коммутативная алгебра Ли.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$. Зафиксируем некоторый набор функций Казимира $k^1, \ldots, k^r \in \mathrm{K}(\mathcal{N})$ и соответствующий ему набор дуальных векторных полей $v_1, \ldots, v_r$ на $\mathcal{N}$: $v_i(k^j) = \delta_i^j$. Тогда для u имеет место представление (рис. 2)

$$u = v + \tilde{u}, \quad v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} c^i v_i, \quad c^i = u(k^i),$$

где $\tilde{u} = (u - v)$ — специальное векторное поле на $\mathcal{N}$ (т. е. $\tilde{u}(k^j) = 0$), а значит, корректно определена 1-форма $\gamma = \alpha(\tilde{u})$. В силу $Du = 0$ имеем

$$Dv = -D\tilde{u}. \tag{3.19}$$

Применяя левую и правую части (3.19) к функциям k^i $(i=1, \ldots, r)$ и используя свойство (3.14), получаем $\operatorname{ad} c^j = D(\tilde{u}(k^j)) = 0$, т. е. $c^j \in \mathrm{K}(\mathcal{N})$. Отсюда сразу следует, что $v \in V(\mathcal{N})$. С другой стороны, применяя к обеим частям (3.19) операцию α и используя (3.12), (3.13) и соотношение $\tilde{u} = -\Psi^\star(\gamma)$, получаем

$$\alpha(Dv) = -\alpha(D\tilde{u}) = \alpha(D\Psi^\star(\gamma)) = \alpha\Psi^{\underline{\star}}(d\gamma) = -d\gamma,$$

т. е. $v \in V(\mathcal{N})$, и, следовательно, $\pi_* u = \pi_* v \in V_0(\mathcal{N}/\Omega)$. Обратно, пусть $v \in V_0(\mathcal{N})$. Тогда существует 1-форма $\gamma_v \in \mathcal{F}^1[\Omega]$, удовлетворяющая (3.17). Применение к (3.17) операции $\Psi^\star$ и свойство

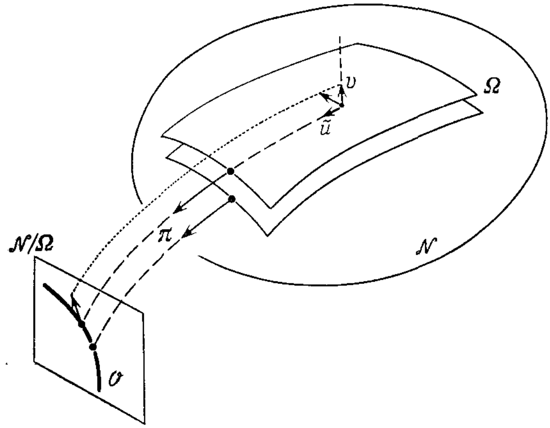


Рис. 2

(3.13) дают $D(v + \Psi^\star\gamma_v) = 0$, т. е. $u = v + \Psi^\star\gamma_v \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$, и, следовательно, $\pi_* v = \pi_* u \in \pi_*(\mathcal{Z}^1(\mathcal{N}))$. Коммутативность алгебры векторных полей $V_0(\mathcal{N}/\Omega)$ вытекает из того факта, что коммутатор любых двух векторных полей из $V(\mathcal{N})$ — это специальное векторное поле.

Следствие 3.2. *Пространство коциклов $\mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$ состоит из векторных полей вида*

$$u = v + \Psi^\star\gamma_v, \quad v \in V_0(\mathcal{N}), \tag{3.20}$$

где 1-форма γ_v определяется из (3.17). *Причем все специальные векторные поля из $\mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$ являются гамильтоновыми.*

В силу критерия интегрируемости Фробениуса имеется слоение базы $\mathcal{N}/\Omega$ интегральными многообразиями алгебры векторных полей $V_0(\mathcal{N}/\Omega)$. Эти многообразия будем обозначать $\mathcal{O}$.

Размерность интегральных слоев $\mathcal{O}$, вообще говоря, может быть непостоянной. Для упрощения изложения исключим эту возможность, предположив, что $\mathcal{N}/\Omega$ глобально расслаивается интегральными многообразиями $\mathcal{O}$. Пусть

$$s = r - \dim \mathcal{O}, \quad s = \text{const}, \tag{3.21}$$

и при этом $\mathscr{G}$ являются поверхностями уровня некоторых функций (например, это так, когда $\mathscr{N}/\Omega$ односвязно).

Лемма 3.4. *Пусть выполнено условие* (3.21). *Тогда можно так выбрать базисные функции Казимира* $k^1, \ldots, k^r \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$ *и дуальные им векторные поля* $v_1, \ldots, v_r$ *на* $\mathscr{N}$ (*т. е.* $v_i(k^j) = \delta_i^j$), *что замкнутые 2-формы*

$$\omega_j = \alpha(Dv_j) \in \mathrm{Z}^2[\Omega], \quad j \in 1, \ldots, r, \tag{3.22}$$

будут удовлетворять условиям:

a) *классы когомологий* $[\omega_1], \ldots, [\omega_s]$ *независимы в* $\mathrm{H}^2[\Omega]$;

b) *формы* $\omega_{s+1}, \ldots, \omega_r$ *точны, т. е.*

$$\omega_i = d\gamma_i, \quad \gamma_i \in \mathscr{F}^1[\Omega], \quad i = s+1, \ldots, r. \tag{3.23}$$

При этом $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega] = \mathrm{H}^2[\Omega]/\{[\omega_i],\ i = 1, \ldots, s\}$.

Доказательство. В силу сделанных предположений существуют функции $I^1, \ldots, I^s \in \mathscr{F}(\mathscr{N}/\Omega)$, совместные поверхности уровня которых задают интегральные многообразия $\mathscr{G}$. Положим $k^i = \pi^*(I^i)$ и дополним этот набор функций Казимира некоторыми функциями $k^{s+1}, \ldots, k^r$ до базиса в $\mathrm{K}(\mathscr{N})$. Покажем, что он удовлетворяет условиям a), b).

Зафиксируем соответствующий набор дуальных векторных полей $v_1, \ldots, v_r$ на $\mathscr{N}$ и рассмотрим проекции $\check{v}_i = \pi_* v_i$ этих полей на базу $\mathscr{N}/\Omega$. Имеет место соотношение

$$\check{v}_j(I^i) \equiv v_j(k^i) = 0, \quad j = s+1, \ldots, r; \quad i = 1, \ldots, s,$$

т. е. $\check{v}_j \in T\mathscr{G}$, и, следовательно, $v_j \in V_0(\mathscr{N})$ при $j = s+1, \ldots, r$. Независимость классов когомологий 2-форм $\omega_1, \ldots, \omega_s$ докажем от противного. Предположим, что существуют $c^i \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$ ($i = 1, \ldots, s$) и 1-форма $\gamma \in \mathscr{F}^1[\Omega]$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{s} c^j \alpha(Dv_j) = d\gamma.$$

Тогда $u = \sum_{i=1}^{s} c^i v_i + \Psi^{\star}\gamma \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{N})$, и в силу леммы 3.3 $\pi_* u \in V_0(\mathscr{N}/\Omega) \equiv T\mathscr{G}$. Отсюда сразу получим $c^j \equiv (\pi_* u)(I^j) = 0$ ($j = 1, \ldots, s$). Лемма доказана.

В дальнейшем, не оговаривая это особо, всегда предполагается выполненным условие леммы 3.4 и фиксируются соответствующие базисные функции Казимира $k^1, \ldots, k^r$, дуальные или векторные поля $v_1, \ldots, v_r$, 2-формы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ из (3.22) и 1-формы $\gamma_{s+1}, \ldots, \gamma_r$ из (3.23). Введем также векторные поля $z_j \in M^1(\mathscr{N})$:

$$z_j \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^{\star}\gamma_j + v_j, \quad j = s+1, \ldots, r. \tag{3.24}$$

Из лемм 3.3, 3.4 вытекает следующее утверждение [26].

Теорема 3.1. (a) *Все пуассоновы векторные поля на* $\mathscr{N}$ *имеют вид*

$$u = \sum_{j=s+1}^{r} c^j z_j + \text{гамильтоново поле} \tag{3.25}$$

(*здесь поля* z_j *из* (3.24), $c^j \in \mathrm{K}(\mathcal{N})$). *При этом пуассоновы, но не гамильтоновы поля существуют тогда и только тогда, когда алгебра* $V_0(\mathcal{N}/\Omega)$ *нетривиальна, т. е. когда*

$$s < \operatorname{corank} \Psi \equiv \operatorname{codim} \Omega. \tag{3.26}$$

В частности, они обязательно существуют, если $\dim \mathrm{H}^2[\Omega] < \operatorname{codim} \Omega$.

(b) *Скобка Пуассона на* $\mathcal{N}$ *однородна тогда и только тогда, когда фактор-класс симплектической формы* ω_Ω *в* $\mathrm{H}^2[\Omega]$ *нулевой. В этом случае имеет место разложение*

$$\omega_\Omega = \sum_{i=1}^{s} g^i \omega_i + d\rho_\Omega, \quad g^i \in \mathrm{K}(\mathcal{N}), \tag{3.27}$$

где 2-формы ω_i *из* (3.22), $\rho_\Omega \in \mathcal{F}^1[\Omega]$. *Конформные поля на* $\mathcal{N}$ *задаются формулой*

$$u = \sum_{i=1}^{s} g^i v_i + \Psi \rho_\Omega + \text{гамильтоново поле}. \tag{3.28}$$

3.3. Свободные скобки. Неизотропные деформации. Напомним, что (*инфинитезимальными*) *деформациями* скобки Пуассона на $\mathcal{N}$ мы называем 2-тензоры $\Phi \in M^2(\mathcal{N})$, удовлетворяющие (3.3), т. е. в новых обозначениях

$$D\Phi = 0. \tag{3.29}$$

Деформация называется *локально-тривиальной*, если существует локально-векторное поле u, удовлетворяющее (3.8), или

$$Du = \Phi. \tag{3.30}$$

Деформация Φ называется *глобально-тривиальной*, если решение (3.30) существует глобально на $\mathcal{N}$.

Назовем скобку Пуассона *свободной*, если ее любая локально-тривиальная деформация является глобальной. Очевидно, свободная скобка однородна.

Теорема 3.2. (a) *Деформация* Φ *локально-тривиальна тогда и только тогда, когда в каждой точке* $\xi \in \mathcal{N}$ *выполнено условие изотропности*

$$X,\ Y \in \ker \Psi(\xi) \Rightarrow \langle \Phi(\xi) X,\ Y \rangle = 0. \tag{3.31}$$

(b) *Пусть симплектические листы* Ω *односвязны, тогда скобка Пуассона является свободной только в том случае, если фактор-пространство* $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ *тривиально* (*т. е.* $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ — *это препятствие к тому, чтобы скобка была свободной*).

Заметим, что необходимость условия изотропности (3.31) непосредственно следует из формулы (3.14). Доказательство остальных пунктов этой теоремы приводится ниже.

Пусть Φ — изотропная деформация и $w \in M^1(\mathcal{N})$ — произвольное векторное поле. Тогда очевидно, что 2-тензор $(\Phi - Dw)$ также изотропен. Назовем векторное поле w *ортогенератором* изотропной деформации, если 2-тензор $(\Phi - Dw)$ *специальный*:

$$\Psi X = 0 \Rightarrow (\Phi - Dw) X = 0. \tag{3.32}$$

В этом случае формула (3.10) определяет замкнутую 2-форму:

$$\alpha(\Phi - Dw) \in Z^2[\Omega].$$

Существование ортогенератора позволило бы свести уравнение (3.30) относительно векторного поля u к уравнению на формы из $\mathcal{F}^1[\Omega]$ и тем самым сформулировать условие разрешимости (3.30) в терминах когомологий де Рама симплектических листов Ω.

Лемма 3.5. *Если Φ — изотропная деформация и существует ортогенератор w, то уравнение* (3.30) *эквивалентно следующему уравнению на формах*:

$$d\beta = \alpha(\Phi - Dw), \tag{3.33}$$

здесь $\beta \in \mathcal{F}^1[\Omega]$ — искомая 1-форма. Причем, если (3.33) *разрешимо, решение* (3.30) *восстанавливается по формуле*

$$u = -\Psi^{\star}\beta + w. \tag{3.34}$$

Доказательство. Надо применить операцию $\Psi^{\star}$ к обеим частям равенства (3.33), использовав тождества (3.12), (3.13) и определение ортогенератора.

Замечание 3.1. Если априори Φ — специальный тензор, то, конечно, можно положить $w = 0$. Но даже в простейших примерах условие специальности обычно не выполнено.

Зафиксируем $k^1, \ldots, k^r$ — базис функций Казимира и $v_1, \ldots, v_r$ — дуальные им векторные поля. На вопрос о существовании ортогенератора ответ дает следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть Φ — изотропная деформация. Тогда векторные поля Φdk^i $(i = 1, \ldots, r)$ гамильтоновы, а если симплектические листы Ω односвязны, то строго гамильтоновы*:

$$\Phi dk^i = \Psi^{\star} dh^i, \quad h^i \in \mathcal{F}(\mathcal{N}). \tag{3.35}$$

Доказательство. Применяя левую часть равенства (3.29) к функциям k^i и используя соотношение (3.14), получаем, что $\Phi(k^i) \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$. С другой стороны, условие изотропности Φ (см. (3.31)) означает, что поля $\Phi(k^i)$ специальные и в силу следствия 3.2 гамильтоновы. Лемма доказана.

Следствие 3.3. *Если симлектические листы Ω односвязны, то ортогенератор w изотропной деформации Φ всегда существует и имеет вид*

$$w = \sum_{i=1}^{r} h^i v_i, \tag{3.36}$$

где h^i определены из (3.35). *В противном случае (листы Ω неодносвязны) ортогенератор существует только тогда, когда классы когомологий 1-форм $\alpha(\Phi dk^i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ тривиальны в $H^1[\Omega]$. Функции h^i определяются из* (3.35) *с точностью до прибавления произвольных элементов из $K(\mathcal{N})$, а w однозначно с точностью до прибавления произвольных полей из $V(\mathcal{N})$.*

С л е д с т в и е 3.4. *Замкнутая 2-форма — правая часть уравнения* (3.33) — *представима в виде*

$$\alpha(\Phi - Dw) = \alpha\left(\Phi - \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge \Psi^{\star} dh^i\right) - \sum_{i=1}^{r} h^i \omega_i, \tag{3.37}$$

и ее фактор-класс в $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ *не зависит от выбора гамильтонианов* h^i *из* (3.35).

Из лемм 3.5, 3.6 следуют непосредственно теорема 3.2 и такое утверждение [25].

Т е о р е м а 3.3. *Локально-тривиальная деформация* Φ *скобки Пуассона является глобальной тогда и только тогда, когда:* (a) *классы когомологий* 1-*форм* $\alpha(\Phi dk^i)$ *в* $\mathrm{H}^1[\Omega]$ *нулевые;* (b) *фактор-класс* 2-*формы* (3.37) *в* $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ *нулевой. При выполнении условия* (a) *справедливо соотношение* (3.35) *и существует ортогенератор* w *вида* (3.36), *а условие* (b) *позволяет так выбрать гамильтонианы* h^i (3.35), *что форма* (3.37) *точна* (*с первообразной* $\beta \in \mathcal{F}^1[\Omega]$); *при этом глобальное решение и уравнения* (3.30) *имеет вид* (3.34).

Тем самым получены явные формулы для всех глобальных решений уравнений (3.30), причем ортогенератор w определяет существенно неспециальную часть этих решений, т. е. ту часть, которая имеет ненулевую проекцию на базу $\mathcal{N}/\Omega$.

Обсудим свойства введенных выше объектов на примере скобок Пуассона из п. 2.2. Теперь пуассоново многообразие $\mathcal{N}$ — это база пуассонова расслоения $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ в диаграмме (2.6).

Рассмотрим любые векторные поля $\tilde{v}_i$ на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$, проектирующиеся в поля v_i на $\mathcal{N}$, т. е. $d\mathcal{A}(\tilde{v}_i) = v_i$. Симплектическая структура на $\mathfrak{X}$ позволяет сопоставить каждому полю $\tilde{v}_i$ форму θ_i. Тогда на слоях $\mathcal{Y}$ полярного расслоения $\tilde{\mathcal{A}}$ формы $\mathcal{A}^*\omega_i$ (здесь 2-формы ω_i из (3.22)) совпадают с $-(d\theta_i)$ и, кроме того, $\langle\theta_i, \mathrm{ad}(\mathcal{A}^*k^j)\rangle = \delta_i^j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$. Траектории гамильтоновых полей $\mathrm{ad}(\mathcal{A}^*k^j)$ лежат на изотропных многообразиях T — пересечении слоев $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$. При этом траектории с номерами $j = 1, \ldots, s$ периодичны. Траектории с номерами $j = s+1, \ldots, r$ некомпактны, если $\mathcal{Y}$ односвязно (именно им соответствуют пуассоновы, но не гамильтоновы векторные поля на $\mathcal{N}$). Таким образом, классы когомологий 2-форм ω_i на Ω получаются из классов 1-форм θ_i на T при естественном гомоморфизме $H^1(T) \to H^2(\Omega)$.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $\mathcal{N}$ — *база пуассонова бирасслоения* $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ *в диаграмме* (2.6), *причем симплектические листы* Ω *в* $\mathcal{N}$ *односвязны и все максимальной размерности. Тогда*

(a) *скобка Пуассона на* $\mathcal{N}$ *свободна в том и только в том случае, когда* $\pi_2(\mathcal{Y}) = 0$, *где* $\mathcal{Y}$ — *слой полярного к* $\mathcal{A}$ *расслоения.*

(b) *Пространство препятствий* $\tilde{H}^2(\Omega)$ *изоморфно фактору группы* $H^2(\Omega)$ *по образу гомоморфизма* $H^1(T) \to H^2(\Omega)$, *где* T — *слой расслоения* $\mathcal{A}$: $\mathcal{Y} \to \Omega$.

(c) *Если* $\mathcal{Y}$ *односвязно, то* $s = \dim H^1(T)$ *и*

$$\tilde{H}^2(\Omega) \approx H^2(\mathcal{Y}) \approx H^2(\Omega)/H^1(T).$$

В этом случае все пуассоновы, но не гамильтоновы поля на $\mathcal{N}$ *являются комбинацией полей* z_j (3.24), *где* $v_{s+1}, \ldots, v_r$ *соответствуют тем функциям Казимира* $k^{s+1}, \ldots, k^r$, *для которых траектории гамильтоновых полей* $\mathrm{ad}(\mathcal{A}^* k^j)$ *в* $\mathfrak{X}$ *некомпактны.*

Следствие 3.5. *Инвариантные и согласованные скобки на группах, в частности линейная и аффинная скобки, свободны в тех областях, где симплектические листы односвязны и имеют максимальную размерность. Если алгебра Ли компактна, то соответствующая линейная скобка свободна и все ее пуассоновы поля гамильтоновы.*

Заметим, что для скобки Пуассона (2.37), заданной замкнутой 2-формой S, имеет место соотношение

$$\tilde{H}^2(\Omega) \equiv H^2(\Omega).$$

Действительно, в этом случае все 2-формы ω_i из (3.22) точны, так как они получаются сужением на Ω производных Ли от формы S вдоль векторных полей v_i. В частности, этот факт справедлив для скобки Дирака (см. (2.30)). Таким образом, скобка Дирака в этом смысле прямо протнвоположна линейной скобке, для которой $\tilde{H}^2(\Omega) = \{0\}$.

В заключение этого раздела приведем явное описание инфинитезимальных деформаций данной скобки Пуассона, т. е. пространства тензорных коциклов $\mathcal{Z}^2(\mathcal{N})$. Возникает естественный вопрос: можно ли описать $\mathcal{Z}^2(\mathcal{N})$, зная пространство 1-коциклов $\mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$? Ответ в общем положительный. Будем считать, что базис функций Казимира $k^1, \ldots, k^r$, дуальные поля $v_1, \ldots, v_r$, соответствующие 2-формы ω_i (3.22) и 1-формы γ_i (3.23) из леммы 3.4 фиксированы. Тогда, с одной стороны, соотношение (3.14) позволяет сопоставить каждому 2-коциклу Φ набор 1-коциклов $u^1, \ldots$ $\ldots, u^2$: $u^j \overset{\mathrm{def}}{=} -\Phi dk^j \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{N})$.

С другой стороны, справедливо утверждение.

Лемма 3.7. *Для заданного набора векторных полей* $u^1, \ldots$ $\ldots, u^r \in \mathcal{M}^1(\mathcal{N})$ *существует 2-тензор* $A \in \mathcal{M}^r(\mathcal{N})$, *принимающий на функциях* k^i *значения*

$$A(k^i) = u^i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{3.38}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$u^i(k^j) + u^j(k^i) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, r. \tag{3.39}$$

Причем A *восстанавливается по векторным полям* $u^1, \ldots, u^r$ *однозначно с точностью до прибавления специального 2-тензора из* $\mathcal{M}^2(\mathcal{N})$ *по формуле*

$$A = \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge u^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} b^{ij} v_i \wedge v_j; \tag{3.40}$$

здесь $b^{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} u^i(k^j) \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$.

Доказательство основано на разложении (с точностью до специальных тензоров) произвольного 2-тензора по тензорам $v_i \wedge v_j$. Условие (3.39) возникает за счет требования антисимметричности тензора A.

Лемма 3.8. *Если* $u^1, \ldots, u^r \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{N})$, *то в* (3.40) $b^{ij} \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$ *и 3-тензор* DA *специальный, а значит, определена замкнутая 3-форма* $\alpha(DA)$, *которая имеет вид*

$$\alpha(DA) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j \wedge \alpha\left(u^j - \sum_{i=1}^{r} b^{ji} v_i\right), \tag{3.41}$$

где 2-формы ω_j *определены в* (3.22).

Теперь нетрудно понять, при каком условии 2-тензор A совпадает с некоторым коциклом с точностью до специального тензора T. Действительно, если $DA = DT$, то, применяя к этому равенству операцию α, получаем $\alpha(DA) = \alpha(DT)$, а в силу специальности T и (3.13) получаем $\alpha(DA) = d\alpha(T)$. Таким образом, если замкнутая 3-форма $\alpha(DA)$ точна:

$$\alpha(DA) = d\beta, \quad \beta \in \mathscr{F}^2[\Omega], \tag{3.42}$$

то набору 1-коциклов $u^1, \ldots, u^r \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{N})$ соответствует следующий 2-коцикл:

$$\Phi = -\Psi^{\star}\beta - A. \tag{3.43}$$

Теорема 3.5. *Пусть симплектические листы* Ω *односвязны. Тогда все деформации (2-коциклы) данной скобки Пуассона задаются формулой*

$$\Phi = Du + \Psi^{\star}\mu + \sum_{i,j=1}^{r} c^{ij} z_i \wedge z_j. \tag{3.44}$$

Здесь u *— векторное поле на* $\mathscr{N}$, $\mu \in Z^2[\Omega]$ *— замкнутая 2-форма,* $c^{ij} = -c^{ji} \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$ *— произвольный набор функций Казимира,* $z^i \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{N})$ *— векторные поля из* (3.24).

Доказательство. Применяя оператор D к правой части равенства (3.44) и используя свойства (3.13), (3.15), убеждаемся, что каждое слагаемое по отдельности является коциклом. Покажем, что других решений уравнения (3.29), кроме (3.44), не существует. Пусть $\Phi \in \mathscr{Z}^2(\mathscr{N})$. Сопоставим ему набор коциклов $u^1, \ldots, u^r \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{N})$ степени 1 и набор коциклов $b^{ij} \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$ степени 0:

$$u^i \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(k^i), \quad b^{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(k^i, k^j).$$

Поскольку условие (3.39) выполняется автоматически, то Φ восстанавливается по u^i, b^{ij} с помощью формулы (3.43) однозначно с точностью до слагаемых вида $\Psi^{\star}\mu$, $\mu \in Z^2[\Omega]$ (такой вид имеют специальные 2-коциклы). Проанализируем условие (3.42). Для этого воспользуемся формулой (3.25) для 1-коциклов, которое дает следующее представление для полей u^i:

$$u^i = \sum_{j=s+1}^{r} c^{ij} z^j - \Psi^\star df^i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{3.45}$$

где $c^{ij} \in \mathrm{K}(\mathscr{N})$, $f^i \in \mathscr{F}(\mathscr{N})$. В силу определения b^{ij} имеем

$$b^{ij} = \begin{cases} c^{ij} & \text{при } s+1 \leqslant j \leqslant r, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{при } \quad 1 \leqslant j \leqslant s, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \end{cases}$$

и, так как $b^{ij} = -b^{ji}$, получим

$$c^{ij} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant s; \quad c^{ij} = -c^{ji}, \quad s+1 \leqslant i, \quad j \leqslant r. \tag{3.46}$$

Далее, учитывая (3.46) и соотношение $z^j = v^j + \Psi^\star \gamma^j$, находим

$$\alpha\left(u^j - \sum_{i=1}^{r} b^{ji} v_i\right) = \begin{cases} df^j & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant s, \\ -\sum\limits_{i=s+1}^{r} c^{ji}\gamma_i + df^j & \text{при } s+1 \leqslant j \leqslant r, \end{cases}$$

и тем самым условие (3.42) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j \wedge df^j - \sum_{j,\, i=s+1}^{r} c^{ji} d\gamma_j \wedge d\gamma_i + \sum_{i=s+1}^{r} d\gamma_i \wedge df^i = d\beta.$$

В силу замкнутости 2-форм ω_i и соотношений (3.46) в левой части этого равенства стоит точная 3-форма, и ее первообразная 2-форма β имеет вид

$$\beta = \sum_{i=1}^{s} f_i \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=s+1}^{r} c^{ji} \gamma_j \wedge \gamma_i + \sum_{i=s+1}^{r} \gamma_i \wedge df^i. \tag{3.47}$$

Теперь, подставив в формулу (3.40) выражения (3.45) для u^i, получим

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=s+1}^{r} c^{ij} v_i \wedge v_j + \sum_{i,\, j=s+1}^{r} c^{ij} v_i \wedge \Psi^\star \gamma_j - \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge \Psi^\star df_i. \tag{3.48}$$

Наконец, подставляя выражения (3.47), (3.48) для β и A в формулу (3.43), получаем, что данный коцикл Φ представим в виде (3.44). Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.6. *Пусть симплектические листы Ω неодносвязны. Тогда теорема* 3.5 *остается верной, если в правую часть* (3.44) *добавить тензор*

$$\left(\Psi\theta + \sum_{i=1}^{s} v_i \wedge \Psi^\star \theta^i\right) - \sum_{i=s+1}^{r} z_i \wedge \Psi^\star \eta^i.$$

Здесь $\eta^{s+1}, \ldots, \eta^r$ — *произвольные* 1-*формы из* $Z^1[\Omega]$, *а* 1-*формы* $\theta^1, \ldots, \theta^s \in Z^1[\Omega]$ *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \theta^i = d\theta, \quad \theta \in \mathscr{F}^2[\Omega]. \tag{3.49}$$

Замечание 3.2. Так называемые швингеровские члены, возникающие как аномалии в теории поля [126, 169], представляют собой добавки к скобке Пуассона, для которых выполнено условие (3.29), но нет изотропности. В формуле (3.44) таким «неизотропным деформациям» соответствует последнее слагаемое.

3.4. Аномалии в тождестве Якоби. Здесь будут явно описаны аномалии в тождестве Якоби и соответствующие им контрдеформации, введенные в п. 3.1 (см. задачи (VI), (VII)). Напомним, что антисимметричный 3-тензор Γ называется *аномалией*, если

$$D\Gamma = 0 \tag{3.50}$$

и разрешимо уравнение (3.5), которое в терминах оператора D записывается в виде

$$D\Phi = \Gamma. \tag{3.51}$$

При этом 2-тензор $\Phi \in M^2(\mathcal{N})$ называется *контрдеформацией* аномалии Γ.

Понятно, что локальные аномалии — это локальные 3-кограницы оператора D, глобальные аномалии — это глобальные 3-кограницы.

Лемма 3.9. *Пусть 3-тензор $\Gamma \in M^3(\mathcal{N})$ является коциклом, т. е. удовлетворяет уравнению* (3.50), *тогда* Γ — *локальная аномалия в том и только в том случае, если в каждой точке $\xi \in \mathcal{N}$ выполнено условие изотропности*

$$\Gamma(k^i, k^j, k^m) = 0, \quad i, j, m = 1, \ldots, r. \tag{3.52}$$

Доказательство этого утверждения будет непосредственно следовать из результатов, приводимых ниже.

Обратимся к вопросу о глобальной разрешимости уравнения (3.51). Основной методический момент состоит в том, что уравнение (3.51) с помощью соотношения (3.14) может быть сведено к уравнению (3.30) на тензорах степени на единицу ниже. Поскольку эта процедура редукции детально изложена в пп. 3.2, 3.3 для степени 1, то сейчас будем подробно останавливаться только на специфических местах, отвечающих данной степени. Здесь, как мы увидим, появляется новый объект — дефект 3-коцикла.

Пусть Γ — изотропный 3-коцикл. Сопоставим ему следующий набор 2-тензоров Γ^i и векторных полей Γ^{ij}:

$$\Gamma^i \overset{\text{def}}{=} \Gamma(k^i), \quad \Gamma^{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma(k^i, k^j), \quad i, j = 1, \ldots, r.$$

Лемма 3.10. (а) *Векторные поля Γ^{ij} гамильтоновы, а если симплектические листы Ω односвязны, то строго гамильтоновы:*

$$\Gamma^{ij} = -\Psi^{\star} dh^{ij}, \quad h^{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{N}). \tag{3.53}$$

(b) *Γ^i — изотропные 2-коциклы, при этом в $Z^2[\Omega]$ корректно определены следующие 2-формы:*

$$\alpha^i = \alpha\left(\sum_{j=1}^{r} \Psi^{\star} dh^{ij} \wedge v^j - \Gamma^i\right) - \sum_{j=1}^{r} h^{ij}\omega_j, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.54}$$

Доказательство. Применяя обе части уравнения (3.50) сначала к k^i, а потом k^j и учитывая (3.52), получаем, что Γ^i, Γ^{ij} — изотропные коциклы соответственно степени 2 и 1. Далее п. (a) следует из теоремы 3.1, а п. (b) — из леммы 3.6.

Следствие 3.7. *Функции* $\sigma^{ij} \overset{\text{def}}{=} (h^{ij}+h^{ji})/2 \quad (i, j=1, \ldots, r)$ *являются функциями Казимира; при этом гамильтонианы* h^{ij} *представимы в виде*

$$h^{ij}=\sigma^{ij}+h_0^{ij}, \quad h_0^{ij}=-h_0^{ji}. \tag{3.55}$$

Будем далее считать, что листы Ω односвязны. Выясним, какую роль играют 2-формы α^i из (3.54). Применяя левую и правые части уравнения (3.51) к функциям k^i, получаем

$$D\Phi^i=-\Gamma^i, \tag{3.56}$$

здесь $\Phi^i \overset{\text{def}}{=} \Phi(k^i)$. Понятно, что необходимым условием разрешимости уравнения (3.51) является разрешимость (3.56). В силу теоремы 3.3 глобальная разрешимость уравнений (3.56) равносильна требованию: фактор-классы 2-форм α^i в $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ нулевые. Последнее условие позволяет выбрать гамильтонианы h^{ij} из (3.53), а значит, и функции σ^{ij}, h_0^{ij} в разложении (3.55) так, что формы α^i точны

$$\alpha^i=d\beta^i, \quad \beta^i \in \mathcal{F}^1[\Omega], \quad i=1, \ldots, r. \tag{3.57}$$

Лемма 3.11. *Условие* (3.57) *однозначно фиксирует функции Казимира* σ^{ij} $(i, j=1, \ldots, s)$, *причем справедливо соотношение*

$$\sum_{i, j=1}^{s} \sigma^{ij}[\omega_i \wedge \omega_j]=0. \tag{3.58}$$

Доказательство. Пусть фиксированы гамильтонианы h^{ij} и функции σ^{ij}, h_0^{ij} из (3.55), при которых выполнено условие (3.57). Используя (3.22), (3.23) и (3.54), представляем 2-формы α^i в виде

$$\alpha^i=\alpha_0^i-\sum_{J=s+1}^{r} h_0^{iJ}d\gamma_J-\sum_{J=s+1}^{r} \sigma^{iJ}d\gamma_J-\sum_{j=1}^{s} h_0^{ij}\omega_j-\sum_{j=1}^{s} \sigma^{ij}\omega_j. \tag{3.59}$$

Здесь через α_0^i обозначено первое слагаемое в (3.54); эти 2-формы не зависят от выбора h^{ij}. Выберем базисные 2-циклы $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ $(m \geqslant s)$ на Ω таким образом, чтобы s первых из них были сопряжены 2-формами $\omega_1, \ldots, \omega_s$:

$$\int_{\Sigma_i} \omega_j=\delta_{ij}, \quad i, j=1, \ldots, s,$$

а интегралы ω_j по остальным циклам равнялись нулю. Тогда в силу (3.59) условия (3.57) эквивалентны следующим:

$$\sigma^{ij}=\int\limits_{\Sigma_j}\left(\alpha_0^i-\sum_{J=s+1}^{r}h_0^{iJ}d\gamma_J-\sum_{l=1}^{s}h_0^{il}\omega_l\right),\ i=1,\ldots,r;\quad j=1,\ldots,s;$$

$$\int\limits_{\Sigma_j}\left(\alpha_0^i-\sum_{J=s+1}^{r}h_0^{iJ}d\gamma_J-\sum_{l=1}^{s}h_0^{il}\omega_l\right)=0,\ i=1,\ldots,r;\ j=s+1,\ldots,r. \tag{3.60}$$

Найдем произвол в выборе h_0^{ij} при условии, что выполнено (3.60). Согласно (3.53), (3.55), к h_0^{ij} можно добавить произвольные функции $c^{ij}\in \mathrm{K}(\mathcal{N})$ такие, что $c^{ij}=-c^{ji}$. Тогда в силу (3.60) числа σ^{ij} заменятся на $\tilde{\sigma}^{ij}=\sigma^{ij}-c^{ij}$. Но, с другой стороны, $\tilde{\sigma}^{ij}=\tilde{\sigma}^{ji}$, а поэтому $c^{ij}\equiv 0$ при $i, j=1, \ldots, s$ и остальные c^{ij} произвольные. В частности, можно положить $c^{ij}=\sigma^{ij}$ при $i=s+1, \ldots, r$; $j=1, \ldots, s$. Отсюда окончательный вывод: σ^{ij} при $i, j=1, \ldots, s$ фиксируются из (3.60), а остальные σ^{ij} можно ститать равными нулю. Наконец, равенство (3.58) получается непосредственно из (3.57) при умножении обеих частей этого равенства на ω_i, последующем суммировании по i от 1 до s и использовании формулы (3.59). Лемма доказана.

Если изотропный 3-коцикл Г удовлетворяет условию (3.57), то симметрическую $s\times s$-матрицу $\sigma=((\sigma^{ij}))$ назовем *дефектом коцикла* Г; см. [26].

Таким образом, при выполнении (3.57) можно найти «часть» контрдеформации Ф—векторные поля Φ^i—по следующей формуле (см. (3.34)):

$$\Phi^i=-\Psi^{\star}\beta^i+\sum_{j=1}^{r}h^{ij}v_j. \tag{3.61}$$

Попытаемся теперь свести уравнение (3.51) к уравнению на формах аналогично тому, как это было сделано в п. 3.3. Для этого поставим вопрос о существовании ортогенератора, т. е. такого тензора $w\in M^2(\mathcal{N})$, что 3-тензор $(\Gamma-Dw)$ специальный:

$$Dw(k^i)=-\Gamma^i,\quad i=1,\ \ldots,\ r.$$

Отметим, что тогда $w(k^i)=\Phi^i$, и в силу леммы 3.7 ортогенератор w можно восстановить по векторным полям Φ^i из (3.61) только при выполнении условия

$$h^{ij}=-h^{ji}. \tag{3.62}$$

Отсюда и из леммы 3.11 получаем следующее утверждение.

Лемма 3.12. *Для изотропного коцикла* Г, *удовлетворяющего условию* (3.57), *ортогенератор* w *существует тогда и только тогда, когда дефект* σ *равен нулю*:

$$\sigma^{ij}\equiv 0,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ s. \tag{3.63}$$

Тогда гамильтонианы h^{ij} *можно выбрать так, что 2-формы* α^i *точны и выполнено условие* (3.62); *при этом ортогенератор* *имеет вид*

$$w = -\sum_{i=1}^{r} v_i \wedge \Psi^{\star}\beta^i + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{r} h^{ij} v_i \wedge v_j.$$

Следствие 3.8. *В* $Z^3[\Omega]$ *корректно определена 3-форма:*

$$\alpha(\Gamma - Dw) = \alpha\left\{\Gamma - \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge \Gamma^i - \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{r} v_i \wedge v_j \wedge \Psi^{\star} dh^{ij}\right\} - \\ - \sum_{i=1}^{r} \omega^i \wedge \beta^i. \quad (3.64)$$

Из приведенных выше утверждений непосредственно вытекает следующий результат о глобальной разрешимости уравнения (3.51).

Теорема 3.6. *Если симплектические листы* $\Omega \subset \mathcal{N}$ *односвязны, то коцикл* $\Gamma \in \mathcal{Z}^3(\mathcal{N})$ *является глобальной аномалией тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

а) Γ — *изотропный коцикл (условие локальной аномалии);*

б) *класс в* $\tilde{\mathrm{H}}^2[\Omega]$ *всех 2-форм* α^i $(i=1, \ldots, r)$ *из* (3.54) *нулевой;*

в) *дефект* Γ *равен нулю:* $\sigma^{ij}=0$ $(i, j=1, \ldots, s)$;

г) *замкнутая* 3-*форма* (3.64) *точна, т. е.* $\alpha(\Gamma - Dw) = d\beta^{\Gamma}$, $\beta^{\Gamma} \in \mathcal{F}^2[\Omega]$.

В этом случае контрдеформация Φ *задается формулой*

$$\Phi = -\Psi^{\star}\beta^{\Gamma} + \sum_{i=1}^{r} v_i \wedge \left[-\Psi^{\star}\beta^i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} h^{ij} v_j\right].$$

Здесь 1-*формы* β^i *из* (3.57), *а функции* h^{ij} *определены в лемме* 3.11.

Замечание 3.3. В неодносвязном случае утверждение теоремы остается справедливым, если дополнительно выполнено следующее условие: поля Γ^{ij} строго гамильтоновы.

Приведем теперь формулу для 3-коциклов, которая получается с помощью процедуры редукции, описанной в п. 3.3 для нахождения $\mathcal{Z}^2(\mathcal{N})$. Пространство $\mathcal{Z}^3(\mathcal{N})$ состоит из всех 3-тензоров вида

$$\Gamma = DM + \Psi^{\star}\mu + \sum_{i,\,j,\,k=s+1}^{r} c^{ijk} z_i \wedge z_j \wedge z_k + \sum_{i,\,j=s+1}^{r} \Psi^{\star}(\nu^{ij}) z_i \wedge z_j + \\ + \left[-\Psi^{\star}\tau + \sum_{i=1}^{s} v_i \wedge \Psi^{\star}\tau^i - \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{s} v_i \wedge v_j \wedge \Psi^{\star}\tau^{ij}\right] - \\ - \left(\sum_{i=s+1}^{r} z_i \wedge \Psi^{\star}\varkappa^i + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=s+1}^{r} v_i \wedge z_j \wedge \Psi^{\star}\varkappa^{ij}\right). \quad (3.65)$$

Здесь $M \in M^2(\mathcal{N})$, $\mu \in Z^3[\Omega]$, $c^{ijk} \in \mathrm{K}(\mathcal{N})$, $\nu^{ij} = -\nu^{ji} \in Z^1[\Omega]$, а наборы форм $\tau \in \mathcal{F}^3[\Omega]$, $\tau^i \in \mathcal{F}^2[\Omega]$, $\tau^{ij} = -\tau^{ji} \in \mathcal{F}^1[\Omega]$ и $\varkappa^i \in$

$\in \mathscr{F}^2[\Omega]$, $\varkappa^{ij} \in \mathscr{F}^1[\Omega]$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$d\tau^{ij}=0, \quad d\tau^i=\sum_{j=1}^{s} \omega_j \wedge \tau^{ij}, \quad d\tau=\sum_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \tau^i, \qquad i, \ j=1, \ \ldots, \ s, \tag{3.66}$$

$$d\varkappa^{ij}=0, \quad d\varkappa^j=\sum_{i=1}^{s} \omega_i \wedge \varkappa^{ij}, \quad i=1, \ldots, s; \quad j=s+1, \ldots, r. \tag{3.67}$$

3.5. Башня препятствий. Общая схема вычисления тензорных когомологий, коциклов и кограниц. Остановимся кратко на вычислении тензорных коциклов $\mathscr{Z}^k(\mathscr{N})$ и кограниц $\mathscr{B}^k(\mathscr{N})$ оператора D в произвольной степени k; подробнее см. [26, 27].

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{q-1,p} \arrow[r, "d"] & M^{q,p} \arrow[r, "d"] & M^{q+1,p} \arrow[r, "d"] & M^{q+2,p} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{q-1,p+1} \arrow[r, "d"] \arrow[urr, "\delta"] & M^{q,p+1} \arrow[r, "d"] \arrow[urr, "\delta"] & M^{q+1,p+1} \arrow[r, "d"] \arrow[urr, "\delta"] & M^{q+2,p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рис. 3

Обозначим через $M^{q,p}$ пространство q-форм на Ω со значениями в антисимметричных контравариантных тензорных полях на $\mathscr{N}/\Omega$ степени p. Выберем в качестве базиса в $T(\mathscr{N}/\Omega \times \ldots \times \mathscr{N}/\Omega)$ (p-сомножителей) тензорные поля $\pi_* v_{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi_* v_{i_p}$. Тогда каждый элемент $\eta \in M^{q,p}$ задается набором q-форм $\eta^{i_1 \ldots i_p} \in \mathscr{F}^q[\Omega]$, антисимметричных по верхним индексам. Введем оператор δ: $M^{q,p+1} \to M^{q+2,p}$, действующий по формуле

$$(\delta\eta)^{i_1 \ldots i_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} \omega_j \wedge \eta^{i_1 \ldots i_p j};$$

здесь 2-формы ω_j из (3.22). Положим δ: $M^{q,0} \to 0$. Определим также действие δ на прямой сумме

$$M_k \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{p+q=k} M^{q,p}, \quad \delta\colon M_k \to M_{k+1}.$$

Элементы пространства M_k будем обозначать через

$$\eta=\eta_{0,k} \dotplus \eta_{1,k-1} \dotplus \ldots \dotplus \eta_{k,0},$$

где $\eta_{q,p} \in M^{q,p}$. Дифференциал d форм на Ω также естественно продолжается на M_k, причем d: $M_k \to M_{k+1}$ (рис. 3).

Лемма 3.13. *Имеют место соотношения* $(\delta)^2=0$, $d \cdot \delta - \delta \cdot d=0$.

Следствие 3.9. $(d-\delta)\cdot(d+\delta)=(d+\delta)\cdot(d-\delta)=0$.

Зададим отображение R: $M_k \to M^k(\mathscr{N})$ формулой

$$R(\eta)= \\ =\sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant r} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p} \wedge \Psi^{\star}(\eta_{k-p,p})^{i_1 \ldots i_p}.$$

Теорема 3.7. (a) *Пространство коциклов* $\mathscr{Z}^k(\mathscr{N})$ *состоит из тензоров вида* $R(\eta)$, *где* $\eta=\eta_{0,k}\dotplus\ldots\dotplus\eta_{q,k-q}\dotplus\ldots\dotplus\eta_{k,0}\in\in M_k$ *удовлетворяет уравнению* $(d-\delta)\eta=0$, *т. е.*

$$
\begin{gathered}
d(\eta_{0,k})^{i_1\ldots i_k}=0,\\
d(\eta_{1,k-1})^{i_1\ldots i_{k-1}}=\omega_j\wedge(\eta_{0,k})^{i_1\ldots i_{k-1}j},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d(\eta_{k-p,p})^{i_1\ldots i_p}=\omega_j\wedge(\eta_{k-p-1,p+1})^{i_1\ldots i_pj},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d(\eta_{k-1,1})^{i_1}=\omega_j\wedge(\eta_{k-2,2})^{i_1j},\\
d(\eta_{k,0})=\omega_j\wedge(\eta_{k-1,1})^j
\end{gathered}
\tag{3.68}
$$

(*по повторяющимся индексам ведется суммирование*).

(b) *Тензоры вида* $R(\eta)$, $\eta=(d+\delta)\tilde{\eta}$, *где* $\tilde{\eta}$ *пробегает* M_{k-1}, *исчерпывают пространство кограниц* $\mathscr{B}^k(\mathscr{N})$.

Следствие 3.10. *Пространство тензорных когомологий* $\mathscr{H}^k=\mathscr{Z}^k(\mathscr{N})/\mathscr{B}^k(\mathscr{N})$ задается формулой

$$\mathscr{H}^k=\operatorname{Ker}(d-\delta)/\operatorname{Im}(d+\delta). \tag{3.69}$$

Здесь ядро и образ рассматриваются как подпространства в M_k.

Замечание 3.4. Цепочка уравнений (3.68) похожа на башни препятствий в двойных комплексах Ботта, Стора, Зумино (см., например, [153]) и отчасти напоминает процедуру [132, 133].

В заключение получим из (3.69) явные формулы для когомологий в степенях 1, 2, 3, считая, что выполнены предположения леммы 3.4 (соответствующие коциклы и кограницы уже были вычислены в п. 3.2—3.4). Из леммы 3.4 имеем расслоение $\mathscr{N}/\Omega\to\mathscr{P}$ с базой $\mathscr{P}$ ($\dim\mathscr{P}=s$) и слоем $\mathscr{G}$ ($\dim\mathscr{G}=r-s$). Введем векторные расслоения $e=T\mathscr{G}\times\mathscr{P}$ и $\tilde{e}=T\mathscr{P}\times\mathscr{G}$ с базой $\mathscr{N}/\Omega\approx\mathscr{G}\times\mathscr{P}$. Обозначим через $\Lambda_e^{q,p}$ и $\Lambda_{\tilde{e}}^{q,p}$ пространства q-форм на Ω со значениями в сечениях p-й внешней степени расслоений e и $\tilde{e}$ соответственно. Через $\mathrm{H}_e^{q,p}$ и $\mathrm{H}_{\tilde{e}}^{q,p}$ обозначим соответствующие пространства когомологий, порожденные пространством де Рама $\mathrm{H}^q[\Omega]$. Заметим, что векторные поля $v_1,\ldots,v_s$ из леммы 3.4 с помощью отображения $\mathscr{N}\to\mathscr{N}/\Omega\to\mathscr{P}$ можно корректно опустить на $\mathscr{P}$, причем соответствующие проекции $v_{1*},\ldots,v_{s*}$ в каждой точке $x\in\mathscr{P}$ порождают касательное пространство $T_x\mathscr{P}$. Выделим в $\Lambda_{\tilde{e}}^{q,1}$ подпространство, состоящее из элементов вида $\eta^i\otimes v_{i*}$, где q-формы $\eta^i\in Z^q[\Omega]$ удовлетворяют условию

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant s}[\eta^i\wedge\omega_i]=0$$

(здесь 2-формы $\omega_1,\ldots,\omega_s$ из леммы 3.4). Это подпространство в свою очередь порождает подпространство в $H^{q,1}_{\tilde{e}}$, которое обозначим через $L^{q,1}_{\tilde{e}}$.

Тогда имеют место следующие формулы для тензорных когомологий пуассонова многообразия $\mathscr{N}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^1 &\approx H^1[\Omega] \oplus \Lambda^{0,1}_e, \\ \mathscr{H}^2 &\approx \tilde{H}^2[\Omega] \oplus \Lambda^{0,2}_e \oplus H^{1,1}_e \oplus L^{1,1}_{\tilde{e}}, \\ \mathscr{H}^3 &\approx H^3[\Omega] \oplus \Lambda^{0,3}_e \oplus H^{2,1}_e \oplus L^{2,1}_{\tilde{e}}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Последняя формула верна при условии, что листы Ω односвязны.

ГЛАВА II

АНАЛОГ ГРУППОВОЙ ОПЕРАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СКОБОК ПУАССОНА

В гл. I мы видели, какую важную роль для изучения линейных скобок Пуассона и других связанных с ними скобок играют группы Ли. Общим нелинейным скобкам уже нельзя сопоставить никакую конечномерную группу, и можно сопоставить только бесконечномерную (псевдо-) группу преобразований. Если мы хотим ограничиться конечномерной геометрией, то должны расширить рамки обычных групп и говорить либо о группоидах, либо о неассоциативных лупах. Именно эти объекты естественным образом сопоставляются общим скобкам Пуассона. Механизм взаимодействия между пуассоновой геометрией и алгебраической структурой этих объектов, в частности теоремы, аналогичные трем классическим теоремам Ли, составляют основное содержание данной главы. Симплектические группоиды, с которых начинается § 1, особенно важны для нас как многообразия, где в дальнейшем может быть реализована схема асимптотического квантования (гл. IV).

§ 1. Фазовое пространство над пуассоновым многообразием

Центральные темы параграфа:

— определение симплектического группоида и определение соответствия между группоидами и пуассоновыми многообразиями (п. 1.1);

— аналоги прямых теорем Ли: каждому симплектическому группоиду соответствует пуассоново многообразие (теорема 1.1 и следствие 1.1);

— решение основной системы уравнений Ли (лемма 1.4) и связь между различными решениями (лемма 1.6);

— аналоги обратных теорем Ли: каждому пуассонову многообразию соответствует локальный симплектический группоид (теоремы 1.3 и 1.4).

Изложение следует работам [59, 61—63].

1.1. Симплектические группоиды. Пусть $\mathscr{E}$ абстрактный *группоид* с подмножеством единиц $\mathscr{N}$. Это означает, что на $\mathscr{E}$ задана частичная ассоциативная операция умножения $*$, а также операция обращения $a \to a^{-1}$ со следующими свойствами:

1) если $a \in \mathscr{E}$, $b \in \mathscr{N}$ и $a * b$ определено, то $a * b = a$;

2) если $b \in \mathscr{N}$, то $b * b = b$;

3) если $a \in \mathscr{E}$, то $a * a^{-1} \in \mathscr{N}$ и $a^{-1} * a \in \mathscr{N}$.

Обозначим

$$l(a)=a*a^{-1},\quad r(a)=a^{-1}*a \tag{1.1}$$

и назовем эти отображения из $\mathscr{E}$ в $\mathscr{N}$ *отображениями сокращения*. Кроме того, обозначим через $\mathscr{E}^{\#}\subset\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ область определения операции $*$. Основные свойства группоидов изложены, например, в [160, 189, 228].

Определение 1.1. Группоид $\mathscr{E}$ назовем *симплектическим*, если

$\mathscr{E}$ — симплектическое многообразие, его подмножество единиц $\mathscr{N}$ — лагранжево подмногообразие, отображения сокращения (1.1) — субмерсии, трансверсальные $\mathscr{N}$, а умножение

$$(a,\ b)\to a*b$$

— пуассоново отображение из $\mathscr{E}^{\#}$ в $\mathscr{E}$ (точнее, прообраз симплектической формы $\omega_{\mathscr{E}}$ совпадает с сужением формы $\omega_{\mathscr{E}}\oplus\omega_{\mathscr{E}}$ на $\mathscr{E}^{\#}$).

Определение 1.2. *Локальный симплектический группоид* — это симплектическое многообразие $\mathscr{E}$ с указанными выше свойствами, умножение $*$ в котором задано лишь локально в окрестности подмногообразия единиц.

Определение 1.3. Будем говорить, что *симплектический группоид $\mathscr{E}$ соответствует пуассонову многообразию*, если это последнее вложено в $\mathscr{E}$ как подмногообразие единиц, отображение сокращения l пуассоново, r антипуассоново.

Пример 1.1. Пусть $\mathscr{N}=\mathfrak{g}^*$ коалгебра Ли, наделенная линейной скобкой Пуассона (1.8) гл. I. Выберем в качестве $\mathscr{E}=T^*G$ кокасательное расслоение над соответствующей группой Ли. Частичную операцию умножения в $\mathscr{E}$ зададим так:

$$(q,\ p)*(q',\ p')=(qq',\ dL(q)^{-1*}p'),$$

если $dL(q)^*p=dR(q')^*p'$.

Обратный элемент:

$$(q,\ p)^{-1}=(q^{-1},\ dR(q^{-1})^{-1*}dL(q)^*p).$$

Здесь $(q,\ p)$ и $(q',\ p')$ точки из $\mathscr{E}=T^*G$ (т. е. $q, q'\in G$ и $p\in T_q^*G$, $p'\in T_{q'}^*G$), а через L и R обозначены левый и правый сдвиги на группе G.

Введенная операция умножения задает в расслоении T^*G структуру группоида (Диксмье, Глимм, Макки [171, 212]). Многообразием единиц в нем служит слой, висящий над единицей $e\in G$, т. е. лагранжева плоскость

$$T_e^*G=\{(e,\ p)\}\approx\mathfrak{g}^*.$$

Отображения сокращения устроены так:

$$l(q,\ p)=dR(q)^*p,\quad r(q,\ p)=dL(q)^*p.$$

Этот группоид симплектический относительно обычной структуры $\omega_{T^*G}=dp\wedge dq$ и он соответствует пуассонову многообразию $\mathfrak{g}^*$ в смысле определения 1.3.

Наша цель в этой главе — обобщить конструкцию этого группоида на случай произвольных нелинейных скобок Пуассона.

Начнем с некоторых простейших свойств симплектических группоидов.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathscr{E}$ симплектический группоид. Тогда $\mathscr{E}^\#$ коизотропно в $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$, т. е. вместе с любыми двумя функциями, равными нулю на $\mathscr{E}^\#$, их скобка Пуассона также равна нулю на $\mathscr{E}^\#$.*

Доказательство. В силу пуассоновости умножения $\mathscr{E}^\# \to \mathscr{E}$ ядро его дифференциала в каждой точке совпадает с ядром сужения на $\mathscr{E}^\#$ формы $\omega_{\mathscr{E}} \oplus \omega_{\mathscr{E}}$. Следовательно, размерность этого последнего равна $\dim\mathscr{E}^\# - \dim\mathscr{E}$. Коизотропность $\mathscr{E}^\#$ тогда будет следовать из равенства $\operatorname{codim}\mathscr{E}^\# = \dim\mathscr{E}^\# - \dim\mathscr{E}$ или, что то же, — из равенства $\operatorname{codim}\mathscr{E}^\# = \frac{1}{2}\dim\mathscr{E}$.

Поскольку $\mathscr{E}^\#$ может быть задано уравнением

$$\mathscr{E}^\# = \{(a, b) \in \mathscr{E}\times\mathscr{E} \mid r(a) - l(b) = 0\},$$

то $\operatorname{codim}\mathscr{E}^\# = \operatorname{rank}(dr \ominus dl) = \operatorname{rank} dr = \dim\mathscr{N} = \frac{1}{2}\dim\mathscr{E}$. Последнее равенство следует из лагранжевости подмногообразия единиц $\mathscr{N}\subset\mathscr{E}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{E}$ группоид, соответствующий пуассонову многообразию $\mathscr{N}$.

Опишем операцию умножения на группоиде в терминах симплектических листов $\Omega\subset\mathscr{N}$ и их «стабилизаторов» $\mathfrak{g}_\xi$, где $\xi\in\Omega$. Как следует из леммы 1.3 гл. I, алгебра Ли $\mathfrak{g}_\xi$ при изменении точки ξ вдоль листа Ω заменяется на изоморфную. Таким образом, каждому листу Ω сопоставлена алгебра Ли, которую мы обозначаем $\mathfrak{g}_\Omega$. Если лист Ω имеет максимальную размерность, то эта алгебра абелева.

Пусть $\mathscr{Y} = l^{-1}(\Omega)$. Слой расслоения $l\cap r$: $\mathscr{Y}\to\Omega\times\Omega$ над точкой (ξ, η) обозначим через $G_{(\xi,\eta)}$. Предположим, что расслоение $l\cap r$ тривиально, а λ — некоторое его гладкое сечение (это требование всегда можно обеспечить, взяв подобласть в Ω).

Лемма 1.2. *Умножение на $\mathscr{E}$ наделяет все многообразия $G_{(\xi,\xi)}$ $(\xi\in\Omega)$ структурой группы Ли, соответствующей алгебре $\mathfrak{g}_\Omega$. Поэтому и слои $G_{(\xi,\eta)}$, где $\xi, \eta\in\Omega$, наделяются структурой такой группы с помощью левых или правых сдвигов на элементы $\lambda(\xi, \eta)$.*

Теперь можно задать спаривание

$$G_{(\zeta,\xi)}\times G_{(\xi,\eta)} \xrightarrow{\circ} G_{(\zeta,\eta)}, \tag{1.2}$$

сведя его левым и правым сдвигами к групповому умножению

$$G_{(\xi,\xi)}\times G_{(\xi,\xi)} \to G_{(\xi,\xi)}.$$

Каждую точку $a\in\mathscr{E}$ будем описывать координатами (ζ, τ, ξ), где $\zeta = l(a)$, $\xi = r(a)$, $\tau\in G_{(\zeta,\xi)}$. В их терминах умножение на группоиде $\mathscr{E}$ имеет вид

$$(\zeta, \tau, \xi) * (\xi, \tau', \eta) = (\zeta, \tau \circ \tau', \eta),$$

где ζ, ξ, η лежат на одном симплектическом листе $\Omega \subset \mathscr{N}$, а произведение $\tau \circ \tau'$ понимается в смысле спаривания (1.2).

Мы закончим этот раздел, введя следующее понятие.

Определение 1.4. *Симплектический группоид* $\mathscr{E}$, отвечающий $\mathscr{N}$, назовем *полным*, если для любой $f \in C_0^\infty(\mathscr{N})$ поле $\mathrm{ad}(l^* f)$ полно на $\mathscr{E}$ (т. е. время на его траекториях продолжается до $\pm\infty$).

Лемма 1.3. *Полнота группоида $\mathscr{E}$ эквивалентна замкнутости всех групп Ли $G_{(\xi,\eta)} \subset \mathscr{E}$.*

Пример 1.2. Рассмотрим группоид T^*G из примера 1.1. Левым сдвигом отождествим T^*G с $\mathscr{E} = G \times \mathfrak{g}^*$ (см. (1.11) гл. I). Умножение в $G \times \mathfrak{g}^*$ задано так:

$$(q, \xi) * (q', \xi') = (qq', \xi'), \quad \text{если} \quad \xi = \mathrm{Ad}(q')^{-1*} \xi'$$

(см. (1.12) гл. I), а отображения сокращения имеют вид

$$l\colon G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*, \quad l(q, \xi) = \mathrm{Ad}(q)^{-1*} \xi,$$
$$r\colon G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*, \quad r(q, \xi) = \xi.$$

В этом случае группы $G_{(\xi,\xi)}$ выглядят так:

$$G_{(\xi,\xi)} = \{(q, \xi) \mid \mathrm{Ad}(q)^* \xi = \xi\} = G_\xi \times \{\xi\},$$

где подгруппа $G_\xi \subset G$ — это стабилизатор точки $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Для близких точек ζ и ξ, лежащих на одном симплектическом листе, существует элемент $q_{(\zeta,\xi)} \in G$, гладко зависящий от ζ, ξ и такой, что $\mathrm{Ad}(q_{(\zeta,\xi)})^{-1*} \xi = \zeta$. Тогда группы $G_{(\zeta,\xi)} \subset G \times \mathfrak{g}^*$ могут быть заданы так:

$$G_{(\zeta,\xi)} = \{(q_{(\zeta,\xi)} \cdot q', \xi) \mid q' \in G_\xi\}.$$

Все они являются замкнутыми группами, а группоид $G \times \mathfrak{g}^*$ является полным симплектическим группоидом, соответствующим линейной скобке Пуассона на $\mathfrak{g}^*$.

Другие примеры полных группоидов будут приведены ниже.

Отметим, что в общем случае проблема существования полного группоида, отвечающего данному пуассонову многообразию, остается открытой, т. е. аналога теоремы Картана о существовании глобальной группы Ли нет.

1.2. Аналоги прямых теорем Ли. Классические прямые теоремы Софуса Ли сопоставляют гладкой группе ее алгебру Ли — касательное пространство в единице, наделенное коммутатором [17, 115, 122]. Посмотрим, как выглядят аналоги этих теорем в случае группоидов.

Теорема 1.1. *Каждый симплектический группоид соответствует единственному пуассонову многообразию.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{N}$ подмногообразие единиц симплектического группоида $\mathscr{E}$, а r^j, l^j — компоненты отображений сокращения (1.1) в некоторых локальных координатах на $\mathscr{N}$.

Тогда функции $F^j(a, b) = r^j(a) - l^j(b)$ равны нулю на $\mathscr{E}^\#$, и в силу леммы 1.1 их попарные скобки Пуассона также равны нулю на $\mathscr{E}^\#$:

$$\{F^j, F^k\}\big|_{\mathscr{E}^\#} = (\{r^j, r^k\}(a) + \{l^j, l^k\}(b))\big|_{\mathscr{E}^\#} = 0.$$

Точки a и b здесь меняются независимо с единственным ограничением $r(a) = l(b) \overset{\text{def}}{=} \xi$.

Следовательно, для некоторых констант $\Psi^{jk} = \Psi^{jk}(\xi)$ имеют место равенства

$$\{r^j, r^k\}(a) = -\Psi^{jk}, \quad \{l^j, l^k\}(b) = \Psi^{jk}.$$

Их можно переписать так:

$$\begin{aligned} \{r^j, r^k\}(a) &= -\Psi^{jk}(r(a)), \\ \{l^j, l^k\}(b) &= \Psi^{jk}(l(b)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

для любых $a, b \in \mathscr{E}$. Полученные равенства означают, что на $\mathscr{N}$ тензорное поле $\Psi = ((\Psi^{jk}))$ задает скобку Пуассона

$$\{f, g\}_{\mathscr{N}} = \Psi(df, dg) \equiv \Psi^{jk}\partial_j f \partial_k g \tag{1.4}$$

и что отображения $l, r\colon \mathscr{E} \to \mathscr{N}$ являются пуассоновым и антипуассоновым соответственно.

Далее в силу леммы 1.1 слои отображения $(a, b) \to a*b$ совпадают с листами естественного изотропного расслоения $\mathscr{E}^\# \to \mathscr{E}$ (см. лемму 2.1 гл. I). В частности, гамильтоновы поля $\operatorname{ad}(F^j)$, отвечающие всем функциям F^j на $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$, касательны к этим слоям. Поскольку $l(a*b) \equiv l(a)$, то функции $M^j(a, b) \equiv l^j(a)$ постоянны на указанных слоях и, следовательно, аннулируются всеми полями $\operatorname{ad}(F^j)$.

Так как $\operatorname{ad}(F^j) = \operatorname{ad}(r^j) \ominus \operatorname{ad}(l^j)$, то $(\operatorname{ad}(F^j)(M^i))(a, b) = \{r^j, l^i\}(a)$, где $(a, b) \in \mathscr{E}^\#$. Таким образом,

$$\{r^j, l^i\} = 0 \quad \textit{всюду на } \mathscr{E}. \tag{1.5}$$

Это означает, что выполнены все условия определения 1.3, т. е. симплектический группоид $\mathscr{E}$ соответствует пуассонову многообразию $\mathscr{N}$. Единственность $\mathscr{N}$ очевидна. Теорема доказана.

Из последней части этого доказательства видно, что любая функция вида $\varphi(a*b)$ аннулируется векторными полями $\operatorname{ad}(F^j)$.

Следствие 1.1. *Если φ гладкая функция на симплектическом группоиде $\mathscr{E}$ и $\Phi(a, b) = \varphi(a*b)$, то функция Φ на $\mathscr{E}^\#$ удовлетворяет следующей системе уравнений* *)

$$(\operatorname{ad}(r^j)_a - \operatorname{ad}(l^j)_b)\,\Phi(a, b) = 0$$

и «краевым» условиям

$$\Phi(a, b)\big|_{a \in \mathscr{N}} = \varphi(b), \quad \Phi(a, b)\big|_{b \in \mathscr{N}} = \varphi(a).$$

---

*) Нижние индексы a, b здесь обозначают переменные, по которым действуют векторные поля.

Отметим, что в этой системе уравнений каждое из гамильтоновых полей $\operatorname{ad}(r^j)_a$ и $\operatorname{ad}(l^j)_b$ не касательно к $\mathscr{E}^\#$ и лишь их разность действует вдоль $\mathscr{E}^\#$.

Следствие 1.1 — это аналог 1-й прямой теоремы Ли для случая нелинейных скобок Пуассона, а теорема 1.1 — аналог 2-й прямой теоремы. Аналог 3-й теоремы, заключающийся в том, что тензорное поле Ψ в коммутационных соотношениях (1.3) удовлетворяет условиям антисимметричности и тождествам Якоби (1.2) гл. I, конечно, очевиден.

Далее, пусть $\xi \in \mathscr{N}$, а $G(\xi)$ — слой отображения r над точкой ξ, $\tilde{G}(\xi)$ — слой отображения l над точкой ξ. Тогда, если $l(b) = \xi$, то для любого $v \in T_\xi G(\xi)$ положим

$$\left\langle v, \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle \varphi(a * b) \Big|_{a=\xi} = \langle d\varphi(b), R(b)_* v \rangle.$$

Получаем линейное невырожденное отображение

$$R(b)_*\colon T_{l(b)} G(l(b)) \to T_b G(r(b)).$$

Это аналог дифференциала правого группового сдвига. Точно так же можно определить операторы

$$L(a)_*\colon T_{r(a)} \tilde{G}(r(a)) \to T_a \tilde{G}(l(a)).$$

Заметим, что $R(\xi)_* = I$ и $L(\xi)_* = I$ для любого $\xi \in \mathscr{N}$.

Далее поля $\operatorname{ad}(l^j) \oplus 0$ и $0 \oplus \operatorname{ad}(r^j)$ касательны к $\mathscr{E}^\#$ и коммутируют с $\operatorname{ad}(F^j)$ (см. доказательство теоремы 1.1). Поэтому

$$\operatorname{ad}(l^j)_a \varphi(a * b) = (\operatorname{ad}(l^j)\varphi)(a * b),$$
$$\operatorname{ad}(r^j)_b \varphi(a * b) = (\operatorname{ad}(r^j)\varphi)(a * b).$$

Следовательно, векторные поля $\operatorname{ad}(l^j)$ являются генераторами левого сдвига на группоиде, а поля $\operatorname{ad}(r^j)$ — генераторами правого сдвига. В частности,

$$\operatorname{ad}(l^j)_a = R(a)_* \operatorname{ad}(l^j)_\xi, \quad \xi = l(a),$$
$$\operatorname{ad}(r^j)_b = L(b)_* \operatorname{ad}(r^j)_\xi, \quad \xi = r(b).$$

Можно назвать эти поля соответственно право- и левоинвариантными векторными полями на группоиде.

Замечание 1.1. Набор $d\lambda = \{d\lambda^\xi \mid \xi \in \mathscr{N}\}$ мер на группоиде $\mathscr{E}$ называется *правой системой мер Хаара* [228], если

(1) каждая мера $d\lambda^\xi$ сосредоточена на слое $G(\xi) \equiv r^{-1}(\xi)$, т. е. $\operatorname{supp} d\lambda^\xi = G(\xi)$;

(2) меры $d\lambda^\xi$ невырожденные, гладкие и гладко зависят от ξ;

(3) для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathscr{E})$

$$\int\limits_{G(l(b))} f(a * b)\, d\lambda^{l(b)}(a) = \int\limits_{G(r(b))} f(a)\, d\lambda^{r(b)}(a).$$

Для однозначного определения такой системы мер Хаара достаточно задать инфинитезимально плотности этих мер в плоскостях $T_\xi G(\xi)$ для всех $\xi \in \mathcal{N} \subset \mathcal{E}$. А это в свою очередь можно сделать, задав любую невырожденную меру μ на $\mathcal{N}$.

Пусть μ — такая мера на $\mathcal{N}$ и m — мера Лиувилля на $\mathcal{E}$. Тогда имеется разложение $m(da) = \mu(d\xi)\, d\varkappa^\xi(a)$, где $\xi = r(a)$ и $d\varkappa^\xi$ некоторая мера на $G(\xi)$. Правый сдвиг $R(a)_*$ позволяет определить систему мер Хаара:

$$d\lambda^\xi(a) = R(a)_*\, d\varkappa^\zeta(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = l(a).$$

Таким образом, **правая система мер Хаара на симплектическом группоиде существует**; различные такие системы мер параметризуются различными мерами на подмногообразии единиц группоида.

1.3. Система уравнений Ли. Получим теперь результаты, обратные теореме 1.1 и следствию 1.1, т. е. по заданному пуассонову многообразию $\mathcal{N}$ восстановим группоид $\mathcal{E}$.

Вначале изучим локально систему уравнений (1.3), (1.5), которую будем называть *системой уравнений Ли*. Эта система решалась в работах Ли с помощью обобщенной теоремы Дарбу (п. 1.1 гл. I) в окрестности тех точек, где $\operatorname{rank}\Psi$ максимален. Оказывается, существует явная процедура, напоминающая метод характеристик в теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая позволяет построить решения системы Ли, не «чувствующие» точек падения ранга Ψ [59].

Пусть $\mathcal{U}$ локальная карта с компактным замыканием в пуассоновом многообразии $\mathcal{N}$, причем скобка Пуассона (1.4) в этой карте задана тензорным полем Ψ^{jk}. Построим решение задачи Коши

$$\dot{\Xi} = \Psi(\Xi)\, q, \qquad \Xi\big|_{t=0} = \xi \in \mathcal{U}, \tag{1.6}$$

где q — фиксированный вектор из $\mathbf{R}^n$. Обозначим это решение через $\Xi(\xi, q, t)$. Будем считать, что $|q|$ достаточно мал, так что решение определено при всех $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Построим вектор-функцию

$$\mathcal{P}_q(\xi) = \int_0^1 \Xi(\xi, q, t)\, dt \tag{1.7}$$

и решим неявное уравнение

$$\mathcal{P}_q(\xi) = p \Rightarrow \xi = r(q, p). \tag{1.8}$$

Аналогично, взяв вектор-функцию

$$\mathcal{P}'_q(\xi) = \int_{-1}^0 \Xi(\xi, q, t)\, dt \equiv \mathcal{P}_{-q}(\xi),$$

решим уравнение

$$\mathcal{P}'_q(\xi) = p \Rightarrow \xi = l(q, p). \tag{1.9}$$

Область переменных (q, p), в которой разрешимы уравнения (1.8), (1.9), обозначим через $\mathcal{E}_\mathcal{U}$. Очевидно, можно рассматривать $\mathscr{E}_{\mathscr{U}}$ как окрестность нулевого сечения в $T^*\mathscr{U}$. Снабдим ее соответствующей симплектической формой $dq \wedge dp$.

Лемма 1.4. *Отображения l, r из $\mathscr{E}_{\mathscr{U}}$ в $\mathscr{U}$, определенные формулами* (1.8), (1.9), *являются соответственно пуассоновым, антипуассоновым и находятся в инволюции друг с другом, т. е. они задают решение системы уравнений* (1.3), (1.5). *Сужения l и r на нулевое сечение являются тождественными отображениями:* $l|_{q=0} = r|_{q=0} = \mathrm{id}$.

Доказательство. В силу тождества Якоби для скобки Пуассона (1.4)

$$\Psi^{js}\partial_s\Psi^{kl} + \Psi^{ks}\partial_s\Psi^{lj} + \Psi^{ls}\partial_s\Psi^{jk} = 0 \tag{1.10}$$

сдвиги по траекториям системы (1.6) сохраняют скобку, т. е.

$$\Psi(\Xi(\xi, q, t)) = A_t\Psi(\xi)A_t^*, \quad A_t \equiv \frac{\partial\Xi(\xi, q, t)}{\partial\xi}, \tag{1.11}$$

где звездочкой обозначено транспонирование матрицы.

Кроме того, дифференцируя (1.6) по ξ и по q, получаем

$$B_t = A_t \cdot \int\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant t} A_\mu^{-1}\Psi(\Xi(\xi, q, \mu))\,d\mu, \quad B_t \equiv \frac{\partial\Xi(\xi, q, t)}{\partial q}. \tag{1.12}$$

Отсюда и из (1.11) находим

$$\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_t\,dt = \iint\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant t \leqslant 1} A_t\Psi(\xi)A_\mu^*\,dt\,d\mu.$$

Транспонируем это равенство, учитывая антисимметричность Ψ:

$$-\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_t^*\,dt = \iint\limits_{0 \leqslant t \leqslant \mu \leqslant 1} A_t\Psi(\xi)A_\mu^*\,dt\,d\mu. \tag{1.13}$$

Складываем с предыдущим:

$$\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} (B_t - B_t^*)\,dt = \Biggl(\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} A_t\,dt\Biggr)\Psi(\xi)\Biggl(\int\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant 1} A_\mu^*\,d\mu\Biggr).$$

Это соотношение в силу определений (1.7), (1.8) эквивалентно тождеству

$$\frac{\partial r}{\partial p}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^* - \frac{\partial r}{\partial q}\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^* = \Psi(r),$$

которое и означает антипуассоновость отображения r.

Пуассоновость отображения l обеспечена равенством $l(q, p) = r(-q, p)$. Остается доказать, что l и r в инволюции, т. е. что

$$\frac{\partial l}{\partial p}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^* - \frac{\partial l}{\partial q}\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^* = 0. \tag{1.14}$$

В силу (1.7), (1.8) достаточно установить тождество

$$\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_{-t}\,dt = \int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{B}_t^*\,dt, \tag{1.15}$$

где $\tilde{B}_t = \frac{\partial \tilde{\Xi}(\xi', q, t)}{\partial q}$, а $\tilde{\Xi}$ — траектория системы (1.6), выходящая при $t=0$ из точки $\xi' = \Xi(\xi, q, -1)$.

Используя (1.11), (1.12) и равенство $\tilde{A}_{1-t}A_{-1} = A_{-t}$, получаем

$$B_{-t} = -A_{-t}\Psi(\xi) \int\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant t} A^*_{-\mu}\, d\mu =$$

$$= -\tilde{A}_{1-t}(A_{-1}\Psi(\xi) A^*_{-1}) \int\limits_{0 \leqslant \mu \leqslant t} \tilde{A}^*_{1-\mu}\, d\mu,$$

где матрица $\tilde{A}_t$ определяется так:

$$\tilde{A}_t = \frac{\partial \tilde{\Xi}(\xi', q, t)}{\partial \xi'}, \quad \xi' \equiv \Xi(\xi, q, -1).$$

Заметим теперь, что в силу (1.11) $A_{-1}\Psi(\xi) A^*_{-1} = \Psi(\Xi(\xi, q, -1)) \equiv \Psi(\xi')$. Следовательно,

$$B_{-t} = -\tilde{A}_{1-t}\Psi(\xi') \int\limits_{1-t \leqslant \mu \leqslant 1} \tilde{A}^*_{\mu}\, d\mu.$$

Интегрируя это тождество по t, получаем

$$\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_{-t}\, dt = -\iint\limits_{0 \leqslant t \leqslant \mu \leqslant 1} \tilde{A}_t \Psi(\xi') \tilde{A}^*_{\mu}\, dt\, d\mu.$$

Правая часть здесь в силу (1.13) совпадает с интегралом $\int\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \tilde{B}^*_t\, dt$, что доказывает (1.15), а значит, и (1.14). Лемма доказана.

1.4. Склейка фазового пространства. Аналог 3-й обратной теоремы Ли. Таким образом, над каждой локальной картой $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}$ построено пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$, которое является кандидатом на локальный симплектический группоид, соответствующий $\mathcal{U}$. Сошьем эти пространства в одно симплектическое многообразие.

Пусть (l, r) — любое решение системы уравнений (1.3), (1.5), заданное в окрестности нулевого сечения в $T^*\mathcal{U}$ и удовлетворяющее условиям

$$\mathcal{D}l/\mathcal{D}p \neq 0, \quad \mathcal{D}r/\mathcal{D}p \neq 0, \quad l|_{q=0} = r|_{q=0}. \tag{1.16}$$

В частности, это может быть решение, построенное в лемме 1.4.

Из уравнения $r(q, \mathcal{P}) = \xi$ выразим $\mathcal{P} = \mathcal{P}_q(\xi)$ и обозначим

$$V_q(\xi) = l(q, \mathcal{P}_q(\xi)). \tag{1.17}$$

Аналогично решение уравнения $l(q, \mathcal{P}') = \zeta$ будем обозначать $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_q(\zeta)$. Эти обозначения согласованы с принятыми раньше в (1.8), (1.9), но теперь $\mathcal{P}_q$ и $\mathcal{P}'_q$ уже не связаны с формулами (1.6), (1.7).

Лемма 1.5. *При каждом фиксированном q отображение V_q пуассоново, т. е. сохраняет скобку* (1.4).

Доказательство. Рассмотрим любую функцию f на $\mathcal{U}$ и запишем гамильтонову систему в $T^*\mathcal{U}$, отвечающую гамильтониану $f(l(q, p))$. Обозначим $\eta = l(q, p)$. Имеем

$$\partial\mathcal{P}'_q(\eta)^* \dot{q} = -\partial f(\eta), \quad \dot{\eta} + \Psi(\eta)\,\partial f(\eta) = 0. \tag{1.18}$$

Здесь и ниже символ ∂ означает дифференцирование по координатам на $\mathcal{N}$, в данном случае — дифференцирование по η. Поскольку r и l коммутируют, то $r(q, p) = \mathrm{const}$ или $V_q^{-1}(\eta) = \mathrm{const}$ на траекториях этой системы. Итак, $\eta = V_q(\xi)$, $\dot{\xi} = 0$. Дифференцируя по времени, отсюда найдем $\dot{\eta} = \frac{\partial V_q}{\partial q}\dot{q} = -\frac{\partial V_q}{\partial q}(\partial\mathcal{P}'_q)^{-1*}\partial f$. Здесь мы использовали первое равенство (1.18). Сравнивая со вторым равенством (1.18) и учитывая произвольность f, получаем

$$\frac{\partial V_q}{\partial q} = \Psi(V_q)\,[\partial\mathcal{P}'_q(V_q)]^*. \tag{1.19}$$

С другой стороны, в силу (1.5)

$$\frac{\partial V_q}{\partial q} = \frac{\partial V_q}{\partial \xi}\Psi(\xi)\,\partial\mathcal{P}_q(\xi)^*.$$

Из этих двух тождеств следует

$$\frac{\partial V_q(\xi)}{\partial \xi}\Psi(\xi)\frac{\partial V_q(\xi)^*}{\partial \xi} = \Psi(V_q(\xi)),$$

что и означает пуассоновость отображения V_q. Лемма доказана.

Теперь фиксируем вектор $v \in \mathbf{R}^n$ и выбираем в (1.18) в качестве f линейную функцию $f(\eta) = -v\eta$. Кроме того, фиксируем начальные условия $q(0) = 0$, $\eta(0) = \xi$. Поскольку $V_0 = \mathrm{id}$, то $\eta(t) = V_{q(t)}(\xi)$. Таким образом, траектория $q(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\partial\mathcal{P}'_q(V_q(\xi))^* \dot{q} = v, \quad q(0) = 0.$$

Очевидно, растяжение вектора v эквивалентно растяжению времени в этой задаче. Решение будем обозначать

$$q(t) = e_\xi(vt).$$

Отметим, что в силу второго равенства (1.18)

$$V_{e_\xi(vt)}(\xi) = \Xi(\xi, v, t), \tag{1.20}$$

где Ξ — решение задачи (1.6).

Лемма 1.6. *Пусть l, r и $\tilde{l}$, $\tilde{r}$ два различных решения системы уравнений* (1.3), (1.5), *причем оба удовлетворяют условиям* (1.16). *Тогда они связаны пуассоновым (симплектическим) преобразованием*

$$l = \tilde{l}\circ\gamma, \quad r = \tilde{r}\circ\gamma, \tag{1.21}$$

где γ: $(q, p) \to (\tilde{q}, \tilde{p})$ вычисляется по формулам

$$\tilde{q} = \tilde{e}_\xi(e_\xi^{-1}(q)), \quad \xi \overset{\text{def}}{=\!=} r(q, p) = \tilde{r}(\tilde{q}, \tilde{p}), \tag{1.22}$$

а отображение $\tilde{e}_\xi$ *определяется по решению* $\tilde{l}$, $\tilde{r}$, *так же как* e_ξ — *по решению* l, r.

Доказательство. Построим по $\tilde{l}$, $\tilde{r}$ вектор-функцию $\tilde{V}$, как в (1.17). В силу (1.20) функция $V_{e_\xi(vt)}(\xi)$ универсальна, т. е. не зависит от выбора конкретного решения l, r системы (1.3), (1.5). Поэтому $V_{e_\xi(v)}(\xi)=\tilde{V}_{\tilde{e}_\xi(v)}(\xi)$. Если q и $\tilde{q}$ связаны первой формулой (1.22), то $V_q(\xi)=\tilde{V}_{\tilde{q}}(\xi)$ или $l(q, \mathcal{P}_q(\xi))=\tilde{l}(\tilde{q}, \tilde{\mathcal{P}}_{\tilde{q}}(\xi))$. С учетом второй формулы (1.22) это дает $l(q, p)=\tilde{l}(\tilde{q}, \tilde{p})$. Тем самым доказано (1.21). Остается установить симплектичность γ.

Обозначим через $\mathcal{N}^0$ объединение всех симплектических листов $\Omega\subset\mathcal{N}$ общего положения, т. е. таких, в окрестности которых $\operatorname{rank}\Psi$ постоянен. Очевидно, $\mathcal{N}^0$ открыто и плотно в $\mathcal{N}$. В окрестности любой точки из $\mathcal{N}^0$ можно выбрать координаты Дарбу $\xi=(\rho^1, \ldots, \rho^{2m}, s^1, \ldots, s^r)$ так, что тензор $\Psi(\xi)$ примет блочный вид $\Psi=\begin{bmatrix}\Phi & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (лемма 1.2, гл. I). Здесь $\Phi=\begin{bmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{bmatrix}$ задает в координатах ρ невырожденную скобку Пуассона на листах $\Omega=\Omega(s)$, а координаты $s=(s^1, \ldots, s^r)$ — это функции, постоянные на листах, $r=\operatorname{corank}\Psi$.

Пусть $\mathcal{U}$ некоторая карта в $\mathcal{N}$, а $\mathcal{U}^0$ — связная компонента $\mathcal{U}\cap\mathcal{N}^0$. Пусть l, r — решение системы (1.3), (1.5), определенное в области $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Рассмотрим подобласть $\mathcal{E}^0=l^{-1}(\mathcal{U}^0)$ и точку $(q, p)\in\mathcal{E}^0$. Ее образы $\xi=r(q, p)$ и $\xi'=l(q, p)$ лежат на одном и том же листе $\Omega=\Omega(s)$. Пусть (ρ, s) и (ρ', s') координаты Дарбу точек ξ и ξ'. Исходную точку (q, p) можно задать координатами (ρ, ρ', s, τ), где $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ — набор координат на слоях $l\cap r$. Выберем в качестве τ_j время на траекториях гамильтонова поля $\operatorname{ad}(l^*s^j)$. Тогда по определению отображения e_ξ и в силу (1.20) имеем $q=e_\xi(\tau_j\,\partial s^j(\xi))$ (по повторяющимся индексам всюду предполагается суммирование).

Аналогично по решению $\tilde{l}$, $\tilde{r}$ определим координаты $(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}', s, \tilde{\tau})$. Здесь координаты s те же, что и выше, поскольку они определяются скобкой (1.4), а не видом решения системы (1.3), (1.5). В силу (1.21) имеем

$$\tilde{\rho}\circ\gamma=\rho,\quad \tilde{\rho}'\circ\gamma=\rho',\quad s\circ\gamma=s. \tag{1.23}$$

Кроме того,

$$\tau_j\,\partial s^j(\xi)=e_\xi^{-1}(q),\qquad (\tilde{\tau}_j\circ\gamma)\,\partial s^j(\xi)=\tilde{e}_\xi^{-1}(\tilde{q}),$$

и в силу первой формулы (1.22) получаем $\tilde{\tau}_j\circ\gamma=\tau_j$ $\forall j$. Из этого тождества и из (1.23) следует симплектичность γ на области $\mathcal{E}^0$, а значит, и на всем $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Действительно, скобки Пуассона между координатами (ρ, ρ', s, τ) на $\mathcal{E}^0$ и между $(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}', s, \tilde{\tau})$ одинаковы — они зависят лишь от тензора Ψ, но не от выбора решения системы (1.3), (1.5), а именно:

$$\{\rho^i, \rho^j\} = \Phi^{ij}, \quad \{\rho'^i, \rho'^j\} = -\Phi^{ij}, \quad \{s^j, \tau_k\} = \delta^j_k,$$
$$\{\rho^j, s^k\} = \{\rho'^i, s^k\} = \{\rho^i, \tau_k\} = \{\rho'^i, \tau_k\} = \{\rho^i, \rho'^j\} = 0. \tag{1.24}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ две пересекающиеся карты на пуассоновом многообразии $\mathcal{N}$. Пусть скобка в карте $\mathcal{U}$ задается тензором Ψ, а в карте $\mathcal{U}'$ — тензором Ψ'. Тогда на пересечении карт

$$\Psi'(g^{-1}(\xi)) = dg^{-1}(\xi)\,\Psi(\xi)\,dg^{-1}(\xi)^*, \tag{1.25}$$

где $g \equiv g_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$ — отображение склейки карт. Обозначим через l, r некоторое решение системы (1.3), (1.5) над картой $\mathcal{U}$. Оно определено в какой-то области $\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \subset T^*\mathcal{U}$ и удовлетворяет кроме (1.16) еще краевому условию

$$l|_{q=0} = r|_{q=0} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}. \tag{1.26}$$

Аналогично пусть l', r' решение системы (1.3), (1.5) над картой $\mathcal{U}'$ (с заменой тензора Ψ на Ψ'), удовлетворяющее условиям (1.16), (1.26). Тогда вектор-функции $\tilde{l} = g \circ l'$, $\tilde{r} = g \circ r'$ в силу (1.25) являются решением системы (1.3), (1.5) (с тензором Ψ). Таким образом, в фазовом пространстве над той частью карты $\mathcal{U}$, которая склеивается с $\mathcal{U}'$, определены два решения одной и той же системы: l, r и $\tilde{l}$, $\tilde{r}$, причем оба удовлетворяют условию (1.16). По лемме 1.6 они связаны симплектическим преобразованием $\gamma = \gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$, т. е.

$$l = g \circ l' \circ \gamma, \quad r = g \circ r' \circ \gamma. \tag{1.27}$$

Преобразования $\gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ склеивают локальные фазовые пространства над картами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$. Из явных формул (1.22) следует, что для трех пересекающихся карт выполнено условие коцикличности

$$\gamma_{\mathcal{U},\mathcal{U}''} \circ \gamma_{\mathcal{U}'',\mathcal{U}'} \circ \gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} = \mathrm{id},$$

означающее, что набор отображений $\{\gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}\}$ склеивает гладкое многообразие $\mathcal{E}$. Поскольку все $\gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ симплектические, то на $\mathcal{E}$ задана симплектическая структура.

Далее, в силу условия (1.26), которому подчинены решения l, r и l', r', и в силу (1.27) мы заключаем, что сужение $\gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ на нулевое сечение $\{q=0\}$ совпадает с отображением склейки $g_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ локальных карт многообразия $\mathcal{N}$. Таким образом, области в сечениях $\{q=0\}$ склеиваются с помощью преобразований $\gamma_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}$ в подмногообразие, диффеоморфное $\mathcal{N}$, т. е. можно считать, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$. А поскольку каждое сечение $\{q=0\}$ лагранжево, то и подмногообразие $\mathcal{N}$ лагранжево в $\mathcal{E}$.

Далее, в силу (1.27) решения системы (1.3), (1.5), определенные над локальными картами, задают пару расслоений l, $r: \mathcal{E} \to \mathcal{N}$, причем l пуассоново, r антипуассоново, l и r в инволюции и трансверсальны $\mathcal{N}$, сужение $l|_{\mathcal{N}} = r|_{\mathcal{N}} = \mathrm{id}$ — тождественное отображение $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

Эти свойства повторяют те, что были ранее получены в лемме 1.4, но теперь пространство расслоения $\mathscr{E}$ построено глобально над $\mathscr{N}$. Мы назовем $\mathscr{E}$ *фазовым пространством* для заданной скобки Пуассона на $\mathscr{N}$. Итак, доказан аналог 3-й обратной теоремы Ли (см. [59, 69]).

Теорема 1.2. *Над любым пуассоновым многообразием существует фазовое пространство.*

1.5. Умножение в фазовом пространстве. Аналоги 1-й и 2-й обратных теорем Ли. Покажем, что на построенном разделе 1.4 фазовом пространстве $\mathscr{E}$ имеется структура группоида, для которого $\mathscr{N}$ — множество единиц, а l, r — отображения сокращения.

Обозначим через $G_\xi = r^{-1}(\xi)$ слой отображения r над точками $\xi \in \mathscr{N}$. У нас имеется гладко зависящее от точки $z \in \mathscr{E}$ невырожденное линейное отображение

$$\mu\colon\ T_z G_{r(z)} \to T^*_{l(z)}\mathscr{N}, \quad \mu^i_j(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial p^i}{\partial\,[l^j(q,\ p)]}, \quad z \equiv (q,\ p). \tag{1.28}$$

Можно рассматривать μ как набор 1-форм $\mu_j = \mu^i_j\, dq_i$, заданных на слоях r и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} d\mu_i &= \frac{1}{2}\,\partial_i \Psi^{jk}\mu_j \wedge \mu_k,\\ dl^j &= \Psi^{ji}(l)\,\mu_i. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Первое следует из (1.3), второе — из (1.19). Через d здесь обозначается дифференциал вдоль слоев r, а через ∂_i — дифференцицирование по координатам на $\mathscr{N}$. С помощью набора форм μ можно записать симплектическую структуру $\omega_{\mathscr{E}} = dq \wedge dp$ следующим образом:

$$\omega_{\mathscr{E}} = \mu \wedge dl + \frac{1}{2}\Psi(l)\,\mu \wedge \mu \tag{1.30}$$

и представить гамильтонову систему (1.18) в виде

$$\left\langle \mu(z),\ \frac{dz}{dt} \right\rangle + \partial f(\eta) = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} + \Psi(\eta)\,\partial f(\eta) = 0, \tag{1.31}$$

где $z(t)$ — гамильтонова траектория в $\mathscr{E}$, а $\eta(t) = l(z(t))$ ее проекция на $\mathscr{N}$ при отображении l. Важно, что представление (1.31) глобально в отличие от (1.18).

Введем теперь структуру группоида на $\mathscr{E}$. Напомним, что пуассоново многообразие $\mathscr{N}$ вложено в $\mathscr{E}$. Пусть $a \in \mathscr{E}$. Тогда существует функция f на $\mathscr{N}$ (возможно, зависящая еще от времени t) такая, что сдвиг $\gamma_{l^* f}\colon z(0) \to z(1)$ по траекториям гамильтоновой системы (1.31) за время $t = 1$ переводит начальную точку $r(a) \in \mathscr{N}$ в точку a. Рассмотрим теперь любое $b \in \mathscr{E}$ такое, что $l(b) = r(a)$, и определим $a * b$ как сдвиг за единичное время вдоль траектории (1.31), выходящий из начальной точки (рис. 4). Итак,

$$r(a) = l(b), \quad a = \gamma_{l^* f}(r(a)) \Rightarrow a * b = \gamma_{l^* \gamma}(b). \tag{1.32}$$

Лемма 1.7. *Определение* (1.32) *не зависит от выбора функции* f *и задает на* $\mathscr{E}$ *структуру группоида с подмножеством единиц* $\mathscr{N}$ *и отображениями сокращения* l, r.

Доказательство. Пусть $z(t)$ — траектория (1.31), выходящая из точки $r(a)$, и $z'(t)$ — траектория, выходящая из точки b.

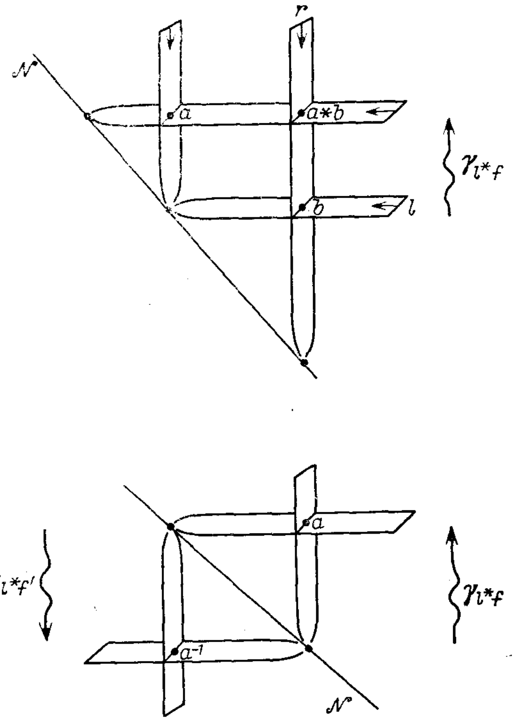


Рис. 4

Проекция $\eta(t) = l(z(t)) = l(z'(t))$ у этих траекторий на $\mathscr{N}$ одинакова. Поэтому траектория $(z(t),\ z'(t))$ в прямом произведении слоев $G_{r(a)} \times G_{r(b)}$ лежит на подмногообразии

$$\mathscr{D} = \{(z,\ z') \mid z \in G_{r(a)},\quad z' \in G_{r(b)},\quad l(z) = l(z')\}.$$

Обозначим через χ_i^- и χ_i^+ сужение на $\mathscr{D}$ форм $\mu_i(z) - \mu_i(z')$ и $\mu_i(z) + \mu_i(z')$ соответственно. Тогда в силу (1.29)

$$d\chi_i^- = \frac{1}{2}\partial_i \Psi^{jk}(l)\, \chi_j^- \wedge \chi_k^+,\quad l = l(z) = l(z').$$

Поэтому совокупность 1-форм χ_i^- задает на $\mathscr{D}$ распределение плоскостей, интегрируемое по Фробениусу. Траектория $(z(t),\ z'(t))$ принадлежит одному из интегральных листов $\mathscr{L}$ этого распределения, поскольку в силу (1.31)

$$\left\langle \mu_i(z(t)),\ \frac{dz}{dt}(t) \right\rangle = \left\langle \mu_i(z'(t)),\ \frac{dz'(t)}{dt} \right\rangle$$

или

$$\left\langle \chi_{\bar{l}},\ \frac{d}{dt}(z,\ z')\right\rangle = 0.$$

Заметим, что лист $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ однозначно проектируется на сомножители прямого произведения $G_{r(a)} \times G_{r(b)}$. Поэтому, если при шевелении кривой $z(t)$ (что эквивалентно изменению функции f) ее концы $z(0) = r(a)$ и $z(1) = a$ остаются неподвижными, то и концы кривой $(z(t),\ z'(t))$ на листе $\mathscr{S}$ неподвижны. Следовательно, концы кривой $z'(t)$ также неподвижны. Таким образом, положение точки $a * b = z'(1)$ не зависит от выбора f.

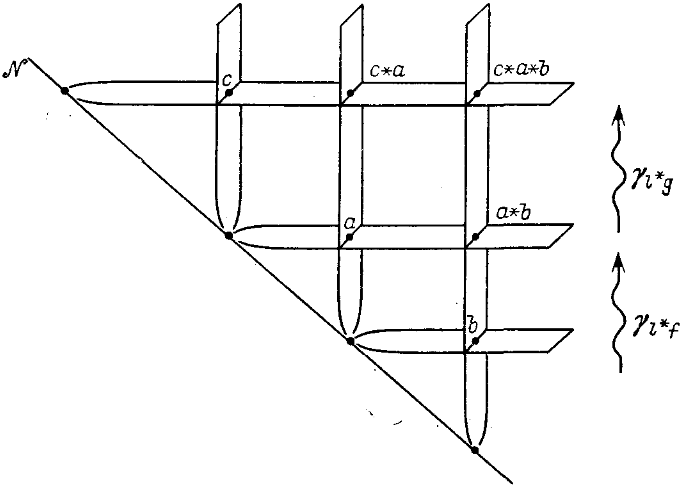


Рис. 5

Очевидно, если $b \in \mathscr{N}$ и $r(a) = l(b)$, то $b = r(a)$ и $z'(t) = z(t)$. Следовательно, $a * b = a$. Кроме того, $r(b) = l(b)$; полагая $a = b$, получаем $b * b = b$. Таким образом, выполнены свойства 1), 2) из определения группоида (см. п. 1.1).

Далее, если $a = \gamma_{l*f}(r(a))$, то полагаем $a^{-1} = \gamma_{l*f}^{-1}(l(a))$. Тогда, очевидно, $a * a^{-1} = l(a) \in \mathscr{N}$. Кроме того, если обозначить $f'(\xi,\ t) = -f(\xi,\ 1-t)$, то $\gamma_{l*f}^{-1} = \gamma_{l*f'}$ и, следовательно, $a^{-1} = \gamma_{l*f'}(r(a^{-1}))$. Поэтому $a^{-1} * a = \gamma_{l*f'}(a) = \gamma_{l*f}^{-1}(a) = r(a) \in \mathscr{N}$. Таким образом, выполнено свойство 3) из определения группоида. Попутно доказаны также формулы (1.1). Остается доказать ассоциативность операции $*$.

Заметим, что в определении (1.32) без ограничения общности можно предполагать, что функция $f = f(\xi,\ t)$ на концах отрезка $t = 0$ и $t = 1$ обращается в нуль вместе со всеми производными. Действительно, пусть $e \in C_0^\infty(0,\ 1)$ и $\int\limits_0^1 e(t)\,dt = 1$. Положим $f_e(\xi,\ t) = e(t) f(\xi,\ t)$, тогда $\gamma_{l*f} = \gamma_{l*f_e}$.

Выберем теперь кроме a и b еще точку $c \in \mathscr{E}$ такую, что $r(c) = l(a)$ (рис. 5). Пусть $c = \gamma_{l*g}(r(c))$. Тогда $c * a = \gamma_{l*g}(a) = \gamma_{l*g}\gamma_{l*f}(r(a)) = \gamma_{l*h}(r(a))$, где $h(\xi, t)$ — новая функция, составленная из f и g по правилу

$$h(\xi, t) = \begin{cases} 2f(\xi, 2t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 2g(\xi, 2t-1) & \text{при} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта функция гладкая, поскольку предполагается, что f и g обращаются в нуль со всеми производными на концах временнóго отрезка. Далее, поскольку $c * a = \gamma_{l*h}(r(a))$, то

$$(c * a) * b = \gamma_{l*h}(b) = \gamma_{l*g}\gamma_{l*f}(b) = \gamma_{l*g}(a * b).$$

С другой стороны, $r(c) = l(a) = l(a * b)$ и, следовательно,

$$c * (a * b) = \gamma_{l*g}(a * b).$$

Сравнение с предыдущим равенством доказывает ассоциативность. Лемма доказана.

Лемма 1.8. *Введенное на $\mathscr{E}$ умножение $(a, b) \to a * b$ является пуассоновым отображением $\mathscr{E}^{\#} \to \mathscr{E}$, что эквивалентно лагранжевости подмногообразия*

$$M = \{(c, a, b) \mid c = a * b\} \subset \mathscr{E} \times \mathscr{E}^{(-)} \times \mathscr{E}^{(-)}. \tag{1.33}$$

Таким образом, мы получили аналог 1-й обратной теоремы Ли.

Теорема 1.3. *Умножение* (1.32) *на фазовом пространстве $\mathscr{E}$ задает структуру симплектического группоида, соответствующего пуассонову многообразию $\mathscr{N}$.*

Аналог 2-й обратной теоремы Ли, т. е. обращение утверждения следствия 1.1, мы приведем без доказательства. Более общий результат будет доказан в теореме 2.1.

Теорема 1.4. *Пусть $\mathscr{E}$ фазовое пространство над $\mathscr{N}$ и $\mathscr{E}^{\#} = \{(a, b) \mid r(a) = l(b)\}$. Тогда для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathscr{E})$ система уравнений*

$$(\operatorname{ad}(r^j)_a - \operatorname{ad}(l^j)_b)\,\Phi(a, b) = 0, \quad \Phi\big|_{a \in \mathscr{N}} = \varphi(b)$$

имеет на $\mathscr{E}^{\#}$ единственное решение вида $\Phi(a, b) = \varphi(a * b)$. Полученная таким образом операция $*$ задает на $\mathscr{E}$ структуру симплектического группоида — ту же самую, что и в теореме 1.3.

Объединяя эти утверждения с теоремой 1.2, получаем [63]

Следствие 1.2. *Любому пуассонову многообразию соответствует единственный (с точностью до автоморфизма) локальный симплектический группоид.*

§ 2. Примеры симплектических группоидов

Центральные темы параграфа:

— пуассоновы действия группоидов, отображение момента; коприсоединенное действие (п. 2.1);

— конструкция полярного группоида (теорема 2.2);

—группоиды, соответствующие нильпотентным и разрешимым скобкам Пуассона (п. 2.3);

— группоид, порожденный структурой Картана (теорема 2.4 и следствие 2.6);

— группоид, соответствующий аффинным скобкам (пример 2.5).

Изложение следует работам [59, 63, 220].

2.1. Действия группоидов и бирасслоения. Пусть $\mathscr{E}$ — группоид, $\mathfrak{X}$ — абстрактное множество. Действие $\mathscr{E}$ на $\mathfrak{X}$ — это операция

$$(a,\ z)\to a\circ z, \tag{2.1}$$

заданная на некотором подмножестве $\mathfrak{X}^{\#}\subset\mathscr{E}\times\mathfrak{X}$ такая, что

(1) если $a\circ z$ определено, то $b\circ(a\circ z)$ определено тогда и только тогда, когда в $\mathscr{E}$ определено произведение $b*a$, и в этом случае

$$b\circ(a\circ z)=(b*a)\circ z; \tag{2.2}$$

(2) для любого $z\in\mathfrak{X}$ существует единица e в $\mathscr{E}$ такая, что

$$e\circ z=z. \tag{2.3}$$

Определение 2.1. Симплектический группоид *пуассоново* действует на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$, если это действие (2.1) — пуассоново отображение (сравните с определением 1.1).

Пуассоновость действия эквивалентна лагранжевости «сплетающего» подмногообразия

$$\Xi(\mathfrak{X},\ \mathscr{E})=\{(a\circ z,\ z,\ a)\}\subset\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathscr{E} \tag{2.4}$$

относительно симплектической формы $\omega_{\mathfrak{X}}\ominus\omega_{\mathfrak{X}}\ominus\omega_{\mathscr{E}}$ (точно так же лагранжевость подмногообразия $M=\Xi(\mathscr{E},\ \mathscr{E})$ в (1.33) эквивалентна пуассоновости действия $\mathscr{E}$ на себе).

Как и выше, через $l,\ r\colon\mathscr{E}\to\mathscr{N}$ будем обозначать отображения сокращения (1.1) группоида $\mathscr{E}$.

Действие $\mathscr{E}$ на $\mathfrak{X}$ задает *отображение момента* $\mathscr{A}\colon\mathfrak{X}\to\mathscr{N}$ следующим образом. В силу (2.3) для каждого $z\in\mathfrak{X}$ существует элемент $e\overset{\mathrm{def}}{=}\mathscr{A}(z)\in\mathscr{N}$ такой, что $\mathscr{A}(z)\circ z=z$.

Лемма 2.1. *Отображение момента $\mathscr{A}$ определено корректно, причем, если $a\in\mathscr{E}$, $z\in\mathfrak{X}$, то элемент $a\circ z$ существует тогда и только тогда, когда $r(a)=\mathscr{A}(z)$ и при этом $\mathscr{A}(a\circ z)=l(a)$.*

Доказательство. В силу (2.2) элемент $b\circ(a\circ z)$ существует тогда и только тогда, когда $r(b)=l(a)$. Поэтому, если $e'\in\mathscr{N}$ — еще одна единица, удовлетворяющая (2.3), то $z=e'\circ z$ и $e\circ(e'\circ z)$ определено, т. е. $r(e)=l(e')$ или $e=e'$. Следовательно, отображение $\mathscr{A}$ определено корректно. Далее, $a\circ z\equiv a\circ(e\circ z)$ существует тогда и только тогда, когда $r(a)=l(e)$. Но мы имеем $l(e)\equiv e\equiv\mathscr{A}(z)$, т. е. получаем искомое $r(a)=\mathscr{A}(z)$.

И наконец, поскольку $r(l(a))\equiv l(a)$, то существует элемент $l(a)\circ(a\circ z)=(l(a)*a)\circ z=a\circ z$. Отсюда по определению отображения момента имеем $\mathscr{A}(a\circ z)=l(a)$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть симплектический группоид $\mathscr{E}$ пуассоново действует на $\mathfrak{X}$. Тогда*

(A) *Для любой гладкой функции* φ *на* $\mathfrak{X}$ *система уравнений*

$$(\mathrm{ad}\,(r^j)_a - \mathrm{ad}\,(\mathcal{A}^j)_z)\,\Phi(a, z) = 0, \quad j = 1, \ldots, \dim \mathcal{N}, \qquad \Phi|_{a \in \mathcal{N}} = \varphi(z) \tag{2.5}$$

на подмногообразии $\mathfrak{X}^{\#} = \{(a, z) \mid r(a) = \mathcal{A}(z)\} \subset \mathcal{E} \times \mathfrak{X}$ *имеет единственное решение*

$$\Phi(a, z) = \varphi(a \circ z). \tag{2.6}$$

(B) *Если* $\mathcal{A}(z) = \xi$ *и* $a = \gamma_{l^*f}(\xi)$ *для некоторой функции* f *на* $\mathcal{N}$, *то*

$$a \circ z = \gamma_{\mathcal{A}^*f}(z). \tag{2.7}$$

(C) *Отображение момента* $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ *пуассоново.* $\mathcal{E}$*-орбиты задают гладкое слоение, листы которого в каждой точке кососоортогональны* $\mathcal{A}$*-слоям. Множество* $\mathcal{E}$*-инвариантных функций на* $\mathfrak{X}$ *замкнуто относительно скобки Пуассона.*

(D) *Если* $\mathcal{E}$*-слоение является гладким расслоением* $\mathcal{B}$: $\mathfrak{X} \to \mathcal{M}$, *то на его базе* $\mathcal{M}$ *имеется единственная скобка Пуассона такая, что* $\mathcal{B}$ — *пуассоново отображение. В этом случае локальный симплектический группоид* $\mathcal{D}$, *соответствующий пуассонову многообразию* $\mathcal{M}$, *пуассоново действует на* $\mathfrak{X}$, *его орбиты совпадают со слоями* $\mathcal{A}$, *а отображением момента служит* $\mathcal{B}$. *Действие* $\mathcal{D}$ *коммутирует с действием* $\mathcal{E}$ *(назовем группоид* $\mathcal{D}$ *полярным к* $\mathcal{E}$*).*

Доказательство. Аналогично лемме 1.1 можно показать, что $\mathfrak{X}^{\#}$ коизотропно в $\mathcal{E} \times \mathfrak{X}$ относительно формы $\omega_{\mathcal{E}} \oplus \omega_{\mathfrak{X}}$. Отсюда, как и в лемме 1.1, легко следует пуассоновость отображения момента $\mathcal{A}$. Кроме того, слои отображения (2.1) совпадают со слоями естественного изотропного слоения $\mathfrak{X}^{\#}$. Поля $\mathrm{ad}\,(r^j \ominus \mathcal{A}^j)|_{\mathfrak{X}^{\#}}$ направлены вдоль этих слоев и потому аннулируют любую функцию вида $\varphi(a \circ z)$. И наоборот, любая функция, которую они аннулируют, имеет такой вид. Отсюда следует утверждение (A).

Обозначим через γ^t сдвиг за время t вдоль траекторий поля $\mathrm{ad}\,(l^*f)$ на $\mathcal{E}$. Этот сдвиг является симплектическим отображением $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и, кроме того, $r \circ \gamma^t = r$. Следовательно,

$$(d\gamma^t)_b\,\mathrm{ad}\,(r^*f)_b = \mathrm{ad}\,(r^*f)_{\gamma^t(b)} \quad \forall b \in \mathcal{E}.$$

Положим здесь $b = (\gamma^t)^{-1}(a)$ и вычтем из обеих частей поле $\mathrm{ad}\,(\mathcal{A}^*f)$:

$$(d\gamma^t)_{(\gamma^t)^{-1}(a)}\,\mathrm{ad}\,(r^*f)_{(\gamma^t)^{-1}(a)} - \mathrm{ad}\,(\mathcal{A}^*f)_z = \mathrm{ad}\,(r^*f)_a - \mathrm{ad}\,(\mathcal{A}^*f)_z.$$

Правая часть в силу (2.5) аннулирует функцию $\Phi = \varphi(a \circ z)$ на $\mathfrak{X}^{\#}$. Поэтому

$$[(d\gamma^t)_{(\gamma^t)^{-1}(a)}\,\mathrm{ad}\,(r^*f)_{(\gamma^t)^{-1}(a)} - \mathrm{ad}\,(\mathcal{A}^*f)_z]\,\Phi(a, z) = 0. \tag{2.8}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{ad}\,(r^*f)_\xi = \mathrm{ad}\,(l^*f)_\xi - \mathrm{ad}\,(f)_\xi, \quad \xi \in \mathcal{N} \subset \mathcal{E}.$$

Это следует из (1.31), (1.26). Далее, используя пуассоновость $\mathcal{A}$, получаем

$$(d\gamma)_\xi \operatorname{ad}(r^*f)_\xi = (d\gamma^t)_\xi (\operatorname{ad}(l^*f)_\xi - (d\mathcal{A})_z \operatorname{ad}(\mathcal{A}^*f)_z),$$

где $\xi = \mathcal{A}(z)$. Заметим также, что

$$(d\gamma^t)_\xi \operatorname{ad}(l^*f)_\xi = \frac{d}{dt}\gamma^t(\xi).$$

Поэтому (2.8) можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{d}{dt} - \operatorname{ad}(\mathcal{A}^*f)\right) j_t^*\Phi = 0, \tag{2.9}$$

где отображение $j_t\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^\#$ определено так: $j^t(z) = (\gamma^t(\mathcal{A}(z)), z)$. При $t=0$ имеем $j_0^*\Phi = \varphi(\mathcal{A}(z)\circ z) = \varphi(z)$. Таким образом, решением (2.9) будет

$$j_t^*\Phi \equiv \varphi(\gamma^t(\mathcal{A}(z))\circ z) = e^{t \operatorname{ad}(\mathcal{A}^*f)}\varphi(z).$$

При $t=1$ отсюда получаем тождество

$$\varphi(\gamma_{l^*f}(\mathcal{A}(z))\circ z) = \varphi(\gamma_{\mathcal{A}^*f}(z)),$$

что и доказывает (2.7), т. е. утверждение (B).

Итак, мы видим, что действие симплектического группоида $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{X}$ может быть описано также в терминах бесконечной (псевдо) группы симплектических преобразований $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ с образующими $\{\gamma_{\mathcal{A}^*f} \mid f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})\}$. Утверждение (C) теоремы поэтому следует из леммы 2.4 гл. I.

Утверждение (D) теоремы — это обращение утверждений (A), (B). Требуется по заданному отображению момента $\mathcal{B}$ (или $\mathcal{A}$) восстановить пуассоново действие симплектического группоида $\mathcal{D}$ (или $\mathcal{E}$). Делается это по формуле (2.6) или (2.7). Тот факт, что, например, формула (2.7) задает пуассоново действие, доказывается так же, как леммы 1.7, 1.8. Действие $\mathcal{D}$ коммутирует с действием $\mathcal{E}$, поскольку преобразования $\gamma_{\mathcal{A}^*f}$ и $\gamma_{\mathcal{B}^*g}$ коммутируют (так как $\{\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_k\} = 0$). Теорема доказана.

Отметим, что любой симплектический группоид естественно действует на своем подмногообразии единиц $\mathcal{N}$. А именно для $\xi \in \mathcal{N}$ и $a \in \mathcal{E}$ действие $a\circ\xi$ определено, если $r(a) = \xi$, и в этом случае $a\circ\xi \overset{\text{def}}{=} l(a)$. Это действие назовем *коприсоединенным*.

Следствие 2.1. *Коприсоединенное действие пуассоново. Отображение момента переводит произвольное пуассоново действие в коприсоединенное.*

Доказательство. В силу (1.31) $l\circ\gamma_{l^*f} = \gamma_f$. Поэтому коприсоединенное действие можно описать так: если $a = \gamma_{l^*f}(\xi)$, то $a\circ\xi = \gamma_f(\xi)$. Таким образом, на каждом симплектическом листе $\Omega \subset \mathcal{N}$ для коприсоединенного действия группоида $\mathcal{E}$ мы получаем формулу (2.7), в которой $z \equiv \xi \in \Omega$ и $\mathcal{A} \equiv \mathrm{id}$. Поскольку это действие транзитивно, то база расслоения $\mathcal{B}\colon \Omega \to \{\cdot\}$ здесь три виальна (одна точка). Пуассоновость действия следует из утверждения (D) теоремы 2.1.

Далее, по лемме 2.1 и по определению коприсоединенного действия имеем

$$\mathcal{A}(a \underset{\mathfrak{X}}{\circ} z) = l(a) = a \underset{\mathcal{N}}{\circ} \xi = a \underset{\mathcal{N}}{\circ} r(a) = a \underset{\mathcal{N}}{\circ} \mathcal{A}(z). \qquad (2.10)$$

Здесь индексами $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{N}$ обозначены многообразия, на которых рассматривается действие $\mathcal{G}$. Таким образом, это действие коммутирует с отображением момента $\mathcal{A}$. Следствие доказано.

Следствие 2.2. *Пусть $\mathcal{G}$ полный односвязный симплектический группоид, соответствующий пуассонову многообразию $\mathcal{N}$. Пусть $\mathfrak{X}$ односвязное симплектическое многообразие и $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ гладкое пуассоново расслоение, причем все векторные поля* $\operatorname{ad}(\mathcal{A}^*f)$, $f \in C_0^\infty(\mathcal{N})$ *полны на $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathcal{G}$ пуассоново действует на $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{A}$ — отображение момента этого действия.*

Доказательство. Это следствие утверждения (D) теоремы. Нужно лишь добавить, что система (2.5) при сделанных предположениях об односвязности и полноте разрешима глобально.

2.2. Полярный группоид. Теперь рассмотрим подробнее полярное к $\mathcal{N}$ многообразие $\mathcal{M}$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{N} \\ \mathfrak{X} \arrow[ur, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "\mathcal{B}"'] & \\ & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Теорема 2.2 [63]. *Пусть полный симплектический группоид $\mathcal{G}$ действует на $\mathfrak{X}$ пуассоново и свободно. Пусть расслоение на $\mathcal{G}$-орбиты $\mathcal{B}\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{M}$, а также отображение момента $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{N}$ являются гладкими расслоениями. Тогда пуассонову многообразию $\mathcal{M}$ соответствует полный симплектический группоид $\mathcal{D}$, диффеоморфный сумме Уитни двух экземпляров $\mathfrak{X}$ относительно отображения момента, профакторизованной по ее естественному изотропному расслоению.*

Доказательство. Сумма Уитни (см. [32, 185])

$$\mathfrak{X} \underset{\mathcal{A}}{+} \mathfrak{X} = \{(z, z') \mid \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(z')\}$$

является коизотропным подмногообразием в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^{(-)}$ относительно симплектической формы $\omega_{\mathfrak{X}} \ominus \omega_{\mathfrak{X}}$, поскольку скобки

$$\{\mathcal{A}^j \ominus \mathcal{A}^j,\ \mathcal{A}^k \ominus \mathcal{A}^k\}_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)}} = \{\mathcal{A}^j,\ \mathcal{A}^k\}_{\mathfrak{X}} \oplus \{\mathcal{A}^j,\ \mathcal{A}^k\}_{\mathfrak{X}^{(-)}} =$$
$$= \Psi^{jk}(\mathcal{A}) \ominus \Psi^{jk}(\mathcal{A})$$

аннулируются на $\mathfrak{X} \underset{\mathcal{A}}{+} \mathfrak{X}$. Кроме того, это подмногообразие инвариантно относительно действия

$$(z, z') \to (a \circ z, a \circ z'), \quad a \in \mathscr{E}.$$

Действительно, в силу (2.10), если $\mathscr{A}(z) = \mathscr{A}(z')$, то $\mathscr{A}(a \circ z) = \mathscr{A}(a \circ z')$. Поскольку действие $\mathscr{E}$ свободно, то $\mathfrak{X} \underset{\mathscr{A}}{+} \mathfrak{X}$ *расслаивается* $\mathscr{E}$-орбитами над некоторой базой $\mathscr{D}$.

В силу (2.7) базис в плоскости, касательной к $\mathscr{E}$-орбите, задают векторы $\operatorname{ad}(\mathscr{A}^j) \oplus \operatorname{ad}(\mathscr{A}^j)$. С другой стороны, в силу коизотропности $\mathfrak{X} \underset{\mathscr{A}}{+} \mathfrak{X}$ именно эти векторы задают базис в ядре сужения формы $(\omega_{\mathfrak{X}} \ominus \omega_{\mathfrak{X}})|_{\mathfrak{X} \underset{\mathscr{A}}{+} \mathfrak{X}}$. Следовательно, $\mathscr{E}$-орбиты совпадают с естественными изотропными слоями на $\mathfrak{X} \underset{\mathscr{A}}{+} \mathfrak{X}$. В частности, форма $\omega_{\mathfrak{X}} \ominus \omega_{\mathfrak{X}}$ корректно проектируется на $\mathscr{D}$ и задает там симплектическую структуру.

Расслоение $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$: $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^{(-)} \to \mathscr{M} \times \mathscr{M}^{(-)}$ пуассоново и корректно сужается на $\mathscr{D}$, поскольку $\mathscr{B}$ постоянно вдоль действия $\mathscr{E}$. Обозначим полученное отображение через $\tilde{\mathscr{B}}$: $\mathscr{D} \to \mathscr{M} \times \mathscr{M}^{(-)}$. Оно уже не является отображением «на», но по-прежнему пуассоново.

Отождествим $\mathscr{M}$ с диагональю в $\mathscr{M} \times \mathscr{M}$ и отображение отождествления обозначим через i. Пусть также π_1 и π_2 проекции на сомножители в прямом произведении $\mathscr{M} \times \mathscr{M}^{(-)}$. Положим $\tilde{l} = i \circ \pi_1 \circ \tilde{\mathscr{B}}$, $\tilde{r} = i \circ \pi_2 \circ \tilde{\mathscr{B}}$. Тогда $\tilde{l}$ пуассоново, а $\tilde{r}$ — антипуассоново отображения $\mathscr{D}$ на $\mathscr{M} \approx \operatorname{diag}(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$. Друг с другом $\tilde{l}$ и $\tilde{r}$ в инволюции, поскольку π_1 и π_2 в инволюции.

Лагранжева диагональ $\operatorname{diag}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ лежит в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$. Ее фактор по действию $\mathscr{E}$, очевидно, изоморфен $\mathscr{M} \approx \operatorname{diag}(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$. Таким образом, это последнее подмногообразие лагранжево в $\mathscr{D}$. Сужения $\tilde{l}$ и $\tilde{r}$ на это подмногообразие являются тождественными отображениями, поскольку сужение $\tilde{\mathscr{B}}$ тождественное.

Теперь так же, как в леммах 1.7, 1.8, доказывается, что многообразие $\mathscr{D}$ наделяется структурой симплектического группоида, соответствующего пуассонову многообразию $\mathscr{M}$, а $\tilde{l}$ и $\tilde{r}$ — ее отображения сокращения (1.1). Полнота $\mathscr{D}$ следует из леммы 1.3. Теорема доказана.

Пример 2.1. *Скобки, полярные линейным и аффинным* (продолжение примеров 2.4, 2.5 гл. I). Пусть G — это группа Ли, действующая симплектическими преобразованиями на $\mathfrak{X}$. Хорошо известно [2, 150, 151, 186, 216, 221], что в этом случае базой отображения момента $\mathscr{A}$: $\mathfrak{X} \to \mathscr{N}$ служит линейное пространство $\mathbf{R}^n$ (область в нем) с аффинной скобкой Пуассона (1.45) гл. I. Если коцикл c, участвующий в этой скобке, тривиален, то после подходящего выбора начала координат база $\mathbf{R}^n$ отождествляется с коалгеброй Ли $\mathfrak{g}^*$.

Независимо от того, тривиален или нет коцикл c, мы получаем в силу теоремы 2.2 целый класс скобок Пуассона (на базах G-расслоений $\mathfrak{X} \to \mathcal{M}$), для которых существует полный симплектический группоид.

Интересен в этой связи класс скобок, порожденных действиями групп Ли внутренними автоморфизмами на себе. А именно, действие

$$G \ni q \to \alpha q \alpha^{-1} \in G, \quad \alpha \in G$$

поднимем стандартно на кокасательное пространство T^*G. Получим симплектическое действие G на T^*G с отображением момента

$$\mathcal{A}\colon T^*G \to \mathfrak{g}^*, \quad \mathcal{A}(q, p) = L(q)^* p - R(q)^* p, \quad p \in T_q^*G.$$

Полярная скобка на многообразии G-орбит $\mathcal{M}$ обладает в силу теоремы 2.2 полным симплектическим группоидом.

2.3. Нильпотентные и разрешимые скобки. Мы начнем этот раздел еще раз с простейшего примера линейных скобок и применим к ним результаты п. 1.3.

Пример 2.2. *Группоид, соответствующий линейным скобкам.* Предположим, что скобки (1.4) заданы на $\mathbf{R}^n$ и линейны:

$$\Psi^{jk}(\xi) = \lambda_s^{jk} \xi^s, \quad \lambda_s^{jk} = \mathrm{const}.$$

Тогда система (1.6) принимает вид $\dot{\Xi} = -\mathrm{ad}(q)^* \Xi$, где ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со структурными константами λ_s^{jk}. Формулы (1.7) — (1.9) дают

$$\mathcal{P}_q(\xi) = \left(\frac{I - e^{-\mathrm{ad}(q)}}{\mathrm{ad}(q)}\right)^* \xi \equiv dL(q)^{*-1}\xi, \quad r(q, p) = dL(q)^* p,$$

$$\mathcal{P}'_q(\xi) = \left(\frac{e^{\mathrm{ad}(q)} - I}{\mathrm{ad}(q)}\right)^* \xi \equiv dR(q)^{*-1}\xi, \quad l(q, p) = dR(q)^* p,$$

где dL и dR — дифференциалы левого и правого сдвигов в координатах первого рода на группе Ли G, отвечающей алгебре $\mathfrak{g}$. Следовательно, локальный группоид $\mathcal{E}$, построенный по решению (1.7), совпадает здесь с касательным расслоением $T^*\mathcal{U}$, причем $\mathcal{U} \subset G$ — такая окрестность единицы на группе, где имеются координаты первого рода (т. е. где невырождено экспоненциальное отображение). Операция умножения (1.32) совпадает здесь с той, что была указана в примере 1.1. Ясно, что эта операция определена не только локально на $T^*\mathcal{U}$, но и на всем T^*G. Поэтому, разумеется, полный симплектический группоид, отвечающий линейным скобкам Пуассона, совпадает с касательным расслоением над группой Ли.

Пример 2.3. *Группоид, соответствующий нильпотентным скобкам.* Предположим, что скобки (1.4) заданы на $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяют условию нильпотентности:

$$\partial_i \Psi^{jk} = 0 \quad \text{при} \quad i \leqslant j.$$

Тогда задача (1.6) решается глобально при всех $q \in \mathbf{R}^n$. Поскольку матрицы $\partial(\Psi(\Xi)q)/\partial\Xi$ строго верхнетреугольные, то из (1.7) следует, что $\partial\mathcal{P}_q/\partial\xi$ отличается от единичной матрицы на нильпотентную. Поэтому спектр матрицы $\partial\mathcal{P}_q/\partial\xi$ состоит из одной точки 1, т. е. отображение $\mathcal{P}_q$ обратимо при всех $q\in\mathbf{R}^n$.

Следствие 2.3. *Полный симплектический группоид, отвечающий нильпотентным скобкам Пуассона, совпадает с* $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$.

Пример 2.4. *Группоид, соответствующий разрешимым скобкам.* Предположим, что скобки (1.4) заданы на $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяют условию разрешимости:

$\partial_i\Psi^{jk}=0$ *при* $i<j$, $\Psi^{jk}(\xi)$ *растет по* ξ^j *не быстрее первой степени.*

Этому условию удовлетворяют, например, линейные скобки на разрешимых алгебрах Ли. Как известно, группа Ли, отвечающая таким алгебрам, диффеоморфна $\mathbf{R}^n$, и глобальные координаты на группе — это так называемые *координаты второго рода.* Оказывается, можно определить аналог координат второго рода и в случае общих нелинейных скобок Пуассона [59, 69].

Обозначим через $\Xi_{[k]}(\xi, t)$ траекторию системы (1.6) в $\mathbf{R}^n$, соответствующую вектору $q=(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на k-м месте). Определим отображения P_q: $\xi\to p$ и P'_q: $\xi\to p'$ по формулам

$$p^1=\xi^1,\quad p^k=\Xi_{[k-1]}(\ldots\Xi_{[2]}(\Xi_{[1]}(\xi, q_1), q_2), \ldots, q_{k-1})^k,\ 1<k\leqslant n,$$
$$p'^n=\xi^n,\ p'^k=\Xi_{[k+1]}(\ldots\Xi_{[n-1]}(\Xi_{[n]}(\xi, -q_n), -q_{n-1}), \ldots, -q_{k+1})^k,\quad 1\leqslant k<n.$$

Лемма 2.2. *Для вектор-функций* $\tilde r(q, p)=P_q^{-1}(p)$, $\tilde l(q, p)=P_q'^{-1}(p)$ *выполнены все утверждения леммы* 1.4.

Доказательство. Пусть γ_i^t — сдвиг за время t вдоль траектории гамильтониана l_i в фазовом пространстве $\mathscr{E}_{\mathscr{U}}$. Здесь $l=(l_1, \ldots, l_n)$ задано формулой (1.9). Обозначим через

$$U(q)=\left(\gamma_1^{+q_1}\circ\ldots\circ\gamma_n^{+q_n}\right)^*$$

оператор, действующий в пространстве функций на $\mathscr{E}_{\mathscr{U}}$ и зависящий от параметров $q=(q_1, \ldots, q_n)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial q_k}U=\left(\gamma_n^{+q_n}\right)^*\ldots\left(\gamma_k^{+q_k}\right)^*\cdot\operatorname{ad}(l_k)\cdot\left(\gamma_{k-1}^{+q_{k-1}}\right)^*\ldots\left(\gamma_1^{+q_1}\right)^*=$$
$$=U\operatorname{ad}\left(\left(\gamma_{k-1}^{-q_{k-1}}\circ\ldots\circ\gamma_1^{-q_1}\right)^*l_k\right)=U\operatorname{ad}(l^*p^k).\qquad(2.11)$$

Здесь в последнем равенстве использована пуассоновость l (лемма 1.4) и через p^k обозначены компоненты вектор-функций P_q. Совершенно аналогично получаем

$$\frac{\partial}{\partial q_k}U=\operatorname{ad}(l^*p'^k)\cdot U.\qquad(2.12)$$

Из (2.11), вторично дифференцируя по q_m, находим

$$[\operatorname{ad}(l^*p^m),\ \operatorname{ad}(l^*p^k)]=\operatorname{ad}\left(l^*\left(\frac{\partial p^m}{\partial q_k}-\frac{\partial p^k}{\partial q_m}\right)\right)$$

или

$$[p^m,\ p^k]_{\mathcal{N}}=\frac{\partial p^m}{\partial q_k}-\frac{\partial p^k}{\partial q_m}. \tag{2.13}$$

Здесь мы еще раз использовали пуассоновость отображения l. Скобки в (2.13) — это исходные скобки Пуассона (1.4).

Аналогично из (2.12) найдем

$$[p'^k,\ p'^m]_{\mathcal{N}}=\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}-\frac{\partial p'^k}{\partial q_m}. \tag{2.14}$$

Тождества (2.13), (2.14) эквивалентны утверждениям об антипуассоновости $\tilde{r}$ и пуассоновости $\tilde{l}$.

Далее, дифференцируя (2.11) и используя (2.12), получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_m\,\partial q_k}=\mathrm{ad}\,(l^*p'^m)\cdot U\cdot \mathrm{ad}\,(l^*p^k)+U\cdot \mathrm{ad}\left(l^*\frac{\partial p^k}{\partial q_m}\right).$$

Наоборот, дифференцируя (2.12) и используя (2.11), получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_k\,\partial q_m}=\mathrm{ad}\,(l^*p'^m)\cdot U\cdot \mathrm{ad}\,(l^*p^k)+\mathrm{ad}\left(l^*\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}\right)\cdot U.$$

Отсюда

$$\mathrm{ad}\left(l^*\frac{\partial p^k}{\partial q_m}\right)=U\cdot\mathrm{ad}\left(l^*\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}\right)\cdot U^{-1}=\mathrm{ad}\left(U\left(l^*\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}\right)\right)=$$
$$=\mathrm{ad}\left(l^*V_q^*\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}\right),$$

где

$$V_q(\xi)=\Xi_{[n]}(\Xi_{[n-1]}(\ldots\Xi_{[1]}(\xi,\ q_1),\ \ldots,\ q_{n-1}),\ q_n)\equiv P_q'^{-1}(P_q(\xi)).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p^k(\xi,\ q)}{\partial q_m}=\frac{\partial p'^m}{\partial q_k}(V_q(\xi),\ q),$$

или

$$\frac{\partial P_q}{\partial q}(P_q^{-1}(p))=\frac{\partial P_q'}{\partial q}\left(P_q'^{-1}(p)\right)^*.$$

Последнее равенство, как нетрудно видеть, эквивалентно коммутативности отображений $\tilde{r}$ и $\tilde{l}$ относительно симплектической структуры $dq\wedge dp$. Лемма доказана.

Отображения P_q и P_q' в случае линейных скобок задают левый и правый сдвиги в координатах второго рода на группе. В случае общих нелинейных скобок эти отображения, так же как и (1.7), можно использовать для построения локального группоида.

Предположим теперь, что скобки удовлетворяют условию разрешимости. Тогда, во-первых, $\partial\Xi^i_{[k]}/\partial\xi^j=0$ при $j<i$ и, во-вторых, $\partial\Xi^i_{[k]}/\partial\xi^i>0$. Следовательно, матрицы Якоби $\partial P_q/\partial\xi$, $\partial P_q'/\partial\xi$ верхнетреугольные, а их диагональные элементы положительны. Таким образом, отображения P_q и P_q' обратимы глобально на $\mathbf{R}^n$ при всех $q\in\mathbf{R}^n$.

Следствие 2.4. *Полный симплектический группоид, отвечающий разрешимым скобкам Пуассона, совпадает с* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

2.4. Структура Картана. Еще один путь конструирования симплектических группоидов возникает при обобщении на случай нелинейных скобок Пуассона, известных в теории групп уравнений Маурера — Картана.

Заметим, что в терминах дифференциальных 1-форм

$$\theta = -P_q(\xi)dq, \quad \theta' = P'_q(\xi)\,dq$$

тождества (1.3) или (2.13), (2.14) можно переписать так:

$$d\theta = \frac{1}{2}\{\theta \wedge \theta\}_{\mathcal{N}}, \quad d\theta' = \frac{1}{2}\{\theta' \wedge \theta'\}_{\mathcal{N}},$$

где дифференциал d берется только по переменной q (т. е. при фиксированном $\xi \in \mathcal{N}$), а скобка $\{\ldots, \ldots\}_{\mathcal{N}}$ берется по переменной $\xi \in \mathcal{N}$ (см. (1.4)). Конечно, формы θ, θ' определены в общем случае лишь локально в достаточно малой окрестности точки $q=0$. С другой стороны, в случае линейных скобок (см. пример 2.2) θ и θ' — это лево- и правоинвариантные формы, которые могут быть заданы глобально на группе Ли. Поэтому и в случае нелинейных скобок можно пойти по пути постулирования существования таких глобальных 1-форм [59, 63].

Пусть $\mathcal{N}$ — пуассоново многообразие, $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ — алгебра гладких функций на нем, G — многообразие той же размерности, что и $\mathcal{N}$.

Определение 2.2. Дифференциальная 1-форма θ', определенная на G и принимающая значения в $\mathcal{F}(\mathcal{N})$, задает *структуру Картана*, если она удовлетворяет уравнению

$$d\theta' = \frac{1}{2}\{\theta' \wedge \theta'\}_{\mathcal{N}} \tag{2.15}$$

и, кроме того, отображение $\partial\theta' \colon TG \to T^*\mathcal{N}$ невырождено на слоях.

Здесь d обозначает дифференциал на G, а ∂, как и раньше, обозначает дифференциал по переменным на $\mathcal{N}$; таким образом, $\partial\theta'_\alpha(\eta) \colon T_\alpha G \to T^*_\eta\mathcal{N}$ — невырожденное отображение для любых $\alpha \in G$ и $\eta \in \mathcal{N}$.

Определение 2.3. Гладкую операторнозначную функцию Π на G назовем *представлением структуры Картана*, отвечающим представлению π пуассоновой алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{N})$, если $d\Pi = \pi(\theta')\cdot\Pi$.

Определение 2.4. *Структуру Картана* назовем *полной*, если для любой кусочно-гладкой кривой $\{\alpha(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset G$ система дифференциальных уравнений на $G \times \mathcal{N}$

$$\partial\theta'_q(\eta)\frac{d}{dt}q = \partial\theta'_{\alpha(t)}(\eta)\,\dot{\alpha}(t), \quad \frac{d}{dt}\eta = \Psi(\eta)\,\partial\theta'_{\alpha(t)}(\eta)\,\dot{\alpha}(t) \tag{2.16}$$

разрешима на всем отрезке времени $t \in [0;\ 1]$ для любых начальных условий $q(0) \in G$, $\eta(0) \in \mathcal{N}$.

Лемма 2.3. *Решение системы* (2.16) *в момент времени* t *зависит лишь от концов кривой* $\bar{\alpha}=\{\alpha(t)\}$, *т. е. от точек* $\alpha(0)$ и $\alpha(t)$, *но не зависит от вида этой кривой.*

Доказательство. Пусть $\zeta=(\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ локальные координаты на $\mathcal{N}$ и $x\in G$. На многообразии $G\times\mathcal{N}$ рассмотрим набор 1-форм

$$\chi^i=d\zeta^i-\Psi^{ij}(\zeta)\,\partial_j\theta'_x(\zeta).$$

Из уравнений (2.15) и тождества Якоби (1.10) следует, что

$$\tilde{d}\chi^i=-\chi^s\wedge\partial_s[\Psi^{ij}\,\partial_j\theta'],$$

где дифференциал $\tilde{d}$ берется по всем координатам на $G\times\mathcal{N}$. Таким образом, набор форм $\chi^1, \ldots, \chi^n$ задает интегрируемое по Фробениусу распределение плоскостей на $G\times\mathcal{N}$ (это распределение не зависит от выбора локальных координат на $\mathcal{N}$). Соответствующие интегральные листы однозначно проектируются на G. Кроме того, траектория $(\bar{\alpha}, \bar{\eta})=\{\alpha(t), \eta(t)\}$, полученная решением второго уравнения (2.16), очевидно, лежит на одном из этих листов $\mathcal{L}$. Поэтому при деформации кривой $\bar{\alpha}$, оставляющей неподвижной концы, траектория $(\bar{\alpha}, \bar{\eta})$ деформируется на $\mathcal{L}$ так, что ее концы остаются неподвижными. Следовательно, концы траектории $\bar{\eta}$ при этом также остаются неподвижными.

Обозначим $\eta(t)=l(\alpha(t))$ и введем 1-формы $(\mu_i)_y=\partial_i\theta'_y(l(y))$, $y\in G$. Набор форм $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на G и компоненты $l^1, \ldots, l^n$ удовлетворяют соотношениям (1.29), т. е.

$$dl^j=\Psi^{jk}(l)\,\mu_k, \tag{2.17}$$

$$d\mu_i=\frac{1}{2}\,\partial_i\Psi^{jk}(l)\,\mu_j\wedge\mu_k, \tag{2.18}$$

где через d обозначен дифференциал на G. Действительно, (2.17) следует из второго уравнения (2.16) и определения l, а равенство (2.18) — следствие (2.15) и (2.17). Первое уравнение (2.16) после этого можно переписать так:

$$\langle(\mu_i)_q,\ \dot{q}\rangle=\langle(\mu_i)_\alpha,\ \dot{\alpha}\rangle,\quad i=1, \ldots, n.$$

Повторяя теперь доказательство леммы 1.6, получаем, что из (2.18) следует независимость концов траектории q от деформаций кривой $\bar{\alpha}$, оставляющих неподвижными концы этой кривой. Лемма доказана.

Фиксируем произвольно начальную точку $e=\alpha(0)\in G$. В силу леммы 2.2 для каждого $x\in\mathcal{N}$ определен диффеоморфизм $V_x\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ такой, что $V_e=\mathrm{id}$ и система (2.16) имеет первые интегралы

$$V^{-1}_{\alpha(t)}(\eta(t))=\eta(0),\quad V^{-1}_{q(t)}(\eta(t))=\xi=\mathrm{const}. \tag{2.19}$$

Кроме того, в силу леммы 2.2 положение точки $q(t)$ зависит лишь от $\alpha(t)$, от $q(0)$ и ξ. Обозначим

$$q(t)=\alpha(t)\overset{\xi}{*}q(0). \tag{2.20}$$

Таким образом, при каждом $\xi \in \mathcal{N}$ на многообразии G определена бинарная операция «умножения» $\overset{\xi}{*}$, свойства которой мы сейчас опишем.

Теорема 2.3. *Пусть на связном односвязном многообразии G имеется полная структура Картана, которая соответствует заданным скобкам Пуассона на $\mathcal{N}$. Тогда*

(1) *Функция Π на G со значениями в пространстве линейных операторов на $\mathcal{F}(\mathcal{N})$, заданная формулой*

$$\Pi\colon\ x \to V_x^{-1*},\quad \Pi(x) f = f(V_x^{-1}(\cdot)),$$

является представлением структуры Картана. Это представление соответствует присоединенному представлению

$$\mathrm{ad}\colon\ f \to \langle \partial f,\ \Psi\partial\rangle \tag{2.21}$$

алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{N})$.

(2) *При любом $x \in G$ преобразование $V_x\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ является пуассоновым; орбита $\Omega = \{V_x(\xi) \mid x \in G\}$ совпадает с симплектическим листом в $\mathcal{N}$, проходящим через точку ξ, и для любых $x,\ y \in G$, $\xi \in \mathcal{N}$ справедливо тождество*

$$V_y(V_x(\xi)) = V_{y \overset{\xi}{*} x}(\xi). \tag{2.22}$$

(3) *Форма $\theta_x(\xi) \equiv -\theta'_x(V_x(\xi))$ удовлетворяет тому же уравнению (2.15), что и форма θ':*

$$d\theta = \frac{1}{2}\{\theta \wedge \theta\}_{\mathcal{N}}. \tag{2.23}$$

(4) *Мера на G*

$$d\sigma^{\xi}(x) = \frac{1}{n!}\left| \frac{\partial}{\partial \xi^1}\theta_x(\xi) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^n}\theta_x(\xi) \right| \tag{2.24}$$

инвариантна относительно «левых сдвигов» $x \to y \overset{\xi}{*} x$. Если G *компактно, то мера на $\mathcal{N}$*

$$d\mu(\xi) = \left(\int_G d\sigma^{\xi}\right) d\xi^1 \ldots d\xi^n \tag{2.25}$$

инвариантна относительно сдвигов вдоль гамильтоновых полей на $\mathcal{N}$.

(5) *Инфинитезимальные «левые сдвиги», т. е. векторные поля на G*

$$v^{\xi}(f)_x = \partial\theta_x(\xi)^{-1}\,\partial_{\xi}\,[f(V_x(\xi))],\quad f \in \mathcal{F}(\mathcal{N}),$$

при каждом ξ задают представление $f \to v^{\xi}(f)$ пуассоновой алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{N})$. Эти поля антисимметричны относительно меры (2.24) и «правоинвариантны», т. е.

$$v^{\xi}(f)_{y \overset{\xi}{*} x} = dR_y^{\xi}(x)\,(v^{V_x(\xi)}(f)_y), \tag{2.26}$$

где $dR^{\xi}_{y}(x)$ — *дифференциал «правого сдвига»:*

$$R^{\xi}(x)(y) \overset{\text{def}}{=} y \overset{\xi}{*} x, \quad dR^{\xi}_{y}(x)\colon\ T_y G \to T_{y \overset{\xi}{*} x} G.$$

Сама форма θ', *задающая структуру Картана, «правоинвариантна»:*

$$\partial\theta'_x(\zeta) \cdot dR_e^{V_x^{-1}(\zeta)}(x) = \partial\theta'_e(\zeta), \tag{2.26a}$$

а форма θ *«левоинвариантна»:*

$$\partial\theta_{x \overset{\xi}{*} y}(\xi)\, \frac{\partial (x \overset{\xi}{*} y)}{\partial y} = \partial\theta_y(\xi). \tag{2.27}$$

Доказательство. (1) Вспоминая доказательство леммы 2.3, мы видим, что $l(y) \equiv V_y(\eta(0))$, и поэтому в силу (2.17) имеет место тождество (аналогичное (1.19))

$$dV = \Psi(V)\,\partial\theta'(V), \quad \text{где} \quad V \equiv V_y, \quad d \equiv dy, \tag{2.28}$$

или

$$dV^{-1} = \{\theta', V^{-1}\}_{\mathcal{N}}.$$

Сворачивая с дифференциалом $(\partial f)(V^{-1}(\cdot))$, получаем

$$d(f(V^{-1}(\cdot))) = \{\theta', f(V^{-1}(\cdot))\}_{\mathcal{N}},$$

или

$$d_y(\Pi(y) f) = \operatorname{ad}(\theta'_y)\,\Pi(y) f \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{N}) \quad \forall y \in G,$$

что и доказывает утверждение п. (1).

Пуассоновость V_x при любом $x \in G$ — это очевидное следствие, например, уравнения (2.28) и того факта, что сдвиги вдоль траекторий полей вида $\operatorname{ad}(g)$ пуассоновы на $\mathcal{N}$. Тождество (2.22) получается из сравнения двух выражений для $\eta(t)$ из (2.19), если выбрать $\alpha(1) = y$ при $t = 1$ и $q(0) = x$ при $t = 0$. Этим доказан п. (2). Пункт (3) прямо следует из (2.15) и (2.28).

Заметим теперь, что относительно симплектической структуры $\tilde{d}\theta$ гамильтонова система в $G \times \mathcal{N}$, отвечающая функции $f(V_x(\xi))$, имеет вид

$$\dot{x} = v^{\xi}(f)_x, \quad \dot{\xi} = 0.$$

Сдвиги вдоль траекторий гамильтоновой системы сохраняют меру Лиувилля

$$|\underbrace{\tilde{d}\theta \wedge \ldots \wedge \tilde{d}\theta}_{n}| = d\sigma^{\xi}(x)\, d\xi^1 \ldots d\xi^n. \tag{2.29}$$

Поскольку координата ξ при этих сдвигах сохраняется, то, следовательно, сдвиги вдоль траекторий поля $v^{\xi}(f)$ сохраняют меру $d\sigma^{\xi}$.

Далее, гамильтонова система на $G \times \mathcal{N}$, отвечающая функции $f(\xi)$, имеет вид

$$\partial\theta_x(\xi)\,\dot{x} = \partial f(\xi), \quad \dot{\xi} = \Psi(\xi)\,\partial f(\xi).$$

Из сохранения меры (2.29) при сдвигах $(x_0, \xi_0) \to (x(x_0, \xi_0, t), \xi(\xi_0, t))$ вдоль этой системы следует, что для любой финитной функции $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$

$$\iint_{G\times\mathcal{N}} g(\xi(\xi_0, t))\, \sigma d(^{\xi_0}(x_0)\, d\xi_0^1 \ldots d\xi_0^n = \iint_{G\times\mathcal{N}} g(\xi)\, d\sigma^{\xi}(x)\, d\xi^1 \ldots d\xi^n.$$

Отсюда, используя определение (2.25), получаем

$$\int_{\mathcal{N}} g(\xi(\xi_0, t))\, d\mu(\xi_0) = \int_{\mathcal{N}} g(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Тем самым утверждения п. (5) доказаны.

Как мы видели, поле $v^{\xi}(f)$ совпадает с гамильтоновым полем на $G\times\mathcal{N}$, отвечающим функции $f(V_x(\xi))$. Поэтому коммутатор $[v^{\xi}(f_1), v^{\xi}(f_2)]$ совпадает с гамильтоновым полем, отвечающим функции

$$\{f_1(V_x(\xi)),\ f_2(V_x(\xi))\}_{G\times\mathcal{N}} = \{f_1, f_2\}_{\mathcal{N}}(V_x(\xi)), \tag{2.30}$$

т. е. совпадает с $v^{\xi}(\{f_1, f_2\}_{\mathcal{N}})$. Таким образом, v^{ξ} — гомоморфизм. Отметим, что равенство (2.30), т. е. пуассоновость отображения

$$l\colon (x, \xi) \to V_x(\xi), \quad G\times\mathcal{N} \xrightarrow{l} \mathcal{N}, \tag{2.31}$$

следует из (2.28) и из явного вида скобок Пуассона на $G\times\mathcal{N}$:

$$\{\varphi, \psi\}_{G\times\mathcal{N}} = \langle\partial\theta^{-1}\partial\varphi,\ d\psi\rangle - \langle\partial\theta^{-1}\partial\psi,\ d\varphi\rangle - \{\varphi, \psi\}_{\mathcal{N}}. \tag{2.32}$$

Формула (2.26) следует из (2.20):

$$\dot q = dR_{\alpha}^{\xi}(q(0))\,\dot\alpha, \quad \dot q = v^{\xi}(f)_q, \quad \dot\alpha = v^{\eta(0)}(f)_{\alpha}.$$

Полагая здесь $t=1$ и $q(0)=x$, $\eta(0)=V(\xi)$, $\alpha(1)=y$, $q(1)= y \overset{\xi}{*} x$, получаем (2.26). Теорема доказана.

2.5. Группоид для структуры Картана. Аффинные скобки. Теперь мы покажем, что структура Картана позволяет построить симплектический группоид, отвечающий данному пуассонову многообразию [63].

Теорема 2.4. *Пусть G многообразие со структурой Картана над пуассоновым многообразием $\mathcal{N}$. Тогда введенное в п. 2.4 умножение на G обладает следующими свойствами*:

$$z \overset{\xi}{*} (y \overset{\xi}{*} x) = \left(z \overset{V_x(\xi)}{*} y\right) \overset{\xi}{*} x, \quad x \overset{\xi}{*} e = e \overset{\xi}{*} x = x \tag{2.33}$$

и для любого $x \in G$, $\xi \in \mathcal{N}$ существует $x_{\xi}^{-1} \in G$ такой, что

$$x_{\xi}^{-1} \overset{\xi}{*} x = x \overset{V_x(\xi)}{*} x_{\xi}^{-1} = e. \tag{2.34}$$

Доказательство. Вторая половина формул (2.33) прямо следует из определения (2.20).

Рассмотрим на G любые траектории $\{\alpha(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ и $\{\beta(t) \mid 1 \leqslant t \leqslant 2\}$ такие, что $\alpha(0)=\beta(1)=e$, $\alpha(1)=y$, $\beta(2)=z$.

Продолжим траекторию $\alpha(t)$ на отрезок времени $1 \leqslant t \leqslant 2$ с помощью уравнений

$$\partial\theta'_\alpha(\eta)\,\dot{\alpha} = \partial\theta'_\beta(\eta)\,\dot{\beta}, \quad \dot{\eta} = \Psi(\eta)\,\partial\theta'_\alpha(\eta)\,\dot{\alpha}, \quad \eta(0) = V_x(\xi). \tag{2.35}$$

Тогда в силу (2.19), (2.20) и (2.22)

$$\eta(1) = V_{\alpha(1)}(\eta(0)) = V_y(V_x(\xi)) = V_{\underset{y*x}{\xi}}(\xi),$$

$$\alpha(2) = \beta(2) \overset{\eta(0)}{*} \alpha(1) = z \overset{V_x(\xi)}{*} y.$$

Траекторию $q(t)$ на G подчиним первому уравнению (2.16) и начальному условию $q(0) = x$. Тогда по определению (2.20)

$$\begin{aligned} q(1) &= \alpha(1) \overset{\xi}{*} q(0) = y \overset{\xi}{*} x, \\ q(2) &= \alpha(2) \overset{\xi}{*} q(0) = \left(z \overset{V_x(\xi)}{*} y\right) \overset{\xi}{*} x. \end{aligned} \tag{2.36}$$

С другой стороны, в силу (2.35) на отрезке $1 \leqslant t \leqslant 2$ траектория $q(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \partial\theta'_q(\eta)\,\dot{q} &= \partial\theta'_\beta(\eta)\,\dot{\beta}, \qquad && \beta(1) = e, \\ \dot{\eta} &= \Psi(\eta)\,\partial\theta'_\beta(\eta)\,\dot{\beta}, && \eta(1) = V_{q(1)}(\xi). \end{aligned}$$

Следовательно, по определению (2.20) $q(t) = \beta(t) \overset{\xi}{*} q(1)$. Поэтому

$$q(2) = \beta(2) \overset{\xi}{*} q(1) = z \overset{\xi}{*} \left(y \overset{\xi}{*} x\right).$$

Сравнивая с (2.36), получаем искомое первое тождество (2.33). Остается доказать (2.34).

Рассмотрим любую траекторию $\{q(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset G$, которая соединяет точку $q(0) = x$ с точкой $q(1) = e$. Построим траекторию $\alpha(t)$, решив уравнения (2.16) с начальными условиями $\alpha(0) = e$, $\eta(0) = V_{x_\xi}(\xi)$. Тогда $q(t) = \alpha(t) \overset{\xi}{*} q(0)$. Обозначая $\alpha(1) = x_\xi^{-1}$, получаем $x_\xi^{-1} * x = e$ и $\xi = \eta(1)$.

Теперь рассмотрим траекторию $\tilde{q}(t) = q(1-t)$. Она соединяет точку $\tilde{q}(0) = e$ с точкой $\tilde{q}(1) = x$. Построим траекторию $\tilde{\alpha}(t)$, решая уравнения

$$\begin{aligned} \partial\theta'_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\eta})\,\dot{\tilde{\alpha}} &= \partial\theta'_{\tilde{q}}(\tilde{\eta})\,\dot{\tilde{q}}, \qquad && \tilde{\alpha}(0) = x_\xi^{-1}, \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \Psi(\tilde{\eta})\,\partial\theta'_{\tilde{q}}(\tilde{\eta})\,\dot{\tilde{q}}, && \tilde{\eta}(0) = \xi = V_{\tilde{\alpha}(0)}(V_x(\xi)). \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{q}(t) \overset{V_x(\xi)}{*} \tilde{\alpha}(0)$. С другой стороны, $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ и $\tilde{\eta}(t) = \eta(1-t)$. Поэтому $e = x \overset{V_x(\xi)}{*} x_\xi^{-1}$. Теорема 2.4 доказана.

Следствие 2.5. *Выполнено тождество*

$$\partial\theta'_{x_\xi^{-1}}(\xi) = -\partial\theta_x(\xi).$$

И теперь — главный результат данного раздела.

Следствие 2.6. *Пусть на G имеется полная структура Картана. Тогда полный симплектический группоид, отвечающий пуассонову многообразию $\mathcal{N}$, совпадает с $G\times\mathcal{N}$. При этом симплектическая структура на $G\times\mathcal{N}$ задается точной 2-формой $\tilde{d}\theta$, а структура группоида задается следующим образом:*

$$(y,\ \eta)*(x,\ \xi)\overset{\mathrm{def}}{=}\left(y\overset{\xi}{*}x,\ \xi\right),\quad \text{если}\quad \eta=V_x(\xi)$$

(с подмножеством единиц $\{e\}\times\mathcal{N}$).

Доказательство. Тот факт, что операция умножения на $G\times\mathcal{N}$ задает структуру группоида, следует из (2.22), (2.33). Отображения сокращения (1.1) в этом группоиде имеют вид

$$l(x,\ \xi)=V_x(\xi),\quad r(x,\ \xi)=\xi,$$

поскольку обратный элемент задается формулой

$$(x,\ \xi)^{-1}=(x_{\xi}^{-1},\ V_x(\xi)).$$

Пуассоновость отображения l (2.31) уже отмечалась выше. Антипуассоновость r и коммутативность l и r легко следуют из формулы (2.32). Следствие доказано.

Следствие 2.7. *Система мер $d\lambda^{\xi}(x)=|\det dR_e^{\xi}(x)|\,dx$, определенных на слоях $G\approx r^{-1}(\xi)\subset G\times\mathcal{N}$, задает правую систему мер Хаара на группоиде $G\times\mathcal{N}$.*

Доказательство. Нам нужно установить равенство

$$\int_G f\left(x\overset{\xi}{*}y\right)d\lambda^{V_y(\xi)}(x)=\int_G f(x)\,d\lambda^{\xi}(x),$$

которое является прямым следствием свойства правоинвариантности (2.26):

$$dR_e^{V_y(\xi)}(x)^{-1}dx=dR_e^{\xi}\left(x\overset{\xi}{*}y\right)^{-1}d\left(x\overset{\xi}{*}y\right).$$

Замечание 2.1. Определим экспоненциальное отображение

$$\exp_{\xi}\colon\ T_eG\to G$$

с помощью траекторий $x(t)\equiv\exp_{\xi}(tX)$ правоинвариантных полей $X_x=dR_e^{\xi}(x)X,\quad X\in T_eG$. При этом $X_{y\overset{\xi}{*}x}=dR_y^{\xi}(x)X_x$.

Следствие 2.8. *Справедливо тождество*

$$\exp_{\xi'}(Xt)\overset{\xi}{*}\exp_{\xi}(X\tau)=\exp_{\xi}(X(t+\tau)),$$

где

$$\xi'=V_{\exp_{\xi}(X\tau)}(\xi).$$

Пример 2.5. *Аффинные скобки.* Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, и пусть $c\in\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*\approx\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^*)$ некоторый ее 2-коцикл. Рассмотрим на $\mathcal{N}=\mathfrak{g}^*$ аффинную скобку Пуассона (1.45) гл. I.

Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$, а $\rho(\xi)=\langle\xi,\ dR(x)^{-1}dx\rangle$ — фундаментальная правоинвариантная форма на G. В силу того что c — коцикл, дифференциальная 2-форма $\frac{1}{2}\langle c, \partial\rho\wedge\partial\rho\rangle$ на G замкнута и, следовательно, точна. Обозначим через ε первообразную 1-форму:

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\langle c, \partial\rho\wedge\partial\rho\rangle, \quad \partial\rho \equiv dR(x)^{-1}dx.$$

Тогда форма

$$\theta'_x(\xi) = \rho_x(\xi) + \varepsilon_x, \quad x \in G,$$

задает структуру Картана, отвечающую аффинной скобке Пуассона, так как, очевидно, выполнено уравнение (2.15) и отображение $\partial\theta'_x = dR(x)^{-1}$: $T_xG \to \mathfrak{g} = T^*_\xi\mathcal{N}$ невырождено.

Пуассоновы отображения V_x: $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$, задающие конрисоединенное представление структуры Картана, вычисляются из уравнения (2.28). Получаем

$$V_x(\xi) = \mathrm{Ad}(x)^{*-1}(\xi + v(x)),$$

где v: $G \to \mathcal{N}$ вектор-функция на G, определяемая уравнением

$$dv = \mathrm{Ad}(x)^* \cdot c \cdot dR(x)^{-1}dx, \quad v_e = 0. \tag{2.37}$$

В силу односвязности G это уравнение глобально разрешимо.

Умножение на G, соответствующее построенной структуре Картана, очевидно, совпадает с групповым умножением. Поэтому (2.22) (или уравнение (2.37)) влечет

$$v(yx) = v(x) + \mathrm{Ad}(x)^* v(y).$$

Наличие добавки с коциклом «c» в аффинной скобке никак не отражается на операции умножения в G. Ее чувствует лишь структура группоида на $G\times\mathcal{N}$ (следствие 2.6):

$$(y, \eta) * (x, \xi) = (yx, \xi), \quad \textit{если} \quad \mathrm{Ad}(x)^*\eta = \xi + v(x),$$

где v — групповой 1-коцикл, отвечающий 2-коциклу «c» алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Симплектическая структура на группоиде $G\times\mathcal{N}$ вычисляется по формуле (1.30), в которой $l = V_x(\xi)$, $\mu = \partial\theta'(V_x(\xi)) = dR(x)^{-1}dx$. Получаем

$$\omega_{G\times\mathcal{N}} = -d(\langle\xi + v(x),\ dL(x)^{-1}dx\rangle) =$$
$$= \omega_{G\times\mathfrak{g}^*} - \frac{1}{2}c\,dL(x)^{-1}dx\wedge dL(x)^{-1}dx.$$

Добавочное слагаемое с коциклом «c» — это точная форма. Она отличает структуру на $G\times\mathcal{N}$ от симплектической структуры (1.11) на $G\times\mathfrak{g}^*$.

§ 3. Конечномерные псевдогруппы и связности на пуассоновых многообразиях

Общим нелинейным скобкам Пуассона в предыдущих параграфах мы сопоставили симплектические группоиды и изучили свойства этого соответствия. В то же время существует и более непосредственный аналог группы Ли, размерность которого в отличие от группоида совпадает с размерностью пуассонова многообразия и на котором умножение определено для **любых** пар точек. Мы будем называть его конечномерной псевдогруппой Ли (поскольку он прямо вложен в бесконечномерную псевдогруппу преобразований, отвечающую пуассоновой структуре). Такие конечномерные псевдогруппы интересны прежде всего с точки зрения их действий на фазовом пространстве — как аналогов групп симметрий. Они, в частности, позволяют наглядно описать препятствующие коциклы (*аномалии*), которые появляются в приложениях гамильтонова формализма [132, 133].

Определение конечномерной псевдогруппы Ли, по существу, содержится в теореме 2.4. Локально к такой псевдогруппе сводится структура любого симплектического группоида. Но нас сейчас будет интересовать независимое описание псевдогрупп и их действий на фазовых пространствах.

Сразу сделаем одно замечание об алгебраической природе этих объектов. Напомним, что абстрактной *лупой* называют множество G с операцией умножения $*$, с правым делением $\ldots/\ldots$ и с двусторонней единицей e такое, что

$$(a*b)/b=a,\quad (a/b)*b=a,\quad a/a=e.$$

Ассоциативность в лупе, вообще говоря, нарушена:

$$(a*b)*c\neq a*(b*c).$$

Но, очевидно, выполнено тождество

$$[(a*(b*c))/c]*c=a*(b*c).$$

Поэтому, если мы обозначим

$$(a*(b*c))/c\overset{\mathrm{def}}{=}a\overset{c}{*}b,$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} &a\overset{c}{*}\left(b\overset{c}{*}d\right)=\left(a\overset{d*c}{*}b\right)\overset{c}{*}d,\\ &a\overset{c}{*}e=e\overset{c}{*}a,\\ &a_c^{-1}\overset{c}{*}a=e,\quad a\overset{a*c}{*}a_c^{-1}=e, \end{aligned}\tag{I}$$

где

$$a_c^{-1}\equiv c/(a*c).$$

Различные классы луп, в том числе гладкие (аналитические) лупы [95], а также свойства тождеств (I) изучаются в математике уже давно (см., например, [103, 109, 118, 152, 199, 223] и литературу, указанную в этих обзорах). Если аксиоматизировать тождества (I), заменив в них элемент лупы c на произвольный параметр ξ, то получится определение «квазигруппы» в смысле [7]. Мы здесь рассматриваем специальный вариант, в котором параметр ξ пробегает **пуассоново** многообразие $\mathcal{N}$, причем действие лупы на этом пространстве параметров ξ согласовано с пуассоновой структурой *). Именно такой объект мы ниже называем конечномерной псевдогруппой. Как уже упоминалось, он с необходимостью возникает в теории редукции гамильтоновых систем с симметриями. Причем основную роль здесь играет связь между геометрией пространства параметров $\mathcal{N}$ и геометрией самой псевдогруппы G.

Центральные темы параграфа:

— действия конечномерных псевдогрупп и отображения момента (п. 3.1, теоремы 3.3 и 3.5);

— почти-скобки Пуассона и аномалия в тождестве Якоби (3.57);

— формула «присоединенного представления» (3.14); гомоморфизмы псевдогрупп (3.66);

— инфинитезимальное описание псевдогрупп (теорема 3.2);

— линейная плоская связность на пуассоновом многообразии; структурные функции псевдоалгебры (3.31);

— основное уравнение (3.40): ковариантная производная скобочного тензора равна тензору структурных функций псевдогруппы;

— восстановление скобки по структурным функциям псевдогруппы (теорема 3.4); «коциклы» псевдоалгебры (3.52);

— связности без кручения и гамильтоновы псевдогруппы (теорема 3.6);

— формулы для симплектической структуры (3.80) и для скобки Пуассона (3.83) на группоиде, порожденном псевдогруппой;

— симплектический группоид, соответствующий инвариантным скобкам на группах Ли (следствие 3.7).

Изложение следует работам [63, 67].

3.1. Действия конечномерных псевдогрупп. Пусть S, G — многообразия, $e \in G$ — отмеченная точка.

Определение 3.1. Гладкое отображение $G \times S \to S$

$$(\alpha,\ s) \to \alpha \circ s$$

назовем *действием G на S*, если

(1°) $e \circ s = s\ \forall s \in S$;

(2°) дифференциал отображения $\alpha \to \alpha \circ s$ в точке e

$$M(s) = \frac{\partial(\alpha \circ s)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha = e}\colon\ T_e G \to T_s S$$

задает распределение плоскостей $\{\pi(s) = \operatorname{Ran} M(s)\}$, интегрируемое по Фробениусу;

(3°) любым $\alpha, \beta \in G$ и $s \in S$ соответствует точка $\beta \overset{s}{\circledast} \alpha \in G$ такая, что

$$\beta \circ (\alpha \circ s) = (\beta \overset{s}{\circledast} \alpha) \circ s; \tag{3.1}$$

---

*) В обозначениях теоремы 2.4 правое деление в лупе с умножением $\overset{\xi}{*}$ задается формулой $x/y = x \overset{\sqrt{y(\xi)}}{*} y_\xi^{-1}$; условие согласования с пуассоновой структурой — это утверждение (2) теоремы 2.3.

(4°) точка $\beta \overset{s}{\circledast} \alpha$ гладко зависит от α, β и s, причем дифференциал

$$dR^s(\alpha) = \frac{\partial \left(\beta \overset{s}{\circledast} \alpha\right)}{\partial \beta}\Bigg|_{\beta = e}: T_eG \to T_\alpha G$$

невырожден при всех $\alpha \in G$;

(5°) $$\forall \alpha \in G,\ s \in S \exists \alpha_s^{-1} \in G:\ \alpha_s^{-1} \circ (\alpha \circ s) = s. \tag{3.2}$$

Интегральные слои распределения плоскостей $\{\pi(s)\}$ из п. (2°) этого определения назовем *G-орбитами.*

Пусть S пуассоново многообразие.

Определение 3.2. Многообразие G действует на пуассоновом многообразии S *инволютивно*, если G-орбиты инволютивны, т. е. для любых двух функций, постоянных на орбите, их скобка обладает таким же свойством.

Рассмотрим косоортогональные дополнения $\pi^V = \Psi_S(\pi^\perp)$, где Ψ_S — тензор, определяющий скобку на S, а $\pi^\perp$ — ортогональное дополнение к плоскости π.

Лемма 3.1. *Если действие G на S иновлютивно, то распределение плоскостей $\{\pi(s)^V\}$ интегрируемо и соответствующие слои инволютивны.*

Доказательство. Обозначим

$$\frac{\partial(\alpha \circ s)}{\partial \alpha} = M_\alpha(s):\ T_\alpha G \to T_{\alpha \circ s} S.$$

В силу (3.1) после дифференцирования по β при $\beta = e$ получим

$$M(\alpha \circ s) = M_\alpha(s) \cdot dR^s(\alpha). \tag{3.3}$$

Поэтому G-орбиты совпадают с совместными поверхностями уровня функций $f(\alpha \circ s)$. Из условия инволютивности G-орбит следует, что множество функций, постоянных на G-орбитах, замкнуто относительно скобки Пуассона. В силу критерия Фробениуса это означает интегрируемость распределения $\{\pi(s)^V\}$. Точно так же утверждение об инволютивности слоев этого распределения эквивалентно интегрируемости $\{\pi(s)\}$. Лемма доказана.

Определение 3.3. Инволютивное действие G на пуассоновом многообразии S назовем *каноническим*, если выполнены условия

(6°) действие G коммутирует с гамильтоновыми полями G-инвариантных функций;

(7°) слои распределения $\{\pi(s)^V\}$ задают глобальное расслоение.

Упомянутое в условии (7°) расслоение назовем *отображением момента*, соответствующим каноническому действию G на S.

Отметим, что в силу леммы 3.1 на базе отображения момента однозначно возникает скобка Пуассона, относительно которой это отображение пуассоново.

Пусть теперь $\mathcal{N}$ произвольное пуассоново многообразие.

Определение 3.4. Многообразие G с отмеченной точкой e назовем *конечномерной псевдогруппой* над $\mathcal{N}$, если

(a) G канонически действует на $\mathcal{N}$, причем отображение момента тождественное;

(b) операция умножения на G из условия (3°)

$$(\beta,\ \alpha) \to \beta \overset{\xi}{*} \alpha, \quad \xi \in \mathcal{N}$$

удовлетворяет аксиомам

$$e \overset{\xi}{*} \alpha = \alpha \overset{\xi}{*} e = \alpha, \quad \gamma \overset{\xi}{*} \left(\beta \overset{\xi}{*} \alpha\right) = \left(\gamma \overset{\alpha\circ\xi}{*} \beta\right) \overset{\xi}{*} \alpha, \tag{3.4}$$

$$\forall \alpha \in G, \quad \xi \in \mathcal{N} \exists \alpha_\xi^{-1} \in G\colon \ \alpha_\xi^{-1} \overset{\xi}{*} \alpha = \alpha \overset{\alpha\circ\xi}{*} \alpha_\xi^{-1} = e.$$

Определение 3.5. Действие конечномерной псевдогруппы на своем пуассоновом многообразии назовем *коприсоединенным*.

Лемма 3.2. *Орбиты коприсоединенного действия конечномерной псевдогруппы совпадают с симплектическими листами пуассонова многообразия.*

Доказательство. Поскольку момент здесь — тождественное отображение, то плоскости $\pi(\xi)^Y$ нульмерны. Следовательно, плоскости $\pi(\xi)$ совпадают с касательными плоскостями к симплектическим листам. Лемма доказана.

Фиксируем некоторый базис в T_eG, а также точку $\xi \in \mathcal{N}$ и рассмотрим векторные поля $X^i(\xi)$, $\tilde{X}^i(\xi)$, Y^i ($i = 1, \ldots, \dim G$) — генераторы действия G на себе и на своем пуассоновом многообразии $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} X^i(\xi)_\alpha &= \frac{\partial\left(\beta \overset{\xi}{*} \alpha\right)}{\partial \beta_i}\Bigg|_{\beta=e} \in T_\alpha G, \\ \tilde{X}^i(\xi)_\beta &= \frac{\partial\left(\beta \overset{\xi}{*} \alpha\right)}{\partial \alpha_i}\Bigg|_{\alpha=e} \in T_\beta G, \\ Y^i &= \frac{\partial(\beta\circ\xi)}{\partial\beta_i}\bigg|_{\beta=e} \in T_\xi\mathcal{N}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Определение 3.6. Будем называть X^i *правыми*, $\tilde{X}^i$ *левыми* полями на G, а Y^i *каноническими* полями на $\mathcal{N}$. Кроме того, функции

$$\lambda_k^{ji}(\xi) = \left[\frac{\partial^2\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right)_k}{\partial\alpha_j\,\partial\beta_i} - \frac{\partial^2\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right)_k}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_j}\right]_{\alpha=\beta=e}$$

назовем *структурными функциями* для G.

Следующий результат обобщает три классические прямые теоремы Ли на случай конечномерных псевдогрупп [7, 67].

Теорема 3.1. *Пусть G — конечномерная псевдогруппа над пуассоновым многообразием $\mathcal{N}$. Тогда правые и левые векторные поля на G, а также канонические векторные поля на $\mathcal{N}$*

удовлетворяют соотношениям

$$[X^i(\xi),\ X^j(\xi)]_\alpha=\lambda_k^{ji}(\alpha\circ\xi)\,X^k(\xi), \tag{3.6a}$$

$$[\tilde X^i(\xi),\ \tilde X^j(\xi)]=\lambda_k^{ji}(\xi)\,\tilde X^k(\xi)+Y_\xi^i(\tilde X^j(\xi))-Y_\xi^j(\tilde X^i(\xi)), \tag{3.6b}$$

$$[\tilde X^i(\xi), X^j(\xi)]=Y_\xi^i(X^j(\xi)), \tag{3.6c}$$

$$[Y^i,\ Y^j]_\xi=\lambda_k^{ji}(\xi)\,Y_\xi^k \tag{3.7}$$

(нижние индексы $\alpha\in G$ и $\xi\in\mathcal{N}$ указывают точки, в которых приложены векторы или переменные, по которым действуют дифференциальные операторы; по повторяющимся индексам всюду суммирование). Структурные функции антисимметричны:

$$\lambda_k^{ij}(\xi)=-\lambda_k^{ji}(\xi) \tag{3.8}$$

и удовлетворяют аномальному тождеству Якоби:

$$\underset{(i,\,j,\,m)}{\mathfrak{S}}\left(\lambda_k^{is}(\xi)\,\lambda_s^{jm}(\xi)-Y^i\left(\lambda_k^{jm}(\xi)\right)\right)=0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Введем отображение

$$dR_\beta^\xi(\alpha)=\frac{\partial\left(\beta\overset{\xi}{*}\alpha\right)}{\partial\beta}:\ T_\beta G\to T_{\beta\overset{\xi}{*}\alpha}G.$$

При $\beta=e$ это отображение совпадает с $dR^\xi(\alpha)$. Из аксиомы «ассоциативности» (3.4) после дифференцирования по γ при $\gamma=e$ получим тождество, аналогичное (3.3):

$$dR^\xi\left(\beta\overset{\xi}{*}\alpha\right)=dR_\beta^\xi(\alpha)\cdot dR^{\alpha\circ\xi}(\beta). \tag{3.10}$$

Продифференцируем его по β при $\beta=e$:

$$X^i(\xi)_\alpha\,(dR^\xi(\alpha)_s^j)=\left.\frac{\partial^2\left(\beta\overset{\xi}{*}\alpha\right)_s}{\partial\beta_i\,\partial\beta_j}\right|_{\beta=e}+\left.\frac{\partial^2\left(\gamma\overset{\alpha\circ\xi}{*}\beta\right)_m}{\partial\gamma_j\,\partial\beta_i}\right|_{\gamma=\beta=e}dR^\xi(\alpha)_s^m.$$

Здесь

$$X^i(\xi)\equiv dR^\xi(\alpha)_k^i\,\frac{\partial}{\partial\alpha_k}$$

(см. (3.5)). Отсюда получаем

$$X^i(\xi)_\alpha\,(dR^\xi(\alpha)_s^j)-X^j(\xi)_\alpha\,(dR^\xi(\alpha)_s^i)=\lambda_m^{ji}(\alpha\circ\xi)\,dR^\xi(\alpha)_s^m, \tag{3.11}$$

где λ_m^{ji} — структурные функции для G.

Тождество (3.11) совпадает с (3.6a). Аналогично дифференцированием (3.4) по α, β в точке e доказывается тождество (3.6в) и дифференцированием по α, γ — тождество (3.6c).

Из (3.3) для любой функции $f\in\mathcal{T}(\mathcal{N})$ следует формула

$$Y_\xi^i f(\alpha\circ\xi)=\tilde X(\xi)_\alpha^i f(\alpha\circ\xi), \tag{3.12}$$

а также

$$(Y^i f)(\alpha\circ\xi)=X^i(\xi)_\alpha f(\alpha\circ\xi).$$

Отсюда и из (3.6a) легко получить коммутационные соотношения (3.7).

Далее, беря в (3.6а) второй коммутатор

$$[X^m(\xi),\ [X^i(\xi),\ X^j(\xi)]] = \\ = (X^m(\xi)_\alpha(\lambda_s^{ji}(\alpha\circ\xi))\,X^s(\xi) + \lambda_s^{ji}(\alpha\circ\xi)\,[X^m(\xi),\ X^s(\xi)])$$

и вновь учитывая соотношения (3.6а), а также формулу (3.12), находим после суммирования по циклическим перестановкам индексов $(m,\ i,\ j)$:

$$0 = \underset{(m,\, i,\, j)}{\mathfrak{S}} (Y^m\lambda_k^{ji} + \lambda_s^{ij}\lambda_k^{sm})(\alpha\circ\xi)\cdot X^k(\xi).$$

Поскольку поля $X^k(\xi)$ независимы, то отсюда следует (3.9). Тождество (3.8) очевидно из (3.6а). Теорема доказана.

Отметим, что аналогично (3.10) можно получить следующие формулы для правых н левых сдвигов на псевдогруппе.

Следствие 3.1.

$$\begin{gathered} dL^\xi\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right) = dL^\xi_\beta(\alpha)\cdot dL^\xi(\beta), \\ dL^\xi_\beta(\alpha)\cdot dR^\xi(\beta) = dR^\xi_\alpha(\beta)\cdot dL^{\beta\circ\xi}(\alpha), \\ dL^\xi(\beta) = dR^{\beta\circ\xi}(\beta_\xi^{-1}), \\ dR^\xi(\beta) = dL^{\beta\circ\xi}(\beta_\xi^{-1}). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Определим также операторы *присоединенного представления*

$$\mathrm{Ad}^\xi(\alpha) = dR^\xi(\alpha)^{-1}\cdot dL^\xi(\alpha).$$

Следствие 3.2. *Справедливо тождество*

$$\mathrm{Ad}^\xi\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right) = \mathrm{Ad}^{\beta\circ\xi}(\alpha)\cdot \mathrm{Ad}^\xi(\beta). \tag{3.14}$$

Последняя формула, конечно, связана с общим определением представлений конечномерных псевдогрупп и их гомоморфизмов (см. ниже (3.66)).

3.2. Восстановление псевдогруппы по каноническим векторным полям и структурным функциям. Докажем теперь теорему, обратную теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть (локально) на пуассоновом многообразии $\mathcal{N}$ заданы векторные поля Y^i и функции λ_k^{ij} $(i,\ j,\ k=1,\ \ldots$ $\ldots,\ n\equiv\dim\mathcal{N})$, удовлетворяющие соотношениям (3.7)—(3.9), причем линейная оболочка векторов Y^i в каждой точке совпадает с касательной плоскостью к симплектическому листу в $\mathcal{N}$. Тогда*

— существует окрестность $G\in\mathbf{R}^n$ с отмеченной точкой $e=0$, которая (локально) действует на $\mathcal{N}$, причем это действие каноническое; его генераторами являются поля Y^i;

— существуют наборы независимых векторных полей $\{X^i\}$ и $\{\tilde{X}^i\}$ на G, удовлетворяющие соотношениям (3.6a, b, c);

— сдвиги вдоль полей X^i задают на G структуру (локальной) конечномерной псевдогруппы над $\mathcal{N}$ по правилу: если $\alpha\in G$, $\xi\in\mathcal{N}$ и гладкая кривая $\beta(t)$ выходит при $t=0$ из точки e, то кривая

$\gamma(t)=\beta(t)\overset{\xi}{*}\alpha$ — *это по определению решение задачи Коши*

$$\dot{\gamma}=\sum_i v_i(t)\,X^i(\xi)_\gamma, \quad \gamma(0)=\alpha, \tag{3.15}$$

где v_i — *компоненты поля* $\dot{\beta}$ *в базисе* $\{X^i(\alpha\circ\xi)\}$;

— *для полученной псевдогруппы поля* X^i, $\tilde{X}^i$ *являются правыми и левыми, поля* Y^i — *каноническими, а* λ_k^{ij} — *структурными функциями*;

— *для любой* $\varphi\in\mathcal{F}(G)$ *функция* $\Phi^\xi=\varphi\left(\beta\overset{\xi}{*}\alpha\right)$ *удовлетворяет на* $G\times G$ *уравнениям*

$$X^i(\xi)_\alpha\Phi^\xi=\tilde{X}^i(\alpha\circ\xi)_\beta\,\Phi^\xi, \quad \Phi^\xi|_{\alpha=e}=\varphi(\beta). \tag{3.16}$$

И наоборот, если $\tilde{X}^i$, X^i *удовлетворяют* (3.6a, b, c), *то решение задачи* (3.16) *существует, имеет вид* $\Phi^\xi=\varphi\left(\beta\overset{\xi}{*}\alpha\right)$ *и тем самым задает на* G *структуру псевдогруппы* (*ту же, что и в* (3.15)).

Доказательство. Пусть $Y^i=M(\xi)^{ji}\,\partial/\partial\xi^j$ векторные поля на $\mathcal{N}$, удовлетворяющие соотношениям (3.7). Тогда мы оказываемся в условиях применимости теоремы 2.2 приложения 2, если выберем

$$A^k=iY^k, \quad B^k=\xi^k, \quad \Delta_s^{jk}\equiv-\lambda_s^{jk}, \quad \mu^{jk}\equiv M^{jk}.$$

Следуя рецепту этой теоремы, рассмотрим решение $\Xi=\Xi(\xi,\,u,\,t)$ задачи Коши

$$d\Xi/dt=M(\Xi)\,u, \quad \Xi|_{t=0}=\xi$$

и введем обозначения:

$$u\cdot\Lambda(\xi)\equiv((u_j\lambda_k^{ji}(\xi))),$$

$$r^\xi(u)=\left(\int_0^1\operatorname{Exp}\left\{\int_\mu^1 u\cdot\Lambda(\Xi(\xi,\,u,\,t))\,dt\right\}d\mu\right)^{-1}, \tag{3.17}$$

$$X(\xi)_u^i=r^\xi(u)_k^i\,\frac{\partial}{\partial u_k}. \tag{3.18}$$

Тогда формула теоремы 2.2 приложения 2 дает

$$e^{u\cdot Y_\xi}\,e^{v\cdot Y_\xi}=e^{v\cdot X(\xi)_u}e^{u\cdot Y_\xi}=e^{\overset{2}{\left(v\overset{\xi}{*}u\right)}\cdot\overset{1}{Y_\xi}},$$

где нижние индексы ξ, u обозначают переменные, по которым действуют операторы, а умножение

$$(v,\,u)\to v\overset{\xi}{*}u$$

определяется как сдвиг за единичное время вдоль траектории поля $v\cdot X(\xi)$, выходящей из точки u, т. е.

$$\frac{d}{dt}w_k=\sum_i r^\xi(w)_k^i v_i, \quad w|_{t=0}=u\Rightarrow w|_{t=1}=v\overset{\xi}{*}u. \tag{3.19}$$

Здесь u, v берутся из достаточно малой окрестности нуля $G \subset \mathbf{R}^n$. Эта окрестность G действует на $\mathcal{N}$ по правилу

$$\xi \to u \circ \xi \overset{\mathrm{def}}{=} \Xi(\xi, u, 1) \equiv e^{u \circ Y_\xi}(\xi), \tag{3.20}$$

т. е. G действует сдвигами вдоль векторных полей Y^i. Условие (1°) из определения 3.1, очевидно, выполнено. Условие (3°) следует из (3.20). Условие (2°) выполнено, поскольку плоскость $\pi(\xi) = \operatorname{Ran} M(\xi)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $Y^1_\xi, \ldots$ ..., Y^n_ξ, а она по исходному предположению теоремы совпадает с касательной плоскостью к симплектическому листу в $\mathcal{N}$, проходящему через точку ξ. Условие (4°) следует из невырожденности матрицы $r^\xi(u)$ в (3.17). Положим $u_\xi^{-1} \overset{\mathrm{def}}{=} -u$. Выполнение условия (5°) следует тогда из $r^\xi(tu)\,u = u$ (в силу определения (3.17) и антисимметричности $u\Lambda$). В данном случае G-орбиты совпадают с симплектическими листами, поэтому это действие каноническое. «Плоскости» $\pi(\xi)$ нульмерны, и, следовательно, момент является тождественным отображением.

Лемма 3.3. *Поля* $X^i(\xi)$, *определенные в* (3.17), (3.18), *удовлетворяют коммутационным соотношениям* (3.6а).

Применим теперь еще раз теорему 2.2 приложения 2 к операторам $A^k = iX^k(\xi)$, $B^k = u_k$, т. е. положим в обозначениях этой теоремы

$$\Delta_s^{jk}(u) = \lambda_s^{kj}(u \circ \xi), \quad \mu^{kj}(u) = r^\xi(u)^j_k.$$

Согласно упомянутой теореме, мы должны ввести решение $\mathcal{U}$ задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = r^\xi(\mathcal{U})\,w, \quad \mathcal{U}|_{t=0} = u \Rightarrow \mathcal{U}(u, w, t)$$

и рассмотреть матрицу

$$\mathcal{R}^u(w) = \left(\int_0^1 \operatorname{Exp}\left\{\int_\mu^1 w \cdot \Lambda(\mathcal{U}(u, w, t) \circ \xi)\,dt\right\} d\mu\right)^{-1}. \tag{3.21}$$

После чего получим формулу

$$e^{w \cdot X(\xi) u} e^{v \cdot X(\xi) u} = e^{\langle \overset{2}{R^u(w)}\, \overset{1}{v},\, \partial/\partial w\rangle} \left(e^{w \cdot X(\xi) u}\right). \tag{3.22}$$

Заметим, что $\mathcal{U}(u, w, t) = (wt) \overset{\xi}{*} u$. Поэтому

$$\mathcal{U}(u, w, t) \circ \xi = (wt) \circ (u \circ \xi) = \Xi(u \circ \xi, wt, 1) \equiv \Xi(u \circ \xi, w, t).$$

Отсюда следует, что матрица (3.21) совпадает с $r^{u \circ \xi}(w)$ (см. (3.17)). Поэтому из (3.22) имеем

$$e^{w \cdot X(\xi) u} e^{v \cdot X(\xi) u} = e^{\left(\overset{2}{v} \overset{u \circ \xi}{*} \overset{1}{w}\right) \cdot X(\xi) u} \tag{3.23}$$

или

$$v \overset{\xi}{*} \left(w \overset{\xi}{*} u\right) = \left(v \overset{u \circ \xi}{*} w\right) \overset{\xi}{*} u.$$

Таким образом, для операции умножения на G выполнена вторая аксиома (3.4). Первая — очевидна. Третья — следует из определения обратного элемента $u_\xi^{-1} \overset{\text{def}}{=} -u$.

Таким образом, G является локальной конечномерной псевдогруппой над $\mathcal{N}$, поля X^i — ее правыми полями, Y^i — каноническими полями, а λ_k^{ij} — структурными функциями.

Приведенный в формулировке теоремы алгоритм (3.15), определяющий умножение на G, является незначительным обобщением правила (3.19).

После того как умножение в G определено, поля $\tilde{X}^i(\xi)$ задаются стандартно — см. (3.5). Коммутационные соотношения (3.6, a, b, c) между ними, как было отмечено в доказательстве теоремы 3.1, следуют из ассоциативности умножения.

Уравнение (3.16), как легко видеть, также эквивалентно ассоциативности. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.1. Формулы (3.17), (3.18), (3.19) определяют умножение на G в «координатах 1-го рода». Легко проверить, что если структурные функции $\lambda_k^{ij}(\xi)$ не зависят от ξ (т. е. (3.9) сводится к обычному тождеству Якоби для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$), то формула (3.17) дает выражение для дифференциала правого сдвига на группе в координатах 1-го рода:

$$r^\xi(u) = \left(\int_0^1 d\mu e^{\mu \cdot \operatorname{ad}(u)}\right)^{-1} = \frac{\operatorname{ad}(u)}{e^{\operatorname{ad}(u)} - I} = dR(\exp(u)), \quad u \in \mathfrak{g}.$$

В общем случае можно ввести на псевдогруппе G аналог экспоненциального отображения следующим образом: рассмотреть задачу Коши

$$\frac{d\alpha}{dt} = dR^\xi(\alpha)\, u, \quad \alpha|_{t=0} = e,$$

затем определить $\exp_\xi(u) = \alpha|_{t=1}$ и назвать компоненты вектора u координатами 1-рода точки $\alpha = \exp_\xi(u) \in G$. После этого можно воспринимать формулу (3.20) как определение действия $\xi \to \alpha \circ \xi = \exp_\xi(u) \circ \xi$, матрицу (3.17) — как дифференциал правого сдвига $r^\xi(u) = dR^\xi(\exp_\xi(u))$, формулу (3.18) — как определение правых векторных полей или левых сдвигов в координатах 1-рода:

$$e^{v \cdot X(\xi)_\alpha} \varphi(\alpha) = \varphi\left(\exp_{\alpha\circ\xi}(v) \overset{\xi}{*} \alpha\right)$$

и, наконец, формулу (3.19) можно воспринимать как определение умножения на псевдогруппе G в координатах 1-рода:

$$\exp_{\xi'}(v) \overset{\xi}{*} \exp_\xi(w) = \exp_\xi\left(v \overset{\xi}{*} w\right),$$

где $\xi' = \exp_\xi(w) \circ \xi$.

Замечание 3.2. Теорема 3.2 показывает, что набор векторных полей Y^i на $\mathcal{N}$ (оболочка которых в каждой точке совпадает с касательной плоскостью к симплектическому листу) и набор функций λ_k^{ij}, удовлетворяющих условиям (3.7)—(3.9), задают псевдогруппу инфинитезимально, т. е. являются аналогом алгебры Ли. В п. 3.4 мы разовьем и уточним эту аналогию.

3.3. Канонические действия на симплектических многообразиях. Если G конечномерная псевдогруппа над $\mathcal{N}$, то в $G\times\mathcal{N}$ имеется естественная структура группоида:

$$\begin{gathered}(\beta,\ \zeta)*(\alpha,\ \xi)=\left(\beta \overset{\xi}{*}\alpha,\ \xi\right),\quad \text{если}\quad \zeta=\alpha\circ\xi,\\ (\alpha,\ \xi)^{-1}=(\alpha_{\xi}^{-1},\ \alpha\circ\xi)\end{gathered}\tag{3.24}$$

с подмножеством единиц $\{e\}\times\mathcal{N}$. Псевдогруппа G естественно действует на группоиде $G\times\mathcal{N}$ левыми сдвигами. Наша конечная цель — ответить на вопрос: когда этот группоид является симплектическим, а действие G на нем канонично?

Исследуем свойства канонических действий [67].

Теорема 3.3. *Пусть многообразие G канонически действует на симплектическом $\mathfrak{X}$; соответствующее отображение момента $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X}\to\mathcal{N}$. Пусть это действие свободно и невырождено, т. е. генераторы в каждой точке независимы. Тогда*

(а) *G — конечномерная псевдогруппа над $\mathcal{N}$. При этом условие ассоциативности* (3.1) *и условие существования обратного элемента* (3.2) *выглядят так:*

$$\beta\circ(\alpha\circ z)=\left(\beta\overset{\mathcal{A}(z)}{*}\alpha\right)\circ z,\quad (\alpha)^{-1}_{\mathcal{A}(z)}\circ(\alpha\circ z)=z.\tag{3.25}$$

(b) *Генераторы действия*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\alpha\circ z\Big|_{\alpha=e}\equiv\hat{X}^i\in T_z\mathfrak{X},\quad z\in\mathfrak{X},$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{X}^i,\ \hat{X}^j]=\lambda_k^{ji}(\mathcal{A})\cdot\hat{X}^k,\tag{3.26}$$

где λ_k^{ji} — структурные функции псевдогруппы G.

При проектировании вдоль момента $\mathcal{A}$ действие G переходит в коприсоединенное

$$\mathcal{A}(\alpha\circ z)=\alpha\circ\mathcal{A}(z),\quad d\mathcal{A}(z)\,\hat{X}^i_z=Y^i_{\mathcal{A}(z)},\tag{3.27}$$

где Y^i — канонические поля на $\mathcal{N}$.

(c) *Выполняются уравнения, аналогичные* (3.12), (3.16):

$$\begin{gathered}\hat{X}^i_z\varphi(\alpha\circ z)=\tilde{X}^i(\mathcal{A}(z))_\alpha\varphi(\alpha\circ z),\\ (\hat{X}^i\varphi)(\alpha\circ z)=X^i(\mathcal{A}(z))_\alpha\,\varphi(\alpha\circ z),\end{gathered}\tag{3.28}$$

где $\tilde{X}^i$, X^i — левые и правые поля на псевдогруппе G.

Доказательство. Пусть J: $T\mathfrak{X}\to T^*\mathfrak{X}$ симплектическая структура на $\mathfrak{X}$. Поскольку по определению G-орбиты косоортогональны слоям момента $\mathcal{A}$, то формы $\hat{\varepsilon}^i=J\hat{X}^i$ аннулируются на этих слоях, т. е. имеют вид $\hat{\varepsilon}^i=\hat{\varepsilon}^i_j d\mathcal{A}^j$, где $\mathcal{A}^j$ — компоненты момента в локальных координатах на $\mathcal{N}$. Тогда $\hat{X}^i = \hat{\varepsilon}^i_j J^{-1} d\mathcal{A}^j = -\hat{\varepsilon}^i_j \operatorname{ad}(\mathcal{A}^j)$, где $\operatorname{ad}(\mathcal{A}^j)$ — гамильтоновы поля на $\mathfrak{X}$, отвечающие функциям $\mathcal{A}^j$. В силу условия (6°) определения 3.3 для любой G-инвариантной функции g на $\mathfrak{X}$ поле $\operatorname{ad}(g)$ коммутирует с $\hat{X}^i$. Поэтому $\operatorname{ad}(g)(\hat{\varepsilon}^i_j) = 0$, т. е. $\hat{\varepsilon}^i_j$ постоянны вдоль слоев момента. Тогда $\hat{\varepsilon}^i = \mathcal{A}^* \varepsilon^i$ для некоторых 1-форм $\varepsilon^i = \varepsilon^i_j(\xi) d\xi^j$ на $\mathcal{N}$. И мы имеем

$$\hat{X}^i = J^{-1} \mathcal{A}^* \varepsilon^i = -\varepsilon^i_j(\mathcal{A}) \operatorname{ad}(\mathcal{A}^j). \tag{3.29}$$

Пусть теперь $\gamma = \beta \overset{z}{\circledast} \alpha$ и $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{X})$. Тогда

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}(g) f)(\gamma \circ z) &= (\operatorname{ad}(g) f)(\beta \circ (\alpha \circ z)) = \operatorname{ad}(g)_z f(\beta \circ (\alpha \circ z)) = \\ &= \operatorname{ad}(g)_z f(\gamma \circ z) = \operatorname{ad}(g)_{z'} f(\gamma \circ z')\,|_{z'=z} + \left\langle \frac{\partial}{\partial \gamma} f(\gamma \circ z),\ \operatorname{ad}(g)_z(\gamma) \right\rangle = \\ &= (\operatorname{ad}(g) f)(\gamma \circ z) + \langle df(\gamma \circ z),\ M_\gamma(z) \operatorname{ad}(g)_z \gamma \rangle\end{aligned}$$

(см. (3.3)). Поскольку действие G невырождено, то M_γ имеет нулевое ядро и равенство нулю последнего слагаемого $M_\gamma(z) \operatorname{ad}(g)_z \gamma$ влечет $\operatorname{ad}(g)_z \gamma = 0$ для любой G-инвариантной функции g. Таким образом, $\gamma = \beta \overset{z}{\circledast} \alpha$ зависит эффективно лишь от $\xi = \mathcal{A}(z)$ и тем самым задает умножение $\beta \overset{\xi}{*} \alpha \equiv \beta \overset{z}{\circledast} \alpha$ точек из G, параметризованное элементами $\xi \in \mathcal{N}$. Так как действие G свободно, то это умножение удовлетворяет аксиомам (3.4).

Далее, в силу условия (6°), $\mathcal{A}(\alpha \circ z)$ зависит лишь от $\alpha \in G$ и от $\mathcal{A}(z) \in \mathcal{N}$. Таким образом, проекция вдоль $\mathcal{A}$ действия G на $\mathfrak{X}$ корректно определяет действие G на $\mathcal{N}$, так что выполнены равенства (3.27). В силу (3.29) и пуассоновости $\mathcal{A}$ имеем

$$Y^i = \Psi \varepsilon^i = \Psi^{lk}(\xi)\, \varepsilon^i_k(\xi)\, \partial_l = -\varepsilon^i_k(\xi) \operatorname{ad}(\xi^k), \tag{3.30}$$

где $\partial_l = \partial/\partial\xi^l$, а Ψ — тензор, задающий пуассонову структуру на $\mathcal{N}$. Так как матрица $((\varepsilon^i_k))$ невырождена, то линейная оболочка полей Y^i_ξ совпадает с $\operatorname{Ran} \Psi(\xi)$, т. е. совпадает с касательной плоскостью к симплектическому листу, проходящему через $\xi \in \mathcal{N}$. Поэтому орбиты действия G на $\mathcal{N}$ — это симплектические листы.

Таким образом, G — псевдогруппа над $\mathcal{N}$ и выполнена формула (3.25). Доказательство остальных утверждений повторяет доказательства соответствующих пунктов теоремы 3.1. Теорема 3.3 доказана.

Определение 3.7. Будем говорить, что конечномерная *псевдогруппа G канонически действует* на пуассоновом многообразии S, если G как многообразие с отмеченной точкой e канонически действует на S и аксиомы (3.1), (3.2) имеют вид (3.25), где $\mathcal{A}$ — отображение момента.

3.4. Линейная связность и базис псевдоалгебры. Теорема 3.3 показывает, что канонические действия псевдогрупп на симплектических многообразиях обладают особым свойством. Такие действия задают, как видно из (3.29), (3.30), невырожденное на слоях гладкое отображение

$$\varepsilon\colon\ T_eG\to T^*\mathcal{N},$$

т. е. параллелизацию пуассонова многообразия $\mathcal{N}$. Фиксировав базис в T_eG, мы получаем набор 1-форм ε^i на $\mathcal{N}$. Они удовлетворяют в силу (3.26) следующим коммутационным соотношениям:

$$[\varepsilon^i,\ \varepsilon^j]_{\mathcal{F}^1(\mathcal{N})}=\lambda_k^{ij}\varepsilon^k, \tag{3.31}$$

где коммутатор в пространстве 1-форм $\mathcal{F}^1(\mathcal{N})$ задан в (1.4) гл. I.

Определение 3.8. Пространство $\mathcal{F}^1(\mathcal{N})$ назовем *псевдоалгеброй* пуассонова многообразия $\mathcal{N}$, набор форм $\{\varepsilon^i\}$ — *базисом псевдоалгебры*, а функции λ_k^{ij} — *структурными функциями псевдоалгебры*.

Отображение ε порождает плоскую связность на $\mathcal{N}$ с символами Кристофеля

$$\Gamma_{jk}^i=(\varepsilon^{-1})_l^i\partial_j\varepsilon_k^l$$

и с базисом параллельных векторных полей

$$\mathcal{D}_i=(\varepsilon^{-1})_i^j\,\partial_j,\quad \partial_j\equiv\partial/\partial\xi^j \tag{3.32}$$

(см. [50, 81]).

Отметим, что в терминах этих полей соотношения (3.31) можно записать так:

$$[\![\Psi,\ \mathcal{D}_i]\!]=\frac{1}{2}\lambda_i^{jk}\mathcal{D}_j\wedge\mathcal{D}_k,$$

где слева стоит скобка Схоутена (см. § 3 гл. I).

Если A — тензорное поле типа $(r,\ s)$ на $\mathcal{N}$, то сдвинутое поле определим так:

$$A_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\,\varepsilon_{i_1}^{l_1}\ldots\varepsilon_{i_r}^{l_r}\,(\varepsilon^{-1})_{k_1}^{j_1}\ldots(\varepsilon^{-1})_{k_s}^{j_s}.$$

Это функция на $\mathcal{N}$ со значениями в $\underbrace{T_eG\otimes\ldots\otimes T_eG}_{r}\otimes\underbrace{T_e^*\otimes\ldots\otimes T_e^*G}_{s}$.

Лемма 3.4. *Сдвинутая ковариантная производная скобочного тензора Ψ относительно сопряженной связности Γ^* совпадает с тензором структурных функций псевдоалгебры.*

Таким образом, структурные функции являются мерой неинвариантности скобки Пуассона относительно связности Γ^*.

Из теоремы 3.3 получаем [67].

Следствие 3.3. *Пусть скобка Пуассона на $\mathcal{N}$ задается тензорным полем Ψ, и пусть G — конечномерная псевдогруппа над $\mathcal{N}$, которая невырожденно и канонически действует на некотором симплектическом многообразии. Тогда $\mathcal{N}$ параллелизуемо, и параллелизация ε задает базис псевдоалгебры над $\mathcal{N}$ с теми же структурными функциями, что и у псевдогруппы G. Дифференциальная 1-форма на G*

$$\varkappa=\varepsilon(\xi)\,dL^{\xi}(\alpha)^{-1}\,d\alpha,\quad \alpha\in G,\ \xi\in\mathcal{N}$$

со значениями в псевдоалгебре $\mathscr{F}^1(\mathscr{N})$ *удовлетворяет уравнению*

$$d\varkappa = -\frac{1}{2}[\varkappa \wedge \varkappa]_{\mathscr{F}^1(\mathscr{N})}. \tag{3.33}$$

Доказательство леммы 3.4 и следствия 3.3. Сдвинутая ковариантная производная от Ψ относительно связности Γ^* по определению равна

$$(\nabla^* \Psi)_k^{ij} \varepsilon_i^r \varepsilon_j^s (\varepsilon^{-1})_m^k \equiv (\partial_k \Psi^{ij} + \Gamma_{kl}^{*i} \Psi^{lj} - \Gamma_{kl}^{*j} \Psi^{li}) \varepsilon_i^r \varepsilon_j^s (\varepsilon^{-1})_m^k,$$

где $\Gamma_{kl}^{*i} = \Gamma_{lk}^i$. Выражая связность Γ через параллелизацию ε, преобразуем правую часть:

$$(\varepsilon^{-1})_m^k [(\partial_k \Psi^{ij}) \varepsilon_i^r \varepsilon_j^s + \partial_l \varepsilon_k^r \Psi^{lj} \varepsilon_j^s + \partial_l \varepsilon_k^s \varepsilon_i^r \Psi^{il}]. \tag{3.34}$$

Квадратная скобка, умноженная на $d\xi^k$, по определению (1.4) гл. I совпадает с коммутатором $[\varepsilon^r, \varepsilon^s]_{\mathscr{F}^1(\mathscr{N})}$. Поэтому в силу (3.31) все выражение (3.34) равно λ_m^{rs}.

Утверждения следствия 3.3 прямо вытекают из теоремы 3.3 и из (3.31). Формула (3.33) в локальных координатах выглядит так:

$$d\varkappa_i = -\frac{1}{2} \partial_i \Psi^{jk}(\xi) \varkappa_j \wedge \varkappa_k - \Psi^{jk}(\xi) \partial_j \varkappa_i \wedge \varkappa_k.$$

Она следует прямым вычислением из (3.6а, в) и (3.31) с учетом того, что в силу (3.30), (3.3) имеет место соотношение

$$d_\alpha (\alpha \circ \xi) = \Psi(\alpha \circ \xi) \nu, \tag{3.35}$$

где $\nu = \nu(\alpha, \xi)$ — это 1-форма на G, которая в точке α принимает значение в $T^*_{\alpha \circ \xi}\mathscr{N}$ и определяется так: $\nu = \varepsilon(\alpha \circ \xi) dR^\xi(\alpha)^{-1} d\alpha$.

Замечание 3.3. Выбрав локальные координаты на $\mathscr{N}$, мы можем рассматривать ν как набор 1-форм ν_i на G. Эти формы удовлетворяют тождествам

$$d\nu_i = \frac{1}{2} (\partial_i \Psi^{jk})(\alpha \circ \xi) \nu_j \wedge \nu_k. \tag{3.36}$$

Аналогично компоненты формы $\Delta = dR^\xi(\alpha)^{-1} d\alpha$ удовлетворяют тождествам

$$d\Delta_i = \frac{1}{2} \lambda_i^{jk} (\alpha \circ \xi) \Delta_j \wedge \Delta_k. \tag{3.37}$$

Кроме того, отметим следующее полезное соотношение, связывающее присоединенное представление с коприсоединенным действием псевдогруппы и параллелизацией пуассонова многообразия:

$$\mathrm{Ad}^\xi(\alpha) = \varepsilon(\alpha \circ \xi)^{-1} \frac{\partial (\alpha \circ \xi)^{-1*}}{\partial \xi} \varepsilon(\xi). \tag{3.38}$$

Пример 3.1. В случае, когда структура псевдогруппы на G порождена структурой Картана θ' (п. 2.4), параллелизация $\mathscr{N}$ задается формулой $\varepsilon = \partial\theta'_e$, связность Γ имеет нулевое кручение, канонические поля на $\mathscr{N}$ гамильтоновы: $Y^i = \Psi \partial \theta'^i_e$, правые поля X^i

на G совпадают с полями $v^{\xi}(\theta_e^i)$ (см. (2.26)), формы ν_i совпадают с формами μ_i, введенными в лемме 2.3, а уравнения (3.36) — с уравнениями (2.18), уравнения (3.35) — с уравнениями (2.17).

Возвращаясь к общей ситуации, можно констатировать, что имеется четыре взаимодействующих объекта: скобочный тензор на $\mathcal{N}$, плоская связность (параллелизация ε) на $\mathcal{N}$, конечномерная псевдогруппа G над $\mathcal{N}$ со структурными функциями λ_k^{ij} и каноническими полями Y^i, симплектическое многообразие, на котором канонически действует G.

Основные условия их согласования — это соотношения (3.30) и (3.31). Если эти соотношения выполнены, будем называть *скобку Пуассона, плоскую связность* и *псевдогруппу согласованными друг с другом*. Мы видели, что каноническое действие псевдогруппы порождает согласованную плоскую связность. Верно и обратное [67].

Следствие 3.4. *Любая плоская линейная связность на $\mathcal{N}$ порождает согласованную (локальную) псевдогруппу и ее каноническое действие.*

Доказательство. Скобку Пуассона на $\mathcal{N}$ удобно записать с помощью параллельных полей $\mathcal{D}_i$ данной связности:

$$[f, g]_{\mathcal{N}} = \eta(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g), \quad \eta\colon T_eG \to T_e^*G. \tag{3.39}$$

Условие согласования (3.31) или (3.34) дает формулу

$$\lambda_k^{ij} = \mathcal{D}_k\eta^{ij} + f_{ks}^i\eta^{sj} + \eta^{is}f_{ks}^j, \tag{3.40}$$

где через f_{ks}^i обозначен сдвинутый тензор кручения связности, т. е. коэффициенты разложения 2-форм $d\varepsilon^i$ по базису $\varepsilon^k \wedge \varepsilon^j$:

$$d\varepsilon^i = -\frac{1}{2} f_{kj}^i \varepsilon^k \wedge \varepsilon^j. \tag{3.41}$$

Нужно доказать существование локальной псевдогруппы G над $\mathcal{N}$ со структурными функциями (3.40) и с каноническими векторными полями:

$$Y^i = \eta^{ji}\mathcal{D}_j.$$

В силу теоремы 3.2 достаточно показать, что эти функции и векторные поля удовлетворяют тождеству (3.9). По теореме 1.2 над $\mathcal{N}$ существует локальное фазовое пространство $\mathcal{E}$.

Пусть $l\colon \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ пуассоново расслоение этого пространства. Базисные формы $\varepsilon^i \in \mathcal{F}^1(\mathcal{N})$ поднимем на $\mathcal{E}$ и рассмотрим соответствующие им векторные поля $\hat{X}^i = J^{-1}(l^*\varepsilon^i)$, где J — симплектическая структура на $\mathcal{E}$. Подсчет коммутатора этих полей с учетом пуассоновости l и равенства (3.31) (которое выполняется по определению функций λ_k^{ij}) дает

$$[\hat{X}^i, \hat{X}^j] = \lambda_k^{ji}(l)\,\hat{X}^k.$$

Отсюда, вычисляя двойные коммутаторы и используя независимость полей $\hat{X}^{\cdot}$, получим искомое тождество (3.9) (так же как при доказательстве теоремы 3.1). Следствие доказано.

3.5. Скобки Пуассона на группах и согласованные с ними псевдогруппы. Особый интерес представляет случай скобок, заданных на группах Ли, т. е. на многообразиях с плоской связностью и постоянным кручением. Отметим в этой связи следующий общий факт, прямо вытекающий из (3.41).

Лемма 3.5. *Выполнено тождество*

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\,(f^{m}_{il}f^{l}_{jk}+\mathcal{D}_i f^{m}_{jk})=0.$$

В частности, если $f^s_{jk}=\mathrm{const}$ *и* $\mathcal{N}$ *односвязно, то* $\mathcal{N}$ *диффеоморфно группе Ли со структурными константами* f^s_{jk} [227]. *Формы* ε^i *при этом отождествляются с фундаментальными левоинвариантными формами на группе, поля* $\mathcal{D}_i$ — *с левоинвариантными полями, а* $T_eG\approx T^*_e\mathcal{N}$, *где* e — *единичный элемент группы* $\mathcal{N}$.

Итак, в силу следствия 3.4 скобка Пуассона на группе Ли $\mathcal{N}$, заданная формулой (3.39) с помощью левоинвариантных полей, согласована с набором структурных функций (3.40).

В некоторых случаях удается восстановить скобочный тензор η в (3.39) по заданным структурным функциям λ^{ij}_k псевдогруппы G и структурным константам f^i_{ks} группы $\mathcal{N}$.

Обозначим

$$\lambda^{ij}_{l,\,k}=\mathcal{D}_k(\lambda^{ij}{}_l),\qquad \Lambda^{ijk}_l=\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\lambda^{is}_l\lambda^{jk}_s.$$

Векторные поля $\mathcal{D}_k$ здесь — это левоинвариантные поля на группе $\mathcal{N}$.

Теорема 3.4 [67]. *Пусть* $\mathcal{N}$ *односвязная группа Ли со структурными константами* f^i_{jk}. *Пусть набор функций* λ^{ij}_k *на* $\mathcal{N}$ *антисимметричен по верхним индексам и удовлетворяет соотношениям*

$$\lambda^{ij}_{l,\,k}-\lambda^{ij}_{k,\,l}+f^i_{ks}\lambda^{sj}_l+\lambda^{is}_l f^j_{ks}-f^i_{ls}\lambda^{sj}_k-\lambda^{is}_k f^j_{ls}-f^s_{kl}\lambda^{ij}_s=0, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{D}_m\lambda^{jk}_{l,\,n}-f^s_{mn}\lambda^{jk}_{l,s}+f^k_{ms}\lambda^{js}_{l,\,n}+f^j_{ms}\lambda^{sk}_{l,\,n}=\alpha^s_{ml}\lambda^{jk}_{s,\,n}, \tag{3.43}$$

$$\mathcal{D}_m\Lambda^{ijk}_l+\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\left(f^i_{ms}\Lambda^{sjk}_l+\lambda^{is}_m\lambda^{jk}_{l,\,s}\right)=\alpha^s_{ml}\Lambda^{ijk}_s, \tag{3.44}$$

где α^s_{mk} — *некоторый набор функций на* $\mathcal{N}$. *Кроме того, пусть задан антисимметричный набор констант* c^{ij}, *удовлетворяющий*

$$\Lambda^{ijk}_l(\underline{e})+\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}c^{is}\lambda^{jk}_{l,\,s}(\underline{e})=0, \tag{3.45}$$

$$\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}(c^{is}\lambda^{jk}_s(\underline{e})-c^{is}f^j_{sm}c^{mk})=0. \tag{3.46}$$

Тогда на $\mathcal{N}$ *существует единственная согласованная с функциями* λ^{ij}_k *скобка Пуассона вида* (3.39) *такая, что* $\eta(\underline{e})=c$.

Доказательство. Для согласованности скобки необходимо, чтобы поля $Y^i=\eta^{ji}\mathcal{D}_j$ были каноническими, т. е. чтобы выполнялись коммутационные соотношения (3.7), которые эквивалентны (3.40). Будем рассматривать (3.40) как уравнение для определения η. Пусть Ad — присоединенное представление группы $\mathcal{N}$. Положим

$$\eta' = \mathrm{Ad}\cdot\eta\cdot\mathrm{Ad}^*, \quad \lambda_k'^{ij} = \mathrm{Ad}_l^i\,\mathrm{Ad}_s^j\,\mathrm{Ad}_k^{-1m}\lambda_m^{ls}.$$

В терминах η' и λ' уравнение (3.40) принимает вид

$$d\eta'^{ij} = \lambda_k'^{ij}\varepsilon'^k, \tag{3.47}$$

где $\varepsilon' \equiv \mathrm{Ad}^*\varepsilon$ — правоинвариантные формы на $\mathcal{N}$. Кроме того, соотношение (3.42) переписывается так:

$$\mathcal{D}_l'\lambda_k'^{ij} - \mathcal{D}_k'\lambda_l'^{ij} + f_{lk}^s\lambda_s'^{ij} = 0,$$

где $\mathcal{D}' = \mathrm{Ad}^{-1*}\mathcal{D}$ — правоинвариантные поля на $\mathcal{N}$. Это соотношение означает замкнутость формы, стоящей в правой части (3.47), поскольку

$$d\varepsilon'^k = \frac{1}{2} f_{ls}^k \varepsilon'^l \wedge \varepsilon'^s, \quad [\mathcal{D}_l', \mathcal{D}_k'] = f_{kl}^s\mathcal{D}_s'.$$

Поэтому в силу односвязности $\mathcal{N}$ уравнение (3.47), а значит, и (3.40) разрешимо глобально, причем решение единственно, если фиксировано начальное условие $\eta(e)$.

Обозначим $B_l^{ijk} = \Lambda_l^{ijk} + \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} \eta^{is}\lambda_{l,s}^{jk}$. Вычислим первую производную, используя (3.40):

$$\mathcal{D}_m B_l^{ijk} = \mathcal{D}_m\Lambda_l^{ijk} + \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} [\lambda_m^{is}\lambda_{l,s}^{jk} - \\ - f_{ms}^i\eta^{sn}\lambda_{l,n}^{jk} - f_{mn}^s\eta^{in}\lambda_{l,s}^{jk}] + \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} \eta^{in}\mathcal{D}_m\lambda_{l,n}^{jk}. \tag{3.48}$$

В первой циклической сумме преобразуем среднее слагаемое, вычитая и добавляя циклические перестановки индексов s, j, k, а также слагаемое Λ_l^{sjk}; в результате выделим здесь B_l^{sjk}, т. е.

$$-f_{ms}^i\eta^{sn}\lambda_{l,n}^{jk} = -f_{ms}^i B_l^{sjk} + f_{ms}^i\eta^{jn}\lambda_{l,n}^{ks} + f_{ms}^i\eta^{kn}\lambda_{l,n}^{sj} + f_{ms}^i\Lambda_l^{sjk}.$$

Подставим это в (3.48) и учтем, что за счет циклической суммы по i, j, k можно изменять расстановку этих индексов:

$$f_{ms}^i\eta^{jn}\lambda_{l,n}^{ks} \to f_{ms}^k\eta^{in}\lambda_{l,n}^{js},$$
$$f_{ms}^i\eta^{kn}\lambda_{l,n}^{sj} \to f_{ms}^j\eta^{in}\lambda_{l,n}^{sk}.$$

В результате в (3.48) возникнут четыре слагаемых с общим множителем η^{in}. То, на что умножается η^{in}, — это в точности левая часть (3.43). Таким образом, имеем

$$\mathcal{D}_m B_l^{ijk} = \mathcal{D}_m\Lambda_l^{ijk} + \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} (\lambda_m^{is}\lambda_{l,s}^{jk} + f_{ms}^i\Lambda_s^{sjk}) - \\ - \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} f_{ms}^i B_l^{sjk} + \Big[\underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} \eta^{in}\lambda_{s,n}^{jk}\Big]\alpha_{ml}^s.$$

В первых трех слагаемых правой части используем (3.44) и получаем

$$\mathcal{D}_m B_l^{ijk} = \alpha_{ml}^s B_s^{ijk} - \underset{(i,j,k)}{\mathfrak{S}} f_{ms}^i B_l^{sjk}.$$

Если $\eta^{ij}(e)=c^{ij}$, то в силу (3.45) $B_l^{ijk}(e)=0$. Это начальное условие и полученное выше однородное дифференциальное уравнение для B_l^{ijk} влекут $B_l^{ijk}\equiv 0$. Итак, мы доказали в несколько иных обозначениях выполнение тождества (3.9).

Приступим теперь непосредственно к доказательству тождества Якоби для скобки (3.39). В терминах матрицы η^{ij} искомое тождество можно записать так:

$$\Gamma^{ijk}\equiv \underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}(\eta^{is}\mathscr{D}_s\eta^{jk}+\eta^{is}f_{sn}^{j}\eta^{nk})=0.$$

Левую часть перепишем, используя уравнение (3.40):

$$\Gamma^{ijk}=\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}(\eta^{is}\lambda_s^{jk}-\eta^{is}f_{sn}^{j}\eta^{nk}).$$

Вычислим теперь правую производную $\mathscr{D}_l\Gamma^{ijk}$, учитывая соотношение (3.40). Получим

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_l\Gamma^{ijk}&=\Lambda_l^{ijk}+\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\eta^{im}\lambda_{m,\,l}^{jk}-\\&-\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}[f_{ls}^{i}\eta^{sm}\lambda_m^{jk}+(f_{ms}^{k}\lambda_l^{js}+f_{ms}^{j}\lambda_l^{sk})\eta^{im}-\eta^{im}f_{ml}^{s}\lambda_s^{jk}]+\\&+\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}[(f_{ls}^{i}\eta^{sn}+\eta^{is}f_{ls}^{n})f_{nm}^{j}\eta^{mk}+\eta^{in}f_{nm}^{j}(f_{ls}^{m}\eta^{sk}+\eta^{ms}f_{ls}^{k})].\end{aligned}\tag{3.49}$$

Во второй строке последнее слагаемое преобразуем с помощью (3.42):

$$\eta^{im}f_{ml}^{s}\lambda_s^{jk}=\eta^{im}(\lambda_{l,\,m}^{jk}-\lambda_{m,\,l}^{jk}+f_{ms}^{j}\lambda_l^{sk}+\lambda_l^{js}f_{ms}^{k}-f_{ls}^{j}\lambda_m^{sk}-\lambda_m^{js}f_{ls}^{k}).$$

В результате первые две строки (3.49) принимают вид

$$\mathscr{D}_l\Gamma^{ijk}=B_l^{ijk}-\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}f_{ls}^{i}\Big(\underset{(s,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\eta^{sm}\lambda_m^{jk}\Big)+(\textit{третья строка}).\tag{3.50}$$

Третья строка (3.49) с учетом тождества Якоби для структурных констант f_{jk}^{i} преобразуется так:

$$(\textit{третья строка})=\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}f_{ls}^{i}(\eta^{sn}f_{nm}^{j}\eta^{mk}+\eta^{jn}f_{nm}^{k}\eta^{ms}+\eta^{kn}f_{nm}^{s}\eta^{mj}).$$

Сравнивая с определением тензора Γ^{sjk}, получим

$$(\textit{третья строка})=-\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}f_{ls}^{i}\Gamma^{sjk}+\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}f_{ls}^{i}\Big(\underset{(s,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}\eta^{sm}\lambda_m^{jk}\Big).$$

Подставляя это в (3.50) и учитывая, что $B_l^{ijk}=0$, приходим к уравнению

$$\mathscr{D}_l\Gamma^{ijk}=-\underset{(i,\,j,\,k)}{\mathfrak{S}}f_{ls}^{i}\Gamma^{sjk}.$$

Если $\eta^{ij}(e)=c^{ij}$, то в силу (3.46) $\Gamma^{ijk}(e)=0$. Это начальное условие и уравнение для Γ^{ijk} дают $\Gamma^{ijk}\equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие 3.5. *Пусть функции λ_k^{ij} на односвязной группе $\mathscr{N}$ удовлетворяют соотношениям (3.42)—(3.44) и числа $\lambda_k^{ij}(e)$ являются структурными константами алгебры Ли. Тогда на $\mathscr{N}$ существует согласованная с λ_k^{ij} скобка Пуассона, равная нулю в единице,— назовем ее канонической скобкой. Любая другая со-*

гласованная скобка на $\mathcal{N}$ (заданная тензором η^{ij}) отличается от канонической скобки (заданной тензором $\tilde{\eta}^{ij}$) на «коцикл»

$$\eta = \tilde{\eta} + \mathrm{Ad}^{-1} \cdot c \cdot \mathrm{Ad}^{-1*}, \quad c^{ij} = \mathrm{const} = \eta^{ij}(\underline{e}), \tag{3.51}$$

где

$$\begin{gathered} \underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} \; c^{is} \mathcal{D}_s \lambda_l^{jk}(\underline{e}) = 0, \\ \underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} \left(c^{is} \lambda_s^{jk}(\underline{e}) - c^{is} f_{sm}^{j} c^{mk} \right) = 0. \end{gathered} \tag{3.52}$$

Пример 3.2. Пусть числа $\lambda_k^{ij} = \mathrm{const}$ являются структурными константами алгебры Ли. Тогда условия (3.43)—(3.45) выполнены автоматически. Условие (3.42) здесь совпадает с условием (1.28) гл. I для структуры биалгебры Ли на $\mathfrak{n} = T_e\mathcal{N}$. Каноническая скобка на $\mathcal{N}$, определенная в следствии 3.5, в этом случае совпадает с инвариантной скобкой, т. е. со скобкой, относительно которой групповое умножение $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ является пуассоновым отображением (см. (1.42) гл. I).

Следствие 3.6. *Пусть $\mathcal{N}$ — односвязная группа Ли, $\mathfrak{n}$ — ее алгебра Ли и на $\mathfrak{n}$ задана структура биалгебры Ли. Пусть G — группа с алгеброй Ли $\mathfrak{n}^*$ (т. е. группа, сопряженная $\mathcal{N}$). Тогда*

(1°) *структура псевдогруппы на G, согласованная с инвариантной скобкой на $\mathcal{N}$, совпадает со структурой группы;*

(2°) *любая скобка на $\mathcal{N}$, согласованная со структурой группы G, отличается от инвариантной скобки на «коцикл»:* (3.51), (3.52);

(3°) *если $\tilde{\eta}$ задает инвариантную скобку на $\mathcal{N}$ и ξ^0 — любая точка из $\mathcal{N}$, то $\eta = \tilde{\eta} + \mathrm{Ad}^{-1}\tilde{\eta}(\xi^0) \cdot \mathrm{Ad}^{-1*}$ также задает скобку на $\mathcal{N}$, согласованную с G. Она соответствует «тривиальному коциклу» $c^{ij} = \tilde{\eta}^{ij}(\xi^0)$ в* (3.51) *и сводится к инвариантной скобке заменой переменных (левым сдвигом на ξ^0).*

Пример 3.3. Пусть в единице $\underline{e}$ группы $\mathcal{N}$ числа $\lambda_k^{ij}(\underline{e})$ задают структурные константы алгебры Ли и удовлетворяют тождествам

$$\begin{gathered} \underset{(i,\, j,\, k)}{\mathfrak{S}} \; \lambda_l^{is}(\underline{e}) \left(f_{sm}^{j} \lambda_n^{mk}(\underline{e}) + \lambda_n^{jm}(\underline{e}) f_{sm}^{k} \right) = 0, \\ f_{nl}^{s} \lambda_s^{ij}(\underline{e}) = 0 \quad \forall\, i,\ j,\ k,\ l,\ n. \end{gathered} \tag{3.53}$$

Определим функции λ_k^{ij} на $\mathcal{N}$ как первообразные точных 1-форм

$$\left(f_{ks}^{i} \lambda_m^{sj}(\underline{e}) + \lambda_m^{is}(\underline{e}) f_{ks}^{j} \right) \varepsilon'^m,$$

где ε' — правоинвариантные формы на $\mathcal{N}$. Определим также η^{ij} как первообразные 1-форм $\lambda_m^{ij}(\underline{e})\, \varepsilon'^m$, причем $\eta^{ij}(\underline{e}) = 0$. Тогда η — каноническая скобка, согласованная с λ_k^{ij}. Сейчас мы увидим, что эта скобка, вообще говоря, неинвариантна. В общем случае можно определить меру ω неинвариантности скобки следующим образом:

$$\eta'(\xi \cdot \zeta) = \mathrm{Ad}(\xi) \left[\eta'(\zeta) - \omega(\xi, \zeta) \right] \cdot \mathrm{Ad}(\xi)^* + \eta'(\xi) \tag{3.54}$$

для любых точек ξ, ζ из группы $\mathcal{N}$. Здесь $\eta' = \mathrm{Ad} \cdot \eta \cdot \mathrm{Ad}^*$ — тензор, задающий скобку Пуассона правоинвариантными полями (тензор η в (3.39) задает ее левоинвариантными полями). Продифференцируем (3.54) по ζ и воспользуемся (3.47): $\mathscr{D}_m\eta' = \mathrm{Ad}\cdot\lambda_m\cdot\mathrm{Ad}^*$, где $\lambda_m \equiv ((\lambda_m^{ij}))$. Имеем

$$(\mathscr{D}_m\eta')(\xi\cdot\zeta) \equiv (\mathscr{D}_m)_\zeta\,\eta'(\xi\cdot\zeta) = \mathrm{Ad}(\xi)\,[\mathscr{D}_m\eta'(\zeta) - (\mathscr{D}_m)_\zeta\,\omega]\,\mathrm{Ad}(\xi)^*$$

или

$$\lambda_m(\xi\cdot\zeta) = \lambda_m(\zeta) - \mathrm{Ad}(\zeta)^{-1}[(\mathscr{D}_m)_\zeta\,\omega]\cdot\mathrm{Ad}(\zeta)^{*-1}.$$

Продифференцируем это равенство по ξ в точке $\xi = \underline{e}$ и введем обозначение $\omega_j(\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial\xi^j}\,\omega\Big|_{\xi=\underline{e}}$. Получим

$$\mathscr{D}_j'\lambda_m(\zeta) = (\mathscr{D}_j')_\xi\,\lambda(\xi\cdot\zeta)\big|_{\xi=e} = -\mathrm{Ad}(\zeta)^{-1}[\mathscr{D}_m\omega_j(\zeta)]\,\mathrm{Ad}(\zeta)^{*-1}.$$

Итак, окончательно

$$\mathscr{D}_m\omega_j = -\mathrm{Ad}\cdot\mathscr{D}_j'\lambda_m\cdot\mathrm{Ad}^*, \quad \omega_j(\underline{e}) = 0. \tag{3.55}$$

В качестве меры неинвариантности можно выбирать не только функцию ω в (3.54), но и функции ω_j из (3.55).

Лемма 3.6. *Равенство нулю всех ω_j вместе с равенством $\eta(\underline{e}) = 0$ эквивалентно инвариантности скобки.*

Доказательство. Из (3.55) имеем

$$\mathscr{D}_j'\eta' = \mathrm{ad}_{(j)}\cdot(\eta' - \eta'(\underline{e})) + (\eta' - \eta'(\underline{e}))\cdot\mathrm{ad}_{(j)}^* + \lambda_j(\underline{e}) - \omega_j,$$

где $\mathrm{ad}_{(j)} \equiv ((f_{ji}^k))$ — матрицы присоединенного представления группы $\mathscr{N}$. Условия $\eta'(\underline{e}) = 0$, $\omega_j \equiv 0$ дают

$$\mathscr{D}_j'\eta' = \mathrm{ad}_{(j)}\cdot\eta' + \eta'\,\mathrm{ad}_{(j)}^* + \mathscr{D}_j'\eta'(\underline{e})$$

или (после интегрирования)

$$\eta'(\xi\circ\zeta) = \mathrm{Ad}(\xi)\cdot\eta'(\zeta)\cdot\mathrm{Ad}(\xi)^* + \eta'(\xi),$$

что и означает инвариантность скобки (равенство $\omega = 0$ в (3.54)). Лемма доказана.

В нашем примере $\mathscr{D}_j'\lambda_m = \mathrm{ad}_{(m)}\lambda_j(\underline{e}) + \lambda_j(\underline{e})\,\mathrm{ad}_{(m)}^*$ и, следовательно, уравнение (3.55) дает

$$\omega_j = \lambda_j(\underline{e}) - \mathrm{Ad}\cdot\lambda_j(\underline{e})\cdot\mathrm{Ad}^*.$$

Поэтому данная скобка не инвариантна ($\omega_j \neq 0$), если хотя бы одно из чисел $(f_{sm}^i\lambda_j^{mk}(\underline{e}) + \lambda_j^{im}(\underline{e})\,f_{sm}^k)$ не нуль.

3.6. Сопряженная почти-скобка и почти-пуассоновость действия. Пусть вновь G — это конечномерная псевдогруппа над пуассоновым многообразием $\mathscr{N}$. Рассмотрим на G некоторое семейство почти-скобок:

$$[\varphi, \chi]^\xi = F^\xi(\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}\chi), \quad \varphi, \chi \in \mathscr{F}(G), \tag{3.56}$$

заданных при каждом фиксированном $\xi \in \mathscr{N}$ с помощью антисимметричного тензора F^ξ: $T^*G \to TG$. Выполнение тождества Якоби для почти-скобки не предполагается.

Если псевдогруппа G канонически действует на пуассоновом многообразии S и $\mathcal{A}$: $S \to \mathcal{N}$ отображение момента, то введем на $G \times S$ почти-скобки

$$\{\varphi(\alpha, s), \chi(\alpha, s)\}_s + [\varphi(\alpha, s), \chi(\alpha, s)]_\alpha^{\mathcal{A}(s)},$$

где $\varphi, \chi \in \mathcal{F}(G \times S)$, нижние индексы $s \in S$, $\alpha \in G$ обозначают переменные, по которым берутся скобки. Действие назовем *почти-пуассоновым*, если отображение $G \times S \ni (\alpha, s) \to \alpha \circ s \in S$ сохраняет почти-скобки.

Мы сейчас увидим, какое условие вместо тождества Якоби нужно наложить на тензор F^ξ, определяющий почти-скобку (3.56). Это условие назовем *аномальным тождеством Якоби*. В случае, когда F^ξ не зависит от ξ, аномальное тождество переходит в обычное, почти-скобка (3.56) становится обычной скобкой Пуассона, а почти-пуассоново действие становится пуассоновым [121].

Теорема 3.5 [67]. *Пусть конечномерная псевдогруппа G (над $\mathcal{N}$) невырожденно и канонически действует на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$. Тогда*

(a) *На G определено семейство почти-скобок вида* (3.56) *так, что действие псевдогруппы G на $\mathfrak{X}$ почти-пуассоново. Коприсоединенное действие G на $\mathcal{N}$ также почти-пуассоново.*

(b) *Почти-скобка* (3.56) *на псевдогруппе G удовлетворяет аномальному тождеству Якоби*:

$$\mathfrak{S}_{(l,j,k)} \left(F^\xi_{il} \frac{\partial}{\partial \alpha_l} F^\xi_{jk} + V^l_i \partial_l F^\xi_{jk} \right) = 0. \tag{3.57}$$

Здесь $V^l_i(\xi, \alpha) \equiv \varepsilon^{-1}(\xi)^l_k \, dL^\xi(\alpha)^k_i$, как и выше, используется обозначение $\partial_l \equiv \partial/\partial \xi^l$, а $dL^\xi(\alpha)$ — левые сдвиги на G.

(c) *Производная в единице $f^i_{jk}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} F^\xi_{jk}(\alpha) \Big|_{\alpha = e}$ совпадает со сдвинутым тензором кручения в* (3.41).

(d) *Тензор F^ξ по псевдогруппе тождественно нулевой в единице $F^\xi(e) = 0$ и удовлетворяет системе уравнений первого порядка*

$$V^i_s \frac{\partial}{\partial \alpha_s} F^\xi_{jk} - F^\xi_{js} \frac{\partial V^i_k}{\partial \alpha_s} + F^\xi_{ks} \frac{\partial V^i_j}{\partial \alpha_s} + \Psi^{is} \partial_s F^\xi_{jk} + V^s_k \partial_s V^i_j - V^s_j \partial_s V^i_k = 0. \tag{3.58}$$

Доказательство. (a) Заметим, что функция f постоянна на G-орбитах в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $df(\alpha \circ z) \in \operatorname{Ker} \frac{\partial (\alpha \circ z)^*}{\partial \alpha}$ $\forall z \in \mathfrak{X}$, $\alpha \in G$. С другой стороны, гамильтоново поле $\operatorname{ad}(f)$ в этом случае коммутирует с действием G. Поэтому

$$\{f, g\}(\alpha \circ z) - \{f(\alpha \circ z), g(\alpha \circ z)\}_z = 0,$$

если либо $df(\alpha \circ z)$, либо $dg(\alpha \circ z)$ лежит в ядре $\operatorname{Ker} \frac{\partial (\alpha \circ z)^*}{\partial \alpha}$. Следовательно, обозначая через J^{-1} тензор, задающий скобку

Пуассона в $\mathfrak{X}$, имеем

$$J(\alpha\circ z)^{-1}-\frac{\partial(\alpha\circ z)}{\partial z}J(z)^{-1}\frac{\partial(\alpha\circ z)^*}{\partial z}=\frac{\partial(\alpha\circ z)}{\partial\alpha}F(z,\alpha)\frac{\partial(\alpha\circ z)^*}{\partial\alpha} \tag{3.59}$$

для некоторого F: $T_\alpha^*G\to T_\alpha G$. Можно переписать это равенство так:

$$\{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}_z+ \\ +\langle d_\alpha(\mathcal{P}(\alpha\circ z)),\ F(z,\alpha)\,d_\alpha(\mathcal{Q}(\alpha\circ z))\rangle=\{\mathcal{P},\ \mathcal{Q}\}(\alpha\circ z) \tag{3.60}$$

для любых функций $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$. Применяя к обеим частям (3.60) гамильтоново поле $\operatorname{ad}(f)$ произвольной G-инвариантной функции f и учитывая коммутацию $\operatorname{ad}(f)$ с действием G, получаем

$$\{\{f,\mathcal{P}\}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}_z+\{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \{f,\mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)\}_z+ \\ +\langle d_\alpha\{f,\mathcal{P}\}(\alpha\circ z),\ Fd_\alpha\mathcal{Q}(\alpha\circ z)\rangle+\langle d_\alpha\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ Fd_\alpha\{f,\mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)\rangle+ \\ +\langle d_\alpha\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \{f,F\}_z d_\alpha\mathcal{Q}(\alpha\circ z)\rangle= \\ =\{\{f,\mathcal{P}\},\mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)+\{\mathcal{P},\{f,\mathcal{Q}\}\}(\alpha\circ z).$$

В силу (3.60) сумма первого и третьего слагаемых слева в этом равенстве, а также сумма второго и четвертого равны соответственно первому и второму слагаемым справа. Поэтому оставшееся пятое слагаемое слева равно нулю для любых $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$. В силу невырожденности действия G отсюда получаем $\{f,F\}=0$, т. е. тензор $F(z,\alpha)$ зависит лишь от компонент момента $\mathcal{A}(z)$ (именно они находятся в инволюции с любой G-инвариантной функцией f). Обозначим $F(z,\alpha)\overset{\text{def}}{=}F^{\mathcal{A}(z)}(\alpha)$. Тензор $F^{\xi}(\alpha)$ задает на G почти-скобку, для которой в силу (3.60) выполнено утверждение (a) теоремы.

Перейдем к п. (b). Применим к левой и правой частям тождества (3.60) еще раз скобку $[\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ldots]_\alpha^{\mathcal{A}(z)}$ с некоторой функцией $\mathcal{R}\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$. Обозначая кратко $d^j\mathcal{R}\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\mathcal{R}(\alpha\circ z)$, получаем

$$F_{kj}(d^k\mathcal{R}\{d^j\mathcal{P},\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}+d^k\mathcal{R}\{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ d^j\mathcal{Q}\})+ \\ +\left[\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ [\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)]_\alpha^{\mathcal{A}}\right]_\alpha^{\mathcal{A}}=[\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ \{\mathcal{P},\mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)]_\alpha^{\mathcal{A}}= \\ =\{\mathcal{R},\ \{\mathcal{P},\mathcal{Q}\}\}(\alpha\circ z)-\{\mathcal{R}(\alpha\circ z\},\ \{\mathcal{P},\mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)\}_z= \\ =\{\mathcal{R},\ \{\mathcal{P},\mathcal{Q}\}\}(\alpha\circ z)-\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ \{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}_z\}_z- \\ -\left\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ [\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)]_\alpha^{\mathcal{A}}\right\}_z. \tag{3.61}$$

Здесь мы дважды использовали (3.60). Последняя скобка Пуассона равна

$$\left\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ [\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)]_\alpha^{\mathcal{A}}\right\}_z=\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ F_{kj}\}_z d^k\mathcal{P}d^j\mathcal{Q}+ \\ +F_{kj}(\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ d^k\mathcal{P}\}d^j\mathcal{Q}+\{\mathcal{R}(\alpha\circ z),\ d^j\mathcal{Q}\}\ d^k\mathcal{P}).$$

Подставляя это выражение в (3.61) и суммируя по циклическим перестановкам функций $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, приходим к тождеству

$$\underset{(\mathcal{P},\,\mathcal{Q},\,\mathcal{R})}{\mathfrak{S}}\Big[\mathcal{R},\ [\mathcal{P},\ \mathcal{Q}]_\alpha^{\mathcal{A}}\Big]_\alpha^{\mathcal{A}} + \{\mathcal{R},\ F_{kj}\}\, d^k\mathcal{P} d^j\mathcal{Q} + \\ + \{\mathcal{Q},\ F_{kj}\}\, d^k\mathcal{R} d^j\mathcal{P} + \{\mathcal{P},\ F_{kj}\}\, d^k\mathcal{Q} d^j\mathcal{R} = 0, \quad (3.62)$$

где у всех функций $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ опущен аргумент $\alpha\circ z$, а скобки $\{\ldots,\ \ldots\}$ берутся по $z\in\mathfrak{X}$.

Теперь заметим, что в силу первого равенства (3.28) и формулы (3.29) имеем

$$\tilde{X}^i(\mathcal{A}(z))_\alpha \mathcal{P}(\alpha\circ z) = -\varepsilon(\mathcal{A}(z))^i_j \{\mathcal{A}^j,\ \mathcal{P}(\alpha\circ z)\}_z$$

или

$$\{\mathcal{A}^j,\ \mathcal{P}(\alpha\circ z)\} = -\varepsilon^{-1}(\mathcal{A})^j_i \tilde{X}^i(\mathcal{A})_\alpha \mathcal{P}(\alpha\circ z) \equiv -V^j_s(\mathcal{A},\ \alpha)\, d^s\mathcal{P}. \quad (3.63)$$

В частности,

$$\{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ F^{\mathcal{A}}(\alpha)_{kj}\} = \partial_l F_{kj} V^l_s d^s\mathcal{P}.$$

Используем это равенство в (3.62):

$$\underset{(\mathcal{P},\,\mathcal{Q},\,\mathcal{R})}{\mathfrak{S}}\left(\Big[\mathcal{R},\ [\mathcal{P},\ \mathcal{Q}]_\alpha^{\mathcal{A}}\Big]_\alpha^{\mathcal{A}} + \partial_l F_{kj}\cdot V^l_s\cdot \partial^s\mathcal{P}\cdot d^k\mathcal{Q}\cdot d^j\mathcal{R}\right) = 0.$$

В силу произвольности $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ и невырожденности действия отсюда следует тождество (3.57).

Продифференцируем теперь (3.59) по α при $\alpha = e$ и учтем, что $F|_{\alpha=e} = 0$:

$$\frac{\partial (J^{-1})^{\mu\nu}}{\partial z^k} M^{ks} - \frac{\partial M^{\mu s}}{\partial z^k}(J^{-1})^{k\nu} - (J^{-1})^{\mu k}\frac{\partial M^{\nu s}}{\partial z^k} = M^{\mu r} f^s_{rn} M^{\nu n}.$$

Отсюда в силу замкнутости симплектической формы $J dz\wedge dz$ и в силу (3.29): $(JM)^s_j = (d\mathcal{A})^k_j \varepsilon^s_k$, получим

$$d(\mathcal{A}^*\varepsilon^s) = -\frac{1}{2} f^s_{kj}(\mathcal{A}(z))\,(\mathcal{A}^*\varepsilon^k)\wedge(\mathcal{A}^*\varepsilon^j)$$

или

$$d\varepsilon^s = -\frac{1}{2} f^s_{kj}\varepsilon^k\wedge\varepsilon^j.$$

Этим доказан п. (с) теоремы.

Далее применим к (3.60) гамильтоново поле $\mathrm{ad}(\mathcal{A}^i)$:

$$\{\{\mathcal{A}^i,\ \mathcal{P}(\alpha\circ z)\},\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\} + \{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \{\mathcal{A}^i,\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}\} + \\ + [\{\mathcal{A}^i,\ \mathcal{P}(\alpha\circ z)\},\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)]^{\mathcal{A}}_\alpha + [\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \{\mathcal{A}^i,\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\}]^{\mathcal{A}}_\alpha + \\ + \langle d_\alpha\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \{\mathcal{A}^i,\ F\}\, d_\alpha\mathcal{Q}(\alpha\circ z)\rangle = \{\mathcal{A}^i,\ \{\mathcal{P},\ \mathcal{Q}\}(\alpha\circ z)\}.$$

Используя несколько раз тождество (3.63), преобразуем эту формулу (обозначения те же, что и в (3.61)):

$$-V^i_s\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\{\mathcal{P}(\alpha\circ z),\ \mathcal{Q}(\alpha\circ z)\} + V^s_k\partial_s V^i_j(d^j\mathcal{P} d^k\mathcal{Q} - d^j\mathcal{Q} d^k\mathcal{P}) - \\ - [V^i_s d^s\mathcal{P},\ \mathcal{Q}]^{\mathcal{A}}_\alpha - [\mathcal{P},\ V^i_s d^s\mathcal{Q}]^{\mathcal{A}}_\alpha + \{\mathcal{A}^i,\ F_{jk}\}\, d^k\mathcal{Q} d^j\mathcal{P} = -V^i_s d^s\{\mathcal{P},\ \mathcal{Q}\}. \quad (3.64)$$

В правой части учтем вновь равенство (3.60):

$$V_s^i d^s \{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\} = V_s^i \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \{\mathcal{P}(\alpha \circ z), \mathcal{Q}(\alpha \circ z)\} +$$
$$+ V_s^i \frac{\partial}{\partial \alpha_s}(F_{jk}) d^j \mathcal{P} d^k \mathcal{Q} + [V_s^i d^s \mathcal{P}, \mathcal{Q}]_\alpha^{\mathcal{A}} +$$
$$+ [\mathcal{P}, V_s^i d^s \mathcal{Q}]_\alpha^{\mathcal{A}} - F_{sk}\left(\frac{\partial V_j^i}{\partial \alpha_s} d^j \mathcal{P} d^k \mathcal{Q} + \frac{\partial V_j^i}{\partial \alpha_k} d^s \mathcal{P} d^j \mathcal{Q}\right).$$

Подставляя это в (3.64), в силу произвольности $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ получаем

$$V_k^s \partial_s V_j^i - V_j^s \partial_s V_k^i + \{\mathcal{A}^i, F_{jk}\} = -V_s^i \frac{\partial}{\partial \alpha_s} F_{jk} + F_{sk} \frac{\partial V_j^i}{\partial \alpha_s} + F_{js} \frac{\partial V_k^i}{\partial \alpha_s},$$

что совпадает с (3.58), поскольку $F_{jk} \equiv F_{jk}^{\mathcal{A}(z)}(\alpha)$ и

$$\{\mathcal{A}^i, F_{jk}\} = \left(\Psi^{is}(\xi)\, \partial_s F_{jk}^{\xi}(\alpha)\right)\Big|_{\xi = \mathcal{A}(z)}.$$

Теорема доказана.

Пример 3.4. *Пуассоновы и гамильтоновы действия.* Посмотрим теперь, как выглядит система (3.58) в случае, когда $\mathcal{N}$ — группа Ли, снабженная инвариантной скобкой или скобкой, отличающейся от инвариантной на коцикл. В этом случае, как показывают следствия 3.3 и 3.6, псевдогруппа G является группой Ли, сопряженной $\mathcal{N}$. В частности, левые сдвиги на G не зависят от точек $\xi \in \mathcal{N}$, т. е. $dL^{\xi}(\alpha) = dL(\alpha)$. Если мы введем тензор $\Phi = dL^{-1} \cdot F \cdot dL^{-1*}$, то система (3.58) примет вид

$$\tilde{X}^i \Phi_{jk} - \Phi_{js} \lambda_k^{si} + \Phi_{ks} \lambda_j^{si} + \eta^{is} \mathcal{D}_s \Phi_{jk} = f_{jk}^i, \tag{3.65}$$

где $\tilde{X}$ и $\mathcal{D}$ — левые поля на $G = \mathcal{N}^*$ и на $\mathcal{N}$, а λ_k^{si} и f_{jk}^i — структурные константы этих групп.

Общее решение системы (3.65) можно искать в виде

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \mathrm{Ad}^{-1} \cdot \Phi^0 \cdot \mathrm{Ad}^{-1*},$$

где тензор $\tilde{\Phi}$ задает инвариантную скобку на G (через левые поля), Ad — присоединенное представление G. В силу уравнения для инвариантной скобки (1.31) гл. I получим для Φ^0 однородную систему

$$\tilde{X}^i \Phi^0 = Y^i \Phi^0, \quad Y^i \equiv \eta^{si} \mathcal{D}_s.$$

Отсюда и из (3.28) следует, что

$$\Phi_{jk}^0 = \varphi_{jk}^0(\alpha \circ \xi), \quad \varphi_{jk}^0 \in \mathcal{F}(\mathcal{N}).$$

Итак, решение (3.65) имеет вид

$$\Phi^{\xi}(\alpha) = \tilde{\Phi}(\alpha) + \mathrm{Ad}(\alpha)^{-1} \cdot \varphi^0(\alpha \circ \xi) \cdot \mathrm{Ad}(\alpha)^{-1*}.$$

С учетом начального условия $F^{\xi}(e) = 0$ и условия для инвариантной скобки $\tilde{\Phi}(e) = 0$ получаем, что $\varphi^0(\xi) \equiv 0$.

Поэтому $\Phi^{\xi}=\tilde{\Phi}$, т. е. почти-скобка (3.56) в данном случае — это инвариантная скобка Пуассона на группе G. Аномалия в тождестве Якоби (3.57), конечно, исчезает. Условие почти-пуассоновости действия G на S превращается в *условие пуассоновости:* отображение $G\times S\to S$ сохраняет скобки Пуассона.

Если к тому же отсутствует кручение $f^{i}_{jk}=0$, т. е. если группа $\mathcal{N}$ абелева, то $\tilde{\Phi}=0$, т. е. инвариантная скобка на $G=\mathcal{N}^*$ тождественно нулевая. В этом случае условие почти-пуассоновости действия G переходит в условие пуассоновости отображений $S\ni s\to\alpha\circ s\in S$ при всех $\alpha\in G$. Тогда говорят, что действие G на S *гамильтоново*. Этот стандартный случай и рассматривается обычно в методе редукции гамильтоновых систем по группе симметрий.

3.7. Локальное уничтожение кручения и негамильтоновости действия. Пусть G и $\tilde{G}$ — две конечномерные псевдогруппы над пуассоновым многообразием $\mathcal{N}$. Гладкое отображение $j\colon G\times\mathcal{N}\to\tilde{G}\times\mathcal{N}$ назовем *гомоморфизмом псевдогрупп*, если оно тождественно на втором сомножителе, т. е. имеет вид

$$j(q,\ \xi)=(j_{\xi}(q),\ \xi),$$

и, кроме того, выполнены тождества

$$\begin{gathered} j_{q\circ\xi}(q')\overset{\xi}{*}j_{\xi}(q)=j_{\xi}(q'\overset{\xi}{*}q),\qquad q\circ\xi=j_{\xi}(q)\circ\xi,\\ j_{q\circ\xi}(q_{\xi}^{-1})=(j_{\xi}(q))_{\xi}^{-1},\qquad j_{\xi}(e)=\tilde{e}, \end{gathered}\tag{3.66}$$

для любых $q,\ q'\in G$ и любого $\xi\in\mathcal{N}$.

Очевидно, если гомоморфизм обратим, то обратное отображение также гомоморфизм. В этом случае будем говорить об изоморфизме псевдогрупп.

Пусть $\mathcal{N}$ односвязно и наделено плоской линейной связностью, а значит, и параллелизацией — базисом 1-форм $\{\varepsilon^i\}$. Связность назовем гамильтоновой, если формы ε^i точны. Псевдогруппу на $\mathcal{N}$ назовем *гамильтоновой*, если она согласована с гамильтоновой связностью.

Лемма 3.7. *Над каждым односвязным параллелизуемым пуассоновым многообразием существует локальная гамильтонова псевдогруппа.*

Доказательство. В силу (2.14) на каждой локальной карте $\mathcal{U}\subset\mathcal{N}$ определена (локально) структура Картана (см. п. 2.4) с помощью 1-форм $\theta'=\mathcal{P}'^{i}_{x}dx_i$ со значением в $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Эти формы задают структуру псевдогруппы в окрестности нуля по x (см. п. 2.4), а также задают формы $\varepsilon^i=\partial_k\mathcal{P}'^{i}_{0}/\partial\xi^k$ при $\xi\in\mathcal{U}$. При изменении карты $\mathcal{U}$ эти объекты глобально продолжаются на все $\mathcal{N}$ с помощью отображений склейки (1.22). Лемма доказана.

Теорема 3.6 [63, 67]. *Всякая конечномерная псевдогруппа над односвязным параллелизуемым пуассоновым многообразием локально в окрестности единицы изоморфна гамильтоновой псевдогруппе. При этом изоморфизме любое каноническое действие псевдогруппы локально превращается в гамильтоново действие.*

Доказательство. Пусть G окрестность единицы в исходной псевдогруппе над $\mathcal{N}$, а $\tilde{G}$ локальная гамильтонова псевдогруппа над $\mathcal{N}$ из леммы 3.7, построенная с помощью структуры Картана θ'.

Фиксируем $\xi \in \mathcal{N}$. Рассмотрим на $\tilde{G}$ форму $\mu = \partial\theta'_y(V_y(\xi))$ из леммы 2.3, а также форму ν на G из (3.35). Выберем кусочно-гладкую непрерывную кривую $\{\alpha(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset G$, соединяющую точку e с точкой q. Решим относительно $y(t) \in \tilde{G}$ уравнение

$$\langle \mu_y(\xi),\ \dot{y} \rangle = \langle \nu_\alpha(\xi),\ \dot{\alpha} \rangle \tag{3.67}$$

с начальным условием $y(0) = 0$. Положение траектории $y(t)$ в момент $t = 1$ обозначим $y(1) \overset{\text{def}}{=} j_\xi(q)$. Получим отображение $j_\xi\colon G \to \tilde{G}$.

Это отображение определено корректно, т. е. не зависит от выбора кривой $\{\alpha(t)\}$. Это следует из уравнений (2.18) и (3.36). Действительно, формы $\varphi = \mu_y(\xi) \ominus \nu_\alpha(\xi)$ на $\tilde{G} \times G$ подчинены соотношениям

$$d\varphi_i = \frac{1}{2}\partial_i \Psi^{jk}(V_y(\xi))(\mu_j \wedge \mu_k)_y - \frac{1}{2}\partial_i \Psi^{jk}(\alpha \circ \xi)(\nu_j \wedge \nu_k)_\alpha.$$

На подмногообразии $\mathcal{M} = \{(y,\ \alpha) \mid V_y(\xi) = \alpha \circ \xi\}$ имеем

$$d\varphi_i = \frac{1}{2}\partial_i \Psi^{jk}(\alpha \circ \xi)(\mu_j + \nu_j) \wedge \varphi_k,$$

и потому совокупность форм φ_i на $\mathcal{M}$ задает распределение, интегрируемое по Фробениусу. Каждый интегральный лист этого распределения однозначно проектируется на сомножители прямого произведения $\tilde{G} \times G$.

Кроме того, на одном из листов лежит траектория $(y(t),\ \alpha(t))$ уравнения (3.67). Действительно, в силу (3.3) и (3.30)

$$\frac{d}{dt}\alpha \circ \xi = \Psi(\alpha \circ \xi)\,\varepsilon(\alpha \circ \xi)\,dR^\xi(\alpha)^{-1}\dot{\alpha} = \Psi(\alpha \circ \xi)\langle \nu_\alpha,\ \dot{\alpha} \rangle,$$

а в силу (2.16), (2.19)

$$\frac{d}{dt}V_y(\xi) = \Psi(V_y(\xi))\langle \mu_y,\ \dot{y} \rangle,$$

т. е. уравнения для $\alpha(t) \circ \xi$ и для $V_{y(t)}(\xi)$ на $\mathcal{M}$ совпадают. Поэтому аналогично лемме 2.3 заключаем, что концы траектории $y(t)$ зависят лишь от концов кривой $\alpha(t)$ (а не от вида этой кривой), т. е. $y(t)$ зависит лишь от $\alpha(1) = q$, что и доказывает корректность определения отображения j_ξ. Одновременно получаем тождество

$$q \circ \xi = V_{j_\xi(q)}(\xi). \tag{3.68}$$

Теперь покажем, что для j_ξ выполнено тождество (3.66), в котором слева стоит умножение на $\tilde{G}$, определенное в (2.20), а справа — умножение на псевдогруппе G (смотрите (3.15)).

Фиксируем кривую $\alpha'(t)$ на G, соединяющую e с q'. Через $y'(t)$ обозначим решение задачи

$$\langle \mu_{y'}(q\circ\xi),\ \dot{y}'\rangle = \langle \nu_{\alpha'}(q\circ\xi),\ \dot{\alpha}'\rangle, \quad y'(0)=0. \tag{3.69}$$

Тогда имеем

$$y(1)=j_\xi(q), \quad y'(1)=j_{q\circ\xi}(q').$$

Далее решим относительно $x(t)$ задачу Коши

$$\langle \mu_x(\xi),\ \dot{x}\rangle = \langle \mu_{y'}(q\circ\xi),\ \dot{y}'\rangle, \quad x(0)=j_\xi(q). \tag{3.70}$$

Тогда, поскольку в силу (3.68) $V_{x(0)}(\xi)=q\circ\xi$, то из (2.20) следует, что $x(t)=y'(t)\overset{\xi}{*}x(0)$ (умножение берется в $\tilde{G}$). В частности,

$$x(1)=j_{q\circ\xi}(q')\overset{\xi}{*}j_\xi(q). \tag{3.71}$$

Аналогично, решая относительно $\beta(t)$ задачу Коши

$$\langle \nu_\beta(\xi),\ \dot{\beta}\rangle = \langle \nu_{\alpha'}(q\circ\xi),\ \dot{\alpha}'\rangle, \quad \beta(0)=q, \tag{3.72}$$

найдем

$$\beta(t)=\alpha'(t)\overset{\xi}{*}\beta(0) \quad \text{(умножение в } G\text{)}.$$

В частности,

$$\beta(1)=q'\overset{\xi}{*}q. \tag{3.73}$$

С другой стороны, в силу (3.69) правые части в (3.70) и в (3.72) одинаковые, и потому

$$\langle \mu_x(\xi),\ \dot{x}\rangle = \langle \nu_\beta(\xi),\ \dot{\beta}\rangle. \tag{3.74}$$

Построим составные траектории:

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{при } \ 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ \beta(2t-1) & \text{при } \ 1/2\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \in G,$$

$$u(t)=\begin{cases}y(2t) & \text{при } \ 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ x(2t-1) & \text{при } \ 1/2\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \in \tilde{G}.$$

Поскольку α и y связаны уравнением (3.67), а β и x — уравнением (3.74), то

$$\langle \mu_u(\xi),\ \dot{u}\rangle = \langle \nu_\gamma(\xi),\ \dot{\gamma}\rangle \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Следовательно, по определению $u(1)=j_\xi(\gamma(1))$ или

$$x(1)=j_\xi(\beta(1)).$$

Отсюда и из (3.71), (3.73) получаем искомое тождество (3.66). Теорема доказана.

3.8. Симплектический группоид, порожденный псевдогруппой. Теперь мы, наконец, можем ответить на вопрос, поставленный в начале п. 3.3, и ввести симплектическую структуру на группоиде (3.24).

Лемма 3.8. *Пусть $\mathcal{N}$ односвязно и наделено плоской линейной связностью, G — локальная конечномерная псевдогруппа над $\mathcal{N}$, согласованная со связностью. Тогда $G\times\mathcal{N}$ наделяется симплектической структурой так, что относительно операций* (3.24) $G\times\mathcal{N}$ *является симплектическим группоидом над $\mathcal{N}$. При этом действие псевдогруппы G на $G\times\mathcal{N}$ левыми сдвигами*

$$\alpha\circ(\beta,\ \xi)\overset{\mathrm{def}}{=}(\alpha\overset{\xi}{*}\beta,\ \xi) \tag{3.75}$$

является каноническим, левое отображение сокращения l (1.1) *служит моментом этого действия, а связность на $\mathcal{N}$, индуцированная действием, совпадает с исходной.*

Доказательство. Отображения сокращения в группоиде $G\times\mathcal{N}$ — это $l(\alpha,\ \xi)=\alpha\circ\xi$ и $\pi(\alpha,\ \xi)=\xi$. В силу теоремы 3.6 мы имеем диффеоморфизм

$$j\colon\ G\times\mathcal{N}\to\tilde{G}\times\mathcal{N},\quad j(q,\ \xi)=(j_\xi(q),\ \xi),$$

который переводит l в отображение сокращения $\tilde{l}(x,\ \xi)=V_x(\xi)$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G\times\mathcal{N} \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "\pi"] & & \xrightarrow{\ j\ } & & \tilde{G}\times\mathcal{N} \arrow[dl, "\tilde{l}"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathcal{N} & & \mathcal{N}^{(-)} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N}^{(-)} \end{tikzcd}$$

На $\tilde{G}\times\mathcal{N}$ в силу следствия 2.6 существует симплектическая структура, задаваемая формой $\tilde{d}\theta=-\tilde{d}(\theta'_x(V_x(\xi)))$, относительно которой отображение $\tilde{l}$ пуассоново, π антипуассоново, $\tilde{l}$ и π в инволюции. Перенесение этой структуры на $G\times\mathcal{N}$ обеспечит аналогичные свойства отображений $l=\tilde{l}\circ j$ и $\pi=\pi\circ j$. Поэтому $G\times\mathcal{N}$ симплектический группоид.

Утверждения о каноничности действия (3.75) и о том, что l его отображение момента, просто следуют из определений и являются переформулировкой утверждений леммы 5.3.

Действие (3.75) индуцирует параллелизацию $\varepsilon^{\#}(\xi)\colon T_eG\to T^*_\xi\mathcal{N}$ по формуле (3.29), т. е.

$$J(z)\,M(z)=dl(z)^*\,\varepsilon^{\#}(l(z)),\quad M(z)\overset{\mathrm{def}}{=}\left.\frac{\partial(\alpha\circ z)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=e}, \tag{3.76}$$

где $z\equiv(\beta,\ \xi)\in G\times\mathcal{N}$, а J — тензор, задающий симплектическую структуру на $G\times\mathcal{N}$.

С другой стороны, имеется действие псевдогруппы $\tilde{G}$ левыми сдвигами на $\tilde{G}\times\mathcal{N}$, которое индуцирует параллелизацию $\tilde{\varepsilon}(\xi)\colon T_0\tilde{G}\to T^*_\xi\mathcal{N}$, $\tilde{\varepsilon}(\xi)=\partial\theta'_e(\xi)$ (см. пример 3.1). Таким образом, выполнено тождество

$$\tilde{J}(\tilde{z})\,\tilde{M}(\tilde{z})=d\tilde{l}(\tilde{z})^*\,\tilde{\varepsilon}(\tilde{l}(\tilde{z})),\quad \tilde{M}\overset{\mathrm{def}}{=}\left.\frac{\partial(y\circ\tilde{z})}{\partial y}\right|_{y=0}, \tag{3.77}$$

где $\tilde{z} \equiv (x, \xi) \in \tilde{G} \times \mathcal{N}$, а $\tilde{J}$ — тензор, задающий симплектическую структуру на $\tilde{G} \times \mathcal{N}$.

По определению отображения j имеем

$$y \circ j(z) = (y \overset{\xi}{*} j_\xi(\beta),\ \xi) = (j_{\beta\circ\xi}(\alpha) \overset{\xi}{*} j_\xi(\beta),\ \xi),$$

где $\alpha \equiv j^{-1}_{\beta\circ\xi}(y)$. Используя (3.66) и определение отображения l, получаем

$$y \circ j(z) = j\,(j^{-1}_{l(z)}(y) \circ z).$$

Дифференцируя по y в точке $y = 0$, приходим к тождеству

$$\tilde{M}(j(z)) = dj(z)\, M(z)\, (dj_{l(z)}(e))^{-1}.$$

Кроме того, из определения отображения j_ξ (3.67) следует, что

$$\mu_i^s(\xi)\Big|_0 \cdot \frac{\partial (j_\xi)_s}{\partial q_k}\Big|_{q=e} = \nu_i^k(\xi)\Big|_e,$$

где μ_i^s и ν_i^k — компоненты форм μ_i и ν_i в точках $0 \in \tilde{G}$ и $e \in G$ соответственно. Учитывая определение μ и ν, получаем

$$\mu(\xi)\,|_0 = \partial\theta'(\xi)\,|_0 \equiv \tilde{\varepsilon}(\xi), \quad \nu(\xi)\,|_e = \varepsilon(\xi),$$

и, следовательно,

$$dj_\xi(e) = \tilde{\varepsilon}(\xi)^{-1}\varepsilon(\xi),$$
$$\tilde{M}(j(z)) = dj(z) M(z)\, \varepsilon(l(z))^{-1}\tilde{\varepsilon}(l(z)).$$

Подставляя это в (3.77) и учитывая равенства $dl^* = dj^*\, d\tilde{l}^*$, $J = dj^* \tilde{J} dj$ (по определению симплектической структуры на $G \times \mathcal{N}$), находим

$$J(z)\, M(z) = dl(z)^* \varepsilon(l(z)). \tag{3.78}$$

Сравнивая с (3.76), получаем искомое равенство $\varepsilon^\# = \varepsilon$. Лемма доказана.

Отметим, что на подмногообразии единиц: $\{e\} \times \mathcal{N} \subset G \times \mathcal{N}$ симплектическая структура J может быть вычислена из формулы (1.30) для структуры $\tilde{J}$ на $\tilde{G} \times \mathcal{N}$. Обращение J^{-1} дает тензор, определяющий скобку Пуассона:

$$J(e, \xi) = \begin{bmatrix} -\eta(\xi) & -\varepsilon(\xi)^* \\ \varepsilon(\xi) & 0 \end{bmatrix},$$
$$J^{-1}(e, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon(\xi)^{-1} \\ -\varepsilon(\xi)^{-1*} & -\Psi(\xi) \end{bmatrix}, \quad \eta = \varepsilon^*\Psi\varepsilon. \tag{3.79}$$

Наша задача теперь будет состоять в том, чтобы получить явные формулы для $J(\beta, \xi)$ и $J^{-1}(\beta, \xi)$ при всех $\beta \in G$, $\xi \in \mathcal{N}$.

Лемма 3.9. *Параллелизация ε и скобка Пуассона η (3.39) на $\mathcal{N}$, а также согласованная с ними структура конечномерной псевдогруппы на G однозначно (при заданных «краевых условиях»*

(3.79)) *определяют симплектическую структуру на* $G\times\mathcal{N}$:

$$J(\beta,\ \xi)=\begin{bmatrix} -dR^{\xi}(\beta)^{-1*}\cdot\eta(\beta\circ\xi)\cdot dR^{\xi}(\beta)^{-1} & -dR^{\xi}(\beta)^{-1*}\varepsilon(\beta\circ\xi)\dfrac{\partial\beta\circ\xi}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial(\beta\circ\xi)^*}{\partial\xi}\cdot\varepsilon(\beta\circ\xi)\cdot dR^{\xi}(\beta)^{-1} & \Omega(\beta,\ \xi)\end{bmatrix}. \tag{3.80}$$

Здесь Ω — *решение уравнения*

$$d\Omega_{ij}=\left[\frac{\partial(\beta\circ\xi)^s}{\partial\xi^i}\frac{\partial}{\partial\xi^j}(\varepsilon(\beta\circ\xi)\,dR^{\xi}(\beta)^{-1})^k_s-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(\beta\circ\xi)^s}{\partial\xi^j}\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\varepsilon(\beta\circ\xi)\,dR^{\xi}(\beta)^{-1})^k_s\right]d\beta_k, \tag{3.81}$$

причем $\Omega|_{\beta=e}=0$. *Через* d *обозначен дифференциал по переменной* $\beta\in G$.

Доказательство. Из формулы (3.78), учитывая, что

$$M(\beta,\ \xi)=\begin{bmatrix} dR^{\xi}(\beta) \\ 0\end{bmatrix},$$

$$dl(\beta,\ \xi)=\left(\frac{\partial(\beta\circ\xi)}{\partial\beta},\ \frac{\partial(\beta\circ\xi)}{\partial\xi}\right)=\left(\varepsilon(\beta\circ\xi)^{-1*}\eta(\beta\circ\xi)\,dR^{\xi}(\beta)^{-1},\ \frac{\partial(\beta\circ\xi)}{\partial\xi}\right),$$

сразу получаем левый верхний и два недиагональных блока матрицы (3.80). Далее из замкнутости симплектической формы

$$\omega_{G\times\mathcal{N}}\equiv\frac{1}{2}J\begin{bmatrix} d\beta \\ d\xi\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix} d\beta \\ d\xi\end{bmatrix}=\nu\wedge dl+\frac{1}{2}\Psi(l)\,\nu\wedge\nu+\frac{1}{2}\Omega\,d\xi\wedge d\xi \tag{3.82}$$

после приравнивания нулю коэффициента при $d\beta_k\wedge d\xi^s\wedge d\xi^m$ в выражении для $d\omega_{G\times\mathcal{N}}$ находим уравнение (3.81). Лемма доказана.

Лемма 3.10. *В условиях предыдущей леммы скобка Пуассона на* $G\times\mathcal{N}$ *задается тензором*

$$J^{-1}(\beta,\ \xi)=$$
$$=\begin{bmatrix} dL & -dL\cdot B\cdot\dfrac{\partial(\beta_\xi^{-1})}{\partial\xi} \\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -BFB^* & \varepsilon^{-1} \\ -\varepsilon^{-1*} & -\Psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dL^* & 0 \\ -\dfrac{\partial(\beta_\xi^{-1})^*}{\partial\xi}B^*dL^* & I\end{bmatrix}. \tag{3.83}$$

Здесь опущены аргументы

$$dL=dL^{\xi}(\beta),\quad \varepsilon=\varepsilon(\xi),\quad \Psi=\Psi(\xi),$$
$$F=F^{\beta\circ\xi}(\beta_\xi^{-1}),\quad B=(dR^{\beta\circ\xi}(\beta_\xi^{-1}))^{-1}.$$

Элемент β_ξ^{-1} — *это обратный* β (*из аксиом псевдогруппы* (3.4)), *а тензор* $F^{\zeta}(\alpha)$: $T^*_\alpha G\to T_\alpha G$ *является решением уравнения первого порядка* (3.58) *на* $G\times\mathcal{N}$.

Доказательство. Полагая в уравнении (3.59) $z=(\beta,\ \xi)$, $\alpha=\beta_\xi^{-1}$, получаем тождество

$$J^{-1}(e,\ \xi)+J^{-1}(e,\ \xi)\cdot dl^*(e,\ \xi)\cdot\varepsilon\cdot B\cdot F\cdot B^*\cdot\varepsilon^*\cdot dl(e,\ \xi)\cdot J^{-1}(e,\ \xi)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}(\beta_\xi^{-1}\circ z)\,J^{-1}(\beta,\ \xi)\frac{\partial}{\partial z}(\beta_\xi^{-1}\circ z)^*, \tag{3.84}$$

где $z \equiv (\beta, \xi)$. Заметим, что

$$dl^*(e, \xi)\,\varepsilon(\xi) = \begin{bmatrix} -\eta(\xi) \\ \varepsilon(\xi) \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\beta_\xi^{-1} \circ z) = \begin{bmatrix} dL_\beta^\xi(\beta_\xi^{-1}) & \left.\dfrac{\partial\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right)}{\partial \xi}\right|_{\alpha=\beta_\xi^{-1}} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

В силу (3.13) $dL^{\xi}_{\underset{\xi}{\beta}}(\beta_\xi^{-1}) = dL^\xi(\beta)^{-1}$. После дифференцирования по ξ тождества $\beta_\xi^{-1} \overset{\xi}{*} \beta = e$ получим

$$\frac{\partial\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right)}{\partial \xi} = -dR_\alpha^\xi(\beta)\,\frac{\partial(\beta_\xi^{-1})}{\partial \xi}$$

или в силу (3.10)

$$\left.\frac{\partial\left(\alpha \overset{\xi}{*} \beta\right)}{\partial \xi}\right|_{\alpha=\beta_\xi^{-1}} = -\left(dR^{\beta \circ \xi}(\beta_\xi^{-1})\right)^{-1} \frac{\partial(\beta_\xi^{-1})}{\partial \xi}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}(\beta_\xi^{-1} \circ z)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} dL & -dL \cdot B \cdot \dfrac{\partial}{\partial \xi}(\beta_\xi^{-1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Подставив это в (3.84), получим

$$J^{-1}(\beta, \xi) = \begin{bmatrix} dL & -dL \cdot B \cdot \dfrac{\partial}{\partial \xi}(\beta_\xi^{-1}) \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \Bigg(J^{-1}(e, \xi) +$$
$$+ J^{-1}(e, \xi) \begin{bmatrix} -\eta BFB\eta & -\eta BFB\varepsilon^* \\ \varepsilon BFB\eta & \varepsilon BFB\varepsilon^* \end{bmatrix} J^{-1}(e, \xi) \Bigg) \cdot \begin{bmatrix} dL^* & 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial \xi}(\beta_\xi^{-1})^* B^* dL^* & I \end{bmatrix}.$$

Вспоминая «краевое условие» (3.79), приходим к формуле (3.83). Лемма доказана.

Таким образом, мы видим, что и *симплектическая структура, и скобка Пуассона могут быть разнесены на* $G \times \mathscr{N}$ *левыми и правыми сдвигами*, если стартовать с «краевых условий» (3.79). При этом формулы (3.80) и (3.83) выводятся из (3.78) и (3.58), т. е. только из требования каноничности действия G на $G \times \mathscr{N}$. Замкнутость 2-формы, задаваемой J, обеспечивается дополнительным уравнением (3.81) на тензор Ω, а выполнение тождества Якоби для J^{-1} — дополнительным уравнением (3.58) на тензор F. Это позволяет отказаться от локальности псевдогруппы G и использовать формулы (3.80), (3.83) в следующей ситуации [67].

Теорема 3.7. *Пусть $\mathscr{N}$ — односвязное пуассоново многообразие с плоской линейной связностью, и пусть G — согласованная с $\mathscr{N}$ конечномерная односвязная псевдогруппа. Тогда группоид $G \times \mathscr{N}$* (3.24) *является симплектическим и соответствует пуассонову многообразию $\mathscr{N}$, а псевдогруппа G канонически действует на $G \times \mathscr{N}$ левыми сдвигами* (3.75), *причем моментом служит отображение сокращения l* (1.1). *Если псевдогруппа G канонически действует на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$, то группоид*

$G\times\mathcal{N}$ пуассоново действует на $\mathfrak{X}$ так: $(\alpha, \xi)\circ z=\alpha\circ z$, если $\xi=\mathcal{A}(z)$ (здесь $z\in\mathfrak{X}$, $\alpha\in G$, $\xi\in\mathcal{N}$ и $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X}\to\mathcal{N}$ отображение момента действия G на $\mathfrak{X}$).

Пример 3.5. *Инвариантные скобки*. Пусть $\mathcal{N}$ — группа Ли с инвариантной скобкой (пример 3.2) и $G=\mathcal{N}^*$ — сопряженная группа. Тогда, как мы знаем из следствия 3.6 и примера 3.4, G — конечномерная псевдогруппа, согласованная со скобкой и с естественной левоинвариантной связностью на $\mathcal{N}$, причем тензор F задает на G инвариантную скобку Пуассона. Используя теорему 3.7 и подсчитывая скобку на $G\times\mathcal{N}$ по формуле (3.83), мы приходим к следующему результату [63, 67].

Следствие 3.7. *Пусть $\mathcal{N}$ компактная, G — односвязная сопряженная группа, наделенные инвариантными скобками Пуассона. Тогда $G\times\mathcal{N}$ — симплектический группоид над $\mathcal{N}$ со скобкой*

$$\{f, g\}_{G\times\mathcal{N}}=\{f, g\}_G-\{f, g\}_{\mathcal{N}}+\langle\mathcal{D}_G f, \mathcal{D}_{\mathcal{N}} g\rangle-\langle\mathcal{D}_{\mathcal{N}} f, \mathcal{D}_G g\rangle \tag{3.85}$$

и со структурой умножения

$$(\alpha, \zeta)*(\beta, \xi)=(\alpha\beta, \xi) \quad \text{при} \quad \zeta=\beta\circ\xi.$$

Здесь $\mathcal{D}_G$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ — левые поля на группах G и $\mathcal{N}$, а пуассоново действие $\xi\to\beta\circ\xi$ группы G на $\mathcal{N}$ задается генераторами $Y=-\eta\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, η — скобка на $\mathcal{N}$ (3.39).

Доказательство. В данном случае $dL^{\xi}(\beta)$, $dR^{\xi}(\beta)$, β_{ξ}^{-1}, F^{ξ} в (3.83) не зависят от ξ; кроме того, $\varepsilon(\xi)=dL(\xi)^{-1*}$ — левый сдвиг на группе $\mathcal{N}$. Уравнение (3.58) задает F, т. е. задает инвариантную скобку (3.56) на группе G. В силу этой инвариантности имеется тождество

$$dL(\beta)\,dR(\beta^{-1})^{-1}F(\beta^{-1})\,dR(\beta^{-1})^{-1*}dL(\beta)^*=-F(\beta).$$

Поэтому формула (3.83) принимает вид

$$J^{-1}(\beta, \xi)=\begin{bmatrix} F(\beta) & dL(\beta)\,dL(\xi)^* \\ -dL(\xi)\,dL(\beta)^* & -\Psi(\xi)\end{bmatrix}, \quad \Psi\equiv dL\cdot\eta\cdot dL^*,$$

что и дает скобку (3.89). Следствие доказано.

Заметим, что инвариантность скобки на $\mathcal{N}$ в доказательстве не используется (нужна лишь ее согласованность со структурой группы G). Это означает, что скобка на $\mathcal{N}$ может отличаться от инвариантной на «коцикл» (следствие 3.6, а также гл. I, теорема 1.2).

Следствие 3.8. *Если $\mathcal{N}$ и G — взаимно сопряженные группы, скобка на G инвариантна, а скобка на $\mathcal{N}$ отличается от инвариантной на «коцикл», то все утверждения предыдущего следствия остаются в силе.*

Простейший вариант этого результата, отвечающий нулевой скобке на G и абелевой структуре на $\mathcal{N}$, был приведен выше в примере 2.5.

ГЛАВА III

СКОБКИ ПУАССОНА В $\mathbf{R}^{2n}$ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Классическая геометрия скобок Пуассона, которую мы изучали в гл. I, II является своего рода оттиском более сложной теории квантовых скобок. Эта последняя позволяет связать геометрию с некоммутативной алгеброй.

Наиболее просто такая связь прослеживается в алгебре Гейзенберга, т. е. в алгебре с образующими A, B и коммутативным соотношением

$$AB - BA = i\hbar \cdot I,$$

где I — единица, $\hbar$ — вещественный параметр. Рассмотрев функции от образующих A, B (например, полиномиальные функции) $\hat{f} = f(A, B)$ и вычислив их коммутатор, получим

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\, \widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2), \tag{*}$$

где фигурной скобкой обозначена скобка Пуассона в $\mathbf{R}^2$:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial B}\frac{\partial g}{\partial A} - \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial g}{\partial B},$$

а $O(\hbar^2)$ — остаток, малый второй степени по параметру $\hbar \to 0$.

Пренебрегая такими остатками, можно заменять коммутаторы скобками Пуассона, т. е. переходить от квантовой алгебры к классической геометрии. И наоборот, целому ряду геометрических объектов удается сопоставить их квантовые аналоги, а затем, оперируя уже на квантовом, алгебраическом уровне, извлекать нетривиальные геометрические и топологические следствия. Но обратный переход «классика» $\to$ «квантовая теория» требует понимания связей между скобкой Пуассона и коммутатором на более глубоком уровне, чем деформационное соотношение (*). Этому и посвящается данная глава в простейшей ситуации евклидова фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$.

§ 1. Лагранжевы подмногообразия как фронты волновых пакетов

Центральные темы параграфа:

— определение квантовой плотности и формула (1.5);

— определение волнового пакета, его классической плотности и субплотности (п. 1.2);

— вычисление фронта суммы гауссовых пакетов (пример 1.3);
— теорема 1.1 о лагранжевости фронта;
— процедура локализации волновых пакетов (п. 1.5).

1.1. Квантовая плотность пакета. Пусть $\mathbf{R}^n$ — конфигурационное пространство механической системы. Каждой функции $\psi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ сопоставим ортогональный проектор P_ψ на одномерное подпространство в $L^2(\mathbf{R}^n)$, порожденное элементом ψ. Тогда, если семейство функций $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{\mathrm{H}}\psi \tag{1.1}$$

с некоторым самосопряженным оператором (гамильтонианом) $\hat{\mathrm{H}}$, то семейство проекторов P_ψ удовлетворяет уравнению Гейзенберга

$$i\hbar \frac{d}{dt} P_\psi = [\hat{\mathrm{H}}, P_\psi]. \tag{1.2}$$

Представим теперь гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$ в виде функции от образующих x, $-i\hbar\partial/\partial x$, где $x \in \mathbf{R}^n$, т. е. запишем его в виде псевдодифференциального оператора (пример 1.8 приложения 1) с некоторым символом H:

$$\hat{\mathrm{H}} \equiv H\left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar\overset{\omega}{\partial}/\partial x\right).$$

Аналогично запишем и проектор P_ψ:

$$\frac{\|\psi\|^2}{(2\pi\hbar)^n} P_\psi = \hat{\rho}_\psi. \tag{1.3}$$

Символ $\rho_\psi = \rho_\psi(x, p)$ назовем *квантовой плотностью* Блохинцева — Вигнера, отвечающей функции $\psi(x)$. Скалярный нормировочный множитель $(2\pi\hbar)^{-n}\|\psi\|^2$ в (1.3) введен для упрощения дальнейших формул.

В силу формулы (2.16) приложения 2 и в силу (1.2) фазовая плотность ρ_ψ, отвечающая решению ψ уравнения Шрёдингера (1.1), сама удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\psi = \frac{1}{i\hbar}\left[H\left(\overset{2}{z} + \frac{i\hbar}{2} J \overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right) - H\left(\overset{2}{z} - \frac{i\hbar}{2} J \overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)\right]\rho_\psi,$$

где $z \equiv (x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$. Разложение правой части по степеням $\hbar$ дает

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial z}, J\frac{\partial\rho_\psi}{\partial z}\right\rangle + O(\hbar^2).$$

В пределе $\hbar \to 0$ отсюда получаем классическое уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0, \quad F = \lim_{\hbar\to 0}\rho_\psi, \tag{1.4}$$

где $\{\ldots, \ldots\}$ — скобка Пуассона в пространстве $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \oplus \mathbf{R}^n_p$ относительно симплектической структуры $dp \wedge dx = \frac{1}{2} J\, dz \wedge dz$.

Это самый короткий и простой вывод уравнений классической механики из уравнений квантовой механики. Он демонстрирует фундаментальность понятия квантовой плотности. В этом параграфе мы займемся подробным анализом ее свойств.

Лемма 1.1. *Квантовая плотность задает линейный вещественный функционал на пространстве символов*:

$$\langle \rho_\psi, f\rangle = \langle \hat{f}\psi, \psi\rangle \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n}). \tag{1.5}$$

Явное выражение квантовой плотности через волновую функцию следующее:

$$\rho_\psi(x, p) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n}\int e^{\frac{2i}{\hbar}qp}\,\psi(x+q)\,\overline{\psi}(x-q)\,dq. \tag{1.6}$$

Справедливы тождества

$$\int \rho_\psi(x, p)\,dp = |\psi(x)|^2, \quad \int \rho_\psi(z)\,dz = \|\psi\|^2,$$
$$(\rho_\psi, \rho_\chi) = (2\pi\hbar)^{-n}\,|(\psi, \chi)|^2. \tag{1.7}$$

Круглые скобки $(\ldots, \ldots)$ в этой лемме и всюду ниже обозначают L^2-скалярное произведение; норма $\|\ldots\|$ — это всегда L^2-норма.

Доказательство непосредственно следует из определения (1.3).

Отметим, что если всюду в предыдущих формулах, а именно в (1.3), (1.5) использовать не вейлевские функции от операторов x, $-i\hbar\partial/\partial x$, а упорядоченные, т. е. если определить квантовую плотность $\rho'_\psi(x, p)$ так [98]:

$$\frac{\|\psi\|^2}{(2\pi\hbar)^n}P_\psi = \rho'_\psi\left(\overset{2}{x}, \ -i\hbar\overset{1}{\partial/\partial x}\right),$$
$$\langle \rho'_\psi, f\rangle = \left(f\left(\overset{2}{x}, \ -i\hbar\overset{1}{\partial/\partial x}\right)\psi, \psi\right),$$

то вместо (1.6) будем иметь

$$\rho'_\psi(x, p) = (2\pi\hbar)^{-n}\overline{\psi}(x)\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(q-x)p\right\}\psi(q)\,dq.$$

Тождества (1.7) сохраняются.

Отметим также, что формулы (1.4), (1.5) позволяют вычислить предел при $\hbar\to 0$ средних значений любых операторов на решении ψ уравнения Шрёдингера (1.1) [98]:

$$\lim_{\hbar\to 0}(\hat{f}\psi, \psi) = \langle F, f\rangle = \langle \gamma_H^{-t}{}^*F_0, f\rangle = \langle F_0, \gamma_H^{t*}f\rangle, \tag{1.8}$$

где $F_0 = \lim\limits_{\hbar\to 0}\rho_\psi\Big|_{t=0}$, а через γ_H^t обозначен *гамильтонов поток* в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, отвечающий функции Гамильтона H.

Пример 1.1. *Уравнения типа Хартри.* Имеется замечательный класс нелинейных уравнений математической физики, «волновые» свойства которых очень близки к свойствам линейных уравнений. Нелинейность в них входит лишь через средние вида (1.5). Например

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = H_0\left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar\overset{\omega}{\partial}/\partial x\right)\psi(x, t) +$$
$$+\left[\int \overline{\psi}(y, t)\, Q\left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar\overset{\omega}{\partial}/\partial x;\ \overset{\omega}{y}, -i\hbar\overset{\omega}{\partial}/\partial y\right)\psi(y, t)\,dy\right]\psi(x, t). \quad (1.9)$$

Функция Q на удвоенном фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$ задает «самодействие» или «самосогласованное поле». К такому типу уравнений относится известное *уравнение Хартри* для частицы в самосогласованном поле:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\hbar^2\Delta\psi \pm \left(\int \frac{|\psi(y, t)|^2}{|x-y|}\,dy\right)\psi.$$

Равенство (1.8) показывает, что в классическом пределе $\hbar\to 0$ гамильтониан уравнения (1.9) имеет вид

$$H^F(z) = H_0(z) + \int Q(z, z')\,F(z', t)\,dz',$$

а уравнение Лиувилля (1.4) для предельной плотности F превращается в *уравнение Власова*:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H^F, F\} = 0. \quad (1.10)$$

Его квантовая версия записывается с помощью фазовой плотности [98]:

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[H^{\rho_\psi}\left(\overset{2}{z} + \frac{i\hbar}{2}J\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right) - H^{\rho_\psi}\left(\overset{2}{z} - \frac{i\hbar}{2}J\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)\right]\rho_\psi.$$

В заключение этого пункта приведем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2. *Квантовая плотность* ρ_ψ *неотрицательна по* $\operatorname{mod} O(\hbar^2)$; *точнее,*

$$\operatorname{Int}\left\{z \,\middle|\, \frac{1}{\hbar^2}\rho_\psi(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad \hbar\to 0\right\} = \varnothing, \quad (1.11)$$

где через Int *обозначена внутренность множества. Если мера множества, на котором* ρ_ψ *отрицательна, достаточно быстро стремится к нулю:*

$$\operatorname{mes}\{z \mid \rho_\psi(z) < 0\} = O(\hbar^n)$$

и если $\|\psi\| = 1$, *то* ρ_ψ *равномерно ограничена при* $\hbar\to 0$ *в* $L^1(\mathbf{R}^{2n})$.

Доказательство. Начнем со второго утверждения. В силу (1.7)

$$\|\psi\|^2 = \int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} \rho_\psi(z)\,dz = \int\limits_{M_+} \rho_\psi\,dz + \int\limits_{M_-} \rho_\psi\,dz = \int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} |\rho_\psi|\,dz - 2\int\limits_{M_-} |\rho_\psi|\,dz,$$

где $M_\pm = \left\{z \,|\, \rho_\psi(z) \gtrless 0\right\}$. Таким образом,

$$\|\rho_\psi\|_{L^1} - \|\psi\|^2 = 2\int\limits_{M_-} |\rho_\psi|\,dz \leqslant 2(\operatorname{mes} M_-)^{1/2}\left(\int\limits_{M_-} |\rho_\psi|^2\,dz\right)^{1/2}.$$

Используя последнюю формулу (1.7), получаем

$$\|\rho_\psi\|_{L^1} - \|\psi\|^2 \leqslant 2\,(\operatorname{mes} M_-)^{1/2}\,(2\pi\hbar)^{-n/2}\,\|\psi\|^2$$

или

$$\|\rho_\psi\|_{L^1} \leqslant \|\psi\|^2\left(1 + 2\left(\frac{\operatorname{mes} M_-}{(2\pi\hbar)^n}\right)^{1/2}\right).$$

Если $\operatorname{mes} M_- = O(\hbar^n)$ и $\|\psi\| = 1$, то правая часть этого неравенства ограничена при $\hbar \to 0$.

Докажем теперь первое утверждение леммы. Пусть внутренность (1.11) не пуста, т. е. содержит некоторую область $\mathscr{V}^0$. В частности, $\rho_\psi < 0$ в $\mathscr{V}^0$. Пусть область $\mathscr{U}$ содержится в $\mathscr{V}^0$ вместе с замыканием и вещественная функция $e \in C_0^\infty(\mathscr{V}^0)$ тождественно равна единице на $\mathscr{U}$. Тогда в силу формул композиции (2.23) гл. I

$$\widehat{e}^2 = \widehat{e^2} + O(\hbar^2), \quad \widehat{f} = \widehat{e}\,\widehat{f}\,\widehat{e} + O(\hbar^2) \tag{1.12}$$

для любого символа $f \in C_0^\infty(\mathscr{U})$. Через $O(\hbar^2)$ здесь обозначены операторы вида (см. с. 269):

$$O(\hbar^2) = \hbar^2 \widehat{r}_\hbar, \quad \{r_\hbar \mid \hbar \in (0,\ 1]\} \text{ ограничено в } S^\infty(\mathbf{R}^{2n}) \tag{1.13}$$

Из первого равенства из (1.12) получаем

$$0 > \langle \rho_\psi,\ e^2 \rangle = (\widehat{e^2}\psi,\ \psi) = \|\widehat{e}\psi\|^2 + O(\hbar^2),$$

т. е. $\|\widehat{e}\psi\| = O(\hbar)$. Из второго равенства из (1.12) тогда следует

$$\langle \rho_\psi,\ f \rangle = (\widehat{f}\psi,\ \psi) = (\widehat{f}\,\widehat{e}\psi,\ \widehat{e}\psi) + O(\hbar^2) = O(\hbar^2).$$

Поэтому окрестность $\mathscr{U}$ не может принадлежать внутренности (1.11), что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

1.2. Гауссовы и осциллирующие пакеты. Через $S = S(\mathbf{R}^n)$ обозначим пространство Шварца гладких быстроубывающих функций на $\mathbf{R}^n$, а через CS — пространство отображений ψ: $\hbar \to \psi^\hbar$ из множества параметров $\hbar \in (0,\ 1]$ в множество S, для которых конечны все нормы

$$\sup_\hbar \|(1 + |x|^2 - \hbar^2\Delta)^k\,\psi^\hbar(x)\|, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.14}$$

Элементы из CS будем называть *волновыми пакетами*. Сходимость в пространстве CS определим набором норм (1.14) (см. приложение 1, п. 1.1).

Для каждого волнового пакета $\psi = \{\psi^\hbar\}$ определим квантовую плотность ρ_ψ формулой (1.6), подставляя в нее $\psi^\hbar$ вместо ψ. Таким образом, параметр $\hbar$ входит в ρ_ψ двояко: во-первых, через зависимость ψ от $\hbar$, а во-вторых, через зависимость интеграла (1.6) от $\hbar$.

Предел

$$F_\psi = \lim_{\hbar \to 0} \rho_\psi,$$

если он существует в слабом смысле, т. е. в пространстве $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})'$, назовем *классической плотностью* волнового пакета ψ, а предел

$$G_\psi = \lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{\hbar}(\rho_\psi - F_\psi)$$

назовем *субплотностью*. Носитель $\operatorname{supp} F_\psi$ назовем *фронтом* (осцилляций) пакета и обозначим $\operatorname{osc}(\psi)$.

Имеется тесная связь между понятиями «фронт осцилляций» (его называют также *частотным множеством* [32]) и «волновой фронт обобщенной функции» [144].

Пример 1.2. *Гауссов пакет*. Каждому вектору $u=(q, \xi)\in\mathbf{R}^{2n}$ сопоставим функцию

$$\psi_u(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}} \exp\left\{-\frac{|x-q|^2}{2\hbar} + \frac{i}{\hbar}\xi x\right\}, \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{1.15}$$

Очевидно, что $\psi_u \in CS$. Из формулы (1.6) следует, что

$$\rho_{\psi_u} = \frac{1}{(\pi\hbar)^n}\exp\left\{-\frac{|z-u|^2}{\hbar}\right\}.$$

Таким образом, классическая плотность и субплотность гауссова пакета (1.15) имеют вид

$$F_{\psi_u}(z) = \delta(z-u), \quad G_{\psi_u} = \frac{1}{4}\Delta F_{\psi_u}$$

(Δ — лапласиан в $\mathbf{R}^{2n}$). Фронт такого пакета состоит из единственной точки $\operatorname{osc}(\psi_u) = \{u\}$.

Пример 1.3. *Сумма гауссовых пакетов*. Пусть вектор u пробегает некоторое множество $M\subset\mathbf{R}^{2n}$ и m некоторая комплексная функция на M. Рассмотрим сумму

$$\psi = \sum_{u\in M} m(u)\psi_u. \tag{1.16}$$

Если множество M конечно, то фронт волнового пакета (1.16) совпадает с M, а классическая плотность F_ψ совпадает с суммой плотностей гауссовых пакетов:

$$F_\psi(z) = \sum_{u\in M} m(u)\,\delta(z-u). \tag{1.17}$$

Это следует из оценки

$$|(\hat{f}\psi_u, \psi_{u'})| = O\left(\exp\left\{-\frac{|u-u'|^2}{4\hbar}\right\}\right). \tag{1.18}$$

Если множество M счетно и ограничено, а амплитуда m удовлетворяет условиям

$$\sum_{u\in M}|m(u)| < \infty, \quad \sum_{u\in M}|m(u)|^2 < \infty,$$

$$|m(u)\cdot m(v)| \leqslant \mu(u)\,\mu(v)\,|u-v| \quad \text{при} \quad u\neq v, \tag{1.19}$$

причем функция μ такова, что

$$\sum_{u \in M} |\mu(u)| < \infty, \tag{1.20}$$

то из той же оценки (1.18) получаем $\rho_\psi = \sum_{u \in M} |m(u)|^2 \rho_{\psi_u} + O(\sqrt{\hbar})$, и, следовательно, классическая плотность пакета (1.16) в этом случае также задается формулой (1.17). Фронт пакета совпадает с замыканием множества M:

$$\operatorname{osc}(\psi) = \overline{M} \tag{1.21}$$

(разумеется, если амплитуда m почти всюду на M отлична от нуля).

Построить функцию m, удовлетворяющую всем перечисленным условиям, можно, например, так. Отождествим точки M с рациональными числами вида p/q, где $1 \leqslant p \leqslant q$. Положим $m(p/q) = 1/q^3 p$. Тогда оценки (1.19), (1.20) выполнены, причем $\mu(p/q) = 1/q^2 p$.

Основное неравенство в (1.19) означает, что амплитуда m быстро осциллирует на M. Эти осцилляции и делают фронт столь массивным: формула (1.21) показывает, что *фронт волнового пакета может быть любым замкнутым подмножеством в* $\mathbf{R}^{2n}$ [55].

Отметим, что гауссову экспоненту в пакете (1.15) и в сумме (1.16) можно, конечно, заменить любой быстро убывающей функцией:

$$\psi_u(x) \sim g\left(\frac{|x-q|^2}{2\hbar}\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} x\xi\right\}, \quad g \in S(\mathbf{R}). \tag{1.22}$$

Все утверждения примеров 1.2, 1.3 при этом останутся в силе. Посмотрим теперь, что произойдет, если мы изменим не убывающую, а осциллирующую часть этих пакетов.

Пример 1.4. *Осциллирующие пакеты.* Пусть $E(\tau, x)$ — гладкая 2π-периодическая по τ и финитная по $x \in \mathbf{R}^n$ функция. Положим

$$\psi(x) = E(S(x)/\hbar, x), \tag{1.23}$$

где $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{Im} S = 0$. Тогда, если $\nabla S \neq 0$ на носителе $\operatorname{supp}_x E$, то для любой $f \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ из формулы коммутации с экспонентой (1.19) приложения 1 получаем

$$(\hat{f}\psi, \psi) = \sum_k \left(f\left(\overset{\omega}{x}, k\nabla \overset{\omega}{S} - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) E_k, E_k\right) + O(h^\infty) =$$

$$= \sum_k \int f(x, k\nabla S)\, |E_k(x)|^2\, dx +$$

$$+ (-i\hbar) \sum_k \int \overline{E}_k(x) \left[\frac{\partial f}{\partial p}(x, k\nabla S)\frac{\partial}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}(x, k\nabla S)\right)\right] E_k(x)\, dx + O(\hbar^2),$$

где $E_k(x)$ — коэффициенты Фурье функции $E(\tau, x)$. Отсюда следует, что классическая плотность и субплотность пакета (1.23) имеют вид

$$F_\psi(x, p) = \sum_k |E_k(x)|^2 \delta(p - k\nabla S), \tag{1.24}$$

$$G_\psi(x, p) = \sum_k \operatorname{Im}\left(E_k \frac{\partial \overline{E}_k}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial p} [\delta(p - k\nabla S(x))]. \tag{1.25}$$

Таким образом, фронт представляет собой «веер» лагранжевых подмногообразий (рис. 6):

$$\operatorname{osc}(\psi) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{(x, p) \mid p = k\nabla S(x), \quad x \in \operatorname{supp} E_k\}.$$

Если условие $\nabla S \neq 0$ не выполнено, то пакет (1.23), вообще говоря (за исключением простейших ситуаций), не имеет субплотности. При этом классическая плотность F_ψ и фронт сохраняют свой вид, если хоть какая-то производная функции S отлична от нуля в точках, где $\nabla S = 0$.

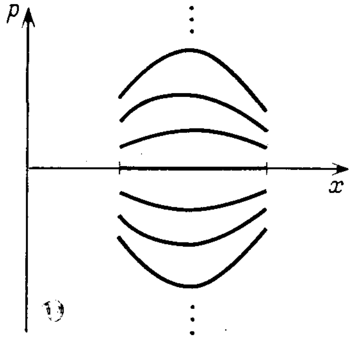


Рис. 6

Конечно, для пакета, состоящего лишь из одной гармоники $\psi = e^{\frac{i}{h}S} E_1$, все эти ограничения излишни.

1.3. Теорема о лагранжевости фронта. Волновые пакеты, у которых фронт лагранжев, т. е. локально задается уравнениями вида $p = \nabla S(x)$ или $x = \nabla \tilde{S}(p)$ и т. п., можно описать с помощью аналитических требований на их классическую плотность и субплотность.

Эти требования такие:

(А) классическая плотность F_ψ волнового пакета ψ существует и является гладкой мерой (т. е. δ-функцией на гладком подмногообразии $\Lambda \subset \mathbf{R}^{2n}$);

(В) субплотность G_ψ существует и аннулирует любую функцию, имеющую нуль второго порядка на Λ.

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (А), (В) *фронт* $\Lambda = \operatorname{osc}(\psi)$ *лагранжев.*

В несколько измененной форме эта теорема была приведена в [55]. Она относится к «чистым состояниям»; обобщение на случай смешанных состояний имеется в [64]. Перед доказательством сделаем одно замечание по поводу условий (А), (В).

Авторам не известны примеры, в которых классическая плотность F_ψ существует, но не является мерой. Во всяком случае, если ρ_ψ ограничена по $\hbar$ в норме $L^1(\mathbf{R}^{2n})$ (см. лемму 1.2), то плотность F_ψ — обязательно мера ограниченной вариации. В то же время условие (В) является существенным требованием; как показывает уже простейший пример гауссова пакета, при нарушении условия (В) теорема 1.1 не верна.

Доказательству теоремы предпошлем лемму, имеющую и самостоятельный интерес.

Через $H_k = H_k(\mathbf{R}^{2n})$ мы обозначаем пространства шкалы Соболева на $\mathbf{R}^{2n}$, а через H_k^l—пространства смешанной шкалы (пример 1.1 приложения 1), так что $H_k^0 \equiv H_k$.

Лемма 1.3. *Пусть $\psi \in CS$. Имеет место равномерная по $\hbar$ оценка*

$$\|\rho_\psi\|_{H_{-n-\varepsilon}} \leqslant c_\varepsilon \cdot \|\psi\|^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.26}$$

Кроме того, для любых k, $l \geqslant 0$ существует константа $c_{k,l} = c_{k,l}(\psi)$, не зависящая от $\hbar$ и такая, что

$$\|\rho_\psi\|_{H_k^l} \leqslant c_{k,l}\hbar^{-k-n/2}, \tag{1.27}$$

$$\|\rho_\psi\|_{H_{-k}^{-l}} \leqslant c_{k,l}\hbar^{k-n/2}. \tag{1.28}$$

В частности, если существует плотность F_ψ, то она не может принадлежать пространству $H_{-n/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^{2n})$ и в то же время обязательно принадлежит пространству $H_{-n-\varepsilon}(\mathbf{R}^{2n})$ при любом $\varepsilon > 0$.

Следствие 1.1. *При выполнении условия* (A) *фронт* Λ *не может иметь размерность более половины размерности фазового пространства.*

Доказательство леммы 1.3. Оценка (1.26) прямо следует из формулы (1.5). Далее для любого мультииндекса $m = (m_1, \ldots, m_{2n})$ из (1.5) следует

$$\left\langle \left(i\hbar J \frac{\partial}{\partial z}\right)^m \rho_\psi(z),\ f(z)\right\rangle = \left\langle \rho_\psi,\ \left(i\hbar J\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f\right\rangle =$$
$$= ([\underbrace{\hat z_1, \ldots, [\hat z_1}_{m_1\ldots}, \ldots, [\underbrace{\hat z_{2n}, \ldots, [\hat z_{2n}}_{m_{2n}}, \hat f]\ldots]\ldots]\ldots]\psi, \psi),$$

где $\hat z_j = x_j$ и $\hat z_{n+j} = -i\hbar\partial/\partial x_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Поскольку все нормы $\|\hat z_j\psi\|$ ограничены при $\hbar \to 0$, мы получаем

$$\left|\left\langle\left(\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \rho_\psi, f\right\rangle\right| \leqslant c_m\|\hat f\| \leqslant c_m \operatorname{tr}(\hat f^* \hat f)^{1/2} = \frac{c_m}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\|f\|.$$

Итак,

$$\|\rho_\psi\|_{H_k} \leqslant c_k\hbar^{-k-n/2}, \tag{1.29}$$

где $k \geqslant 0$—целое число.

Интерполяционное неравенство для шкалы Соболева (см. [83])

$$\|\rho_\psi\|_{H_{k+\delta}} \leqslant (\|\rho_\psi\|_{H_k})^{1-\delta}(\|\rho_\psi\|_{H_{k+1}})^\delta, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1,$$

позволяет распространить оценку (1.29) на любые нецелые $k \geqslant 0$

Нетрудно аналогично получить и оценку (1.27). Кроме того, тождество (1.7) дает

$$(2\pi\hbar)^{-n/2}\|\psi\|^2=\|\rho_\psi\|\leqslant\|\rho_\psi\|^{1/2}_{H^{-l}_{-k}}\|\rho_\psi\|^{1/2}_{H^l_k}.$$

Отсюда и из (1.27) следует (1.28). Лемма 1.3 доказана.

Пусть теперь выполнено условие (A) и $\Lambda=\operatorname{osc}(\psi)$. Тогда, если $\dim\Lambda\geqslant n+1$, то δ-функция, сосредоточенная на Λ (т. е. мера F_ψ с носителем Λ), принадлежит пространству $H_{-\operatorname{codim}(\Lambda)/2-\varepsilon}\subset H_{-n/2+1/2-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, что противоречит лемме 1.3. Это доказывает утверждение следствия 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Из формул (1.36) приложения 1 имеем

$$\langle\rho_\psi,\ \varphi^2\{f,\ g\}\rangle=(\widehat{\varphi^2\{f,\ g\}}\,\psi,\ \psi)=$$
$$=\frac{i}{\hbar}(\hat\varphi\,[\hat f,\ \hat g]\,\hat\varphi\psi,\ \psi)+(O(\hbar^2)\,\psi,\ \psi),\qquad(1.30)$$

где $\varphi,\ f,\ g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, а через $O(\hbar^2)$ обозначен оператор вида (1.13). Пусть функции $\varphi,\ f,\ g$ вещественны. Тогда

$$(\hat\varphi\hat f\hat g\hat\varphi\psi,\ \psi)=(\hat g\hat\varphi\psi,\ \hat f\hat\varphi\psi)\leqslant$$
$$\leqslant(\|\hat g\hat\varphi\psi\|\cdot\|\hat f\hat\varphi\psi\|)^{1/2}=(\hat\varphi\hat g^2\hat\varphi\psi,\ \psi)^{1/2}(\hat\varphi\hat f^2\hat\varphi\psi,\ \psi)^{1/2}=$$
$$=((\widehat{\varphi^2g^2}+O(\hbar^2))\,\psi,\ \psi)^{1/2}((\widehat{\varphi^2f^2}+O(\hbar^2))\,\psi,\ \psi)^{1/2}=$$
$$=(\langle\rho_\psi,\ \varphi^2g^2\rangle+O(\hbar^2))^{1/2}(\langle\rho_\psi,\ \varphi^2f^2\rangle+O(\hbar^2))^{1/2}.$$

Предположим, что f и g равны нулю на $\Lambda=\operatorname{supp}F_\psi$. Тогда функции f^2 и g^2 имеют нуль второго порядка на Λ, и в силу условия (B) получаем $\langle G_\psi,\ \varphi^2f^2\rangle=\langle G_\psi,\ \varphi^2g^2\rangle=0$.

Приведенная выше цепочка равенств дает $(\hat\varphi\hat f\hat g\hat\varphi\psi,\ \psi)=O(\hbar^2)$. Аналогично $(\hat\varphi\hat g\hat f\hat\varphi\psi,\ \psi)=O(\hbar^2)$. Следовательно, $(\hat\varphi\,[\hat f,\ \hat g]\,\hat\varphi,\ \psi,\ \psi)=O(\hbar^2)$. Из (1.30) тогда получаем $\langle F_\psi,\ \varphi^2\{f,\ g\}\rangle=0$ для всех $\varphi\in C_0^\infty$. Поэтому $\{f,\ g\}=0$ на носителе Λ меры F_ψ.

Итак, для любых двух функций, равных нулю на Λ, их скобка Пуассона также равна нулю на Λ. Кроме того, $\dim\Lambda\leqslant n$. Это означает (см. лемму 2.1 гл. I), что подмногообразие Λ лагранжево в $\mathbf{R}^{2n}$. Теорема доказана.

1.4. Функториальные свойства плотности. Преобразования волновых пакетов порождают преобразования их плотностей. Очевидные простейшие операции — умножение на константу, комплексное сопряжение и преобразование Фурье:

$$\rho_{\lambda\psi}=|\lambda|^2\rho_\psi,\quad\rho_{\bar\psi}(x,\ p)=\bar\rho_\psi(x,\ -p),\quad\rho_\psi(z)=\rho_{\tilde\psi}(Jz).\qquad(1.31)$$

Здесь

$$\tilde\psi(p)=(2\pi\hbar)^{-n/2}\int\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}xp\right\}\psi(x)\,dx.$$

Более интересно понять, как ведут себя квантовая и классическая плотности при сложении, попарном умножении и действии псевдодифференциальных операторов на волновые пакеты.

Пусть $\psi \in CS$, $k>0$. Введем подмножества $\mathrm{osc}^{(k)}(\psi) \subset \mathbf{R}^{2n}$, на дополнении к которым функция ρ_ψ имеет величину $O(\hbar^{2k})$, т. е.

$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{supp}\, \rho_\psi \,(\mathrm{mod}\, O(\hbar^{2k})).$$

Тогда

$$\mathrm{osc}(\psi) \subset \mathrm{osc}^{(1)}(\psi) \subset \mathrm{osc}^{(2)}(\psi) \subset \ldots \subset \mathrm{osc}^{\infty}(\psi).$$

Лемма 1.4. (a) *Если* $\mathrm{supp}\, f \cap \mathrm{osc}^{(k)}(\psi) \neq 0$, *то* $\|\hat{f}\psi\| = O(\hbar^k)$.

(b) *Справедливо равенство*

$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2) \cup (\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1) \cap \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2)) = \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1) \cup \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2). \quad (1.32)$$

Если фронт $\mathrm{osc}^{(k)}$ *волновых пакетов* ψ_1, ψ_2, $\psi_1+\psi_2$ *является гладким подмногообразием, причем фронты пакетов* ψ_1 *и* ψ_2 *пересекаются по подмногообразию меньшей размерности, то*

$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2) = \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1) \cup \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2).$$

(c) *Если фронты* $\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1)$ *и* $\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2)$ *не пересекаются, то*

$$\rho_{\psi_1+\psi_2} = \rho_{\psi_1} + \rho_{\psi_2} + O(\hbar^k).$$

(d) *Если существуют классические плотности* F_{ψ_1}, F_{ψ_2} *и* $F_{\psi_1+\psi_2}$, *то формула* (1.32) *имеет место с заменой* $\mathrm{osc}^{(k)}$ *на* osc.

(e) *Если плотности* F_{ψ_1} *и* F_{ψ_2} *существуют и* $\mathrm{osc}(\psi_1) \cap \mathrm{osc}(\psi_2) = \varnothing$, *то существует плотность*

$$F_{\psi_1+\psi_2} = F_{\psi_1} + F_{\psi_2}.$$

Доказательство. (a) Из формулы (1.36) приложения 1 следует

$$\|\hat{f}\psi\|^2 = (\hat{\bar{f}}\hat{f}\psi, \psi) = (\hat{f}_k\psi, \psi) + O((\hbar^{2k})\psi, \psi),$$

где символ f_k — это полином по $\hbar$, имеющий тот же носитель, что и f. Поэтому $\mathrm{supp}\, f_k \cap \mathrm{osc}^{(k)}(\psi) = \varnothing$, т. е.

$$(\hat{f}_k\psi, \psi) = O(\hbar^{2k}).$$

(b) Если носитель функции $e \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ не пересекается с $\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1)$ и $\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2)$ и, кроме того, $\mathrm{supp}\, f \subset \mathrm{supp}\, e$, $e|_{\mathrm{supp}\, f} \equiv 1$, то

$$|(\hat{f}(\psi_1+\psi_2), (\psi_1+\psi_2))| \leqslant |\langle \rho_{\psi_1} + \rho_{\psi_2}, f\rangle| +$$
$$+ \|\hat{f}\psi_1\| \cdot \|\hat{e}\psi_2\| + \|\hat{e}\psi_1\| \cdot \|\hat{f}\psi_2\| + O(\hbar^\infty) = O(\hbar^{2k})$$

в силу п. (a). Поэтому

$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2) \subset \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1) \cup \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2). \quad (1.33)$$

Далее имеем

$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1) \equiv \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2-\psi_2) \subset \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2) \cup \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2),$$
$$\mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2) \equiv \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_2+\psi_1-\psi_1) \subset \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2) \cup \mathrm{osc}^{(k)}(\psi_1).$$

Отсюда следует, что части множеств $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1)$ и $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_2)$, лежащие вне $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2)$, совпадают друг с другом. Из этого и из (1.33) следует (1.32).

Обозначим $M=[\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1)\cap\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_2)]\setminus\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2)$. Тогда в силу (1.32)

$$\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1+\psi_2)\cup M=\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1)\cup\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_2).$$

С другой стороны, размерность M строго меньше размерности подмногообразий $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1)$ и $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_2)$. Поэтому $M=\varnothing$.

(c) Пусть $\rho=0$ в окрестности $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1)$ и $\rho=1$ в окрестности $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_2)$. Тогда

$$(\hat{f}\psi_1,\ \psi_2)=(\hat{\rho}\hat{f}\,\widehat{(1-\rho)}\,\psi_1,\ \psi_2)+O(\hbar^k).$$

В силу формулы (1.36) приложения 1 композиция $\hat{\rho}\hat{f}\,\widehat{(1-\rho)}$ может быть представлена в виде $\hat{g}+O(\hbar^k)$, где носитель символа g совпадает с пересечением носителей символов ρ, f, $1-\rho$. Поскольку $(\hat{g}\psi_1,\ \psi_2)=O(\hbar^k)$, то и $(\hat{f}\psi_1,\ \psi_2)=O(\hbar^k)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle\rho_{\psi_1+\psi_2},\ f\rangle\equiv[(\hat{f}\psi_1,\ \psi_1)+(\hat{f}\psi_2,\ \psi_2)]+(\hat{f}\psi_1,\ \psi_2)+(\hat{f}\psi_2,\ \psi_1)=\\=\langle\rho_{\psi_1}+\rho_{\psi_2},\ f\rangle+O(\hbar^k).\end{aligned}$$

Доказательство пп. (d) и (e) повторяет доказательство пп. (b) и (c). Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Справедливы соотношения*

$$\begin{gathered}\rho_{\psi_1\psi_2}(x,\ p)=\int\rho_{\psi_1}(x,\ p-\eta)\,\rho_{\psi_2}(x,\ \eta)\,d\eta,\\ \operatorname{osc}^{(k)}(\psi_1\psi_2)\subset\{(x,\ p_1+p_2)\,|\,(x,\ p_j)\in\operatorname{osc}^{(k)}(\psi_j),\quad j=1,\ 2\}.\end{gathered}\tag{1.34}$$

Доказательство прямо следует из тождества (1.6).

Рассмотрим теперь линейные отображения волновых пакетов:

$$\mathrm{B}\colon\ CS\to CS.$$

Ядро такого отображения (как интегрального оператора), умноженное на $(2\pi\hbar)^{n/2}$, будем обозначать буквой $\mathcal{B}=\mathcal{B}(x,\ x')$, где $x,\ x'\in\mathbf{R}^n$. Если B можно представить в виде вейлевского псевдодифференциального оператора, то его символ обозначим $b=\operatorname{Smb}B$ — это функция на $T^*\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{2n}$. Таким образом,

$$(\mathrm{B}\psi)(x)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\mathcal{B}(x,\ x')\,\psi(x')\,dx'=\hat{b}\psi(x).$$

Квантовая плотность ядра $\rho_{\mathcal{B}}$ — это функция на фазовом пространстве $T^*\mathbf{R}^n\times(T^*\mathbf{R}^n)^{(-)}=\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$ с симплектической формой $dp\wedge dx-dp'\wedge dx'$, а квантовая плотность символа ρ_b — это функция на $T^*(T^*\mathbf{R}^n)=T^*(\mathbf{R}^{2n})$ с симплектической формой $d\xi\wedge dz$, где $\xi\in T_z^*(\mathbf{R}^{2n})$, $z\equiv(x,\ p)$.

Лемма 1.6. *Справедливы тождества*

$$\langle \rho_{\mathscr{B}},\ f\otimes g\rangle=(2\pi\hbar)^n\operatorname{tr}[B^*\hat{f}B\hat{g}],$$

$$\rho_{\mathrm{B}(\psi)}=\rho_{\mathscr{B}}(\rho_\psi)\quad (\text{или}\quad \rho_{\mathrm{B}(\psi)}(z)=\int\rho_{\mathscr{B}}(z,\ z')\,\rho_\psi(z')\,dz'),\tag{1.35}$$

$$\rho_{\mathscr{B}}=(l\times r)_*\,\rho_b,$$

где l *и* r *отображения из* $T^*(\mathbf{R}^{2n})$ *в* $\mathbf{R}^{2n}$, *заданные формулами*

$$l(z,\ \xi)=z-\frac{1}{2}J\xi,\quad r(z,\ \xi)=z+\frac{1}{2}J\xi.$$

Доказательство. По определению

$$\langle\rho_{\mathscr{B}},\ f\otimes g\rangle=$$
$$=\iint\overline{\mathscr{B}(x,\ x')}\,f\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\frac{\overset{\omega}{\partial}}{\partial x}\right)g\left(\overset{\omega}{x'},\ i\hbar\frac{\overset{\omega}{\partial}}{\partial x'}\right)\mathscr{B}(x,\ x')\,dx\,dx'$$

(знак у производной $\partial/\partial x'$ выбран в соответствии со знаком второго слагаемого симплектической формы на $\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$). Правая часть этого равенства совпадает с $(2\pi\hbar)^n\operatorname{tr}[\mathrm{B}^*\hat{f}B\hat{g}]$ по определению следа tr. Таким образом, получается первое тождество (1.35). Если взять в нем $g=\rho_\psi$, то получим

$$\langle\rho_{\mathscr{B}}(\rho_\psi),\ f\rangle\equiv\langle\rho_{\mathscr{B}},\ f\otimes\rho_\psi\rangle=(2\pi\hbar)^n\operatorname{tr}[\mathrm{B}^*\hat{f}\mathrm{B}\hat{\rho_\psi}].$$

В силу (1.3) последнее число равно

$$\|\psi\|^2\operatorname{tr}[\mathrm{B}^*\hat{f}\mathrm{B}P_\psi]=(\mathrm{B}^*\hat{f}\mathrm{B}\psi,\ \psi)=\langle\rho_{\mathrm{B}(\psi)},\ f\rangle.$$

Таким образом, доказано второе тождество (1.35).

В силу формулы (1.36) приложения 1 $\hat{f}\mathrm{B}\hat{g}\equiv\hat{f}\,\hat{b}\,\hat{g}=\hat{b}_1$, где

$$b_1(z)=f\left(\overset{\omega}{z}+\frac{i\hbar}{2}J\frac{\overset{\omega}{\partial}}{\partial z}\right)g\left(\overset{\omega}{z}-\frac{i\hbar}{2}J\frac{\overset{\omega}{\partial}}{\partial z}\right)b(z)=$$
$$=((l\times r)^*f\otimes g)\left(\overset{\omega}{z},\ -i\hbar\frac{\overset{\omega}{\partial}}{\partial z}\right)b(z).$$

Поэтому из формулы (1.5) и первого тождества из (1.35) следует

$$\langle\rho_{\mathscr{B}},\ f\otimes g\rangle=(2\pi\hbar)^n\operatorname{tr}[\hat{b^*}\hat{b_1}]=(b_1,\ b)=(\widehat{(l\times r)^*f\otimes g}\,b,\ b)=$$
$$=\langle\rho_b,\ (l\times r)^*f\otimes g\rangle\equiv\langle(l\times r)_*\,\rho_b,\ f\otimes g\rangle.$$

Лемма доказана.

Следствие 1.2. *Если* $\mathscr{B}\in CS(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, *то* $b\in CS(\mathbf{R}^{2n})$ *и оператор* B: $CS\to CS$ *непрерывен.*

Следствие 1.3.

$$\operatorname{osc}^{(k)}(\mathrm{B}(\psi))\subset\{z\mid\exists z'\in\operatorname{osc}^{(k)}(\psi),\ (z,\ z')\in\operatorname{osc}^{(k)}(\mathscr{B})\}\tag{1.36}$$

или

$$\operatorname{osc}^{(k)}(\mathrm{B}(\psi))\subset\operatorname{osc}^{(k)}(\mathscr{B})(\operatorname{osc}^{(k)}(\psi)).$$

Последнюю формулу нужно понимать следующим образом. Фронт $M=\operatorname{osc}(\mathscr{B})$ — это подмножество в $\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$. Любое такое подмножество может рассматриваться как отображение, преобразующее подмножества $A\subset\mathbf{R}^{2n}$ по правилу

$$M(A)\overset{\text{def}}{=}\{z\in\mathbf{R}^{2n}\mid\exists z'\in A:\ (z,z')\in M\}.$$

Диагональ $M=\operatorname{diag}(\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n})$, согласно этому определению, является тождественным отображением.

Следствие 1.4.

$$\operatorname{osc}^{(k)}(\mathscr{B})=(l\times r)(\operatorname{osc}^{(k)}(b)). \tag{1.37}$$

Следствие 1.5.

$$\rho_{\hat{f}\psi}(z)=f\left(\overset{2}{z}+\frac{i\hbar}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)\bar{f}\left(\overset{2}{z}-\frac{i\hbar}{2}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)\rho_\psi(z),$$

$$\operatorname{osc}^{(k)}(\hat{f}\psi)\subset\operatorname{supp}f\cap\operatorname{osc}^{(k)}(\psi). \tag{1.38}$$

Следствие 1.6. *Если* $\hat{f}\psi=0$, *то* $\operatorname{osc}^{(k)}\psi\subset\{z\mid f(z)=0\}$ *и* $f\rho_\psi-\frac{i\hbar}{2}\{f,\rho_\psi\}+O(\hbar^2)=0$.

Разумеется, формулы лемм 1.5, 1.6 и следствий 1.3 — 1.6 верны для классических плотностей F_ψ (вместо квантовых ρ_ψ) и для фронтов $\operatorname{osc}(\cdot)$ (вместо $\operatorname{osc}^{(k)}(\cdot)$), если только соответствующие плотности существуют.

1.5. Локализация волновых пакетов. Пусть D область в $\mathbf{R}^{2n}$. Через $[D]^k$ обозначим множество волновых пакетов $\psi\in CS$ таких, что $\operatorname{osc}^{(k)}(\psi)\subset\bar{D}$. В силу (1.33) пространство $[D]^k$ линейное. Введем фактор-пространство

$$\mathbf{\Gamma}^k(D)=CS/[\mathbf{R}^{2n}\setminus\bar{D}]^k.$$

Таким образом, элементы $\mathbf{\Gamma}^k(D)$ — это классы эквивалентных в D волновых пакетов из CS, причем два пакета ψ_1 и ψ_2 эквивалентными считаются, если $\psi_1=\psi_2+\chi$ и $(\hat{f}\chi,\chi)=O(\hbar^{2k})$ для любого $f\in C_0^\infty(D)$.

Если пакеты эквивалентны в D, то они эквивалентны и в любой подобласти $D_1\subset D$. Поэтому имеется естественная проекция $\mathbf{\Gamma}^k(D)\to\mathbf{\Gamma}^k(D_1)$, которую мы будем обозначать знаком ограничения на подмножество:

$$\psi\in\mathbf{\Gamma}^k(D),\quad D_1\subset D\Rightarrow\psi|_{D_1}\in\mathbf{\Gamma}^k(D_1).$$

Если пакеты ψ_1, ψ_2 эквивалентны в D и $g\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, то в силу (1.38) пакеты $\hat{g}\psi_1$, $\hat{g}\psi_2$ эквивалентны в D. Таким образом, корректно определен оператор

$$\hat{g}:\ \mathbf{\Gamma}^k(D)\to\mathbf{\Gamma}^k(D),$$

который будем обозначать также $\hat{g}|_D$.

Если $g_1 = g_2$ в окрестности $\bar{D}$, то $\hat{g}_1|_D = \hat{g}_2|_D$. Таким образом, сужение оператора на $\mathbf{\Gamma}(D)$ не зависит от поведения символа оператора вне $\bar{D}$.

Если $D_1 \subset D$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{rccc} \hat{g}|_D\colon & \mathbf{\Gamma}^{(k)}(D) & \to & \mathbf{\Gamma}^{(k)}(D) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{g}|_{D_1}\colon & \mathbf{\Gamma}^{(k)}(D_1) & \to & \mathbf{\Gamma}^{(k)}(D_1) \end{array}$$

Кроме того, пусть $\{D_\alpha\}$ — открытое конечное покрытие области D подобластями D_α и набор волновых пакетов $\psi_\alpha \in \mathbf{\Gamma}^k(D_\alpha)$ удовлетворяет условию

$$(\psi_\alpha - \psi_\beta)|_{D_\alpha \cap D_\beta} = 0$$

на каждой паре пересекающихся подобластей. Раздуем $D_\alpha \subset \tilde{D}_\alpha$ так, чтобы $\tilde{D}_\alpha \cap D = D_\alpha$, $\bigcup\limits_\alpha \tilde{D}_\alpha \supset \bar{D}$. Возьмем разбиение единицы $\{e_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{\tilde{D}_\alpha\}$ и такое, что $\sum\limits_\alpha e_\alpha = 1$ в окрестности $\bar{D}$. Выберем представителя $\dot{\psi}_\alpha$ в каждом классе эквивалентности ψ_α. Положим

$$\dot{\psi} = \sum_\alpha \hat{e}_\alpha \dot{\psi}_\alpha.$$

Соответствующий этому пакету класс эквивалентности $\psi \in \Gamma^k(D)$ от выбора представителей $\dot{\psi}_\alpha$ и от выбора разбиения единицы не зависит. Имеем $\psi|_{D_\alpha} = \psi_\alpha$ при всех α.

Таким образом, пространства $\Gamma^k(D')$, где $D' \subset D$, можно рассматривать как группы сечений некоторого алгебраического пучка над областью $D \subset \mathbf{R}^{2n}$ (см., например, [15]). Для любого $g \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ определен гомоморфизм $\hat{g}|_D$ этого пучка в себя. Множества $\operatorname{osc}^k(\psi)$, $\operatorname{osc}(\psi)$, а также классическая плотность F_ψ и субплотность ρ_ψ корректно определены как элементы из $\mathscr{D}'(D)$ для сечений $\psi \in \mathbf{\Gamma}^k(D)$, если $k \geqslant 2$. Назовем $\mathbf{\Gamma}^k(D)$ *пучком волновых пакетов* над D по $\operatorname{mod} \hbar^k$ (мы не различаем обозначения самого пучка и пространства его сечений).

1.6. Голография. Рассмотрим простейший и в то же время практически важный пример применения полученных выше формул.

Пусть M гладкое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$, $d\sigma$ — гладкая финитная мера на M, S — гладкая вещественная функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Зададим интегральный оператор

$$(\mathrm{B}_\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{\dim M}{2}}} \int\limits_M e^{\frac{i}{\hbar} S(x, x')} \psi(x')\, d\sigma(x'). \qquad (1.39)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\operatorname{osc}(\mathscr{B})=\operatorname{osc}^{\infty}(\mathscr{B})=$$
$$=\left\{\left(x,\ \frac{\partial S}{\partial x}(x,\ x');\ x',\ \xi-\frac{\partial S}{\partial x'}(x,\ x')\right)\Big|\, x'\in M\cap\operatorname{supp}(\sigma),\ \ \xi\in M_{x'}^{\perp}\right\},$$

где $M_{x'}^{\perp}$ — ортогональная плоскость к M в точке x'. В частности, если $n=3$, $\dim M=2$ и $S(x,\ x')=|x-x'|$, то оператор (1.39) имеет вид

$$(\mathrm{B}\psi)(x)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_M e^{\frac{i}{\hbar}|x-x'|}\psi(x')\,d\sigma(x'). \tag{1.40}$$

В силу (1.36)

$$\operatorname{osc}^{\infty}(\mathrm{B}\psi)\subset\{(x+t\xi,\ \xi)\,|\,t\geqslant 0,\ \xi=p^{\parallel}\pm\sqrt{1-|p^{\parallel}|^{2}}\,m_{x},$$
$$x\in M\cap\operatorname{supp}(\sigma),\ (x,\ p)\in\operatorname{osc}^{\infty}(\psi),\ |p^{\parallel}|\leqslant 1\}. \tag{1.41}$$

Здесь m_x — нормаль к M в точке x, а $p^{\parallel}$ — проекция (ко) вектора p на касательную плоскость к M в точке x. Негладкость фазы в (1.40) не отражается на справедливости формулы (1.41).

Вид (1.40) имеет, например, оператор Кирхгофа, выражающий напряженность поля электромагнитной волны в точке наблюдения x через напряженность поля этой волны на поверхности M. В этом случае $\hbar$ — длина волны, ψ — шестимерный вектор, составленный из компонент электрического и магнитного полей, $d\sigma$ — матричная мера, явный вид которой известен (но сейчас не важен). Важно следующее.

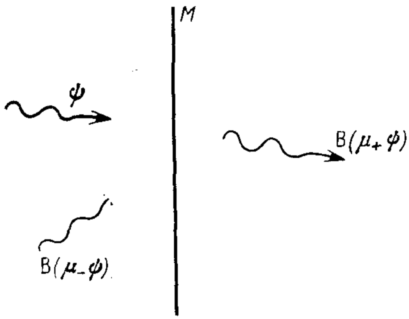


Рис. 7

(1) Если ψ — решение стационарной системы Максвелла в вакууме, удовлетворяющее условию излучения, то $\operatorname{osc}^{\infty}(\psi)\subset\{(x,\ p)\,|\,|p|=1\}$ (см. следствие 1.6). Направления векторов p, образующих фронт осцилляций, задают направления распространения волны ψ с точностью $O(\hbar^{\infty})$.

(2) Если ψ — решение системы Максвелла, удовлетворяющее условию излучения, то $\mathrm{B}(\psi)=\psi$. Это хорошо известная *формула Кирхгофа*.

(3) Если поверхность M — экран, то учесть поглощение волны на нем можно введением коэффициента пропускания $0\leqslant\mu_{+}(x')\leqslant 1$ под знак интеграла (1.40), т. е. если ψ — падающая на экран волна, то $\mathrm{B}(\mu_{+}\psi)$ — волна, прошедшая экран. (Отраженная волна задается аналогично: $\mathrm{B}(\mu_{-}\psi)$; рис. 7.) Точки, где $\mu_{+}=1$, — это абсолютно прозрачные места экрана (в соответствии с формулой Кирхгофа (2)), а точки, где $\mu_{+}=0$, — абсолютно непрозрачные места.

(4) Если M — фотопластинка, то при фиксации на ней волны (после проявления, в позитиве) система затемненных и прозрачных мест на M создает экран, коэффициент пропускания которого пропорционален интенсивности волны $|\psi|^2$.

Опираясь на эти факты, рассмотрим процесс голографии. Для простоты будем считать электромагнитную волну скалярной функцией. Учет векторного характера волны (т. е. поляризации) представляет особый интерес, но приводит к громоздким формулам.

Запись голограммы. На плоскую фотопластинку M падают сигнальная волна χ, которую требуется зафиксировать, и

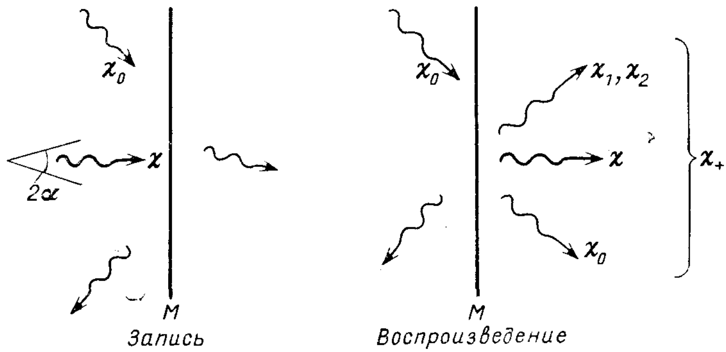


Рис. 8

одновременно опорная волна χ_0 постоянной интенсивности $|\chi_0|^2 = a$ от дополнительного источника.

Согласно условию (4), после проявления пластинка (голограмма) представляет собой экран с коэффициентом пропускания $c|\chi + \chi_0|^2$, где $c = \mathrm{const}$ (рис. 8).

Воспроизведение сигнала. На голограмму подается только волна χ_0 от дополнительного источника. Согласно условию (3), в пространстве за голограммой возникает волна

$$\chi_+ = c\mathrm{B}\,(|\chi + \chi_0|^2 \chi_0).$$

Очевидно, можно записать

$$\chi_+ = ac\mathrm{B}\,(\chi) + ac\mathrm{B}\,(\chi_0) + c\mathrm{B}\,(|\chi|^2 \chi_0) + c\mathrm{B}\,(\bar{\chi}\chi_0^2) = \\ = (ac)\,\chi + (ac)\,\chi_0 + c\chi_1 + c\chi_2, \qquad (1.42)$$

где мы использовали формулу Кирхгофа (условие (2)) и обозначили $\chi_1 = B\,(|\chi|^2 \chi_0)$, $\chi_2 = B\,(\bar{\chi}\chi_0^2)$. Формула (1.42) показывает, что рассеянная волна за голограммой будет состоять из искомого сигнала χ (умноженного на константу ac), а также из фона, представляющего собой суперпозицию трех волн: χ_0, χ_1, χ_2. Остается главное — отделить сигнал от фона.

Для простоты предположим, что опорная волна плоская, т. е. ее фронт $\mathrm{osc}^\infty(\chi_0) \subset \{(x, n^0)\}$, где $|n^0| = 1$. Единичный вектор n^0 определяет направление распространения этой волны.

Далее пусть сигнальная волна распространяется внутри конуса Σ_α с углом раствора 2α по отношению к оси, направленной на M. Угол наклона вектора n^0 по отношению к этой оси обозначим α_0. Будем считать, что угол α достаточно мал, а угол α_0 достаточно близок к $90°$ (точное ограничение указано ниже).

В силу (1.34) и условия (1) имеем

$$\operatorname{osc}^\infty(|\chi|^2\chi_0) \subset \{(x,\ n_1-n_2+n^0) \mid n_1,\ n_2 \in \Sigma_\alpha,\ |n_j|=1\},$$
$$\operatorname{osc}^\infty(\bar{\chi}\chi_0^2) \subset \{(x,\ 2n^0-n) \mid n \in \Sigma_\alpha,\ |n|=1\}.$$

Следовательно, согласно формуле (1.41),

$$\operatorname{osc}^\infty(\chi_1) \equiv \operatorname{osc}^\infty(\mathrm{B}(|\chi|^2\chi_0)) \subset \{(x,\ \xi) \mid \xi \notin \Sigma_{\alpha_1},\ |\xi|=1\},$$
$$\operatorname{osc}^\infty(\chi_2) \equiv \operatorname{osc}^\infty(\mathrm{B}(\bar{\chi}\chi_0^2)) \subset \{(x,\ \xi) \mid \xi \notin \Sigma_{\alpha_2},\ |\xi|=1\},$$

где углы α_1 и α_2 определяются равенствами

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_0 - 2\sin\alpha,\quad \sin\alpha_2 = 2\sin\alpha_0 - \sin\alpha.$$

Таким образом, если выполнены условия

$$\sin\alpha < 1/3 \quad (\text{т. е. примерно } \alpha \leqslant 19°),\qquad \sin\alpha_0 > 3\sin\alpha, \tag{1.43}$$

то фоновые волны χ_0, χ_1, χ_2 в сумме (1.42) распространяются по направлениям с углами наклона (по отношению к оси конуса Σ_α) не меньше, чем α_1 (рис. 9).

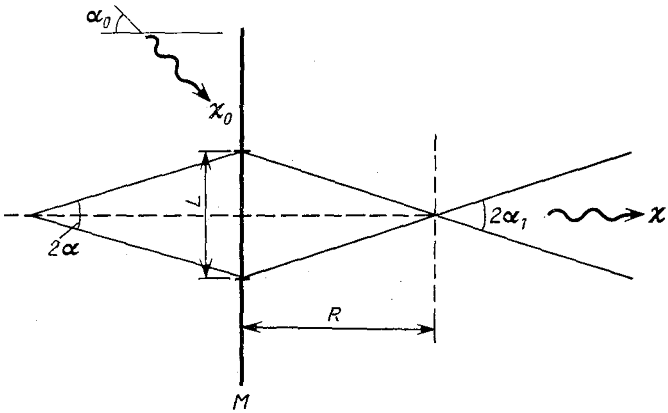


Рис. 9

Следствие 1.7. *Пусть углы α и α_0 — падения сигнальной и опорной волны — удовлетворяют неравенствам* (1.43). *Тогда при воспроизведении сигнала в пространстве за голограммой в конусе с углом раствора $2\alpha_1$, вершина которого отодвинута от голограммы (размера L) на расстояние*

$$R = \frac{L}{2}\,\frac{(1-(\sin\alpha_0 - 2\sin\alpha)^2)^{1/2}}{\sin\alpha_0 - 2\sin\alpha},$$

будет присутствовать только сигнальная волна

$$\chi_+ = (ac)\,\chi + O(\hbar^\infty).$$

§ 2. Принцип соответствия на языке лагранжевой геометрии

Центральные темы параграфа:

— аксиоматическое описание сплетающего оператора между классическими и квантовыми переменными (теорема 2.1);

— определение индекса пути на лагранжевом подмногообразии не в общем положении (лемма 2.4);

— правило квантования одномерных циклов (2.20);

— конструкция сплетающего оператора (2.21).

2.1. Сплетение классических и квантовых переменных. Рассмотрим фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n}=T^*\mathbf{R}^n$ с координатами $z=(x, p)$, $p\in T_x^*\mathbf{R}^n$ и с симплектической формой

$$\omega=\frac{1}{2}J\,dz\wedge dz=dp\wedge dx,\quad J=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{I}\\ -\mathrm{I} & 0\end{bmatrix}.$$

Гамильтонова механика имеет дело в простейших ситуациях с двумя типами объектов.

С о с т о я н и я: δ-функции (микроканонические распределения), сосредоточенные на подмногообразиях $\Lambda\subset\mathbf{R}^{2n}$ с мерами σ:

$$\langle\delta_{\Lambda,\,\sigma}, g\rangle=\int\limits_{\Lambda}g\,d\sigma,\quad g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n}).$$

Д и н а м и ч е с к и е п е р е м е н н ы е: гамильтоновы поля $\operatorname{ad}(f)=\left\langle J\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$, отвечающие вещественным функциям f на $\mathbf{R}^{2n}$.

Сравним их с исходными объектами квантовой механики.

Ч и с т ы е с о с т о я н и я: волновые пакеты на $\mathbf{R}^n$, например элементы пространства CS и квантовые плотности ρ_ψ этих пакетов.

Д и н а м и ч е с к и е п е р е м е н н ы е: операторы $\hat{f}=f\left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar\overset{\omega}{\partial/\partial x}\right)$ в пространстве волновых пакетов, отвечающие символам f на $\mathbf{R}^{2n}$.

Принцип соответствия между первой и второй группами объектов заключается в следующем. Подмногообразию $\Lambda\subset\mathbf{R}^{2n}$ с мерой σ сопоставим линейный непрерывный оператор $K\equiv K_\Lambda$: $C_0^\infty(\Lambda)\to CS$ такой, что

(I) для любого символа $f\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ имеет место формула коммутации

$$\hat{f}K(\varphi)=K(a_f\varphi-i\hbar b_f\varphi)+O(\hbar^2),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Lambda),$$

где a_f, b_f — линейные операторы на Λ;

(II) для любой $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$ пакет $K(\varphi)$ имеет классическую плотность и субплотность, причем плотность является микроканоническим распределением:

$$\rho_{K(\varphi)}=|\varphi|^2\delta_{\Lambda,\,\sigma}+\hbar G_{K(\varphi)}+O(\hbar^2);$$

(III) если $\operatorname{Im}\varphi=0$, то $G_{K(\varphi)}=0$;

(IV) если $\Lambda'\subset\Lambda$ и $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda')$, то $K_{\Lambda'}(\varphi)=K_\Lambda(\varphi)$.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* (I), (II) *подмногообразие лагранжево. Оператор* a_f *в условии* (I) — *это оператор умножения на функцию* $f|_\Lambda$. *Если, кроме того, выполнено условие* (III) *и* $f|_\Lambda = \mathrm{const}$, *то*

$$b_f = \frac{1}{2}(\mathrm{ad}(f)|_\Lambda - \mathrm{ad}(f)^*|_\Lambda), \tag{2.1}$$

где знак $(\ldots)^*$ *обозначает сопряжение относительно меры* σ. *В частности, если мера* σ *инвариантна относительно гамильтонова поля* $\mathrm{ad}(f)$, *то* $b_f = \mathrm{ad}(f)|_\Lambda$.

Доказательство [72]. Основное утверждение о лагранжевости Λ — это следствие теоремы 1.1. Действительно, из условия (II) получаем

$$(\hat{g}K(\varphi_1),\ K(\varphi_2)) = \int_\Lambda \varphi_1\bar{\varphi}_2 g\,d\sigma + O(\hbar), \quad g \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n}) \tag{2.2}$$

для любых $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\Lambda)$. Пусть $g, e \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ и $e \equiv 1$ на $\mathrm{supp}\, g$. Тогда $\hat{e}\hat{g} = \widehat{eg} + O(\hbar^\infty)$. В силу (2.2)

$$(\hat{e}\hat{g}K(\varphi_1),\ K(\varphi_2)) = \int_\Lambda (eg)\,\varphi_1\bar{\varphi}_2\,d\sigma + O(\hbar).$$

С другой стороны, в силу условия (I)

$$(\hat{e}\hat{g}K(\varphi_1),\ K(\varphi_2)) = (\hat{e}K(a_g\varphi_1),\ K(\varphi_2)) + O(\hbar) = \int_\Lambda e a_g(\varphi_1)\bar{\varphi}_2\,d\sigma + O(\hbar).$$

Таким образом, $a_g(\varphi_1) = g\varphi_1$.

Пусть теперь $f|_\Lambda = \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}\, f = 0$. Тогда в силу (I) $\hat{f}K(\varphi) = f|_\Lambda K(\varphi) - i\hbar K(b_f\varphi) + O(\hbar^2)$, и потому в силу (2.2) и (II)

$$(\hat{g}\hat{f}K(\varphi),\ K(\varphi)) = f|_\Lambda(\hat{g}K(\varphi),\ K(\varphi)) - i\hbar\int_\Lambda g b_f(\varphi)\cdot\bar{\varphi}\,d\sigma + O(\hbar^2) =$$

$$= f|_\Lambda\left(\int_\Lambda g|\varphi|^2\,d\sigma + \hbar\langle G_{K(\varphi)},\ g\rangle\right) - i\hbar\int_\Lambda g b_f(\varphi)\bar{\varphi}\,d\sigma + O(\hbar^2).$$

С другой стороны,

$$\hat{g}\hat{f} = \widehat{gf} - \frac{i\hbar}{2}\widehat{\{g,\ f\}} + O(\hbar^2),$$

и поэтому

$$(\hat{g}\hat{f}K(\varphi),\ K(\varphi)) = \int_\Lambda gf|\varphi|^2\,d\sigma + \hbar\langle G_{K(\varphi)},\ gf\rangle -$$

$$- \frac{i\hbar}{2}\int_\Lambda \{g,\ f\}\,|\varphi|^2\,d\sigma + O(\hbar^2).$$

Сравнивая эти формулы, получаем для их вещественных и мнимых частей соответственно

$$\begin{gathered} fG_{K(\varphi)} = f|_\Lambda G_{K(\varphi)} + \mathrm{Im}[\bar{\varphi}b_f(\varphi)]\,\delta_{\Lambda,\sigma}, \\ \mathrm{Re}[\bar{\varphi}b_f(\varphi)]\,\delta_{\Lambda,\sigma} = \frac{1}{2}\mathrm{ad}(f)(|\varphi|^2\delta_{\Lambda,\sigma}). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из первого равенства в (2.3) следует, что если $f|_\Lambda = g|_\Lambda = 0$, то $\langle G_{K(\varphi)}, fg\rangle = 0$, т. е. $G_{K(\varphi)}$ аннулирует любую функцию, имеющую нуль второго порядка на Λ. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1, т. е. Λ лагранжево.

Далее при выполнении условия (III) из первого равенства в (2.3) следует $\operatorname{Im} b_f = 0$, а из второго — формула (2.1). Теорема доказана.

Итак, принцип соответствия (I)—(IV) между объектами гамильтоновой механики и чистыми состояниями квантовой механики может выполняться лишь в классе лагранжевых носителей (фронтов) Λ. Это обстоятельство выделяет микроканонические распределения $\delta_{\Lambda,\sigma}$, сосредоточенные на лагранжевых подмногообразиях Λ, в особую группу. Оператор K, удовлетворяющий условиям (I)—(IV), оказывается естественным сплетающим оператором между классическими и квантовыми объектами: как показывает теорема 2.1, он связывает квантовые гамильтонианы $\hat{f}$ с гамильтоновыми векторными полями $\operatorname{ad}(f)$. Иногда K называют *оператором квазиклассического представления* или каноническим оператором [97]. Сейчас мы увидим, что условия (I)—(IV) дают явные формулы для этого оператора.

Пусть Λ лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^{2n}$ с гладкой мерой σ. В силу леммы 2.2 гл. I на Λ существует покрытие, карты $\mathcal{U}_\alpha$ которого задаются уравнениями вида

$$\mathcal{U}_\alpha = \left\{ p_{\alpha'} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_{\alpha'}},\ x_\alpha = -\frac{\partial S_\alpha}{\partial p_\alpha} \right\}. \tag{2.4}$$

Здесь $S_\alpha = S_\alpha(x_{\alpha'}, p_\alpha)$ — гладкие вещественные функции, греческий индекс α нумерует карты и одновременно α и α' обозначают взаимно дополнительные наборы номеров

$$\alpha \cap \alpha' = \varnothing, \quad \alpha \cup \alpha' = \{1, \ldots, n\}.$$

Карта $\mathcal{U}_\alpha$ диффеоморфно проектируется на координатную плоскость $(x_{\alpha'}, p_\alpha)$; точки $m \in \mathcal{U}_\alpha$ параметризуются этими локальными координатами: $m = m(x_{\alpha'}, p_\alpha)$.

В частности, «неособые» карты $\mathcal{U}_0 \subset \Lambda$, которые диффеоморфно проектируются на $\mathbf{R}^n_x$, задаются уравнениями

$$f_j(x, p) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{где} \quad f_j = p_j - \frac{\partial S_0(x)}{\partial x_j}.$$

Локальными координатами в $\mathcal{U}_0$ являются $x_1, \ldots, x_n$. Запишем меру σ в этих координатах: $d\sigma(m(x)) = \sigma_0(x)\,dx$. Заметим, что $\operatorname{ad}(f_j)|_{\mathcal{U}_0} = \partial/\partial x_j$. В силу теоремы 2.1 имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S_0}{\partial x_j}\right) K(\varphi) = K\left(|\sigma_0|^{-1/2} \circ \frac{\partial}{\partial x_j} \circ |\sigma_0|^{1/2} \varphi(m(x))\right) + O(\hbar),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U}_0)$. Сделав естественную замену

$$K(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar} S_0} k(\varphi),$$

получим

$$\frac{\partial k(\varphi)}{\partial x_j}=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\ln|\sigma_0|^{1/2}\right)+O(\hbar). \tag{2.5}$$

С другой стороны,

$$\hat{f}K(\varphi)=e^{\frac{i}{\hbar}S_0}f\left(x,\ \frac{\partial S_0}{\partial x}\right)k(\varphi)+O(\hbar)=e^{\frac{i}{\hbar}S_0}k(f|_{\mathcal{U}_0}\varphi)+O(\hbar).$$

В первом равенстве здесь использована формула коммутации с экспонентой (пример 1.8 приложения 1), а во втором равенстве — условие (I) и теорема 2.1. Итак, мы заключаем, что $k(f|_{\mathcal{U}_0}\varphi)=f|_{\mathcal{U}_0}k(\varphi)+O(\hbar)$; оператор k в главном — это оператор умножения на функцию:

$$k(\varphi)=e^{ic_0(x)}\mathcal{D}(x)\cdot\varphi(m(x))+O(\hbar),\quad \mathcal{D}\geqslant 0,\quad c_0\in\mathbf{R}.$$

Найти $\mathcal{D}$ позволяет условие (II): $\mathcal{D}=|\sigma_0|^{1/2}$. Подставив полученное выражение для k в формулу (2.5), получим $\partial c_0/\partial x_j=0$, т. е. $c_0=\mathrm{const}$. Следовательно, доказана

Лемма 2.1 [97]. *Оператор $K=K_{\mathcal{U}_0}$ над «неособой» картой действует так:*

$$K_{\mathcal{U}_0}(\varphi)=e^{\frac{i}{\hbar}S_0(x)+ic_0}\left|\frac{D\sigma}{Dx}\right|^{\frac{1}{2}}\varphi(m(x))+O(\hbar), \tag{2.6}$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{U}_0)$, c_0 — вещественная константа (возможно, зависящая от $\hbar$).

Константа c_0 остается неопределенной. Заметим, что условия (I)—(IV) допускают умножение оператора K на произвольный постоянный унимодулярный множитель.

Для дальнейшего важно договориться о нормировке преобразования Фурье. Удобно будет прямое и обратное преобразования Фурье на $\mathbf{R}^n$ определить так:

$$\mathcal{F}_{x\to p}g(x)=\frac{i^{-n/2}}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}xp\right\}g(x)\,dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{p\to x}g(p)=\frac{i^{n/2}}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}xp\right\}g(p)\,dp.$$

Наличие здесь «лишних» множителей $i^{\pm n/2}=\exp(\pm i\pi/4)$ объясняется тем, что преобразования $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ интерпретируются ниже как квантовые повороты (на 90° соответственно по и против часовой стрелки в случае $n=1$).

Рассмотрим теперь на Λ «чисто особую» карту $\mathcal{U}_1$, которая диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_p$ и задается уравнениями $f_j=x_j+\partial S_1(p)/\partial p_j$, где S_1 — гладкая вещественная функция. Локальными координатами на $\mathcal{U}_1$ служат $p_1,\ldots,p_n$. Обозначим через σ_1 плотность меры $d\sigma$ в этих координатах. Имеем $\mathrm{ad}(f_j)|_{\mathcal{U}_1}=\partial/\partial p_j$.

Следовательно, по теореме 2.1

$$\left[-\frac{i}{\hbar}x_j-\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S_1}{\partial p_j}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]K(\varphi)=$$
$$=K\left(|\sigma_1|^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\cdot|\sigma_1|^{1/2}\cdot\varphi(m(p))\right)+O(\hbar),\quad (2.7)$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{U}_1)$. Сделаем преобразование Фурье: $\mathcal{K}_1(\varphi)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{F}(K(\varphi))$. Тогда для $\mathcal{K}_1(\varphi)$ из (2.7) и из условий (I), (II) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_j}-\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S_1(p)}{\partial p_j}\right)\mathcal{K}_1(\varphi)=\mathcal{K}_1\left(|\sigma_1|^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\cdot|\sigma_1|^{1/2}\cdot\varphi\right)+O(\hbar),$$
$$f\left(i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{\omega}{p}\right)\mathcal{K}_1(\varphi)=\mathcal{K}_1(f|_{\mathcal{U}_1}\varphi)+O(\hbar),$$
$$\|\mathcal{K}_1(\varphi)\|^2=\int_{\mathcal{U}_1}|\varphi|^2\,d\sigma+O(\hbar).$$

Из этих соотношений абсолютно так же, как и выше для $K(\varphi)$, мы найдем для $\mathcal{K}_1(\varphi)$ формулу вида (2.6) с заменой x на p, $\mathcal{U}_0$ на $\mathcal{U}_1$. Следовательно, доказана

Лемма 2.2 [97]. *Оператор $K=K_{\mathcal{U}_1}$ над «чисто особой» картой $\mathcal{U}_1\subset\Lambda$ действует так:*

$$K_{\mathcal{U}_1}(\varphi)=\mathcal{F}^{-1}_{p\to x}\left(e^{\frac{i}{\hbar}S_1(p)+ic_1}\left|\frac{D\sigma}{Dp}\right|^{1/2}\varphi(m(p))+O(\hbar)\right),\quad (2.8)$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{U}_1)$, $c_1=\mathrm{const}$.

Аналогично оператор $K=K_{\mathcal{U}_\alpha}$ вычисляется над любой другой локальной картой $\mathcal{U}_\alpha\subset\Lambda$. Если две карты, например $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_\beta$, пересекаются и $\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$, то значения $K_{\mathcal{U}_\alpha}(\varphi)$ и $K_{\mathcal{U}_\beta}(\varphi)$, заданные формулами типа (2.6) и (2.8), могут различаться лишь на унимодулярный постоянный множитель:

$$K_{\mathcal{U}_\alpha}(\varphi)=e^{ic_{\alpha,\beta}}K_{\mathcal{U}_\beta}(\varphi)+O(\hbar),\quad c_{\alpha,\beta}=\mathrm{const}\in\mathbf{R}.\quad (2.9)$$

Очевидно, что числа $t_{\alpha,\beta}=\exp(ic_{\alpha,\beta})$ обладают свойствами

$$t_{\beta,\alpha}=t^{-1}_{\alpha,\beta},\quad t_{\alpha,\beta}t_{\beta,\delta}t_{\delta,\alpha}=1,$$

т. е. задают на многообразии Λ одномерный коцикл Чеха с коэффициентами в группе $T=U(1)$. Если соответствующий класс когомологий из $H^1(\Lambda, T)$ тривиален, например если Λ односвязно, то $t_{\alpha,\beta}=t_\alpha^{-1}\cdot t_B$ для некоторой коцепи $\{t_\alpha\}\subset T$. В этом случае операторы $K'_{\mathcal{U}_\alpha}=t_\alpha K_{\mathcal{U}_\alpha}$ над пересечением карт будут совпадать и тем самым будет определен глобальный оператор

$$K_\Lambda(\varphi)=\sum_\alpha t_\alpha\cdot K_{\mathcal{U}_\alpha}(g_\alpha\varphi),\quad (2.10)$$

где сумма берется по всем картам $\mathcal{U}_\alpha$ на Λ, а $\{g_\alpha\}$ — разбиение единицы на Λ, $g_\alpha\in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$. Итак, доказана

Лемма 2.3 [97]. *Над односвязным лагранжевым подмногообразием $\Lambda \subset \mathbf{R}^{2n}$ оператор K_Λ определен формулой (2.10) однозначно по $\operatorname{mod} O(\hbar)$ и с точностью до умножения на унимодулярную константу.*

2.2. Одномерные препятствия. Индекс путей. Изучим подробнее возникший в (2.9) класс когомологий. Для того чтобы найти явно числа $c_{\alpha,\beta}$, нужно договориться о способе фиксации постоянного унимодулярного множителя в определении оператора $K_{\mathcal{U}_\alpha}$ над каждой локальной картой $\mathcal{U}_\alpha \subset \Lambda$. Карта имеет локальные координаты x_α, p_α. Через $\mathcal{X}_\alpha$, $\mathcal{P}_{\alpha'}$ обозначим сужение на Λ координатных функций x_α, $p_{\alpha'}$.

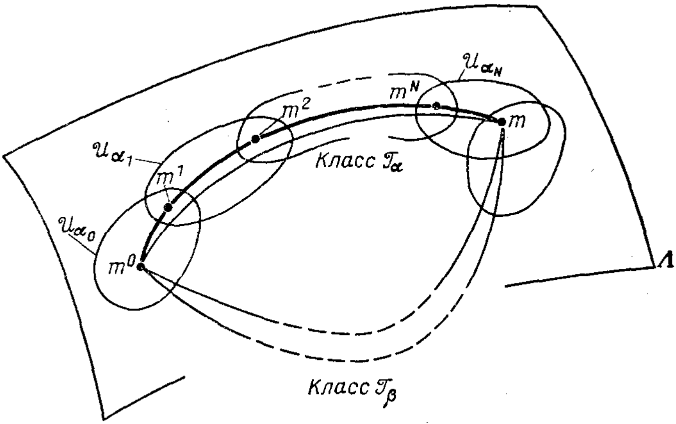


Рис. 10

Фиксируем точку $m^0 \in \Lambda$. Положим

$$S_\alpha = \int_{m^0}^{m} p\,dx - p_\alpha \mathcal{X}_\alpha(m), \quad m = m(x_{\alpha'},\ p_\alpha), \tag{2.11}$$

где интеграл от формы $p\,dx$ берется по пути $m^0 \to m$ на многообразии Λ, выходящем из точки m^0 и приходящем в текущую точку $m \in \mathcal{U}_\alpha$ с координатами $(x_{\alpha'},\ p_\alpha)$. От локальных шевелений пути этот интеграл не зависит в силу лагранжевости Λ, но, конечно, может зависеть от глобального гомотопического класса пути. Будем считать, что такой класс путей $\mathcal{T}_\alpha$ произвольно фиксирован для каждой локальной карты $\mathcal{U}_\alpha \subset \Lambda$ (рис. 10). Поскольку

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} = \mathcal{P}_{\alpha'}, \quad \frac{\partial S_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\mathcal{X}_\alpha,$$

то карта $\mathcal{U}_\alpha$ задается уравнениями (2.4) с производящей функцией S_α из (2.11).

На пересечении карт $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ рассмотрим симметричную матрицу

$$A_{\alpha\beta}(m) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \mathcal{P}_{\alpha\setminus\beta}}{\partial x_{\alpha\setminus\beta}} & -\dfrac{\partial \mathcal{P}_{\alpha\setminus\beta}}{\partial p_{\beta\setminus\alpha}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{X}_{\beta\setminus\alpha}}{\partial x_{\alpha\setminus\beta}} & \dfrac{\partial \mathcal{X}_{\beta\setminus\alpha}}{\partial p_{\beta\setminus\alpha}} \end{bmatrix}.$$

Здесь через $\beta\setminus\alpha$ обозначен набор индексов, входящих в β, но не входящих в α (разность множеств β и α). Отметим, что $\alpha\setminus\beta = \beta'\setminus\alpha'$; штрих означает дополнение до целого набора $(1, \ldots, n)$.

Рассмотрим тройку лагранжевых плоскостей $l(m) = T_m\Lambda$, $l_\varnothing = \{x = 0\} = \mathbf{R}^n_p$, $l_\alpha = \{x_{\alpha'} = p_\alpha = 0\}$. Проекция карты $\mathcal{U}_\alpha$ вдоль l_α невырожденна, т. е. $l(m) \cap l_\alpha = 0$ при $m \in \mathcal{U}_\alpha$.

Введем числа

$$\begin{gathered} \mu_{\alpha\beta} = \operatorname{ind}(A_{\alpha\beta}) - |\alpha\setminus\beta|, \\ \mu_\alpha(m) = \operatorname{ind}\left(\frac{\partial \mathcal{X}_\alpha(m)}{\partial p_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\dim l(m) \cap l_\varnothing, \end{gathered} \tag{2.12}$$

где $|\alpha\setminus\beta|$ — длина набора $\alpha\setminus\beta$, а $\operatorname{ind}(\ldots)$ — *индекс инерции*, т. е. число отрицательных собственных значений симметрической матрицы.

Далее мы предполагаем, что все карты $\mathcal{U}_\alpha$ и все их пересечения связны и односвязны.

Лемма 2.4. *Точки разрыва функций μ_α принадлежат множеству*

$$\Sigma = \{m \in \Lambda \mid l(m) \cap l_\varnothing \neq 0\}$$

особенностей проектирования $\pi_x\colon \Lambda \to \mathbf{R}^n_x$. В любой точке $m \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ выполнено равенство

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_\beta(m) - \mu_\alpha(m)$$

и эта разность не зависит от m. Коцикл Чеха $\{\mu_{\alpha\beta}\}$ задает целочисленный класс когомологий $[\mu] \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$.

Доказательство. Справедливость утверждений леммы по $\operatorname{mod} 4$ и в ситуации общего положения (см. ниже лемму 2.5) устанавливается достаточно просто [97, 102]. Доказательство, которое мы здесь приведем, опирается на результаты М. Касивары, Ж. Лиона, М. Вернь.

Пусть l_1, l_2, l_3 — три лагранжевы плоскости в пространстве $V = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$, наделенном симплектической структурой $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$. Если $l_1 \cap l_3 = 0$, то на l_2 определена квадратичная форма

$$(l_1, l_2, l_3)_\xi \overset{\text{def}}{=} \langle J\xi, \Pi_1^3\xi \rangle; \quad \xi \in l_2,$$

где Π_1^3 — проекция на l_1 вдоль l_3. Через $s(l_1, l_2, l_3)$ обозначим сигнатуру квадратичной формы, т. е. число положительных минус число отрицательных собственных значений, а через $s_0(l_1, l_2, l_3)$ — число ее нулевых собственных значений. Известно следующее [91, с. 30—34, 58]:

(A) $s_0(l_1, l_2, l_3) = \dim(l_1 \cap l_2 + l_3 \cap l_2)$.

(B) $s(l_1, l_2, l_3)$ совпадает с сигнатурой квадратичной формы

$$\langle \xi_1, J\xi_2 \rangle + \langle \xi_2, J\xi_3 \rangle + \langle \xi_3, J\xi_1 \rangle, \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in l_1 \oplus l_2 \oplus l_3,$$

и, таким образом, $s(l_1, l_2, l_3)$ определено и в случае $l_1 \cap l_3 \neq 0$.

(C) Функция s — это 2-коцикл, т. е.

$$s(l_1, l_2, l_3) = -s(l_2, l_1, l_3) = -s(l_1, l_3, l_2),$$
$$s(l_1, l_2, l_3) - s(l_1, l_2, l_4) + s(l_1, l_3, l_4) - s(l_2, l_3, l_4) = 0.$$

(D) Если l_1, l_2, l_3 меняются непрерывно и так, что $\dim(l_1 \cap l_2)$, $\dim(l_2 \cap l_3)$, $\dim(l_3 \cap l_1)$ постоянны, то $s(l_1, l_2, l_3)$ постоянно.

(E) Пусть $l_1 \cap l_2 = l_1 \cap l_3 = 0$ и $\rho = l_2 \cap l_3$. Рассмотрим разложение V в прямую сумму $V = \tilde{V} \oplus \rho \oplus J\rho$ (симплектическое пространство $\tilde{V}$ называется приведением V по изотропному подпространству ρ). Тогда

$$s(l_1, l_2, l_3) = s(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3),$$

где справа сигнатура вычисляется для тройки лагранжевых плоскостей $\tilde{l}_i \in \tilde{V}$, приведенных по ρ:

$$l_2 = \tilde{l}_2 \oplus \rho, \quad l_3 = \tilde{l}_3 \oplus \rho,$$
$$l_1 = \tilde{l}_1 \oplus \rho' \oplus \rho'', \quad \rho' \subset \rho, \quad \rho'' \subset J\rho.$$

Отождествим теперь V с касательной плоскостью $T_m\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$ к нашему исходному фазовому пространству в точке $m \in \Lambda$. Рассмотрим в V тройку лагранжевых плоскостей $l = l(m)$, $l_\varnothing$ и l_α. Форма $(l, l_\varnothing, l_\alpha)$ совпадает с $\partial \mathscr{X}_\alpha / \partial p_\alpha$. Поэтому

$$s(l, l_\varnothing, l_\alpha) = n - s_0(l, l_\varnothing, l_\alpha) - 2\mu_\alpha + \dim l(m) \cap l_\varnothing. \quad (2.13)$$

Кроме того, если $\tilde{l}$ — лагранжева плоскость l, приведенная по $\rho \equiv l_\alpha \cap l_\beta$, то форма $(\tilde{l}, \tilde{l}_\alpha, \tilde{l}_\beta)$ совпадает с $A_{\alpha\beta}$. Поэтому

$$s(\tilde{l}, \tilde{l}_\alpha, \tilde{l}_\beta) = |\beta \setminus \alpha| - |\alpha \setminus \beta| - 2\mu_{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

В силу коцикличности (C) имеем

$$s(l, l_\varnothing, l_\beta) - s(l, l_\varnothing, l_\alpha) = s(l_\beta, l_\alpha, l_\varnothing) + s(l, l_\alpha, l_\beta).$$

Из (B) следует, что $s(l_\beta, l_\alpha, l_\varnothing) = 0$, а в силу (E) и (2.14) получаем

$$s(l, l_\varnothing, l_\beta) - s(l, l_\varnothing, l_\alpha) = |\beta \setminus \alpha| - |\alpha \setminus \beta| - 2\mu_{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

Здесь плоскость $l = l(m)$ зависит от точки $m \in \Lambda$. Поскольку $l(m) \cap l_\alpha = l(m) \cap l_\beta = 0$ при всех $m \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$, то можно найти близкие к l_α, l_β лагранжевы плоскости l'_α, l'_β такие, что

$$l(m) \cap l'_\alpha = l(m) \cap l'_\beta = l_\varnothing \cap l'_\alpha = l_\varnothing \cap l'_\beta = 0 \quad \forall m \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta.$$

В силу коцикличности

$$s(l, l_\varnothing, l_\beta) = s(l, l_\varnothing, l'_\beta) + s(l_\beta, l'_\beta, l_\varnothing) - s(l_\beta, l'_\beta, l),$$

и аналогично при замене β на α. Следовательно,

$$s(l,\ l_\varnothing,\ l_\beta)-s(l,\ l_\varnothing,\ l_\alpha)=[s(l,\ l_\varnothing,\ l'_\beta)-s(l,\ l_\varnothing,\ l'_\alpha)]+ \\ +[s(l_\beta,\ l'_\beta,\ l_\varnothing)-s(l_\alpha,\ l'_\alpha,\ l_\varnothing)]+[s(l_\alpha,\ l'_\alpha,\ l)-s(l_\beta,\ l'_\beta,\ l)].$$

Во втором слагаемом в квадратных скобках участвуют плоскости, не зависящие от m, а третье слагаемое в квадратных скобках не зависит от m в силу (D). Первое слагаемое с учетом коцикличности имеет вид

$$s(l,\ l_\varnothing,\ l'_\beta)-s(l,\ l_\varnothing,\ l'_\alpha)=s(l'_\beta,\ l'_\alpha,\ l_\varnothing)+s(l,\ l'_\alpha,\ l'_\beta),$$

и в силу (D) $s(l,\ l'_\alpha,\ l'_\beta)$ не зависит от m. Поэтому разность из левой части уравнения (2.15) не зависит от $m\in\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$. Это доказывает, что $\mu_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$ на $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$.

Далее, поскольку $l\cap l_\alpha=0$, то плоскости $l\cap l_\varnothing$ и $l_\alpha\cap l_\varnothing$ ортогональны и, следовательно,

$$\dim(l\cap l_\varnothing+l_\alpha\cap l_\varnothing)=\dim(l\cap l_\varnothing)+\dim(l_\alpha\cap l_\varnothing).$$

В силу (А) получаем

$$s_0(l,\ l_\varnothing,\ l_\alpha)=\dim(l\cap l_\varnothing)+n-|\alpha|.$$

Тогда (2.13) дает

$$s(l,\ l_\varnothing,\ l_\alpha)=|\alpha|-2\mu_\alpha. \tag{2.16}$$

В силу (D) функция $s(l(m),\ l_\varnothing,\ l_\alpha)$ непрерывна, пока $m\in\mathcal{U}_\alpha$ меняется вне множества Σ. Формула (2.16) показывает, что так же ведет себя функция $\mu_\alpha(m)$. Кроме того, из (2.16) получаем

$$s(l,\ l_\varnothing,\ l_\beta)-s(l,\ l_\varnothing,\ l_\alpha)=|\beta|-|\alpha|-2(\mu_\beta-\mu_\alpha).$$

Сравнение с (2.15) дает искомое равенство $\mu_{\alpha\beta}=\mu_\beta-\mu_\alpha$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь на лагранжевом подмногообразии Λ любой ориентированный непрерывный путь $m^0\to m$. Он покрыт цепочкой попарно пересекающихся карт $\mathcal{U}_{\alpha_0},\ \ldots,\ \mathcal{U}_{\alpha_N}$. Можно весь путь разбить на отрезки

$$\begin{array}{ccccccc} m^0 & \to & m^1\to & \ldots & \to m^N & \to & m^{N+1}\equiv m, \\ \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\ \mathcal{U}_{\alpha_0} & & \mathcal{U}_{\alpha_0}\cap\mathcal{U}_{\alpha_1} & & \mathcal{U}_{\alpha_{N-1}}\cap\mathcal{U}_{\alpha_N} & & \mathcal{U}_{\alpha_N} \end{array}$$

каждый из которых лежит в одной из этих карт. Определим *индекс пути*

$$\mathrm{Ind}(m^0\to m)=\sum_{j=0}^{N}(\mu_{\alpha_j}(m^j)-\mu_{\alpha_j}(m^{j+1})).$$

В отличие от исходных определений индекса [97] (см. также [3, 90, 104, 245, 254]) мы здесь допускаем, чтобы $\mathrm{Ind}(m^0\to m)$ принимал п о л у ц е л ы е значения, если концы пути лежат на множестве особенностей. Это играет принципиальную роль в гл. IV, например в теореме 2.2 или в (2.30); см. также замечание 2.1.

Из леммы 2.4 следует:

— определение индекса пути не зависит от разбиения пути, от выбора локальных карт и от непрерывных деформаций пути, оставляющих неподвижными концы;

— если один из концов пути лежит вне множества особенностей $\Sigma \subset \Lambda$, то при непрерывном перемещении этого конца вне Σ индекс пути не меняется;

— если концы пути лежат вне Σ, то его индекс — целое число, а если путь вообще не пересекает Σ, то индекс равен нулю;

— индекс — аддитивная функция пути и на замкнутых путях порождает класс когомологий из леммы 2.4:

$$\operatorname{Ind}(\Gamma) = [\mu](\Gamma), \quad \partial\Gamma = \varnothing.$$

Пример 2.1. На плоскости $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_x \oplus \mathbf{R}_p$ рассмотрим замкнутую кривую Λ. На рис. 11 показано покрытие Λ локальными

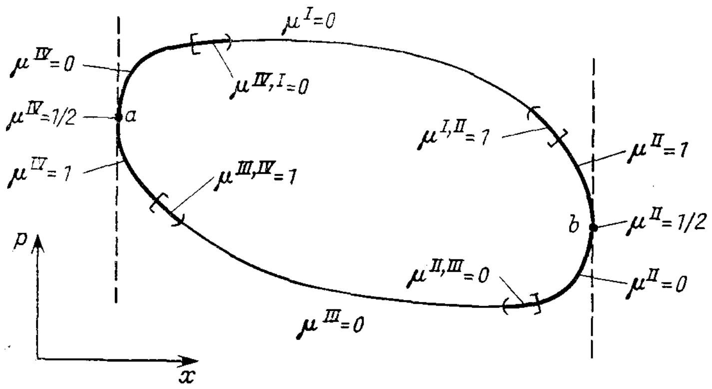


Рис. 11

картами, занумерованными I, II, III, IV. Карты с номерами I и III неособые, а с номерами II и IV чисто особые. В каждой карте и на их пересечениях вычисляются функции (2.12) (греческие индексы α, β, ... заменены римскими и помещены сверху). Множество особенностей Σ состоит из двух точек a, b. Любой путь на Λ, концы которого лежат на интервале (a, b) в верхней части кривой или в нижней части (т. е. вне Σ), имеет индекс 0. Ненулевой индекс появляется, когда один из концов пути попадает на особую точку или когда путь переходит через особую точку (рис. 12). При движении по часовой стрелке каждый такой переход дает добавку $+1$ к индексу. Индекс всей кривой Λ, обойденной по часовой стрелке один раз, равен $+2$.

Лемма 2.5 [3]. *Сколь угодно малым поворотом* (т. е. элементом группы $\mathrm{Sp}(2n) \cap O(2n) = U(n)$) *лагранжево подмногообразие* $\Lambda^n \subset \mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$ *может быть приведено в такое положение, когда множество особенностей* Σ *на нем будет состоять из открытого* $(n-1)$*-мерного подмногообразия* Σ', *двусторонне лежащего в* Λ, *и, возможно, еще из подмногообразия размерности не более* $n-3$.

В окрестности точки из Σ' многообразие Λ имеет локальные координаты $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, p_k)$ и Σ' задается уравнением $\partial x_k/\partial p_k = 0$. Положительной называется та сторона Σ', где $\partial x_k/\partial p_k > 0$. Это определение положительной стороны не зависит от выбора локальных координат.

Будем говорить, что многообразие Λ находится в *общем положении* (относительно проекции вдоль $l_{\varnothing} = \mathbf{R}^n_p$), если имеет место ситуация леммы 2.5. На таком подмногообразии каждый путь Γ

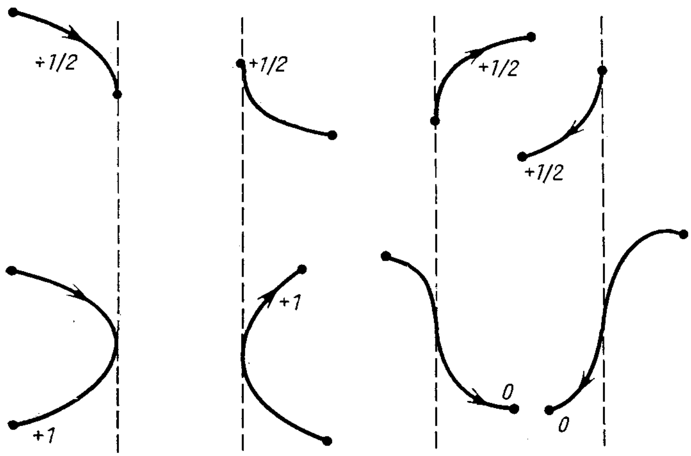


Рис. 12

с неособыми концами можно перевести в положение Γ', трансверсальное Σ', и вычислить индекс по формуле

$$\operatorname{Ind}(\Gamma) = \mu_+ - \mu_-,$$

где μ_+ — число точек переход пути Γ' с отрицательной стороны Σ' на положительную, μ_- — число точек перехода в обратном направлении.

Подчеркнем, что совсем не обязательно связывать множество особенностей $\Sigma \subset \Lambda$ с проектированием непременно вдоль координатной плоскости $\mathbf{R}^n_p$. Можно взять вместо $\mathbf{R}^n_p$ любую другую лагранжеву плоскость и, более того, любое интегрируемое распределение лагранжевых плоскостей в $\mathbf{R}^{2n}$ (так называемую *поляризацию*). Получающиеся значения индекса пути, конечно, чувствуют выбор поляризации, но индекс замкнутых путей, т. е. класс когомологий $[\mu] \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$, от такого выбора не зависит. Подробности будут приведены в п. 3.1 гл. IV, где мы исследуем возможность определения класса $[\mu]$, используя только лишь симплектическую структуру.

Отметим здесь следующие факты.

Лемма 2.6 [3]. (а) *На лагранжевом многообразии $\Lambda = \{x = \mathscr{X}(m), p = \mathscr{P}(m)\} \subset \mathbf{R}^{2n}$ класс $[\mu] \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$ индуцирован образующей* *группы* $H^1(S^1, \mathbf{Z})$ *при отображении*

$$\Lambda \ni m \to \frac{d(m)}{|d(m)|} \in S^1,$$

где окружность $S^1 \subset \mathbf{C}$ *ориентирована по часовой стрелке, а* $d = \left(\frac{\mathcal{D}(\mathcal{X}+i\mathcal{P})}{\mathcal{D}\sigma}\right)^2$, σ — *любая положительная мера на* Λ.

(b) *На ориентируемом лагранжевом подмногообразии* $\Lambda \subset \mathbf{R}^{2n}$ *класс* $[\mu]$ *четный и его половина совпадает по* mod 2 *с первым классом Штифеля — Уитни* w^1, *т. е.* $\frac{1}{2}[\mu] = w^1 \pmod 2$.

2.3. Формулы для сплетающего оператора. Вернемся теперь к определению (2.10). Оператор $K = K_{\mathcal{U}_\alpha}$ над локальной картой $\mathcal{U}_\alpha \subset \Lambda$ зададим, как в (2.6), (2.8):

$$K_{\mathcal{U}_\alpha}(\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{p_\alpha \to x_\alpha}[\mathcal{K}_\alpha(\varphi)(x_{\alpha'}, p_\alpha)]; \tag{2.17}$$

здесь

$$\mathcal{K}_\alpha(\varphi) = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}(\operatorname{Ind}(m^0 \to m) + \mu_\alpha(m)) + \frac{i}{\hbar}S_\alpha(m)\right\} \times \\ \times \left|\frac{\mathcal{D}\sigma(m)}{\mathcal{D}(x_{\alpha'}, p_\alpha)}\right|^{1/2} \varphi(m),$$

$m = m(x_{\alpha'}, p_\alpha)$ — текущая точка в карте $\mathcal{U}_\alpha$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, а индекс пути $\operatorname{Ind}(m^0 \to m)$ вычисляется для того же пути, который в (2.11) определяет функцию S_α. Формула (2.17) — это просто вариант (2.6), (2.8) в карте общего вида с «неособыми» координатами $x_{\alpha'}$ (вдоль которых невырожденна проекция π_x) и с «особыми» координатами p_α (по которым берется обратное преобразование Фурье). Неопределенный унимодулярный множитель, присутствующий в (2.6), (2.8), теперь заменен конкретным числом.

Число $c(\Gamma) = \frac{1}{\hbar}\int_\Gamma p\,dx - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind}(\Gamma)$ назовем *вкладом пути* $\Gamma \subset \Lambda$.

Лемма 2.7. *На пересечении карт* $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ *выполнена формула сшивания* (2.9), *в которой* $c_{\beta} = c(\Gamma_\alpha + (-\Gamma_\beta))$ — *вклад замкнутого пути*

$$m^0 \xrightarrow{\Gamma_\alpha} \overline{m} \xrightarrow{-\Gamma_\beta} m^0$$

на Λ, *две части которого* Γ_α *и* Γ_β — *это пути из гомотопических классов* $\mathcal{T}_\alpha$ *и* $\mathcal{T}_\beta$, *соединяющие точку* m^0 *с любой точкой* $\overline{m} \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$.

Доказательство. С учетом определения (2.13) искомая формула (2.9) может быть записана так:

$$e^{ic_{\beta\alpha}}\mathcal{K}_\alpha(\varphi)(x_{\alpha'}, p_\alpha) = T_{\alpha\beta}\mathcal{K}_\beta(\varphi)(x_{\beta'}, p_\beta) + O(\hbar), \tag{2.18}$$

$$T_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{F}_{x_{\beta'\setminus\alpha'} \to p_{\alpha\setminus\beta}}\mathcal{F}^{-1}_{p_{\beta\setminus\alpha} \to x_{\alpha'\setminus\beta'}}. \tag{2.19}$$

В правой части уравнения (2.18) стоит интеграл от быстро осциллирующей экспоненты. На носителе $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ стационарные точки показателя экспоненты невырожденны, и в силу метода стационарной фазы имеем

$$T_{\alpha\beta}\mathcal{K}^{0}_{\beta}(\varphi)=\exp\left\{i\frac{\pi}{2}(\mu_{\alpha\beta}-\mu_{\beta}(m)-\operatorname{Ind}(m^{0}\to m))\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{(m^{0}\to m)\in\mathcal{T}_{\beta}}p\,dx\right\}|\det A_{\alpha\beta}(m)|^{-1/2}\times$$
$$\times\left|\frac{\mathcal{D}\sigma(m)}{\mathcal{D}(x_{\beta'},\,p_{\beta})}\right|^{1/2}\varphi(m)+O(\hbar),$$

причем в правой части координаты точки m из карты $\mathcal{U}_{\beta}$ пересчитываются через координаты из карты $\mathcal{U}_{\alpha}$ (т. е. координаты $x_{\beta'\setminus\alpha'}$, $p_{\beta\setminus\alpha}$ пересчитываются через $p_{\alpha\setminus\beta}$, $x_{\alpha'\setminus\beta'}$). Поскольку $\mu_{\alpha\beta}=\mu_{\beta}(m)-\mu_{\alpha}(m)$, то задание чисел $c_{\alpha\beta}$ формулой, указанной в формулировке леммы, обеспечивает выполнение (2.18) или (2.9). Лемма доказана.

Объединяя этот результат с утверждениями § 1, получаем следующую теорему [97].

Теорема 2.2. *Пусть* Λ — *лагранжево подмногообразие в* $\mathbf{R}^{n}_{x}\oplus\mathbf{R}^{n}_{p}$ *и* $\theta=p\,dx|_{\Lambda}$. *Пусть последовательность значений* $\hbar\to0$ *выбрана так, что*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}[\theta]-\frac{1}{4}[\mu]\in H^{1}(\Lambda,\ \mathbf{Z}).\tag{2.20}$$

Тогда оператор, удовлетворяющий условиям (I)—(IV), *существует и задается с помощью локальных карт* (2.4) *на* Λ *и разбиения единицы* $\{g_{\alpha}\}$ *следующей формулой*:

$$K(\varphi)=\sum_{\alpha}K_{\alpha}(g_{\alpha}\varphi),$$
$$K_{\alpha}=I_{\alpha}e^{ic}\left|\frac{\mathcal{D}\mathcal{X}(m)}{\mathcal{D}\sigma}\right|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}\dim\left(T_{m}\Lambda\cap\mathbf{R}^{n}_{p}\right)}.\tag{2.21}$$

Здесь $c=c(m^{0}\to m)$ — *вклад любого пути на* Λ, *ведущего из точки* m^{0} *в текущую точку* m. *Операция* I_{α} *в неособых картах* ($\alpha=\varnothing$) *действует как проекция* π_{x}^{-1*}, *т. е.* $I_{\varnothing}f=f(m(x))$, *а в остальных картах*

$$I_{\alpha}(f)(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{|\alpha|/2}}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p_{\alpha}(x_{\alpha}-\mathcal{X}_{\alpha}(m))+\right.$$
$$\left.+i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial\mathcal{X}_{\alpha}(m)}{\partial p_{\alpha}}\right\}\left|\frac{\mathcal{D}\mathcal{X}_{\alpha}(m)}{\mathcal{D}p_{\alpha}}\right|^{1/2}f(m)\Big|_{m=m(x_{\alpha},\,p_{\alpha})}dp_{\alpha}.$$

От выбора локальных карт и разбиения единицы эта конструкция не зависит по $\operatorname{mod}O(\hbar)$ *в* $L^{2}(\mathbf{R}^{n})$.

Мы будем использовать обозначение

$$K=K_{\Lambda,\,\sigma,\,m^{0}},$$

указывая, когда это нужно, многообразие, меру и начальную точку, по которым построен оператор.

Замечание 2.1. Имеют место формулы

$$K_{\Lambda,\sigma,m^1}=\exp\{ic(m^1\to m^0)\}K_{\Lambda,\sigma,m^0},$$
$$\overline{K}_{\Lambda,\sigma,m^0}=K_{\Lambda^{(-)},\sigma,m^0}.$$

Здесь черта обозначает комплексное сопряжение, а минус в скобках — смену знака симплектической структуры фазового пространства: $\Lambda^{(-)}\equiv\Lambda\subset(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$.

Последняя формула сопряжения очень важна; *именно для ее выполнения мы в определении индекса* (2.12) *ввели полуцелую добавку*. В общем положении, т. е. если точка m^0 на Λ неособая, добавка отсутствует и определение оператора K_Λ совпадает с обычным [97, 102]. Дальнейшие наши шаги (гл. IV) не позволяют ограничиться ситуацией общего положения.

В идейном плане основную роль ниже будет играть правило (2.20). Оно является математической формулировкой и обобщением старого квантовомеханического правила Бора. Мы будем называть (2.20) *правилом квантования одномерных циклов* [97]. Можно переписать его так:

$$\frac{1}{2\pi}c(\Gamma)\equiv\frac{1}{2\pi\hbar}\oint p\,dx-\frac{1}{4}[\mu](\Gamma)\in\mathbf{Z}\quad\forall\Gamma\in H_1(\Lambda).\qquad(2.20\text{a})$$

Обеспечить выполнение этого включения нужно лишь на базисных нестягиваемых циклах $\Gamma\in\Lambda$. Это дает конечное число ограничений на выбор параметра $\hbar$ или других параметров, от которых может зависеть само многообразие Λ (примеры приведены ниже). При выполнении условия (2.20) многообразие Λ назовем *квантованным*.

Замечание 2.2. Можно расширить область определения оператора K, считая, что он задан формулой (2.21), в которой φ заменено многозначной функцией (функцией на накрытии Λ):

$$\exp\left(i\int\limits_{(m^0\to m)}\varkappa\right)\varphi(m),$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$, а $\varkappa$ — некоторая замкнутая 1-форма на Λ. Такое определение корректно, если правило квантования (2.20) заменено следующим:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}[\theta]-\frac{1}{4}[\mu]+\frac{1}{2\pi}[\varkappa]\in H^1(\Lambda,\ \mathbf{Z}).\qquad(2.20\text{b})$$

При этом в формуле коммутации к оператору b_H (см. (2.1)) добавляется функция $i\varkappa(\mathrm{ad}(H))$. Многообразие Λ, на котором выполнено (2.20b), иногда также называют квантованным [88]. Очевидно, подбором формы $\varkappa$ любое лагранжево многообразие $\Lambda\subset\mathbf{R}^{2n}$ можно в этом смысле сделать квантованным.

Итак, над квантованным лагранжевым подмногообразием определен оператор, для которого выполнены наши исходные соотношения — аксиомы (I), (II).

Полезно уточнить основную формулу коммутации (I), доведя в ней точность до $O(\hbar^\infty)$. Это потребует несколько технических лемм [86, 96].

Лемма 2.8. *Локальные операторы $K_\alpha \equiv K_{\mathcal{U}_\alpha}$ в (2.21) на пересечении карт $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ сшиваются так:*

$$K_\alpha = K_\beta \cdot (I + (-i\hbar) V_\alpha^\beta) + O(\hbar^\infty),$$

где оператор перехода V_α^β — ряд по степеням $(-i\hbar)$, коэффициенты которого являются вещественными дифференциальными операторами на $C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Обрывание этого ряда на N-м члене заменяет остаток $O(\hbar^\infty)$ на $O(\hbar^{N+1})$ (в пространстве CS).

Доказательство прямо следует из метода стационарной фазы, который нужно теперь применять не с точностью $O(\hbar)$, как это делалось в лемме 2.7, а с точностью $O(\hbar^\infty)$.

Лемма 2.9. *Если $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, то $\sum\limits_\alpha K_\alpha(\varphi_\alpha) = K_\Lambda(\varphi) + O(\hbar^\infty)$, где функция $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$ определяется асимптотическим разложением*

$$\varphi = \sum_{s \geqslant 0} (-i\hbar)^s \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_s} V_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s} g_{\alpha_s} \ldots V_{\alpha_1}^{\alpha_2} g_2 V_{\alpha_0}^{\alpha_1} g_{\alpha_1} (\varphi_{\alpha_0}).$$

Доказательство. Пусть $\{\chi_\alpha \in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha)\}$ некоторый набор функций. Поскольку $\sum g_\alpha = 1$, то в силу леммы 2.8

$$\sum_\alpha K_\alpha(\chi_\alpha) = \sum_\beta K_\beta \left(\sum_\alpha (I + (-i\hbar) V_\alpha^\beta \right) g_\beta \chi_\alpha) + O(\hbar^\infty) =$$
$$= \sum_\beta K_\beta \left(g_\beta \sum_\alpha \chi_\alpha \right) + (-i\hbar) \sum_\alpha K_\alpha \left(\sum_\beta V_\beta^\alpha g_\alpha \chi_\beta \right) + O(\hbar^\infty).$$

Отсюда

$$\sum_\alpha K_\alpha \left(\sum_\beta (\delta_\beta^\alpha + i\hbar V_\beta^\alpha g_\alpha) \chi_\beta \right) = K_\Lambda \left(\sum_\alpha \chi_\alpha \right) + O(\hbar^\infty).$$

Остается выбрать функции χ_α так, чтобы $\sum\limits_\beta (\delta_\beta^\alpha + i\hbar V_\beta^\alpha g_\alpha) \chi_\beta = \varphi_\alpha$ (δ_β^α — символ Кронекера), и положить $\varphi = \sum\limits_\alpha \chi_\alpha$. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *Для любого $H \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ выполнена формула*

$$\hat{H} \cdot K_\alpha = K_\alpha \cdot r_{H,\alpha} + O(\hbar^\infty),$$

где $r_{H,\alpha}$ — ряд по степеням $-i\hbar$, коэффициенты которого — вещественные дифференциальные операторы в карте $\mathcal{U}_\alpha$. Обрывание ряда на N-м члене заменяет остаток $O(\hbar^\infty)$ на $O(\hbar^{N+1})$. Первые члены такие: $r_{H,\alpha} = H|_{\mathcal{U}_\alpha} - i\hbar b_{H,\alpha} + O(\hbar^2)$, $b_{H,\alpha}$ оператор первого порядка на $\mathcal{U}_\alpha$.

Доказательство прямо следует из формулы коммутации с экспонентой (см. пример 1.8 приложения 1).

Следствие 2.1. *Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^{2n}$. Каждому символу $H \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ соответствует оператор*

$$r_H = \sum_{s \geqslant 0} (-i\hbar)^s \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_s} V_{\alpha_{s-1}}^{\alpha_s} g_{\alpha_s} \ldots V_{\alpha_0}^{\alpha_1} g_{\alpha_1} r_{H,\alpha_0} g_{\alpha_0}$$

— *ряд по степеням* $-i\hbar$, *коэффициенты которого это вещественные дифференциальные операторы на* $C_0^\infty(\Lambda)$. *Если* Λ *квантованно, то верна формула коммутации*

$$\hat{H}K_\Lambda = K_\Lambda r_H + O(\hbar^\infty).$$

Обрывание ряда для r_H *на* N*-м члене заменяет здесь остаток* $O(\hbar^\infty)$ *на* $O(\hbar^{N+1})$ *в полинорме* $CS(\mathbf{R}^n)$. *Первые члены разложения имеют вид* $r_H = H|_\Lambda - i\hbar b_H + (-i\hbar)^2 b_H^{(1)}$, *где* b_H — *вещественный дифференциальный оператор первого порядка на* Λ (*см. теорему* 2.1), *а* $b_H^{(1)}|_{\hbar=0}$ — *вещественный дифференциальный оператор второго порядка.*

Для доказательства применяются формула коммутации леммы 2.10 и затем лемма 2.9.

2.4. Квантование решений гамильтоновых систем. Задача на собственные значения. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}(x, p)$ — функция Гамильтона классической механической системы в $\mathbf{R}^{2n}$, Λ — лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^{2n}$ с мерой σ и замкнутой 1-формой $\varkappa$, квантованное в смысле (2.20b) и лежащее на уровне постоянной энергии: $H|_\Lambda = \mathscr{E} = \mathrm{const}$. Пусть φ — собственная функция «оператора переноса» на Λ:

$$\left[-\frac{i}{2}(\mathrm{ad}(\mathscr{H}) - \mathrm{ad}(\mathscr{H})^*) + \varkappa(\mathrm{ad}(\mathscr{H})) - \hbar b_{\mathscr{H}}^{(1)}\right]\varphi = \mathscr{E}_1\varphi,$$

где сопряжение $(\ldots)^*$ берется относительно меры σ. Тогда волновой пакет $\psi = K_{\Lambda,\sigma,m}(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathscr{H}}\psi = (\mathscr{E} + \hbar\mathscr{E}_1)\psi + O(\hbar^\infty). \tag{2.22}$$

Действительно, в силу следствия 2.1

$$\hat{\mathscr{H}}K_\Lambda(\varphi) = K_\Lambda((\mathscr{H}|_\Lambda - i\hbar(b_{\mathscr{H}} + i\varkappa(\mathrm{ad}(\mathscr{H}))) + (-i\hbar)^2 b_{\mathscr{H}}^{(1)})\varphi) + O(\hbar^\infty) = (\mathscr{E} + \hbar\mathscr{E}_1)K_\Lambda(\varphi) + O(\hbar^\infty).$$

В частности, если мера σ и форма $\varkappa$ на Λ *инвариантны* относительно потока, порожденного полем $\mathrm{ad}(\mathscr{H})$, то в первом приближении можно взять $\varphi = 1 + O(\hbar)$, $\mathscr{E}_1 = \varkappa(\mathrm{ad}(\mathscr{H})) + O(\hbar)$ и получить соотношение

$$\hat{\mathscr{H}}\psi = (\mathscr{H}|_\Lambda + \hbar\varkappa(\mathrm{ad}(\mathscr{H}))|_\Lambda)\psi + O(\hbar^2). \tag{2.22a}$$

Однако это вычисление формальное. Строго говоря, следствие 2.1 здесь неприменимо, поскольку собственная функция φ может не принадлежать $C_0^\infty(\Lambda)$ — области определения оператора K_Λ.

Формула (2.22) работает в следующих ситуациях (см. [97] и [6, 32, 86—88, 90, 102, 104]).

А. Многообразие Λ компактно или расслаивается на компактные $\mathrm{ad}(\mathscr{H})$-инвариантные слои. Тогда оценка остатка в (2.22) обеспечена в $L^2(\mathbf{R}^n)$ (и в CS). Более того, сама функция ψ здесь имеет порядок $O(\hbar^\infty)$ всюду вне окрестности проекции Λ на $\mathbf{R}_x^n$. Эта ситуация характерна для задач на собственные значения (см. ниже пример 2.2).

B. Над каждой точкой x из ограниченной области $Q \subset \mathbf{R}_x^n$ расположено не более чем M карт многообразия Λ. Тогда мы применим оператор K_Λ к функции φ, срезанной на нуль вне точек, проектирующихся в Q. Оценка остатка в (2.22) сохранится по норме $L^2(Q_1)$, где Q_1 — подобласть, содержащаяся с замыканием в Q. Эта ситуация характерна для решения задачи Коши (ниже пример 2.3).

C. Множество особенностей $\Sigma \subset \Lambda$ относительно проектирования вдоль $\mathbf{R}_p^n$ содержится внутри компакта, и при выходе из этого компакта число «неособых» карт на Λ конечно. Тогда оценка (2.20) может быть сохранена в L^2-норме на любом компакте и лишь в sup-норме на бесконечности. Эта ситуация характерна для задачи рассеяния.

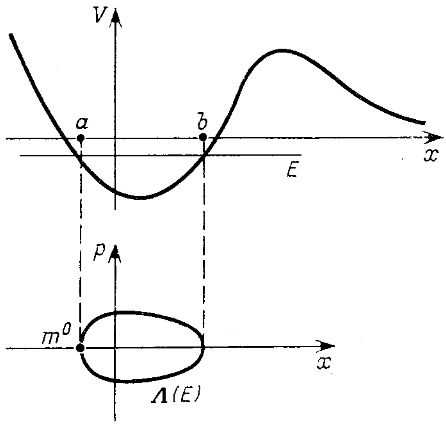


Рис. 13

Пример 2.2. *Задача на собственные значения*, $n = 1$. Пусть H вещественный символ на $\mathbf{R}^2$, причем в некотором интервале энергий все линии уровня $\Lambda(E) = \{H(\alpha, p) = E\}$ являются гладкими замкнутыми кривыми, гладко зависящими от E. Каждая такая кривая — лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^2$, и на ней есть инвариантная мера $d\sigma = dt/T$, где t — время в гамильтоновой системе $\dot{x} = H_p'$, $\dot{p} = -H_x'$, а $T = T(E)$ период.

Например, если $H = p^2 + V(x)$, то dt выражается через меру dx так:

$$dt = \frac{1}{2}(E - V(x))^{-1/2}\, dx,$$

$$T = \int_a^b (E - V(x))^{-1/2}\, dx.$$

Границы $a = a(E)$ и $b = b(E)$ — это точки поворота, в которых $V = E$ (рис. 13).

Правило квантования (2.20) дает уравнение

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{H=E} p\, dx = k + \frac{\mu}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}, \tag{2.23}$$

которое связывает параметры E и $\hbar$ с целыми «квантовыми» числами k. Число μ — индекс замкнутой кривой.

Например, в случае $H = p^2 + V$ это условие выглядит так:

$$\frac{1}{\pi\hbar}\int\limits_{a(E)}^{b(E)} (E - V(x))^{1/2}\, dx = k + \frac{1}{2} \tag{2.23a}$$

поскольку $\mu = 2$ (см. пример 2.1).

Условия (2.23) определяют значения $E = E_k(\hbar)$. При этом, очевидно, $k \sim 1/\hbar$. Соответствующие кривые $\Lambda = \Lambda(E_k(\hbar))$ квантованы, и в силу теоремы 2.2 над ними существует оператор квазиклассического представления.

Поскольку единичная функция 1 является собственной для оператора $\mathrm{ad}(H)$ на Λ, то, ограничиваясь в (2.22) точностью $O(\hbar^2)$ и выбирая $\varkappa = 0$, $\varphi = 1$, $\mathscr{E}_1 = 0$, заключаем, что волновой пакет $\psi = K_{\Lambda, \sigma, m}(1)$ удовлетворяет соотношениям

$$\hat{H}\psi = E_k(\hbar)\,\psi + \hbar^2 r, \quad \sup_{\hbar} \| r \|_{L^2} < \infty. \tag{2.24}$$

В силу аксиомы (II) (см. п. 2.1) его норма близка к единице:

$$\| \psi \|_{L^2} = 1 + O(\hbar^2). \tag{2.25}$$

Следствие 2.2. *Пусть* $V \in C_0^\infty(R)$, $V_0 < V_1 < 0$ *и связная компонента* $\Lambda(E)$ *линии уровня* $\{p^2 + V(x) = E\}$ *гладко зависит от энергии на отрезке* $V_0 - 0 \leqslant E \leqslant V_1 + 0$. *Тогда числа* $E_k(\hbar) \in [V_0, V_1]$, *полученные из правила квантования* (2.23) *или* (2.23а), *отстоят от собственных значений* $\hat{H} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ *на расстояние* $O(\hbar^2)$.

Доказательство. Спектр замыкания оператора $\hat{H}$ в $L^2(\mathbf{R})$ на полуоси $E < 0$ дискретен. Кроме того, в силу самосопряженности $\hat{H}$ норма резольвенты $(E - \hat{H})^{-1}$ равна расстоянию от E до спектра $\hat{H}$. Следовательно, расстояние от любой точки $E < 0$ до множества собственных значений $\hat{H}$ оценивается сверху числом $\| (E - \hat{H})\psi \| \cdot \| \psi \|^{-1}$ для любой ψ из области определения $\hat{H}$. Остается применить эту оценку к $E = E_k(\hbar)$ и ψ из (2.24), (2.25). Следствие доказано.

В случае $H = p^2 + V$ волновой пакет $\psi = K_\Lambda(1)$ устроен так:

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{T\sqrt{E - V(x)}}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int\limits_a^x \sqrt{E - V(y)}\, dy - \frac{\pi}{4}\right) g(x) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi\hbar T)^{1/2}} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(xp - \int\limits_0^p \mathscr{X}(p)\, dp\right)\right\} |V'(\mathscr{X}(p))|^{-1/2} \times$$

$$\times (1 - g(\mathscr{X}(p)))\, dp + \frac{e^{ik\pi}}{(2\pi\hbar T)^{1/2}} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(xp - \int\limits_0^p \tilde{\mathscr{X}}(p)\, dp\right)\right\} \times$$

$$\times |V'(\tilde{\mathscr{X}}(p))|^{-1/2} (1 - g(\tilde{\mathscr{X}}(p)))\, dp. \tag{2.26}$$

Здесь $E=E_k(\hbar)$; функция $g\in C_0^\infty(a,\ b)$, причем $g=1$ на интервале $(a,\ b)$, за исключением окрестностей его концов; через $\mathscr{X}(p)$ и $\tilde{\mathscr{X}}(p)$ обозначены решения уравнения $p^2+V(x)=E$ относительно неизвестной x вблизи точек a и b соответственно. Последние два слагаемых в (2.26) — это вклады от «особых» карт IV и II.

Вклады от «неособых» карт I и III просуммированы и дали косинус в (2.26). Внутри интервала $a+\varepsilon<x<b-\varepsilon$ поведение пакета ψ определяется этим косинусом, а два последних интеграла дают здесь вклад $O(\hbar^\infty)$. Но вблизи точек поворота $x=a$ или $x=b$ пакет задается именно одним из интегралов. В самих точках поворота

$$\psi(a)\sim\psi(b)\sim\hbar^{-1/6},$$

т. е. амплитуда пакета в sup-норме неограниченна при $h\to 0$. Далее, за точками поворота $x<a-\varepsilon$ или $x>b+\varepsilon$ пакет имеет

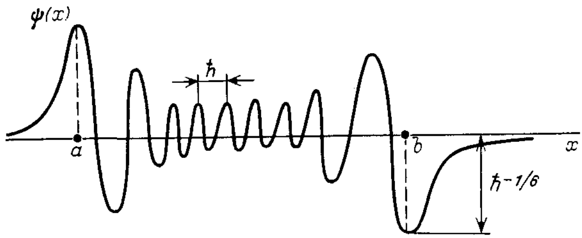


Рис. 14

величину $O(\hbar^\infty)$ (рис. 14). Конечно, интегралы в (2.26) можно записать с помощью известных специальных функций, например функций Эйри и Вебера. Так обычно и поступают в одномерных задачах [6]. Мы привели здесь выражение (2.26) для иллюстрации общей конструкции оператора K в простейшей ситуации.

Построенная асимптотика (2.24), (2.25) порождает ряд вопросов.

— Увеличение точности асимптотики до $O(\hbar^\infty)$ с помощью (2.22) дает поправки к числам E_k, полученным из правила (2.23); какими формулами задаются эти поправки?

— Все ли собственные значения $\hat{H}$ аппроксимируются числами E_k?

— Аппроксимирует ли волновой пакет (2.26) собственную функцию оператора $\hat{H}$?

— Каким спектральным характеристикам отвечают числа E_k в случае, если они попадают в область, где нет собственных значений $\hat{H}$ (например, в область $E_k>0$ для $H=p^2+V,\ V\in C_0^\infty$)?

— Работает ли правило квантования (2.23) на низких уровнях $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, и как устроена асимптотика соответствующих собственных функций равномерно по k?

— Как влияет на асимптотику спектра $\hat{H}$ наличие нескольких компонент связности уровня энергии $\{H=E\}$?

В одномерном случае $n=1$ на все эти вопросы имеются удовлетворительные ответы (см. обзор [88]).

2.5. Задача Коши. Осциллятор и повороты на 90°. Рассмотрим теперь нестационарную систему

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}=\hat{H}u, \quad \hat{H}=H\left(\overset{\omega}{x}, -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\right), \quad x\in\mathbf{R}^n, \quad u|_{t=0}=u_0. \tag{2.27}$$

Добавочная координата «время» t расширяет фазовое пространство до $(2n+2)$-мерного:

$$\left(\mathbf{R}_x^n\oplus\mathbf{R}_p^n\oplus\mathbf{R}_t\oplus\mathbf{R}_{p_t}\right), \quad dp\wedge dx+dp_t\wedge dt.$$

Пусть начальное условие в (2.27) — это квазиклассический волновой пакет вида

$$u_0=K_{\Lambda,\sigma,m^0}(\varphi^0), \quad \varphi^0\in C_0^\infty(\Lambda), \tag{2.28}$$

где Λ — лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}_x^n\oplus\mathbf{R}_p^n$, а σ, φ^0, m^0 — мера, функция и точка на Λ. Тогда эволюция во времени дает два лагранжевых подмногообразия (рис. 15):

$$\Lambda^t\overset{\text{def}}{=}\gamma^t(\Lambda)\subset\mathbf{R}^{2n} \quad (\text{здесь } \Lambda^0\equiv\Lambda),$$

$$\Lambda^\#\overset{\text{def}}{=}\{(x, p; t, p_t)\,|\,(x, p)\in\Lambda^t, \quad p_t+H(x, p, t)=0\}\subset\mathbf{R}^{2n+2}.$$

Здесь γ^t — сдвиг вдоль гамильтоновой системы, отвечающей функции $H(x, p, t)$. На рисунке показаны эти лагранжевы подмного-

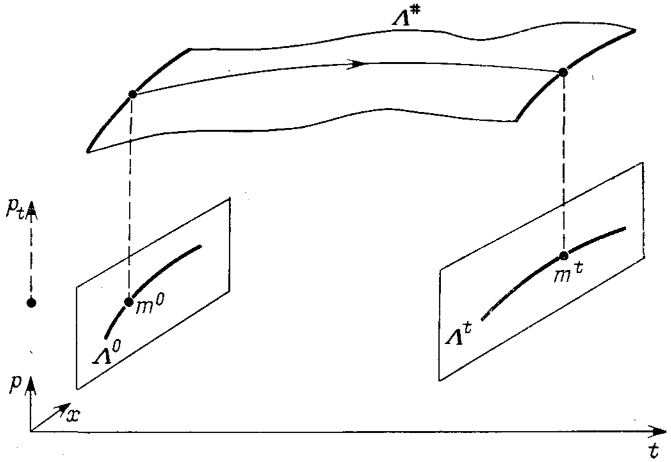


Рис. 15

образия (но не нарисована координатная ось p_t). **Начальная** точка $m^0\in\Lambda$ дает точку $m^{0\#}=(m^0, 0, -H(m^0, 0))\in\Lambda^\#$ и **сдвинутую** по траектории точку $m^t=\gamma^t(m^0)\in\Lambda^t$.

Отметим, что на Λ^t имеется естественная мера $\sigma^t=\gamma^t_*(\sigma)$, а на пленке $\Lambda^\#$ — мера $\sigma^\#=\sigma^t\otimes dt$, инвариантная относительно сдвигов вдоль гамильтоновой системы.

Пусть $b^{(1)}_H$ оператор на $\Lambda^\#$, построенный по функции $H(x, p, t)$ согласно следствию 2.1. Он порождает оператор $\tilde{b}^{(1)}_H=\gamma^{t*}\cdot b^{(1)}_H\cdot(\gamma^t)^{-1*}$ на Λ. Через $\varphi=\mathrm{Exp}\left(\int\limits_0^t i\hbar b^{(1)}_H\right)$ обозначим функцию из $C_0^\infty(\Lambda)$, которая является решением задачи Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-i\hbar\tilde{b}^{(1)}_H\varphi=O(\hbar^\infty),\quad \varphi\,|_{t=0}=\varphi^0,$$

и разнесем эту функцию с помощью сдвигов γ^t на все многообразия Λ^t и на пленку $\Lambda^\#$:

$$\varphi^t(m)=\varphi^\#(m,\ t)\overset{\mathrm{def}}{=}\varphi\left((\gamma^t)^{-1}(m)\right),\quad m\in\Lambda^t.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{ad}(H)-i\hbar b^{(1)}_H\right)\varphi^\#=0,$$

и в силу (2.22)

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\hat{H}\right)K_{\Lambda^\#,\,\sigma^\#,\,m^{0\#}}(\varphi^\#)=O(\hbar^\infty). \tag{2.29}$$

Здесь правая часть оценивается в $L^2(\mathbf{R}^n)$ равномерно на любом отрезке $t\in[0,\ T]$ (такая равномерность — следствие «неособости» координаты t; в формуле для оператора K по этой координате нет преобразования Фурье). Если в определении оператора $b^{(1)}_H$ и соответствующей функции φ бесконечные ряды по $-i\hbar$ оборвать на N-м члене, то остаток $O(\hbar^\infty)$ в (2.29) заменится на $O(\hbar^{N+1})$.

Лемма 2.11. *По модулю $O(\hbar^\infty)$ выполнено равенство*

$$K_{\Lambda^\#,\,\sigma^\#,\,m^{0\#}}(\varphi^\#)=e^{ic\,(m^0\to m^t)}K_{\Lambda^t,\,\sigma^t,\,m^t}(\varphi^t),$$

где $c(\ldots)$ — вклад траектории гамильтоновой системы на лагранжевой пленке $\Lambda^\#\subset\mathbf{R}^{2n+2}$.

Доказательство следует из приведенного выше рисунка и из определения оператора K.

Отметим [97, 102], что если матрица $\partial^2H/\partial p^2$ положительна и концы траектории m^0 и m^t неособые (т. е. лежат вне особенностей проектирования Λ и Λ^t на $\mathbf{R}^n_x$), то индекс $\mathrm{Ind}\,(m^0\to m^t)$ совпадает с индексом Морса траектории.

Из (2.29) и леммы 2.8 получаем

Следствие 2.3 [97]. *Пусть $H\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n+1})$, $\mathrm{Im}\,H=0$. Пусть на окрестности лагранжева многообразия $\Lambda\subset\mathbf{R}^{2n}$ при всех $t\in[0,\ T]$ определен сдвиг по траекториям гамильтоновой системы, отвечающей функции $H(x,\ p,\ t)$. Тогда, если решение задачи Коши* (2.27) *с начальным условием* (2.28) *существует при $t\in[0,\ T]$, оно имеет асимптотику*

$$u(t)=e^{ic\,(t)}K_{\Lambda^t,\,\sigma^t,\,m^t}(\varphi^t)+O(\hbar^\infty), \tag{2.30}$$

где $c(t)=\frac{1}{\hbar}\int\limits_{m^0}^{m^t}(p\,dx-H\,dt)-\frac{\pi}{2}\mu(t)$, $\mu(t)=\operatorname{Ind}(m^0\to m^t)$ — *индекс* (*на пленке* $\Lambda^{\#}$) *траектории гамильтоновой системы, выходящей из точки* $m^0\in\Lambda$, *а остаток* $O(\hbar^\infty)$ *оценивается в* $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ *равномерно по* $t\in[0,T]$. *Этот остаток заменяется на* $O(\hbar^N)$, *если ряд по степеням* $(-i\hbar)$ *для амплитуды* $\varphi^t=(\gamma^t)^{-1*}\operatorname{Exp}\left(\int\limits_0^t i\hbar\tilde{b}_H^{(1)}\right)\varphi^0$ *оборвать на* N*-м члене.*

Для того чтобы решить задачу (2.27) с произвольными начальными данными, не обязательно вида (2.28), построим асимптотику фундаментального решения.

Рассмотрим удвоенное фазовое пространство

$$\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}=\{(x,\ p;\ x',\ p')\},\ dp\wedge dx-dp'\wedge dx'.$$

Второе слагаемое в симплектической форме берется со знаком минус (чему соответствует обозначение $(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$). Этот минус обязан своим появлением следующей лемме.

Лемма 2.12. *Если* γ: $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ *есть пуассоново отображение* (*сохраняет симплектическую структуру* $dp\wedge dx$), *то его график*

$$\operatorname{Gr}(\gamma)=\{(z,\ z')\,|\,z=\gamma(z')\}$$

лагранжев в $\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$.

В частности, график тождественного отображения — диагональ $\operatorname{diag}=\{(z,\ z')\,|\,z=z'\}$. Каноническими координатами на ней служат, например, $(p,\ x')$. Диагональ снабжена естественной мерой $\operatorname{can}=dz'$. Фиксируем произвольную начальную точку $(m^0,\ m^0)\in\in\operatorname{diag}$.

Оператор K_{diag} переводит функции от p, x' в функции от переменных x, x'. Из определения (2.21) формально следует

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}K_{\operatorname{diag},\,\operatorname{can},\,(m,\,m^0)}(1)=\delta(x-x'). \tag{2.31}$$

Конечно, единичная функция 1 имеет некомпактный носитель, т. е. не принадлежит области определения K_{diag}. Поэтому нужно уточнить (2.31). Введем функцию $g_D\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, тождественно равную единице в окрестности замыкания ограниченной области D. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int K_{\operatorname{diag}}(g_D)(x,\ x')\,u_0(x')\,dx'=$$
$$=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\iint e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}g_D(x',\ p)\,u_0(x')\,dp\,dx'=$$
$$=g_D\left(\overset{1}{x},\ -i\hbar\overset{2}{d/\partial x}\right)u_0(x)=u_0(x)+O(\hbar^\infty) \tag{2.32}$$

для любой функции $u_0 \in CS$, носитель осцилляций которой лежит в D:

$$\operatorname{osc}^{(\infty)}(u_0) \subset D. \tag{2.33}$$

На таких функциях соотношение (2.32) является уточнением формального равенства (2.31).

Рассмотрим теперь пуассоново отображение γ^t: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ — сдвиг по траекториям H. На графике $\operatorname{Gr}(\gamma^t) = \{(\gamma^t(z'), z')\}$ фиксируем начальную точку (m^t, m^0) и переносим с диагонали на этот график меру can, а также переносим функцию $g_D \to g_D^t$ (как выше мы переносили $\varphi^0 \to \varphi^t$). Обозначим через $T(\gamma^t, m^0)$ интегральный оператор с ядром

$$T(\gamma^t, m^0) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} K_{\operatorname{Gr}(\gamma^t),\,\mathrm{can},\,(m^t,\,m^0)}(g_D^t).$$

Следствие 2.4. *Оператор* $G = \exp\{ic^{\#}(t)\}\, T(\gamma^t, m^0)$, *где*

$$\begin{gathered} c^{\#}(t) = \frac{1}{\hbar}\int_{m^0}^{m^t}(p\,dx - H\,dt) - \frac{\pi}{2}\mu^{\#}(t), \\ \mu^{\#}(t) = \operatorname{Ind}((m^0, m) \to (m^t, m^0)), \end{gathered} \tag{2.34}$$

на классе начальных условий (2.33) *отличается на* $O(\hbar^\infty)$ *от разрешающего оператора задачи Коши* (2.27).

Подчеркнем, что $T(\gamma^t, m^0)$ лишь кусочно непрерывен по t, но разрешающий оператор G в (2.34), конечно, гладко зависит от t.

Сравнивая формулу для G с (2.30), получаем соотношение между операторами K над многообразиями Λ, $\Lambda^t = \gamma^t(\Lambda)$ и $\operatorname{Gr}(\gamma^t)$:

$$K_{\Lambda^t,\,\sigma^t,\,m^t}(\varphi^t) = \\ = e^{i(\pi/2)[\mu(t) - \mu^{\#}(t)]}\, T(\gamma^t, m^0)\, K_{\Lambda,\,\sigma,\,m^0}(\varphi^0) + O(\hbar^\infty). \tag{2.35}$$

Из двух индексов в экспоненте (2.35) первый берется на лагранжевой пленке $\Lambda^* \subset \mathbf{R}^{2n+2}$, а второй — на пленке $\operatorname{Gr}^{\#} \subset \mathbf{R}^{4n+2}$. Поясним теперь эти формулы на простом примере.

Пример 2.3. *Осциллятор*

$$i\hbar\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{2}(-\hbar^2\Delta + |x|^2)\,G, \quad G|_{t=0} = \delta(x - x').$$

Здесь $x, x' \in \mathbf{R}^n$, Δ — лапласиан в $\mathbf{R}^n$. Эта задача Коши решается точно:

$$G(x, x', t) = \\ = (2\pi i\hbar \sin t)^{-n/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\operatorname{ctg} t}{2}(|x|^2 + |x'|^2) - \frac{xx'}{\sin t}\right)\right\}. \tag{2.36}$$

Такой же ответ дает и формула (2.34). Действительно, в данном случае $H = \frac{1}{2}(|p|^2 + |x|^2)$ и преобразование γ^t — поворот на угол t:

$$\begin{pmatrix}\mathscr{X}\\ \mathscr{P}\end{pmatrix}=\gamma^t\begin{pmatrix}x'\\ p'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ p'\end{pmatrix}.$$

Поэтому в интервале времени $-\pi/2<t<\pi/2$ график $\mathrm{Gr}(\gamma^t)$ диффеоморфно проектируется на плоскость $\mathbf{R}^n_p\times\mathbf{R}^n_{x'}$, так что через координаты $(p,\ x')$ выражается сужение на этот график всех остальных координатных функций:

$$\mathscr{X}=\frac{x'+p\sin t}{\cos t},\quad \mathscr{P}'=\frac{p+x'\sin t}{\cos t}.$$

В данном случае оператор $b_H^{(1)}$ — взятие вторых производных — зануляет единицу 1. Поэтому, формально полагая $g_D=1$, из (2.21) имеем

$$K_{\mathrm{Gr}\,(\gamma^t)}(1)=$$
$$=\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\right)^{n/2}\exp\left\{-\frac{i\pi}{2}\left[\operatorname{ind}\left(\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial p}\right)+\frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial p}\right](\bar p,\ \bar x')\right\}\times$$
$$\times\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p(x-\mathscr{X})+\int\limits_{(\bar p,\ \bar x')}^{(p,\ x')}(\mathscr{P}\,d\mathscr{X}-p'\,dx')\right]\right\}\left|\frac{\mathscr{D}(\mathscr{X}',\ \mathscr{P}')}{\mathscr{D}(p,\ x')}\right|^{1/2}dp,$$

где $(\bar p,\ \bar x')$ — координаты начальной точки $(m^t,\ m^0)\in\mathrm{Gr}(\gamma^t)$. Таким образом,

$$K_{\mathrm{Gr}\,(\gamma^t)}(1)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}n\,\mathrm{sgn}\,t}}{(\cos t\cdot 2\pi\hbar)^{n/2}}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{px'}{\cos t}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(|p|^2+|\bar p|^2+|x'|^2-|\bar x'|^2)\operatorname{tg}t\right\}dp=$$
$$=(|\sin t|)^{-n/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2}(x^2+x'^2)\operatorname{tg}t-\frac{xx'}{\sin t}+\frac{1}{2}\left(\bar x'^2-\bar p^2\right)\operatorname{tg}t\right)\right\}.$$
(2.37)

Учтем, что m^t — сдвиг m^0 вдоль траектории и поэтому координаты $(\bar p,\ \bar x')$ точки $(m^t,\ m^0)$ на графике $\mathrm{Gr}(\gamma^t)$ выражаются через координаты точки $m^0=(x^0,\ p^0)$ по формуле

$$\bar p=p^0\cos t-x^0\sin t,\quad \bar x'=x^0.$$

Вычисляя показатель экспоненты в (2.34):

$$\int\limits_{m^0}^{m^t}(p\,dx-H\,dt)=\frac{1}{2}(|\bar p|^2-|\bar x'|^2)\operatorname{tg}t=\frac{|p^0|^2-|x^0|^2}{2}\sin t\cos t-x^0p^0\sin t$$
(2.38)

мы видим, что формулы (2.34), (2.37), (2.38) дают искомую быстро осциллирующую экспоненту из (2.36). Но вместо множителя перед этой экспонентой $(i\sin t)^{-n/2}$ у нас появляется $|\sin t|^{-n/2}\times$ $\times\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\mu^{\#}(t)\right)$, где $\mu^{\#}(t)=\mathrm{Ind}((m^0,\ m^0)\to(m^t,\ m^0))$. Пока

$|t| < \pi/2$ и мы находимся в карте с координатами (p, x', t), индекс пути в карте вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind}(A \to B) = \operatorname{ind}\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}(A) - \operatorname{ind}\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}(B) + \\ + \frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}(A) - \frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}(B).$$

В частности,

$$\mu^{\#}(t) = \frac{n}{2} - \operatorname{ind}(\sin t \cdot I) = \begin{cases} n/2, & 0 < t < \pi/2; \\ 0, & t = 0; \\ -n/2, & 0 > t > -\pi/2. \end{cases} \tag{2.39}$$

Это и дает искомый предэкспоненциальный множитель в (2.36) на интервале $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Когда $t \to \pi/2 - 0$, график $\operatorname{Gr}(\gamma^t)$ перестает хорошо проектироваться на $\mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}^n_{x'}$. Нужно перейти к новым локальным координатам, например к (x, x'). Тогда

$$\mathscr{P} = x \operatorname{ctg} t - \frac{x}{\sin t}, \quad \mathscr{P}' = \frac{x}{\sin t} - x' \operatorname{ctg} t.$$

Скачок индекса при таком переходе дается формулой (2.12):

$$\underbrace{(p, x')}_{\mathscr{U}_\alpha} \to \underbrace{(x, x')}_{\mathscr{U}_\beta}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \operatorname{ind}\left(-\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}\right) - n = \operatorname{ind}(-\operatorname{ctg} t \cdot I) - n = 0,$$

$$0 < t < \pi/2,$$
$$|\alpha| = n, \quad \beta = \varnothing, \quad \mu_\beta = 0.$$

Скачок равен нулю. Следовательно, формула (2.39) продолжает работать и в интервале $|t| < \pi$, т. е. до тех пор, пока график $\operatorname{Gr}(\gamma^t)$ хорошо проектируется на $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_{x'}$.

При $t \to \pi - 0$ нужно перейти к новым координатам; например, можно вновь вернуться к (p, x'). Тогда в силу (2.12):

$$\underbrace{(x, x')}_{\mathscr{U}_\beta} \to \underbrace{(p, x')}_{\mathscr{U}_\delta}, \quad \mu_{\beta\delta} = \operatorname{ind}\left(\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}\right) = \operatorname{ind}(\operatorname{tg} t \cdot I) = n,$$

$$\pi/2 < t < \pi, \quad \beta = \varnothing, \quad |\delta| = n,$$

$$\mu_\delta = \operatorname{ind}\left(\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}\right) + \frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}\left(\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial p}\right) = \\ = \operatorname{ind}(\operatorname{tg} t \cdot I) + \frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}(\operatorname{tg} t \cdot I) = \begin{cases} n, & \pi/2 < t < \pi; \\ n/2, & t = \pi/2; \\ 0, & \pi < t < 3\pi/2. \end{cases}$$

Следовательно, при переходе через точку $t = \pi$ (т. е. через особенность Σ проектирования лагранжевой пленки Λ на $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t$) индекс траектории $\mu^{\#}(t)$ делает два скачка на $n/2$. Общая формула такая:

$$\mu^{\#}(t)=\begin{cases}(k+1/2)\,n & \text{при } k\pi<t<(k+1)\,\pi,\\ kn & \text{при } t=k\pi.\end{cases}$$

В частности, $\mu^{\#}(2\pi)=2n$.

Гамильтонов поток γ^t периодичен в $\mathbf{R}^{2n}$ с периодом 2π. Следовательно, $\mathrm{Gr}(\gamma^{2\pi})=\mathrm{Gr}(\mathrm{id})=\mathrm{diag}\,\mathbf{R}^{2n}\times\mathbf{R}^{2n}$. Формула (2.34) при $t=2\pi$ с учетом (2.38) дает

$$G\big|_{t=2\pi}=e^{-i(\pi/2)\mu^{\#}(2\pi)}G\big|_{t=0}=e^{-i\pi n}\delta(x-x').$$

Итак, в данном примере классическая динамическая система 2π-периодична, но соответствующая квантовая система этим свойством не обладает: при нечетном n она лишь 4π-периодична.

Отметим, что классические повороты на угол $\pm\pi/2$ в квантовом случае устроены так:

$$G\big|_{t=\pi/2}=\frac{1}{(2\pi i\hbar)^{n/2}}e^{-\frac{i}{\hbar}xx'},\quad G\big|_{t=-\pi/2}=\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\right)^{n/2}e^{\frac{i}{\hbar}xx'}.$$

Это интегральные ядра преобразований Фурье: $G\big|_{t=\pm\pi/2}=\mathscr{F}^{\pm1}$.

Таким образом, из (2.34), (2.35), (2.38) при $t=\pm\pi/2$ получаем

$$\mathscr{F}^{\pm}K_{\Lambda,\sigma,m^0}(\varphi^0)=$$
$$=\exp\left\{-|ix^0p^0-i\frac{\pi}{2}\mu\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}K_{\Lambda^{\pm},\sigma^{\pm},m^{\pm}}(\varphi^{\pm}),\qquad(2.40)$$

где $m^0\in\Lambda$ — начальная точка, $(x^0,\ p^0)$ — ее координаты в $\mathbf{R}^n\oplus\mathbf{R}^n$, $\Lambda^{\pm}=\gamma^{\pm\frac{\pi}{2}}(\Lambda)$ — поворот Λ на угол $\pm\pi/2$, а $\sigma^{\pm}$, $m^{\pm}$, $\varphi^{\pm}$ — соответственно мера, начальная точка и функция на $\Lambda^{\pm}$, перенесенные с Λ этим поворотом.

Число $\mu(\pm\pi/2)$ в (2.40) — это индекс траектории $\mathrm{Ind}(m^0\to m^t)\big|_{t=\pm\pi/2}$ на пленке $\Lambda^{\#}\subset\mathbf{R}^{2n+2}$. В силу замечания, сделанного после леммы 2.11, если точка $m^0\in\Lambda$ неособая, то $\mu(t)$ совпадает с индексом Морса траектории $x(t)=x^0\cos t+p^0\sin t$, $p^0=\mathscr{P}(x^0)$, где $\{p=\mathscr{P}(x)\}$ — уравнение Λ в окрестности точки m^0. Поэтому

$$\mu(\pm\pi/2)=\pm\,\mathrm{ind}\left(\pm\frac{\partial\mathscr{P}(x^0)}{\partial x^0}\right),\quad m^0\notin\Sigma.\qquad(2.41)$$

Формула (2.40) — это важный частный случай формулы (2.35). Мы видим, что *преобразование Фурье пакета* $K_{\Lambda}(\varphi^0)$ *приводит к повороту многообразия* Λ *на угол* $90°$ *и добавлению некоторого фазового множителя.*

Можно применить этот результат, например, к двойному преобразованию Фурье (2.18), (2.19). Здесь нужно дважды использовать выражение (2.41) для индекса ν в формуле поворота (2.40).

Следствие 2.5. *Коцикл* (2.12), *определяющий класс когомологий* $[\mu]\in H^1(\Lambda,\ \mathbf{Z}_4)$, *может быть вычислен так:*

$$\mu_{\alpha\beta}=\mathrm{ind}\frac{\partial\mathscr{X}_{\beta\setminus\alpha}}{\partial p_{\beta\setminus\alpha}}-\mathrm{ind}\frac{\partial\mathscr{P}_{\alpha\setminus\beta}}{\partial\mathscr{X}_{\alpha\setminus\beta}}\ (\mathrm{mod}\,4).$$

ГЛАВА IV

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

§ 1. Обзор различных подходов к квантованию

Этот параграф играет чисто эвристическую роль и нужен для объяснения логики дальнейшего изложения. Обзор подходов к проблеме квантования, который здесь дается, весьма краток и не претендует на полноту. Основная наша цель: объяснить место квазиклассического приближения среди других подходов, а также ввести терминологию и обозначения.

1.1. Общие идеи и обозначения. Мы будем говорить всюду ниже о задаче квантования в ее гамильтоновом варианте. Таким образом, исходным объектом считается скобка Пуассона

$$\{f, g\} = \Psi(df, dg) \tag{1.1}$$

на некотором многообразии $\mathcal{N}$. В частности, эта скобка может быть невырожденной — и такой случай мы ниже рассмотрим отдельно — но всегда предполагается, что либо топология $\mathcal{N}$ нетривиальна, либо тензор Ψ нетривиально (нелинейно) зависит от координат на $\mathcal{N}$. Именно в такой ситуации проблема квантования скобки (1.1) представляет интерес.

Под *квантованием* понимается построение ассоциативной некоммутативной алгебры M, зависящей от параметра $\hbar \in (0, 1]$, которая в пределе $\hbar \to 0$ определенным образом связана с пуассоновой алгеброй функций $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ и с бесконечномерной группой $\mathcal{G}(\mathcal{N})$ пуассоновых преобразований на $\mathcal{N}$. А именно, постулируется существование отображений

$$\pi_\hbar\colon \mathcal{F}(\mathcal{N}) \to M, \quad \Pi_\hbar\colon \mathcal{G}(\mathcal{N}) \to M, \tag{1.2}$$

которые обладали бы следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \pi_\hbar \text{ линейно}, \\ \pi_\hbar(1) = \mathbb{1}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\pi_\hbar(f)\,\pi_\hbar(g) = \pi_\hbar\Big(fg - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\}\Big) + O(\hbar^2), \tag{1.4}$$

$$\pi_\hbar(f)\,\Pi_\hbar(\gamma) = \Pi_\hbar(\gamma)\,\pi_\hbar(\gamma^* f) + O(\hbar^2), \tag{1.5}$$

$$\Pi_\hbar(\gamma_1)\,\Pi_\hbar(\gamma_2) = e^{ic}\Pi_\hbar(\gamma_1\gamma_2) + O(\hbar), \tag{1.6}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Pi_\hbar(\gamma_f^t) = \pi_\hbar(f)\,\Pi_\hbar(\gamma_f^t) + O(\hbar^2), \tag{1.7}$$

где $\mathbb{1}$ — единица в M, f, $g \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$, γ, γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{N})$, $c = c(\hbar, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbf{R}$, γ_f^t — поток поля $\mathrm{ad}(f)$ на $\mathcal{N}$.

Если здесь отбросить аксиомы (1.5) — (1.7), то получится определение *деформационного квантования* [155, 156, 208]. Точнее, деформационное квантование реализует алгебру M как пространство функций $\mathcal{S}(\mathcal{N})$, гладко зависящих от $\hbar$ при $\hbar \to 0$, снабженное новым ассоциативным умножением $f \otimes g \to f * g$ таким, что

$$f * 1 = 1 * f = f, \tag{1.3a}$$

$$f * g = fg - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + O(\hbar^2). \tag{1.4a}$$

В качестве $\pi_\hbar$ берется тождественное вложение $\mathcal{F}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{N})$.

Ниже мы еще вернемся к этому важному начальному этапу квантования, а сейчас заметим, что реализовать три другие аксиомы (1.5) — (1.7) в такой схеме невозможно, поскольку они требуют наличия в алгебре $\mathcal{S}$ осциллирующих, т. е. негладких при $\hbar \to 0$ функций (это видно, например, из (1.7)).

В некоторых случаях удается расширить класс символов $\mathcal{S}$ (до $\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{N})$), включив в него осциллирующие функции, и сохранив на $\mathcal{S}_\hbar$ ассоциативное умножение $*$. Это относится, прежде всего, к тем специальным многообразиям $\mathcal{N}$, на которых имеется глобальный аналог преобразования Фурье (как, например, на симметрических пространствах [10, 11]).

Построение такого расширения и представляет основную проблему. Иногда ее удается решить, резко ограничив исходный класс символов $\mathcal{S}$ и класс пуассоновых преобразований в (1.5) — (1.7). По этому пути развивается теория геометрического квантования [77, 200, 243], о чем мы подробнее скажем ниже. А сейчас отметим, что наличие осцилляций символов $f_\hbar \in \mathcal{S}_\hbar$ означает «протяженность» носителей их Фурье-образов

$$\tilde{f}_\hbar(x) = \int f_\hbar(\xi) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} x\xi\right\} d\xi$$

(очевидно, если f гладкая при $\hbar \to 0$, то $\tilde{f}_\hbar(x)$ локализована в точке $x = 0$ по $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$). Итак, аксиомы (1.5) — (1.7) приводят к необходимости вводить «протяженный» дуальный объект (многообразие) $\mathcal{M}$, на котором сосредоточены Фурье-образы символов из $\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{N})$.

Например, если $\mathcal{N} = \mathfrak{g}^*$ — коалгебра Ли с линейной скобкой, то дуальным объектом будет группа Ли $\mathcal{M} = G$, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. детально пример 1.9 приложения 1).

Как мы увидим ниже, в случае общего пуассонова многообразия $\mathcal{N}$ в качестве дуального $\mathcal{M}$ можно взять конечномерную псевдогруппу, отвечающую $\mathcal{N}$. Но при этом нужно сделать одно «небольшое» отступление: предположить, что умножение $*$ в классе символов $\mathcal{S}_\hbar$ определено не точно, а лишь по $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$, и с такой же точностью выполнено условие ассоциативности.

Это допущение и является основой *квазиклассического приближения* к проблеме квантования.

Мы ниже называем многообразие $\mathscr{N}$ *спектром* квантовой алгебры функций $M = \mathscr{S}_\hbar$ и обозначаем $\mathscr{N} = \operatorname{spec}(M)$, а многообразие $\mathscr{M}$ называем *коспектром* алгебры M и обозначаем $\mathscr{M} = \operatorname{cospec}(M)$.

Строго говоря, $\mathscr{N}$ (или $\mathscr{M}$) — это лишь классический предел *квантового* спектра $\mathscr{N}_\hbar$ (или коспектра $\mathscr{M}_\hbar$). Квантовая алгебра M при этом реализуется как алгебра функций на спектре:

$$M = F(\mathscr{N}_\hbar),$$

а сопряженное к нему пространство M^* реализуется как пространство функций на квантовом коспектре:

$$M^* = F(\mathscr{M}_\hbar).$$

Если обозначить через $W\colon M \otimes M \to M$ операцию умножения в алгебре M, то она порождает коумножение $\Delta = W^*\colon M^* \to M^* \otimes M^*$ в пространстве M^* и умножение в алгебре $F^*(\mathscr{M}_\hbar)$ функционалов на коспектре:

$$\langle \varphi * \psi, f \rangle = \langle \varphi \otimes \psi, \Delta(f) \rangle, \quad \varphi, \psi \in F^*(\mathscr{M}_\hbar), \quad f \in F(\mathscr{M}_\hbar).$$

Очевидно, $M \subset F^*(\mathscr{M}_\hbar)$, т. е. $F^*(\mathscr{M}_\hbar)$ — это расширение исходной алгебры M. Преобразование Фурье с такой точки зрения — это гомоморфизм

$$F(\mathscr{N}_\hbar) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathscr{M}_\hbar).$$

Проблема квантования состоит в том, чтобы построить все перечисленные объекты, исходя из скобки Пуассона (1.1).

Если от этой общей алгебраической формулировки вернуться вновь к частному примеру линейной скобки на $\mathscr{N} = \mathfrak{g}^*$, то можно заметить, что вместо класса символов $\mathscr{S}_\hbar$, заданных на $\mathfrak{g}^*$, или их Фурье-образов, заданных на группе G, естественно было бы рассмотреть волновые пакеты над $\mathfrak{g}^* \times G \approx T^*G$, т. е. сечения пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{g}^* \times G)$ в смысле гл. IV. Вместо умножения в алгебре $M = F(\mathfrak{g}^*)$ или в $F^*(G)$ можно, более общим образом, рассматривать умножение сечений пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{g}^* \times G)$ — т. е. *квантовать невырожденную скобку Пуассона* на $\mathfrak{g}^* \times G$.

Аналогично, в случае произвольной скобки (1.1) на $\mathscr{N}$ мы имеем симплектический группоид $\mathscr{E} \approx \mathscr{N} \times \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — псевдогруппа над $\mathscr{N}$ (см. гл. II), и можем поставить задачу о квантовании симплектической структуры на $\mathscr{E}$. В квазиклассическом приближении эта задача полностью решена (см. § 2, 3 ниже). Тем самым, оказывается проквантованной в таком приближении скобка Пуассона на $\mathscr{N}$ (§ 4 ниже).

Отметим, что симплектическая структура на группоиде $\mathscr{E}$ порождает на дуальном объекте $\mathscr{M}$ — т. е. на псевдогруппе — семейство почти-скобок Пуассона. Таким образом, оказывается проквантованной и эта дуальная структура.

Если $\mathscr{N}$ группа Ли с инвариантной скобкой, то и $\mathscr{M}$ группа Ли, а почти-скобка на $\mathscr{M}$ является обычной скобкой Пуассона (п. 3.8 гл. II). Квантование этой дуальной пуассоновой структуры дает дуальную квантовую алгебру $M^* = F(\mathscr{M}_\hbar)$ такую, что коумножение Δ здесь — гомоморфизм, т. е. выполнена *аксиома Хопфа* (см. детали в п. 2.5 приложения 2). В общем случае неинвариантных скобок на группе $\mathscr{N}$, например, скобок типа Дирака, описанных в п. 2.5 гл. I, дуальный объект $\mathscr{M}$ — не группа, а лишь псевдогруппа над $\mathscr{N}$ и дуальное пространство $M^* = F(\mathscr{M}_\hbar)$ структурой ассоциативной алгебры не наделяется.

1.2. Квантование симплектических многообразий. Теперь вернемся назад и поговорим более подробно о подходах к квантованию невырожденных скобок Пуассона.

Пусть $\mathfrak{X}$ симплектическое многообразие со скобкой (1.1) или с невырожденной замкнутой 2-формой $\omega = \Psi^{-1}$. Рассмотрим вначале схему деформационного квантования.

Операцию $f * g$ в классе $\mathscr{S}(\mathfrak{X})$ функций, гладких при $\hbar \to 0$, ищем в виде асимптотического разложения

$$f * g \sim \sum_{m \geqslant 0} \hbar^m L_m(f, g), \tag{1.8}$$

где L_m некоторые бидифференциальные операторы, причем в силу (1.4a)

$$L_0(f, g) = fg, \quad L_1(f, g) = -\frac{i}{2}\{f, g\}. \tag{1.4b}$$

Основное требование на остальные операторы $L_2, L_3, \ldots$ в (1.8) — это условие ассоциативности:

$$f * (g * k) = (f * g) * k. \tag{1.9}$$

В пространстве $\mathscr{F}$ всех гладких функций на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$ построим следующий комплекс:

n-мерной коцепью назовем любое n-линейное отображение $L\colon \mathscr{F} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{F}$, дифференциал зададим формулой

$$dL(f_1, \ldots, f_{n+1}) = f_1 L(f_2, \ldots, f_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j L(f_1, \ldots, f_j f_{j+1}, \ldots, f_{n+1}) + (-1)^{n+1} L(f_1, \ldots, f_n) f_{n+1}.$$

Нетрудно проверить, что $d^2 = 0$. Соответствующие когомологии называются *когомологиями Хохшильда* $H^n(\mathscr{F})$ коммутативной алгебры $\mathscr{F}$ [135].

Оказывается, что формальный ряд (1.8) удовлетворяет (1.9) тогда и только тогда, когда

$$dL_m(f, g, k) = \sum_{\substack{l+j=m \\ l,j \geqslant 1}} [L_l(f, L_j(g, k)) - L_l(L_j(f, g), k)]. \tag{1.10}$$

Например, с учетом (1.4b) при $m = 2$ имеем

$$dL_2(f, g, k) = \frac{1}{4}\{g, \{k, f\}\}.$$

Предположим, что коцепи $L_1, \ldots, L_{k-1}$ уже выбраны так, что выполнено (1.10) при $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Тогда правая часть (1.10) при $m=k$ является 3-коциклом на $\mathcal{F}$, т. е. определяет некоторый класс когомологий Хохшильда из $H^3(\mathcal{F})$. Если он нулевой, то существует двумерная коцепь L_k такая, что (1.10) выполняется при $m=k$.

Таким образом, условием существования формальной деформации умножения $f*g$ служит равенство нулю некоторой последовательности классов Хохшильда из $H^3(\mathcal{F})$.

В [222] доказано, что если $H^3(\mathfrak{X}, \mathbf{R})=0$, то эти классы заведомо нулевые. Аналогичные результаты ранее были получены в [250] для когомологий Шевалье, связанных с деформациями скобки Пуассона $\{f, g\}$ на $\mathfrak{X}$. Как будет показано ниже в п 2.3 все эти классы Хохшильда и Шевалье на замкнутых многообразиях $\mathfrak{X}$ всегда нулевые. Итак, топологических препятствий для такого формального деформационного квантования нет.

Более тонкие эффекты улавливаются теорией геометрического квантования. Пусть симплектическая форма на $\mathfrak{X}$ точна: $\omega=d\theta$. Каждой функции $f\in\mathcal{F}$ сопоставим дифференциальный оператор 1-го порядка на $\mathfrak{X}$:

$$\check{f}=-i\hbar\,\mathrm{ad}(f)+f-\theta(\mathrm{ad}(f)). \tag{1.11}$$

Тогда вместо (1.3), (1.4) выполняются условия (аксиомы Дирака):

$$[\check{f}, \check{g}]=-i\hbar\,\{f, g\}\check{}, \quad \check{1}=I. \tag{1.12}$$

Если форма ω глобально не точна, то в каждой локальной карте $U_\alpha\subset\mathfrak{X}$ можно найти 1-форму θ_α так, что $d\theta_\alpha=\omega$, причем $\theta_\beta-\theta_\alpha=dS_{\beta\alpha}$ на пересечении $U_\beta\cap U_\alpha$ (где $S_{\beta\alpha}$ — некоторые вещественные гладкие функции). Тогда в расслоении над $\mathfrak{X}$ со слоем $\mathbf{C}$ (или $\mathbf{S}^1$) и функциями склейки $t_{\beta\alpha}=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\beta\alpha}\right\}$ корректно определен оператор

$$\check{f}=\{\check{f}_\alpha\}, \quad \check{f}_\alpha=-i\hbar\,\mathrm{ad}(f)+f-\theta_\alpha(\mathrm{ad}(f)). \tag{1.13}$$

Нетрудно проверить, что соответствие $f\to\check{f}$ удовлетворяет аксиомам Дирака (1.12).

Условие существования расслоения над $\mathfrak{X}$ с функциями склейки $t_{\beta\alpha}$ такое:

$$t_{\alpha\delta}t_{\delta\beta}t_{\beta\alpha}=1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi\hbar}(S_{\alpha\delta}+S_{\delta\beta}+S_{\beta\alpha})\in\mathbf{Z}.$$

Отметим, что на пересечении трех карт

$$S_{\alpha\delta}+S_{\delta\beta}+S_{\beta\alpha}\equiv c_{\delta\beta\alpha}=\mathrm{const}.$$

Очевидно, 2-коцикл Чеха $\{c_{\delta\beta\alpha}\}$ задает тот же класс когомологий, что и симплектическая форма ω. Поэтому условие сшивания расслоения выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma}\omega\in\mathbf{Z}\quad\forall\Sigma\in H_2(\mathfrak{X}).\tag{1.14}$$

Этот топологический эффект целочисленности возникает и в физических теориях (например, монополь Дирака), и в теории представлений групп, и в спектральной теории [11, 44, 50, 78].

Операторы (1.13) действуют в пространстве сечений построенного расслоения. Но это пространство еще слишком широко: оно локально состоит из функций от всего набора фазовых переменных и представление (1.13) приводимо. Сузить эти операторы на функции от вдвое меньшего числа переменных, т. е. на функции, заданные на «конфигурационном пространстве», можно следующим образом.

Предположим, что на $\mathfrak{X}$ существует вещественная поляризация F (плоскости F_z, которой лагранжевы в $T_z\mathfrak{X}$ для всех $z\in\mathfrak{X}$). Обозначим через C_F^0 пучок ростков функций g на $\mathfrak{X}$, аннулируемых векторами из F (это аналог функций, постоянных по импульсам). Определим ковариантную производную $\nabla g=\check{g}-g$ вдоль $\operatorname{ad}(g)$, где $g\in C_F^0$, и рассмотрим класс Γ_F таких сечений нашего расслоения, которые ковариантно постоянны вдоль $\operatorname{ad}(g)$ (т. е. вдоль F). Они и будут искомыми аналогами функций на конфигурационном пространстве. Но сузить на Γ_F все операторы (1.13) не удается и приходится ограничивать класс символов.

Обозначим через C_F^1 пучок ростков функций f на $\mathfrak{X}$ таких, что $\{g_1,\ \{g_2,\ f\}\}=0$ для любых $g_1,\ g_2\in C_F^0$ (т. е. функции f «линейны по импульсам»). Тогда, если $f\in C_F^1$, то оператор $\check{f}$ (1.13) корректно сужается на Γ_F с сохранением аксиом (1.12).

Общая конструкция геометрического квантования требует наличия не обязательно вещественной, но возможно комплексной положительной поляризации [168, 191].

Основной дефект этой конструкции заключен в том, что операторы (1.13) не образуют алгебры: их нельзя перемножить; и кроме того, класс символов C_F^1 «линейных по импульсам», конечно, слишком узок.

И то, и другое ограничение устраняется в рассматриваемой в § 2, 3 теории асимптотического квантования [69—72], которая платит за это точностью, допуская приближение $O(\hbar^\infty)$ по параметру $\hbar\to 0$. Эта теория объединяет деформационное и геометрическое квантование: она задает умножение $*$ в классе гладких функций на $\mathfrak{X}$, удовлетворяющее аксиомам (1.3а), (1.4а), и в то же время, для многообразий с поляризацией на классе «линейных по импульсам» символов она дает те же операторы (1.13).

1.3. Квантование вырожденных скобок Пуассона. Предположим теперь, что скобка (1.1) вырождена. В этом случае процедура деформационного квантования, изложенная в п. 1.2, по-прежнему применима, и она сводит вопрос о существовании умножения вида (1.8) к вопросу о равенстве нулю некоторой последовательности классов Хохшильда из $H^3(\mathcal{F}(\mathcal{N}))$. Однако, теперь этот вопрос не решается так просто как в случае симплектического $\mathcal{N}$. Для общих пуассоновых многообразий $\mathcal{N}$ вопрос остается открытым и он тесно связан с проблемой существования полного симплектического группоида (или глобальной псевдогруппы) для данного $\mathcal{N}$.

Дело в том, что если скобка на $\mathcal{N}$ имеет постоянный ранг и допускает симплектическое поднятие в смысле теоремы 3.4 гл. I (в частности, если она обладает полным симплектическим группоидом), то соответствующие ей классы Хохшильда тривиальны [26].

В общем случае, не зная ничего о симплектическом поднятии скобки, мы можем лишь свести вопрос о классах Хохшильда к вопросу о когомологиях де Рама симплектических листов на $\mathcal{N}$. Делается это так.

На координатных функциях $\xi^1, \ldots, \xi^n$ скобка (1.1) имеет вид

$$\{\xi^j, \xi^k\} = \Psi^{jk}(\xi^1, \ldots, \xi^n).$$

После квантования

$$A^j = \pi_\hbar(\xi^j)$$

должны выполняться в силу (1.4) следующие коммутационные соотношения:

$$[A^j, A^k] = -i\hbar\Psi^{jk}\left(\overset{\omega}{A}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{A}{}^n\right) + O(\hbar^2) \qquad (1.15)$$

(где операторы под знаком символов Ψ^{jk} симметризованы по Вейлю, см. приложение 1). Или, если использовать умножение $*$ и аксиому

$$\pi_\hbar(\xi^j)\,\pi_\hbar(\xi^k) = \pi_\hbar(\xi^j * \xi^k),$$

то получим вместо (1.15) точные равенства

$$[A^j, A^k] = -i\hbar\Psi^{jk}_\hbar\left(\overset{\omega}{A}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{A}{}^n\right). \qquad (1.15\text{a})$$

Здесь обозначено

$$\Psi^{jk}_\hbar(\xi) = \frac{i}{\hbar}(\xi^j * \xi^k - \xi^k * \xi^j) = \Psi^{jk}(\xi) + \hbar^2\Phi^{jk}(\xi) + O(\hbar^4). \quad (1.16)$$

Коэффициенты последнего разложения по степеням $\hbar^2$ будем называть *квантовыми поправками* к скобке Пуассона (1.1). Оказывается они удовлетворяют цепочке уравнений

$$[\![\Psi, \Phi]\!] = \Gamma, \ \ldots \qquad (1.17)$$

где $[\![\ldots, \ldots]\!]$ обозначает скобку Схоутена, 3-тензор Γ явно вычисляется через тензор Ψ (п. 4.2), а опущенные в (1.17) уравнения содержат вместо Φ коэффициенты при более высоких степенях $\hbar^2$ в (1.16). Отметим, что в случае квадратичных скобок (1.11) (т. е. когда $\Psi^{jk}(\xi)$ квадратично зависят от координат ξ) цепочка (1.17) совпадает с разложением в ряд по степеням $\hbar^2$ квантового уравнения Янга — Бакстера (п. 4.1).

Замечательно, что верно обратное утверждение: если функции Φ^{jk}, ... найдены из цепочки (1.17), то по ним строится умножение $f*g$ по $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$ в классе символов $\mathcal{S}(\mathcal{N})$, гладких при $\hbar \to 0$.

В свою очередь условия разрешимости уравнений (1.17) сводятся к тривиальности некоторых классов де Рама на симплектических листах в $\mathcal{N}$, это подробно обсуждается в п. 3.4 гл. I.

Если уравнения цепочки (1.17) разрешимы, мы будем называть скобку Пуассона (1.1) *квантуемой*. В частности, скобка, допускающая симплектическое поднятие, квантуема.

Для таких скобок мы имеем замкнутые коммутационные соотношения (1.15а), к которым можно теперь применить операторную технику вычисления операции $*$ уже в классе $\mathcal{S}_\hbar$ осциллирующих при $\hbar \to 0$ символов (эта техника для различных точно квантуемых случаев изложена в приложении 2, а для нашего случая общих нелинейных соотношений (1.15а) в приближении $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$ она разбирается в п. 4.3). Будем иметь

$$\pi_\hbar(f*g) = \pi_\hbar(f)\,\pi_\hbar(g) + O(\hbar^\infty). \tag{1.18}$$

Вычислив умножение в $M = \mathcal{S}_\hbar(\mathcal{N})$, мы строим в п. 4.5 также умножение в пространстве функционалов на коспектре $F^*(\mathrm{cospec}(M))$ с той же точностью по параметру $\hbar$.

§ 2. Пучок волновых пакетов над симплектическим многообразием

Центральные темы параграфа:

— вычисление коцикла группы пуассоновых преобразований областей в $\mathbf{R}^{2n}$ (теорема 2.2);

— определение на симплектическом многообразии целочисленного двумерного класса когомологий, который совпадает по $\mathrm{mod}\, 2$ с классом Чженя (лемма 2.3);

— правило квантования двумерных циклов (2.36) и склейка пучка волновых пакетов с точностью $O(\hbar^\infty)$;

— отсутствие препятствий для глобального $*$-произведения над симплектическим многообразием (теорема 2.3 (d));

— «квантование» как возникновение дискретных структур на примере тора и сферы (п. 2.5).

2.1. Действие пуассоновых преобразований на волновых пакетах. По аналогии с представлением Вейля симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n)$ хотелось бы иметь представление унитарными операторами группы пуассоновых, т. е. сохраняющих симплектическую структуру, нелинейных локальных преобразований в $\mathbf{R}^{2n}$: $\gamma \to T(\gamma)$.

Если бы представление T удалось построить, была бы решена проблема квантования симплектических многообразий, поскольку каждое такое многообразие склеивается из локальных областей в $\mathbf{R}^{2n}$ пуассоновыми преобразованиями. Мы способны лишь частично реализовать этот замысел.

Нелинейность преобразований γ мешает построить точное представление T; у нас оно будет зависеть от параметра $\hbar$ и определяться лишь асимптотически. Кроме того, поскольку преобразования γ могут быть заданы лишь на подобластях в $\mathbf{R}^{2n}$ (именно так обстоит дело для отображений склейки; см. (2.29)), приходится вводить вместо универсального пространства представления $L^2(\mathbf{R}^n)$ более сложные пространства волновых пакетов, фронты которых лежат в этих подобластях. Именно на таких волновых пакетах мы и определим проективное представление T.

Каждому пуассонову преобразованию γ в $\mathbf{R}^{2n}$ можно сопоставить его график $\mathrm{Gr}(\gamma)$ в пространстве удвоенной размерности. Этот график лагранжев (см. лемму 2.12 гл. III). С другой стороны, над каждым лагранжевым подмногообразием Λ, снабженным мерой σ и начальной точкой m, как мы видели в § 2 гл. III, определен сплетающий оператор $K_{\Lambda,\sigma,m}$, который в случае, если мера инвариантна, устанавливает соответствие между гамильтоновыми векторными полями и квантовыми псевдодифференциальными операторами (см. теорему 2.1 гл. III). На графике $\mathrm{Gr}(\gamma)$ такая инвариантная мера есть — это мера Лиувилля, обозначающаяся в п. 2.5 гл. III через can. По указанным объектам мы и построим оператор $T(\gamma)$.

Итак, пусть задана односвязная область $D\subset\mathbf{R}^{2n}$ и в окрестности $\bar{D}$ ее замыкания определено пуассоново отображение γ: $\bar{D}\to\mathbf{R}^{2n}$. Возьмем любую вещественную функцию $g_D\in C_0^\infty(\bar{D})$, $g_D\equiv 1$ в окрестности замыкания D. Поднимем ее на график $\mathrm{Gr}(\gamma)$ и получившуюся функцию на графике также будем обозначать g_D. Фиксируем точку $m^0\in D$ и рассмотрим функцию на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}K_{\mathrm{Gr}(\gamma),\,\mathrm{can},\,(\gamma(m^0),\,m^0)}(g_D) \qquad (2.1)$$

(все детали см. в п. 2.5 гл. III). Интегральный оператор в $L^2(\mathbf{R}^n)$, интегральным ядром которого служит эта функция, обозначим через $T(\gamma,\ m^0,\ g_D)$.

Напомним, что в п. 1.5 гл. III над областью D был определен пучок $\mathbf{\Gamma}^k(D)$ волновых пакетов $\operatorname{mod} O(\hbar^k)$. Здесь мы возьмем $k=\infty$ и не будем для краткости писать этот показатель, т. е. $\mathbf{\Gamma}(D)\equiv\mathbf{\Gamma}^\infty(D)$.

Теорема 2.1. (a) *Оператор* $T(\gamma,\ m^0,\ g_D)$ *порождает гомоморфизм пучков* $T(\gamma,\ m^0)$: $\mathbf{\Gamma}(D)\to\mathbf{\Gamma}(\gamma(D))$, *который не зависит от выбора функций* g_D *в* (2.1). *При этом*

$$\operatorname{osc}^{(k)}(T(\gamma,\ m^0)\psi)=\gamma(\operatorname{osc}^{(k)}(\psi)).$$

(b) *Если* ψ *имеет классическую плотность* F_ψ, *то* $F_{T(\gamma,m^0)\psi}=\gamma_*F_\psi$, *а если* ψ *имеет субплотность* G_ψ, *то* $G_{T(\gamma,m^0)\psi}=\gamma_*G_\psi$.

(c) *При замене точки m^0 на m^1 оператор T изменяется на постоянный унимодулярный множитель*:

$$T(\gamma,\ m^0)=\exp\{ic_\gamma(m^0\to m^1)\}\,T(\gamma,\ m^1),\tag{2.2}$$

где $c_\gamma(\ldots)$ — вклад любого пути, соединяющего точку $(\gamma(m^0),\ m^0)$ с $(\gamma(m^1),\ m^1)$ на графике $\mathrm{Gr}(\gamma)$, т. е.

$$c_\gamma(m^0\to m^1)=\frac{1}{\hbar}\int\limits_{m^0\to m^1}(\gamma^*(p\,dx)-p\,dx)-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind}(m^0\to m^1).\tag{2.3}$$

(d) *Для любого $f\in C^\infty(D)$ в пучке $\Gamma(D)$ справедливы формулы*

$$\begin{gathered}T(\gamma,\ m^0)\cdot\hat f\cdot T(\gamma,\ m^0)^*=\widehat{\gamma^{-1*}A(f)},\\ T(\gamma,\ m^0)^*\cdot\hat f\cdot T(\gamma,\ m^0)=\widehat{\gamma^*B(f)},\\ T(\gamma,\ m^0)^*=T(\gamma^{-1},\ \gamma(m^0)).\end{gathered}\tag{2.4}$$

Здесь через $T(\gamma,\ m^0)^*$ обозначен гомоморфизм пучков, порожденный сопряженным оператором $T(\gamma,\ m^0,\ g_D)^*$, а операторы A и B — это ряды по степеням $\hbar^2$, коэффициенты которых суть дифференциальные операторы на D, причем $B=1+O(\hbar^2)$, $A=1+O(\hbar^2)$.

Доказательство. Как было показано в лемме 2.3 гл. I, преобразование γ можно включать в семейство γ^t сдвигов по траекториям некоторого гамильтонова поля $\mathrm{ad}(H)$, $H=H(x,\ p,\ t)$. Итак,

$$\gamma^0\equiv\mathrm{id},\quad \gamma^{t_0}\big|_{\tilde D}=\gamma.\tag{2.5}$$

Умножая H на срезающую функцию от t, всегда можно добиться, чтобы

$$H(x,\ p,\ t)=0\quad\text{при}\quad t<\frac{1}{3}t_0\quad\text{и при}\quad t>\frac{2}{3}t_0.\tag{2.6}$$

Построим асимптотику решения задачи Коши:

$$i\hbar\frac{\partial G(t)}{\partial t}=\hat H G(t)+O(\hbar^\infty),\quad G(0)=\widehat{g^0}+O(\hbar^\infty).\tag{2.7}$$

Оценки остатков здесь понимаются в смысле ограниченных операторов $CS\to CS$. Символ $g^0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ мы выберем чуть позже.

В силу следствия 2.4 гл. III

$$G(t)=(2\pi\hbar)^{-n/2}e^{ic^\#(t)}K_{\mathrm{Gr}(\gamma^t),\,\mathrm{can},\,(\gamma^t(m^0),\,m^0)}(g^t)+O(\hbar^\infty),\tag{2.8}$$

где $c^\#$ — вклад траектории поля $\mathrm{ad}(H)$, выходящей из точки $m^{0\#}=(m^0,\ m^0,\ 0,\ -H(m^0,\ 0))$, на лагранжевой пленке

$$\mathrm{Gr}^\#=\{(z,\ z',\ t,\ p_t)\,|\,(z,\ z')\in\mathrm{Gr}(\gamma^t),\quad p_t+H(z,\ t)=0\}$$

в пространстве $\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}\times\mathbf{R}^2$. Функция g^t в (2.8) получена так (см. п. 2.4 гл. III):

$$g^t=(\gamma^t)^{-1*}g,\quad \frac{dg}{dt}-i\hbar\tilde b_H^{(1)}g=0,\quad g\big|_{t=0}=g^0.$$

Ясно, что подбором g^0 можно добиться равенства $g^{t_0} = g_D + O(\hbar^\infty)$. При этом

$$g^0 = \gamma^*(g_D) + \sum_{s \geqslant 1} (-i\hbar)^s l^s (\gamma^* g_D), \tag{2.9}$$

где l^s — вещественные дифференциальные операторы.

В силу (2.8) и (2.1)

$$G(t_0) = e^{ic^{\#}(t_0)} T(\gamma, m^0, g_D) + O(\hbar^\infty). \tag{2.10}$$

Заметим теперь, что обратные преобразования $(\gamma^t)^{-1}$ могут быть получены как сдвиги по траекториям поля $\operatorname{ad}(H_{(-)})$, где $H_{(-)} = -\gamma^{t*} H \equiv - H(\gamma^t(z), t)$. Решение (2.8) соответствующей задачи Коши (2.7) (с заменой $H \to H_{(-)}$, $m^0 \to \gamma(m^0)$, $g_D \to \gamma^{-1*}(g_D)$) обозначим через $G(t)_{(-)}$. Тогда

$$G(t_0)_{(-)} = e^{ic^{\#}(t_0)_{(-)}} T(\gamma^{-1}, \gamma(m^0), \gamma^{-1*}(g_D)). \tag{2.11}$$

Далее непосредственно из определений (2.1) и (2.21) гл. III следует, что $T(\gamma^{-1}, \gamma(m^0), \gamma^{-1*}(g_D)) = T(\gamma, m^0, g_D)^*$. Действительно, переход к интегральному ядру сопряженного оператора означает комплексное сопряжение, т. е. смену знака симплектической структуры, и перестановку аргументов ядра. Это эквивалентно перестановке сомножителей $\mathbf{R}_z^{2n} \times (\mathbf{R}_z^{2n})^{(-)}$ в определении фазового пространства, где лежит график $\operatorname{Gr}(\gamma)$. Но такая перестановка сомножителей переводит $\operatorname{Gr}(\gamma)$ в $\operatorname{Gr}(\gamma^{-1})$, начальную точку $(\gamma(m^0), m^0)$ в точку $(m^0, \gamma(m^0))$, а функцию g_D — в функцию $\gamma^{-1*}(g_D)$. В результате при сопряжении ядра (2.1) получается интегральное ядро

$$(2\pi\hbar)^{-n/2} K_{\operatorname{Gr}(\gamma^{-1}),\, \mathrm{can},\, (m^0, \gamma(m^0))} (\gamma^{-1*}(g_D)),$$

которое соответствует оператору $T(\gamma^{-1}, \gamma(m^0), \gamma^{-1*}(g_D))$. Таким образом, из (2.11) имеем

$$G(t_0)_{(-)} = e^{ic^{\#}(t_0)_{(-)}} T(\gamma, m^0, g_D). \tag{2.12}$$

Теперь рассмотрим оператор

$$U(t) = G(t) \hat{f} G(t)^*.$$

Он удовлетворяет задаче Коши

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = [\hat{H}, U] + O(\hbar^\infty), \quad U(0) = \hat{g}^0 \hat{f} \hat{g}^{0*}. \tag{2.13}$$

В силу (2.9) и формулы композиции (2.16а) приложения 2 имеем:

$$U(0) = \hat{u}_0, \quad u_0 = (\gamma^* g_D)^2 \cdot f + \sum_{s \geqslant 1} \hbar^{2s} d^s(f), \tag{2.14}$$

где d^s — вещественные дифференциальные операторы, коэффициенты которых пропорциональны $\gamma^* g_D$ и ее производным.

Решение задачи (2.13) ищем в таком же виде: $U(t)=\widehat{u_t}$. Поскольку в силу формул (2.16а) приложения 2

$$\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\ \hat{u}_t]=\widehat{\operatorname{ad}(H)\,u_t}+\sum_{s\geqslant 1}\hbar^{2s}\widehat{c^s(u_t)},$$

где c^s — вещественные дифференциальные операторы, то для функции u_t получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\operatorname{ad}(H)\right)u_t+\sum_{s\geqslant 1}\hbar^{2s}c^s(u_t)=O(\hbar^\infty).$$

Вместе с начальным условием (2.14) это дает

$$G(t)\hat{f}G(t)^*=\widehat{(\gamma^t)^{-1*}A_t(f)}+O(\hbar^\infty),$$

где A_t — ряд по степеням $\hbar^2$; его старший член такой: $A_t=(\gamma^*g_D)^2+O(\hbar^2)$. Из полученной формулы при $t=t^0$ и из (2.10) следует

$$T(\gamma,\ m^0,\ g_D)\cdot\hat{f}\cdot T(\gamma,\ m^0,\ g_D)^*=\widehat{\gamma^{-1*}A(f)}+O(\hbar^\infty).\ \blacksquare \tag{2.15}$$

Здесь

$$A\equiv A_t=(\gamma^*g_D)^2+\sum_{s\geqslant 1}\hbar^{2s}a^s,$$

где a^s — вещественные дифференциальные операторы, коэффициенты которых пропорциональны γ^*g_D и ее производным.

Аналогично, рассматривая оператор

$$U_{(-)}(t)=G(t)_{(-)}\hat{f}\cdot G(t)^*_{(-)}$$

и учитывая (2.12), находим

$$T(\gamma,\ m^0,\ g_D)^*\cdot\hat{f}\cdot T(\gamma,\ m^0,\ g_D)=\gamma^*\widehat{B(f)}+O(\hbar^\infty), \tag{2.16}$$

где

$$B=(g_D)^2+\sum_{s\geqslant 1}\hbar^{2s}b^s,$$

b^s — вещественные дифференциальные операторы, коэффициенты которых пропорциональны g_D и ее производным. Поэтому при любом $\psi\in CS$ верно соотношение для квантовых плотностей

$$\langle\rho_{T(\gamma,m^0,g_D)\psi},\ f\rangle=\langle\gamma_*\rho_\psi,\ B(f)\rangle+O(\hbar^\infty), \tag{2.17}$$

причем

$$\operatorname{supp}B(f)\subset\operatorname{supp}g_D\cap\operatorname{supp}f.$$

Если $\operatorname{osc}^{(\infty)}(\psi)\cap D=\varnothing$, $\operatorname{supp}f\subset\gamma(D)$, то правая часть (2.17) равна $O(\hbar^\infty)$, т. е. $\operatorname{osc}^{(\infty)}(T(\gamma,\ m^0,\ g_D)\psi)\cap\gamma(D)=\varnothing$. Следовательно, оператор $T(\gamma,\ m^0,\ g_D)$ корректно задает гомоморфизм:

$$T(\gamma,\ m^0):\ \mathbf{\Gamma}(D)\to\mathbf{\Gamma}(\gamma(D)).$$

Заметим, что соотношение (2.17) доказано для произвольной вещественной функции g_D с носителем внутри $\tilde{D}$. Поэтому, если мы заменим g_D другой функцией $g'_D = g_D + \varphi$, где $\operatorname{Im}\varphi = 0$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \tilde{D} \setminus \overline{D}$, то

$$T(\gamma,\ m^0,\ g'_D) = T(\gamma,\ m^0,\ g_D) + T(\gamma,\ m^0,\ \varphi),$$

причем

$$\langle \rho_{T(\gamma,\ m^0,\ \varphi)\psi},\ f\rangle = \langle \gamma_*\rho_\psi,\ \tilde{f}\rangle + O(\hbar^\infty),$$

где $\tilde{f}$ функция на $\mathbf{R}^{2n}$ такая, что

$$\operatorname{supp}\tilde{f} \cap \overline{D} = 0.$$

Следовательно, оператору $T(\gamma,\ m^0,\ \varphi)$ соответствует тривиальное (нулевое) отображение $\mathbf{\Gamma}(D) \to 0 \in \mathbf{\Gamma}(\gamma(D))$, т. е. гомоморфизм $T(\gamma,\ m^0)$ не зависит от выбора функции g_D.

Формула для фронтов osc^k в п. (a) теоремы прямо следует из (2.17). Из этого же соотношения имеем

$$\rho_{T(\gamma,\ m^0)\psi} = g_D^2\gamma_*\rho_\psi + O(\hbar^2), \quad g_D \equiv 1 \text{ на } D.$$

Отсюда следуют утверждения п. (b) теоремы.

Утверждение п. (c) очевидно в силу определения (2.21), а п. (*d*) следует из (2.15), (2.16). Теорема доказана.

2.2. Нелокальный коцикл псевдогруппы пуассоновых преобразований. Псевдогруппа пуассоновых преобразований $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{R}^{2n})$ устроена так: ее элементы — это диффеоморфизмы γ: $D \to \gamma(D)$, заданные на ограниченных связных односвязных областях $D \subset \subset \mathbf{R}_x^n \bigoplus \mathbf{R}_p^n$ и сохраняющие форму $dp \wedge dx$. Композиция двух элементов из $\mathcal{G}$ определяется естественным образом: $(\gamma_2,\ D_2)(\gamma_1,\ D_1) = (\gamma_2\gamma_1,\ D_1)$, если $D_2 \supset \gamma_1(D_1)$. Ниже мы, как правило, не указываем область определения пуассоновых преобразований и пишем γ вместо $(\gamma,\ D)$.

Можно считать, что преобразования γ определены в несколько более широких областях $\tilde{D}$, содержащих D с замыканием. Это позволяет каждому элементу псевдогруппы $\mathcal{G}$ сопоставить гомоморфизм пучков волновых пакетов

$$\mathcal{G} \ni \gamma \to T(\gamma,\ m^0) \in \operatorname{Hom}(\mathbf{\Gamma}(D) \to \mathbf{\Gamma}(\gamma(D))),$$

где m^0 — фиксированная точка в D; см. теорему 2.1.

Лемма 2.1. *Пусть Λ — квантованное лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^{2n}$ с мерой σ. Пусть γ: $D \to \mathbf{R}^{2n}$ — пуассоново отображение, $m^0 \in \Lambda \cap D$ и $\varphi^0 \in C_0^\infty(\Lambda \cap D)$. Тогда в пучке $\mathbf{\Gamma}(\gamma(D))$ выполнено равенство*

$$T(\gamma,\ m^0)\, K_{\Lambda,[\sigma,\ m^0}(\varphi^0) = e^{-i\pi\tau/4}\, K_{\gamma(\Lambda),\ \gamma_*[(\sigma),\ \gamma(m^0)}(\gamma^{-1*}b(\varphi^0)). \quad (2.18)$$

Здесь $\tau \equiv \tau(\gamma,\ \Lambda,\ m^0)$ — сигнатура квадратичной формы (см. лемму 2.4 гл. III):

$$\tau = s(l_\varnothing,\ (d_{m^0}\gamma)\, l_\varnothing,\ (d_{m^0}\gamma)\, l(m^0)), \quad l(m^0) \equiv T_{m^0}\Lambda, \quad (2.19)$$

а b — ряд по степеням $(-i\hbar)$, коэффициенты которого являются вещественными дифференциальными операторами на Λ, причем $b=1+O(\hbar)$.

Доказательство. Как и в теореме 2.1, представим гомоморфизм $T(\gamma, m^0)$ с помощью сдвига по траекториям — см. (2.10). Формула (2.35) гл. III и следствие 2.3 гл. III при $t=t_0$ дают нужное равенство (2.18), в котором

$$\tau=2\left[\mu(t_0)-\mu^{\#}(t_0)\right], \quad b=\operatorname{Exp}\left(\int_0^{t_0} i\hbar\tilde{b}_H^{(1)}\right) \pmod{\hbar^\infty}.$$

Из определения индексов μ и $\mu^{\#}$ следует, что число τ зависит лишь от ростка многообразия Λ и отображения γ в точке m^0. В частности, τ не зависит от функции φ^0. Поэтому для явного вычисления τ можно локализовать носитель φ^0 вблизи точки m^0 и считать, что в левой и правой частях равенства (2.18) интегральное ядро $T(\gamma, m^0)$ (2.1), функция $K_\Lambda(\varphi^0)$, а также функция $K_{\gamma(\Lambda)}(\ldots)$ задаются (2.17) гл. III в одной-единственной локальной карте на $\operatorname{Gr}(\gamma)$, в одной карте на Λ и в одной карте на $\gamma(\Lambda)$. Таким образом, все сведется к простому применению метода стационарной фазы, который и даст формулу (2.19) для числа τ. Лемма доказана.

Для пары пуассоновых преобразований γ_1, γ_2 определим целое число

$$\tau_{m^0}(\gamma_2, \gamma_1)=s\left(l_\varnothing, \ (d_{\gamma_1(m^0)}\gamma_2)\, l_\varnothing, \ d_{m^0}(\gamma_2\gamma_1)\, l_\varnothing\right),$$

где $s(\ldots)$ — сигнатура квадратичной формы (см. лемму 2.4 гл. III), а m^0 — точка из области определения γ_1 такая, что $\gamma_1(m^0)$ лежит в области определения γ_2. Отметим, что функция τ_{m^0} является коциклом [133]:

$$\tau_{m^0}(\gamma_2, \gamma_1)=-\tau_{\gamma_2\gamma_1(m^0)}(\gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}),$$
$$\tau_{m^0}(\gamma_3\gamma_2, \gamma_1)-\tau_{m^0}(\gamma_3, \gamma_2\gamma_1)+\tau_{\gamma_1(m^0)}(\gamma_3, \gamma_2)-\tau_{m^0}(\gamma_2, \gamma_1)=0.$$

Это следует из утверждений (B), (C) леммы 2.4 гл. III. Этот коцикл *локальный*, так как зависит от дифференциалов γ_1, γ_2 лишь в одной точке m^0.

Пусть теперь γ_1, γ_2, γ_3 — три пуассоновых преобразования с областями определения D_1, D_2, $D_3\subset \mathbf{R}^{2n}$, причем

$$\gamma_3\gamma_2\gamma_1=\mathrm{id} \tag{2.20}$$

на пересечении $D_{321}=D_1\cap\gamma_1^{-1}(D_2)\cap\gamma_3(D_3)$. Пусть $m_j\in D_j$ $(j=1, 2, 3)$ и $m^0\in D_{321}$. Определим целое или полуцелое число

$$\nu_{321}=\mu_{\gamma_1}(m^0\to m_1)+\mu_{\gamma_2}(\gamma_1(m^0)\to m_2)+ \\ +\mu_{\gamma_3}(\gamma_3^{-1}(m^0)\to m_3)-\frac{1}{2}\tau_{m_0}(\gamma_2, \gamma_1). \tag{2.21}$$

Здесь через μ_γ обозначен индекс пути на графике $\operatorname{Gr}(\gamma)\subset \mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}$, т. е. $\mu_\gamma(A\to B)=\operatorname{Ind}((\gamma(A), A)\to(\gamma(B), B))$. (Проекция пути на $\mathbb{R}^{2n}$ — это произвольный путь, соединяющий точку A с B.) В силу лагранжевости графика этот индекс зависит лишь от A, B, но не от формы пути.

Лемма 2.2. *Пусть* $\gamma: D\to\mathbb{R}^{2n}$ — *пуассоново отображение,* $\Lambda\subset D$ — *лагранжево подмногообразие,* $A, B\in\Lambda$. *Тогда индекс пути на графике* $\mathrm{Gr}(\gamma)$ *вычисляется по формуле*

$$\mu_\gamma(A\to B)=\mathrm{Ind}_{\gamma(\Lambda)}(\gamma(A)\to\gamma(B))-\mathrm{Ind}_\Lambda(A\to B)+\\+\frac{1}{2}\tau(\gamma,\ \Lambda,\ A)-\frac{1}{2}\tau(\gamma,\ \Lambda,\ B).$$

В частности,

$$\mu_{\gamma^{-1}}(\gamma(A)\to\gamma(B))=-\mu_\gamma(A\to B).$$

Доказательство следует из определений индекса пути (2.16) гл. III и сигнатуры (2.19) и из свойства коцикличности сигнатуры (см. лемму 2.4 (с) гл. III). Важно только заметить, что сигнатура в удвоенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}\times(\mathbb{R}^{2n})^{(-)}$ связана с сигнатурой в $\mathbb{R}^{2n}$ так:

$$s(\Gamma,\ l_\varnothing\times l_\varnothing,\ l_\beta\times l_\alpha)=s(\Gamma l_\alpha,\ l_\varnothing,\ l_\beta)-s(\Gamma l_\alpha,\ l_\varnothing,\ \Gamma l_\phi),$$

где $\Gamma\equiv T_{(\gamma(A),\,A)}\mathrm{Gr}(\gamma)$ — касательная плоскость к графику, $\Gamma l\equiv\equiv(d_A\gamma)\,l$ для любой лагранжевой плоскости $l\subset T_A\mathbb{R}^{2n}$.

Следствие 2.1. *Число* ν_{321} *в* (2.21) *не зависит от выбора точки* $m^0\in D_{321}$.

Доказательство. Пусть $\overline{m}^0$ — другая точка в D_{321}. Разность $2(\nu_{321}(m^0)-\nu_{321}(\overline{m}^0))$ в силу аддитивности индекса пути равна

$$2\mu_{\gamma_1}(m^0\to\overline{m}^0)+2\mu_{\gamma_2}(\gamma_1(m^0)\to\gamma_1(m^0))+\\+2\mu_{\gamma_3}(\gamma_2\gamma_1(m^0)\to\gamma_2\gamma_1(m^0))+\tau_{\overline{m}^0}(\gamma_2,\ \gamma_1)-\tau_{m^0}(\gamma_2,\ \gamma_1). \tag{2.22}$$

Рассмотрим некоторое лагранжево подмногообразие $\Lambda\subset D_{321}$, которое содержит путь, соединяющий m^0 с $\overline{m}^0$. Индекс μ_{γ_1} преобразуем по лемме 2.2 с помощью многообразия Λ. Индекс μ_{γ_2} преобразуем с помощью многообразия $\gamma_1(\Lambda)$, а индекс μ_{γ_3} — с помощью $\gamma_2\gamma_1(\Lambda)$. Тогда выражение (2.22) примет вид

$$\tau(\gamma_1,\ \Lambda,\ m^0)-\tau(\gamma_1,\ \Lambda,\ \overline{m}^0)+\tau(\gamma_2,\ \gamma_1(\Lambda),\ \gamma_1(m^0))-\\-\tau(\gamma_2,\ \gamma_1(\Lambda),\ \gamma_1(\overline{m}^0))+\tau(\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1(\Lambda),\ \gamma_2\gamma_1(m^0))-\\-\tau(\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_1(\Lambda),\ \gamma_2\gamma_1(\overline{m}^0))+\tau_{\overline{m}^0}(\gamma_2,\ \gamma_1)-\tau_{m^0}(\gamma_2,\ \gamma_1).$$

В этой сумме отдельно дают нуль четыре слагаемых, зависящих от m^0, и отдельно слагаемые, зависящие от $\overline{m}^0$, поскольку

$$\tau(\gamma_1,\ \Lambda,\ m^0)+\tau(\gamma_2,\ \gamma_1(\Lambda),\ \gamma_1(m^0))+\\+\tau(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1},\ \gamma_2\gamma_1(\Lambda),\ \gamma_2\gamma_1(m^0))=\tau_{m^0}(\gamma_2,\ \gamma_1).$$

Это равенство вытекает из определений (2.19), (2.21) и коцикличности сигнатуры s (см. лемму 2.4 (с) гл. III). Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 2.1. Число (2.21) определяется парой преобразований γ_2, γ_1 и тройкой точек m_1, m_2, m_3. Пусть $m_1 \in D_1 \cap \gamma_1^{-1}(D_2)$, $m_2 \in D_2$, $m_3 = \gamma_2\gamma_1(m_1)$. Переобозначим величину (2.21):

$$\nu(\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1) \overset{\text{def}}{=} \mu_{\gamma_1}(m^0 \to m_1) + \mu_{\gamma_2}(\gamma_1(m^0) \to m_2) - \\ - \mu_{\gamma_2\gamma_1}(m^0 \to m_1) - \frac{1}{2}\tau_{m^0}(\gamma_2, \gamma_1). \quad (2.21\text{a})$$

Такая функция является к о ц и к л о м, т. е. выполнено тождество

$$\nu(\gamma_3\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1) - \nu(\gamma_3, \gamma_2\gamma_1; m_3, m_1) + \\ + \nu(\gamma_3, \gamma_2; m_3, m_2) - \nu(\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1) = 0$$

с любыми преобразованиями γ_3, γ_2, γ_1 и точками m_3, m_2, m_1 (для которых все слагаемые в тождестве определены). Этот коцикл н е л о к а л ь н о зависит от преобразований γ_2, γ_1 (в отличие от коцикла $\tau_{m^0}(\gamma_2, \gamma_1)$) и принимает целые или полуцелые значения. Как будет показано в п. 2.3, через данный нелокальный коцикл выражается целочисленный характеристический класс, участвующий в правиле квантования. Основной шаг к получению этого правила сделан в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.2. *Соответствие $\gamma \to T(\gamma, m)$ задает по* $\operatorname{mod} O(\hbar)$ *проективное представление псевдогруппы локальных пуассоновых преобразований в* $\mathbf{R}^{2n}$, *а точнее*

$$T(\gamma_2, m_2)\, T(\gamma_1, m_1) = e^{ic(\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1)}\, T(\gamma_2\gamma_1, m_1) + O(\hbar).$$

Коцикл «c» определяется формулами

$$c = -\frac{1}{\hbar}\Phi + \frac{\pi}{2}\nu,$$

$$\Phi(\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1) = \int\limits_{m^0 \to m_1} (\gamma_1^*(p\,dx) - p\,dx) + \\ + \int\limits_{\gamma(m^0) \to m_2} (\gamma_2^*(p\,dx) - p\,dx) - \int\limits_{m^0 \to m_1} ((\gamma_2\gamma_1)^*(p\,dx) - p\,dx),$$

причем от выбора точки m^0 и путей интегрирования это определение Φ не зависит. Целый или полуцелый коцикл ν определен в (2.21a) *и по* mod 2 *является кограницей.*

Прежде чем доказывать теорему, перепишем ее в эквивалентной форме для циклической тройки пуассоновых преобразований (2.20). Утверждается, что в пучке $\Gamma(D_{321})$ выполнено равенство

$$T(\gamma_3, m_3)\, T(\gamma_2, m_2)\, T(\gamma_1, m_1) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{321} + i\frac{\pi}{2}\nu_{321}\right\}(I - i\hbar\hat{r}). \quad (2.23)$$

Здесь символ $r \in C^\infty(D_{321})$ разлагается в ряд по степеням $(-i\hbar)$ с вещественными коэффициентами, число

$$\Phi_{321} = \int\limits_{m^0 \to m_1} (\gamma_1^*(p\,dx) - p\,dx) + \\ + \int\limits_{\gamma_1(m^0) \to m_2} (\gamma_2^*(p\,dx) - p\,dx) + \int\limits_{\gamma_2\gamma_1(m^0) \to m_3} (\gamma_3^*(p\,dx) - p\,dx) \quad (2.24)$$

не зависит от выбора точки $m^0 \in D_{321}$ и путей интегрирования в (2.24), а целое или полуцелое число ν_{321} определено в (2.21) и может быть представлено в виде

$$\nu_{321} = a(\gamma_1, m_1) + a(\gamma_2, m_2) + a(\gamma_3, m_3) \pmod 2, \qquad (2.25)$$

где функция a меняет знак при обращении аргумента: $a(\gamma, m) = -a(\gamma^{-1}, \gamma(m))$.

Доказательство. Представим каждое преобразование γ_i как сдвиг за время t_i по траекториям гамильтонова поля с гамильтонианом H_i (как и в (2.5), (2.6)). Составной гамильтониан

$$H_{321} = \begin{cases} H_1(x, p, t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ H_2(x, p, t-t_1) & \text{при} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2, \\ H_3(x, p, t-t_1-t_2) & \text{при} \quad t_1 + t_2 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2 + t_3 \end{cases}$$

гладко зависит от t, и сдвиг γ_{321}^{t} вдоль его траекторий совпадает в моменты времени t_1, $t_1 + t_2$ и $t_1 + t_2 + t_3$ с преобразованиями γ_1, $\gamma_2\gamma_1$ и $\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = \mathrm{id}$.

Решения задачи Коши (2.7), соответствующей гамильтониану H_j, обозначим через G_j $(j = 1, 2, 3)$, а решение, соответствующее H_{321}, обозначим G_{321}. Без ограничения общности можно считать, что

$$\int_{m_j}^{\gamma_j(m_j)} (p\,dx - H_j\,dt) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

где интеграл берется по траектории H_j, выходящей из точки m_j и приходящей через время t_j в точку $\gamma_j(m_j)$. Тогда в силу (2.10)

$$G_j(t_j) = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\mu_j^{\#}(t_j)\right\} T(\gamma_j, m_j), \qquad (2.26)$$

где $\mu_j^{\#}(t_j)$ — индекс упомянутой траектории на пленке $\mathrm{Gr}(\gamma_j)^{\#}$. Начальное условие для G_j в силу (2.9) имеет вид

$$G_j(0) = \widehat{g^j}, \quad g^j = \gamma_j^* g_{D_j} + O(\hbar). \qquad (2.27)$$

Остаток $O(\hbar)$ — ряд по степеням $(-i\hbar)$ с вещественными коэффициентами. Равенства (2.26), (2.27), конечно, понимаются в соответствующих пучках волновых пакетов $\mathbf{\Gamma}(D_j)$ по $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$.

В силу (2.4), (2.26) имеем

$$\hat{g} \cdot G_j(t_j) = G_j(t_j)\,\widehat{B_j(g)}, \quad B_j = \gamma_j^* + O(\hbar^2).$$

Поэтому произведение $G_3(t_3)\,G_2(t_2)\,G_1(t_1)$ дает решение при

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

задачи Коши (2.7) с гамильтонианом H_{321} и начальным условием $G|_{t=0} = \hat{g}^0$, где

$$g^0 = g^1 * B_1(g^2 * B_2(g^3)) = g_{D_1} \cdot (\gamma_2\gamma_1)^* g_{D_3} \cdot \gamma_1^* g_{D_2} + O(\hbar) \equiv 1 - i\hbar r.$$

Последнее равенство в этой цепочке выполнено на D и определяет символ r — ряд по степеням $(-i\hbar)$. Звездочка здесь использована для обозначения символа композиции двух вейлевских операторов; см. формулу (2.16а) приложения 2.

Решение упомянутой задачи Коши для $\hat{H}_{321}$ в силу следствия 2.4 в пучке $\mathbf{\Gamma}(D_{321})$

$$G(t)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{m^0\to\gamma^t_{321}(m^0)}(p\,dx-H_{321}\,dt)-i\frac{\pi}{2}\mu^{\#}_{321}(t)\right\}\times$$
$$\times T(\gamma^t_{321},\ m^0)\,\hat{g}^0\qquad(m^0\in D_{321}).$$

Интеграл в экспоненте здесь совпадает с числом Φ_{321} из (2.24). Поэтому при $t=t_1+t_2+t_3$, сравнивая оператор $G(t)$ с произведением операторов (2.26), получаем

$$T(\gamma_3,\ m_3)\,T(\gamma_2,\ m_2)\,T(\gamma_1,\ m_1)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{321}+i\frac{\pi}{2}\left(-\mu^{\#}_{321}(t_1+t_2+t_3)+\sum\mu^{\#}_j(t_j)\right)\right\}(I-i\hbar\hat{r}).$$

Таким образом, выполнена формула (2.23), если в ней взять

$$\nu_{321}=-\mu^{\#}_{321}(t_1+t_2+t_3)+\sum_{j=1}^{3}\mu^{\#}_j(t_j)\qquad(\mathrm{mod}\ 4).\qquad(2.28)$$

Отметим, что гамильтониан H_{321} можно считать периодическим по t с периодом $t_1+t_2+t_3$. Таким образом, лагранжева поверхность

$$\{(z,\ z',\ t,\ p_t)\,|\,z=\gamma^t_{321}(z'),\ p_t+H_{321}(z,\ t)=0,\ t\in S^1\},$$

на которой вычисляется индекс траектории $\mu^{\#}_{321}$, является замкнутым ориентируемым подмногообразием в фазовом пространстве

$$\mathbf{R}^{2n}\times(\mathbf{R}^{2n})^{(-)}\times T^*S^1.$$

Индекс $\mu^{\#}_{321}(t_1+t_2+t_3)$ замкнутой траектории в силу леммы 2.6 (b) гл. III — четное число. Вместе с формулой (2.28) это доказывает (2.25): нужно взять $a(\gamma_j,\ m_j)=\mu^{\#}_j(t_j)$. Представление (2.21) для числа ν_{321}, так же как в лемме 2.1, следует из метода стационарной фазы. Теорема доказана.

Эта теорема имеет богатую предысторию. Представлением группы нелинейных пуассоновых преобразований фазового пространства заинтересовались прежде всего, конечно, физики [138, 219]. Глобальная конструкция впервые появилась в [97], где был указан общий метод вычисления набега фазы $c(\gamma_2,\ \gamma_1;\ m_2,\ m_1)$. Были получены явные формулы для этого набега в случае линейных пуассоновых преобразований [18, 19, 90, 205], а также в случае однородных (относительно растяжений по импульсам p) преобразований [52, 144]. Появились различные обобщения этих формул и их интерпретация с точки зрения теории представлений групп Ли [32, 134, 167, 179, 180, 187, 194, 210, 213, 214, 224, 246]. Отметим, что в случае л и н е й н ы х преобразований γ_i

формула теоремы 2.2 становится т о ч н о й, т. е. исчезает остаток $O(\hbar)$ (поскольку в этом случае пуассоновы преобразования γ_i представляются сдвигами по траекториям квадратичных по x, p гамильтонианов $H_i(x, p)$, а уравнения Шрёдингера (2.7) с квадратичным гамильтонианом решаются точно). Оператор $T(\gamma, m)$ в этом случае задает представление Вейля группы $\mathrm{Sp}(2n)$ (см. [91]). Приведенный нами метод доказательства теоремы 2.2 следует работе [74]. Отметим, что обычно не обращали внимания на тот случай, когда графики $\mathrm{Gr}(\gamma_i)$ и точки m_i не находятся в общем положении (о понятии общего положения см. лемму 2.5 гл. III). В этом случае коцикл $\nu(\gamma_2, \gamma_1; m_2, m_1)$ может, как мы видели, оказаться полуцелым. Наша конструкция оператора $T(\gamma, m)$ не чувствительна к понятию общего положения, что позволяет ниже при построении глобального пучка волновых пакетов использовать в качестве γ любые преобразования склейки симплектического многообразия (см. (2.29)).

2.3. Двумерные препятствия для склейки пучка. Глобальное $*$-произведение символов. Рассмотрим замкнутое вещественное C^∞-многообразие $\mathfrak{X}$, наделенное замкнутой невырожденной 2-формой ω.

По теореме Дарбу локально форму ω можно привести к стандартному виду $dp \wedge dx$, где $x, p \in \mathbf{R}^n$, $2n = \dim \mathfrak{X}$. Поэтому существует такой атлас

$$\xi_\alpha\colon \tilde{\mathcal{U}}_\alpha \to \tilde{D}_\alpha, \quad \bigcup_\alpha \tilde{\mathcal{U}}_\alpha = \mathfrak{X}, \quad \tilde{D}_\alpha \subset \mathbf{R}^n_x \oplus \mathbf{R}^n_p,$$

что

$$\xi^*_\alpha(dp \wedge dx) = \omega \big|_{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha}.$$

Таким образом, преобразования склейки

$$\gamma_{\beta\alpha} = \xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1} \tag{2.29}$$

являются пуассоновыми (сохраняют форму $dp \wedge dx$) и определены на подобластях $\xi_\alpha(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \cap \tilde{\mathcal{U}}_\beta) \subset \tilde{D}_\alpha$.

Выберем меньшие области $D_\alpha \subset \overline{D}_\alpha \subset \tilde{D}_\alpha$ так, чтобы их прообразы $\mathcal{U}_\alpha = \xi_\alpha^{-1}(D_\alpha)$ еще образовывали покрытие многообразия $\mathfrak{X}$. Будем предполагать, что это покрытие правильное в смысле теории когомологий, т. е. сами $\mathcal{U}_\alpha$ и все их конечные пересечения диффеоморфны шару в $\mathbf{R}^{2n}$.

Как мы видели в п. 2.1, над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ определен пучок $\mathbf{\Gamma}_\alpha = \mathbf{\Gamma}(D_\alpha)$. Если $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\alpha$, то через $\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U})$ обозначим пучок $\mathbf{\Gamma}(D_\alpha)\big|_{\xi_\alpha(\mathcal{U})}$.

Фиксируем любые точки $m^{\alpha\beta} \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Их образы $\xi_\alpha(m^{\alpha\beta})$ и $\xi_\beta(m^{\alpha\beta})$ лежат в областях определения отображений склейки $\gamma_{\beta\alpha}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$. Поэтому, согласно п. 2.1, определены гомоморфизмы пучков

$$T_{\beta\alpha} = T(\gamma_{\beta\alpha}, \xi_\alpha(m^{\alpha\beta})), \quad T_{\beta\alpha}\colon \mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to \mathbf{\Gamma}_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta).$$

В силу теоремы 2.1 (d) и теоремы 2.2 имеем

$$T_{\alpha\alpha}=I,\quad T_{\alpha\beta}T_{\beta\alpha}=I+\hbar^2\hat{r}_{\beta\alpha},$$
$$T_{\alpha\delta}T_{\delta\beta}T_{\beta\alpha}=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha}+i\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}\right\}(I-i\hbar\hat{r}_{\delta\beta\alpha}). \tag{2.30}$$

Эти формулы выполнены соответственно в пучках $\mathbf{\Gamma}_\alpha$, $\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$ и $\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\delta)$ для каждой карты, пары карт или тройки пересекающихся карт. Символы $r_{\beta\alpha}$ и $r_{\delta\beta\alpha}$ определены в окрестностях этих пересечений и разлагаются в ряды по степеням $\hbar^2$ и $(-i\hbar)$ с вещественными коэффициентами.

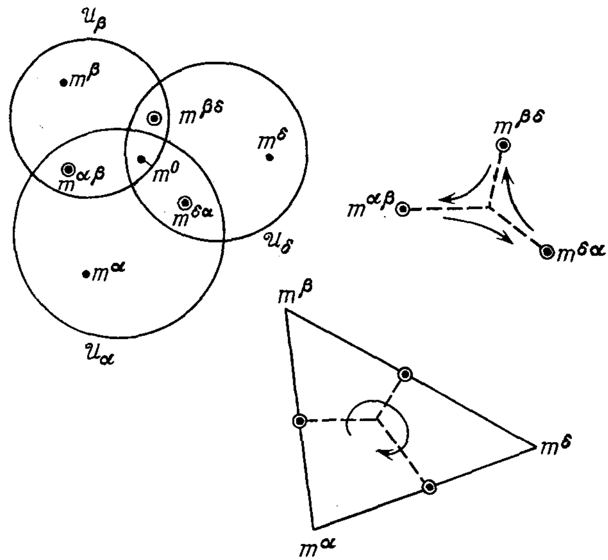


Рис. 16

Используя (2.24), получаем для чисел $\Phi_{\delta\beta\alpha}$ в (2.30) следующую формулу:

$$\Phi_{\delta\beta\alpha}=\int_{m^0\to m^{\alpha\beta}}(\theta_\beta-\theta_\alpha)+\int_{m^0\to m^{\beta\delta}}(\theta_\delta-\theta_\beta)+\int_{m^0\to m^{\delta\alpha}}(\theta_\alpha-\theta_\delta)=$$
$$=\int_{\Delta(\alpha,\beta,\delta)}\omega-(\theta_{\alpha\delta}+\theta_{\delta\beta}+\theta_{\beta\alpha}), \tag{2.31}$$

где $\theta_\alpha=\xi_\alpha^*(p\,dx)$, $\Delta(\alpha,\beta,\delta)$ — треугольник, вершинами которого являются любые фиксированные точки m^α в картах $\mathcal{U}_\alpha$, и

$$\theta_{\beta\alpha}=\int_{m^\alpha\to m^{\alpha\beta}}\theta_\alpha+\int_{m^{\alpha\beta}\to m^\beta}\theta_\beta.$$

На рис. 16 указаны все эти точки и пути интегрирования. Отметим, что числа $\Phi_{\delta\beta\alpha}$ не зависят от выбора точки $m^0\in\mathcal{U}_\alpha\cap\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\delta$.

Далее в силу (2.21) целые или полуцелые числа $\nu_{\delta\beta\alpha}$ в (2.30) вычисляются по формуле

$$\nu_{\delta\beta\alpha} = \nu_{\alpha\delta}(m^0) + \nu_{\delta\beta}(m^0) + \nu_{\beta\alpha}(m^0) - \frac{1}{2}\tau_{\delta\beta\alpha}(m^0). \tag{2.32}$$

Здесь $\nu_{\beta\alpha}(m^0) = \mu_{\gamma_{\beta\alpha}}(m^0 \to m^{\alpha\beta})$ — индексы путей на графиках $\mathrm{Gr}(\gamma_{\beta\alpha})$, а последнее слагаемое в (2.32)

$$\tau_{\delta\beta\alpha}(m^0) = s(L^\delta(m^0),\ L^\beta(m^0),\ L^\alpha(m^0)) \tag{2.33}$$

это сигнатура квадратичной формы, порожденной «вертикальными» лагранжевыми плоскостями $L^\alpha(m^0) = (d_{m^0}\xi_\alpha)^{-1} l_\phi \subset T_{m^0}\mathfrak{X}$. Напомним определение квадратичной формы (см. лемму 2.4 гл. III):

$$(L',\ L'',\ L''')(v) \overset{\text{def}}{=} \omega(v'',\ v') + \omega(v''',\ v'') + \omega(v',\ v'''),$$

где $v = (v',\ v'',\ v''') \in L' \oplus L'' \oplus L'''$, а $L^{\cdots}$ — лагранжевы плоскости в $T_{m^0}\mathfrak{X}$.

Отметим, что в силу следствия 3.1 числа $\nu_{\delta\beta\alpha}$ не зависят от выбора точки $m^0 \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\delta$.

Лемма 2.3. *Наборы чисел* $\{\Phi_{\delta\beta\alpha}\}$ *и* $\{\nu_{\delta\beta\alpha}\}$ *задают 2-коциклы Чеха многообразия* $\mathfrak{X}$. *Соответствующий класс когомологий* $[\Phi] \in \in \mathrm{H}^2(\mathfrak{X},\ \mathbf{R})$ *совпадает с классом де Рама симплектической формы:* $[\Phi] = [\omega]$. *Класс когомологий* $\frac{1}{2}[\nu]$ *по* $\mathrm{mod}\, 2$ *совпадает с классом Чженя* c_1 *симплектического многообразия* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Коцикличность $\Phi_{\delta\beta\alpha}$ и равенство классов когомологий $[\Phi] = [\omega]$ прямо следуют из (2.31). Далее коцепь $\nu_{\beta\alpha}(m^0)$ в (2.32) антисимметрична по индексам $\nu_{\delta\beta\alpha}$ в силу второй формулы леммы 2.2. Поэтому коцикличность $\nu_{\delta\beta\alpha}$ следует из коцикличности $\tau_{\delta\beta\alpha}$, т. е. из свойства (с) леммы 2.4 гл. III. Более того, в силу (2.25) коцикл $\nu_{\delta\beta\alpha}$ по $\mathrm{mod}\, 2$ является кограницей, т. е. класс когомологий $\frac{1}{2}[\nu]$ целый.

Очевидно, имеем

$$\exp\left\{i\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}\right\} = t_{\alpha\delta} t_{\delta\beta} t_{\beta\alpha}, \tag{2.34}$$

где каждая функция

$$t_{\beta\alpha} = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left(\nu_{\beta\alpha}(m) - \frac{1}{2}s(L(m),\ L^\beta(m),\ L^\alpha(m))\right)\right\}$$

определена на лагранжевом грассманиане $L(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ (он состоит из пар $(m,\ L(m))$, где $L(m)$ — лагранжева плоскость в $T_m(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$).

Касательное расслоение $T\mathfrak{X}$ наделим почти-эрмитовой структурой [143] (мнимая часть которой совпадает с симплектической формой). Относительно такой структуры имеется отождествление $L(T_m\mathfrak{X}) \approx \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ [3]. Поэтому $L(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ можно отождествить с подрасслоением в главном $U(n)$-расслоении над $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, которое в свою очередь будем рассматривать как редукцию главного $\mathrm{Sp}(2n,\ \mathbf{R})$-расслоения и продолжим на него функцию $t_{\beta\alpha}$.

После этого, если $t_{\beta\alpha}$ оказываются функциями склейки глобального расслоения над $\mathfrak{X}$, то это расслоение задает метаплектическую структуру на $\mathfrak{X}$ [32].

Известно [32, 143], что препятствием к существованию такой структуры служит класс $\frac{1}{2}c_1 \pmod{\mathbf{Z}}$. С другой стороны, в силу (2.34) склейке глобального расслоения препятствует класс $\frac{1}{4}[\nu] \pmod{\mathbf{Z}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}[\nu]=c_1 \pmod 2. \tag{2.35}$$

Лемма доказана.

На самом деле равенство (2.35), по-видимому, точное, а не по mod 2. Это подтверждают косвенные топологические соображения, но прямого доказательства у авторов нет; см. также [166].

Лемма 2.3 позволяет сформулировать условие, необходимое и достаточное для сшивания глобального пучка волновых пакетов над $\mathfrak{X}$ [69].

Следствие 2.2. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}[\omega]-\frac{1}{2}c_1 \in H^2(\mathfrak{X},\ \mathbf{Z}). \tag{2.36}$$

Тогда существует коцепь $\{c_{\beta\alpha}\}$ *такая, что* $\frac{1}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha}-\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}= =c_{\alpha\delta}+c_{\delta\beta}+c_{\beta\alpha} \pmod{2\pi}$ *и операторы* $\exp\{ic_{\beta\alpha}\}\cdot T_{\beta\alpha}$ *служат операторами склейки глобального пучка* $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ *над* $\mathfrak{X}$, *ограничения которого на локальные карты* $\mathcal{U}_\alpha$ *совпадают с пучками волновых пакетов* $\mathbf{\Gamma}_\alpha$ *по* $\operatorname{mod} O(\hbar)$.

Сейчас, следуя [71], мы покажем, что точность здесь можно поднять до $O(\hbar^\infty)$ (хотя в формуле композиции (2.23) избавиться от остатка $O(\hbar)$ невозможно).

Лемма 2.4. *В каждом непустом пересечении локальных карт* $(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ *определены функции* $q_{\beta\alpha}$, *разлагающиеся в ряды по степеням* $(-i\hbar)$ *с гладкими вещественными коэффициентами и такие, что* $q_{\beta\alpha}=1+O(\hbar)$, $q_{\alpha\alpha}=1$, *и гомоморфизмы*

$$T'_{\beta\alpha}\equiv T_{\beta\alpha}\cdot\hat{q}_{\beta\alpha}\colon\ \mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)\to\mathbf{\Gamma}_\beta(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} T'_{\alpha\delta}\cdot T'_{\delta\beta}\cdot T'_{\beta\alpha}=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha}+i\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}\right\}\cdot I, \\ T'_{\alpha\beta}T'_{\beta\alpha}=I,\quad T'_{\alpha\alpha}=I. \end{gathered} \tag{2.37}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ — алгебра формальных рядов от $(-i\hbar)$, коэффициенты которых являются гладкими вещественными функциями в окрестности замыкания $\xi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$. На $\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ определена операция $*$-произведения символов (см. (2.16а) приложения 2):

$$\hat{f}\cdot\hat{g}=\widehat{f*g} \quad \text{в пучке} \quad \mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta).$$

Эта операция ассоциативна, обладает единицей 1, причем $f*g=f\cdot g+O(\hbar)$. Если функция $f\in\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ не обращается в нуль в окрестности замыкания $\xi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$, то определен обратный элемент $f^{*-1}\in\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ такой, что $\hat{f}\cdot\widehat{f^{*-1}}=\widehat{f^{*-1}}\cdot\hat{f}=I$ в пучке $\mathbf{\Gamma}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$.

Используя операцию $*$, мы построим вначале функции $Q_{\beta\alpha}$ такие, что гомоморфизмы

$$\tilde{T}_{\beta\alpha}\equiv T_{\beta\alpha}\cdot\hat{Q}_{\beta\alpha} \tag{2.38}$$

будут обладать свойством

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}\cdot\tilde{T}_{\beta\alpha}=I. \tag{2.39}$$

По теореме 2.1 (d) для любого $f\in\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ имеем соотношение

$$T_{\alpha\beta}\cdot\hat{f}\cdot T_{\beta\alpha}=\widehat{\mathrm{A}_{\alpha\beta}(f)},\quad \mathrm{A}_{\alpha\beta}=\gamma^*_{\beta\alpha}(1+O(\hbar^2))\colon \mathcal{S}_{\alpha\beta}\to\mathcal{S}_{\beta\alpha}.$$

В частности, из (2.30) следует $\mathrm{A}_{\alpha\beta}(1)=1+\hbar^2 r_{\beta\alpha}\equiv R_{\alpha\beta}$, $\mathrm{A}_{\alpha\alpha}=I$, и, кроме того,

$$\mathrm{A}_{\beta\alpha}\mathrm{A}_{\alpha\beta}=(*R_{\alpha\beta})\cdot(R_{\alpha\beta}*). \tag{2.40}$$

Подставляя произведения (2.38) в искомое равенство (2.39), получаем уравнения для определения функций $Q_{\beta\alpha}$:

$$\mathrm{A}_{\alpha\beta}(Q_{\alpha\beta})*Q_{\beta\alpha}=1.$$

Условием разрешимости этой системы служат соотношения (2.40). Решение $Q_{\beta\alpha}\in\mathcal{S}_{\beta\alpha}$, очевидно, существует, причем

$$Q_{\beta\alpha}=1+O(\hbar^2),\quad Q_{\alpha\alpha}=1.$$

Перемножим теперь построенные операторы $\tilde{T}_{\beta\alpha}$ на пересечении трех карт. Произведение двух операторов равно

$$\tilde{T}_{\alpha\delta}\tilde{T}_{\delta\beta}=T_{\alpha\delta}T_{\delta\beta}\cdot\widehat{R^{*-1}_{\delta\beta}*\mathrm{A}_{\beta\delta}(Q_{\alpha\delta})*Q_{\delta\beta}}.$$

Аналогично для произведения трех операторов получаем формулу

$$\tilde{T}_{\alpha\delta}\tilde{T}_{\delta\beta}\tilde{T}_{\beta\alpha}=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha}+i\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}\right\}\hat{\tilde{R}}_{\delta\beta\alpha}, \tag{2.41}$$

где

$$\tilde{R}_{\delta\beta\alpha}=(1-i\hbar r_{\delta\beta\alpha})*R^{*-1}_{\beta\alpha}*A_{\alpha\beta}(R^{*-1}_{\delta\beta}*A_{\beta\delta}(Q_{\alpha\delta})*Q_{\delta\beta})*Q_{\beta\alpha}.$$

Кроме того,

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}\cdot\hat{f}\cdot\tilde{T}_{\beta\alpha}=\widehat{\tilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}(f)},\quad \tilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}=\gamma^*_{\beta\alpha}(I+O(\hbar^2)),$$

причем операторы $\tilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}\colon \mathcal{S}_{\alpha\beta}\to\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ обладают следующими свойствами:

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(1) = I, \quad \tilde{A}_{\beta\alpha}\tilde{A}_{\alpha\beta} = I, \quad \tilde{A}_{\beta\delta}\tilde{A}_{\delta\alpha}\tilde{A}_{\alpha\beta} = (*\tilde{R}_{\alpha\delta\beta})\cdot(\tilde{R}_{\delta\alpha\beta}*),$$
$$\tilde{A}_{\delta\alpha}(\tilde{R}_{\delta\beta\alpha}) = \tilde{R}_{\beta\alpha\delta}, \quad \tilde{R}_{\beta\alpha\delta} = \tilde{R}^{*-1}_{\alpha\beta\delta}. \tag{2.42}$$

Ищем операторы $T'_{\beta\alpha}$ в виде

$$T'_{\beta\alpha} = \tilde{T}_{\beta\alpha}\cdot\hat{s}_{\beta\alpha}, \quad s_{\beta\alpha}\in\mathscr{S}_{\beta\alpha}, \quad s_{\alpha\alpha}=1.$$

Подставляем их в первое из соотношений (2.37). Учитывая (2.41) и определение операторов $\tilde{A}_{\beta\alpha}$, получаем уравнения для функций $s_{\beta\alpha}$:

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}\tilde{A}_{\beta\delta}(s_{\alpha\delta}) * \tilde{A}_{\alpha\beta}(s_{\delta\beta}) * s_{\beta\alpha} = \tilde{R}^{*-1}_{\delta\beta\alpha}.$$

Необходимыми условиями разрешимости этой системы служат соотношения (2.42). Здесь нужно также учесть, что

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(f*g) = \tilde{A}_{\alpha\beta}(f) * \tilde{A}_{\alpha\beta}(g), \quad f,\ g\in\mathscr{S}_{\alpha\beta}.$$

Решение $s_{\beta\alpha}$ ищется в виде ряда $1+\sum\limits_{k\geqslant 1}(-i\hbar)^k\xi_\alpha^{-1}s^{(k)}_{\beta\alpha}$, и для k-го коэффициента получаются уравнения вида

$$s^{(k)}_{\alpha\delta} + s^{(k)}_{\delta\beta} + s^{(k)}_{\beta\alpha} = P^{(k)}_{\delta\beta\alpha},$$

где набор функций $P^{(k)}_{\delta\beta\alpha}$ определен на предыдущих шагах и является коциклом: он антисимметрично зависит от индексов α, β, δ и на пересечении $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\delta\cap\mathcal{U}_\varepsilon$ выполнено тождество

$$P^{(k)}_{\delta\beta\alpha} - P^{(k)}_{\varepsilon\beta\alpha} + P^{(k)}_{\varepsilon\delta\alpha} - P^{(k)}_{\varepsilon\delta\beta} = 0.$$

Система для $s^{(k)}_{\beta\alpha}$ решается явно с помощью разбиения единицы $\{g_\alpha\}$ подчиненного покрытию $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ (напомним, что многообразие $\mathfrak{X}$ предполагается замкнутым и разбиение единицы на нем существует; для незамкнутых многообразий аналога леммы 2.4 нет). Ответ такой:

$$s^{(k)}_{\beta\alpha} = \sum_\varepsilon g_\varepsilon P^{(k)}_{\varepsilon\beta\alpha}.$$

Итак, функции $s_{\beta\alpha}$ существуют в классе $\mathscr{S}_{\beta\alpha}$, причем

$$s_{\beta\alpha} = 1 + O(\hbar), \quad s_{\alpha\alpha}=1.$$

Вспоминая определение (2.38), получаем для функций $q_{\beta\alpha}$ из формулировки леммы следующее представление:

$$q_{\beta\alpha} = Q_{\beta\alpha} * s_{\beta\alpha} = 1 + O(\hbar)\in\mathscr{S}_{\beta\alpha}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3. (а) *Пусть по* $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$ *выполнено условие* (2.36). *Тогда операторы*

$$\mathring{T}_{\beta\alpha} = \exp\{ic_{\beta\alpha}\}\,T(\gamma_{\beta\alpha},\ \xi_\alpha(m^{\alpha\beta}_*))\cdot\hat{q}_{\beta\alpha} \tag{2.43}$$

склеивают глобальный пучок $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ *над* $\mathfrak{X}$, *ограничения которого на локальные карты* $\mathcal{U}_\alpha$ *совпадают с локальными пучками волновых пакетов* $\mathbf{\Gamma}_\alpha$.

(b) *Коцепь* $\{c_{\beta\alpha}\}$ *в* (2.43) *определена с точностью до произвольного коцикла; таким образом, различные неэквивалентные пучки* $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ *параметризуются элементами группы когомологий* $H^1(\mathfrak{X}, U(1))$. *В частности, если* $\mathfrak{X}$ *односвязно, то пучок единственен.*

(c) *В каждой карте* $\mathcal{U}_\alpha$ *определен оператор* a_α, *разлагающийся в ряд по степеням* $\hbar^2$, *коэффициенты которого являются вещественными дифференциальными операторами, причем* $a_\alpha = I + O(\hbar^2)$, $a_x(1) = I$. *Соответствие*

$$f \to \hat{\hat{f}} \equiv \{f_\alpha\}, \quad f_\alpha \equiv \xi_\alpha^{-1*} a_\alpha (f),$$

каждой гладкой функции f *на* $\mathfrak{X}$ *сопоставляет гомоморфизм* $\hat{f} \in \operatorname{Hom} \mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$, *действующий на финитные сечения пучка* $\psi = \{\psi_\alpha\}$, *по формуле*

$$\hat{f}\psi \overset{\mathrm{def}}{=} \{\hat{f}_\alpha \psi_\alpha\}.$$

(d) *В пространстве* $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ *формальных степенных рядов по параметру* $\hbar$ *с коэффициентами из* $C^\infty(\mathfrak{X})$ *определена ассоциативная операция* $*$, *обладающая единицей* 1 *и удовлетворяющая условиям*

$$\hat{f}\hat{g} = \widehat{f * g}, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathfrak{X}),$$

$$f * g = g \cdot f - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + O(\hbar^2), \quad f * g - g * f = \\ = -i\hbar(\{f, g\} + O(\hbar^2)). \qquad (2.44)$$

Здесь остатки $O(\hbar^2)$ — *это ряды по степеням* $(-i\hbar)$, *коэффициенты которых являются вещественными бидифференциальными операторами на* $C^\infty(\mathfrak{X}) \otimes C^\infty(\mathfrak{X})$, *фигурные скобки — скобки Пуассона на* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пункты (a), (b) прямо следуют из леммы 2.4. Докажем п. (c). На пересечениях $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ имеем

$$\mathring{\hat{T}}_{\beta\alpha} \hat{f} \mathring{\hat{T}}_{\alpha\beta} = \widehat{\mathring{A}_{\beta\alpha}(f)}, \quad \mathring{A}_{\beta\alpha} = (* s_{\alpha\beta}) \cdot (\hat{A}_{\beta\alpha}(s_{\beta\alpha}) *) \cdot A_{\beta\alpha}. \qquad (2.45)$$

Здесь $\mathring{A}_{\beta\alpha}$: $\mathcal{S}_{\beta\alpha} \to \mathcal{S}_{\alpha\beta}$ — операторный (мультипликативный) коцикл, причем $\mathring{A}_{\beta\alpha} = \gamma^*_{\alpha\beta} + O(\hbar^2)$ — ряд по степеням $\hbar^2$.

Мы хотим показать, что этот коцикл на самом деле — кограница:

$$\mathring{A}_{\beta\alpha} = \xi_\beta^{-1*} a_\beta a_\alpha^{-1} \xi_\alpha^*, \quad a_\alpha = I + O(\hbar^2). \qquad (2.46)$$

Разлагая искомые операторы в ряд $a_\alpha = I + \sum_{k \geqslant 1} \hbar^{2k} a_\alpha^{(k)}$, для k-го члена ряда находим уравнение вида

$$a_\alpha^{(k)} - a_\beta^{(k)} = b_{\beta\alpha}^{(k)},$$

где правая часть определяется предыдущими членами ряда. Она является (аддитивным) коциклом:

$$b_{\beta\alpha}^{(k)} = -b_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad b_{\alpha\delta}^{(k)} + b_{\delta\beta}^{(k)} + b_{\beta\alpha}^{(k)} = 0,$$

и, кроме того, $b^{(k)}_{\beta\alpha}(1)=0$. Поэтому, как и в лемме 2.4, легко получаем решение

$$a^{(k)}_{\alpha}=\sum_{\beta} g_{\beta}\cdot b^{(k)}_{\beta\alpha},\quad a^{(k)}_{\alpha}(1)=0.$$

Итак, имеется формула перестановки в пучке $\Gamma_{\beta}(\mathcal{U}_{\alpha}\cap\mathcal{U}_{\beta})$:

$$\widehat{\xi_{\alpha}^{-1*}a_{\alpha}(f)}\cdot\mathring{T}_{\alpha\beta}=\mathring{T}_{\alpha\beta}\cdot\widehat{\xi_{\beta}^{-1*}a_{\beta}(f)},\quad f\in C^{\infty}(\mathfrak{X}),$$

или

$$\hat{f}_{\alpha}\cdot\mathring{T}_{\alpha\beta}=\mathring{T}_{\alpha\beta}\cdot\hat{f}_{\beta}.$$

Следовательно, оператор

$$\psi=\{\psi_{\alpha}\}\to\hat{f}\psi=\{\hat{f}_{\alpha}\psi_{\alpha}\}$$

является гомоморфизмом пучка $\Gamma_0(\mathfrak{X})$ (т. е. подпучка в $\Gamma(\mathfrak{X})$, состоящего из сечений с компактными носителями); если символы f выбирать из класса $C_0^{\infty}(\mathfrak{X})$, то операторы $\hat{f}$ будут гомоморфизмами пучка $\Gamma(\mathfrak{X})$.

Для того чтобы доказать п. (d), рассмотрим операцию умножения $*$ вейлевских символов в каждой локальной карте. Пусть $f,\ g\in\mathcal{S}(\mathfrak{X})$. Положим

$$(f*g)\,\big|_{\mathcal{U}_{\alpha}}=a_{\alpha}^{-1}\xi_{\alpha}^{*}(f_{\alpha}*g_{\alpha}).\tag{2.47}$$

Легко видеть, что на пересечении карт правые части этого определения совпадают. Таким образом, определена гладкая функция $f*g$ на $\mathfrak{X}$. В силу свойств оператора a_{α} она разлагается в ряд по степеням $(-i\hbar)$ с вещественными коэффициентами, т. е. принадлежит $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$. Остальные утверждения п. (d) — следствия известных свойств умножения $*$ в локальных картах (см. п. 2.2 приложения 2). Теорема доказана.

Замечание 2.2. Из доказательства теоремы 2.3 и леммы 2.4 видно, что существование операторов a_{α} не связно с условием (2.36), т. е. *утверждение п.* (d) *теоремы 2.3 выполнено для любого замкнутого симплектического многообразия* $\mathfrak{X}$. Таким образом, точка зрения на квантование как на деформацию алгебры гладких функций

$$C^{\infty}(\mathfrak{X})\to\mathcal{S}(\mathfrak{X}),\quad f\cdot g\to f*g$$

с дополнительным условием (2.44) не встречает препятствий при своей реализации, по крайней мере с точностью $O(\hbar^{\infty})$. Настоящие эффекты квантования проявляются либо при полном уничтожении остатков $O(\hbar^{\infty})$ (но это удается сделать лишь для специальных многообразий или для узкого класса символов), либо при использовании осциллирующих волновых пакетов.

Условие (2.36) будем называть *правилом квантования двумерных циклов*. Симплектическое многообразие $\mathfrak{X}$ назовем *квантованным*, если на нем выполнено условие (2.36). Это условие накладывает конечное число ограничений на параметр $\hbar$ или другие параметры, от которых может зависеть само многообразие $\mathfrak{X}$. Пучок $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ будем называть *пучком волновых пакетов* над $\mathfrak{X}$ или просто волновым пучком.

Замечание 2.3. Операторы склейки пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ можно представить в более симметричной форме:

$$\mathring{T}_{\beta\alpha}=\hat{\overline{P}}_{\alpha\beta}\cdot T_{\beta\alpha}\cdot\hat{P}_{\beta\alpha},$$

где функции $P_{\beta\alpha}\in\mathscr{S}_{\beta\alpha}$ связаны с $q_{\beta\alpha}$ уравнением

$$A_{\beta\alpha}(q_{\beta\alpha})=\overline{P}_{\alpha\beta}*A_{\beta\alpha}(q_{\beta\alpha});$$

черта обозначает комплексное сопряжение.

Нетрудно доказать, что эти уравнения разрешимы, причем $P_{\beta\alpha}=1+O(\hbar)$. И поскольку $(T_{\beta\alpha})^*=T_{\alpha\beta}$ (см. (3.4)), то $(\mathring{T}_{\beta\alpha})^*=\mathring{T}_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что для любого сечения $\psi=\{\psi_\alpha\}\in\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$ его локальные квантовые плотности сшиваются на пересечениях карт операторами, сопряженными к $\mathring{A}_{\beta\alpha}$, т. е. $\langle\rho_\psi,\ \mathring{A}_{\beta\alpha}(g)\rangle=\langle\rho_{\psi_\alpha},\ g\rangle+O(\hbar^\infty)$, $g\in\mathscr{S}_{\beta\alpha}$. Таким образом, формула

$$\langle\rho_\psi,\ f\rangle=\langle\rho_{\psi_\alpha},\ f_\alpha\rangle,\quad f\in C_0^\infty(\mathscr{U}_\alpha)$$

однозначно определяет функционал ρ_ψ из $C_0^\infty(\mathfrak{X})^*$ (или из $\mathscr{E}^*(\mathfrak{X})$, если $\psi\in\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$). Назовем ρ_ψ *квантовой плотностью сечения* ψ. Далее, как и в § 1 гл. III, можно определить фронт $\operatorname{osc}(\psi)$, *классическую плотность* F_ψ, *субплотность* G_ψ и т. д. На этот случай обобщаются теорема 1.1, следствие 1.1, лемма 1.3 ((b)—(e)), теорема 2.1 гл. III.

2.4. Связь с теорией геометрического квантования. Симплектическое многообразие $\mathfrak{X}$ наделено *поляризацией*, если задано глобальное сечение F лагранжева расслоения $L(\mathfrak{X})$. Таким образом, в каждой точке $m\in\mathfrak{X}$ выделена лагранжева плоскость $F_m\subset\subset T_m\mathfrak{X}$, гладко зависящая от m.

В этом случае можно выбрать атлас ξ_α: $\mathscr{U}_\alpha\to D_\alpha$ на $\mathfrak{X}$ так, чтобы отображения $d\xi_\alpha(m)$ переводили плоскости поляризации F_m в вертикальные плоскости $l_\phi\subset\mathbf{R}^{2n}\approx T_{\xi_\alpha(m)}D_\alpha$. Тогда отображения склейки многообразия $\mathfrak{X}$ имеют вид

$$\gamma_{\beta\alpha}(x,\ p)=(X_{\beta\alpha},\ P_{\beta\alpha}),\quad X_{\beta\alpha}=X_{\beta\alpha}(x),$$

причем, поскольку $\gamma_{\beta\alpha}$ пуассоновы, то $P_{\beta\alpha}=(dX_{\beta\alpha})^{-1*}\left(p+\frac{\partial\Phi_{\beta\alpha}}{\partial x}\right)$, где $\Phi_{\beta\alpha}(x)$ — некоторые вещественные функции.

Пусть $S_{\beta\alpha}=\xi_\alpha^*\Phi_{\beta\alpha}$ — функции на $\mathscr{U}_\alpha\cap\mathscr{U}_\beta$, постоянные вдоль слоя поляризации. Тогда

$$d\Phi_{\beta\alpha}=P_{\beta\alpha}\,dX_{\beta\alpha}-p\,dx\quad\text{или}\quad dS_{\beta\alpha}=\theta_\beta-\theta_\alpha.$$

Поэтому сумма

$$-\Phi_{\delta\beta\alpha}\overset{\mathrm{def}}{=}\Phi_{\alpha\delta}(X_{\delta\alpha})+\Phi_{\delta\beta}(X_{\beta\alpha})+\Phi_{\beta\alpha}=\xi_\alpha^{-1*}(S_{\alpha\delta}+S_{\delta\beta}+S_{\beta\alpha})$$

постоянна на пересечении трех карт. Нормируем $S_{\beta\alpha}$ так, чтобы выполнялось условие $S_{\beta\alpha}(m^{\beta\alpha})=0$. Тогда $S_{\alpha\beta}=-S_{\beta\alpha}$. Соответствующие склейкам $\gamma_{\beta\alpha}$ операторы сшивания пучка $T_{\beta\alpha}=\mathring{T}_{\beta\alpha}$ действуют по формуле

$$(T_{\beta\alpha}\psi)(q)=\left\{\frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Phi_{\beta\alpha}\right\}}{|\det dX_{\beta\alpha}|^{1/2}}\psi\right\}(X_{\alpha\beta}(q)).$$

Композиция трех операторов устроена так:

$$T_{\alpha\delta}T_{\delta\beta}T_{\beta\alpha}=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha}\right\}I.$$

Коцикл $\nu_{\delta\beta\alpha}$ в данном случае равен нулю. Это легко следует из (2.32), (2.33). Правило квантования (2.36) сводится к следующему:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}[\omega]\in H^2(\mathfrak{X},\ \mathbf{Z}) \qquad (2.48)$$

или

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{\Sigma}\omega\in\mathbf{Z}\quad \forall\Sigma\in H_2(\mathfrak{X},\ \mathbf{Z}).$$

По определению для компонент сечения $\psi\in\Gamma(\mathfrak{X})$ должно быть выполнено условие склейки $\psi_\beta=\mathring{T}_{\beta\alpha}\psi_\alpha$. Учитывая явный вид операторов $\mathring{T}_{\beta\alpha}=T_{\beta\alpha}$, это условие можно переписать иначе:

$$\psi^*_\beta=\frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\beta\alpha}\right\}}{\sqrt{J_{\beta\alpha}}}\psi^*_\alpha, \qquad (2.49)$$

где функции $J_{\beta\alpha}$ — якобианы $\xi^*_\alpha|\det dX_{\beta\alpha}|$, поднятые на $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$ (и постоянные вдоль слоев поляризации), а ψ^*_α — компоненты сечения пучка, таким же способом поднятые на $\mathcal{U}_\alpha$, т. е. $\psi^*_\alpha=\xi^*_\alpha\psi_\alpha$. Итак доказана

Теорема 2.4. *Если симплектическое многообразие $\mathfrak{X}$ обладает поляризацией и выполнено правило квантования* (2.48), *то волновой пучок $\Gamma(\mathfrak{X})$ эквивалентен пучку ростков сечений векторного одномерного расслоения $\Pi_F(\mathfrak{X})$ с функциями склейки $J_{\beta\alpha}^{-1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{\beta\alpha}\right\}$.*

Именно расслоение $\Pi_F(\mathfrak{X})$ используется в методе орбит [78, 79] и развивающей его теории геометрического квантования [143, 168, 191, 200, 201, 242—244].

Коцикл $\mathring{A}_{\alpha\beta}\equiv A_{\alpha\beta}$, который сшивает локальные символы гомоморфизмов пучка

$$\hat{f}=\{\hat{f}_\alpha\},\quad f_\alpha=A_{\alpha\beta}f_\beta,$$

вычисляется с помощью (2.45). В нашем случае получаем соотношение

$$(A_{\alpha\beta}(g))\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)=$$

$$=|\det dX_{\beta\alpha}(x)|^{1/2}\left[g\left(\overset{\omega}{X}_{\beta\alpha}(x),\ \overset{\omega}{\overline{dX_{\beta\alpha}^{-1*}(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+d\Phi_{\beta\alpha}(x)\right)}}\right)\right]\times$$
$$\times|\det dX_{\beta\alpha}(x)|^{-1/2}+O(\hbar^\infty)$$

(оператор, стоящий в правой части, нужно привести к вейлевской функции от x, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, по формулам п. 2.2 приложения 2; эта функция и даст символ $A_{\alpha\beta}(g)$ с точностью $O(\hbar^\infty)$). В частности, на линейных по p функциях $g(x, p)$ операторы $A_{\alpha\beta}$ действуют тривиально:

$$A_{\alpha\beta}g=\gamma^*_{\beta\alpha}g,\quad \text{если}\quad \{\{g,\ x_j\},\ x_k\}\equiv 0\quad \forall j,\ k.$$

Введем *класс* $S^0_F(\mathfrak{X})$ функций на $\mathfrak{X}$, *постоянных вдоль* F, и *класс* $S^1_F(\mathfrak{X})$ функций f на $\mathfrak{X}$, *«линейных по импульсам»*, т. е. таких, что $\{\{f,\ k\},\ l\}=0$ $\forall k,\ l\in S^0_F(\mathfrak{X})$. Каждой функции $f\in S^1_F(\mathfrak{X})$ сопоставляется оператор $\hat f$ на сечениях пучка $\psi\in\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ или на сечениях расслоения $\Pi_F(\mathfrak{X})$:

$$\hat f\psi=\{\widehat{\xi_\alpha^{-1*}f}\psi_\alpha\}.$$

Локально имеем $f=f(x,\ p)$ и

$$\hat f=f\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)=\left(f-p\frac{\partial f}{\partial p}\right)-i\hbar\,\mathrm{ad}\,(f)-\frac{i\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x}.\qquad(2.50)$$

Таким образом, мы получили формулу квантования Ван Хова [249] для линейных по импульсам символов.

Заметим, что пространство $S^1_F(\mathfrak{X})$ замкнуто относительно взятия скобки Пуассона и выполнено тождество

$$[\hat f,\ \hat g]=-i\hbar\,\widehat{\{f,\ g\}},\quad f,\ g\in S^1_F(\mathfrak{X})$$

(так называемая аксиома Дирака; ср. с примером 1.11 из приложения 1). Однако ассоциативное умножение $*$ в пространстве $S^1_F(\mathfrak{X})$ не определено, и в этом состоит основная трудность теории геометрического квантования.

Отметим в заключение, что общая конструкция геометрического квантования [168, 191] опирается на *комплексную поляризацию* над $\mathfrak{X}$, т. е. лагранжево подрасслоение $F\subset T^{\mathbf{C}}\mathfrak{X}$, на котором квадратичная форма $i\omega(\ldots,\ \overline{\ldots})$ неотрицательна. Это понятие тесно связано с конструкцией *комплексного ростка* [96, 99] (росток представляет собой именно такое подрасслоение, но не над всем фазовым пространством, а лишь над его подмножеством). Операторы сшивания расслоения $\Pi_F(\mathfrak{X})$, используемого в геометрическом квантовании, здесь также могут быть вычислены с помощью модификации квазиклассического представления пуассоновых склеек $\gamma_{\beta\alpha}$. Якобианы $J_{\beta\alpha}$ в (2.49) будут комплексными и добавят к фазе $\frac{1}{\hbar} S_{\beta\alpha}$ коцикл, представляющий половину класса Чженя $c_1(F)$ (который совпадает с классом Чженя многообразия $\mathfrak{X}$).

На таком пути возникает условие (2.36) сшивания расслоения $\Pi_F(\mathfrak{X})$, т. е. то же самое условие, что получилось у нас выше в общей схеме. Символы f, которые подвергаются квантованию здесь, по-прежнему, должны браться из класса $S_F^1(\mathfrak{X})$ [191].

Общая схема теоремы 2.3 жертвует точностью квантования, добавляя остатки $O(\hbar^\infty)$, но позволяет рассматривать любые символы $f \in C^\infty(\mathfrak{X})$. Требование наличия поляризации, хотя бы комплексной, в этой схеме также излишне.

Отметим, что в общем случае пучок $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ не эквивалентен пучку ростков сечений какого-либо векторного расслоения над $\mathfrak{X}$. Существенным отличием от схемы геометрического квантования является также то, что на сечениях пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ не удается определить *скалярное произведение*, т. е. структуру гильбертова пространства. Однако эффективной заменой ему служат квантовые плотности Блохинцева—Вигнера, сопоставляемые каждому сечению. Они позволяют вычислять средние любых операторов, действующих в пучке.

2.5. Тор, сфера и рогатая сфера. Простейшие примеры, которые рассматриваются в этом разделе, поясняют конструкции п. 2.3 с точки зрения привычного гармонического анализа.

Пример 2.1. *Тор. Квантование длины.* Условие (2.36) или его частный вариант (2.48) тесно связаны с физической идеей квантования длины. Действительно, эти условия возникают, прежде всего, на двумерных компактных фазовых пространствах, т. е. в системах, где ограничены и «координаты», и сопряженные им «импульсы». В соответствующей квантовой системе компактность «импульсов» означает дискретность «координат» и наоборот. Условие (2.36) или (2.48) дает инвариантное описание этой квантовой двойственности. Причем, если условие (2.48), как мы сейчас увидим, непосредственно приводит к появлению «ячеек длины», то общее условие (2.36) с полуцелой добавкой так просто не интерпретируется. Ситуация здесь аналогична той, которая имеется с правилом квантования энергии (2.23). Придуманное вначале Бором и затем сформулированное геометрически Зоммерфельдом, Эйнштейном и другими правило целочисленности

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint p\,dx \in \mathbf{Z}$$

было удобно для интерпретаций. Полуцелая поправка Крамерса $\frac{1}{4}\mu$ в истинном условии (2.20) гл. III долгое время лишь мешала, пока в 50-х годах не выяснилось, что она связана с важным явлением—наличием энергии вакуума. Появление поправки $c_1/2$ в правиле (2.36) всякого неискушенного в физике наводит на мысль, что у вакуума, возможно, есть и кривизна (класс c_1

представляется формой кривизны некоторой симплектической связности на $\mathfrak{X}$ [143, 200]).

Рассмотрим теперь тор $\mathbf{T}^2$ — пример простейшего компактного симплектического многообразия с поляризацией. «Вакуумная поправка» здесь, конечно, отсутствует.

Итак, $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}_R \times \mathbf{S}_{R'}$ — прямое произведение двух окружностей радиусов R и R' с симплектической структурой $\omega = \varphi' \wedge \varphi$, где φ' и φ — фундаментальные образующие из $H^1(\mathbf{S}_{R'})$ и $H^1(\mathbf{S}_R)$. В кокасательном пространстве над окружностью $\mathbf{S}_R$ возьмем символ $f(x, p)$ — любую гладкую, $2\pi R$-периодическую по x и растущую по p не быстрее степени функцию. По определению псевдодифференциальный оператор на окружности с символом f устроен так:

$$\operatorname{Op}(f)\psi = f\left(\overset{2}{x}, \ -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{m\hbar}{R}\right) e^{i\frac{m}{R}x}\tilde{\varphi}_m, \tag{2.51}$$

где $0 \leqslant x \leqslant 2\pi R$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{S}_R)$, $\tilde{\psi}_m$ — коэффициенты Фурье функции ψ. Мы использовали в (2.51) не вейлевскую симметризацию образующих x, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, а упорядоченную расстановку, и обозначили оператор не крышкой, как выше, а значком $\operatorname{Op}(f)$. Все, что сказано ниже, переносится, конечно, и на вейлевский случай.

Мы попытаемся сконструировать из операторов (2.51) гомоморфизмы пучка $\Gamma(\mathbf{T}^2)$. Для этого нужно локализовать фронты функций ψ в картах на $\mathbf{T}^2$ и применить процедуру сшивания сечения пучка операторами $T_{\beta\alpha}$, как это делалось выше в общей схеме. Можно, однако, действовать и проще, используя специфику геометрии тора.

Функции ψ, на которые будут действовать наши гомоморфизмы, должны «сидеть» на торе $\mathbf{S}_R \times \mathbf{S}_{R'}$ в смысле спектральной теории, т. е. не просто должны быть $2\pi R$-периодическими, но спектр их $\hbar$-преобразования Фурье должен быть ограничен. Пусть спектр содержит N точек:

$$\left\{m\frac{\hbar}{R}\,\middle|\, m = 0, \ldots, N-1\right\}.$$

Они разбивают длину окружности импульсов $2\pi R'$ на N равных отрезков. Величина одного отрезка $\hbar/R$ или $2\pi R'/N$; таким образом, имеем

$$2\pi R'/N = \hbar/R. \tag{2.52}$$

При этом условии существуют функции ψ с нужными нам свойствами:

$$\psi(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{k}{R}x} a_k. \tag{2.53}$$

Здесь a_k — функция на решетке импульсов в $\mathbf{S}_{R'}$.

Поскольку импульсы ограничены, то имеется двойственная решетка в $\mathbf{S}_R$ с шагом $2\pi R/N$. Значения функции ψ в k-м узле этой решетки обозначим ψ_k. Тогда

$$a_k = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kk'} \psi_{k'} \equiv \mathscr{F}(\psi_k). \tag{2.54}$$

Это дискретное преобразование Фурье $\mathscr{F}$ связывает функции на двух экземплярах группы $\mathbf{Z}_N$ (на двух решетках). Отметим, что в представлении (2.53) важны значения ψ лишь на решетке; они однозначно связаны с коэффициентами a_k. Операцию продолжения функций с решетки на всю окружность $\mathbf{S}_R$, заданную формулами (2.53), (2.54), обозначим через $\mathscr{S}$. Она называется *аппроксимацией Котельникова.*

Пусть теперь $f = f(p)$ это $2\pi R'$-периодическая функция. Легко проверить, что оператор $f\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)$, определенный с помощью (2.51), при выполнении условия (2.52) действует так:

$$\operatorname{Op}(f)\psi = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi R'}{N}m\right) e^{\frac{2\pi i}{N}lm} \psi\left(x - \frac{2\pi R}{N}l\right).$$

Сужение правой части на решетку, очевидно, определяется лишь значениями ψ на решетке и значениями символа f на двойственной решетке:

$$\operatorname{Op}(f)\psi\Big|_{\frac{2\pi R}{N}k} = \frac{1}{N}\sum_l\sum_m f_m e^{\frac{2\pi i}{N}lm}\psi_{k-l} \equiv \mathscr{F}^{-1}\{f_m\}\cdot\mathscr{F}\{\psi_k\},$$

$$f_m \equiv f\left(\frac{2\pi R}{N}m\right). \tag{2.55}$$

Если символ $f(x, p)$ зависит и от координаты x, то он сужается на прямое произведение решеток $\sim \mathbf{Z}_N \times \mathbf{Z}_N$:

$$f\left(\frac{2\pi R}{N}k,\ \frac{2\pi R'}{N}m\right) \equiv f_{k,m},$$

и действие оператора $\operatorname{Op}(f)$ задается на решетке формулой вида (2.55) с последующим применением аппроксимации Котельникова:

$$\operatorname{Op}(f)\cdot\mathscr{S} = \mathscr{S}\cdot\operatorname{Mat}(f),$$

$$\operatorname{Mat}(f)\{\psi_k\} \equiv \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k'=0}^{N-1} f_{k,m} e^{\frac{2\pi i}{N}m(k-k')}\psi_{k'}. \tag{2.56}$$

Подведем итоги [72].

Теорема 2.5. 1) *Для того чтобы функциям на торе f (символам) можно было сопоставить псевдодифференциальные операторы* $\operatorname{Op}(f)$ — *гомоморфизмы пучка* $\Gamma(\mathbf{T}^2)$, — *необходимо и достаточно выполнение условия* (2.52), *которое переписывается так:*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^{2\pi R'} dp \int_0^{2\pi R} dx \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbf{T}^2}\omega = N, \tag{2.57}$$

т. е. совпадает с общим условием (2.48) (*или* (2.36), *так как* $c_1(\mathbf{T}^2) = 0$).

2) *Сечения пучка* $\Gamma(\mathbf{T}^2)=\Gamma(\mathbf{S}_R\times\mathbf{S}_{R'})$, *на которые действуют операторы* $\mathrm{Op}(f)$, *можно заменить глобальными функциями на окружности* $\mathbf{S}_R$ *вида* (2.53), *т. е. фактически функциями на решетке. Геометрия тора вне узлов решетки не играет роли. Вступает в силу принцип неопределенности внутри ячейки размера* $\frac{2\pi R}{N}\times\frac{2\pi R'}{N}$; *квантованный тор — это неопределенного вида «гармошка».*

3) *Гомоморфизмы пучка* $\mathrm{Op}(f)$ *эквивалентны на этой гармошке матричным операторам* $\mathrm{Mat}(f)$, *действующим на функции на решетке по формуле* (2.56).

Отметим, что полученная связь формул (2.56) и (2.51) решает задачу о вычислении асимптотики при $N\to\infty$ уравнений с матричными операторами вида (2.56), т. е. разностных схем на окружности. Действительно, в псевдодифференциальном операторе $f\left(\overset{2}{x},\ -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)$ «забыта» исходная матричная структура, а вместо нее участвует малый параметр $\hbar\to 0$ (см. (2.52)), причем он стоит так, как требуется в теории квазиклассических асимптотик (но на нетривиальном фазовом пространстве $\mathbf{T}^2$). В п. 3.3 мы увидим, что основные факты теории квазиклассических асимптотик переносятся в нелинейные фазовые пространства. Это позволяет исследовать, например, распространение фронта высокочастотных колебаний решетки и получить, как в [42, 96], математическую модель эффекта, подобного эффекту Черенкова. Центральным моментом перехода от «матричного квантования» на решетке при увеличении размера матриц $N\to\infty$ к асимптотическому $\hbar\to 0$ квантованию на торе является, таким образом, правило (2.57).

Ассоциативное умножение $*$ в алгебре функций на торе, обладающее единицей 1 и удовлетворяющее аксиоме (2.44), можно получить просто: взять умножение символов на накрытии тора, например на цилиндре $T^*\mathbf{S}_R$:

$$(f*g)(x,\ p)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(x,\ p+\frac{\hbar}{R}m\right)e^{i\frac{x}{R}m}\tilde{g}_m(p)\sim$$

$$\sim\sum_{s\geqslant 0}\frac{1}{s!}(-i\hbar)^s\frac{\partial^s f}{\partial p^s}(x,\ p)\frac{\partial^s g}{\partial x^s}(x,\ p)+O(\hbar^\infty)\qquad(2.58)$$

и предположить $2\pi R'$-периодичность символов по импульсам. Но если исходить из композиции матричных операторов (2.56)

$$\mathrm{Mat}(f)\,\mathrm{Mat}(g)=\mathrm{Mat}(f*g),$$

$$(f*g)_{k,\,m}=\frac{1}{N}\sum_{l,\,n=0}^{N-1} f_{k,\,m+l}\,g_{k-n,\,m}\,e^{\frac{2\pi i}{N}ln},$$

то возникает иная формула:

$$(f*g)(x,\ p)=\frac{1}{N}\sum_{l,\,n=0}^{N-1} f\left(x,\ p+\frac{2\pi R'}{N}l\right)g\left(x-\frac{2\pi R}{N}n,\ p\right)e^{\frac{2\pi i}{N}ln},$$

определяющая умножение функций на квантованном торе: $N = \frac{2\pi R R'}{\hbar} \in \mathbf{Z}$. Интересно, что ее разложение при $\hbar \to 0$ не совпадает с разложением (2.58). Причина заключена в том, что (2.58) не чувствует глобальной топологии тора (периодичности по p).

Пример 2.2. *Сфера. Матрицы в неприводимых представлениях* SO(3).

Возьмем теперь в качестве фазового пространства сферу $\mathbf{S}^2$ радиуса r с симплектической формой $\omega = r \sin\theta \, d\varphi \wedge d\theta$. Здесь $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ — сферические углы. Кажущаяся особенность формы ω при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, конечно, исчезает в подходящей системе координат вблизи полюсов. Мы видели в гл. I, п. 1.1, что скобка Пуассона, отвечающая форме ω, получается сужением скобки Пуассона из SO(3)* на орбиты коприсоединенного представления.

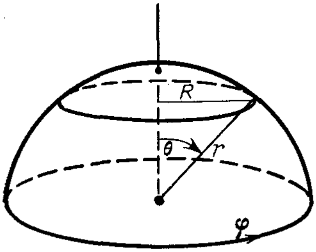


Рис. 17

Приведем форму к каноническому виду:

$$\omega = dp \wedge dx, \quad x = R \cdot \varphi,$$
$$R = r \sin\theta, \quad p = \pi/2 - \theta$$

(θ и φ — полярный и азимутальный углы на сфере; рис. 17). Квантование проведем по «наивной» схеме примера 2.1:

$$\mathrm{Op}(f)\,\psi \approx \sum_{|m| \leqslant l} f(x, p_m)\, e^{ip_m x} \tilde{\psi}_m. \tag{2.59}$$

Здесь $\{p_m\}$ — решетка импульсов, содержащая $2l+1$ точек. Она определяется следующим образом.

Координата x пробегает окружность радиуса $2\pi R$. Поэтому двойственный импульс p должен пробегать эквидистантную решетку с шагом $\hbar/R$. Но в данном случае $R = R(p) = r\cos p$, т. е. радиус сам зависит от импульса. Поэтому шаг решетки будет переменным:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{\hbar}{r}, \; \ldots, \; p_{m+1} = p_m + \frac{\hbar}{R(p_m)}, \quad p_{-m} = -p_m. \tag{2.60}$$

Отсюда $r\cos p_m \Delta p_m = \hbar \Delta m$. Суммируя левую и правую части этого равенства по m, получаем

$$r\sum_{-l}^{l} \cos p_m \Delta p_m \approx \hbar \sum_{-l}^{l} \Delta m \quad \text{или} \quad r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos p \, dp = \hbar(2l+1).$$

В последнем равенстве мы от римановой суммы перешли к континуальному пределу, заметив, что $\Delta p_m \sim \hbar \to 0$.

Итак, возникло условие квантования

$$r = \hbar(l + 1/2), \tag{2.61}$$

которое можно записать в виде (2.36):

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{S_r^2}\omega-\frac{1}{2}c_1(S_r^2)=2l, \tag{2.61a}$$

поскольку класс Чженя сферы равен ее эйлеровой характеристике 2.

Правая часть в этом условии — четное число $2l$, а общее условие (2.36) допускает в правой части любое целое. Здесь проявляется разница между представлениями группы SO(3) и ее накрывающей SU(2). Наше квантование соответствует случаю SO(3) (из-за того что в решетке импульсов (2.60) один узел помещен в точку 0; это делать, конечно, не обязательно); другой вариант: $p_{\pm 1}=\pm\hbar/(2r)$, ..., $p_{\pm l}=\pm l\hbar/(2r)$, число точек $N=2l$, и тогда $r=\hbar l$.

Возвращаясь к определению (2.59), (2.60), мы видим, что на сфере S_r^2 возникает решетка из меридианов и параллелей:

$$\theta_m=\arccos\frac{m\hbar}{r}=\arccos\frac{m}{l+1/2},\quad m=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm l,$$

$$\varphi_k=\frac{\pi r}{l+1/2}k,\quad k=0,\ \ldots,\ 2l.$$

Ей соответствуют матричные операторы $\mathrm{Mat}(f)$ в пространстве коэффициентов Фурье: $[\widetilde{\mathrm{Op}(f)\,\psi}]_k\equiv\mathrm{Mat}(f)\{\tilde{\psi}_k\}$, где

$$\mathrm{Mat}(f)\{\tilde{\psi}_k\}=\frac{1}{2\pi}\sum_{|m|\leqslant l}\tilde{\psi}_m\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi,\ \theta_m)\,e^{i(m-k)\varphi}\,d\varphi. \tag{2.62}$$

В этой формуле в отличие от (2.59) символ f выражен не через канонические координаты Дарбу, а через сферические углы.

Итак, матричный оператор (2.62) оказывается эквивалентным при $l\sim 1/\hbar\to\infty$ псевдодифференциальному оператору $\mathrm{Op}(f)$ с символом на сфере.

Сейчас мы увидим, что матричная структура (2.62) — это структура операторов в неприводимом представлении группы SO(3).

Пусть G — компактная группа Ли, π — ее унитарное представление, $\pi=\bigoplus\limits_l \pi^l$ — разложение на неприводимые компоненты, V — оператор, согласованный с этим разложением, V^l — компонента V в пространстве представления π^l. Матрица V^l относительно какого-нибудь базиса называется матрицей V в неприводимом представлении группы G. Если $A_1,\ \ldots,\ A_n$ — генераторы представления π и $V=v(A_1,\ \ldots,\ A_n)$ — функция от этих генераторов (вейлевская функция от самосопряженных операторов), то матрица V^l — это функция $v(A_1^l,\ \ldots,\ A_n^l)$ от матриц — генераторов π^l. Собственные числа матрицы V^l дают поправки порядка ε в спектре $K+\varepsilon V$, где K — оператор Казимира группы G.

Рассмотрим случай $G=\mathrm{SO}(3)$. Пусть π — представление в $L^2(\mathbf{R}^3)$, порожденное поворотами. Генераторами служат *угловые* *моменты*

$$A_j = \mathcal{A}_j(\overset{2}{q}, \ -i\hbar\overset{1}{\partial/\partial q}), \quad \mathcal{A}(q, \ p) \equiv [q \times p], \quad q \in \mathbf{R}^3;$$
$$\mathcal{A}_1 = -p_\beta \sin\alpha - p_\alpha \cos\alpha \operatorname{ctg}\beta, \quad \mathcal{A}_2 = p_\beta \cos\alpha - p_\alpha \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\mathcal{A}_3 = p_\alpha,$$
$$[A_1, \ A_2] = i\hbar A_3 \ (+ \text{ циклические перестановки}).$$

Здесь $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ — сферические углы в пространстве векторов $q \in \mathbf{R}^3$ (не путать со сферическими углами φ и θ в пространстве векторов $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^3$); p_α, p_β — соответствующие импульсы.

Пусть $v \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$. Рассмотрим матрицу оператора $V = v(A_1, A_2, A_3)$ в l-м неприводимом представлении группы SO (3):

$$V^l\{u_k\} = \{\sum_{|m| \leqslant l} V^l_{k, m} u_m\},$$
$$V^l_{k, m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \, V(P^l_m(\beta) e^{im\alpha}) \, P^l_k(\beta) \, e^{-ik\alpha}, \tag{2.63}$$

где P^l_m — базис вещественных решений задачи на собственные значения:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} \sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\hbar^2 m^2}{\sin^2\beta}\right) P^l_m(\beta) = E^l P^l_m(\beta), \quad E^l = \hbar^2 l(l+1),$$
$$\int_0^\pi P^l_m(\beta)^2 \sin\beta \, d\beta = 1.$$

Асимптотика решения этой задачи при $\hbar \to 0$ легко строится, например, с помощью следствия 2.2 гл. III. Ее подстановка в интеграл (2.63) дает такой результат:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin\beta \, v(\hat{\mathcal{A}}) \, (P^l_m(\beta) e^{im\alpha}) \, P^l_k(\beta) \, e^{-ik\alpha} =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b v(\varphi + \varkappa(\beta, \ m\hbar), \ \theta_m, \ r) \, \frac{\exp\{i(m-k)(\varphi + \varkappa(\beta, \ m\hbar))\}}{\mathrm{T}(r^2 - (m\hbar)^2/\sin^2\beta)^{1/2}} d\beta + O(\hbar).$$

Здесь в правой части символ v сужен на сферу $|\mathcal{A}| = r$ и выражен в сферических координатах $v(\varphi, \ \theta, \ r)$, функция $\varkappa = \varkappa(\beta, \ p_\alpha)$ определена формулами

$$\mathcal{A}_1 = \sqrt{r^2 - p_\alpha^2} \cos(\varphi + \varkappa), \quad \cos\varkappa \overset{\text{def}}{\equiv} -\frac{p_\alpha}{\sqrt{r^2 - p_\alpha^2}} \operatorname{ctg}\beta, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant \pi,$$

a и b — точки поворота по переменной β, определяемые как корни уравнений

$$r^2 - (m\hbar)^2/\sin^2\beta = 0,$$

T — период движения классической гамильтоновой системы, отвечающей гамильтониану $p_\beta^2+(\hbar m)^2/\sin^2\beta$ на уровне энергии r^2, т. е.

$$\mathrm{T}=\int_a^b (r^2-(m\hbar)^2/\sin^2\beta)^{-1/2}\,d\beta.$$

В получившемся выражении, меняя местами интегралы по α и β и делая замену переменной интегрирования $\varphi+\varkappa(\beta, m\hbar)\to\varphi$, получаем асимптотику матричных элементов (2.63):

$$V_{k,m}^l=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(\varphi,\theta_m,\quad \hbar\left(l+\frac{1}{2}\right)\right)e^{i(m-k)\varphi}\,d\varphi+O(\hbar),$$

где остаток оценивается равномерно по $|k|$, $|m|\leqslant l\sim 1/\hbar$. Остается сравнить эту формулу с (2.62).

Теорема 2.6. *Гомоморфизмы* $\mathrm{Op}(f)$ *волнового пучка* $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}_r^2)$ *над сферой эквивалентны матричным операторам* $\mathrm{Mat}(f)$ (2.62),

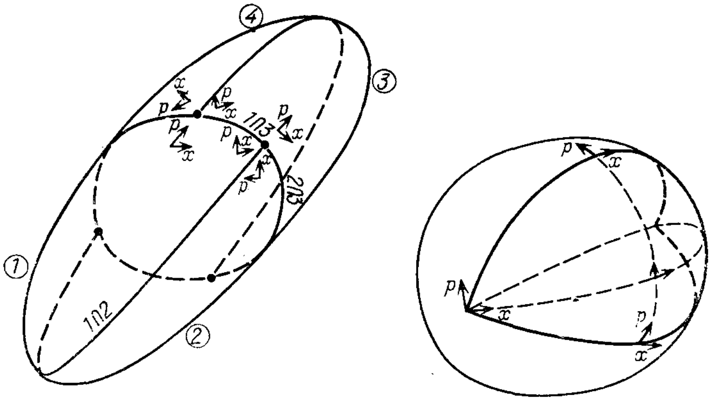


Рис. 18

порожденным решеткой меридианов и параллелей на этой сфере. При выполнении условия квантования (2.61a) *с четной правой частью матричные операторы* $\mathrm{Mat}(f)$ *совпадают по* $\mathrm{mod}\, O(l^{-2})$ *с матрицами* (2.63) *в* l*-м неприводимом представлении группы* $\mathrm{SO}(3)$: *символ* f, *соответствующий оператору* $V^l=v(A_1, A_2, A_3)^l$, *получается сужением на сферу:* $f=v\big|_{\mathbf{S}_r^2}$, *где* $r=\hbar(l+1/2)$.

В завершение примера 2.2 мы докажем, что для случая сферы равенство (2.35) точное, а не по mod 2.

Лемма 2.5. *Коцикл* $\nu_{\delta\beta\alpha}$ (2.32) *представляет удвоенный эйлеров класс сферы:* $[\nu](\mathbf{S}^2)=4$.

Доказательство. Покроем сферу четырьмя картами, как указано на рис. 18. Отдельная карта — окрестность четвертушки сферы — показана на рисунке справа; отмечены направления канонических осей координат Дарбу, в которых $\omega=dp\wedge dx$.

Во всех попарных пересечениях карт вычислим углы поворота базисных реперов $(\vec{x}, \vec{p})$ при переходе из карты в карту. На рис. 19

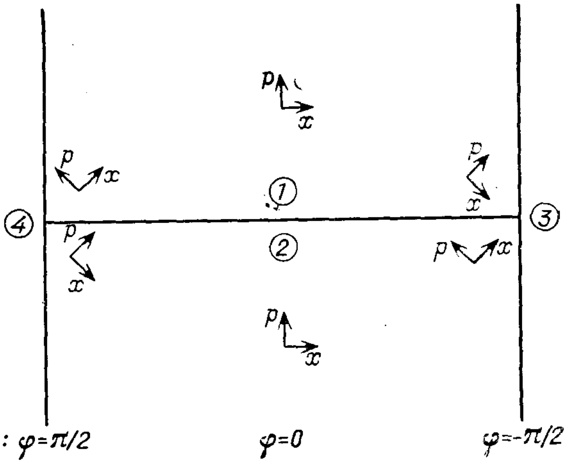


Рис. 19

показано схематически пересечение карт $1 \cap 2$. Угол, отвечающий переходу из карты i в карту j в точке пересечения с картой k, обозначим φ_{ij}^k. Например, на нашем рисунке

$$\varphi_{12}^4 = \pi/2.$$

Приведем табличку всех углов перехода:

$$\begin{array}{llll} \varphi_{12}^4 = \pi/2, & \varphi_{12}^3 = -\pi/2, & \varphi_{24}^3 = -\pi/4, & \varphi_{24}^1 = \pi/4, \\ \varphi_{13}^4 = -\pi/4, & \varphi_{13}^2 = \pi/4, & \varphi_{14}^2 = 3\pi/4, & \varphi_{14}^3 = 5\pi/4, \\ \varphi_{34}^1 = -\pi/2, & \varphi_{34}^2 = \pi/2, & \varphi_{23}^1 = 3\pi/4, & \varphi_{23}^4 = 5\pi/4. \end{array}$$

По нижним индексам углы перехода антисимметричны: $\varphi_{ij}^k = -\varphi_{ji}^k$. Теперь вычислим полные углы поворота на пересечениях трех карт: $\varphi_{ijk} = \varphi_{ij}^k + \varphi_{jk}^i + \varphi_{ki}^j$. Имеем

$$\varphi_{132} = 0, \quad \varphi_{124} = 0, \quad \varphi_{143} = 2\pi, \quad \varphi_{234} = 2\pi.$$

Как было показано в примере 2.3, повороту на плоскости $\mathbf{R}_x^2 \oplus \mathbf{R}_p^2$ на угол $+\pi$ по часовой стрелке соответствует набег индекса $+1$. Таким образом, нашим углам поворота φ_{ijk} соответствуют индексы

$$\nu_{132} = 0, \quad \nu_{124} = 0, \quad \nu_{143} = 2, \quad \nu_{234} = 2.$$

Полный индекс всей сферы получается суммированием по всем тройным пересечениям карт, причем каждое обходится в соответствии с ориентацией, задаваемой симплектической структурой (у нас по часовой стрелке):

$$[\nu](\mathbf{S}^2) = \nu_{132} + \nu_{124} + \nu_{143} + \nu_{234} = 4.$$

Лемма доказана.

П р и м е р 2.3. *Рогатая сфера. Пространства с коническими точками.* Пусть $\mathcal{M}$ — риманово многообразие, на котором все геодезические замкнуты. Рассмотрим фазовое пространство $T^*\mathcal{M} \setminus \{0\}$, где $\{0\}$ — нулевое сечение в $T^*\mathcal{M}$. Пространство расслоено геодезическими. Слои косоортогонального расслоения (см. п. 2.2 гл. I) — это поверхности уровня символа оператора Лапласа на $\mathcal{M}$; они расслоены геодезическими над некоторой базой $\mathfrak{X}$. Симплектическое многообразие $\mathfrak{X}$ отождествляется с множеством всех геодезических на $\mathcal{M}$ (см. [13, с. 77]). По терминологии § 2 гл. I $\mathfrak{X}$ — приведенное фазовое пространство.

Значение класса $[\nu]$ на базисном цикле в $\mathfrak{X}$ совпадает с индексом Морса геодезической. Но если не все геодезические имеют одинаковую длину, то многообразие $\mathfrak{X}$ теряет гладкую структуру: появляются особенности типа к о н и ч е с к и х т о ч е к [235, 241, 253]. Индексы Морса соответствующих геодезических могут быть нечетными. Это означает, что и класс $[\nu] \in H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{Z})$ принимает нечетные значения на $\mathfrak{X}$. Ниже приведен простой пример подобного негладкого фазового пространства.

Покажем вначале, как модифицировать определение класса $[\nu]$ для симплектических многообразий с коническими точками [70].

Пусть $\mathfrak{X}$ — топологическое многообразие размерности $2n$, обладающее атласом $\gamma_\alpha\colon \mathcal{U}_\alpha \to D'_\alpha$, где $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — открытое покрытие $\mathfrak{X}$, а $D'_\alpha = D \setminus G_\alpha$ — фактор-пространство области $D_\alpha \subset \mathbf{R}^n_x \oplus \mathbf{R}^n_p$ по конечной группе G_α пуассоновых автоморфизмов. Предположим, что существуют пуассоновы отображения $\gamma_{\beta\alpha}$ областей в $\mathbf{R}^{2n}$ такие, что $\pi_\beta \cdot \gamma_{\beta\alpha} = \gamma_\beta \cdot \gamma_\alpha^{-1} \cdot \pi_\alpha$, $\pi_\alpha\colon D_\alpha \to D'_\alpha$ — проекция и, кроме того,

$$\gamma_{\alpha\beta}^{-1} = \gamma_{\beta\alpha}, \quad \gamma_{\beta\alpha} \cdot G_\alpha \cdot \gamma_{\alpha\beta} \subset G_\beta, \quad \gamma_\alpha^{\delta\beta} \equiv \gamma_{\alpha\delta} \cdot \gamma_{\delta\beta} \cdot \gamma_{\beta\alpha} \in G_\alpha. \tag{2.64}$$

Будем тогда называть $\mathfrak{X}$ *симплектическим многообразием с коническими точками.*

Ясно, что если все группы G_α тривиальны, то $\mathfrak{X}$ — обычное гладкое симплектическое многообразие.

Предположим теперь, что для каждой конечной группы G_α существует представление $\gamma \to T_\alpha(\gamma) \pmod{O(\hbar)}$ операторами вида (2.1), т. е. коциклы Φ и ν в (2.23) тривиальны на группе G_α:

$$T_\alpha(\gamma \cdot \gamma') = T_\alpha(\gamma)\, T_\alpha(\gamma') \quad \forall \gamma,\ \gamma' \in G_\alpha.$$

Пусть, кроме того,

$$T(\gamma_{\beta\alpha})\, T_\alpha(\gamma)\, T(\gamma_{\alpha\beta}) = T_\beta(\gamma_{\beta\alpha} \cdot \gamma \cdot \gamma_{\alpha\beta}) \quad \forall \gamma \in G_\alpha.$$

Эти равенства понимаются, конечно, по $\operatorname{mod} O(\hbar)$ в пучках $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ над областями определения соответствующих пуассоновых отображений.

В силу теоремы 2.2 имеем

$$T(\gamma_{\alpha\delta})\, T(\gamma_{\delta\beta})\, T(\gamma_{\beta\alpha}) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\Phi_{\delta\beta\alpha} + i\frac{\pi}{2}\nu_{\delta\beta\alpha}\right\} T_\alpha(\gamma_\alpha^{\delta\beta}),$$

где $\Phi=\{\Phi_{\delta\beta\alpha}\}$ и $\nu=\{\nu_{\delta\beta\alpha}\}$ — наборы вещественных и целых или полуцелых чисел, определенных для каждой тройки пересекающихся карт на $\mathfrak{X}$.

Лемма 2.6. *Наборы Φ и ν являются 2-коциклами Чеха на $\mathfrak{X}$ и задают классы когомологий* $[\Phi]=[\omega]\in H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{R})$, $[\nu]\in H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{Z}_4)$.

Доказательство чисто комбинаторное, и мы не будем его здесь приводить; сошлемся на [70]. Отметим, что класс $[\nu]$ теперь уже не обязан быть четным, как в случае гладкого многообразия (см. лемму 2.3). Действительно, доказательство четности основывалось на представлении (2.28) коцикла ν через индекс $\mu^{\#}$ траектории некоторой гамильтоновой системы: эта траектория

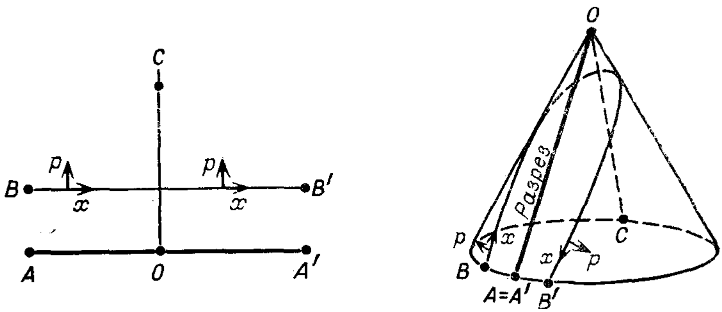


Рис. 20

была замкнутой в силу условия склейки $\gamma_{\alpha\delta}\cdot\gamma_{\delta\beta}\cdot\gamma_{\beta\alpha}=\mathrm{id}$. Теперь условие склейки заменено (2.64), соответствующая траектория не замкнута и ее индекс не обязан быть четным.

Приведем пример симплектического многообразия с коническими точками, на котором класс $[\nu]$ принимает нечетные значения.

Простейшая коническая точка — это факторизация плоскости $\mathbf{R}_x\oplus\mathbf{R}_p$ по действию группы $G\approx\mathbf{Z}_2$ с двумя элементами id и γ_0, где

$$\gamma_0(x, p)=(-x, -p), \quad \gamma_0^2=\mathrm{id}.$$

Фактор $\mathbf{R}^2/G$ представляет собой конус.

Процесс факторизации показан на рис. 20: слева плоскость $\mathbf{R}^2$ с отмеченными точками и репером (x, p), а справа фактор-пространство $\mathbf{R}^2/G$ с теми же точками.

Фазовые пространства с такими и более сложными особенностями возникают постоянно в краевых задачах. Например, оператору Шрёдингера на полуоси

$$-\hbar^2\frac{d^2}{dr^2}+V(r), \quad r>0,$$

соответствует фазовое пространство — конус

$$\{(r, p_r)\,|\,r\geqslant 0, \ (0, p_r)\equiv(0, -p_r)\},$$

в котором склеены положительные и отрицательные импульсы над точкой $r=0$.

Возьмем теперь сферу S^2, вырежем в ней дырку и заклеим ее построенным выше конусом. Получим «сферу с рогом». Класс [ν] на ней принимает нечетное значение 3 (рис. 21).

Склеим теперь два конуса друг с другом, отождествив линии разреза, а оставшуюся дырку заклеим полусферой. Получим «сферу с двумя рогами». Класс [ν] на ней равен 2 (рис. 22). Если заклейку проводить не полусферой, а снова комбинацией из двух конусов, то получим «сферу с четырьмя рогами». Для нее [ν] = 0.

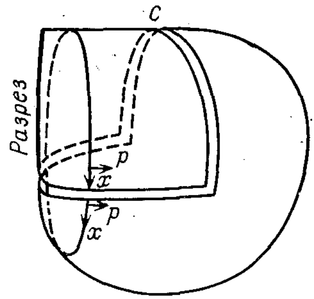


Рис. 21

Рассмотрим подробнее «сферу с тремя рогами». Карты с номерами 1, 2, 3 на ней представляют собой стандартные конуса, указанные выше, а карта 4 — это четвертушка сферы (рис. 23). Выпишем так же, как в примере 2.2, таблицу углов перехода на попарных пересечениях карт:

$$\varphi_{12}^4 = \varphi_{12}^3 = 0, \quad \varphi_{24}^2 = 3\pi/4, \quad \varphi_{24}^1 = \pi,$$
$$\varphi_{13}^4 = \varphi_{13}^2 = 0, \quad \varphi_{14}^2 = -\pi, \quad \varphi_{14}^3 = -3\pi/4,$$
$$\varphi_{34}^1 = -3\pi/4, \quad \varphi_{34}^2 = -\pi/4, \quad \varphi_{23}^1 = 0, \quad \varphi_{23}^4 = 0.$$

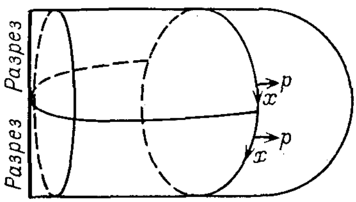


Рис. 22

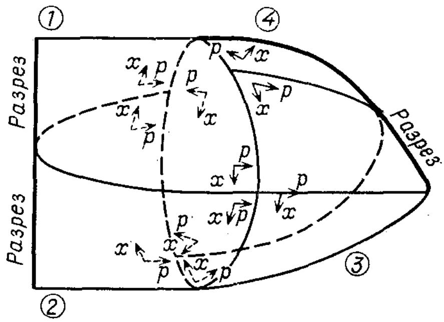


Рис. 23

Полные углы поворота на пересечениях трех карт:

$$\varphi_{132} = 0, \quad \varphi_{124} = 2\pi, \quad \varphi_{143} = 0, \quad \varphi_{234} = -\pi.$$

Следовательно, класс [ν] на сфере с тремя рогами равен

$$\nu = \nu_{132} + \nu_{124} + \nu_{143} + \nu_{234} = 0 + 2 + 0 - 1 = 1.$$

Общая формула для сферы с m-рогами, по-видимому, такая: [ν] = $4 - m$.

§ 3. Квантование двумерных пленок

Центральные темы параграфа:

— определение индекса двумерных ориентированных пленок в произвольном симплектическом многообразии;

— определение одномерного класса когомологий лагранжевых подмногообразий в пространствах с четным классом Чженя c_1 (теорема 3.1);

— правило квантования двумерных пленок (3.1);

— квантование процедуры редукции Ли — Картана (теорема 3.6);

3.1. Индекс двумерных пленок. Теперь вернемся к случаю общего симплектического многообразия $\mathfrak{X}$ и к волновому пучку $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$. Мы хотим перенести на этот случай теорему 2.2 гл. III, т. е. построить операторы K_Λ над лагранжевыми подмногообразиями $\Lambda \subset \mathfrak{X}$ так, чтобы выполнялись основные аксиомы (I)—(IV) п. 2.1 гл. III.

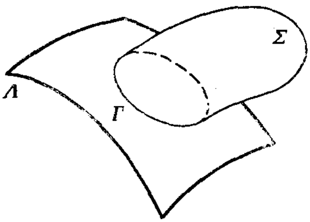


Рис. 24

Основная трудность состоит в том, что теперь нельзя записать правила квантования одномерных циклов (2.20) гл. III, так как в фазовом пространстве $\mathfrak{X}$ нет первообразной θ симплектической формы ω и нет поляризации (направления проектирования), которая позволила бы определить класс когомологий $[\mu] \in H^1(\Lambda, \mathbf{Z})$.

Правда, теорема Стокса подсказывает, что аналогом интегралов от 1-формы θ по одномерным циклам $\mathbf{\Gamma} \subset \Lambda$ нужно считать интегралы от 2-формы ω по двумерным пленкам $\Sigma \subset \mathfrak{X}$ с границей $\partial\Sigma = \mathbf{\Gamma}$ (рис. 24).

Для того чтобы эту аналогию распространить на одномерный целочисленный класс $[\mu]$, нужно иметь что-то вроде «целочисленной 2-формы» во всем пространстве $\mathfrak{X}$. Причем так же, как дифференциальная форма ω представляет свой класс когомологий $[\omega]$, и эта «целочисленная форма» должна представлять удвоенный класс Чженя $2c_1$ или — в нашей схеме — класс $[\nu] \in H^2(\mathfrak{X}, \mathbf{Z})$ (см. по этому поводу [129, 166]). Мы дадим определение такой «формы» или индекса двумерных пленок $\nu_\Lambda(\Sigma)$ и покажем, что правило квантования (2.20) гл. III в общем случае будет выглядеть так [60, 62, 197]:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{\Sigma}\omega - \frac{1}{4}\nu_\Lambda(\Sigma) \in \mathbf{Z}, \quad \partial\Sigma \subset \Lambda. \tag{3.1}$$

Рассмотрим вновь атлас ξ_α: $\mathcal{U}_\alpha \to \mathbf{R}^{2n}$ на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$. Без ограничения общности можно считать, что либо каждая карта $\mathcal{U}_\alpha$ пересекает Λ, либо пересечение замыкания $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$ с Λ пусто и что покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha \cap \Lambda\}$ многообразия Λ правильное в смысле теории когомологий (покрытие Лере [117]).

Пусть Σ — двумерная ориентированная поверхность в $\mathfrak{X}$ с границей $\partial\Sigma \subset \Lambda$. Устроим триангуляцию Σ, например, шестиугольниками (рис. 25). И будем считать, что каждая внутренняя вершина триангуляции лежит в пересечении трех карт, каждое внутреннее ребро — в пересечении двух карт, каждая грань — в одной карте. Для граничных ребер каждое лежит в одной карте, граничные вершины — в пересечении двух карт.

П е р в ы й в а р и а н т о п р е д е л е н и я и н д е к с а п л е н к и. На каждом ребре фиксируется точка (отмечена крестиком на рисунке). Каждой внутренней вершине m^0 и трем путям, идущим

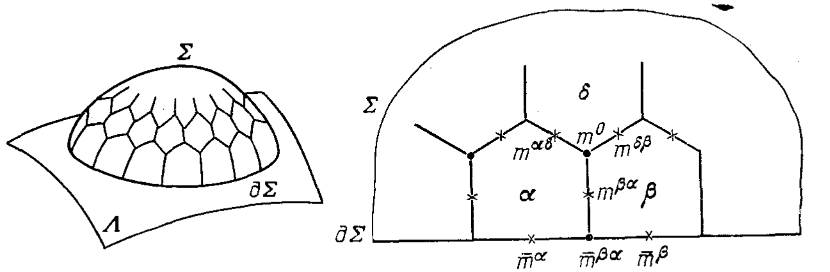


Рис. 25

от нее к отмеченным точкам, сопоставим число $\nu_{\delta\beta\alpha}$ из (2.32). Каждой граничной вершине $\overline{m}^{\beta\alpha}$ и ее тройке путей (два из которых лежат на Λ; см. рис. 25) сопоставим число

$$\mu_{\beta\alpha} = \mu_\alpha(\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^{\beta\alpha}) - \mu_\beta(\overline{m}^\beta \to \overline{m}^{\beta\alpha}) + \mu_{\gamma_{\beta\alpha}}(m^{\beta\alpha} \to \overline{m}^{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}\tau_{\beta\alpha}(\overline{m}^{\beta\alpha}), \tag{3.2}$$

где $\mu_{\gamma_{\beta\alpha}}$ — индекс пути на графике склейки $\mathrm{Gr}(\gamma_{\beta\alpha})$, функция $\tau_{\beta\alpha}(\overline{m}) \equiv \tau(\gamma_{\beta\alpha}, \Lambda_\alpha, \xi_\alpha(\overline{m}))$ определена в (2.19), $\Lambda_\alpha \equiv \xi_\alpha(\Lambda \cap \mathcal{U}_\alpha)$, а μ_α — индексы путей на лагранжевых подмногообразиях $\Lambda_\alpha \subset \mathbf{R}^{2n}$:

$$\mu_\alpha(\Gamma) \equiv \mathrm{Ind}_{\Lambda_\alpha}(\xi_\alpha(\Gamma)).$$

Числа $\nu_{\delta\beta\alpha}$ и $\mu_{\beta\alpha}$ целые или полуцелые. Подчеркнем, что $\{\mu_{\beta\alpha}\}$ — это коцепь лишь на Λ, а не в объемлющем пространстве $\mathfrak{X}$. *Индексом пленки* назовем сумму

$$\nu_\Lambda = \Sigma\nu_{\delta\beta\alpha} + \Sigma\mu_{\beta\alpha} \tag{3.3}$$

по всем вершинам триангуляции пленки — внутренним и граничным, причем индексы α, β, δ или α, β в каждом слагаемом расставляются согласно ориентации пленки.

В т о р о й в а р и а н т о п р е д е л е н и я и н д е к с а п л е н к и. Триангуляцию пленки без ограничения общности можно считать гладкой, т. е. такой, что все ее ребра гладко касаются друг друга в вершинах. Каждое ребро поместим на лагранжево подмногообразие — узкую полоску — так, чтобы эти полоски касались друг друга в окрестности вершин. Для граничных ребер в качестве лагранжевых полосок берутся, конечно, куски Λ. Объединение всех лагранжевых полос назовем *лагранжевым оснащением* пленки. Это — открытое лагранжево подмногообразие в $\mathfrak{X}$, но, конечно, неодносвязное (его первое число Бетти равно числу граней в триангуляции плюс число Бетти границы пленки).

Грань триангуляции вместе с ее лагранжевым оснащением координатное отображение ξ_α переводит в $\mathbf{R}^{2n}$. Там мы можем вычислить индекс Ind каждого ребра на приданной ему лагранжевой полоске, предполагая, что ориентация ребра соответствует ориентации грани. Сумма индексов всех ребер назовем индексом грани.

Индексом пленки назовем сумму индексов всех граней ее лагранжева оснащения [62].

Теорема 3.1. (a) *Два определения индекса пленки эквивалентны; число $\nu_\Lambda(\Sigma)$ не зависит от выбора триангуляции пленки. Индекс пленки — целочисленный гомологический инвариант пары $\Lambda\subset\mathfrak{X}$.*

(b) *Для замкнутых пленок индекс вычисляется по формуле*

$$\nu_\Lambda(\Sigma)=[\nu](\Sigma),\quad \partial\Sigma=\varnothing.$$

Он не зависит от Λ и по mod 4 *совпадает со значениями удвоенного класса Чженя $2c_1(\Sigma)$.*

(c) *Если класс Чженя четный (т. е. $\mathfrak{X}$ допускает метаплектическую структуру), то индекс пленок определяет на лагранжевых подмногообразиях $\Lambda\subset\mathfrak{X}$ одномерный класс когомологий $[\mu]\in H^1(\Lambda,\ \mathbf{Z}_4)$, $[\mu](\Gamma)\overset{\mathrm{def}}{=}\nu_\Lambda(\Sigma)$, где $\partial\Sigma=\Gamma$. Если $\mathfrak{X}$ обладает поляризацией, то так определенный класс $[\mu]$ — целый и совпадает с классом, определенным в гл.* III *(леммы* 2.4, 2.6*).*

Таким образом, индекс двумерных пленок ν_Λ служит искомым двумерным аналогом характеристического класса $[\mu]$ из § 2 гл. III.

Доказательство. Вклад $\nu_{\delta\beta\alpha}$ каждой внутренней вершины триангуляции в сумме (3.8) состоит из индексов путей на трех графиках склеек $\mathrm{Gr}(\gamma_{\beta\alpha})$ и из сингулярной добавки $\tau_{\delta\beta\alpha}$, которая «сидит» в самой вершине, т. е. определяется дифференциалом склейки $\gamma_{\beta\alpha}$ в вершине (см. (2.32)). Индекс пути на графике $\mathrm{Gr}(\gamma_{\beta\alpha})$ преобразуем по лемме 2.2 в разность индексов путей на лагранжевой полоске $M_{\beta\alpha}$ (из оснащения) с добавкой двух сингулярных слагаемых:

$$\mu_{\gamma_{\beta\alpha}}(m^{\alpha\beta}\to m^0)=\mathrm{Ind}_{\xi_\beta(M_{\beta\alpha})}(\xi_\beta(m^{\alpha\beta})\to\xi_\beta(m^0))-$$
$$-\mathrm{Ind}_{\xi_\alpha(M_{\beta\alpha})}(\xi_\alpha(m^{\alpha\beta})\to\xi_\alpha(m^0))+$$
$$+\frac{1}{2}\tau(\gamma_{\beta\alpha},\xi_\alpha(M_{\beta\alpha}),\ \xi_\alpha(m^{\alpha\beta}))-\frac{1}{2}\tau(\gamma_{\beta\alpha},\xi_\alpha(M_{\beta\alpha}),\ \xi_\alpha(m^0)).$$

Сингулярные слагаемые, сидящие в отмеченных точках $m^{\alpha\beta}$, взаимно сократятся при суммировании (3.3), а сингулярные слагаемые, сидящие в вершине m^0 (три пути дают три таких слагаемых), складываясь, компенсируют сингулярный член в $\tau_{\delta\beta\alpha}$:

$$\tau_{\delta\beta\alpha}(m^0) = \tau(\gamma_{\beta\alpha}, \xi_\alpha(M), \xi_\alpha(m^0)) + \\ + \tau(\gamma_{\beta\alpha}, \xi_\beta(M), \xi_\beta(m^0)) + \tau(\gamma_{\alpha\beta}, \xi_\delta(M), \xi_\delta(m^0)), \quad (3.4)$$

где $M \equiv M^{\alpha\beta} \equiv M^{\delta\beta} \equiv M^{\alpha\beta}$ — лагранжева площадка вблизи вершины m^0.

Аналогично (3.4) преобразуются числа $\mu_{\gamma_{\beta\alpha}}(m^{\beta\alpha} \to \overline{m}^{\beta\alpha})$ в (3.2). Возникающие при этом сингулярные слагаемые, сидящие в отмеченных точках $m^{\beta\alpha}$, сокращаются при суммировании (3.3), а сингулярные слагаемые, сидящие в точках $\overline{m}^{\beta\alpha}$, сокращаются с сингулярными членами $\tau_{\beta\alpha}(\overline{m}^{\beta\alpha})$ в (3.2).

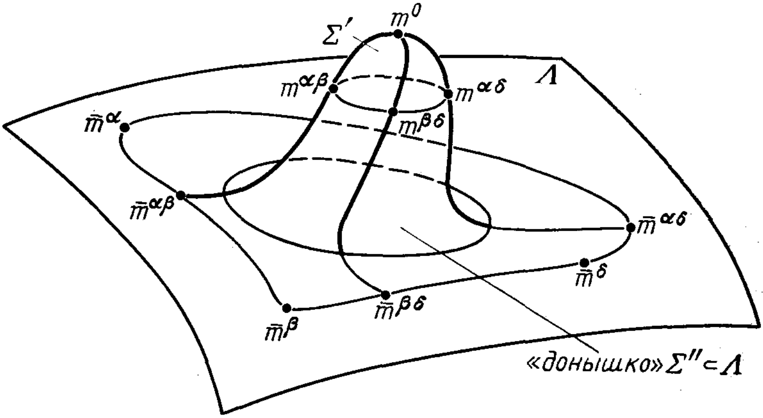


Рис. 26

Окончательно в сумме (3.3) остаются только индексы путей на лагранжевых полосках из оснащения, т. е. на $\xi_\alpha(M_{\beta\alpha})$, $\xi_\beta(M_{\beta\alpha})$ или Λ_α. Эта сумма индексов в точности совпадает со вторым вариантом определения числа $\nu_\Lambda(\Sigma)$. Таким образом, два варианта эквивалентны. Из второго варианта очевидно, что индекс $\nu_\Lambda(\Sigma)$ — целое число.

Далее, если $\partial\Sigma = \varnothing$, то в (3.3) отсутствует вторая сумма и, следовательно, $\nu_\Lambda(\Sigma)$ совпадает со значением класса $[\nu]$ на 2-цикле Σ. Кроме того, если Σ стягиваема в точку, то $\nu_\Lambda(\Sigma) = 0$. Этим доказан п. (b) теоремы и одновременно независимость индекса пленки от ее шевелений (при неподвижной границе).

Независимость от шевелений границы будет доказана, если показать, что индекс стягиваемой пленки Σ', указанной на рис. 26, равен нулю. В данном случае сумма (3.3) будет такой:

$$\nu_\Lambda(\Sigma') = \nu_{\delta\beta\alpha} + (\mu_{\alpha\delta} + \mu_{\delta\beta} + \mu_{\beta\alpha}).$$

Поэтому требуемое равенство $\nu_\Lambda(\Sigma') = 0$ эквивалентно следующему утверждению.

Лемма 3.1. *Дифференциал коцепи* μ (3.2) *совпадает с сужением на* Λ *коцикла* $-\nu$ (*см.* (2.32)), *т. е.* $(d\mu + \nu)|_\Lambda = 0$.

С другой стороны, как мы уже доказали, число $\nu_\Lambda(\Sigma')$ можно вычислить по второму варианту определения индекса пленки. Это определение дает

$$\nu_\Lambda(\Sigma') = \operatorname{Ind}_{\xi_\alpha(M)}(\xi_\alpha(\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^{\beta\alpha} \to m^{\beta\alpha} \to m^0 \to m^{\alpha\delta} \to \overline{m}^{\alpha\delta} \to \overline{m}^\alpha)) +$$
$$+ \operatorname{Ind}_{\xi_\beta(M)}(\xi_\beta(\overline{m}^\beta \to \overline{m}^{\delta\beta} \to m^{\delta\beta} \to m^0 \to m^{\beta\alpha} \to \overline{m}^{\beta\alpha} \to \overline{m}^\beta)) +$$
$$+ \operatorname{Ind}_{\xi_\delta(M)}(\xi_\delta(\overline{m}^\delta \to \overline{m}^{\alpha\delta} \to m^{\alpha\delta} \to m^0 \to m^{\delta\beta} \to \overline{m}^{\delta\beta} \to \overline{m}^\delta)). \quad (3.5)$$

Здесь M — лагранжево подмногообразие в $\mathfrak{X}$, которое содержит все полоски лагранжева оснащения Σ'. В данной локальной ситуации, конечно, можно сделать M односвязным. Поэтому выписанные три индекса замкнутых путей на проекциях M в локальные карты равны нулю. Итак, $\nu_\Lambda(\Sigma') = 0$. Этим доказан п. (а) теоремы.

Утверждение п. (с) прямо следует из п. (а). В случае, если $\mathfrak{X}$ обладает поляризацией, то $\nu_{\delta\beta\alpha} = 0$ (см. п. 2.4), $\tau_{\beta\alpha}(\overline{m}^{\beta\alpha}) = 0$, $\mu_{\gamma_{\beta\alpha}}(m^{\beta\alpha} \to \overline{m}^{\beta\alpha}) = 0$, т. е. сумма (3.3) сводится к такой:

$$\mu(\Gamma) = \sum \mu_{\beta\alpha} = \sum (\mu_\alpha(\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^{\beta\alpha}) + \mu_\beta(\overline{m}^{\beta\alpha} \to \overline{m}^\beta)) = \sum_\alpha \mu_\alpha(\Gamma_\alpha),$$

где Γ_α — последовательные куски пути Γ в локальных картах. Теорема доказана.

3.2. Правило квантования. Помимо коцепи $\{\mu_{\beta\alpha}\}$ (3.2) нам понадобится ниже коцепь на Λ, порожденная первообразными симплектической формы

$$S_{\beta\alpha} = \int\limits_{\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^{\alpha\beta} \to m^{\alpha\beta}} \theta_\alpha - \int\limits_{\overline{m}^\beta \to \overline{m}^{\alpha\beta} \to m^{\alpha\beta}} \theta_\beta .$$

Лемма 3.2. *Дифференциал коцепи $S_{\beta\alpha}$ совпадает с сужением на Λ коцикла $-\Phi$ из* (2.31), *т. е.* $dS + \Phi|_\Lambda = 0$.

Доказательство. Сразу исключим случай $\dim\Lambda = 1$ (или $\dim\mathfrak{X} = 2$), так как здесь лемма очевидна. В случае $\dim\mathfrak{X} \geqslant 4$ равенство леммы следует из теоремы Стокса. Действительно, имеем

$$S_{\alpha\delta} + S_{\delta\beta} + S_{\alpha\beta} + \Phi_{\delta\beta\alpha} = \oint\limits_{\substack{\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^{\alpha\beta} \to m^{\alpha\beta} \to \\ \to m^0 \to m^{\alpha\delta} \to \overline{m}^{\alpha\delta} \to m^\alpha}} \theta_\alpha + \oint\limits_{\cdots} \theta_\beta + \oint\limits_{\cdots} \theta_\delta$$

(см. рис. 26). Замкнутые пути, по которым берутся здесь интегралы, те же, что и в (3.5). Итак,

$$(dS)_{\delta\beta\alpha} + \Phi_{\delta\beta\alpha} = \int\limits_{\Sigma'} \omega,$$

где любая Σ' — двумерная пленка в $\mathfrak{X}$, натянутая на остов из указанных на рис. 26 путей. Границей $\partial\Sigma'$ является замкнутый путь на Λ, соединяющий последовательно точки $\overline{m}^\alpha \to \overline{m}^\beta \to \overline{m}^\delta \to \overline{m}^\alpha$. Поскольку все рассмотрение локально, этот путь стягиваем по Λ, т. е. существует двумерная пленка $\Sigma'' \subset \Lambda$, границей которой служит этот путь. Объединение пленок (со сменой ориентации у Σ'') дает двумерный цикл

$$\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''^{(-)}.$$

Поскольку Λ лагранжево, то $\omega|_{\Sigma''} = 0$ и, следовательно,

$$\int_{\Sigma'} \omega = \int_{\Sigma} \omega = 0.$$

Последнее равенство нулю выполнено в силу замкнутости ω и замкнутости пленки Σ. Лемма доказана.

Предположим теперь, что на $\mathfrak{X}$ выполнено условие квантования (2.36), т. е.

$$\frac{1}{\hbar} \Phi_{\delta\beta\alpha} - \frac{\pi}{2} \nu_{\delta\beta\alpha} = c_{\alpha\delta} + c_{\delta\beta} + c_{\beta\alpha} - 2\pi N_{\delta\beta\alpha},$$

где $N_{\delta\beta\alpha}$ — целочисленный 2-коцикл, а $\{c_{\beta\alpha}\}$ — некоторая 1-коцепь на $\mathfrak{X}$ (зависящая, возможно, от $\hbar$). В силу лемм 3.1 и 3.2

$$d\left(c|_\Lambda + \frac{1}{\hbar} S - \frac{\pi}{2} \mu\right) = 2\pi N|_\Lambda.$$

Следовательно, на Λ определен 1-коцикл

$$\lambda_{\beta\alpha} = \exp\left\{i\left(c_{\beta\alpha} + \frac{1}{\hbar} S_{\beta\alpha} - \frac{\pi}{2} \mu_{\beta\alpha}\right)\right\} \tag{3.6}$$

со значениями в $U(1)$ и соответствующий класс когомологий

$$[\lambda] \in H^1(\Lambda, U(1)).$$

Геометрия класса $[\lambda]$ из этого определения пока не ясна: в (3.6) перемешаны вклады от симплектической формы, быстро осциллирующие при $\hbar \to 0$, и вклады от индекса.

Мы можем разделить эти вклады с помощью введенного выше индекса двумерных пленок.

Лемма 3.3. *Пусть Σ — ориентированная двумерная пленка в $\mathfrak{X}$ с границей $\partial\Sigma \subset \Lambda$. Тогда*

$$[\lambda](\partial\Sigma) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{\Sigma} \omega - i\frac{\pi}{2} \nu_\Lambda(\Sigma)\right\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу леммы 3.2 можно записать интеграл от формы ω аналогично (3.3) через коцикл Φ и коцепь S:

$$\int_{\Sigma} \omega = \sum \Phi_{\delta\beta\alpha} + \sum S_{\beta\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\hbar} \int_{\Sigma} \omega - \frac{\pi}{2} \nu_\Lambda(\Sigma) = \sum \left(\frac{1}{\hbar} \Phi_{\delta\beta\alpha} - \frac{\pi}{2} \nu_{\delta\beta\alpha}\right) + \sum \left(\frac{1}{\hbar} S_{\beta\alpha} - \frac{\pi}{2} \mu_{\beta\alpha}\right) =$$

$$= -2\pi \sum N_{\delta\beta\alpha} + \Sigma\left(c_{\beta\alpha} + \frac{1}{\hbar} S_{\beta\alpha} - \frac{\pi}{2} \mu_{\beta\alpha}\right).$$

Отсюда и в силу (3.6)

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\Sigma}\omega-\frac{\pi}{2}\nu_\Lambda(\Sigma)\right\}=\exp\left\{i\sum\left(c_{\beta\alpha}+\frac{1}{\hbar}S_{\beta\alpha}-\frac{\pi}{2}\mu_{\beta\alpha}\right)\right\}=$$

$$=\Pi\lambda_{\beta\alpha}=[\lambda](\partial\Sigma).$$

Лемма доказана.

Правая часть (3.7), конечно, зависит лишь от границы пленки Σ в силу условия (2.36) и теоремы 3.1 (b). На неквантованном симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$ это уже неверно. Таким образом, одномерный класс $[\lambda]$ определен на лагранжевых подмногообразиях Λ лишь в квантованных фазовых пространствах. В п. 3.3 мы увидим, что именно этот класс является препятствием для построения сплетающего оператора K_Λ.

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — односвязное симплектическое многообразие, $\Lambda\subset\mathfrak{X}$ — лагранжево подмногообразие. Если для всех двумерных пленок Σ с границей на Λ выполнено правило квантования* (3.1), *то класс $[\lambda]\in H^1(\Lambda, \mathrm{U}(1))$ тривиален.*

Отметим, что условие (2.36), в частности, содержится в (3.1) Многообразие Λ, на котором выполнено правило (3.1), будем называть *квантованным.*

3.3. Сплетающий оператор в квантованном симплектическом многообразии. Пусть на лагранжевом подмногообразии $\Lambda\subset\mathfrak{X}$ задана мера σ. Тогда $\sigma_\alpha\equiv\xi_{\alpha*}\sigma$ — мера на $\Lambda_\alpha=\xi_\alpha(\Lambda\cap\mathcal{U}_\alpha)$. Построим локальные операторы

$$K_\alpha(\varphi)\overset{\text{def}}{=}K_{\Lambda_\alpha,\,\sigma_\alpha,\,\xi_\alpha(\overline{m}^\alpha)}(\xi_\alpha^{-1*}\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Lambda\cap\mathcal{U}_\alpha).$$

Операторы над $\Lambda_\alpha\subset\mathbf{R}^{2n}$ справа определены по формулам п. 2.3 гл. III.

Лемма 3.4. *На пересечении карт выполнено соотношение*

$$T'_{\beta\alpha}K_\alpha(\varphi)=e^{\frac{i}{\hbar}S_{\beta\alpha}-i\frac{\pi}{2}\mu_{\beta\alpha}}K_\beta(b_{\beta\alpha}\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Lambda\cap\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta),\quad (3.8)$$

где $T'_{\beta\alpha}$ — оператор из леммы 2.4, а $b_{\beta\alpha}$ — операторный мультипликативный коцикл, причем $b_{\beta\alpha}=1+O(\hbar)$ разлагается в ряд по степеням $(-i\hbar)$ с вещественными коэффициентами. Соотношение (3.8) *понимается по* $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$, *т. е. в пучке* $\mathbf{\Gamma}(\xi_\beta(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta))$.

Доказательство прямо следует из леммы 2.1.

Лемма 3.5. *Существуют операторы b_α — ряды по степеням $(-i\hbar)$, коэффициенты которых вещественные дифференциальные операторы на $\mathcal{U}_\alpha\cap\Lambda$ такие, что $b_\alpha=1+O(\hbar)$, и на $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\Lambda$*

$$b_{\beta\alpha}=b_\beta\cdot b_\alpha^{-1}+O(\hbar^\infty).$$

Доказательство повторяет рассуждения леммы 2.4. Если искать b_α в виде $b_\alpha=1+\sum\limits_{s\geqslant1}(-i\hbar)^s b_\alpha^s$, то для коэффициентов b_α^s получим уравнения вида

$$b_\beta^s-b_\alpha^s=e_{\beta\alpha}^s,$$

где $e^s_{\beta\alpha}$ — операторный аддитивный коцикл, определяемый через коэффициент $b^s_{\beta\alpha}$ разложения $b_{\beta\alpha}$ и через предыдущие операторы b^k_α $(k<s)$. Выписанные уравнения решаются явно: $b^s_\alpha=\sum\limits_\beta g_{\Lambda,\,\beta}e^s_{\beta\alpha}$, где $\{g_{\Lambda,\alpha}\}$ — разбиение единицы на Λ, подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_\alpha\cap\Lambda\}$. Лемма доказана.

Из леммы 3.4, 3.5 и следствия 3.1 получаем

Следствие 3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ односвязно и Λ квантовано. Тогда коцикл* (3.6) *тривиален*: $\lambda_{\beta\alpha}=\lambda_\beta\lambda_\alpha^{-1}$, $\lambda_\alpha\in U(1)$, *и операторы* $\mathring{K}_\alpha=\lambda_\alpha K_\alpha\cdot b_\alpha$ *удовлетворяют соотношению*

$$\mathring{T}_{\beta\alpha}\mathring{K}_\alpha(\varphi)=\mathring{K}_\beta(\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\Lambda).$$

Здесь $\mathring{T}_{\beta\alpha}$ — *операторы* (2.43) *сшивания волнового пучка* $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$.

Таким образом, над квантованными лагранжевыми подмногообразиями в односвязных фазовых пространствах $\mathfrak{X}$ определен оператор K_Λ: $C_0^\infty(\Lambda)\to\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$:

$$K_\Lambda(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\mathring{K}_\alpha(\varphi), & \textit{если}\quad \mathcal{U}_\alpha\cap\Lambda\neq\varnothing,\\ O(\hbar^\infty), & \textit{если}\quad \mathcal{U}_\alpha\cap\Lambda=\varnothing.\end{cases}$$

Замечание 3.1. Поскольку коцепь λ_α в следствии 3.2 определена лишь с точностью до нульмерного коцикла, то и оператор K_Λ определен с точностью до унимодулярного постоянного множителя. Зафиксировать однозначно этот множитель, как было сделано в п. 2.3 гл. III, не удается. В этом и состоит плата за общность — за отсутствие в $\mathfrak{X}$ поляризации и невозможность определить на Λ индексы путей.

Итогом всех построений служит

Теорема 3.2. *Оператор K_Λ над квантованным лагранжевым многообразием Λ в односвязном фазовом пространстве удовлетворяет аксиомам* (I)—(IV) *из п.* 2.1 *гл.* III; *для него выполнены утверждения теоремы* 2.1 *и следствия* 2.1 *гл.* III, *а также соотношения* (2.22), (2.22а) *гл.* III.

Рассмотрим теперь случай неодносвязного фазового пространства $\mathfrak{X}$. Пусть $\dim H_1(\mathfrak{X})=r$. Фиксируем числа $q_i\in U(1)$ $(i=1,\ \ldots,\ r)$. Пусть Γ_i — базисные циклы в $H_1(\mathfrak{X})$. Поместим их на лагранжевы полоски M_i. Если $\mathfrak{X}$ квантованно, то для каждой полоски можно определить, как в (3.6), свой класс когомологий $[\lambda]_i\in H^1(M_i,\ U(1))$. Потребуем, чтобы коцепь $\{c_{\beta\alpha}\}$ на $\mathfrak{X}$ была выбрана так, что $[\lambda_i](\Gamma_i)=q_i$ $(i=1,\ \ldots,\ r)$. Этим условием фиксируется неопределенный коцикл, с точностью до которого была задана коцепь $\{c_{\beta\alpha}\}$. Тем самым однозначно фиксируется и волновой пучок $\mathbf{\Gamma}_{q_1\ldots q_r}(\mathfrak{X})$, в определении которого в случае неодносвязного $\mathfrak{X}$ у нас имелся произвол (теорема 2.3 (b)).

Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в $\mathfrak{X}$. Назовем его *квантованным*, если правило (3.1) выполнено для всех пленок Σ, граница у которых есть цикл на Λ и, возможно, какая-то комбинация циклов Γ_i (рис. 27). Над таким квантованным подмногогообразием определен оператор K_Λ, принимающий значения в пучке $\mathbf{\Gamma}_{q_1 \ldots q_r}(\mathfrak{X})$. Верна теорема 3.2.

3.4. Пример: асимметричный SO(3)-волчок. Рассмотрим единичную сферу $\mathbf{S}^2$. Пусть $\hbar = (l+1/2)^{-1}$, где l — целое, $l \to \infty$. При таком выборе параметра $\hbar$ сфера $\mathbf{S}^2$ оказывается квантованной (см. (2.61)).

Любая замкнутая кривая Λ без самопересечений делит сферу на две части Σ, Σ' (рис. 28). Обе эти пленки ориентируем

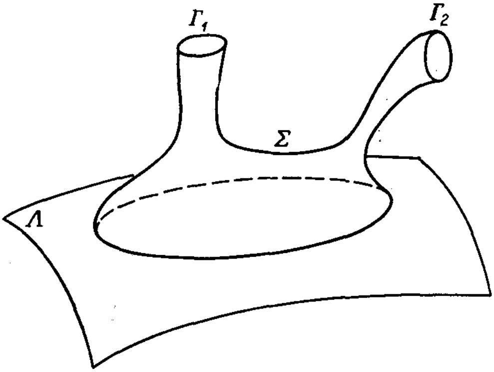


Рис. 27

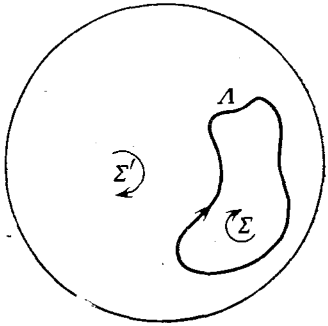


Рис. 28

в соответствии с ориентацией сферы (задаваемой формой объема $\omega = \sin\theta\, d\varphi \wedge d\theta$). Тогда очевидно, что

$$\nu_\Lambda(\Sigma) = 2, \quad \nu_\Lambda(\Sigma') = -2, \quad \nu_\Lambda(\mathbf{S}^2) = \nu_\Lambda(\Sigma) + \nu_\Lambda(\Sigma'^{(-)}) = 4.$$

Поэтому правило квантования (3.1) здесь будет выглядеть так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \omega = \frac{n+1/2}{l+1/2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3.9}$$

Предположим теперь, что кривая Λ лежит на линии уровня некоторой функции $f \in C^\infty(\mathbf{S}^2)$:

$$\Lambda \subset \{f = E\}.$$

Введем на Λ инвариантную нормированную меру $\sigma = dt/T$, где t — время на траектории поля $\mathrm{ad}(f)$, T — период. Тогда сечение волнового пучка над сферой

$$\psi = K_{\Lambda,\sigma}(1) \in \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}^2)$$

удовлетворяет с точностью $O(l^{-2})$ уравнению

$$\hat{f}\psi = E\psi. \tag{3.10}$$

Условие (3.9) показывает, что E здесь не произвольно, а задается двумя квантовыми числами: $E = E_{l,n}$, причем $n \sim l \to \infty$.

Таким образом, вычисляется асимптотика собственных значений псевдодифференциальных операторов с символом на сфере.

С другой стороны, в силу теоремы 2.6 уравнение (3.10) эквивалентно матричному:

$$\sum_{m=-l}^{l} \operatorname{Mat}(f)_{k,m} \tilde{\psi}_m = E\tilde{\psi}_k, \quad -l \leqslant k \leqslant l. \tag{3.11}$$

А оно в свою очередь по $\operatorname{mod} O(l^{-2})$ эквивалентно задаче на собственные значения для оператора $v(s_1, s_2, s_3)$ в l-м неприводимом представлении алгебры SO(3):

$$[s_1, s_2] = is_3, \quad [s_2, s_3] = is_1, \quad [s_3, s_1] = is_2.$$

Функция v здесь однородна степени r на $\mathbf{R}^3 \approx \mathrm{SO}(3)^*$ и совпадает с f на единичной сфере. При этом собственные числа оператора $V = v(s_1, s_2, s_3)$ имеют вид $(l+1/2)^r (E_{l,n} + O(l^{-2}))$.

Рассмотрим, например, волчок

$$V = J_1 s_1^2 + J_2 s_2^2 + J_3 s_3^2, \quad J_1 < J_2 < J_3.$$

Здесь

$$f = J_3 \cos^2\theta + J_2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + J_1 \sin^2\theta \cos^2\varphi$$

в сферической системе координат, полярная ось которой направлена по s_3. В силу (2.62) матрица $\operatorname{Mat}(f)$ в системе уравнений (3.11) здесь выглядит так:

$$\operatorname{Mat}(f)_{k,m} = (J_1 - J_2)\left(1 - \left(\frac{m}{l+1/2}\right)^2\right) \frac{\delta_{k+2,m} - 2\delta_{k,m} + \delta_{k-2,m}}{4} + \\ + \left((J_3 - J_1)\left(\frac{m}{l+1/2}\right)^2 + J_1\right)\delta_{k,m}. \tag{3.12}$$

Таким образом, получаем трехслойную разностную схему, причем с переменными коэффициентами. Подобные схемы в неприводимых представлениях группы SO(3) подробно рассматривались, например, в работе [14]. Отметим, что в континуальном пределе $m\hbar \to \xi$ эта схема переходит в дифференциальный оператор

$$(J_2 - J_1)(1 - \xi^2)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 + (J_3 - J_1)\xi^2 + J_1,$$

у которого имеется вырождение в точках $\xi = \pm 1$. Переход к оператору с символом f на сфере разрешает эту особенность.

Вычислим теперь асимптотику собственных чисел волчка. Для этого нужно посчитать интеграл $\int_\Sigma \omega$ в (3.9).

При $J_1 \leqslant E \leqslant J_2$ обозначим через $2\pi - S(E)$ площадь «шапочки» на сфере $\{\sum J_j s_j^2 \leqslant E\}$. При $J_2 \leqslant E \leqslant J_3$ обозначим через $2\pi - S_+(E)$ площадь «шапочки» $\{\sum J_j s_j^2 \geqslant E\}$. Тогда

$$S_+(E) = L(\pi/2, E), \quad S_-(E) = 2\pi - L(\arcsin\sqrt{a(E)}, E),$$

где

$$a(E) = \frac{E - J_1}{J_2 - J_1}$$

и $L(\xi, E)$ — эллиптический интеграл третьего рода:

$$L(\xi, E)=4\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{a(E)-\sin^2\varphi}{a(J_3)-\sin^2\varphi}\right)^{1/2}d\varphi.$$

Правило квантования (3.9) приводится к следующему соотношению:

$$\frac{1}{2\pi}S_\pm(E)=\frac{|l-n|}{l+1/2}\Rightarrow E_{l,n}=S_\pm^{-1}\left(\frac{|l-n|}{l+1/2}\right), \tag{3.13}$$

где знаки $\pm$ отвечают двум возможным интервалам энергий.

Гладкость кривой Λ гарантируется неравенствами

$$n\geqslant 0,\quad |l-n|>\left(l+\frac{1}{2}\right)\sigma_\pm,$$

где

$$\sigma_+=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{J_2-J_1}{J_3-J_1}},\quad \sigma_-=1-\sigma_+.$$

Таким образом, (3.13) дает две серии собственных значений волчка в l-м неприводимом представлении $SO(3)$ или разностной схемы (3.12) с точностью $O(l^{-2})$. Эти же серии были найдены в [14] прямым исследованием разностной схемы (3.12).

3.5. Квантование пуассоновых преобразований. Поднятие асимптотик из приведенного пространства. Здесь мы укажем несколько фундаментальных конструкций, сопоставляющих геометрическим объектам в симплектических многообразиях их квантовые аналоги.

Начнем с обобщения результатов п. 1.4 гл. III.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Z}$ — квантованные симплектические многообразия, M — квантованное лагранжево подмногообразие в $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{X}^{(-)}$, наделенное мерой $\varkappa$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(M)$. Тогда сечение $\mathcal{B}=K_{M,\varkappa}(\varphi)$ пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{X}^{(-)})$ порождает гомоморфизм:*

$$B\colon\ \mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})\to\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{Z}),$$

$$(B\psi)_\beta\overset{\text{def}}{=}(2\pi\hbar)^{-\frac{\dim\mathfrak{X}}{4}}\sum_\alpha\int\mathcal{B}_{\beta\times\alpha}(x, x')\,\psi_\alpha(x')\,dx'.$$

При этом выполнены формулы, аналогичные (1.35), (1.36) *гл.* III:

$$\rho_{B(\psi)}(m)=\int\limits_{\mathfrak{X}}\rho_{\mathcal{B}}(m, m')\,\rho_\psi(m')\,\mathrm{can}(m')+O(\hbar^\infty),$$

$$\mathrm{osc}^{(\infty)}(B(\psi))\subset\mathrm{osc}^{(\infty)}(\mathcal{B})\,(\mathrm{osc}^{(\infty)}(\psi)).$$

В этих формулах $\psi=\{\psi_\alpha\}\in\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$, can — мера Лиувилля на $\mathfrak{X}$, $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_{\beta\times\alpha}\}$ — запись сечения $\mathcal{B}\in\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{X}^{(-)})$ в локальных картах $\mathcal{V}_\beta\times\mathcal{U}_\alpha$.

Замечание 3.2. Если сузить гомоморфизм B на пучок $\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$, составленный из сечений $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ с компактными носителями осцилляций $\mathrm{osc}^{(\infty)}(\ldots)$, то можно отказаться от компактности носителя функции $\varphi\in C^\infty(M)$.

Применим теорему 3.3 для квантования группы пуассоновых преобразований $\mathfrak{X}$ (т. е. группы диффеоморфизмов, сохраняющих скобку Пуассона или симплектическую структуру).

Предположим, что $\mathfrak{X}$ односвязно и квантовано. Пусть $\gamma\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ — пуассоново преобразование. Построим по лагранжеву графику $\mathrm{Gr}(\gamma)\subset\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)}$ и по канонической мере can на нем сечение пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)})$:

$$T(\gamma)=(2\pi\hbar)^{-\dim\mathfrak{X}/4}\,K_{\mathrm{Gr}(\gamma),\,\mathrm{can}}(1).$$

Мы здесь отождествляем, пользуясь теоремой 3.3, сечения из $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)})$ с операторами, действующими в пучке $\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$.

Итак, имеем гомоморфизм $T(\gamma)\colon \mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})\to\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$.

Теорема 3.4. *Для пуассонова преобразования γ квантованного односвязного симплектического многообразия $\mathfrak{X}$ выполнены утверждения теоремы* 2.1 (a), (b), (d) *и леммы* 2.1. *Кроме того, для любых двух пуассоновых преобразований γ_1, γ_2 верна формула композиции*

$$T(\gamma_2)\cdot T(\gamma_1)=\lambda\cdot T(\gamma_2\gamma_1),$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|=1$. Числа λ задают коцикл группы пуассоновых преобразований.

Доказательства и теоремы 3.3, и теоремы 3.4, по существу, повторяет доказательства соответствующих утверждений в $\mathbf{R}^{2n}$. Предъявить формулу для коцикла λ по типу формул теоремы 2.2 мы теперь не можем: это объяснено в замечании 2.2.

Пусть теперь H — некоторая вещественная гладкая функция на $\mathfrak{X}$ и γ_H^t — ее гамильтонов поток, определенный при $t\in[0,\ T]$. Рассмотрим задачу Коши

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi,\quad \psi|_{t=0}=\psi_0 \tag{3.14}$$

в пучке $\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$.

Построим лагранжево подмногообразие

$$\mathrm{Gr}_H^{\#}=\{(\gamma_H^t(m),\ m;\ t,\ p_t)\,|\,p_t+H(m)=0\}$$

в симплектическом многообразии $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}^{(-)}\times(\mathbf{R}_t\oplus\mathbf{R}_{p_t})$ с формой $\omega_{\mathfrak{X}}\ominus\omega_{\mathfrak{X}}+dp_t\wedge dt$. Выберем на нем меру $d\sigma=\mathrm{can}(dm)\cdot dt$.

Рассмотрим сечение

$$T^{\#}=(2\pi\hbar)^{-\frac{\dim\mathfrak{X}}{4}}K_{\mathrm{Gr}_H^{\#},\,\sigma}(1).$$

Мы можем рассмотреть его значения на плоскостях $t=\mathrm{const}$. Обозначим их через $T(t)$. Тогда $T(t)$ — автоморфизм пучка $\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$.

Теорема 3.5. *Решение задачи Коши* (3.14) *в пучке* $\mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$ *имеет вид* $\psi=T(t)\psi_0\,(\mathrm{mod}\,O(\hbar))$.

Увеличение точности до $O(\hbar^\infty)$ производится аналогично п. 2.5 гл. III.

Помимо графиков $\mathrm{Gr}(\gamma)$, $\mathrm{Gr}_H^{\#}$, которые являются сплетающими многообразиями между двумя экземплярами $\mathfrak{X}$, интерес представляют и другие сплетающие многообразия, перечисленные в п. 2.2 гл. I. Все они имеют свои квантовые аналоги в виде гомоморфизмов соответствующих пучков волновых пакетов. Мы опишем здесь подробно сплетающий гомоморфизм, возникающий при квантовании классической процедуры редукции Ли — Картана из п. 2.3 гл. I. Изложение следует работам [62, 65].

Пусть $\mathfrak{X}$ — односвязное симплектическое многообразие, $\mathfrak{X}$ — его подобласть, расслоенная изотропными торами $\mathbf{T}^r$. Предположим, что это расслоение $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X}' \to \mathcal{N}$ является бирасслоением (п. 2.2 гл. I).

Обозначим через $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X}'$ слои полярного к $\mathcal{A}$ расслоения, а через $\Omega = \mathcal{A}(\mathcal{Y})$ симплектические листы в пуассоновом многообразии $\mathcal{N}$.

Прямое произведение $\mathfrak{X}' \times \Omega$ снабдим разностью симплектических форм $\omega_{\mathfrak{X}} \ominus \omega_{\Omega}$. Оно расслоено над $\mathcal{N} \times \Omega$ с помощью отображения $\mathcal{A} \times \mathrm{id}$. Рассмотрим в $\mathcal{N} \times \Omega$ подмногообразие $\mathrm{diag}\,(\Omega \times \Omega)$ и его прообраз

$$M(\Omega) = (\mathcal{A} \times \mathrm{id})^{-1} (\mathrm{diag}\,\Omega \times \Omega) = \{(m, \xi) \in \mathfrak{X}' \times \Omega \mid \mathcal{A}(m) = \xi \in \Omega\}. \tag{3.15}$$

Поскольку диагональ лагранжева в $\Omega \times \Omega^{(-)}$ и слои $\mathcal{A}$ изотропны, то очевидно, что $M(\Omega)$ лагранжево в $\mathfrak{X}' \times \Omega^{(-)}$.

Пусть $\xi \in \Omega$ и $\mathbf{T}^r = \mathcal{A}^{-1}(\xi)$ — тор, висящий над точкой ξ. Выберем любую лагранжеву площадку $\Lambda \subset \Omega$, $\xi \in \Lambda$.

Ее прообраз $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ является лагранжевым подмногообразием в $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$.

Лемма 3.6. *Пусть* Σ — *пленка в* $\mathfrak{X}$, *натянутая на* 1-*цикл* $\partial\Sigma \subset \mathbf{T}^r$. *Индекс пленки* $\nu_{\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)}(\Sigma) \overset{\mathrm{def}}{=} \nu(\Sigma)$ *не зависит ни от выбора площадки* Λ, *ни от выбора точки* $\xi \in \Omega$. *Если* 1-*цикл* $\partial\Sigma$ *стягиваем в* $\mathfrak{X}'$, *то* $\mathcal{A}(\Sigma)$ — *это* 2-*цикл в* Ω *и* $\nu(\Sigma) = \nu_\Omega(\mathcal{A}(\Sigma))$, *где* ν_Ω — *двумерный целочисленный класс когомологий на* Ω (*см. лемму* 2.3).

Доказательство. Пусть Λ_1 — еще одна лагранжева площадка и γ — пуассоново преобразование в окрестности $\mathcal{U}$ точки ξ, переводящее Λ в Λ_1. Окрестность тора $\mathbf{T}^r$ отождествим с $\mathcal{U} \times \mathcal{V}^0$, где $\mathcal{V}^0$ — окрестность нулевого сечения в $T^*(\mathbf{T}^r)$. Преобразование $\gamma \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}^0}$ переводит $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ в $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_1)$. В силу леммы 2.2 индекс пути $\Gamma \subset \mathbf{T}^r$ на лагранжевом подмногообразии $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda)$ отличается от индекса этого пути на $\mathcal{A}^{-1}(\Lambda_1)$ добавочным слагаемым, равным индексу пути на графике $\mathrm{Gr}\,(\gamma \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}^0}) = \mathrm{Gr}\,(\gamma) \times \mathrm{diag}\,(\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0)$. Точка по этому последнему пути перемещается лишь вдоль диагонали $\mathrm{diag}\,(\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0)$, а на ней индекс тождественно нулевой. Таким образом, упомянутое добавочное слагаемое равно нулю.

Аналогично доказывается независимость от выбора точки $\xi \in \Omega$. Второе утверждение леммы — следствие обычных свойств процедуры трансгрессии [117]. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть область* $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ *допускает бирасслоение*

$\mathcal{A}$: $\mathfrak{X}' \to \mathcal{N}$ с изотропным слоем $\mathbf{T}^r$, причем $\mathfrak{X}$ и симплектические листы $\Omega \subset \mathcal{N}$ односвязны. Тогда

(a) *если прообраз $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ либо односвязен, либо двусвязен и для любой ориентированной пленки $\Sigma \subset \mathfrak{X}$ с границей $\partial\Sigma \subset \mathbf{T}^r$ выполнено условие*

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma} \omega_{\mathfrak{X}} - \frac{1}{4}\nu(\Sigma) \in \mathbf{Z}, \tag{3.16}$$

то лагранжево подмногообразие $M(\Omega)$ (3.15) квантовано в $\mathfrak{X}\times\Omega^{(-)}$; в частности, само Ω квантовано;

(b) *если $\mathfrak{X}'$ односвязно, то квантованность $\mathfrak{X}$ и Ω эквивалентны выполнению условия (3.16).*

Доказательство. (a) Имеем расслоение $M(\Omega)$ со слоем $\mathbf{T}^r$ и базой $\operatorname{diag}(\Omega\times\Omega)$. Отсюда точная последовательность: $H_1(\mathbf{T}^r) \to \to \pi_1(M(\Omega)) \to 0$. Поэтому все нестягиваемые 1-циклы на $M(\Omega)$ находятся среди циклов на $\mathbf{T}^r$. Пленки, у которых границы совпадают с этими циклами, квантованы в силу (3.16). Что же касается замкнутых пленок, т. е. 2-циклов в Ω, то в силу точной последовательности

$$0 \to \pi_2(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)) \to H_2(\Omega) \to H_1(\mathbf{T}^r)$$

они либо получаются трансгрессией из 1-циклов на $\mathbf{T}^r$, либо, если $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ односвязно, проекцией 2-циклов в $\mathfrak{X}$. Эти последние квантованы. Остается разобрать случай трансгрессии.

Пусть Σ_0 — это 2-цикл в Ω, полученный из 1-цикла $\Gamma \subset \mathbf{T}^r$. Тогда $\Gamma = \partial\Sigma'$, где Σ' — пленка в $\mathfrak{X}'$, $\mathcal{A}(\Sigma') = \Sigma_0$, и мы имеем

$$\int_{\Sigma_0} \omega_\Omega = \int_{\Sigma'} \mathcal{A}^*\omega_\Omega = \int_{\Sigma'} \omega_{\mathfrak{X}}, \quad \nu_\Omega(\Sigma_0) = \nu(\Sigma').$$

Поэтому условие квантования

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma_0} \omega_\Omega - \frac{1}{4}\nu_\Omega(\Sigma_0) \in \mathbf{Z}$$

следует из (3.16).

(b) Пусть $\mathfrak{X}'$ односвязно. Из точной последовательности

$$0 = \pi_1(\mathfrak{X}') \to \pi_1(\mathcal{N}) \to \pi_0(\mathbf{T}^r) = 0$$

следует, что $\mathcal{N}$ односвязно. Тогда из точных последовательностей

$$\begin{gathered} 0 \to \pi_2(\mathfrak{X}') \to \pi_2(\mathcal{N}) \to \pi_1(\mathbf{T}^r) \to 0, \\ \pi_2(\mathcal{N}) \to \pi_2(\mathcal{N}/\Omega) \to 0, \\ \pi_2(\mathfrak{X}') \to \pi_2(\mathcal{N}/\Omega) \to \pi_1(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)) \to 0 \end{gathered}$$

(здесь $\mathcal{N}/\Omega$ — база расслоения $\mathcal{N}$ листами Ω) следует, что $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ односвязно. Поэтому из последовательности

$$0 \to \pi_2(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)) \to \pi_2(\Omega) \to \pi_1(\mathbf{T}^r) \to 0$$

(или то же самое для групп гомологий) получаем

$$H_2(\Omega)/H_2(\mathcal{A}^{-1}(\Omega)) = H_1(\mathbf{T}^r).$$

Если $\mathfrak{X}$ квантовано, то на 2-циклах из $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ правило квантования выполнено. Следовательно, для проверки квантованности Ω необходимо и достаточно проверить квантованность пленок, натянутых на 1-циклы $\mathbf{T}^r$, т. е. условие (3.16). Лемма доказана.

Пример 3.1. *Квантованность орбит коприсоединенного представления.* Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и односвязную орбиту (симплектический лист) $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ максимальной размерности. Пусть $\xi \in \Omega$. Тогда стабилизатор G_ξ — коммутативная подгруппа в группе Ли. Его связная максимальная компактная подгруппа G_ξ^0 является тором, ее алгебра Ли $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}$ абелева. Выберем базис $X_1, \ldots, X_r$ в решетке прообразов единицы при отображении $\mathfrak{g}^0 \ni X \to \to \exp(2\pi X) \in G_\xi$. Соответствующие замкнутые траектории $\Gamma_i = \{\exp(-tX_i)\}$ задают базис в $H_1(G_\xi^0)$. Изоморфизм $X_i \to \Gamma_i$ между $\mathfrak{g}^0$ и $H_1(G_\xi^0)$ порождает изоморфизм $\mathfrak{g}^{0*} \approx H^1(G_\xi^0, \mathbf{R}) \approx H^2(\Omega, \mathbf{R})$. При этом двумерному классу $\frac{1}{2}\nu_\Omega \in H^2(\Omega, \mathbf{Z})$ соответствует некоторый одномерный класс в $H^1(G_\xi^0, \mathbf{Z})$, а ему, в свою очередь, соответствует некоторая линейная форма ρ_Ω на $\mathfrak{g}^0$, имеющая целочисленные компоненты в базисе $\{X_i\}$. Оказывается, если группа G компактна, то [158] форма ρ_Ω — это сумма положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, а класс $\frac{1}{2}\nu_\Omega = c_1$ — первый класс Чженя (кэлерова) многообразия Ω. Эти классы четные и потому условие квантования орбиты Ω сводится к правилу целочисленности (1.14).

Введем на многообразии $M(\Omega)$ (3.15) меру $d\sigma = \operatorname{can}(d\xi)\,d\tau$, где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ — координаты «угол» (см. п. 2.3 гл. I). Обозначим через U_Ω: $\mathbf{\Gamma}_0(\Omega) \to \mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$ оператор, соответствующий в силу теоремы 3.3 сечению пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X} \times \Omega^{(-)})$:

$$U_\Omega \sim (2\pi\hbar)^{-\frac{\dim\Omega}{4}} K_{M(\Omega),\,\sigma}(1). \tag{3.17}$$

Теорема 3.6. *Пусть в односвязном квантованном симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$ некоторая подобласть $\mathfrak{X}'$ допускает бирасслоение $\mathcal{A}$: $\mathfrak{X}' \to \mathcal{N}$ с компактными изотропными слоями. Пусть листы $\Omega \subset \mathcal{N}$ односвязны, и пусть $\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ либо односвязно, либо двусвязно. Если лист Ω выбран так, что над ним выполнено условие квантования* (3.16), *то оператор U_Ω, заданный формулой* (3.17), *является сплетающим между пучками волновых пакетов на Ω и на $\mathfrak{X}$, т. е.*

$$\widehat{f(\mathcal{A})} \cdot U_\Omega = U_\Omega \cdot \hat{f}|_\Omega + O(\hbar^2),$$
$$T(\gamma^t_{\mathcal{A}^* f})\, U_\Omega = U_\Omega \cdot T(\gamma^t_f) + O(\hbar)$$

для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$.

Доказательство прямо следует из теоремы 3.2 и того факта, что $f(\mathcal{A}(m)) - f(\xi) \equiv 0$ при $(m, \xi) \in M(\Omega)$.

Приведем также важную формулу для квантовых плоскостей:

$$\int_\Omega \rho_\psi(\xi) \operatorname{can}(d\xi) = \int_{\mathfrak{X}} \rho_{U_\Omega(\psi)}(m) \operatorname{can}(dm) + O(\hbar^2).$$

Следствие 3.3. *Пусть χ — сечение пучка $\mathbf{\Gamma}(\Omega)$ над квантованным приведенным фазовым пространством Ω, причем*

$$\hat{f}\chi = \lambda\chi + O(\hbar^2), \quad \int\limits_{\Omega} \rho_\chi = 1. \tag{3.18}$$

Тогда, если над Ω выполнены условия квантования (3.16), *то сечение $\psi = U_\Omega \chi$ пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathfrak{X})$ удовлетворяет уравнению*

$$\widehat{f(\mathcal{A})}\,\psi = \lambda\psi + O(\hbar^2), \tag{3.18a}$$

причем

$$\int\limits_{\mathfrak{X}} \rho_\psi = 1 + O(\hbar^2).$$

Этот результат позволяет сводить, напрнмер, задачу о вычислении спектральных серий операторов с симметриями к аналогичной задаче в пространстве меньшей размерности.

Пример 3.2. *Гамильтониан с коммутативной алгеброй симметрий.* Пусть функция H на $\mathfrak{X}$ имеет r коммутирующих симметрий, т. е. функций $k_1, \ldots, k_r$, которые находятся с H и друг с другом в инволюции. Совместные поверхности уровня $\mathcal{Y} = \{k = \mathrm{const}\}$ коизотропны. Предположим, что эти поверхности компактны, расслаивают некоторую подобласть $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ и их собственное изотропное слоение (см. п. 2.1 гл. I) является расслоением $\mathcal{A}\colon \mathcal{Y} \to \Omega$ (или $\mathcal{A}\colon \mathfrak{X}' \to \mathcal{N}$).

Очевидно, что $H = f(\mathcal{A})$ для некоторой функции f на $\mathcal{N}$. С помощью следствия 3.3 задача на собственные значения для оператора $\hat{H}$ в $\mathfrak{X}$ сводится в квазиклассическом приближении к задаче на собственные значения для оператора $\hat{f}$ в Ω. Размерность фазового пространства, таким образом, понижается на $2r$ единиц. Облегчается и поиск инвариантных многообразий.

Следствие 3.4. *Пусть Λ — квантованное подмногообразие в Ω, $f|_\Lambda = \lambda$ и Λ снабжено* $\mathrm{ad}(f)$ — *инвариантной мерой $\varkappa$. Тогда сечение $\psi = U_\Omega K_{\Lambda,\varkappa}(1) \in \mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$ является решением задачи на собственные значения:*

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi + O(\hbar^2), \quad \int\limits_{\mathfrak{X}} \rho_\psi = 1 + O(\hbar^2). \tag{3.19}$$

Следствие 3.5. *Пусть $\xi^0 \in \Omega$ — устойчивая в линейном приближении невырожденная точка покоя векторного поля $-i\,\mathrm{ad}(f)|_\Omega$ и $\delta_1, \ldots, \delta_k$ — собственные значения вариации этого поля в точке ξ^0 такие, что на соответствующих собственных векторах эрмитова форма $-i\omega_\Omega(\ldots, \overline{\ldots})$ положительна* $\left(\text{здесь } k = \frac{1}{2}\dim\Omega = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{X} - r\right)$. *Тогда для любых целых $m_1, \ldots, m_k \geqslant 0$ определено сечение $\psi_m \in \mathbf{\Gamma}_0(\mathfrak{X})$, удовлетворяющее задаче* (3.19) *с собственным* числом

$$\lambda=f(\xi^0)+\hbar\sum_{j=1}^{k}\delta_j\left(m_j+\frac{1}{2}\right).$$

Первое из этих следствий вытекает из теоремы 3.2 и следствия 3.3. Второе основано на том, что задача (3.18) при наличии у символа f невырожденной точки покоя ξ^0 легко решается с помощью так называемого осцилляторного приближения (f разлагается в ряд Тейлора вблизи ξ^0, т. е. аппроксимируется квадратичной формой, у которой спектр и собственные функции известны явно [99]). Прямое исследование уравнений вида (3.18а) методами [97, 99], т. е. без использования сплетающего оператора U_Ω, проводилось в [8, 23, 24].

Пример 3.3. *Кокасательное расслоение над сферой.* Пусть $\mathfrak{X}=T^*\mathbf{S}^2$ и $k=|p|^2$ — символ оператора Лапласа на $\mathbf{S}^2$ (здесь $p\in\in T_q^*\mathbf{S}^2$, $|p|^2$ понимается в смысле стандартной метрики).

Поверхности уровня $\mathcal{Y}=\{k=\mathrm{const}\}$ диффеоморфны $\mathbf{R}P^3$ и расслаивают область

$$\mathfrak{X}'=\{p\neq 0\}=\mathfrak{X}\diagdown\{\text{нулевое сечение}\}.$$

Каждое $\mathcal{Y}$ расслоено гамильтоновыми траекториями функции k (т. е. геодезическими). Таким образом, имеем расслоение $\mathcal{A}\colon\mathcal{Y}\to\Omega$ или $\mathbf{R}P^3\to\mathbf{S}^2$ со слоем $T=\mathbf{S}^1$.

В данном случае $\mathfrak{X}'$ неодносвязно, $\mathcal{Y}=\mathcal{A}^{-1}(\Omega)$ также неодносвязно, но двусвязно: $\pi_2(\mathbf{R}P^3)=0$. Поэтому выполнены условия теоремы 3.6.

Кроме того, в данном случае $\omega_{\mathfrak{X}}=d\theta$, $\theta=pdq$ и условие (3.16) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint_\Gamma\theta-\frac{1}{4}\nu(\Gamma)=m\in\mathbf{Z},\tag{3.20}$$

где Γ — замкнутая траектория поля $\mathrm{ad}(k)$, лежащая на уровне энергии $\{k=\mathrm{const}\}$. Прямое вычисление дает $\oint_\Gamma\theta=2\pi\sqrt{k}$ и $\nu(\Gamma)=2$. Поэтому из (3.20) находим $\lambda=\hbar^2(m+1/2)^2$.

Отметим, что не сам цикл Γ, а лишь его удвоение 2Γ трансгрессирует на Ω; имеем

$$\int_{S^2}\omega_\Omega=2\oint_\Gamma\theta=4\pi\sqrt{k}$$

(множитель 2 — инвариант Хопфа (см. [50])). Таким образом, условие (3.16) и условие квантования орбиты $\Omega\approx\mathbf{S}^2$ в данном случае существенно различаются.

Рассмотрим теперь любую функцию H на $T^*\mathbf{S}^2$, коммутирующую с k:

$$\{H,k\}=0.\tag{3.21}$$

Тогда $H=f(\mathcal{A})$, где f — функция на $\mathcal{N}$.

Пусть $k_m = \hbar^2 (m+1/2)^2$ и Ω_m — база расслоения поверхности $\{k=k_m\} \subset T^*\mathbf{S}^2$ геодезическими. Пусть Σ — одна из половинок сферы $\Omega_m \approx \mathbf{S}^2$ с границей $\partial\Sigma = \{f|_{\Omega_m} = \lambda\}$. Эта кривая лагранжева и имеет естественную инвариантную меру (ср. § 2 гл. II). Поэтому применимо следствие 3.4. Вычислим числа $\lambda = \lambda_{m,n}$ из условия квантования

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{\Sigma} \omega_\Omega - \frac{1}{4} \nu(\Sigma) = n \in \mathbf{Z}, \quad \nu(\Sigma) = 2.$$

Тогда существуют функции $\psi_{m,n} \in C^\infty(\mathbf{S}^2)$ такие, что $\|\psi_{m,n}\|_{L^2} = 1$ и

$$\hat{H}\psi_{m,n} = \lambda_{m,n}\psi_{m,n} + O(\hbar^2)$$

с оценкой остатка в $L^2(\mathbf{S}^2)$ равномерно по m, n, если $m \sim n \sim \hbar^{-1}$.

Следствие 3.6. *Если H — гладкая вещественная функция на $T^*\mathbf{S}^2$ и оператор $\hat{H} = H\left(\overset{\omega}{q}, -i\hbar\overset{\omega}{\nabla}_q\right)$ с точностью $O(\hbar)$ коммутирует с оператором Лапласа на сфере, то числа $\lambda_{m,n}$ отстоят от спектра $\hat{H}$ на расстояние $O(\hbar^2)$.*

Можно легко применить и результат следствия 3.5 к рассматриваемому примеру. Мы оставляем это в качестве полезного упражнения.

Пример 3.4. *Гамильтонианы с некоммутативной алгеброй симметрий.* Пусть функция H на симплектическом многообразии $\mathfrak{X}$ имеет k симметрий, т. е. функции F_j $(j=1, \ldots, k)$ таких, что $\{H, F_j\} = 0$. Пусть набор этих функций замкнут относительно скобок Пуассона:

$$\{F_i, F_j\} = \Phi_{ji}(F_1, \ldots, F_k). \tag{3.22}$$

Можно рассматривать вектор-функцию F как расслоение некоторой подобласти $F\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{R}$. В силу (3.22) это расслоение пуассоново; предположим, что оно является бирасслоением. Обозначим через $\mathcal{B}\colon \mathfrak{X}' \to \mathcal{M}$ полярное к F расслоение.

Если $\mathcal{E}$ — симплектический лист в $\mathfrak{R}$ относительно скобки (3.22), то $\Omega = \mathcal{B}(F^{-1}(\mathcal{E}))$ — симплектический лист в $\mathcal{M}$ (см. п. 2.2 гл. I). Назовем Ω *полярным* к $\mathcal{E}$. Заметим, что

$$\dim \mathcal{E} = \operatorname{rank} \Phi,$$
$$\dim \Omega = \dim \mathfrak{X} - k - \operatorname{corank} \Phi.$$

Предположим теперь, что $\operatorname{rank}\Phi = \mathrm{const}$ постоянен, т. е. все листы максимальной размерности. Пусть листы расслаивают $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathcal{N}$ сумму Уитни $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{R}$ относительно этих расслоений: $\mathcal{N} = \{(m, r) |$ точки $m \in \mathcal{M}$ и $r \in \mathfrak{R}$ лежат на полярных листах$\}$. Тогда имеем изотропное расслоение

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times F\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{N},$$

к которому можно применить теорему 3.6.

Рассмотрим проекцию $\mathcal{M} \times \mathfrak{R} \supset \mathcal{N} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$. Поскольку функция H коммутирует со всеми F_j, то она постоянна на слоях $\mathcal{B}$; следовательно, существует функция $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ такая, что $H = f(\mathcal{B})$. Поэтому

$$H = \mathcal{A}^*(\pi^* f) \quad \text{и} \quad \pi^* f|_{\Omega\times\mathscr{E}} = f|_\Omega \otimes 1.$$

Из теоремы 3.6 получаем

$$\hat{H}\cdot U_{\Omega\times\mathscr{E}} = \widehat{(\pi^* f)(\mathcal{A})}\cdot U_{\Omega\times\mathscr{E}} = U_{\Omega\times\mathscr{E}}\cdot \pi^* f|_{\Omega\times\mathscr{E}} = U_{\Omega\times\mathscr{E}}(\widehat{f|_\Omega}\otimes I), \tag{3.23}$$

причем лист $\mathscr{E}$ выбран так, что в изотропном слое над $\Omega\times\mathscr{E}$ выполнено условие квантования (3.16). *На этот случай переносятся все утверждения следствий* 3.3—3.5.

Отметим, что число $r = \operatorname{corank}\Phi$ — это размерность центра пуассоновой алгебры (3.22), т. е. число взаимно коммутирующих симметрий функции H. В то же время размерность фазового пространства Ω, на котором мы в силу (3.23) должны теперь решать задачу, равна

$$\dim\Omega = (\dim\mathfrak{X} - 2r) - \operatorname{rank}\Phi.$$

Таким образом, по сравнению с ситуацией примера 3.2 она уменьшилась на $\operatorname{rank}\Phi$.

Собственные числа оператора $\hat{H}$ (в квазиклассическом приближении), как следует из (3.23), имеют кратность не менее кратности $\mathrm{N}_\mathscr{E}$ спектра единичного оператора I в пучке $\mathbf{\Gamma}(\mathscr{E})$, т. е. не меньше, чем

$$\mathrm{N}_\mathscr{E} \sim (2\pi\hbar)^{-\operatorname{rank}\Phi/2}\operatorname{can}(\mathscr{E}), \quad \hbar\to 0,$$

где $\operatorname{can}(\mathscr{E})$ — мера Лиувилля листа $\mathscr{E}$. Подсчет кратности $\mathrm{N}_\mathscr{E}$ в случае, когда симметрии образуют алгебру Ли, т. е. скобка (3.22) линейна, можно провести точно [159, 188].

Итак, если символ оператора $\hat{H}$ обладает некоммутативной пуассоновой алгеброй симметрий, то в первом приближении по $\hbar\to 0$ его спектр сильно вырожден. Решение задачи снятия вырождения дано в работах [62, 65].

§ 4. Нелинейные коммутационные соотношения в квазиклассическом приближении

Центральные темы параграфа:

— уравнения (4.10) для квантовых поправок к скобкам Пуассона;

— формулы для $*$-произведения неосциллирующих символов (теорема 4.1);

— регулярное представление нелинейных коммутационных соотношений с точностью $O(\hbar^\infty)$ на осциллирующих символах (теоремы 4.2 и 4.3);

— свертка, соответствующая общим вырожденным скобкам Пуассона (теорема 4.4).

Выполняя программу, намеченную в п. 1.3, мы приступаем к исследованию нелинейных коммутационных соотношений (1.15а)

$$[A^j, A^k] = -i\hbar\Psi_\hbar^{jk}\left(\overset{\omega}{A}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{A}{}^n\right),$$

в которых тензор $\Psi_\hbar^{jk}$ в классическом пределе $\hbar = 0$ совпадает с тензором некоторой скобки Пуассона на $\mathbf{R}^n$. Нас будет интересовать также случай, когда предельная скобка задана не на $\mathbf{R}^n$, а на некотором многообразии $\mathcal{N}$. Квантование такого пуассонова многообразия в квазиклассическом приближении требует привлечения геометрических результатов гл. I, II. И наоборот, основные идеи, использованные в этих главах, получат, как мы увидим, естественную мотивировку с точки зрения процедуры квантования.

Прежде чем начинать читать данный параграф, полезно вернуться к § 1 и просмотреть п. 2.1 приложения 2.

4.1. Квадратичные соотношения с малым параметром. Начнем с простейшего примера нелинейных коммутационных соотношений:

$$[A^j, A^k] = -i\hbar c_{ab}^{jk}(A^aA^b + A^bA^a)/2. \tag{4.1}$$

Здесь c_{ab}^{jk} — некоторые константы, симметричные по нижним индексам, антисимметричные по верхним и з а в и с я щ и е от параметра $\hbar$. По повторяющимся индексам всюду — суммирование.

Для соотношений (4.1) неизвестна структура обобщенных тождеств Якоби, которым должны быть подчинены константы c_{ab}^{jk} (см. п. 2.1 приложения 2). Однако если параметр $\hbar$ стремится к нулю, то для коэффициентов разложения c_{ab}^{jk} по степеням $\hbar$ может быть получена цепочка тождеств, выполнение которых обеспечивает выполнение обобщенных условий Якоби с любой точностью $O(\hbar^N)$.

Л е м м а 4.1. *В алгебре с соотношениями* (4.1) *при достаточно малом* $\hbar$ *справедливы тождества*

$$[[A^j, A^k], A^l] = \hbar^2\mathcal{D}_{ars}^{jkl}\overset{\omega}{A}{}^a\overset{\omega}{A}{}^r\overset{\omega}{A}{}^s, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{D} = -2\mathcal{B}\left(I + \frac{\hbar^3}{3}\mathcal{B}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{B} = ((b_{ars}^{jkl})) - \textit{матрица}\ n^3 \times n^3, \quad b_{ars}^{jkl} \overset{\text{def}}{=} c_{ai}^{jk}c_{rs}^{il}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $A^{jkl} \equiv [[A^j, A^k], A^l]$. В силу формулы (1.21) приложения 1 имеем

$$A^{jkl} = i\hbar c_{ab}^{kj}[\overset{\omega}{A}{}^a\overset{\omega}{A}{}^b, A^l] = 2i\hbar c_{ab}^{kj}\overset{\omega}{A}{}^a[A^b, \overset{\omega}{A}{}^l] =$$
$$= (i\hbar)^2 b_{ars}^{jkl}\overset{\omega}{A}{}^a(\overline{\overset{\omega}{A}{}^r A^s} + \overline{\overset{\omega}{A}{}^s A^r}). \tag{4.3}$$

Воспользуемся следующим абстрактным тождеством:

$$\frac{1}{2}\overset{\omega}{A}{}^a(\overline{\overset{\omega}{A^rA^s}} + \overline{\overset{\omega}{A^sA^r}}) = \overset{\omega}{A}{}^a\overset{\omega}{A}{}^r\overset{\omega}{A}{}^s + \frac{1}{12}([[A^a, A^r], A^s] + [[A^a, A^s], A^r]).$$

Таким образом, из (4.3) получаем

$$A^{jkl} = -2\hbar^2 \sum_{a,\,r,\,s} b^{jkl}_{ars} \overset{\omega}{A}{}^a \overset{\omega}{A}{}^r \overset{\omega}{A}{}^s - \frac{\hbar^2}{3} \sum_{a,\,r,\,s} b^{jkl}_{ars} A^{ars}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим два вектора: $\alpha = (A^{ars})$ и $\beta = \left(\overset{\omega}{A}{}^a \overset{\omega}{A}{}^r \overset{\omega}{A}{}^s\right)$ длины n^3. С помощью матрицы $\mathscr{B}$ тождество (4.4) можно записать так:

$$\left(I + \frac{\hbar^2}{3}\mathscr{B}\right)\alpha = -2\hbar^2 \mathscr{B}\beta.$$

При достаточно малых $\hbar$ матрица $I + \frac{\hbar^2}{3}\mathscr{B}$ обратима. Следовательно, $\alpha = \hbar^2 \mathscr{D}\beta$, где матрица $\mathscr{D}$ выписана в формулировке. Лемма доказана.

Из тождества Якоби для двойных коммутаторов, учитывая (4.2) и предполагая, что мономы $A^a A^r A^s$ линейно назависимы, получаем тождества [48]

$$\underset{(j,\,k,\,l)}{\mathfrak{S}} \ \underset{(a,\,r,\,s)}{\operatorname{sym}} (\mathscr{D}^{jkl}_{ars}) = 0. \tag{4.5}$$

Здесь sym обозначает сумму по всем перестановкам, деленную на число перестановок, а $\mathfrak{S}$ — сумму по циклическим перестановкам.

Заметим, что матрица $\mathscr{D}$ определена лишь при достаточно малом $\hbar$ (например, если $\hbar^2 < 3\|\mathscr{B}\|^{-1}$). Можно предположить, что при таком ограничении тождества (4.5) являются искомым обобщенным условием Якоби для (4.1). Во всяком случае, из (4.5) следует цепочка условий на коэффициенты разложения структурных констант c^{jk}_{ab} по степеням $\hbar^2$

$$c^{jk}_{ab}(\hbar) = \psi^{jk}_{ab} + \hbar^2 \varphi^{jk}_{ab} + \hbar^4 \ldots \tag{4.6}$$

В [48] доказано, что эта цепочка эквивалентна выполнению обобщенного условия Якоби с точностью $O(\hbar^\infty)$, и показано, как она связана с квантовым уравнением Янга—Бакстера. Выпишем явно первые два уравнения цепочки в нулевом порядке по $\hbar^2$:

$$\underset{(j,\,k,\,l)}{\mathfrak{S}} \ \underset{(a,\,r,\,s)}{\operatorname{sym}} \psi^{jk}_{ai}\psi^{il}_{rs} = 0$$

и в первом порядке по $\hbar^2$:

$$\underset{(j,\,k,\,l)}{\mathfrak{S}} \ \underset{(a,\,r,\,s)}{\operatorname{sym}} \left(\frac{1}{3}\psi^{jk}_{bm}\psi^{ml}_{qp}\psi^{bq}_{ai}\psi^{ip}_{rs} - \psi^{jk}_{ai}\varphi^{il}_{rs} - \varphi^{jk}_{ai}\psi^{il}_{rs}\right) = 0.$$

Введя тензоры

$$\Psi^{jk}(\xi) = \psi^{jk}_{ab}\xi^a\xi^b; \quad \Phi^{jk}(\xi) = \varphi^{jk}_{ab}\xi^a\xi^b,$$

перепишем эти уравнения так:

$$[\![\Psi,\ \Psi]\!] = 0, \quad [\![\Psi,\ \Phi]\!] = \Gamma. \tag{4.7}$$

Здесь через $[\![\ldots,\ \ldots]\!]$ обозначена скобка Схоутена (см. п. 2.5 гл. I), а 3-тензор Γ определен формулой

$$\Gamma^{jkl} = \frac{1}{2} \underset{(j,k,l)}{\mathfrak{S}} \Psi^{sm} \partial_m \Psi^{qr} \partial^2_{rs} \Psi^{\cdot l} \partial^2_{qi} \Psi^{jk}.$$

Первое из соотношений (4.7) — это классическое тождество Якоби для скобки Пуассона, порожденной тензором Ψ, а второе дает уравнение для квантовой поправки к этой скобке Пуассона. Аналогично выглядят уравнения и для всех последующих поправок.

4.2. Квантовые поправки к скобкам Пуассона. Перейдем к случаю общих нелинейных соотношений (1.15а). Теперь тензоры Ψ, Φ, ... в (1.16) не предполагаются квадратичными.

Лемма 4.2. (а) *Для вейлевских функций* $f(A) = f(\overset{\omega}{A})$ *от любого набора операторов* $A = (A^1, \ldots, A^n)$ *выполнено тождество*

$$\overline{g(A)}^{\,\omega} f(\overset{\omega}{A}) = (fg)(A) + \frac{1}{12}[[A^i, \overset{\omega}{A^j}], A^k]\, \partial_j \partial_k g(\overset{\omega}{A})\, \partial_i f(\overset{\omega}{A}) +$$
$$+ \frac{1}{24}[A^i, \overset{\omega}{A^j}][A^l, \overset{\omega}{A^k}]\, \partial_i \partial_j g(\overset{\omega}{A})\, \partial_k \partial_l f(\overset{\omega}{A}) + O^4[A^1, \ldots, A^n],$$

где обозначение $O^N[A^1, \ldots, A^N]$ *введено в* (1.32) *приложения* 1.

(b) *Для операторов, удовлетворяющих соотношениям* (1.15а), *имеем*

$$\overline{g(A)}^{\,\omega} f(\overset{\omega}{A}) = (fg + \hbar^2 \mathscr{C}_\hbar(g, f))(\overset{\omega}{A}) + O(\hbar^4),$$

где бинарная операция $\mathscr{C}_\hbar$ *задана так:*

$$\mathscr{C}_\hbar(g, f) = \frac{1}{12} \Psi^{ks}_\hbar \partial_s \Psi^{ij}_\hbar \partial^2_{jk} g \cdot \partial_i f + \frac{1}{24} \Psi^{ij}_\hbar \Psi^{ks}_\hbar \partial^2_{jk} g \partial^2_{si} f. \tag{4.8}$$

Лемма следует из формулы (1.24) приложения 1.

Теперь легко вычисляется разложение по степеням $\hbar$ коммутатора:

$$[A^k, f(A)] = [A^k, \overset{\omega}{A^j}]\, \partial_j f(\overset{\omega}{A}) = i\hbar \overline{\Psi^{jk}_\hbar(A)}^{\,\omega}\, \partial_j f(\overset{\omega}{A}) =$$
$$= i\hbar (\Psi^{jk}_\hbar \partial_j f)(A) + i\hbar^3 \mathscr{C}_\hbar(\Psi^{jk}_\hbar, \partial_j f)(A) + O(\hbar^5).$$

Следовательно,

$$[g(A), f(A)] = [A^k, f(\overset{\omega}{A})]\, \partial_k g(\overset{\omega}{A}) =$$
$$= i\hbar\, \overline{(\Psi^{jk}_\hbar \partial_j f)(A)}^{\,\omega}\, \partial_k g(\overset{\omega}{A}) + i\hbar^3\, \overline{\mathscr{C}_\hbar(\Psi^{jk}_\hbar, \partial_j f)(A)}^{\,\omega}\, \partial_k g(\overset{\omega}{A}) + O(\hbar^5) =$$
$$= i\hbar (\Psi^{jk}_\hbar \partial_j f\, \partial_k g)(A) + i\hbar^3 \mathscr{C}_\hbar(\Psi^{jk}_\hbar \partial_j f, \partial_k g)(A) +$$
$$+ i\hbar^3 (\mathscr{C}_\hbar(\Psi^{jk}_\hbar, \partial_j f)\, \partial_k g)(A) + O(\hbar^5). \tag{4.9}$$

Можно сосчитать и двойные коммутаторы, например $[[A^j, A^k], A^l]$. Тождество Якоби для таких коммутаторов дает соотношение

$$\underset{(j,k,l)}{\mathfrak{S}} [(\partial_s \Psi^{kj}_\hbar \Psi^{ls}_\hbar)(A) + \hbar^2 \mathscr{C}_\hbar(\Psi^{ls}_\hbar, \partial_s \Psi^{kj}_\hbar)(A) + O(\hbar^4)] = 0.$$

Подставляя сюда разложение (1.16), получим цепочку уравнений для квантовых поправок $\Phi^{jk}, \ldots$, аналогичную (4.7):

$$[\![\Psi, \Phi]\!] = \Gamma, \ldots \tag{4.10}$$

Здесь (см. [26])

$$\Gamma^{jkl} = \underset{(j,\,k,\,l)}{\mathfrak{S}} \left(\frac{1}{12} \Psi^{sm} \partial_m \Psi^{qr} \partial^2_{rs} \Psi^{\cdot l} \partial^2_{qi} \Psi^{jk} + \frac{1}{24} \Psi^{sm} \Psi^{qr} \partial^2_{rs} \Psi^{\cdot l} \partial^3_{mqi} \Psi^{jk} \right). \tag{4.11}$$

Многоточием в (4.10) обозначены последующие уравнения цепочки, получающиеся в членах $\sim \hbar^4, \hbar^6, \ldots$ Все они имеют вид $[\![\Psi, \Phi']\!] = \Gamma'$ с правой частью Γ', известной из предыдущих уравнений.

Уравнения вида (4.10) были подробно рассмотрены в § 3 гл. I. Обнаруженные в п. 3.3 гл. I препятствия к их разрешимости — это потенциальные препятствия для существования квантовых поправок к скобке Пуассона, а следовательно, и для всей процедуры квантования. Ниже, не оговаривая это особо, мы предполагаем, что цепочка (4.10) разрешима и квантовые поправки $\Phi^{jk}, \ldots$ найдены, т. е. скобка квантуема в смысле § 1.

Так же как в (4.9), можно получить разложение по степеням $\hbar$ и формулы композиции двух вейлевских функций $f(A) \cdot g(A)$ (см. (1.23) приложения 1). Это даст явное выражение для $*$-произведения в (1.18). Подведем итог.

Через $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ мы обозначаем подходящий класс гладко зависящих от $\hbar$ (т. е. неосциллирующих) символов, например полиномов на $\mathbf{R}^n$ или элементов из $S^\infty(\mathbf{R}^n)$ в зависимости от класса излучаемых операторов A^j (см. п. 1.1 приложения 1).

Теорема 4.1. *Пусть тензор Ψ задает скобку Пуассона* (1.1) *на $\mathbf{R}^n$, а тензоры $\Phi, \ldots$ — квантовые поправки к скобке — определены из цепочки уравнений* (4.10). *Тогда на классе неосциллирующих символов $\mathcal{S}$ определено $*$-произведение, которое ассоциативно по* $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$, *обладает единицей* 1 *и согласовано с инволюцией*

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f}. \tag{4.12}$$

«Принцип соответствия» (1.4), (1.4a) *при этом выглядит так:*

$$f * g = fg - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\} + \hbar^2 \alpha(f, g) - \frac{i\hbar^3}{2} \beta(f, g) + O(\hbar^4),$$

где операции $\alpha(\ldots, \ldots)$ и $\beta(\ldots, \ldots)$ заданы формулами

$$\alpha(f, g) = \mathscr{C}(f, g) + \mathscr{C}(g, f) - \frac{1}{24} \Psi^{sl} \Psi^{ij} \partial^2_{is} f \partial^2_{jl} g,$$

$$\beta(f, g) = \Phi^{sj} \partial_s f \partial_j g + \mathscr{C}(\Psi^{sj} \partial_s f, \partial_j g) + \mathscr{C}(\Psi^{sj}, \partial_s f) \partial_j g,$$

а операция $\mathscr{C}$ определена в (4.8) (*где тензор $\Psi_\hbar$ нужно заменить на Ψ*).

4.3. Генераторы $*$-произведения на осциллирующих символах. Теперь мы переходим ко второму шагу квантования скобки (1.1).

Нужно продолжить умножение $*$ на символы, осциллирующие при $\hbar \to 0$. Как будет видно, такое продолжение встречается с препятствиями, похожими на те, которые появляются уже в случае линейных коммутационных соотношений, т. е. в случае алгебры Ли (пример 1.9 приложения 1). Причем для нелинейных соотношений (4.2) отсутствует такой объект, как группа Ли, использованный в этом примере для глобального определения $*$-произведения (свертки). Именно эта трудность является основной. Но даже локально, на символах, у которых преобразование Фурье сосредоточено в окрестности нуля (см. опять тот же пример), вычисление произведения $*$ оказывается гораздо более трудоемким по сравнению со случаем алгебр Ли. Сейчас мы изложим эту локальную конструкцию [61].

На классе неосциллирующих символов $\mathscr{S}$ в силу теоремы 4.1 коммутационные соотношения (1.15а) можно записать так:

$$\frac{i}{\hbar}[f(\mathrm{A}),\ g(\mathrm{A})]=B_{\hbar}(f,\ g)(\mathrm{A})+O(\hbar^{\infty}), \tag{4.13}$$

где $B_{\hbar}$ — билинейная операция на $\mathscr{S}$:

$$B_{\hbar}=B^{(0)}+\hbar^2 B^{(1)}+\ldots,\ B^{(0)}(f,\ g)=\{f,\ g\},\ \ B^{(1)}(f,\ g)=\beta(f,g),\ \ldots.$$

Цепочка уравнений (4.10) обеспечивает выполнение для операции $B_{\hbar}$ тождества Якоби

$$B_{\hbar}(B_{\hbar}(f,\ g),\ k)+B_{\hbar}(B_{\hbar}(g,\ k),\ f)+B_{\hbar}(B_{\hbar}(k,\ f),\ g)=O(\hbar^{\infty}). \tag{4.14}$$

Пусть $x\in\mathbf{R}^n$, $f^x(\xi)=\langle\xi,\ x\rangle$ — линейная функция на $\mathbf{R}^n$. Через b^x обозначим оператор на $\mathscr{S}$, действующий по правилу $b^x(g)=B_{\hbar}(f^x,\ g)$. Рассмотрим также 1-форму $\theta_{\hbar}$ на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $\mathscr{S}$; на векторах $u\in\mathbf{R}^n$ она определена равенством

$$\langle(\theta_{\hbar})_x,\ u\rangle=\int_0^1\exp\{-\tau b^x\}\,f^u\,d\tau. \tag{4.15}$$

Лемма 4.3. *Форма $\theta_{\hbar}$ удовлетворяет уравнению*

$$d\theta_{\hbar}=-\frac{1}{2}B_{\hbar}(\theta_{\hbar}\wedge\theta_{\hbar})\ \ (\operatorname{mod}O(\hbar^{\infty})). \tag{4.16}$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1 операция $B_{\hbar}(\operatorname{mod}O(\hbar^{\infty}))$ задает структуру бесконечномерной алгебры Ли на $\mathscr{S}$. На соответствующей формальной бесконечномерной «группе» $\mathscr{G}$ может быть определена левоинвариантная форма в координатах 1-рода (см. п. 1.2 гл. I):

$$\Theta_f(g)=\frac{I-e^{-\Lambda(f)}}{\Lambda(f)}(g),\quad g\in T_f\mathscr{G},$$

$$\Lambda(f)(g)\overset{\text{def}}{=}B_{\hbar}(f,\ g).$$

Здесь и элемент «группы» f, и «касательный вектор» g к «группе» — это функции на $\mathbf{R}^n$. Правоинвариантная форма удовлетворяет, как известно, классическому уравнению Маурера — Картана

$$\delta\Theta = -\frac{1}{2}[\Theta \wedge \Theta], \tag{4.17}$$

где δ — «дифференциал» на $\mathcal{G}$, $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли, т. е. в данном случае — операция $B_\hbar \,(\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty))$.

Заметим теперь, что сужение формы Θ на линейные функции дает

$$\Theta_{f^x}(f^u) = \langle(\theta_\hbar)_x, u\rangle, \quad (\delta\Theta)_{f^x} = d_x\theta_\hbar.$$

Поэтому равенство (4.16) следует из (4.17). Лемма доказана.

Отметим, что тождества (4.14) являются условием разрешимости уравнения (4.16). Операторы b^x в (4.15) — дифференциальные операторы бесконечного порядка, но главная их часть по $\hbar$ — это операторы первого порядка $b^x|_{\hbar=0} = x_j\Psi^{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi^k}$. Поэтому экспонента $\exp\{-\tau b^x\}$ в (4.15) легко вычисляется через сдвиг $U(\tau)$: $f(\xi) \to f(\Xi(\xi, \tau))$ по траекториям системы

$$\frac{d}{d\tau}\Xi = \Psi(\Xi)x, \quad \Xi|_{\tau=0} = \xi. \tag{4.18}$$

В силу формул теории возмущений (пример 1.4 приложения 1) имеем

$$\theta_\hbar^i = \int_0^1 d\tau U(\tau) \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \hbar^{2k}\int_0^\tau d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \tilde{B}(\tau_k) \ldots \tilde{B}(\tau_1)(\xi^{\cdot}), \tag{4.19}$$

где

$$\tilde{B}(\tau) = U(-\tau)(B^{(1)} + \hbar^2 B^{(2)} + \ldots)U(\tau)$$

— семейство дифференциальных операторов бесконечного порядка в $\mathcal{S}$. В частности, при $\hbar = 0$ получаем 1-форму

$$\theta_\hbar(\xi)|_{\hbar=0} \overset{\text{def}}{=} \theta(\xi), \quad \theta(\xi)_x = \mathcal{P}_x(\xi)\,dx, \tag{4.20}$$

где

$$\mathcal{P}_x(\xi) = \int_0^1 \Xi(\xi, x, \tau)\,d\tau.$$

Следствие 4.1. *Построенная в* (4.20), (4.18) *1-форма* θ *на* $\mathbf{R}_x^n$ *со значениями в пространстве функций на* $\mathbf{R}_\xi^n$ *удовлетворяет уравнениям*

$$d\theta = -\frac{1}{2}\{\theta \wedge \theta\}, \quad \theta(\xi)_x|_{x=0} = \xi.$$

Таким образом, мы пришли к структуре Картана, отвечающей скобке Пуассона (1.1) (см. п. 2.4 гл. II), и получили именно то *решение уравнений Ли* (см. п. 1.3 гл. II), *на котором основывалась конструкция фазового пространства для нелинейных скобок Пуассона.*

Получим теперь формулы для генераторов умножения $*$, т. е. для операторов регулярного представления соотношений (1.15a) в классе осциллирующих при $\hbar \to 0$ символов. Пусть $\mathcal{U}$ область в $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием. Через $\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U}, a)$ обозначим пространство символов $f_\hbar \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, зависящих от параметра $\hbar \in (0, 1]$ и таких, что все нормы

$$\sup_{0<\hbar\leqslant 1} \|(-i\hbar\partial/\partial p)^\alpha f_\hbar(p)\|_{L^2} \tag{4.21}$$

конечны, а спектр Фурье $f_\hbar$ достаточно узок; точнее, $e\left(-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}\right) f_\hbar(p) = O(\hbar^\infty)$, если $e \equiv 0$ в шаре $|p| \leqslant a$. Оценки вида $O(\hbar^N)$ будут везде пониматься в смысле норм (4.21). Радиус шара a берется достаточно маленьким, но отличным от нуля. Случай $a=0$ — это, по существу, случай неосциллирующих символов, разобранный уже в п. 4.2.

Правые и левые операторы регулярного представления на классе символов $\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U}, a)$ будем искать в виде псевдодифференциальных операторов. Например, правые: $R^j = \rho^j\left(\overset{1}{-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}}, \overset{2}{p}, \hbar\right)$, где

$$\rho^j(x, p, \hbar) \sim r^j(x, p) + \sum_{k\geqslant 1} (i\hbar)^k r_k^j(x, p). \tag{4.22}$$

Коэффициенты асимптотики символов ρ^j по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$ вычисляются из следующей основной леммы.

Лемма 4.4. *Функции ρ^j являются символами правого регулярного представления соотношений* (1.15a) *тогда и только тогда, когда выполняются уравнения*

$$\rho^j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \theta_\hbar(A)_x}, \hbar\right) 1(x) = A^j \quad (\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.23}$$

Доказательство. Формула дифференцирования экспоненты и определение (4.15) дают

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}\int_0^1 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\tau x\mathrm{A}\right\} A^j \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\tau x\mathrm{A}\right\} d\tau =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}\int_0^1 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\tau x\,\mathrm{ad}_\mathrm{A}\right\}(\mathrm{A}^j)\, d\tau =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}\left(\int_0^1 \exp\{-\tau b^x\}(\xi^j)\, d\tau + O(\hbar^\infty)\right)_{\xi=\mathrm{A}} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}xA\right\}\left(\theta_\hbar^j(A)_x - i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} + O(\hbar^\infty)\right) 1(x).$$

Отметим, что операторы $\theta_\hbar(A)^j_x - i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$ при разных j друг с другом коммутируют в силу леммы 4.1. По общей формуле квазикоммутации ((1.16) приложения 1) получаем

$$\rho\left(\overset{2}{x},\ -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}\rho\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{\overline{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\theta_\hbar(\mathrm{A})_x}}\right)1(x)+O(\hbar^\infty)$$

для любого символа ρ. Отсюда, если символы $\rho=\rho^j$ удовлетворяют (4.23), имеем

$$\rho^j\left(\overset{2}{x},\ -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ \hbar\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}x\mathrm{A}\right\}\mathrm{A}^j \pmod{O(h^\infty)}.$$

Интегрируя с преобразованием Фурье символа $f_\hbar\in\mathscr{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$, получаем

$$\left(\rho^j\left(-i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{2}{p},\ \hbar\right)f_\hbar\right)(\mathrm{A})=f_\hbar(\mathrm{A})\,\mathrm{A}^j \pmod{O(\hbar^\infty)}.$$

Лемма доказана.

Теперь разложим левую часть (4.23) по степеням $\hbar$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\pi_{x,y,\tau}(\xi) &= \frac{1}{\hbar}\langle\theta_\hbar(\xi)_{x+\hbar y(1-\tau)}-\theta_\hbar(\xi)_x,\ y\rangle, \quad x,\ y\in\mathbf{R}^n,\\
c_{x,y} &= B_\hbar(\langle\theta_\hbar(\cdot)_x,\ y\rangle,\ \ldots),\\
e_{x,y,\tau} &= \exp\{-\tau\hbar c_{x,y}\}(\pi_{x,y,\tau})*,\\
a_{x,y} &= \frac{1}{\hbar}\langle(\theta_\hbar(\cdot)_x *)-\theta_x,\ y\rangle,\\
d_{x,y,\tau} &= \exp\{-i\tau\langle\theta_x,\ y\rangle\}\,a_{x,y}\exp\{i\tau\langle\theta_x,\ y\rangle\}.
\end{aligned}$$

Здесь функции π, а также операторы a, c, d, e гладко зависят от $\hbar$. По общим формулам выпутывания (пример 1.6 приложения 1) найдем

$$\exp\left\{i\left\langle-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\theta_\hbar(\mathrm{A})_x,\ y\right\rangle\right\}1(x)=$$

$$=\left(\operatorname{Exp}\int_0^1 i\hbar\theta_\hbar(A)_{x+\hbar y(1-\tau)}\,d\tau\right)\exp\left\{i\left\langle-i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ y\right\rangle\right\}1(x)=$$

$$=\exp\{i\langle\theta_\hbar(A)_x,\ y\rangle\}\times$$

$$\times\operatorname{Exp}\left\{\int_0^1 i\hbar\exp\left\{-i\tau\left\langle\mathrm{ad}_{\theta_\hbar(A)_x},\ y\right\rangle\right\}(\pi_{x,y,\tau}(A))\,d\tau\right\}=$$

$$=\left[\exp\{i\langle\theta(\xi)_x,\ y\rangle\}\left(\operatorname{Exp}\int_0^1 i\hbar d_{x,y,\mu}\,d\mu\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\operatorname{Exp}\int_0^1 i\hbar e_{x,y,\tau}\,d\tau\right)1(\xi)\right]\Bigg|_{\xi=A}+O(\hbar^\infty).$$

Здесь Exp в отличие от exp обозначает мультипликативный интеграл. Подстановка $\xi=A$ означает, что берется вейлевская функция от набора $A=(A^1, \ldots, A^n)$. Последний символ легко разлагается в степенной ряд по $\hbar$. Обозначим его так:

$$\exp\left\{i\left\langle -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\theta_\hbar(A)_x,\ y\right\rangle\right\}1(x)=$$
$$=\left[\exp\{i\langle\theta(\xi)_x,\ y\rangle\}K(x,\ y,\ \xi)\right]\big|_{\xi=A}+O(\hbar^\infty),$$
$$K=\operatorname{Exp}\left\{\int_0^1 i\hbar d_{x,\,y,\,\mu}\,d\mu\right\}\operatorname{Exp}\left\{\int_0^1 i\hbar e_{x,\,y,\,\tau}\,d\tau\right\}1(\xi)\sim$$
$$\sim 1+\sum_{s\geqslant 1}(i\hbar)^s K_s(x,\ y,\ \xi). \qquad (4.24)$$

Таким образом,

$$\rho\left(\overset{2}{x},\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\overset{1}{+}\theta_\hbar(A)_x,\ \hbar\right)1(x)=\left[K\left(x,\ -i\frac{\partial}{\partial p},\ \xi\right)\rho(x,\ p,\ \hbar)\right]\Bigg|_{\substack{p=\mathscr{P}_x(\xi)\\ \xi=A}}$$

(см. (4.20)).

В уравнениях (4.23) теперь можно избавиться от $A^1, \ldots, A^n$ и записать их как уравнения для символов:

$$\xi=K\left(x,\ -i\frac{\partial}{\partial p},\ \xi\right)\rho(x,\ p,\ \hbar)\Big|_{p=\mathscr{P}_x(\xi)}$$

или

$$K\left(x,\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ r\left(x,\ \overset{2}{p}\right)\right)\rho=r(x,\ p),$$

где через $\xi=r(x,\ p)$ обозначено решение неявного уравнения

$$p=\mathscr{P}_x(\xi)\Rightarrow\xi=r(x,\ p). \qquad (4.25)$$

(Это решение существует, вообще говоря, лишь при достаточно малых $|x|\leqslant a$, когда p пробегает область $\mathscr{U}$.) Итак, доказана

Теорема 4.2. *В классе осциллирующих символов* $\mathscr{S}_\hbar(\mathscr{U},\ a)$ *(при достаточно малом* a*) операторы правого регулярного представления соотношений* (1.15а) *имеют вид*

$$R^j=\rho^j\left(-i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{2}{p},\ \hbar\right)+O(\hbar^\infty).$$
$$\rho(x,\ p,\ \hbar)=\left[K\left(x,\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ r\left(x,\ \overset{2}{p}\right)\right)\right]^{-1}r(x,\ p),$$

где r — *решение уравнения* (4.25), *в котором функция* $\mathscr{P}_x(\xi)$ *задана формулой* (4.20), *а символ* $K(x,\ y,\ \xi)$ *определен в* (4.24). *Коэффициенты асимптотического разложения символов* ρ^j (4.22) *задаются рекуррентными формулами*

$$r_0\equiv r,\quad r_1=\frac{1}{2}\sum_{s,\,k=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{P}_x^k}{\partial x_s}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial p^s\,\partial p^k},$$
$$r_j(x,\ p)=-\sum_{l=0}^{j-1}K_{j-l}\left(x,\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ r\left(x,\ \overset{2}{p}\right)\right)r_l(x,\ p),$$

где символы K_s определяются разложением (4.24). *Операторы левого регулярного представления имеют вид*

$$L^j = \bar{\rho}^j\left(i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{2}{p},\ \hbar\right) + O(\hbar^\infty) = \left(l^j + i\hbar l_1^j + \ldots\right)\left(-i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{2}{p}\right).$$

Здесь

$$l(x,\ p) = r(-x,\ p),\quad l_1(x,\ p) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{P}'^k_x}{\partial x_s}(l)\frac{\partial^2 l(x,\ p)}{\partial p^s\,\partial p^k},$$
$$\mathcal{P}'_x = \mathcal{P}_{-x}.$$

4.4. Представление коммутационных соотношений $\hbar$-псевдодифференциальными операторами. Операторы L^j, R^j позволяют распространить операцию $*$ на пространство осциллирующих символов и тем самым решить задачу квантования скобки Пуассона с точностью $O(\hbar^\infty)$.

Оказывается, получающаяся в результате алгебра осциллирующих функций может быть описана независимо от скобки Пуассона — просто как алгебра со сверткой, генераторы которой являются $\hbar$-псевдодифференциальными операторами. Каждой такой алгебре автоматически соответствует некоторая скобка Пуассона в пределе $\hbar \to 0$ [61]. Класс таких алгебр — естественная квантовая категория, сопоставляемая нелинейным скобкам Пуассона.

Начнем с аналога третьей обратной теоремы Ли.

Теорема 4.3. *Построенные в теореме* 4.2 *операторы* L^j, R^j *левого и правого регулярного представления коммутационных соотношений* (1.15а) *удовлетворяют тем же соотношениям* (1.15а) *и сопряженным к ним*

$$\begin{aligned}
&[L^j,\ L^k] = -i\hbar\Psi^{jk}_\hbar(L) + O(\hbar^\infty),\\
&[R^j,\ R^k] = i\hbar\Psi^{jk}_\hbar(R) + O(\hbar^\infty),\\
&[L^j,\ R^k] = O(\hbar^\infty).
\end{aligned}\tag{4.26}$$

Здесь оценка $O(\hbar^\infty)$ понимается в сильном смысле в классе осциллирующих символов $\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$.

Доказательство. Если $A = (A^1,\ \ldots,\ A^n)$ — некоторое представление коммутационных соотношений (1.15а), то для вейлевских функций от набора A в силу теоремы 4.2 имеем по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$

$$A^jA^kf(A) = A^j(L^kf)(A) = (L^jL^kf)(A),$$
$$\Psi^{jk}_\hbar(A)f(A) = \left(\Psi^{jk}_\hbar(L)f\right)(A),$$

и поэтому равен нулю (по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$) оператор

$$\left(\left([L^j,\ L^k] + i\hbar\Psi^{jk}_\hbar(L)\right)f\right)(A) = 0$$

для любого $f \in \mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$. Остается доказать, что отсюда следует равенство нулю символа

$$\left([L^j,\ L^k] + i\hbar\Psi^{jk}_\hbar(L)\right)f = 0.$$

Это будет верно, если представление коммутационных соотношений (1.15а) операторами $A^1, \ldots, A^n$ инъективно

$$\chi(A) = 0 \Rightarrow \chi = 0 \quad (\operatorname{mod} O(\hbar)^\infty))$$

в классе символов $\chi \in \mathscr{S}_\hbar(\mathcal{U}, a)$. Это, в свою очередь, вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.5. *В пространстве* $\mathscr{S}_\hbar(\mathcal{U}, a)$ *существует представление коммутационных соотношений* (1.15а), *обладающее свойстом*

$$\chi(A)\,1 = (1 + O(\hbar))\,\chi \quad \forall \chi \in \mathscr{S}_\hbar(\mathcal{U}, a). \tag{4.27}$$

Доказательство. Мы хотим реализовать представление псевдодифференциальными операторами

$$A^j = \hat{\mathcal{A}}^j + \hbar^2 \hat{v}^j + O(\hbar^4), \quad \hat{\mathcal{A}}^j \equiv \mathcal{A}^j\left(-i\hbar \overset{\omega}{\partial}/\partial p, \overset{\omega}{p}\right). \tag{4.28}$$

Здесь $\mathcal{A}^j(x, p)$ — символы, заданные в окрестности $\mathscr{E}$ нулевого сечения в $T^*\mathcal{U}$ и удовлетворяющие уравнениям

$$\{\mathcal{A}^j, \mathcal{A}^k\} = \Psi^{jk}(\mathcal{A}), \tag{4.29}$$

а $v^j, \ldots$ — квантовые поправки к символам $\mathcal{A}^j$, подбираемые исходя из требования, чтобы операторы (4.28) подчинялись соотношениям (1.15а) по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$. Кроме того, для выполнения (4.27) нужно требовать выполнения равенства

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} xA\right\} 1(p) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} xp\right\} (1 + O(\hbar)),$$

или

$$x \cdot \mathcal{A}(x, p) \equiv x \cdot p. \tag{4.30}$$

Решение уравнений (4.29), удовлетворяющее условиям (4.30), а именно $\mathcal{A}(x, p) = l(x, p) = r(-x, p)$, предъявлено в (4.20), (4.25) (см. подробнее п. 1.3 гл. II). Остается доказать существование квантовых поправок $v^j, \ldots$ в (4.28). Для них в каждом порядке по $\hbar$ получим из (1.15а) цепочку линейных уравнений. Первое из этих уравнений имеет вид

$$\{\mathcal{A}^j, v^k\} - \{\mathcal{A}^k, v^j\} - v^s \partial_s \Psi^{jk}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}^{jk}. \tag{4.31}$$

Здесь

$$\mathcal{R}^{jk} = \Phi^{jk}(\mathcal{A}) - b(\mathcal{A}^j, \mathcal{A}^k) + d(\Psi^{jk}), \tag{4.32}$$

Φ^{jk} — квантовая поправка к скобке из (1.10), а функции $b(g_1, g_2)$ и $d(f)$ определяются как коэффициенты разложений

$$\begin{gathered}[\hat{g}_1, \hat{g}_2] = -i\hbar\, \widehat{\{g_1, g_2\}} - i\hbar^3 \widehat{b(g_1, g_2)} + O(\hbar^5), \\ f(\overset{\omega}{\hat{\mathcal{A}}^1}, \ldots, \overset{\omega}{\hat{\mathcal{A}}^n}) = \widehat{f(\mathcal{A})} + \hbar^2 \widehat{d(f)} + O(\hbar^4).\end{gathered} \tag{4.33}$$

Они задаются формулами (1.36), (1.37) приложения 1.

Локально мы имеем бирасслоение (см. п. 2.2 гл. I)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{E} \arrow[dl, "\mathscr{A}=l"'] \arrow[dr, "r"] & \\ \mathscr{U} & & \mathscr{U}^{(-)} \end{tikzcd} \qquad \mathfrak{E} \subset T^*\mathscr{U}$$

На слоях r в каждой точке векторные поля $\operatorname{ad}(\mathscr{A}^j)$ образуют базис. Рассмотрим на этих слоях дуальные 1-формы $\theta_1, \ldots, \theta_n$ такие, что $\theta_k(\operatorname{ad}(\mathscr{A}^j)) = \delta_k^j$. Тогда в силу (4.29)

$$d\theta_k = -\frac{1}{2}\partial_k\Psi^{js}(\mathscr{A})\ \theta_j \wedge \theta_s.$$

Кроме того, введем на слоях r 1-форму $\eta = v^k\theta_k$. Тогда систему (4.31) можно переписать в виде уравнения на формах:

$$d\eta = \rho, \quad \rho = \frac{1}{2}\mathscr{R}^{jk}\theta_j \wedge \theta_k. \tag{4.34}$$

Условие его разрешимости — замкнутость формы ρ, т. е.

$$\underset{(j,\,k,\,s)}{\mathfrak{S}}(\{\mathscr{A}^s,\ \mathscr{R}^{jk}\} + \mathscr{R}^{jm}\partial_m\Psi^{ks}(\mathscr{A})) = 0.$$

Для проверки этого последнего тождества подставим в него $\mathscr{R}^{jk}$ из (4.32) и учтем уравнение (4.10); получим

$$\underset{(j,\,k,\,s)}{\mathfrak{S}}(\Gamma^{sjk} - \{\mathscr{A}^s,\ b(\mathscr{A}^j,\ \mathscr{A}^k)\} - b(\mathscr{A}^s,\ \mathscr{A}^m)\,\partial_m\Psi^{jk}(\mathscr{A}) -$$
$$- \{d(\Psi^{jk}),\ \mathscr{A}^s\} + d(\Psi^{sm})\,\partial_m\Psi^{jk}(\mathscr{A})) = 0. \tag{4.35}$$

Сейчас мы докажем (4.35).

Из тождества Якоби для двойных коммутаторов $[[\hat{\mathscr{A}}^j,\ \hat{\mathscr{A}}^k],\ \hat{\mathscr{A}}^s]$ в слагаемых порядка $\hbar^4$, используя (4.33), получаем

$$\underset{(j,\,k,\,s)}{\mathfrak{S}}\{\mathscr{A}^s,\ b(\mathscr{A}^j,\ \mathscr{A}^k)\} = \underset{(j,\,k,\,s)}{\mathfrak{S}} b(\Psi^{jk}(\mathscr{A}),\ \mathscr{A}^s). \tag{4.36}$$

С другой стороны, второе из равенств (4.33) дает соотношение

$$[\Psi^{jk}(\hat{\mathscr{A}}),\ \hat{\mathscr{A}}^s] = -i\hbar\,\widehat{\{\Psi^{jk}(\mathscr{A}),\ \mathscr{A}^s\}} - i\hbar^3\widehat{b(\Psi^{jk}(\mathscr{A}),\ \mathscr{A}^s)} -$$
$$- i\hbar^3\,\widehat{\{d(\Psi_{jk}),\ \mathscr{A}^s\}} + O(\hbar^5). \tag{4.37}$$

Левая часть здесь равна

$$[\Psi^{jk}(\hat{\mathscr{A}}),\ \hat{\mathscr{A}}^s] = \partial_m\Psi^{jk}\left(\overset{\omega}{\hat{\mathscr{A}}}\right)\overset{\omega}{\overline{[\hat{\mathscr{A}}^m,\ \hat{\mathscr{A}}^s]}} =$$
$$= -i\hbar\partial_m\Psi^{jk}\left(\overset{\omega}{\hat{\mathscr{A}}}\right)\left(\overset{\omega}{\widehat{\Psi^{ms}(\mathscr{A})}} + \hbar^2\overset{\omega}{\widehat{b(\mathscr{A}^m,\ \mathscr{A}^s)}} + O(\hbar^4)\right) =$$
$$= -i\hbar\partial_m\Psi^{jk}\left(\overset{\omega}{\hat{\mathscr{A}}}\right)\left(\overset{\omega}{\overline{\Psi^{ms}(\hat{\mathscr{A}})}} - \hbar^2\overset{\omega}{\widehat{d(\Psi^{ms})}} + \hbar^2\overset{\omega}{\widehat{b(\mathscr{A}^m,\ \mathscr{A}^s)}} + O(\hbar^4)\right) =$$

$$= -i\hbar\,(\partial_m \Psi^{jk}\Psi^{ms})\,(\hat{\mathcal{A}}) - i\hbar^3 \mathscr{C}\big(\widehat{\Psi^{ms},\ \partial_m \Psi^{jk}}\big) +$$

$$+ i\hbar^3 \widehat{\partial_m \Psi^{jk}\,(\mathcal{A})\,d\,(\Psi^{ms})} - i\hbar^3 \widehat{\partial_m \Psi^{jk}\,(\mathcal{A})\,b\,(\mathcal{A}^m, \mathcal{A}^s)} + O(\hbar^5).$$

В последнем равенстве использована лемма 4.2 (b). Подставляя полученное разложение в (4.37), приравнивая члены порядка $\hbar^3$ и учитывая (4.36), приходим к искомому тождеству (4.35).

Итак, уравнение (4.34) локально разрешимо на каждом слое r. Поэтому разрешима и система (4.31). Точно так же разрешимы аналогичные системы для дальнейших квантовых поправок в (4.28). Лемма 4.5 и теорема 4.3 доказаны.

4.5. Свертка, соответствующая нелинейным скобкам Пуассона. Теперь $*$-произведение осциллирующих символов f, $g \in \mathscr{S}_\hbar(\mathscr{U}, a)$ можно задать формулой (2.5) приложения 2, если корректно определить функции $f(L) = f\big(\overset{\omega}{L}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{L}{}^n\big)$ от набора операторов $L^1, \ldots, L^n$.

По стандартному правилу (1.2) приложения 1 имеем

$$f(L) = \int \tilde{f}(x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} xL\right\} dx, \tag{4.38}$$

где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье символа:

$$\tilde{f}(x) = (2\pi\hbar)^{-n} \int f(\zeta) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\zeta x\right\} d\zeta.$$

Здесь экспонента $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} xL\right\}$ определяется как решение при $t = 1$ задачи Коши

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U = (\overset{\cdot}{x}L)\, U; \quad U|_{t=0} = I. \tag{4.39}$$

Поскольку операторы L^j заданы лишь локально на $\mathscr{S}_\hbar(\mathscr{U}, a)$ и их спектральные свойства не известны, мы мало что можем сказать о точном решении этой задачи Коши. Кроме того, сами операторы L^j задают представление соотношений (1.15а) лишь с точностью $O(\hbar^\infty)$. Поэтому естественно рассмотреть не точное, а асимптотическое по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$ решение задачи (4.39). Его уже можно явно вычислить. Этого будет достаточно для определения оператора (4.38) и $*$-произведения по $\operatorname{mod} O(\hbar^\infty)$.

Итак, построим асимптотическое решение (4.39). Эта задача в силу теоремы 4.2 записывается в виде

$$\Big(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathscr{H}} + i\hbar \hat{\mathscr{H}}_1 + O(\hbar^2)\Big) U = 0, \quad U|_{t=0} = I, \tag{4.40}$$

где

$$\hat{\mathscr{H}} \equiv \mathscr{H}\Big(-i\hbar\, \overset{\omega}{\partial/\partial p},\ \overset{\omega}{p}\Big), \quad \mathscr{H}(y, p) \overset{\text{def}}{=} -xl(y, p),$$

а субглавный символ $\mathcal{H}_1$ устроен так:

$$\mathcal{H}_1(y,\ p)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial p}-xl_1\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^k}(y,\ \mathcal{P}'_y(\eta))\right)\Big|_{\eta=l\,(y,\ p)}.$$

Лемма 4.6. *Выполнено тождество*

$$\mathcal{H}_1=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^k}(y,\ \mathcal{P}_y(\xi))\right)\Big|_{\xi=r\,(y,\ p)}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство $\mathcal{P}'_y(\eta)=\mathcal{P}_y(\xi)$, где $\eta=V_y(\xi)$ (см. (1.17) гл. II). Дифференцирование этого равенства по y позволяет переписать символ $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H}_1=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p^k}(y,\ \mathcal{P}_y(\xi))\right)\Big|_{\xi=r\,(y,\ p)}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}\,(y,\ p)}{\partial p^k\,\partial p^s}\frac{\partial\mathcal{P}'_y(\eta)^k}{\partial\eta^m}\frac{\partial V_y(\xi)^m}{\partial y_s}.$$

Используя формулы (1.19) и (2.4) гл. II, преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p^k\,\partial p^s}\frac{\partial\mathcal{P}'_y(\eta)^k}{\partial\eta^m}\frac{\partial V_y(\xi)^m}{\partial y_s}=\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p^k\,\partial p^s}\{\mathcal{P}'_y(\eta)^s,\ \mathcal{P}'_y(\eta)^k\}=$$

$$=\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p^k\,\partial p^s}\left(\frac{\partial\mathcal{P}'^k_y}{\partial y_s}-\frac{\partial\mathcal{P}'^s_y}{\partial y_k}\right)=0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь гамильтонову систему, отвечающую функции $\mathcal{H}(y,\ p)$ в фазовом пространстве $\mathcal{E}$ (т. е. в окрестности нулевого сечения из $T^*\mathcal{U}$):

$$\dot{Y}=-\partial\mathcal{H}/\partial P,\quad \dot{P}=\partial\mathcal{H}/\partial Y. \tag{4.41}$$

Фиксируем значение первого интеграла этой системы $\xi=r(Y,\ P)$ (см. лемму 1.3 гл. II). Тогда $\dot{Y}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}(Y,\ \mathcal{P}_Y(\xi))$, и поэтому в силу леммы 4.6

$$\left(\frac{\mathcal{D}Y}{\mathcal{D}y}\right)^{-1/2}=\exp\left\{\int_0^t\mathcal{H}_1(Y,\ P)\,dt\right\}.$$

Кроме того, в силу (4.45) гл. II

$$Y(t)=(xt)\overset{\xi}{*}y.$$

Введем функцию

$$g^t=\exp\left\{\int_0^t\mathcal{H}_1\right\}g_{\mathcal{U}}=\left(\frac{\mathcal{D}\left((xt)\overset{\xi}{*}y\right)}{\mathcal{D}y}\right)^{-1/2}g_{\mathcal{U}}, \tag{4.42}$$

где $g_{\mathcal{U}}\equiv 1$ в $\mathcal{U}$ и $g_{\mathcal{U}}=0$ вне окрестности замыкания области $\mathcal{U}$.

Решения $(Y,\ P)$ гамильтоновой системы (4.41) параметризуются значениями интеграла $\xi=r(Y,\ P)$ и начальными точками $Y|_{t=0}=y$. Рассмотрим в $\mathcal{E}\times\mathcal{E}^{(-)}$ лагранжево подмногообразие

$$M^t=\{(Y(y,\ \xi,\ t),\ P(y,\ \xi,\ t);\ y,\ \mathcal{P}_y(\xi))\}=\mathrm{Gr}\,(\gamma^t)$$

и на него сдвигом γ^t по траектории системы (4.41) перенесем меру Лиувилля (2.19), (2.14) гл. II:

$$\operatorname{can}(y, \xi)=d\sigma^{\xi}(y)\,d\xi, \tag{4.43}$$

а также функцию g^t. Тогда в силу следствия 2.4 гл. III асимптотическое решение задачи (4.40) или (4.39) имеет вид

$$U=(2\pi\hbar)^{-n/2} K_{M^t, \operatorname{can}, (b^t, b^0)}(g^t+O(\hbar))\, e^{ic^{\#}(t)},$$

где $c^{\#}$ определено в (2.34) гл. III, а $b^t=\gamma^t(b^0)$, $b^0=(0, \xi^0)\in\mathscr{E}$ — начальная точка. Младшие члены $O(\hbar)$ вычисляются по схеме п. 2.5 гл. III.

Положим теперь $t=1$. Лагранжево подмногообразие $M^1\subset \subset\mathscr{E}\times\mathscr{E}^{(-)}$ в координатах (y, ξ) (вместо (y, p), где $p=\mathscr{P}_y(\xi)$) имеет вид

$$M^1=\left\{\left(x\overset{\xi}{*}y, \xi;\ y, \xi\right)\right\}=\{(a*b,\ b)\}.$$

Здесь $b\equiv(y, \xi)$, $a\equiv(x, \eta)$, где $\eta=V_y(\xi)$, а произведение $a*b$ в группоиде $\mathscr{E}$ определено как в следствии 2.4 гл. II.

Формула (4.42) показывает, что на M^1 можно ввести новую меру $\widetilde{\operatorname{can}}$, полученную из меры can (4.43) левым сдвигом на x. Теорема 2.1 гл. II позволяет записать ее так:

$$\widetilde{\operatorname{can}}(y, \xi)=d\sigma^{\xi}\left(x\overset{\xi}{*}y\right)d\xi.$$

В результате решение задачи (4.39) при $t=1$ дается формулой

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}xL\right\}=(2\pi\hbar)^{-n/2} e^{ic^{\#}(1)} K_{M^1, \widetilde{\operatorname{can}}, (b^1, b^0)}(1)+O(\hbar). \tag{4.44}$$

Здесь опущена функция $g_{\mathcal{U}}$, локализующая оператор в карте $\mathcal{U}\subset\mathcal{N}$. В таком виде эта формула применима всюду на $\mathcal{N}$, если предположить, что пуассонову многообразию $\mathcal{N}$ соответствует конечномерная псевдогруппа G (см. п. 3.1 гл. II). В качестве фазового пространства $\mathscr{E}$ нужно тогда взять локальный группоид — окрестность подмногообразия единиц в $G\times\mathcal{N}$.

Теперь получим глобальный аналог формулы (4.44). Заметим, что при подстановке экспоненты (4.44) в (4.38) мы должны рассматривать эту экспоненту как интегральный оператор, действующий и по координате x. Таким образом, переменная x равноправна с y (напомним, что y двойственна координате p, по которой действует оператор (4.44)). Естественно расширить фазовое пространство и лагранжево подмногообразие M^1, включив в качестве переменной еще и точку $a=(x, \eta)$. В $\mathscr{E}\times(\mathscr{E}\times\mathscr{E})^{(-)}$ рассмотрим лагранжево подмногообразие (1.33) гл. II:

$$M=\{(c, a, b)\,|\,c=a*b\}=\{(\underbrace{x\overset{\xi}{*}y, \xi}_{c};\ \underbrace{x, y\circ\xi}_{a};\ \underbrace{y, \xi}_{b})\}.$$

В качестве начальной точки на M выберем $m^0=(b^0,\ b^0,\ b^0)$, где $b^0=(e,\ \xi^0)\in G\times\mathcal{N}$. Введем также меру на M:

$$\mu=\frac{d\lambda(a)}{\Delta(a)}\operatorname{can}(b),$$

где $\{d\lambda\}$ — правая система мер Хаара на группоиде $\mathcal{E}=G\times\mathcal{N}$ (см. п. 2.4 гл. II), а функция Δ — «модуль» группоида — определяется как плотность меры

$$\Delta(a)\overset{\text{def}}{=}\frac{\varepsilon(dr(a))}{\varepsilon(dl(a))},\quad \varepsilon(d\xi)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n!}\left|\varepsilon^1(\xi)\wedge\ldots\wedge\varepsilon^n(\xi)\right|. \tag{4.45}$$

Здесь 1-формы $\varepsilon^k(\xi)=\varepsilon^k_j(\xi)\,d\xi^j$ — это компоненты базиса псевдоалгебры на $\mathcal{N}$ (см. п. 3.4 гл. II).

Пусть на M выполнено условие квантования двумерных пленок (3.1). Тогда определен оператор

$$W=(2\pi\hbar)^{-n/2}K_{M,\,\mu,\,m^0}(1+O(\hbar)) \tag{4.46}$$

как линейное преобразование пространств сечений волновых пакетов $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{E})\otimes\mathbf{\Gamma}(\mathcal{E})\to\mathbf{\Gamma}(\mathcal{E})$. Этот оператор связан с экспонентой (4.44) следующим образом.

Функциям $f\in\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$ сопоставим их Фурье-образы $\tilde f(x)=F_{p\to x}f(p)$, т. е. перейдем от переменной p, по которой действуют операторы в (4.44), к переменной x. Обозначим

$$\tilde L=F\circ L\circ F^{-1}=(l+i\hbar l_1+O(\hbar^2))\left(\overset{1}{x},\ i\hbar\overset{2}{\partial/\partial x}\right).$$

Положим

$$\varkappa(x,\ p)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathcal{D}\sigma^\xi(x)}{\mathcal{D}x}=\det\varepsilon(\xi)\det dL^\xi(x)^{-1},\quad \xi=r(x,\ p). \tag{4.47}$$

Крышкой будем обозначать вейлевский оператор

$$\widehat{(\ldots)}=\ldots\left(\overset{\omega}{x},\ i\hbar\overset{\omega}{\partial/\partial x}\right).$$

Тогда в силу (4.44), (4.46) справедлива формула

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}x\tilde L_y\right)=\widehat{\varkappa_y^{1/2}}W_{x,\,y}(\widehat{\varkappa_x^{-1/2}}\otimes\widehat{\varkappa_y^{-1/2}})+O(\hbar^2),$$

где индексы x, y указывают на переменные, по которым действуют операторы.

Эта формула и (4.38) показывают, как нужно определить глобальную свертку сечений μ, ν пучка $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{E})$:

$$\mu*\nu=\widehat{\varkappa^{1/2}}\cdot W(\widehat{\varkappa^{-1/2}}\mu\otimes\widehat{\varkappa^{-1/2}}\nu)+O(\hbar^2). \tag{4.48}$$

Локально для символов $f,\ g\in\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$ их $*$-произведение тогда задается соотношением

$$\widetilde{f*g}=\tilde f*\tilde g+O(\hbar^2).$$

Остатки $O(\hbar^2)$ здесь всюду можно заменить на $O(\hbar^\infty)$, добавив к функции $\varkappa$ в (4.47) подходящие квантовые поправки.

Вложение $\mathscr{S}_\hbar(\mathscr{U}, a) \ni f \to \tilde{f} \in \Gamma(\mathscr{E})$ определено локально, но на неосциллирующих символах можно задать и глобальное вложение:

$$j\colon\ \mathscr{S}(\mathscr{N}) \subsetneqq \Gamma(\mathscr{E}), \quad j(f) \overset{\mathrm{def}}{=} K_{\mathscr{N}, \varepsilon, \xi^0}(f) + O(\hbar^2). \tag{4.49}$$

Здесь $\mathscr{S}(\mathscr{N})$ — пространство гладких функций на $\mathscr{N}$, гладко зависящих от $\hbar \in [0, 1]$, многообразие $\mathscr{N}$ рассматривается как лагранжево подмногообразие единиц $\mathscr{N} \approx \{e\} \times \mathscr{N}$ в группоиде $\mathscr{E} = G \times \mathscr{N}$, а мера ε определена в (4.45). В частности, если $f \in C_0^\infty(\mathscr{U})$, то $j(f) = \tilde{f} + O(\hbar^2)$.

Таким образом, свертка (4.48) служит глобальным продолжением $*$-произведения символов. При этом

$$j(f) * = f(\tilde{L}), \quad * j(f) = f(\tilde{R}), \tag{4.50}$$

т. е. операторы набора $\tilde{L} = (\tilde{L}^1, \ldots, \tilde{L}^n)$ являются левыми генераторами, а операторы набора $\tilde{R} = (\tilde{R}^1, \ldots, \tilde{R}^n)$ — правыми генераторами свертки (4.48).

Таким образом, получен аналог первой и второй обратных теорем Ли (см. [61, 62, 69]).

Теорема 4.4. *Пусть скобке Пуассона* (1.1) *на $\mathscr{N}$ соответствует конечномерная псевдогруппа G и $\mathscr{E} = G \times \mathscr{N}$ — соответствующий симплектический группоид. Пусть на лагранжевом подмногообразии $M = \{(a*b, a, b)\} \subset \mathscr{E} \times \mathscr{E}^{(-)} \times \mathscr{E}^{(-)}$ выполнено правило квантования двумерных пленок. Тогда формула* (4.48) *задает ассоциативную операцию (свертку) в пучке $\Gamma(\mathscr{E})$ и вложение* (4.49) — *гомоморфизм. Левые (и правые) генераторы свертки удовлетворяют коммутационным соотношениям* (1.15а) *(и сопряженным соотношениям).*

Эта теорема означает, что мы проквантовали скобку Пуассона $\mathscr{N}$ в смысле (1.2)—(1.7). В качестве $\pi_\hbar$ нужно выбрать представление $\pi_\hbar\colon f \to f(L)$ в пространстве сечений пучка $\Gamma(G \times \mathscr{N})$, а представление гамильтоновых потоков задать так $\Pi_\hbar(\gamma_f^t) = \exp\left\{-\frac{it}{\hbar} f(L)\right\}$, где экспонента определена в пучке $\Gamma(G \times \mathscr{N})$ как в п. 3.5 гл. IV.

Пример 4.1. Пусть $\mathscr{N}$ — группа Ли, наделенная согласованной скобкой Пуассона (см. п. 1.3 гл. II). Предположим, что $\mathscr{N}$ односвязна, и сопряженную группу $\mathscr{N}^* = G$ выберем также односвязной. Тогда $H^2(\mathscr{N}) = H^2(G) = 0$. Поэтому условие квантования в группоиде $\mathscr{E} = G \times \mathscr{N}$ и на лагранжевом подмногообразии M тривиально выполнено. Следовательно, по теореме 4.4 согласованная скобка на группе $\mathscr{N}$ может быть проквантована по $\mathrm{mod}\, O(\hbar^\infty)$.

Пример 4.2. Пусть пуассонову многообразию $\mathscr{N}$ соответствует псевдогруппа G, причем структура псевдогруппы порождена структурой Картана (см. п. 2.4 гл. II) *). Тогда подмногообразия $\{\alpha\}\times\mathcal{N}$, где α пробегает G, задают поляризацию на симплектическом группоиде $G\times\mathcal{N}$. Пространство сечений пучка $\mathbf{\Gamma}(G\times\mathcal{N})$ в этом случае можно отождествить с пространством осциллирующих функций $\mathcal{S}_\hbar(G)$ (см. п. 2.4). Если $\varphi\in\mathcal{S}_\hbar(G)$, то $\widehat{\varkappa^{1/2}}\varphi\,(\mathrm{mod}\,(\hbar^2))$ — сечение пучка $\mathbf{\Gamma}(G\times\mathcal{N})$. И наоборот, если ρ — сечение, то $\widehat{\varkappa^{-1/2}}\rho$ задает с точностью $O(\hbar^2)$ функцию на G. В частности, локально сечению $\tilde{f}$ (где $f\in\mathcal{S}_\hbar(\mathcal{U},\ a)$) соответствует функция $\widehat{\varkappa^{-1/2}}\tilde{f}+O(\hbar^2)$ на псевдогруппе G. Точно так же функции $f\in\mathcal{S}(\mathcal{N})$ соответствует функция $\mathring{f}=\widehat{\varkappa^{-1/2}}\,j(f)+O(\hbar^2)$ на G.

Как видно из (4.48), свертка сечений порождает следующую свертку функций на G:

$$\varphi*\psi=W(\varphi\otimes\psi). \tag{4.51}$$

Генераторы такой свертки можно найти из следующей формулы коммутации:

$$\widehat{\varkappa^{-1/2}}\cdot\tilde{L}^j\cdot\widehat{\varkappa^{1/2}}=\hat{l}^j+O(\hbar^2)$$

(это другая формулировка леммы 4.6). В силу (4.50) имеем

$$\mathring{f}*=f(\hat{l})+O(\hbar^2).$$

Таким образом, левые генераторы свертки (4.51) по $\mathrm{mod}\,O(\hbar^2)$ — это операторы $\hat{l}^j=l^j\left(\overset{\omega}{x},\ i\hbar\,\overset{\omega}{\partial}/\partial x\right)$ на G. Отметим, что они удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.15). Тем же соотношениям удовлетворяют операторы $D^j=\varkappa^{-1}\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\,\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\times$ $\times\, l^j\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\,\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\varkappa\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\,\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)$.

Пусть $A^1,\ \ldots,\ A^n$ и еще какие-то операторы, удовлетворяющие соотношениям (1.15). Обозначим через T_A операторную функцию на G, подчиненную системе уравнений $A^j\cdot T_A=D^j(T_A)$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$. Локально имеем

$$T_A(x)=\varkappa^{-1/2}\left(\overset{\omega}{x},\ -i\hbar\,\overset{\omega}{\partial}/\partial x\right)e^{-ixA/\hbar}. \tag{4.52}$$

Введем также в пространстве функций на G следующую билинейную форму:

$$\langle\varphi,\ \psi\rangle_\varkappa\overset{\mathrm{def}}{=}\int\psi(x)\,\varkappa\left(\overset{\omega}{x},\ i\hbar\,\overset{\omega}{\partial}/\partial x\right)\varphi(x)\,dx. \tag{4.53}$$

Отметим, что D^j — это транспонированные относительно формы (4.53) операторы $\hat{l}^j$. Набор $D=(D^1,\ \ldots,\ D^n)$ удовлетворяет тем же соотношениям (1.15).

*) Напомним, что локально в окрестности подмногообразия единиц $\{e\}\times\mathcal{N}$ всякая псевдогруппа порождается структурой Картана.

Семейство операторов $T_A(x)$ $(x \in G)$, заданное уравнениями (4.52), — это аналог представления группы Ли:

$$T_A(x)\, T_A(y) = T_D(x)\,(T_A(y)) + O(\hbar^2).$$

В частности, если $A = D$, получаем

$$T_D(x)\, T_D(y) = T_D(x)\,(T_D(y)) + O(\hbar^2).$$

Таким образом, $T_D(x)$ являются операторами обобщенного сдвига на псевдогруппе G.

Выполнены формулы

$$\langle \mathring{f},\ T_A \rangle_\varkappa = f(A), \quad W(\varphi \otimes \psi) = \langle \varphi,\ T_{\hat{l}} \rangle_\varkappa \psi.$$

Поэтому, если обозначить

$$\Pi_A(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \langle \varphi,\ T_A \rangle_\varkappa, \quad \varphi \in \mathscr{S}_\hbar(G),$$

будут верны по $\operatorname{mod} \hbar^2$ формула композиции

$$\Pi_A(\varphi)\, \Pi_A(\psi) = \Pi_A(\varphi * \psi)$$

и формула для свертки на псевдогруппе G:

$$\varphi * \psi = \Pi_{\hat{l}}(\varphi)\, \psi.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СВОДКА ФОРМУЛ НЕКОММУТАТИВНОГО АНАЛИЗА

1.1. Упорядоченные функции от операторов и функции Вейля.

Общие определения. Рассмотрим функцию f от n скалярных переменных (символ), а также набор из n элементов A, B, ..., C некоторой коммутативной алгебры, например, — операторов в линейном пространстве. Через $\tilde{f}$ обозначим формальное преобразование Фурье символа:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x\xi = x_1\xi^1 + \ldots + x_n\xi^n.$$

Определим функцию от упорядоченных элементов $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \ldots, \overset{n}{C}$ формулой

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \ldots, \overset{n}{C}\right) = \int \tilde{f}(x) e^{ix_nC} \ldots e^{ix_2B} e^{ix_1A} dx. \tag{1.1}$$

Таким образом, номера над некоммутирующими элементами обозначают порядок их следования справа налево (или порядок их действия как линейных операторов). Это обозначение было предложено в [96]. Впервые, по-видимому, Фейнман [137] начал систематически использовать функции от упорядоченных операторов. В данном приложении мы собрали основные формулы исчисления, развитого в [96] и в последующих работах, а также исчисления вейлевских функций [57, 58, 149].

Вейлевская функция от тех же элементов A, B, ..., C задается так:

$$f\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}, \ldots, \overset{\omega}{C}\right) = \int \tilde{f}(x) e^{i(x_1A + x_2B + \ldots + x_nC)} dx. \tag{1.2}$$

Здесь все элементы симметризованы, т. е. равноправны в смысле порядка следования или в смысле порядка их действия как операторов. Можно считать, что все они «действуют» одновременно, что и отражено в (1.2) одинаковым номером ω, стоящим сверху над всеми элементами.

В общем случае приходится рассматривать сразу несколько наборов элементов: $A = (A^1, \ldots, A^k)$, $B = (B^1, \ldots, B^m)$, ..., $C = (C^1, \ldots, C^l)$ и определять смешанные функции от них; например,

$$f\left(\overset{1}{A}; \overset{2}{B}; \ldots; \overset{n}{C}\right) \equiv f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{1}{A^k}; \overset{2}{B^1}, \ldots, \overset{2}{B^m}; \overset{n}{C^1}, \ldots, \overset{n}{C^l}\right).$$

Здесь все элементы (операторы) A^j действуют одновременно первыми, все B^j — одновременно вторыми и т. д. Формальное определение следующее:

$$f(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \ldots;\ \overset{n}{C})=\int\ldots\int\tilde{f}(x;\ y;\ \ldots;\ z)\,e^{iz\cdot C}\ldots e^{iy\cdot B}e^{ix\cdot A}\,dx\,dy\ldots dz, \tag{1.3}$$

где $x\cdot A\equiv x_1A^1+\ldots+x_kA^k$.

Начальной задачей некоммутативного анализа являются придание точного смысла интегралам (1.1) — (1.3) и описание возможных классов символов и классов алгебр, которым принадлежат элементы A^j, B^j, ..., C^j. При этом возникает множество вариантов. Мы ограничимся лишь двумя. Первый имеет дело с самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве, второй связан с операторами в банаховых шкалах и с общими полибанаховыми алгебрами.

Самосопряженные операторы. Предположим, что все A^j, B^j, ..., C^j — это линейные операторы, определенные на общем плотном инвариантном линейном подпространстве D в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Все операторы в существенном самосопряжены; более того, все линейные комбинации $x\cdot A$, $y\cdot B$, ..., $z\cdot C$ (где $x\in\mathbf{R}^k$, $y\in\mathbf{R}^m$, ..., $z\in\mathbf{R}^l$) также в существенном самосопряжены. Рассмотрим произведение

$$Q(x,\ y,\ \ldots,\ z)=e^{iz\cdot C}\ldots e^{iy\cdot B}e^{ix\cdot A}$$

и его итерации

$$Q_N(\vec{x},\ \vec{y},\ \ldots,\ \vec{z})=Q(x^{(1)},\ y^{(1)},\ \ldots,\ z^{(1)})\ldots Q(x^{(N)},\ y^{(N)},\ \ldots,\ z^{(N)}),$$

где $\vec{x}=(x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(N)})\in\mathbf{R}^{kN}$, $\vec{y}\in\mathbf{R}^{mN}$, ..., $\vec{z}\in\mathbf{R}^{lN}$. Будем предполагать, что выполнено

Условие (α). Для любого $N\geqslant 1$ и любого вектора $u\in D$ функция $Q_N(\vec{x},\ \vec{y},\ \ldots,\ \vec{z})u$ бесконечно дифференцируема по $\vec{x}$, $\vec{y}$, ..., $\vec{z}$ в сильной топологии и нормы всех ее производных растут не быстрее степени при $|\vec{x}|+\ldots+|\vec{z}|\to\infty$.

Введем также пространство $S^\infty(\mathbf{R}^d)$, $d=(k+m+\ldots+l)N$, состоящее из всех комплексных гладких функций на $\mathbf{R}^d$, удовлетворяющих оценке

$$\exists r\ \forall s\ \|f\|_{r,s}\equiv\sup_\xi\left\{(1+|\xi|)^r\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^s f(\xi)\right|\right\}<\infty.$$

Наделим это пространство естественной сходимостью относительно полинормы $\|\cdot\|_{r,s}$. (Получившееся пространство не будет топологическим; см. ниже (1.8).)

Лемма 1.1 [68]. *При выполнении условия* (α) *существует линейное многообразие* D_∞ *такое, что* $D\subset D_\infty\subset\mathcal{H}$, *и для любого* $f\in S^\infty(\mathbf{R}^d)$ *формула* (1.3)

$$f(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \ldots;\ \overset{n}{C})=\langle\tilde{f},\ Q\rangle$$

определяет линейный оператор $D_\infty \to D_\infty$, допускающий замыкание в $\mathscr{H}$. Если $u \in D_\infty$, то отображение $f \to f\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{C}\right)$ и непрерывно из S^∞ в $\mathscr{H}$.

Многообразие D_∞ в этой лемме составляется из всех векторов вида $\langle \tilde{g}, Q_N u \rangle$, где $u \in D$, $g \in S^\infty(\mathbf{R}^\alpha)$, $d = (k+m+\ldots+l)N$, N — любое число.

Конечно, если все операторы наборов $A, B, \ldots, C$ ограничены (и самосопряжены), то условие (α) автоматически выполнено и лемма 1.1 тривиальна.

Лемма 1.2. *Пусть сумма квадратов $(A^1)^2+\ldots+(A^k)^2+(B^1)^2+\ldots \ldots+(B^m)^2+\ldots+(C^1)^2+\ldots+(C^l)^2$ в существенном самосопряжена, операторы $A^i, B^j, \ldots, C^s$ порождают на D алгебру Ли, причем все матрицы присоединенного представления этой алгебры имеют лишь вещественные собственные значения. Тогда выполнено условие* (α). *В частности, оно выполнено, если указанная алгебра Ли нильпотентна.*

Доказательство следует из теоремы Нелсона [108].

Отметим, что если символ f распадается в произведение $f(x, y, \ldots, z) = f_\alpha(x) f_\beta(y) \ldots f_\gamma(z)$, то соответствующий оператор (1.3) также распадается в произведение вейлевских функций от наборов $A, B, \ldots, C$:

$$f\left(\overset{1}{A}; \overset{2}{B}; \ldots; \overset{n}{C}\right) = f_\gamma(C) \cdot \ldots \cdot f_\beta(B) \cdot f_\alpha(A). \tag{1.4}$$

Кроме того, если символ является полиномом, например $f(\xi) = \sum a_s (\xi^1)^{s_1} \ldots (\xi^k)^{s_k}$, то вейлевская функция $f(A) = f(\overset{\omega}{A^1}, \ldots, \overset{\omega}{A^k})$ совпадает на D_∞ с полностью симметризованным полиномом от образующих $A^1, \ldots, A^k$:

$$f(A) = a_0 \cdot I + \sum_{|s|>0} a_s \frac{s_1! \ldots s_k!}{|s|!} \sum_\sigma A^{\sigma(1)} \ldots A^{\sigma(|s|)}. \tag{1.5}$$

Здесь сумма $\sum\limits_\sigma$ берется по отображениям σ: $\{1, \ldots, |s|\} \to \{1, \ldots, k\}$, принимающим каждое значение j ровно в s_j точках. Например,

$$\overset{\omega}{A^1}\overset{\omega}{A^2} = \frac{1}{2}(A^1A^2 + A^2A^1),$$

$$\overset{\omega}{A^1}(\overset{\omega}{A^2})^2 = \frac{1}{3}(A^1A^2A^2 + A^2A^1A^2 + A^2A^2A^1).$$

Подробности, связанные с определением вейлевских функций от самосопряженных операторов, и примеры можно найти в [58, 149, 183].

Операторы в банаховых шкалах. Изложим теперь другой подход к операторному исчислению, основанный на теории банаховых шкал.

Пусть $\|\cdot\|_\mu$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — семейство норм, заданных на линейном пространстве $\mathscr{D}$, причем $\|\cdot\|_{\mu+1} \leqslant \|\cdot\|_\mu$ при любом μ

и выполнено условие: если $\{u_n\} \subset \mathscr{D}$ фундаментальна в норме $\|\cdot\|_\mu$ и сходится к нулю в норме $\|\cdot\|_{\mu+1}$, то она сходится к нулю и в норме $\|\cdot\|_\mu$. Обозначим через B_μ пополнение $\mathscr{D}$ по норме $\|\cdot\|_\mu$. Тогда имеет место цепочка плотных вложений

$$\ldots \subset B_{-1} \subset B_0 \subset B_1 \subset \ldots,$$

которая называется *банаховой шкалой*. Стандартный пример — шкала Соболева, порожденная оператором дифференцирования. Подробно теория шкал изложена, например, в [83].

Оператор A: $\mathscr{D} \to \mathscr{D}$ называется *производящим в шкале*, если он *непрерывен в шкале вправо*, т. е.

$$\forall \mu \exists \nu \|A\|_{B_\mu \to B_\nu} < \infty,$$

и порождает дифференцируемую, медленно растущую однопараметрическую группу $e_t(A)$: $\mathscr{D} \to \mathscr{D}$, $t \in \mathbf{R}$, т. е.

$$\begin{gathered} e_{t+\tau}(A) = e_t(A)\, e_\tau(A), \\ \forall \mu \exists c \exists N \|e_t(A)\|_{B_\mu \to B_\mu} \leqslant c\,(1+|t|)^N, \\ \forall \mu \exists \nu \lim_{t \to 0} \left\| \frac{i}{t}(e_t(A) - I) - A \right\|_{B_\mu \to B_\nu} = 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Производящие операторы $A = A(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε, называются *производящими равномерно* по ε, если константы c и N в оценке (1.6) не зависят от ε.

Набор операторов $A^1, \ldots, A^k$, определенных на $\mathscr{D}$, называется *вейлевским в шкале*, если оператор $\omega \cdot A = \omega_1 A^1 + \ldots + \omega_k A^k$ производящий в шкале равномерно по $\omega \in \mathbf{R}^k$, $|\omega| = 1$. Обозначим $e^{-ix\cdot A} = e_{|x|}\left(\frac{x}{|x|}\cdot A\right)$, где $x \in \mathbf{R}^k$.

Свойства производящих операторов в банаховых шкалах рассмотрены в [96]. Приведем здесь лишь один пример.

Пример 1.1. Пусть вещественные функции a_j, b на $\mathbf{R}^n$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{gathered} \sup\,(1+|x|)^{-1}|a_j(x)| < \infty, \quad \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_j(x)\right| < \infty, \\ \sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha b(x)\right| < \infty, \quad |\alpha| = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{1.7}$$

Тогда, если собственные числа матрицы $((i\,\partial a_j/\partial x_s))$ вещественны, то оператор

$$A = i\sum_{j=1}^m a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + b(x)$$

является производящим в шкале $\{H_k^l(\mathbf{R}^n)\}$, $l, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, порожденной набором норм

$$\|u\|_{H_k^l} = \|(1+|x|^2)^{l/2}(1-\Delta)^{k/2}u\|_{L^2}, \quad u \in \mathscr{D} \equiv C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Рассмотрим теперь наборы вещественных функций a_j^m, b^m на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющие при каждом $m = 1, \ldots, n$ оценкам (1.7). Введем матрицы $Q^m(x) = ((i\,\partial a_j^m/\partial x_s))$. Тогда если набор $Q^1(x), \ldots, Q^n(x)$ вейлевский в алгебре матриц равномерно по $x \in \mathbf{R}^n$, то набор операторов

$$A^m = i\sum_{j=1}^{n} a_j^m(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + b^m(x), \quad m = 1, \ldots, n,$$

вейлевский в шкале $\{H_k^l(\mathbf{R}^n)\}$.

Для общих вейлевских наборов $A, B, \ldots, C$ и символа $f \in S^\infty(\mathbf{R}^d)$ оператор $f\left(\overset{1}{A}; \overset{2}{B}; \ldots; \overset{n}{C}\right)$ определяется по формуле (1.3) и является непрерывным вправо в шкале. В алгебру $\mathscr{L}\{B_\mu\}$ всех непрерывных вправо операторов в шкале можно ввести естественную структуру сходимости (но не топологии) так, что отображение $f \to f\left(\overset{1}{A}; \overset{2}{B}; \ldots, \overset{n}{C}\right)$ непрерывно из $S^\infty(\mathbf{R}^d)$ в $\mathscr{L}\{B_\mu\}$ (см. [58]).

Для операторов в шкале также справедливы тождество (1.4) и тождество (1.5) для полиномиальных символов f. Отметим, что полиномиальные функции, конечно, можно образовывать не только от производных или вейлевских операторов, но и вообще от любых операторов из $\mathscr{L}\{B_\mu\}$. Поэтому удобно несколько обобщить формулу (1.3). Пусть $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{L}\{B_\mu\}$. Определим оператор, непрерывный вправо в шкале:

$$\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2n}{T_n} f\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}, \ldots, \overset{2n-1}{C}\right) = \\ = \int \tilde{f}(x; y; \ldots; z)\, T_n e^{-izC} \ldots T_1 e^{-ixA}\, dx \ldots dz.$$

Вейлевское исчисление (1.2) также допускает подобное обобщение. Пусть $A = (A^1, \ldots, A^k)$ — вейлевский набор операторов $L_1, \ldots, L_k \in \mathscr{L}\{B_\mu\}$ и $f \in S^\infty(\mathbf{R}^k)$. Положим по определению [57]

$$\overset{\omega}{L_1} \ldots \overset{\omega}{L_k} f\left(\overset{\omega}{A^1}, \ldots, \overset{\omega}{A^k}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_\sigma \overset{2}{L}_{\sigma(1)} \ldots \overset{2k}{L}_{\sigma(k)} (\gamma^k f)\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{2k+1}{A}\right),$$

где сумма берется по всем перестановкам σ набора индексов $1, \ldots, k$, а операция γ^k задана формулой

$$(\gamma^k f)(\xi, \ldots, \eta, \zeta) = \\ = \int_0^1 d\tau_0 \int_0^{1-\tau_0} d\tau_1 \ldots \int_0^{1-\tau_0-\ldots-\tau_{k-2}} d\tau_{k-1} f(\xi\tau_0 + \ldots + \eta\tau_{k-1} + \\ + \zeta(1 - \tau_0 - \ldots - \tau_{k-1})).$$

В случае, если полный набор операторов $L_1, \ldots, L_k, A^1, \ldots, A^k$ вейлевский, то приведенное выше определение превращается в тождественное равенство.

Полибанаховы алгебры. Помимо исходных алгебр символов S^∞ и операторов $\mathscr{L}\{B_\mu\}$ ниже придется рассматривать алгебры $\mathscr{L}S^\infty$, $\mathscr{L}(\mathscr{L}\{B_\mu\})$ всех непрерывных операторов на исходных алгебрах. Для их единообразного описания и построения операторного исчисления удобно ввести общее понятие полибанаховой алгебры.

Пусть I — частично упорядоченное и направленное в обе стороны непустое множество, т. е. если $i, j \in \mathrm{I}$, то $\exists k, l \in \mathrm{I}$: $i < k$, $j < k$ и $l < i$, $l < j$.

Добавим к числовой полуоси бесконечно удаленную точку: $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство. Назовем его *полинормированным*, если задано отображение (полинорма) $\mathfrak{X} \times \mathrm{I} \to \overline{\mathbf{R}}_+$, которое обозначается $(x, i) \to \|x\|_i$ и обладает следующими свойствами:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \|cx\|_i = |c| \cdot \|x\|_i \quad \forall c \in \mathbf{C}, \\
\text{(b)} & \|x+y\|_i \leqslant \|x\|_i + \|y\|_i, \\
\text{(c)} & \|0\|_i = 0, \\
\text{(d)} & \|x\|_j \leqslant \|x\|_i, \quad \text{если} \quad j < i, \\
\text{(e)} & \forall x \exists i\colon\ \|x\|_i < \infty.
\end{array}
\tag{1.8}
$$

Множество $\mathrm{I}(x)$ тех индексов i, для которых $\|x\|_i < \infty$, назовем *множеством конечности*. Всевозможные пересечения множеств конечности образуют базис фильтра сечений в смысле [16]. Этот фильтр обозначим Λ_0. Пусть Λ — мажорирующий его фильтр сечений, т. е. $\Lambda \supset \Lambda_0$. Введем в $\mathfrak{X}$ сходимость, порожденную фильтром Λ: направленность $\{x_\alpha\}$ сходится к нулю, если существует $\sigma \in \Lambda$ такое, что, начиная с некоторого α_0, полинормы $\|x_\alpha\|_i$ при каждом $i \in \sigma$ конечны и сходятся к нулю. Эта сходимость согласована с линейными операциями. Пространство $\mathfrak{X}$, наделенное такой сходимостью, назовем *полинормированным над фильтром* Λ.

Подробно свойства полинормированных пространств изложены в [35, 58].

Алгебру M назовем *полибанаховой*, если она снабжена полинормой над некоторым фильтром Λ, отделима, полна и операция умножения в ней непрерывна.

Примеры полибанаховых алгебр:

— пополнение алгебры $\mathscr{L}\{B_\mu\}$ всех непрерывных вправо операторов в банаховой шкале;

— алгебра $\mathscr{L}(\mathfrak{X})$ всех непрерывных линейных операторов на полном отделимом полинормированном пространстве $\mathfrak{X}$;

— алгебра $S^\infty(\mathbf{R}^d)$ (относительно обычного умножения функций).

Отметим, что последняя полибанахова алгебра заведомо не является топологическим пространством, а первые две являются топологическими пространствами лишь в тривиальном случае, когда шкала $\{B_\mu\}$ сводится к одному банахову пространству или $\mathfrak{X}$ — банахово пространство. Выход из категории топологических пространств неизбежен при последовательном построении исчисления неограниченных операторов.

Если M — полибанахова алгебра, то производящие элементы в ней и вейлевские наборы элементов определяются так же, как в частном случае алгебры $\mathscr{L}\{B_\mu\}$. Функции от этих элементов определяются по формулам (1.1)—(1.3).

1.2. Формулы дифференцирования и выпутывания. В некоммутативном анализе роль обычных производных играют разностные отношения. Мы называем их разностными производными.

Пусть f — гладкая функция одной переменной. Через δf обозначим *разностную производную*:

$$(\delta f)(\xi, \zeta) = \frac{f(\xi)-f(\zeta)}{\xi-\zeta} \equiv \int_0^1 f'(\tau\xi+(1-\tau)\zeta)\,d\tau,$$

а через $\delta^N f$ — ее N-кратную итерацию: $\delta^N f = \delta(\delta^{N-1} f)$, или

$$(\delta^N f)(\xi^1, \ldots, \xi^{N+1}) = \sum_{j=1}^{N+1} \prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{N+1} \frac{f(\xi^j)}{\xi^j-\xi^i} =$$

$$= \int_0^1 d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{N-1}} d\tau_N f^{(N)}(\xi^{N+1}\tau_N + \xi^N(\tau_{N-1}-\tau_N)+\ldots$$
$$\ldots + \xi^2(\tau_1-\tau_2)+\xi^1(1-\tau_1)).$$

Если $f\in S^\infty(\mathbf{R})$, то $\delta^N f\in S^\infty(\mathbf{R}^{N+1})$.

Отметим, что разностная производная не меняется при перестановке своих аргументов, а на диагонали совпадает с обычной производной

$$\delta^N f(\xi, \ldots, \xi) = \frac{1}{N!} f^{(N)}(\xi).$$

Кроме того, справедливы *тождество Лейбница*:

$$\delta^N(fg)(\xi^1, \ldots, \xi^{N+1}) = \sum_{j=0}^{N} \delta^{N-j} f(\xi^1, \ldots, \xi^{N-j+1})\,\delta^j g(\xi^{N-j+1}, \ldots, \xi^{N+1}),$$

тождество Тейлора:

$$f(\xi+\eta) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\eta^j}{j!} f^{(j)}(\xi) + \eta^N \delta^N f(\xi+\eta, \xi, \ldots, \xi);\quad \xi, \eta\in\mathbf{R},$$

и *тождество Ньютона*:

$$f(\xi^0) = \sum_{j=0}^{N-1} (\xi^0-\xi^1)\ldots(\xi^0-\xi^j)\,\delta^j f(\xi^1, \ldots, \xi^{j+1}) +$$
$$+(\xi^0-\xi^1)\ldots(\xi^0-\xi^N)\,\delta^N f(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^N).$$

Все эти тождества служат базой для дальнейших формул, в которых скалярные переменные будут заменены некоммутирующими операторами.

Не оговаривая это особо, будем везде ниже под исчислением функций от некоммутирующих операторов понимать одну из двух конструкций п. 1.1. Все символы берутся из класса S^∞.

Теорема 1.1. *Пусть A и B два оператора. Тогда*

$$f(A+B)-f(A) = \overset{2}{B}\delta f\left(\overset{3}{\overline{A+B}}, \overset{1}{A}\right) \equiv \overset{2}{B}\delta f\left(\overset{1}{\overline{A+B}}, \overset{3}{A}\right) \quad (1.9)$$

Кроме того, если $A(t)$ — гладкое семейство операторов, то

$$\frac{d}{dt} f(A(t)) = \frac{d\overset{2}{A}(t)}{dt} \delta f\left(\overset{1}{A}(t), \overset{3}{A}(t)\right). \qquad (1.10)$$

Доказательство очень простое [96]:

$$f(A+B) - f(A) =$$
$$= f\left(\overline{\overset{3}{A+B}}\right) - f\left(\overset{1}{A}\right) = \left(\overline{\overset{3}{A+B}} - \overset{1}{A}\right) \delta f\left(\overline{\overset{3}{A+B}}, \overset{1}{A}\right) =$$
$$= \left[A \overset{2}{+} B - \overset{1}{A}\right] \delta f\left(\overline{\overset{3}{A+B}}, \overset{0}{A}\right).$$

Множитель в квадратных скобках равен $\overline{\overset{2}{A+B}} - \overset{1}{A} = \overset{2}{B}$; отсюда и следует (1.9). Рассматривая теперь разность $\frac{1}{\Delta t}[f(A(t+\Delta t)) - f(A(t))]$, применяя к ней (1.9) и переходя к пределу $\Delta t \to 0$ получим (1.10).

Формула дифференцирования (1.10) имеет богатую историю; см., например, работы [39, 172]. Основные усилия всегда, конечно, направлены на максимальное расширение класса допустимых символов f и операторов $A(t)$; см. [96].

Приведем аналог формулы дифференцирования для случая вейлевского исчисления, причем сразу для функций от многих переменных [33, 57]:

$$\frac{d}{dt} g\left(\overset{\omega}{A^1}(t), \ldots, \overset{\omega}{A^k}(t)\right) = \frac{d\overset{\omega}{A^j}}{dt} \partial_j g\left(\overset{\omega}{A^1}, \ldots, \overset{\omega}{A^k}\right).$$

По повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование. Вейлевское исчисление удобно именно тем, что в формулы дифференцирования и коммутации (см. (1.21)) входят обычные производные символа, а не разностные, как в (1.10) или (1.14).

Пример 1.2. *Производная следа.* Пусть $A(t)$ — эрмитова матрица, гладко зависящая от параметра t. Тогда в силу (1.10)

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}[f(A(t))] = \operatorname{tr}\left[\frac{d\overset{2}{A}}{dt} \delta f\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{tr}\left[\frac{d\overset{2}{A}}{dt} \delta f\left(\overset{1}{A}, \overset{1}{A}\right)\right] = \operatorname{tr}\left[\frac{dA}{dt} f'(A)\right].$$

Здесь использована инвариантность следа tr относительно циклических перестановок.

Пример 1.3. *Производная логарифма.* Пусть $U(t)$ — гладкое семейство обратимых операторов. Тогда в силу (1.10)

$$\frac{d}{dt} \ln U(t) = \frac{d\overset{2}{U}}{dt} \frac{\ln \overset{3}{U} - \ln \overset{1}{U}}{\overset{3}{U} - \overset{1}{U}} =$$
$$= \frac{d\overset{2}{U}}{dt} \overset{1}{U}{}^{-1} \left(\overset{3}{U}\overset{1}{U}{}^{-1} - 1\right)^{-1} \ln\left(\overset{3}{U}\overset{1}{U}{}^{-1}\right) = \overset{2}{V} \Omega\left(\overset{3}{U}\overset{1}{U}{}^{-1}\right), \qquad (1.11)$$

где $\Omega(\xi) \equiv \ln \xi/(\xi - 1)$, $V = \frac{dU}{dt} U^{-1}$. Разумеется, наше вычисление формально, поскольку функция ln не лежит в классе S^∞. Но ему можно придать строгий смысл. Условия, при которых имеет место формула (1.11), например, такие [58]: $U(t)$ — дифференцируемое семейство элементов банаховой алгебры, причем при всех t точка 0 принадлежит неограниченной компоненте связности подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus (\Sigma(t)\Sigma(t)^{-1} \cap \Sigma(t))$, где $\Sigma(t)$ — спектр $\mathrm{Sp}(U(t))$, $\Sigma\Sigma^{-1} = \{\lambda_1\lambda_2^{-1} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma\}$.

В случае, если $U(t)$ — матрица, то после взятия следа получим из (1.11) $\frac{d}{dt} \operatorname{tr} \ln U \equiv \frac{d}{dt} \ln \det U = \operatorname{tr} V$, так как $\Omega(1) = 1$. Таким образом, приходим к известному тождеству

$$\frac{d}{dt} \det U = \det U \operatorname{tr} \left[\frac{dU}{dt} U^{-1}\right].$$

Вернемся теперь к формуле (1.9). Продолжить ее и получить разложение $f(A+B)$ по степеням приращения B можно разными способами. Например, так [54]:

$$f(A+B) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(A) D_k + \overset{2}{D}_N \delta^N f\left(\overset{1}{\overline{A+B}}, \overset{3}{A}, \ldots, \overset{3}{A}\right),$$

где

$$D_k = \left(\overset{1}{\overline{A+B}} - \overset{3}{A}\right)^k = \left(\overset{1}{\overline{A+B}} - \overset{3}{A}\right) \overset{2}{D}_{k-1} =$$
$$= D_{k-1}\overset{1}{B} - \left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right) \overset{2}{D}_{k-1} = (R_B - \mathrm{ad}_A) D_{k-1} = (R_B - \mathrm{ad}_A)^{k-1} B.$$

Через R_B здесь обозначен оператор умножения справа на B, а через ad_A оператор коммутирования с A слева. Этот некоммутативный ряд Тейлора эффективен, например, в случае, если B мало и любой коммутатор порядка r, составленный из операторов A и B, имеет величину $O(B^{r+1})$; в этом случае $D_k = O(B^k)$.

Справедлива также следующая теорема [53, 204].

Теорема 1.2. *Пусть равен нулю коммутатор порядка $r+1$:*

$$[\ldots[B, \underbrace{A], \ldots, A}_{r+1}] = 0.$$

Тогда

$$f(A+\varepsilon B) =$$
$$= f(A) + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^k \sum_{\beta_1 \ldots \beta_k = 0}^{r} \frac{f^{(k+|\beta|)}(A)}{\beta!\,(\beta_1+1)(\beta_1+\beta_2+2)\ldots(\beta_1+\ldots+\beta_k+k)} \times$$
$$\times [\ldots[B, \underbrace{A], \ldots, A}_{\beta_k}] \cdot \ldots \cdot [\ldots[B, \underbrace{A], \ldots, A}_{\beta_1}] + O(\varepsilon^N).$$

Остаток $O(\varepsilon^N)$, конечно, можно выписать явно.

Другой вариант обобщения формулы (1.9) — многократное применение ее самой к себе [96]:

$$f(A+B)=f(A)+\sum_{k=1}^{N-1}\overset{2}{B}\ldots\overset{2k}{B}\delta^k f\left(\overset{1}{A},\ldots,\overset{2k+1}{A}\right)+$$
$$+\overset{2}{B}\ldots\overset{2N}{B}\delta^N f\left(\overset{1}{A},\ldots,\overset{2N-1}{A},\overset{2N+1}{\overline{A+B}}\right). \quad (1.9a)$$

Если оператор B является малым возмущением по отношению к A, то этот ряд дает процедуру приближенного вычисления функции $f(A+B)$.

Пример 1.4. *Ряд для экспоненты.* Классическим и, пожалуй, самым старым вариантом формулы (1.9а) является разложение

$$e^{it(A+B)}=e^{itA}+\sum_{k=1}^{N}R_k(t)+i\int_0^t e^{i(t-\tau)(A+B)}BR_N(\tau)\,d\tau,$$

в котором

$$R_k(t)=i^k\int_0^t d\tau_k\int_0^{\tau_k}d\tau_{k-1}\ldots\int_0^{\tau_2}d\tau_1 e^{i(t-\tau_k)A}Be^{i(\tau_k-\tau_{k-1})A}B\ldots$$
$$\ldots e^{i(\tau_2-\tau_1)A}Be^{i\tau_1 A}.$$

Пример 1.5. *Суммирование ряда Кэмпбелла — Хаусдорфа.* Хорошо известно, что произведение экспонент $e^{iA}e^{iB}$ формально может быть представлено в виде экспоненты e^{iC}, в показателе которой стоит линейная комбинация операторов A, B и их всевозможных коммутаторов:

$$C=A+B+\frac{1}{2}[A,\ B]+\frac{1}{12}([A\ [A,\ B]]+[[A,\ B],\ B])+\ldots$$

Этот формальный ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа обычно выводится с помощью весьма громоздкой процедуры; см., например, [122]. Применение операторного исчисления резко упрощает дело [73].

Заметим, что $C=\frac{1}{i}\int_0^1\frac{d}{dt}\ln(e^{itA}e^{iB})+B$. По формуле (1.11) для семейства операторов $U(t)=e^{itA}e^{iB}$ получим

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\ln U=\overset{2}{A}\,\Omega\left(\overset{3}{U}\overset{1}{U}{}^{-1}\right)=\Omega\left(e^{it\,\mathrm{ad}_A}e^{i\,\mathrm{ad}_B}\right)(A).$$

Здесь использованы тождества

$$\overset{2}{A}\,\Omega\left(\overset{3}{U}\overset{1}{U}{}^{-1}\right)=\Omega(L_U R_U^{-1})(A),\quad L_U R_U^{-1}=e^{it\,\mathrm{ad}_A}e^{i\,\mathrm{ad}_B}$$

и через ad_A, L_U, R_U обозначены операции коммутирования и умножения:

$$\mathrm{ad}_A(T)\equiv[A,\ T],\quad L_U(T)\equiv U\cdot T,\quad R_U(T)\equiv T\cdot U,$$

T — элемент исходной алгебры операторов. Таким образом, окончательно находим $e^{iA}e^{iB}=e^{iC}$, где

$$C=\int_0^1 \Omega\left(e^{it\,\mathrm{ad}_A}\,e^{i\,\mathrm{ad}_B}\right)(A)\,dt+B,\quad \Omega(\xi)\equiv\frac{\ln\xi}{\xi-1}. \tag{1.12}$$

Близкая к этой формула была получена в [176].

Если разложить в (1.12) экспоненты в формальные ряды и разложить функцию Ω в степенной ряд в окрестности точки $\xi=1$, то мы придем к аналогу известного ряда Кэмпбелла — Хаусдорфа:

$$C=A+B+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{\substack{l_1+k_1\geqslant 1\\ \cdots\cdots\\ l_n+k_n\geqslant 1}}\frac{(\mathrm{ad}_B)^{l_n}(\mathrm{ad}_A)^{k_n}\ldots(\mathrm{ad}_B)^{l_1}(\mathrm{ad}_A)^{k_1}(B)}{l!k!\,(|l|+1)}, \tag{1.13}$$

где $l!=l_1!\ldots l_n!$, $|l|=l_1+\ldots+l_n$.

Собственно сам ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа в форме [122] получается при некоторой модификации (1.12):

$$C=\int_0^1 \Omega\left(e^{it\,\mathrm{ad}_A}\,e^{it\,\mathrm{ad}_B}\right)\left(A+e^{it\,\mathrm{ad}_A}(B)\right)dt.$$

Отсюда разложением, аналогичным (1.13), найдем еще одну формулу для оператора C в виде ряда по степеням коммутаторов A и B. Таких формул бесконечно много, и все они в некотором смысле могут быть перечислены (см. [58]). Существуют также обобщения указанных формул на случай произведения не двух, а любого числа экспонент. Ниже мы приведем результат сразу для случая континуального семейства экспонент.

Пример 1.6. *Мультипликативные интегралы и формула выпутывания.*

Пусть $A(t)$ — семейство элементов банаховой алгебры (например, семейство ограниченных операторов), причем оно непрерывно зависит от параметра $t\in\mathbf{R}$. Определим семейство операторов $U(t)$ как решение задачи Коши

$$\frac{dU}{dt}=A(t)\,U,\quad U|_{t=0}=I.$$

Это решение называется *мультипликативным интегралом* или t-экспонентой и обозначается

$$U(t)=\mathrm{Exp}\int_0^t A\equiv\prod_{\overleftarrow{\tau=0}}^{t}e^{A(\tau)\,d\tau}.$$

Приведем ряд простейших формул, связанных с такими мультипликативными интегралами:

$$\text{(I)}\ \left\| \operatorname{Exp}\int_0^t A \right\| \leqslant e^{\int_0^t \|A(\tau)\|\,d\tau};$$

$$\text{(II)}\ \operatorname{Exp}\int_0^t A = I + \int_0^t A(\tau)\,d\tau + \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2\, A(\tau_1)\, A(\tau_2) + \ldots;$$

$$\text{(III)}\ \text{если } [A(\tau'),\ A(\tau'')] = 0 \quad \forall \tau',\ \tau'', \text{ то } \operatorname{Exp}\int_0^t A = e^{\int_0^t A(\tau)\,d\tau};$$

$$\text{(IV)}\ \left(\operatorname{Exp}\int_0^t A\right)\cdot B \cdot \left(\operatorname{Exp}\int_0^t A\right)^{-1} = \left(\operatorname{Exp}\int_0^t \mathrm{ad}_A\right)(B).$$

Важным и часто используемым тождеством является так называемая *формула выпутывания* (терминология Фейнмана [137], предложившего глубокие обобщения этой формулы):

$$\operatorname{Exp}\int_0^t (A+B) = \left(\operatorname{Exp}\int_0^t A\right)\left(\operatorname{Exp}\int_0^t \tilde{B}\right),$$

где

$$\tilde{B}(t) = \left(\operatorname{Exp}\int_0^t A\right)^{-1} \cdot B(t) \cdot \left(\operatorname{Exp}\int_0^t A\right).$$

Важный частный случай:

$$e^{t(a+b)} = e^{ta} \cdot \operatorname{Exp}\int_0^t B, \quad B(t) = e^{-t\,\mathrm{ad}_a}(b).$$

Рассмотрим теперь задачу о представлении мультипликативного интеграла в виде экспоненты:

$$\operatorname{Exp}\int_0^t (iA) = e^{iC(t)}, \quad \text{или} \quad C(t) = \frac{1}{i} \ln \operatorname{Exp}\int_0^t iA.$$

В частности, если семейство $A(t)$ кусочно-постоянно, то мультипликативный интеграл $\operatorname{Exp}\int_0^t A$ превращается в произведение конечного числа экспонент; тогда оператор C — это логарифм такого произведения.

Формулу для $C(t)$ получим по той же схеме, что и (1.12):

$$C(t) = \int_0^t \Omega\left(\operatorname{Exp}\int_0^\tau i\,\mathrm{ad}_A\right) A(\tau)\,d\tau.$$

Условие применимости этой формулы, например, такое:

$$r(t) \equiv e^{\int_0^t \|\mathrm{ad}_{A(\tau)}\| d\tau} < 2.$$

В этом случае [73]

$$\|C(t)\| \leqslant \frac{1}{r(t)-1}\left(\ln \frac{1}{2-r(t)}\right) \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau.$$

1.3. Перестановка операторов. Формула коммутации с экспонентой. Наряду с формулами теории возмущений фундаментальную роль в некоммутативном анализе играет комбинаторика, т. е. изменение порядка действия, перестановки операторов.

Пусть A, B, C — три оператора. По определению $[A, B] = AB - BA$ *коммутатор* A *и* B; $[A, B | C] = AB - CA$ *квазикоммутатор* A *с парой* (B, C).

Теорема 1.3. *Имеют место формулы коммутации* [96]

$$\begin{gathered}[A, f(B)] = [A, \overset{2}{B}]\, \delta f\left(\overset{1}{B}, \overset{2}{B}\right), \\ [g(A), f(B)] = [A, \overset{3}{B}]\, \delta g\left(\overset{2}{A}, \overset{4}{A}\right) \delta f\left(\overset{1}{B}, \overset{5}{B}\right);\end{gathered} \tag{1.14}$$

$$g\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}\right) - g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) = [A, \overset{3}{B}] \frac{\delta^2 g}{\delta\xi_1 \delta\xi_2}\left(\overset{2}{A}, \overset{4}{A}; \overset{1}{B}, \overset{5}{B}\right) \tag{1.15}$$

и квазикоммутации [58, 100]

$$[A, f(B) | f(C)] = [A, \overset{2}{B} | C]\, \delta f\left(\overset{1}{B}, \overset{3}{C}\right). \tag{1.16}$$

Доказательства всех этих тождеств однотипны. Например, рассмотрим последнее:

$$\begin{aligned}[A, f(B) | f(C)] &= \overset{2}{A}\left(f\left(\overset{1}{B}\right) - f\left(\overset{3}{C}\right)\right) = \overset{2}{A}\left(\overset{1}{B} - \overset{3}{C}\right) \delta f\left(\overset{1}{B}, \overset{3}{C}\right) = \\ &= \left[\overset{2}{A}\left(\overset{1}{B} - \overset{3}{C}\right)\right] \delta f\left(\overset{0}{B}, \overset{4}{C}\right) = [A, \overset{2}{B} | C]\, \delta f\left(\overset{0}{B}, \overset{4}{C}\right).\end{aligned}$$

Здесь использовано тождество $\overset{2}{A}\left(\overset{1}{B} - \overset{3}{C}\right) = [A, B | C]$.

Многократная итерация (1.14) и (1.16) приводит к следующим разложениям:

$$\begin{aligned}&[B, f(A)] = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(A) [\ldots [B, A] \underbrace{, \ldots, A}_{n}] + [\ldots [\overset{2}{B}, A] \underbrace{, \ldots, A}_{N}] \times \\ &\qquad \times \delta^N f\left(\overset{3}{A}, \ldots, \overset{3}{A}, \overset{1}{A}\right),\end{aligned}$$

$$[B,\ f(A)\,|\,f(C)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(C)\,[\ldots[B,\ A\,|\,\underbrace{C],\ \ldots,\ A\,|\,C}_{n}]+$$

$$+[\ldots[B,\ \overset{2}{A}\,|\,\underbrace{C],\ \ldots,\ A\,|\,C}_{N}]\,\delta^N f\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{C},\ \ldots,\ \overset{3}{C}\right).$$

Пример 1.7. *Преобразование подобия.* Пусть U — обратимый оператор. Тогда

$$Uf(A)\,U^{-1} = f(UAU^{-1}). \tag{1.17}$$

Действительно, обозначим $C = UAU^{-1}$. Тогда $[U,\ A\,|\,C] = 0$ и в силу формулы (1.16) $[U,\ f(A)\,|\,f(C)] = 0$.

Пример 1.8. *Коммутация с экспонентой*

$$[A,\ [A,\ B]] = 0 \Rightarrow f(B)\,e^{iA} = e^{iA} f(B + i\,[B,\ A]). \tag{1.18}$$

Действительно, формула (1.14) дает

$$[B,\ e^{iA}] = ie^{iA}[B,\ A] \quad \text{или} \quad [e^{iA},\ (B + i\,[B,\ A])\,|\,B] = 0.$$

Отсюда по формуле квазикоммутации (1.16) получаем искомое

$$[e^{iA},\ f(B + i\,[B,\ A])\,|\,f(B)] = 0.$$

Прямым обобщением тождества (1.18) является следующее утверждение [57].

Теорема 1.4. *Пусть* $S \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{Im} S = 0$. *Тогда, если* $[A,\ [A,\ B]] = 0$, *то*

$$f(B)e^{iS(A)} = e^{iS(A)} f\left(\overset{2}{B} + i\,[\overset{2}{B},\ A]\,\delta S\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A}\right)\right). \tag{1.19}$$

Например, пусть $A = x$, $B = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ — операторы умножения на независимую переменную и дифференцирования в шкале $\{H_k^l(\mathbf{R})\}$ (см. пример 1.1), $\hbar \to 0$ — малый параметр. Тогда в силу (1.19)

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S(q)} \cdot f\left(-i\hbar\frac{d}{dq}\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S(q)} = f\left(-i\hbar\frac{\overset{2}{d}}{dq} + \delta S\left(\overset{1}{q},\ \overset{3}{q}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-i\hbar)^k}{k!}\left(\frac{\overset{2}{d}}{dq}\right)^k \cdot f^{(k)}\left(\delta S\left(\overset{1}{q},\ \overset{3}{q}\right)\right) + (-i\hbar)^N R_N =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-i\hbar)^k \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!\,(k-l)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-l} f^{(k)}(\delta S(x,\ q))\right]\Bigg|_{x=q}\left(\frac{d}{dq}\right)^l +$$

$$+ (-i\hbar)^N R_N,$$

где остаток R_N имеет вид

$$R_N = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{\overset{2}{d}}{dq}\right)^N f^{(N)}\left(-i\tau\hbar\frac{\overset{2}{d}}{dq} + \delta S\left(\overset{1}{q},\ \overset{3}{q}\right)\right)d\tau.$$

Полученное разложение по степеням параметра $\hbar$ лежит в основе теории коротковолнового приближения. Как мы видим, операторная техника позволяет получить это разложение элементарно и чисто алгебраически, минуя обычное использование метода стационарной фазы [97, 102].

Другой путь: заметить, что в силу (1.18)

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S(q)} f\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) e^{\frac{i}{\hbar}S(q)} = f\left(-i\hbar\frac{d}{dq}+S'(q)\right),$$

и далее для разложения по степеням $\hbar$ применить формулу (1.9а) (см. [96]) или теорему 1.2 (см. [53]).

Конечно, полученные разложения справедливы и в многомерном случае. Рассмотрим наборы операторов $q=(q_1, \ldots, q_m)$ и $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}=\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_m}\right)$ в шкале $\{H_k^l(\mathbf{R}^m)\}$. Пусть $g\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. Построим операторы, непрерывные в шкале:

$$g\left(\overset{2}{q}, -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}\right), \quad g\left(\overset{1}{q}, -i\hbar\overset{2}{\frac{\partial}{\partial q}}\right), \quad g\left(\overset{\omega}{q}, -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right).$$

Последний оператор вейлевский. Будем называть их *псевдодифференциальными* (точнее, *$\hbar$-псевдодифференциальными*) *операторами* [97, 147, 184, 192, 261].

Важное тождество:

$$g\left(\overset{\omega}{q}, -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)=g\left(\frac{\overset{1}{q}+\overset{3}{q}}{2}, -i\hbar\overset{2}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)=g\left(\overset{2}{q}, \frac{-i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}-i\hbar\overset{3}{\frac{\partial}{\partial q}}}{2}\right).$$

Приведем явно первые члены разложения формулы коммутации с экспонентой:

— для упорядоченного случая

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S} g\left(\overset{2}{q}, -i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}\right) e^{\frac{i}{\hbar}S} = g\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)+ \\ +(-i\hbar)\left[\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\partial^2 S(q)\,\partial^2_{pp}g\right)\right]+O(\hbar^2).$$

(Здесь у производных функции g опущены аргументы q и $p=\partial S/\partial q$.)

— для вейлевского случая

$$e^{-\frac{i}{\hbar}S} g\left(\overset{\omega}{q}, -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right) e^{\frac{i}{\hbar}S} = g\left(\overset{\omega}{q}, \overset{\omega}{\frac{\partial S}{\partial q}}-i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)= \\ = g\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)+(-i\hbar)\frac{\partial g}{\partial p}\left(\overset{\omega}{q}, \overset{\omega}{\frac{\partial S}{\partial q}}(q)\right)\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}+ \\ +\frac{1}{2}(-i\hbar)^2\partial^2_{pp}g\left(\overset{\omega}{q}, \overset{\omega}{\frac{\partial S}{\partial q}}(q)\right)\left(\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)\left(\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)+\ldots= \\ = g\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)+(-i\hbar)\left[\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)\right)\right]+O(\hbar^2).$$

Пример 1.9. *Абстрактная формула дифференцирования.* Пусть M — некоторая алгебра. Ее дифференцированием называется любой линейный оператор $\mathbf{D}\colon M \to M$, удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$\mathbf{D}(AB) = A\mathbf{D}(B) + \mathbf{D}(A)B \quad \forall\ A,\ B \in M.$$

Теорема 1.5. *Пусть $\mathbf{D}$ — непрерывное дифференцирование полибанаховой алгебры M (например, алгебры $M = \mathscr{L}\{B_\mu\}$ непрерывных операторов в банаховой шкале). Пусть A — производящий элемент в M и $f \in S^\infty(\mathbf{R})$. Тогда*

$$\mathbf{D}(f(A)) = \mathbf{D}\left(\overset{2}{A}\right)\delta f\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A}\right). \tag{1.20}$$

Доказательство [54]. Пусть L_A — оператор умножения на A слева. Он производящий в полибанаховой алгебре $\mathscr{L}(M)$ и $f(L_A) = L_{f(A)}$. По формуле коммутации (1.1)

$$\mathbf{D}f(L_A) - f(L_A)\mathbf{D} = [\mathbf{D},\overset{2}{\ } L_A]\,\delta f\left(\overset{1}{L}_A,\ \overset{3}{L}_A\right).$$

Применяя левую часть к единице $\mathbb{1}$ алгебры M и учитывая, что в силу тождества Лейбница $\mathbf{D}(\mathbb{1}) = 0$, получаем элемент $\mathbf{D}(f(L_A)\mathbb{1}) = \mathbf{D}(f(A))$. А применяя к $\mathbb{1}$ правую часть и учитывая, что $[\mathbf{D},\ L_A] = L_{\mathbf{D}(A)}$, получаем элемент

$$\overset{2}{L}_{\mathbf{D}(A)}\,\delta f\left(\overset{1}{L}_A,\ \overset{3}{L}_A\right)(\mathbb{1}) = L_{\overset{2}{\mathbf{D}}(A)\,\delta f\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A}\right)}(\mathbb{1}) = \overset{2}{\mathbf{D}}(A)\,\delta f\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A}\right).$$

Вариантами формулы (1.20) являются полученные выше формулы (1.10) и (1.14).

Формулы теоремы 1.3 имеют свои аналоги и для вейлевских функций, причем здесь они могут быть записаны достаточно компактно сразу для функций от многих переменных.

Ниже $A = (A^1, \ldots, A^n)$ — вейлевский набор операторов. Как и в п. 1.1, применяется обозначение $f(A) = f\left(\overset{\omega}{A^1}, \ldots, \overset{\omega}{A^n}\right)$. Частные производные символов $f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ обозначаются так: $\partial_j f \equiv \partial f/\partial \xi^j$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Теорема 1.6. *Имеют место:*

— формула коммутации

$$[B,\ f(A)] = [\overset{\omega}{B},\ A^j]\,\partial_j f\left(\overset{\omega}{A}\right); \tag{1.21}$$

— формула согласования с упорядоченным исчислением

$$\overset{\omega}{B}f\left(\overset{\omega}{A}\right) = \int_0^1 \overset{2}{B} f\left(\overset{1}{A}\tau + \overset{3}{A}(1-\tau)\right)d\tau; \tag{1.22}$$

— формула композиции

$$f(A)\cdot g(A) = (fg)(A) +$$
$$+ \int_0^1 \mu\, d\mu\, [A^i,\overset{2}{\ } A^j]\,\partial_i f\left(\mu\overset{2}{A} + (1-\mu)\overset{3}{A}\right)\partial_j g\left(\mu\overset{2}{A} + (1-\mu)\overset{1}{A}\right); \tag{1.23}$$

— *формула подстановки*

$$\overline{g(A)}^{\omega} f\left(\overset{\omega}{A}\right)=(fg)(A)+$$

$$+\int_0^1 \mu\,d\mu \int_0^1 \nu\,d\nu\,[A^i, \overset{2}{A^j}]\,\partial_i f\left((1-\mu)\overset{4}{A}+\mu\nu\overset{2}{A}+\mu(1-\nu)\overset{1}{A}\right)\times$$

$$\times\left(\partial_j g\left(\nu\overset{2}{A}+(1-\nu)\overset{1}{A}\right)-\partial_j g\left(\nu\overset{2}{A}+(1-\nu)\overset{3}{A}\right)\right). \quad (1.24)$$

Доказательство приведено в [57]. Обобщением формулы (1.22) является использованное уже выше равенство (1.8).

Пример 1.10. *Вейлевское исчисление и алгебры Ли*. Предположим, что операторы $A^1, \ldots, A^n$ удовлетворяют соотношениям

$$[A^j, A^k]=i\lambda_s^{kj}A^s, \quad (1.25)$$

где λ_s^{kj} — структурные константы алгебры Ли, т. е. вещественные числа такие, что $\lambda_s^{kj}=-\lambda_s^{jk}$ и

$$\lambda_m^{ls}\lambda_s^{kj}+\lambda_m^{js}\lambda_s^{lk}+\lambda_m^{ks}\lambda_s^{jl}=0. \quad (1.26)$$

Применим к вейлевской функции от образующих $A^1, \ldots, A^n$ формулу коммутации (1.21):

$$[A^k, f(A)]=D^{(k)}f(A),\quad D^{(k)}\equiv i\xi^s\lambda_s^{jk}\frac{\partial}{\partial\xi^k}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если символ f аннулируется всеми операторами $D^{(k)}$, то оператор $f(A)$ коммутирует со всеми образующими A^k. Он называется *оператором Казимира* алгебры Ли (1.25). Локальную разрешимость системы уравнений $D^{(1)}f=\ldots$ $\ldots=D^{(n)}f=0$ обеспечивает тождество Якоби (1.26). (Глобальных решений, отличных от константы, может и не быть, как в диких алгебрах Ли [78].)

Рассмотрим теперь формулу композиции (1.23). Для любого оператора B имеем

$$Bf(A)=\overset{\omega}{B}f\left(\overset{\omega}{A}\right)+[B, \overset{2}{A^j}]\,\nabla_j f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}\right), \quad (1.27)$$

где

$$\nabla_j f(\xi, \eta)=\int_0^1 \partial_j f(\tau\eta+(1-\tau)\xi)\,\tau\,d\tau.$$

Продолжая в правой части (1.27) переход к вейлевской расстановке операторов по формуле (1.23), получаем [57]

$$B\cdot f(A)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{b_m}{m!}[A^{j_1}\ldots[A^{j_m}, \overset{\omega}{B}]\ldots]\,\partial_{j_1}\ldots\partial_{j_m}f\left(\overset{\omega}{A}\right)+$$

$$+[A^{j_1}\ldots[A^{j_N}, \overset{2}{B}]\ldots]\,F_N(\partial_{j_1}\ldots\partial_{j_N}f)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}\right),$$

где b_m — числа Бернулли, а F_N — некоторое линейное непрерывное отображение $S^\infty(\mathbf{R}^n)\to S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. В частности, для операторов, удовлетворяющих соотношениям (1.25), и для полиномиальных символов f это разложение дает известную формулу композиции в ассоциативной оболочке алгебры Ли [78]:

$$A^k f(A) = (L^k f)(A), \quad L^k \equiv l^k\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial\xi}}, \overset{2}{\xi}\right), \quad k=1, \ldots, n, \quad (1.28)$$

где

$$l(x, \xi) = \mathcal{R}(x)^* \xi, \quad \mathcal{R}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!}\Lambda(x)^m = \left(\frac{e^{\Lambda(x)}-I}{\Lambda(x)}\right)^{-1},$$

$$\Lambda(x) = ((\Lambda_s^k))_{s,k=1\ldots n}, \quad \Lambda_s^k \equiv x_j\lambda_s^{jk}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Лемма 1.3. *Операторы* $L^1, \ldots, L^n$ *удовлетворяют соотношениям* (1.25).

По терминологии теории алгебр Ли $\Lambda(x)$ — это матрицы присоединенного представления и $\mathcal{R}(x)$ — матрицы правых сдвигов в координатах первого рода; см. [17, 78]. Матрицы $\mathcal{R}(x)$ определены в достаточно малой окрестности точки $x=0$ (пока спектр матрицы $\Lambda(x)$ лежит внутри круга радиуса 2π). Поэтому формула (1.28) может нарушаться для тех (неполиномиальных) функций, у которых спектр Фурье выходит из этой окрестности нуля. Например, композиция $A^k e^{ixA}$ при $x \in \mathbf{R}^n$ и достаточно большом $|x|$ может быть уже не представима в виде вейлевской функции от образующих $A^1, \ldots, A^n$.

Выход из этого положения в некоторых случаях дает отказ от изучения вейлевских функций и переход к упорядоченным функциям $f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right)$.

В силу тождеств

$$-i\frac{\partial}{\partial x_j}\left[e^{ix_nA^n}\ldots e^{ix_1A^n}\right] = e^{ix_nA^n}\ldots e^{ix_jA^j}A^j e^{ix_{j-1}A^{j-1}}\ldots e^{ix_1A^1} =$$
$$= e^{ix_n \operatorname{ad}_{A^n}}\ldots e^{ix_j \operatorname{ad}_{A^j}}(A^j)\cdot\left[e^{ix_nA^n}\ldots e^{ix_1A^1}\right]$$

и

$$e^{ix_k \operatorname{ad}_{A^k}}(A^j) = (e^{x_k\Lambda^{(k)}})_s^j A^s, \quad (\Lambda^{(k)})_s^j \equiv \lambda_s^{kj}$$

получаем формулу

$$-i\tilde{\mathcal{R}}(x)_j^s \frac{\partial}{\partial x_j}\left[e^{ix_nA^n}\ldots e^{ix_1A^1}\right] = A^s_{\text{-}}\cdot\left[e^{ix_nA^n}\ldots e^{ix_1A^1}\right],$$

в которой обратная к матрице $\tilde{\mathcal{R}}(x)$ определена так:

$$(\tilde{\mathcal{R}}(x)^{-1})_s^j = (e^{x_n\Lambda^{(n)}}\ldots e^{x_j\Lambda^{(j)}})_s^j.$$

Обозначая, как и выше, $l^s(x, \xi) = \tilde{\mathcal{R}}(x)_j^s\xi^j$, умножая полученную формулу на $\tilde{f}(x)$ и интегрируя по $x \in \mathbf{R}^n$, приходим к тождеству, аналогичному (1.28):

$$A^s\cdot f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right) = (L^s f)\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right), \quad L^s \equiv l^s\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial\xi}}, \overset{2}{\xi}\right). \quad (1.28\text{a})$$

Операторы $L^1, \ldots, L^n$ здесь также удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.25). Матрицы $\tilde{\mathcal{R}}(x)$ здесь — это правые сдвиги в координатах второго рода [115]. Они могут быть корректно определены в гораздо более широкой окрестности точки $x=0$ по сравнению со случаем (1.28) координат первого рода.

Лемма 1.4. *Если алгебра Ли* (1.25) *нильпотентна* (*т. е. все матрицы* $\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(n)}$ *нильпотентны*), *то и в координатах первого рода и в координатах второго рода матрица правого сдвига определена глобально — всюду на* $\mathbf{R}^n$. *Если алгебра Ли* (1.25) *разрешима* (*т. е. в выбранном базисе все матрицы* $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^n$ *нижнетреугольные*), *то в координатах второго рода матрица* $\tilde{\mathcal{R}}$ *определена глобально — всюду на* $\mathbf{R}^n$, *а в координатах первого рода у* $\mathcal{R}$ *могут иметься особенности.*

Для других классов алгебр Ли, например для компактных, избавиться от особенностей так просто не удается. Пространство $\mathbf{R}^n$, на котором определены фурье-образы символов f, приходится искривлять, заменяя его группой Ли G со структурными константами λ_s^{kj}. Само пространство $\mathbf{R}^n$ отождествляют с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ этой группы. Друг с другом G и $\mathfrak{g}$ связаны экспоненциальным отображением $\exp: \mathfrak{g} \to G$. При этом, если $T^A(\alpha)$, $\alpha \in G$, — представление группы с генераторами $iA_1, \ldots, iA_n$, то $T^A(\exp(x)) = e^{ix\cdot A}$. Если $R(\alpha)$ — дифференциал в точке e правого сдвига на элемент $\alpha \in G$, то $R(\exp(x)) = \mathcal{R}(x)$. Если $d\rho(\alpha)$ — левая мера Хаара на G, то $d\rho(\exp(x)) = \left|\det\left(\frac{I - e^{-\Lambda(x)}}{\Lambda(x)}\right)\right| dx$.

По формуле (1.28) вычисляем

$$A^k T^A(\exp(x)) = \left[l^k\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \xi}}, \overset{2}{\xi}\right) e^{ix\cdot\xi} \right]_{\xi=A} = l^k\left(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) T(\exp(x))$$

или

$$A^k T^A(\alpha) = -i\mathcal{D}^{(k)} T^A(\alpha), \quad \alpha \in G.$$

Здесь дифференциальные операторы $\mathcal{D}^{(k)}$ на группе G действуют так:

$$(\mathcal{D}^{(k)}\varphi)(\exp(x)) = l^k\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\varphi(\exp(x)) = \mathcal{R}(x)_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\exp(x)).$$

Таким образом, $(\mathcal{D}\varphi)(\alpha) = R(\alpha)^* d\varphi(\alpha)$, т. е. $\mathcal{D}$ — это правоинвариантные векторные поля на G. Они антисимметричны относительно левой меры $d\rho$.

Вместо функций $f(A)$ или $f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right)$ рассмотрим интегралы $\Pi_A(\varphi) = \int\limits_G \varphi(\alpha) T^A(\alpha)\, d\rho(\alpha)$, где φ — функции (обобщенные на G). Для них формулы композиции типа (1.28) заменяются такими:

$$A^k \Pi_A(\varphi) = \Pi_A(i\mathcal{D}^{(k)}\varphi)$$

или даже более общими формулами

$$\Pi_A(\psi)\cdot\Pi_A(\varphi) = \Pi_A(\psi * \varphi),$$

где $\psi*\varphi$ — свертка двух (обобщенных) функций на группе:

$$(\psi*\varphi)(\alpha)=\int_G \psi(\beta)\,\varphi(\beta^{-1}\alpha)\,d\rho(\beta).$$

Подробнее об этом см. § 1.2 гл. I, § 4 гл. IV и приложение 2.

1.4. Функции от функций от операторов. Пусть A и B — два оператора, f — функция одной переменной. Насколько различаются операторы $f(A+B)$ и $f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)$? Нужно уметь решать и более общую задачу: пусть g — символ от двух переменных и $C=g\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)$. Насколько различаются $f(C)$ и $f\left(g\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)\right)$?

Теорема 1.7 [53]. *Имеют место следующие тождества:*

— *формула для сложной функции*

$$f(C)=f\left(g\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)\right)+[A,\overset{5}{B}]\,\delta_1 g\left(\overset{3}{A},\overset{7}{A};\overset{9}{B}\right)\delta_2 g\left(\overset{3}{A};\overset{4}{B},\overset{6}{B}\right)\times$$
$$\times\,\delta^2 f\left(\overset{2}{C},\overset{8}{C},g\left(\overset{1}{A},\overset{9}{B}\right)\right), \qquad (1.29)$$

где $C\equiv g\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)$, $\delta_i g$ — *разностная производная по j-й переменной;*

— *формула для функции от суммы*

$$f(A+B)=f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)+[A,\overset{3}{B}]\,\delta^2 f\left(\overset{2}{\overline{A+B}},\overset{4}{\overline{A+B}},\overset{1}{A}+\overset{5}{B}\right)\equiv$$
$$\equiv f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)+[A,\overset{3}{B}]\,\delta^2 f\left(\overset{5}{\overline{A+B}},\overset{1}{A}+\overset{2}{B},\overset{1}{A}+\overset{4}{B}\right); \qquad (1.30)$$

— *формула для экспоненты от суммы*

$$e^{i(A+B)}=e^{iB}(I-Q)\,e^{iA}, \qquad (1.31)$$

где

$$Q=\int_0^1 d\tau\int_0^\tau d\mu\, e^{i(\tau-\mu)(A+B)}e^{-i\tau B}[A,B]\,e^{i\mu B}e^{-i(\tau-\mu)A}.$$

В частности, если операторы A и B коммутируют, то

$$f(A+B)=f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right).$$

Если операторы A и B не коммутируют, то формулы теоремы 1.7 дают возможность разлагать сложные функции от этих операторов по степеням их коммутаторов. Например, имеет место разложение

$$f(C)=f\left(g\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)\right)+\sum_{k=}^{2N} f^{(k)}\left(g\left(\overset{1}{A},\overset{3}{B}\right)\right)\overset{2}{Z}_k+O^N[A,B]. \qquad (1.32)$$

Здесь через $O^N[A,B]$ обозначены слагаемые вида $\overset{2}{S}_1\ldots\overset{2N}{S}_N\varphi(\overset{1}{D}_1\ldots\overset{2N+1}{D_N})$, где D_j — некоторые операторы, $\varphi\in S^\infty(\mathbf{R}^N)$, а S_j — коммутаторы образующих A и B (т. е. элементы алгебры Ли, натянутой на

A и B), причем порядок каждого коммутатора S_j не ниже единицы, а сумма порядков всех $S_1, \ldots, S_N$ не ниже N.

Операторы $O^N[A, B]$ будем называть *коммутаторными элементами* порядка N относительно A, B.

Можно показать [54], что коэффициенты Z_k в (1.32) задаются формулой

$$Z_k = \left(\overset{2}{C} - g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)\right)^k, \quad C \equiv g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$$

и удовлетворяют рекуррентной цепочке равенств

$$Z_0 = 1, \quad Z_1 = 0,$$

$$Z_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m!}{s!\,n!\,(m-n)!} \times$$

$$\times \overline{K_{l,m} \underbrace{[A, [A, \ldots, [A}_{s}, Z_{k-n}] \ldots]]}^{\,2} (g^{(m,n)} \partial_1^{l+s} g)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) +$$

$$+ \frac{1}{k+1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \underbrace{[A, \ldots, [A}_{s}, \overset{2}{Z_k}] \ldots]\, \partial_1^s g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right), \tag{1.33}$$

где $k \geqslant 1$, $\partial_1 \equiv \partial/\partial\xi^1$, $g^{(m,n)}(\xi^1, \xi^2) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right)^{m-n} \left(\frac{\delta g}{\delta\xi^2}(\xi^1; \xi^2, \xi^{2\prime})\right)^n \Big|_{\xi^{2\prime} = \xi^2}$, а операторы $K_{l,m}$ определяются так:

$$K_{l,m} = \frac{1}{l!\,m!}\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right)^l \left(\overset{2}{B} - \overset{4}{B}\right)^m. \tag{1.34}$$

Вычислению оператора $K_{l,m}$ будет посвящен п. 1.5. Оказывается, что $K_{l,m} = Q^{\max(l,m)}[A, B]$. Поэтому в бесконечных рядах (1.33) суммирование по m, l, s можно ограничить сверху, например, числом N, отбрасывая члены $O^N[A, B]$. При этом $Z_k = O^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}[A, B]$. Приведем явные формулы для $N = 3$:

$$Z_2 = \frac{1}{2}[A, \overset{2}{B}](\partial_1 g\, \partial_2 g)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + \frac{1}{4}[[A, \overset{2}{B}], B] \times$$

$$\times (\partial_1 g\, (\partial_2)^2 g)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + \frac{1}{4}[A, \overset{2}{B}]^2 ((\partial_1)^2 g \cdot (\partial_2)^2) g)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + O^3[A, B],$$

$$Z_3 = \frac{1}{6}[[A, \overset{2}{B}], B](\partial_1 g\, (\partial_2 g)^2)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + \frac{1}{6}[A, \overset{2}{[}A, B]] \times$$

$$\times (\partial_2 g (\partial_1 g)^2)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + \frac{1}{6}[A, \overset{2}{B}]^2 ((\partial_1 g)^2 (\partial_2)^2 g + (\partial_1)^2 g (\partial_2 g)^2 +$$

$$+ \partial_1 g\, \partial_2 g\, \partial_1 \partial_2 g)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + O^3[A, B],$$

$$Z_4 = \frac{1}{8}[A, \overset{2}{B}]^2 ((\partial_1 g)^2 (\partial_2 g)^2)\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) + O^3[A, B],$$

$$Z_k = O^3[A, B] \quad \text{при} \quad k \geqslant 5.$$

Выпишем теперь формулы, аналогичные (1.29), (1.32), для случая вейлевского исчисления [57].

Теорема 1.8. *Пусть* $A=(A^1, \ldots, A^n)$ — *вейлевский набор операторов в банаховой шкале,* $g \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$ *и оператор* $C=g(A) \equiv \equiv g\left(\overset{\omega}{A}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{A}{}^n\right)$ *производящий (см. п. 1.1). Тогда для любого* $f \in S^\infty(\mathbf{R})$ *справедливо тождество*

$$f(C)=f(g(A))+$$
$$+\int_0^1 v\,dv\,[A^i, \overset{2}{A}{}^j]\,\Delta f\left(g\left(v\overset{2}{A}+(1-v)\overset{1}{A}\right), \overset{4}{C}\right)\partial_i g\left(v\overset{2}{A}+(1-v)\overset{3}{A}\right)\times$$
$$\times\partial_j g\left(v\overset{2}{A}+(1-v)\overset{1}{A}\right), \quad (1.35)$$

где $\Delta f(\xi, \eta) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\delta f(\xi, \eta)$. *Разложение правой части по степеням коммутаторов имеет вид*

$$f(C)=f(g(A))+$$
$$+[A^i, \overset{\omega}{A}{}^j][A^l, \overset{\omega}{A}{}^k]\left(\frac{1}{16}f''(g)\,\partial^2_{il}g\cdot\partial^2_{jk}g+\frac{1}{24}f''(g)\,\partial_k g\,\partial_j g\,\partial^2_{il}g\right)\left(\overset{\omega}{A}\right)+$$
$$+\frac{1}{12}[[A^i, \overset{\omega}{A}{}^j], A^k]\,(f''(g)\,\partial_i g\,\partial^2_{jk}g)\left(\overset{\omega}{A}\right)+O^3[A^1, \ldots, A^n].$$

Заметим, что если функция g линейна, то второе слагаемое в правой части (1.35) равно нулю. Таким образом, получаем важнейшее свойство вейлевского исчисления — его аффинную ковариантность [149].

Следствие 1.1. *Пусть* M — *аффинное преобразование* $M\colon\ \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$:

$$(M\xi)^i = m^i_j\xi^j + m_0.$$

Рассмотрим набор операторов

$$(MA)^i = m^i_j A^j + m_0.$$

Для любого символа $f \in S^\infty(\mathbf{R}^k)$ *справедливо тождество*

$$f\left((\overset{\omega}{MA})^1, \ldots, (\overset{\omega}{MA})^k\right) = (M^*f)\left(\overset{\omega}{A}{}^1, \ldots, \overset{\omega}{A}{}^k\right).$$

Пример 1.11. *Вейлевские псевдодифференциальные операторы.* Применим полученные функции к $\hbar$-псевдодифференциальным операторам из примера 1.8. Обозначим $\hat{g}=g\left(\overset{\omega}{q}, -i\hbar\overset{\omega}{\frac{\partial}{\partial q}}\right)$. В силу теоремы 1.6

$$\widehat{g_1g_2}=\hat{g}_1\hat{g}_2-\frac{i\hbar}{2}\widehat{\{g_1, g_2\}}+\hbar^2\widehat{\alpha(g_1, g_2)}-\frac{i\hbar^3}{2}\widehat{\beta(g_1, g_2)}+O(\hbar^4),$$
$$[\hat{g}_1, \hat{g}_2]=-i\hbar\widehat{\{g_1, g_2\}}-i\hbar^3\widehat{\beta(g_1, g_2)}+O(\hbar^4), \quad (1.36)$$

где $\{g_1, g_2\}=\langle J\,\partial g_1, \partial g_2\rangle$ — скобка Пуассона функций $g_1, g_2 \in$

$\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $J=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$, а операции α и β определяются так:

$$\alpha(g_1, g_2) = -\frac{1}{8} J^{kk'} J^{ll'} \partial^2_{kl} g_1 \cdot \partial^2_{k'l'} g_2,$$

$$\beta(g_1, g_2) = \frac{1}{24} J^{kk'} J^{ll'} J^{jj'} \partial^3_{klj} g_1 \cdot \partial^3_{k'l'j'} g_2.$$

Подробнее структура этих формул с общей точки зрения обсуждается в п. 2.2 приложения 2.

Приведем еще следствие из теоремы 1.6. Пусть $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^n$ — набор символов на $S^\infty(\mathbf{R}^{2m})$ такой, что набор операторов $\widehat{\mathcal{A}}^1, \ldots, \widehat{\mathcal{A}}^n$ вейлевский в шкале $\{H^l_k(\mathbf{R}^m)\}$. Тогда для любого $f \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$f\left(\overset{\omega}{\widehat{\mathcal{A}}^1}, \ldots, \overset{\omega}{\widehat{\mathcal{A}}^n}\right) = \hat{F}_0 + \hbar^2 \hat{F}_1 + O(\hbar^4), \tag{1.37}$$

где

$$F_0 = f(\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^n),$$

$$F_1 = J^{ij} J^{kl} \left(\frac{1}{16} \partial^2_{sm} f(\mathcal{A})\, \partial^2_{il} \mathcal{A}^s\, \partial^2_{jk} \mathcal{A}^m + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24} \partial^3_{smr} f(\mathcal{A}) \cdot \partial^2_{il} \mathcal{A}^s \cdot \partial_k \mathcal{A}^m \cdot \partial_j \mathcal{A}^r \right),$$

а остаток $O(\hbar^4)$ в (1.37) имеет вид $\hbar^4 R$ и R непрерывен вправо в шкале $\{H^l_k\}$ равномерно по $\hbar$.

1.5. Приведение к нормальной форме. Пусть A и B — два оператора; рассмотрим функции от них: $g\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}\right)$ и $f(A+B)$. Привести эти функции к нормальной форме — значит переставить оператор A всюду на первое место, например так, как это было сделано в (1.32) для функции $f(C)$, где $C = g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$. Подобные перестановки часто используются в квантовой теории в ситуации, когда A — оператор уничтожения (формулы Вика (см. [126])). В данном разделе мы следуем работе [54].

Итак, A и B принадлежат алгебре M (например, алгебре непрерывных операторов в банаховой шкале; п. 1). Пусть $\mathbb{1}$ — единица в M и I — единичный оператор на M. Через L_Q, R_Q, ad_Q, как и раньше, обозначаем операторы умножения на Q слева, справа и коммутирования с Q.

Теорема 1.9. *Имеет место тождество*

$$g\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}\right) = \left(g\left(\overset{4}{L}_{R_A} + \overset{1}{L}_{\mathrm{ad}_A}, \overset{3}{L}_{L_B} - \overset{2}{\mathrm{ad}}_{L_B}\right) I\right) \mathbb{1},$$

разложение правой части которого по степеням операторов L_{ad_A} *и* ad_{L_B} *дает формулу*

$$g\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}\right) = \sum_{m,\, l=0}^{N} \partial_1^l \partial_2^m g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}\right) \overset{2}{K}_{l,m} + O^N[A, B]. \tag{1.38}$$

Здесь операторы $K_{l,m}$ имеют вид (1.34):

$$K_{l,m}=\frac{1}{l!\,m!}\left(\mathrm{ad}_{L_B}^m(\mathrm{ad}_A^l)\right)\mathbb{1}=\frac{1}{l!\,m!}\left(\overset{3}{A}-\overset{1}{A}\right)^l\left(\overset{2}{B}-\overset{4}{B}\right)^m$$

и могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} K_{l+1,m}&=\frac{1}{l+1}\left\{[A,\ K_{l,m}]+\sum_{n=1}^{m}K_{1,n}\cdot K_{l,m-n}\right\},\\ K_{l,m+1}&=\frac{1}{m+1}\left\{[K_{l,m},\ B]+\sum_{n=1}^{l}K_{l-n,m}\cdot K_{n,1}\right\}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Заметим, что $K_{l,m}=O^{\max(l,m)}[A,B]$. Поэтому суммирование по l, m в (1.38) можно ограничить, например, числом N, а остаток $O^N[A,B]$ выписать явно (как остаточный член ряда Тейлора).

Теорема 1.10. *Имеет место тождество*

$$f(A+B)=f\left(\overset{2}{R}_A+\overline{\overset{1}{(L_B+\mathrm{ad}_A)}}\right)\mathbb{1},$$

разложение правой части которого в ряд теории возмущений (1.12) *по степеням* ad_A *дает формулу*

$$f(A+B)=\sum_{k\geqslant 0}f^{(k)}\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B}\right)\overset{2}{X}_k+O^N[A,B].\tag{1.40}$$

Здесь операторы X_k имеют вид

$$X_k=\frac{1}{k!}\left(\overset{2}{\overline{A+B}}-\overset{1}{A}-\overset{3}{B}\right)^k=$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{\alpha_1=0}^{k}\sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{\alpha_{k-1}=0}^{\alpha_{k-2}-1}C_k^{\alpha_1}C_{\alpha_k-1}^{\alpha_2}\cdots\times$$

$$\times C_{\alpha_{k-2}-1}^{\alpha_{k-1}}I_{k-\alpha_1}I_{\alpha_1-\alpha_2-1}\cdots I_{\alpha_{k-2}-\alpha_{k-1}-1}I_{\alpha_{k-1}-1}(\mathbb{1}),$$

где $I_{-1}\equiv\mathbb{1}$, $I_0\equiv\mathrm{ad}_A$, $I_s\equiv K_{1,s}$, C_l^m — *число сочетаний из l по m*, $C_{-1}^0\equiv 1$. *Эти операторы можно вычислять по рекуррентным формулам*

$$X_0=\mathbb{1},\quad X_1=0,$$

$$\begin{aligned} X_{k+1}&=\frac{1}{k+1}\left([A,\ X_k]+\sum_{l=0}^{k-1}K_{1,k-l}\cdot X_l\right)=\\ &=\frac{1}{k+1}\left([X_k,\ B]+\sum_{l=0}^{k-1}X_l\cdot K_{k-l,1}\right).\end{aligned}\tag{1.41}$$

Заметим, что $X_k=O^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}[A,B]$. Поэтому суммирование по $O^N[A,B]$ в (1.40) можно ограничить, например, числом $2N$, а остаток — выписать явно. Вычисление нескольких первых элементов X_k дает

$$X_2=\frac{1}{2}[A, B],\quad X_3=\frac{1}{6}([A, [A, B]]+[[A, B], B]),$$

$$X_4=\frac{1}{8}[A, B]^2+\frac{1}{24}([A, [A, [A, B]]]+[A, [[A, B], B]]+ \\ +[[[A, B], B], B]).$$

Пример 1.12. *Задача Дирака.* Пусть $\hbar\neq 0$. Существуют ли такие операторы A, B, для которых соответствие $f\to\frac{i}{\hbar}f\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right)$ является гомоморфизмом алгебры Ли функций на $\mathbf{R}^2$ (наделенной скобкой Пуассона) в алгебру Ли операторов?

Если такие A и B существуют, то

$$\left[f\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right), g\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right)\right]=-i\hbar\{f, g\}\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right),$$

где $\{f, g\}=\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\frac{\partial g}{\partial\xi_1}-\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\partial g}{\partial\xi_2}$.

Выберем $f=e^{-it\xi_1}$, $g=e^{-it\xi_2}$, $t\in\mathbf{R}$. Тогда должно иметь место тождество

$$[e^{-itA}, e^{-itB}]=-i\hbar t^2e^{-it(A+B)}. \tag{1.42}$$

Используя формулы (1.14), (1.30) и сравнивая коэффициенты при t^2, получаем

$$[A, B]=i\hbar\mathbb{1}.$$

В частности, все остальные коммутаторы A и B равны нулю. Теоремы 1.9, 1.10 в этом случае дают

$$K_{l,m}=\frac{(i\hbar)^l}{l!}\delta_{l,m},\quad X_k=\frac{(i\hbar)^k}{2\cdot 4\ldots(2k)},$$

и равенство (1.42) после приведения левой и правой частей к нормальной форме (1.38), (1.40) сводится к следующему:

$$-i\hbar t^2e^{-i\hbar\frac{t^2}{2}}=e^{-i\hbar t^2}-1.$$

Оно может выполняться лишь при $\hbar=0$. Таким образом, ответ на задачу Дирака отрицателен: сохранить скобки Пуассона в квантовой ситуации (заменив ими коммутатор) нельзя. Это можно сделать лишь с точностью $O(\hbar^3)$ (см. (1.36)).

Покажем теперь, как графически с помощью наглядных диаграмм представить вычисления по рекуррентным формулам (1.39), (1.41).

Рассмотрим на плоскости целочисленную решетку и выделим ее первый квадрат. *Весом узла* (m, n) решетки назовем величину $m+n$, если $m\neq n$, а в случае $m=n$ (т. е. когда узел лежит на биссектрисе) его весом назовем $2(m+n)$.

Проведем теперь все возможные отрезки, соединяющие узлы нашей решетки и удовлетворяющие условиям (рис. 29):

a) отрезок в своих внутренних точках не пересекает биссектрису и узлы решетки;

b) отрезки, лежащие выше биссектрисы, могут иметь лишь следующий вид (все отрезки снабдим направлением — вверх и вправо):

Рис. 29

Кроме того, допускаются горизонтальные отрезки, лежащие выше биссектрисы и оканчивающиеся на ней;

c) отрезки, лежащие на самой биссектрисе, считаются двойными;

d) вся картина симметрична относительно биссектрисы.

Путь на получившейся сетке — это связная несамопересекающаяся ломаная, исходящая из начала (0, 0) и сбрывающаяся в некотором узле. *Диаграмма* — это объединение конечного числа различных путей.

Каждому пути сопоставим некоторый элемент (оператор) по следующему правилу. Пусть в узле α сосредоточен элемент P. Вертикальному отрезку, исходящему из α, сопоставим операцию коммутирования ad_A; таким образом, в конце этого отрезка возникает элемент $[A, P]$. Горизонтальному отрезку сопоставим операцию ad_B; в конце такого отрезка возникает элемент $[P, B]$. Отрезку, идущему по диагонали, сопоставим операцию умножения на соответствующий элемент $K_{l,m}$ так, как это указано на рис. 30 ($s(\beta)$ — вес узла β, в который проходит рассматриваемый отрезок).

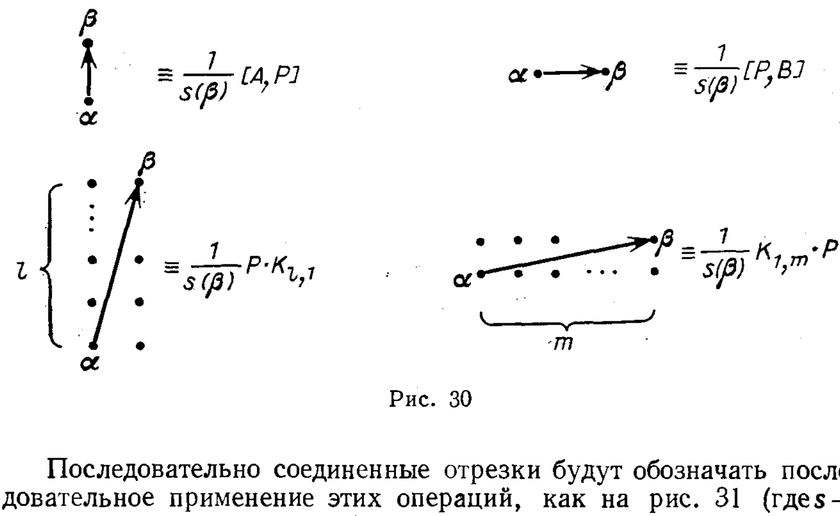
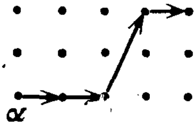


Рис. 30

Последовательно соединенные отрезки будут обозначать последовательное применение этих операций, как на рис. 31 (где s — вес узла, следующего за α).

Пусть единица $\mathbb{1}$ помещена в узел $\alpha = (0, 0)$. Рассмотрим некоторый путь L, выходящий из этого узла. Элемент, который сопоставляется пути L по указанному выше правилу, обозначим через $\hat{L}(\mathbb{1})$. Очевидно, что $\hat{L}(\mathbb{1})=O^l[A, B]$, где l — число звеньев в пути L.



$$\equiv \frac{1}{s+5}\cdot\frac{1}{s+4}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s}[([[P, B], B]\cdot K_{2,-1}), B]$$

Рис. 31

Пусть $\mathscr{D}=\bigcup_j L_j$ — диаграмма. Тогда элемент $\hat{\mathscr{D}}(\mathbb{1})=\sum_j \hat{L}_j(\mathbb{1})$ назовем порожденным из $\mathbb{1}$ диаграммой $\mathscr{D}$.

Рассмотрим специальные диаграммы $\mathfrak{X}_k$, составленные из всевозможных путей, оканчивающихся в узлах (m, n), где $m+n=k$. Например, диаграмма $\mathfrak{X}_5$ имеет вид, указанный на рис. 32.

Теорема 1.11. *Элементы X_k в разложении* (1.40) *порождаются из единицы диаграммой $\mathfrak{X}_k$, т. е. $X_k=\hat{\mathfrak{X}}_k(\mathbb{1})$.*

Теперь изменим веса узлов нашей сетки. Назовем весом узла (m, n) число $\max(m, n)$, если $m\neq n$, или $2m$, если $m=n$. Рассмотрим диаграмму $\mathscr{K}_{l,m}$, составленную из всех путей, выходящих из нуля и оканчивающихся в узле (l, m).

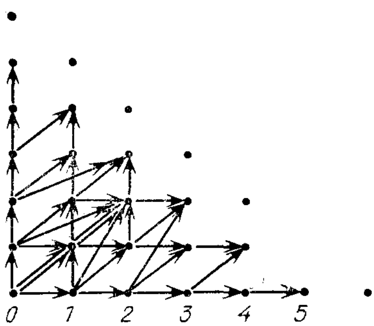


Рис. 32

Теорема 1.12. *Элементы $K_{l,m}$ в разложении* (1.38) *порождаются из единицы диаграммой $\mathscr{K}_{l,m}$, т. е. $K_{l,m}=\hat{\mathscr{K}}_{l,m}(\mathbb{1})$.*

1.6. Парадоксы формальных вычислений с функциями от операторов. Приведем теперь несколько неожиданных контрпримеров, которые заставляют быть очень осторожным при формальном использовании комбинаторных тождеств предыдущих разделов.

Пример 1.13 (Нелсон). *Недифференцируемость.* Склеим из двух координатных плоскостей, разрезанных по отрицательной полуоси, двулистную плоскость Π переменных x, y, т. е. риманову поверхность функции $\sqrt{x+iy}$. В гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)$ на плотном подпространстве $\mathscr{D}=C_0^\infty(\Pi\setminus\{0\})$ определены операторы $B=-i\frac{\partial}{\partial y}$, $A=-i\frac{\partial}{\partial x}$. Они в существенном самосопряжены и коммутируют на $\mathscr{D}$:

$$[A, B]=0.$$

Однако вопреки теореме 1.3 функции операторов от A и B уже, вообще говоря, не коммутируют. Например, если носитель функции $u\in\mathscr{D}$ лежит на первом листе Π в квадрате $0<x<1$,

$0 < y < 1$ и если $\tau > 1$, $t < -1$, то носитель функции $e^{itA}e^{i\tau B}u$ лежит на первом листе П, а носитель функции $e^{i\tau B}e^{itA}u$ — на втором листе П (рис. 33).

Таким образом,

$$[e^{itA},\ e^{i\tau B}] \neq 0.$$

Причина этого парадокса заключена в том, что нарушено условие (α) из п. 1.1, так как произведение групп $Q(t,\ \tau) = e^{i\tau B}e^{itA}$ не дифференцируемо в точке $\tau = t = 0$. Следовательно, невозможно определить растущие функции от операторов A, B и, в частности, представить сами эти операторы по формуле (1.1). Поэтому перестановочность групп e^{itA}, $e^{i\tau B}$ (или вообще любых функций $f(A)$

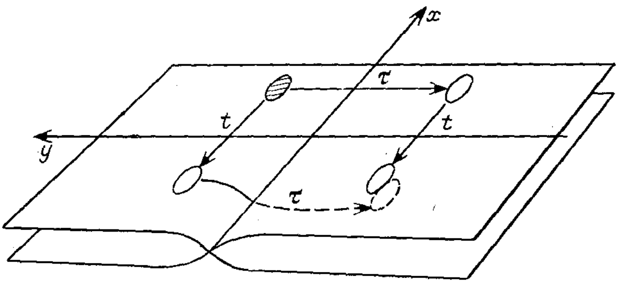


Рис. 33

и $g(B)$, где $f,\ g \in C(\mathbf{R})$) не следует из перестановочности операторов A и B.

Пример 1.14 [58]. *Экспоненциальный рост.* Рассмотрим два оператора: $A = ix\frac{d}{dx} + \frac{i}{2}$, $B = x$, в существенном самосопряженные на $\mathscr{D} = C_0^\infty(\mathbf{R})$ в пространстве $L^2(\mathbf{R})$. Они удовлетворяют на $\mathscr{D}$ коммутационному соотношению

$$[A,\ B] = iB. \tag{1.43}$$

Обозначим $f(\xi) = \xi - i$, $g(\xi) = f(\xi)^{-1}$. Поскольку $fg = 1$, то имеет место тождество

$$B = \overset{2}{B} f\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right) g\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right).$$

Правую часть преобразуем так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1:

$$B = \overset{2}{B} f\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right) g\left(\overset{4}{A} - \overset{0}{A}\right) = \overset{2}{Q} g\left(\overset{4}{A} - \overset{0}{A}\right),$$

где $Q = \overset{2}{B} f\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right) = \overset{2}{B}\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A} - i\right) = 0$ в силу (1.43). Таким образом, получаем неверное равенство $B = 0$!

Ошибка здесь состоит в том, что при вычислениях был использован гладкий на $\mathbf{R}^5$, но не аналитический на $\mathbf{C}^5$ символ $\xi^2 f(\xi^3 - \xi^1) g(\xi^4 - \xi^0)$. Такие символы в данном случае использовать нельзя, поскольку производные по τ от произведения групп

$Q(t, \tau) = e^{i\tau B} e^{itA}$ экспоненциально растут при $|t| \to \infty$. Нарушается условие (α) из п. 1.1.

Вообще оператор $\overset{2}{B}\varphi\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, не существует. Действительно, операция коммутирования ad_A: $T \to [A, T]$ имеет в силу (1.43) собственное число i и отвечающий ему собственный «вектор» B. Поэтому должно иметь место равенство $\varphi(\mathrm{ad}_A) B = \varphi(i) B$ или $\overset{2}{B}\varphi\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}\right) = \varphi(i) B$. Но правая часть этого равенства не имеет смысла в силу неаналитичности символа φ. Это рассуждение еще раз разъясняет ошибку, происшедшую у нас выше: использованный символ g имеет особенность как раз на собственном числе оператора ad_A.

Предположим теперь, что вместо (1.43) выполнено соотношение

$$\underbrace{[A, \ldots, [A}_{n}, B] \ldots] = \lambda B, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0. \tag{1.44}$$

Как и выше, используя символы $f(\xi) = \xi^n - \lambda$ и $g = f^{-1}$, получаем $B = 0$. Таким образом, в любой банаховой шкале, где оператор A производящий, а B непрерывный, из соотношения (1.44) следует, что $B = 0$. В частности, оператор $ix\frac{d}{dx} + \frac{i}{2}$ не может быть производящим ни в какой банаховой шкале, в которой непрерывен оператор умножения x (например, в шкале $H_k^l(\mathbf{R})$).

Рассмотрим еще три оператора, удовлетворяющих соотношениям

$$AB + BA = iCB, \quad [C, A] = 0, \quad C^2 = \mathbb{1}. \tag{1.45}$$

Пусть $\varphi(\pm 1) = 1$, $\varphi = 0$ в окрестности нуля и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Обозначим $f(\xi, \eta) = \xi - i\eta$, $g(\xi, \eta) = \varphi(\eta) f(\xi, \eta)^{-1}$. Тогда

$$B = \varphi(C) B = \overset{2}{B} f\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}, \overset{3}{C}\right) g\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}, \overset{3}{C}\right) = \overset{2}{Q} g\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}, \overset{3}{C}\right),$$

где $Q = \overset{2}{B} f\left(\overset{3}{A} - \overset{1}{A}, \overset{3}{C}\right) = 0$. Таким образом, из (1.45) следует $B = 0$. В то же время легко проверить, что соотношениям (1.45) удовлетворяют самосопряженные операторы $A = iI^{(-)}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right)$, $B = x$, $C = I^{(-)}$, где $I^{(-)}$ — инверсия, т. е. $I^{(-)}u(x) = u(-x)$.

Пример 1.15 [58]. *Дефект.* На области определения $D = C_0^\infty(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ рассмотрим операторы $A = i(1 + x^2)\frac{d}{dx} + ix$, $B = \operatorname{arctg} x$. Легко проверить, что

$$[A, B] = i\mathbb{1}. \tag{1.46}$$

Поэтому в силу формулы сдвига (1.18) должно быть справедливо тождество

$$e^{-itA} f(B) = f(B + t) e^{-itA}. \tag{1.47}$$

Пусть $t > 2\pi$, а символ $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ выбран так, что $f(\xi) = 1$ при $|\xi| < \pi$ и $f(\xi) = 0$ при $|\xi| > 3\pi/2$. Тогда, поскольку $\operatorname{arctg} x +$

$+t>3\pi/2$, то $f(B+t)=0$ и, поскольку $|\operatorname{arctg} x|>\pi/2$, то $f(B)=1$. Но эти два равенства противоречат (1.47).

Ошибка здесь вызвана тем, что оператор A, хотя и симметричен, но не самосопряжен в существенном. Действительно, уравнения $(A^*\pm i)\psi=0$ имеют решения $\psi(x)=\dfrac{e^{\pm \operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$, т. е. индексы дефекта оператора A равны (1, 1).

Пример 1.16 [58, 96]. *Рост производных символа.* Пусть f — символ от одной переменной и $g(\xi^1;\ \xi^2;\ \xi^3)=f((\xi^3-\xi^1)\xi^2)$. Рассмотрим операторы A, B, удовлетворяющие соотношению (1.46) и всем условиям п. 1.1 $\left(\text{например, } A=i\dfrac{d}{dx},\ B=x \text{ в } L^2(\mathbf{R})\right)$. В функции $g\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \overset{3}{A}\right)$ переставим оператор $\overset{3}{A}$ на первое место, пользуясь формулой (1.15):

$$g\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \overset{3}{A}\right)=g\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \overset{1}{A}\right)+[A,\overset{4}{B}]\frac{\delta^2 g}{\delta\xi^2\,\delta\xi^3}\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{6}{B};\ \overset{3}{A},\ \overset{5}{A}\right).$$

Поскольку $g(\xi^1;\ \xi^2;\ \xi^1)\equiv f(0)$ и $[A,\ B]=i\mathbb{1}$, то получаем

$$g\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B};\ \overset{3}{A}\right)=f(0)+i\left(\frac{\partial}{\partial\xi^3}\frac{\delta g}{\delta\xi^2}\right)\left(\overset{1}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{4}{B};\ \overset{3}{A}\right). \tag{1.48}$$

По определению разностной производной имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi^3}\frac{\delta g}{\delta\xi^2}\right)(\xi^1;\ \xi^2;\ \xi^{2\prime};\ \xi^3)=\frac{\partial}{\partial\xi^3}\frac{f((\xi^3-\xi^1)\xi^2)-f((\xi^3-\xi^1)\xi^{2\prime})}{\xi^2-\xi^{2\prime}}=$$
$$=f'((\xi^3-\xi^1)\xi^2).$$

Итак, формула (1.48) дает

$$f\left(\left(\overset{3}{A}-\overset{1}{A}\right)\overset{2}{B}\right)=f(0)\mathbb{1}+if'\left(\left(\overset{3}{A}-\overset{1}{A}\right)\overset{2}{B}\right). \tag{1.49}$$

Например, пусть $f(\xi)=\exp(-i\xi)$; тогда $if'=f$, $f(0)=1$, и (1.49) приводит к ошибке: $0=\mathbb{1}$.

Ошибка эта вызвана тем, что, хотя сам символ f лежит в классе $S^\infty(\mathbf{R})$, символ же $g=e^{i(\xi^1-\xi^3)\xi^2}$, использованный в (1.48), не лежит в $S^\infty(\mathbf{R}^3)$ (производные g растут медленно при $|\xi|\to\infty$, но этот рост убыстряется с увеличением порядка производной).

Отметим, что если три оператора A, B, C удовлетворяют соотношениям

$$[A,\ B]=iC,\quad [A,\ C]=[B,\ C]=0$$

и все они ограничены (т. е. поведение символов на бесконечности для них роли не играет), то аналогично предыдущему получаем формулу для резольвенты:

$$(\lambda-C)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\exp\left\{\frac{i}{\lambda}\left(\overset{1}{A}-\overset{3}{A}\right)\overset{2}{B}\right\},\quad \lambda\neq 0.$$

Спектр оператора C в этом случае состоит из единственной точки $\{0\}$ [142].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИСЧИСЛЕНИЕ СИМВОЛОВ И ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Одна из основных идей операторного исчисления состоит в том, чтобы уйти от анализа в пространстве операторов, переформулировав все задачи на языке символов этих операторов, и пользоваться затем анализом в пространстве символов.

Особенно интересны ситуации, в которых удается свести задачу к анализу функций от конечного числа «элементарных» образующих $f(A^1, \ldots, A^n)$. Про каждую из образующих A^j, мы считаем, известно все: свойства ее однопараметрической группы, спектральные свойства и т. д. Образующие A^j — это модельные операторы (которые сами по себе могут быть устроены достаточно сложно). Затем уже дело комбинаторики — преобразовывать функции от образующих $A^1 \ldots A^n$, т. е. преобразовывать символы. Центральную роль при этом играет возможность перенести ассоциативное умножение из алгебры операторов в алгебру символов, иными словами, построить исчисление символов.

Пространство символов и правила анализа в нем привлекают прежде всего универсальностью, поскольку не зависят от конкретного вида исходных операторов и определяются лишь перестановочными соотношениями между ними. Но построить эффективное исчисление символов удается не для любых перестановочных соотношений. Мы рассматриваем некоторые классы таких соотношений, следуя методам [68, 96, 100, 101].

2.1. Обобщенные условия Якоби и свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Пусть задана алгебра M с образующими $A^1, \ldots, A^n$. Обозначим через $\mathcal{P}^n$ пространство многочленов от n переменных. При каких условиях множество $\left\{f\left(\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n\right) \middle| f \in \mathcal{P}^n\right\}$ является алгеброй и, следовательно, совпадает с M?

Очевидно, для этого необходимо существование таких операторов $L^1, \ldots, L^n$ на пространстве символов, что

$$A^j\left[f\left(\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n\right)\right] = (L^j f)\left(\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n\right), \tag{2.1}$$

а также операторов $R^1, \ldots, R^n$ таких, что

$$\left[f\left(\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n\right)\right] A^j = (R^j f)\left(\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n\right) \tag{2.2}$$

для любого символа f и любого $j = 1, \ldots, n$. Будем называть L и R^j левыми и правыми *операторами упорядоченного регулярного представления* набора $A^1, \ldots, A^n$.

Лемма 2.1. *Пусть $A^1, \ldots, A^n$ производящие операторы в банаховой шкале или в произвольной полибанаховой алгебре (см. п. 1.1 приложения) и существуют левые операторы L^j упорядоченного регулярного представления* (2.1). *Если $L^1, \ldots, L^n$ производящие в алгебре $\mathscr{L}(S^\infty(\mathbf{R}^n))$, то для любых $f, g \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$ справедлива формула композиции*

$$\left[g\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right)\right]\cdot\left[f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right)\right] = (g*f)\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right), \tag{2.3}$$

где

$$g*f = g\left(\overset{1}{L^1}, \ldots, \overset{n}{L^n}\right) f. \tag{2.4}$$

Если существуют правые операторы R^j (2.2) *и они являются производящими в $\mathscr{L}(S^\infty(\mathbf{R}^n))$, то имеет место* (2.3), *где $g*f = f\left(\overset{n}{R^1}, \ldots, \overset{1}{R^n}\right) g$.*

Доказательство. Обозначим $\mathscr{H} = S^\infty(\mathbf{R}^n) \times \mathscr{L}(B_\mu)$, где $\{B_\mu\}$ — банахова шкала из условия леммы. Определим на $\mathscr{H}$ операторы $\tilde{L}^j$, $\tilde{A}^j$, Q следующим образом:

$$\tilde{L}^j\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^j f \\ T \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^j\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ A^j T \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right) \end{pmatrix},$$

где $f \in S^\infty$, $T \in \mathscr{L}\{B_\mu\}$.

Операторы $\tilde{L}^j$, $\tilde{A}^j$ производящие в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, причем

$$g\left(\overset{1}{\tilde{L}^1}, \ldots, \overset{n}{\tilde{L}^n}\right)\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\left(\overset{1}{L^1}, \ldots, \overset{n}{L^n}\right) f \\ g(0)\, T \end{pmatrix},$$

$$g\left(\overset{1}{\tilde{A}^1}, \ldots, \overset{n}{\tilde{A}^n}\right)\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0)\, f \\ g\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right) T \end{pmatrix}.$$

Используем теперь общую формулу квазикоммутации (1.16) приложения 1 и учтем равенство нулю квазикоммутаторов $[Q, \tilde{L}^j \,|\, \tilde{A}^j] = 0$. Получим

$$Q\cdot g\left(\overset{1}{\tilde{L}^1}, \ldots, \overset{n}{\tilde{L}^n}\right) = g\left(\overset{1}{\tilde{A}^1}, \ldots, \overset{n}{\tilde{A}^n}\right)\cdot Q.$$

Применяя левую и правую части к произвольному элементу $\begin{pmatrix} f \\ T \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$, получаем искомое равенство (2.3). Аналогично доказывается второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Если исходный набор операторов $A = (A^1, \ldots, A^n)$ вейлевский и существуют операторы L'^j, R'^j на $S^\infty(\mathbf{R}^n)$ такие, что вместо (2.1), (2.2) выполнены равенства для вейлевских функций

$$A^j[f(A)] = (L'^j f)(A), \quad [f(A)]\, A^j = (R'^j f)(A), \tag{2.1a}$$

то назовем L'^j и R'^j левыми и правыми *операторами вейлевского регулярного представления.*

Лемма 2.2. *Если набор* $L' = (L'^1, \ldots, L'^n)$ *вейлевский в* $\mathscr{L}(S^\infty(\mathbf{R}^n))$, *то*

$$g(A)\cdot f(A) = (g*f)(A), \quad g*f = g(L')f. \tag{2.5}$$

Если набор $R' = (R'^1, \ldots, R'^n)$ *вейлевский, то* $g*f = f(R')g$.

Операция $*$ в пространстве символов называется скрученным произведением или просто *$*$-произведением*.

Конечно, если пространство символов совпадает с пространством полиномов $\mathscr{P}^n$, то обе приведенные леммы тривиальны и $*$-произведение в $\mathscr{P}^n$ задается формулами (2.4) или (2.5) без всяких дополнительных условий.

Отметим, что произведение, определенное в (2.5), отличается от (2.4). Обозначение этих операций одинаковым значком $*$ не приведет к путанице, так как в каждом конкретном случае будет ясно, идет ли речь об упорядоченном или о вейлевском исчислении функций от операторов.

Заметим, что если символ $f = f(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в (2.1) не зависит от переменных $\xi^{j+1}, \ldots, \xi^n$, то $A^j\left[f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{j}{A^j}\right)\right] = \overset{j}{A^j} f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{j}{A^j}\right)$. Поэтому естественно считать, что оператор L^j на этот символ действует обычным умножением на переменную ξ^j. Тогда

$$L^1(1) = \xi^1, \quad L^2(f(\xi^1)) = \xi^2 f(\xi^1), \ \ldots,$$

и, следовательно,

$$g\left(\overset{1}{L^1}, \ldots, \overset{n}{L^n}\right)1 = g(\xi^1, \ldots, \xi^n)$$

или

$$g*1 = g. \tag{2.6}$$

Таким образом, при указанном выборе операторов L^j единичная функция 1 оказывается правой единицей для $*$-произведения. Левой единицей она является автоматически.

Аналогично в случае вейлевского исчисления к тождеству (2.6) приводит свойство аффинной ковариантности (см. следствие 1.1 приложения 1). Ниже, если не оговорено противное, условие (2.6) всегда предполагается выполненным. Если оно не выполнено, то операцию $*$ будем называть *почти-$*$-произведением*. Отметим, что условие (2.6) означает, в частности, инъективность отображения $g \to g(L^1, \ldots, L^n)$, т. е. отсутствие такого символа $g \neq 0$, для которого

$$g\left(\overset{1}{L^1}, \ldots, \overset{n}{L^n}\right) = 0.$$

Соотношением между операторами $A^1, \ldots, A^n$ назовем любое равенство вида

$$\varphi\left(\overset{1}{A^{i_1}}, \ldots, \overset{m}{A^{i_m}}\right) = 0 \tag{2.7}$$

с некоторым символом φ и индексами i_α из набора $\{1, \ldots, n\}$.

Лемма 2.3 [101]. *Упорядоченное исчисление* μ: $f \to f\left(\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}\right)$ *инъективно, т. е. нулевой оператор может* *быть получен лишь из нулевого символа, в том и только в том случае, когда левые операторы упорядоченного регулярного представления* $L^1, \ldots, L^n$ *подчинены* (2.6) *и всем соотношениям, которым удовлетворяют операторы* $A^1, \ldots, A^n$. *При этом* $*$*-произведение, определенное в лемме* 2.1, *ассоциативно. То же верно и для вейлевского исчисления.*

Доказательство. Аналогично лемме 2.1 можно показать, что

$$\varphi\left(\overset{1}{A}{}^{i_1}, \ldots, \overset{m}{A}{}^{i_m}\right)\mu(f) = \mu\left(\varphi\left(\overset{1}{L}{}^{i_1}, \ldots, \overset{m}{L}{}^{i_m}\right)f\right).$$

Поэтому из соотношения (2.7) и инъективности μ следует соотношение

$$\varphi\left(\overset{1}{L}{}^{i_1}, \ldots, \overset{m}{L}{}^{i_m}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Наоборот, если для любого соотношения (2.7) выполнено (2.8) и если $\mu(f) = 0$, то $f\left(\overset{1}{L}{}^1, \ldots, \overset{n}{L}{}^n\right) = 0$. Но тогда в силу (2.6) $f = 0$, т. е. μ инъективно.

Ассоциативность $*$-произведения следует из ассоциативности умножения в алгебре операторов и инъективности μ. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь абстрактную алгебру, натянутую на некоторые образующие $A^1, \ldots, A^n$ с некоторым числом соотношений вида (2.7). Левое регулярное представление этой алгебры определим, как в (2.1) (или в (2.1а)). Существование операторов $L^1, \ldots$ $\ldots, L^n$ означает, что любой элемент алгебры можно записать в виде полинома от стандартно упорядоченных образующих $\overset{1}{A}{}^1, \ldots, \overset{n}{A}{}^n$. Если такой полином единствен: то говорят, что в алгебре выполнено *свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта* (ПБВ).

Лемма 2.3 утверждает, что свойство ПБВ выполнено тогда и только тогда, когда операторы $L^1, \ldots, L^n$ подчинены (2.6) и исходным соотношениям, т. е. удовлетворяют (2.8). В терминах правых операторов $R^1, \ldots, R^n$ формулировка этого утверждения такая: свойство ПБВ выполнено тогда и только тогда, когда $1*g = g$ и R^i удовлетворяют соотношениям, сопряженным к (2.7):

$$\varphi\left(\overset{1}{R}{}^{i_m}, \ldots, \overset{m}{R}{}^{i_1}\right) = 0. \tag{2.8a}$$

Уравнения (2.8) или (2.8а) назовем *обобщенными условиями Якоби* [100, 101].

В классической ситуации, когда речь идет об алгебре с определяющими соотношениями

$$A^j A^k - A^k A^j - i\lambda_s^{kj} A^s = 0; \quad k, j = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

где $\lambda_s^{kj} = \mathrm{const}$, операторы L^j были вычислены в (2.28), (2.28а) приложения 1. Нетрудно проверить, что эти операторы L^j сами удовлетворяют соотношениям (2.9) тогда и только тогда, когда структурные константы λ_s^{kj} подчинены тождествам (1.26) приложения 1. Таким образом, эти тождества представляют собой в данном случае обобщенные условия Якоби. Лемма 2.3 здесь утверждает, что указанные тождества необходимы и достаточны для того, чтобы любой полином от образующих $A^1, \ldots, A^n$ мог быть однозначно записан в виде вейлевского (или упорядоченного) полинома. Это утверждение — классическая теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта [122].

Пример 2.1. *Матрицы Паули.* Обозначим

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Эти матрицы антикоммутируют:

$$\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1,\quad \sigma_1\sigma_3=-\sigma_3\sigma_1,\quad \sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2. \tag{2.11}$$

Поэтому в силу формулы квазикоммутации имеем $\sigma_i f(\sigma_j)=$ $=f(-\sigma_j)\sigma_i$ при $i\neq j$. Следовательно,

$$\sigma_1\left[f\left(\overset{1}{\sigma_1},\ \overset{2}{\sigma_2},\ \overset{3}{\sigma_3}\right)\right]=\overset{3}{\sigma_1}f\left(\overset{1}{\sigma_1},\ \overset{2}{\sigma_2},\ -\overset{4}{\sigma_3}\right)=\overset{1}{\sigma_1}f\left(\overset{1}{\sigma_1},\ -\overset{2}{\sigma_2},\ -\overset{3}{\sigma_3}\right),$$

т. е. $L^1=\xi^1 I_2 I_3$, где I_k — оператор инверсии (смены знака) по k-й переменной. Аналогично $L^2=\xi^2 I_3$ и $L^3=\xi^3$. Эти операторы L^1, L^2, L^3 удовлетворяют соотношениям (2.11). Таким образом, для алгебры с определяющими соотношениями (2.11) обобщенные условия Якоби выполнены.

Но конкретная реализация соотношений (2.11) матрицами Паули подчинена еще целому ряду других соотношений, например

$$[\sigma_1,\ \sigma_2]=2i\sigma_3,\quad [\sigma_2,\ \sigma_3]=2i\sigma_1,\quad [\sigma_3,\ \sigma_1]=2i\sigma_2, \tag{2.12}$$

которым построенные операторы L^1, L^2, L^3 не удовлетворяют. В силу леммы 2.3 это означает, что исчисление $f\to f\left(\overset{1}{\sigma_1},\ \overset{2}{\sigma_2},\ \overset{3}{\sigma_3}\right)$ не инъективно, т. е. свойство ПБВ в алгебре с соотношениями (2.11), (2.12) не выполнено.

Аналогично можно использовать именно соотношения (2.12) в качестве исходных и построить по ним операторы левого регулярного представления. Они не будут удовлетворять соотношениям (2.11).

Все это относится и к вейлевским функциям от матриц Паули. Отметим попутно полезную формулу для вейлевских функций [149]:

$$f\left(\overset{\omega}{\sigma_1},\ \overset{\omega}{\sigma_2},\ \overset{\omega}{\sigma_3}\right)=\mathbb{1}\cdot\int_{S^2}\left(1+|\xi|\frac{\partial}{\partial|\xi|}\right)f(\xi)\,d\Omega+\int_{S^2}\sigma_j\frac{\partial}{\partial\xi^j}f(\xi)\,d\Omega(\xi),$$

где $d\Omega$ — стандартная нормированная мера на единичной сфере.

Пример 2.2. *Циклические квадратичные соотношения*

$$[A,\ B]=C^2,\quad [B,\ C]=A^2,\quad [C,\ A]=B^2.$$

Каждый полином от образующих A, B, C можно записать в виде полинома от упорядоченных образующих $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{C}$. Например, для полиномов третьей степени:

$$AB^2 = C^2B + CA^2, \qquad BC^2 = CA^2 - B^2A,$$
$$AC^2 = -CB^2 - BA^2, \quad A^2C = -B^2A - C^2B,$$
$$A^2B = C^2A - CB^2, \qquad B^2C = C^2A + BA^2$$

и для полиномов четвертой степени:

$$\begin{aligned} &A^2B^2 = C^4 + C^2BA - CB^3, \\ &B^2C^2 = A^4 + CBA^2 - B^3A, \\ &A^2C^2 = B^4 - C^3B - BA^3 - 2C^2A^2, \\ &AB^3 = C^3A, \\ &AC^3 = B^3A - A^4 - C^2B^2 - 2CBA^2, \\ &BC^3 = -C^3B + B^4 - C^2A^2 - BA^3 - CB^2A \end{aligned}$$

и т. д. по индукции. Свойство ПБВ здесь выполнено (но явные формулы для операторов регулярного представления не известны); см. [21].

Аналогичная картина имеется в алгебре с четырьмя образующими [123]:

$$\begin{aligned} &[S_0,\ S_\alpha] = iJ_{\beta\gamma}(S_\beta S_\gamma + S_\gamma S_\beta), \\ &[S_\alpha,\ S_\beta] = i(S_0 S_\gamma + S_\gamma S_0), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где (α, β, γ) — циклическая перестановка тройки индексов $(1, 2, 3)$, а $J_{\beta\alpha} \equiv \dfrac{J_\alpha - J_\beta}{J_\gamma}$, $J_\alpha = \text{const}$. Простейшие представления соотношений (2.13) дают всё те же матрицы Паули: $S_\alpha = \sigma_\alpha$, $S_0 = I$ или трехмерные матрицы:

$$S_1 = \sqrt{2J_2J_3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S_2 = \sqrt{2J_3J_1}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & +i & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = 2\sqrt{J_1J_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_0 = \begin{bmatrix} J_3 & 0 & J_1 - J_2 \\ 0 & J_1 + J_2 - J_3 & 0 \\ J_1 - J_2 & 0 & J_3 \end{bmatrix}.$$

Бесконечные серии представлений этой алгебры указаны в [123]. Свойство ПБВ выполнено. Если все числа J_1, J_2, J_3 различны, то явные формулы для операторов регулярного представления не известны. Вырожденный случай $J_1 = J_2$ разобран ниже в примере 2.6.

Пример 2.3. *Обобщенные сдвиги и соотношения между их генераторами.* Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое множество и для каждого $x \in \mathscr{M}$ задан линейный оператор U^x в пространстве функций $\mathbf{F}(\mathscr{M})$ так, что выполнены аксиомы

$$\begin{aligned} &U^x U^y = U^y_x U^x\ {}^{*)}, \\ &U^e = I \text{ для некоторой точки } e \in \mathscr{M}, \\ &(U^x f)(e) = f(x) \text{ для любой функции } f \text{ на } \mathscr{M}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

*) Нижний индекс у операторов, например индекс x в обозначении U^y_x, указывает на переменную, по которой действует оператор.

Тогда U называется *обобщенным сдвигом* на $\mathscr{M}$, а отображение Δ: $\mathbf{F}(\mathscr{M}) \to \mathbf{F}(\mathscr{M}) \otimes \mathbf{F}(\mathscr{M})$, $\Delta(f)(y, x) = (U^x f)(y)$ называется *коумножением* в $\mathbf{F}(\mathscr{M})$.

Обычно рассматривают лишь гладкие сдвиги, т. е. предполагают, что $\mathscr{M}$ гладкое многообразие, U^x определен на гладких функциях и $(U^x f)(y)$ гладко зависит от x, $y \in \mathscr{M}$. В этом случае $\mathbf{F}(\mathscr{M}) = \mathscr{F}(\mathscr{M})$ — алгебра гладких функций на $\mathscr{M}$. Простейший пример обобщенного сдвига — это групповой сдвиг $(U^x f)(y) = f(yx)$, где x, $y \in \mathscr{M}$ — группа Ли. Обобщенные сдвиги были впервые введены Дельсартом [170] именно как естественное обобщение групповых.

Пример негруппового сдвига на прямой:

$$(U^x f)(z) = 2f(z+x) - f(z) - f(x) + f(0). \tag{2.15}$$

Множества подобных примеров можно найти в работах по теории гиперкомплексных систем, гипергрупп, обобщенных сдвигов и алгебр Хопфа [9, 37, 89, 92, 93].

Каждый обобщенный сдвиг порождает в пространстве обобщенных функций (распределений) на $\mathscr{M}$ *свертку* по формуле

$$\varphi * \psi = \langle \psi, U \rangle^* \varphi,$$

где звездочка сверху обозначает сопряжение оператора. Если действие обобщенной функции на основную записывать в виде интеграла, то формулу для свертки можно представить так:

$$\langle \varphi * \psi, f \rangle = \int_{\mathscr{M}} \varphi(z) \int_{\mathscr{M}} \psi(x) (U^x f)(z)\, dx\, dz = \langle \varphi \otimes \psi, \Delta(f) \rangle.$$

Свертка ассоциативна и δ-функция Дирака δ_e, сосредоточенная в точке $e \in \mathscr{M}$, является ее двусторонней единицей.

При нарушении третьей аксиомы (2.14) оператор U мы будем называть *почти-обобщенным сдвигом*, а соответствующую операцию $\varphi * \psi$ — *почти-сверткой*. Функция δ_e является правой единицей почти-свертки.

Представлением обобщенного сдвига U в векторном пространстве $\mathscr{H}$ называется семейство линейных операторов $\{T^x \mid x \in \mathscr{M}\}$ на $\mathscr{H}$ такое, что

$$T^x \cdot T^y = U_x^y T^x, \quad T^e = I. \tag{2.14a}$$

Если представление T^x гладко зависит от x, то можно определить представление сверточной алгебры:

$$\Pi(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \langle \varphi, T \rangle = \int \varphi(x) T^x\, dx.$$

При этом

$$\Pi(\varphi) \cdot \Pi(\psi) = \Pi(\varphi * \psi).$$

Генераторами гладкого обобщенного сдвига U называются линейные операторы u^i, заданные формулой

$$u^i = \frac{\partial}{\partial x_i} U^x \Big|_{x=e}.$$

Очевидно, в точке e генераторы совпадают с касательными векторами:

$$u^i\Big|_e = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_e.$$

Генераторы группового сдвига всюду на $\mathscr{M}$ являются (левоинвариантными) векторными полями. Но, например, генератор сдвига (2.15)

$$u_z f(z) = 2f'(z) - f'(0)$$

вообще не является дифференциальным оператором.

Для любого гладкого представления T обобщенного сдвига его генераторами называются линейные операторы

$$A^i = \frac{\partial}{\partial x_i} T^x\Big|_{x=e}.$$

Дифференцирование (2.14) и (2.14a) по y в точке $y=e$ дает перестановочные формулы:

$$u_x^i U^x = U^x u^i, \quad T^x A^i = u_x^i T^x. \tag{2.14b}$$

Пусть $\mathscr{P}$ — полином на $\mathbf{R}^N$, $N = \dim \mathscr{M}$. Его преобразованием Фурье относительно обобщенного сдвига U назовем следующее распределение на $\mathscr{M}$:

$$\tilde{\mathscr{P}}(x) = \mathscr{P}(u^{1*}, \ldots, u^{N*})\, \delta_e(x).$$

Тогда вейлевский полином от генераторов представления T можно записать в виде $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A^1, \ldots, A^N) = \Pi(\tilde{\mathscr{P}})$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}(A)\cdot\Pi(\varphi) = \Pi(\tilde{\mathscr{P}} * \varphi) = \Pi(\mathscr{P}(u^{1*}, \ldots, u^{N*})\varphi),\\
&\mathscr{P}(A)\cdot Q(A) = \Pi(\tilde{\mathscr{P}} * \tilde{Q}).
\end{aligned}$$

Если в алгебре, порожденной генераторами $A^1, \ldots, A^N$, существуют регулярное представление и $*$-произведение, то мы будем иметь

$$\widetilde{\mathscr{P} * Q} = \tilde{\mathscr{P}} * \tilde{Q},$$

где слева стоит $*$-произведение символов, а справа — свертка обобщенных функций на $\mathscr{M}$.

Свертка Фурье-образов, как мы видели на примере групп Ли (пример 1.9 приложения 1), может существовать и в том случае, когда $*$-произведение самих символов не определено. Поэтому свертка и порождающий ее обобщенный сдвиг — более удобный, глобальный объект. Ее генераторы u^j — глобальные аналоги операторов правого регулярного представления R^j.

Замечание 2.1. Координаты $x_1, \ldots, x_N$ в окрестности точки e на $\mathscr{M}$ называются *координатами I рода*, если $U^x = \exp(x_1 u^1 + \ldots + x_N u^N)$. Если выразить генераторы u^j в этих координатах: $u_z^j = -ir^j\left(\overset{1}{i\partial/\partial z}, \overset{2}{z}\right)$, то для операторов правого регулярного представления получим следующее (локальное!) выражение: $R^j = r^j\left(\overset{2}{\xi},\ i\overset{1}{\partial/\partial\xi}\right)$, где $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^N)$ — координаты в пространстве $\mathbf{R}^N \approx T_e^*\mathcal{M}$, на котором заданы символы (см. опять пример 1.9 приложения 1).

До сих пор мы всегда двигались по цепочке: (операторы A^j) $\to$ (перестановочные соотношения между A^j) $\to$ (регулярное представление R^j) $\to$ (соотношения между R^j (обобщенные условия Якоби)). Ясно, что вместо этих последних можно изучать соотношения между генераторами u^j обобщенного сдвига на $\mathcal{M}$.

Лемма 2.4. (a) *Любое соотношение между генераторами обобщенного сдвига эквивалентно сужению этого соотношения в точку* e [37].

(b) *Если генераторы обобщенного сдвига являются векторными полями на $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ — группа Ли или ее фактор по дискретной подгруппе, а обобщенный сдвиг совпадает с правым групповым сдвигом.*

(c) *Если полиномы N-й степени от генераторов порождают в точке e джет конечного порядка, то генераторы удовлетворяют N-линейным перестановочным соотношениям.*

Доказательство. (a) В силу (2.14b) имеем

$$\mathcal{P}\left(\overset{1}{u^{i_1}}, \ldots, \overset{k}{u^{i_k}}\right)_x = U^x \cdot \mathcal{P}\left(\overset{1}{u^{i_1}}, \ldots, \overset{k}{u^{i_k}}\right)\Big|_e,$$

т. е. любой полином от генераторов в точке $x\in\mathcal{M}$ получается из того же полинома в точке e сдвигом U^x. Поэтому соотношение между генераторами выполнено в каждой точке на $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда оно выполнено в точке e.

(b) Если $u^i_z = a^i_s(z)\,\partial/\partial z_s$, то $[u^i, u^j]\big|_e = \lambda^{ij}_k u^k\big|_e$, где $\lambda^{ij}_k = (\partial a^j_k/\partial z_i - \partial a^i_k/\partial z_j)\big|_{z=e}$. Таким образом, генераторы u^i в точке e, а значит, и всюду на $\mathcal{M}$ удовлетворяют соотношениям Ли со структурными константами λ^{ij}_k. Отсюда стандартно следует [227], что $\mathcal{M}$ — группа Ли (если она односвязна), а u^i — левоинвариантные поля на группе.

(c) Пусть полиномы N-й степени от u^i в точке e порождают джет M-го порядка. Тогда N-я степень генераторов выражается линейно через производные:

$$u^{i_1}\ldots u^{i_N}\big|_e = \sum_{|\alpha|\leqslant M} c_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha\Big|_{z=e}.$$

И наоборот, каждое дифференцирование $(\partial/\partial z)^\alpha|_{\alpha=e}$ выражается через некоторый полином $\mathcal{P}_\alpha(u^1, \ldots, u^m)\big|_e$ степени не более N от генераторов u^i. Подставляя эти полиномы вместо $(\partial/\partial z)^\alpha$, получаем в точке e соотношение

$$u^{i_1}\ldots u^{i_N}\big|_e = \sum c_\alpha \mathcal{P}_\alpha(u^1, \ldots, u^m)\big|_e.$$

Следовательно, такие N-линейные соотношения выполнены всюду на $\mathcal{M}$. Лемма доказана.

Отметим, что обобщенные сдвиги с линейными соотношениями между их генераторами и аналог теорем Ли для этого случая были подробно рассмотрены в [89].

Если задан какой-то обобщенный сдвиг на $\mathscr{M}$ и его генераторы удовлетворяют соотношениям

$$\varphi\left(\overset{1}{u}{}^{i_1}, \ldots, \overset{m}{u}{}^{i_m}\right) = 0,$$

то таким же соотношениям удовлетворяют и генераторы A^i любого представления этого сдвига:

$$\varphi\left(\overset{1}{A}{}^{i_1}, \ldots, \overset{m}{A}{}^{i_m}\right) = 0.$$

В алгебре M, порожденной такими (и только такими) соотношениями, обобщенные условия Якоби будут заведомо выполнены. Поэтому, двигаясь по обратной цепочке: (свертка на $\mathscr{M}$) $\to$ (обобщенный сдвиг на $\mathscr{M}$) $\to$ (соотношения между его генераторами) $\to$ (алгебра M, порожденная этими соотношениями), мы всегда будем получать «хорошие» алгебры, в которых, например, заведомо выполнено свойство ПБВ.

Многообразие $\mathscr{M}$, на котором определена свертка, играет для такой алгебры M ту же роль, какую группа Ли играет для алгебры Ли. Но какой-либо аналог группового закона на $\mathscr{M}$ в общем случае, конечно, отсутствует. Будем называть $\mathscr{M} = \operatorname{cospec}(M)$ *коспектром* алгебры M.

Мы вернемся к перестановочным соотношениям между генераторами обобщенных сдвигов в п. 2.7, 2.8.

2.2. Смена упорядочения и $*$-произведения над алгеброй Гейзенберга. Нашей целью, как уже говорилось, является перечисление тех перестановочных соотношений, для которых удается вычислить $*$-произведение или свертку. Полезно начать с самого простого случая.

Знаменитый принцип неопределенности квантовой механики основан на простом неравенстве Вейля для двух операторов A и B:

$$\mathscr{D}(A)\cdot\mathscr{D}(B) \geqslant \frac{1}{2}\,|\langle[A, B]\rangle|.$$

Здесь $\mathscr{D}(A) = \langle(A - \langle A\rangle)^*(A - \langle A\rangle)\rangle$ — дисперсия, $\langle A\rangle \equiv (A\psi, \psi)$ — среднее оператора в состоянии ψ, $\|\psi\| = 1$. В частности, если $[A, B] = i\hbar I$, где $\hbar > 0$, то $\mathscr{D}(A)\mathscr{D}(B) \geqslant \hbar/2$. Это неравенство и является математической записью принципа неопределенности.

Соотношение Гейзенберга $[A, B] = i\hbar I$ уже встречалось выше в примерах 1.8, 1.10, 1.11 приложения 1. Разберем на его примере конструкции п. 2.1. Будем рассматривать сразу многомерный вариант.

Пусть заданы наборы операторов $A = (A^1, \ldots, A^n)$, $B = (B^1, \ldots, B^n)$, производящих в некоторой банаховой шкале и таких, что

$$[A^j, A^k] = [B^j, B^k] = 0, \quad [A^j, B^k] = i\hbar\delta^{jk} I.$$

Операторы упорядоченного регулярного представления набора $\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ выглядят так:

$$L_A = q + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \quad L_B = p,$$
$$R_A = q, \qquad R_B = p + i\hbar\frac{\partial}{\partial q},$$

где через (q, p) обозначены аргументы символа $f = f(q, p)$, соответствующие наборам операторов A, B.

Операторы регулярного представления вейлевского набора $\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right)$ устроены аналогично:

$$L'_A = q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}, \quad L'_B = p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q},$$
$$R'_A = q - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}, \quad R'_B = p + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q}.$$

Общие формулы (2.3), (2.5) в данном случае уточняются.

Теорема 2.1. *Для любых символов $f, g \in S^\infty(\mathrm{R}^{2n})$ справедливы формулы композиции:*

— *в упорядоченном случае*

$$\left[f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\cdot\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right] = (f * g)\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right), \tag{2.16}$$

где

$$(f * g)(q, p) = f\left(q + i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{2}{p}\right) g(q, p) = g\left(\overset{2}{q}, p + i\hbar\overset{1}{\frac{\partial}{\partial q}}\right) f(q, p);$$

— *в вейлевском случае*

$$\left[f\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right)\right]\cdot\left[g\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right)\right] = (f * g)\left(\overset{\omega}{A}, \overset{\omega}{B}\right),$$

где

$$(f * g)(z) = f\left(\overset{2}{z} + \frac{i\hbar}{2} J\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right) g(z) = g\left(\overset{2}{z} - \frac{i\hbar}{2} J\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right) f(z),$$
$$z \equiv (q, p), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16a}$$

Операция (2.16), а также операция (2.16а) задают на $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ структуру ассоциативной полибанаховой алгебры с единицей 1.

Разложение правых частей (2.16), (2.16а) по степеням $\hbar$ в обычный ряд Тейлора приводит к формулам (1.36) приложения 1.

Операция умножения (2.16а) допускает также следующую красивую геометрическую запись:

$$(f * g)(z) = \iint f(z'') g(z') e^{-\frac{4i}{\hbar}\int\limits_{\Delta(z', z'', z)} dp\wedge dq} \frac{dz'}{\pi^n}\frac{dz''}{\pi^n},$$

где интеграл от формы $dp\wedge dq$ в показателе экспоненты берется по треугольнику с вершинами в точках z, z', $z'' \in \mathbf{R}^{2n}$. Эта формула и ее обобщения на некоторые нелинейные фазовые пространства обсуждаются в работах [10, 11].

Рассмотрим теперь связи между различными расстановками образующих A^i, B^j.

Лемма 2.5. *Оператор* $\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial q_j\,\partial p^j}$, *производящий в алгебре* $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ (*см. п.* 1.1 *приложения* 1). *Соответствующая ему однопараметрическая группа*

$$U_\varepsilon=\exp\left\{-i\hbar\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial p}\right\}:\ S^\infty(\mathbf{R}^{2n})\to S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$$

связывает различные расстановки образующих алгебры Гейзенберга:

$$f\left(\overset{\omega}{A},\overset{\omega}{B}\right)=(U_{-1/2}f)\left(\overset{1}{A},\overset{2}{B}\right)=(U_{1/2}f)\left(\overset{2}{A},\overset{1}{B}\right).$$

Эти формулы показывают, что вейлевская и упорядоченные расстановки преобразуются одна в другую в пространстве символов с помощью операторов перехода U_ε. Естественно попытаться расклассифицировать другие возможные расстановки по виду операторов перехода.

Пусть $\Omega(W)=\frac{1}{2}\langle\Omega W, W\rangle$, $W\in\mathbf{R}^{2n}$,— симметричная квадратичная форма. Зададим оператор перехода

$$U^\Omega=\exp\left\{-i\hbar\Omega\left(iJ\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\},\quad z\in\mathbf{R}^{2n},$$

и положим по определению

$$f(A,B)^\Omega=(U^\Omega f)\left(\overset{1}{A},\overset{1}{B}\right).\tag{2.17}$$

Если $\Omega=\begin{bmatrix}R & S'\\ S & Q\end{bmatrix}$, где блоки $R=R'$ и $Q=Q'$ симметричны, то

$$f(A,B)^\Omega=f\left(S\left(\overset{2}{A}-\overset{4}{A}\right)+\frac{\overset{2}{A}+\overset{4}{A}}{2}+\frac{1}{2}Q\left(\overset{1}{B}-\overset{5}{B}\right),\ \overset{3}{B}+\frac{1}{2}R\left(\overset{4}{A}-\overset{2}{A}\right)\right).$$

В частности, если $\Omega=\varepsilon\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, то

$$f(A,B)^\Omega=f\left(\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\overset{1}{A}+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\overset{3}{A},\ \overset{2}{B}\right)=(U_\varepsilon f)\left(\overset{1}{A},\overset{1}{B}\right).$$

Таким образом, общая Ω-расстановка операторов A, B, заданная формулой (2.17), совпадает в частных случаях с вейлевской расстановкой и упорядоченными расстановками.

Теорема 2.1 переносится на случай общей Ω-расстановки [74]:

$$f(A,B)^\Omega\cdot g(A,B)^\Omega=\left(f\overset{\Omega}{*}g\right)(A,B)^\Omega,$$

где ассоциативное произведение $\overset{\Omega}{*}$ в пространстве символов $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ вычисляется так:

$$f\overset{\Omega}{*}g=f\left(\overset{2}{z}+i\left(\frac{1}{2}J+J\Omega J\right)\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)g(z)=g\left(\overset{2}{z}-i\left(\frac{1}{2}J-J\Omega J\right)\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)f(z).$$

Пример 2.4. *Унитарная группа осциллятора* [58, 74]. Вычислим по приведенным выше формулам группу, порожденную оператором $\frac{A^2+B^2}{2}$. Будем строить ее с помощью Ω-расстановки:

$$e^{-it\frac{A^2+B^2}{2}} = g_t(A, B)^{\Omega}. \tag{2.18}$$

Для символа g_t получим задачу Коши

$$-i\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} + \frac{1}{2}(z^2) \overset{\Omega}{*} g_t(z) = 0, \quad g_0(z) = 1.$$

Отсюда нетрудно явно вычислить $g_t = e^{-iS_t}/\sqrt{J_t}$; например, если $\Omega = \varepsilon\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$, то

$$S_t(q, p) = \frac{4\varepsilon qp\,(1-\cos t) + \sin t\,(q^2+p^2)}{2J_t},$$

$$J_t = (1/2 - 2\varepsilon^2) + (1/2 + 2\varepsilon^2)\cos t.$$

Видно, что, пока $|t| < \arccos\frac{\varepsilon^2 - 1/4}{\varepsilon^2 - 1/4}$, функции S_t, J_t гладко зависят от t и задают однопараметрическую группу осциллятора по формуле (2.18). Но существует такая точка t, в которой представление (2.18) с $\Omega = \varepsilon\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$ перестает быть справедливым. Однако если выбрать другую расстановку, например $\Omega = \begin{bmatrix} \mathrm{I}/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$, то в этом случае $J_t = \frac{3}{2} + \sin t - \frac{1}{2}\cos t$ в нуль не обращается при всех t и представление (2.18) имеет место равномерно по параметру t. Вычислить фразу S_t, соответствующую такой расстановке Ω, мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

На этом мы расстаемся с алгеброй Гейзенберга и отсылаем читателя к гл. IV, в которой эта алгебра используется как локальная модель при изучении нелинейных коммутационных соотношений в квазиклассическом приближении.

Именно нелинейные соотношения нас будут интересовать всюду ниже.

2.3. Полулинейные коммутационные соотношения. Рассмотрим следующее естественное обобщение линейных соотношений (2.9):

$$\begin{aligned} &[A^j, A^k] = i\Delta_s^{jk}(B)A^s, \quad j,\ k = 1, \ldots, n, \\ &[B^l, A^k] = -i\mu^{lk}(B), \quad r,\ l = 1, \ldots, m, \\ &[B^l, B^r] = 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь Δ_s^{jk}, μ^{lk} — некоторые заданные функции от m переменных, $A = (A^1, \ldots, A^n)$ и $B = (B^1, \ldots, B^m)$ — вейлевские наборы операторов. По повторяющимся индексам всюду подразумевается суммирование.

В качестве простейшего примера можно выбрать

$$A^j = ia^{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^k}, \quad B^k = \xi^k, \quad \text{где} \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Если матрица $a=((a^{jk}))$ нигде не вырождена, то такие операторы удовлетворяют соотношениям (2.19), если положить

$$\Delta_s^{jk}=(a^{jm}\partial_m a^{kl}-a^{km}\partial_m a^{jl})\,a_{ls}^{-1}, \quad \mu^{lk}=a^{kl}.$$

В этом случае для каждого ξ числа $\Delta_s^{jk}(\xi)$ являются структурными константами алгебры Ли, если все формы $a_{ls}^{-1}d\xi^l$ замкнуты.

Если матрица $a(\xi)$ вырождается, но удовлетворяет условиям Якоби:

$$a^{jk}=-a^{kj}, \quad \underset{(j,\,k,\,l)}{\mathfrak{S}}\, a^{jm}\partial_m a^{kl}=0,$$

то операторы $A=ia(\xi)\,\partial/\partial\xi$, $B=\xi$ также подчинены соотношениям (2.19). В этом случае числа $\Delta_s^{jk}(\xi)$, вообще говоря (если функции a^{jk} нелинейны), не являются структурными константами алгебры Ли.

Построим теперь для соотношений (2.19) операторы правого регулярного представления, пользуясь методом [61].

Обозначим через $\mathcal{B}=\mathcal{B}(b,\,t)$ решение задачи Коши:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}=\mu(\mathcal{B})\,z, \quad \mathcal{B}|_{t=0}=b, \tag{2.20}$$

где $b\in\mathbf{R}^m$, $z\in\mathbf{R}^n$. Предположим, что решение существует при $t\in[0,\,1]$. Построим далее матрицу

$$z\cdot\Lambda(b)=((z_j\Delta_s^{jk}(b)))$$

и определим

$$R^b(z)=\left(\int_0^1 \operatorname{Exp}\left\{-\int_\tau^1 z\cdot\Lambda(\mathcal{B}(b,\,z,\,t))\,dt\right\}d\tau\right)^{-1}. \tag{2.21}$$

Здесь через Exp обозначен мультипликативный интеграл (см. пример 1.6 приложения 1).

Кроме того, предполагается, что z достаточно мало, так что обратная матрица в (2.21) существует.

Фиксируем x, y в окрестности нуля в $\mathbf{R}^n$ и обозначаем через $z_{x,\,y}(b)$ значение при $t=1$ решения задачи Коши

$$\frac{d}{dt}z=R^b(z)\,y, \quad z|_{t=0}=x. \tag{2.22}$$

Теорема 2.2. *Выполнена формула композиции*

$$e^{-ixA}e^{-iyA}=e^{-iz_{x,\,y}\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}}.$$

Доказательство [61]. Продифференцируем оператор

$$T(\tilde{x},\,x)=e^{-i\tilde{x}\cdot B}e^{-ix\cdot A}$$

по параметрам $\tilde{x}$, x и результат представим в следующем виде:

$$i\frac{\partial T}{\partial\tilde{x}}=T\tilde{\gamma}_{\tilde{x},\,x}\left(\overset{2}{B},\,\overset{1}{A}\right), \quad i\frac{\partial T}{\partial x}=T\gamma_{\tilde{x},\,x}\left(\overset{2}{B},\,\overset{1}{A}\right). \tag{2.23}$$

Укажем явные формулы для вектор-функций $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}, x}$ и $\gamma_{\tilde{x}, x}$. Во-первых, имеем

$$i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} T = e^{-i\tilde{x}\cdot B} B^j e^{-ix\cdot A} = T e^{ix\cdot \mathrm{ad}(A)} (B^j), \tag{2.24}$$

где $\mathrm{ad}(A^j)$ — операторы коммутирования с A^j слева. Заметим, что для любых функций $f_1(b), \ldots, f_n(b)$, $g(b)$ справедлива формула коммутации

$$-ix\cdot \mathrm{ad}(A)(f(B)\cdot A + g(B)) = \\ = f_j(B)\Delta_k^{sj}(B) x_s A^k + \mu^{ks}(B) x_s \partial_k f_j(B) A^j + \mu^{ks}(B) x_s \partial_k g(B).$$

Если кратко обозначить $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right) = f(B)\cdot A + g(B)$, то эти формулы можно записать так:

$$-ix\cdot \mathrm{ad}(A)\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right) = \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right),$$

где

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\Lambda(b) + \left\langle \mu(b)x, \frac{\partial}{\partial b}\right\rangle & 0 \\ 0 & \left\langle \mu(b), \frac{\partial}{\partial b}\right\rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$e^{ix\cdot \mathrm{ad}(A)}\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right) = \left(\begin{bmatrix} e^{-(x\cdot\Lambda + \langle \mu x, \partial/\partial b\rangle)} & 0 \\ 0 & e^{-\langle \mu x, \partial/\partial b\rangle} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right). \tag{2.25}$$

Заметим, что

$$e^{-t\langle \mu x, \partial/\partial b\rangle} g(b) = g(\mathscr{B}(b, x - t))$$

и, кроме того,

$$e^{-t(x\cdot\Lambda + \langle \mu x, \partial/\partial b\rangle)} f(b) = \\ = \mathrm{Exp}\left\{-\int_0^t x\cdot\Lambda(\mathscr{B}(b, u, \tau - t))\, d\tau\right\} f(\mathscr{B}(b, x, -t)), \tag{2.26}$$

где функция $\mathscr{B}$ определена в (2.20).

Применяя формулу (2.25) к правой части (2.24), приводим ее к виду (2.23), в котором

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{x}, x}(b, a) = \mathscr{B}(b, x, -1).$$

Далее, дифференцируя $T(\tilde{x}, x)$ по x и пользуясь вновь формулой (2.23), получаем

$$i\frac{\partial T}{\partial x_j} = T\int_0^1 e^{itx\cdot \mathrm{ad}(A)}(A^j)\,dt =$$

$$= T\int_0^1 dt\left[\begin{matrix}\exp\left\{-t\left(x\cdot\Lambda+\left\langle \mu x, \frac{\partial}{\partial b}\right\rangle\right)\right\}\begin{bmatrix}0\\ \cdots\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}\\ 0\end{matrix}\right]\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right).$$

Здесь в столбце единица стоит на j-м месте. Отсюда и из (2.26) следует явное выражение для вектор-функции $\gamma_{\tilde{x}, x}$ в (2.23):

$$\gamma_{\tilde{x}, x}(b, a)^j = a^k\int_0^1 \mathrm{Exp}\left\{-\int_0^t x\cdot\Lambda(\mathscr{B}(b, x, \tau-t))\,d\tau\right\}_k^j dt.$$

Обозначим $u=(\tilde{x}, x)$, $\Gamma(u)=\left(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}, x}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right), \gamma_{\tilde{x}, x}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right)$ и запишем (2.23) более просто:

$$i\frac{\partial T(u)}{\partial u} = T(u)\Gamma(u) = T(u)\left(\Gamma(u)+i\frac{\partial}{\partial u}\right)1(u). \tag{2.27}$$

Вычисляя смешанные производные $\dfrac{\partial^2 T}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}$, получаем тождества

$$\frac{\partial\Gamma^\alpha}{\partial u_\beta}-\frac{\partial\Gamma^\beta}{\partial u_\alpha} = [\Gamma^\alpha, \Gamma^\beta],$$

которые означают, что операторы $\Gamma(u)^\alpha + i\partial/\partial u_\alpha$ при различных α коммутируют друг с другом. Поэтому из (2.27) следует, что для любой функции $\rho(u, \Gamma)$ имеет место формула перестановки

$$\rho\left(\overset{2}{u}, \overset{1}{i\partial/\partial u}\right)T(u) = T(u)\,\rho\left(\overset{2}{u}, \overset{1}{\overline{\Gamma(u)+i\partial/\partial u}}\right)1(u).$$

Подберем функцию $\rho=\rho^j$ так, чтобы

$$A^j = \rho^j\left(\overset{2}{u}, \overset{1}{\overline{\Gamma(u)+i\partial/\partial u}}\right)1(u). \tag{2.28}$$

Учитывая, что $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}, x}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$ не зависит от B и от $\tilde{x}$, а также что $\gamma_{\tilde{x}, x}\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$ не зависит от $\tilde{x}$ и линейна по A, заключаем, что функция $\rho^j=\rho^j(\tilde{x}, x, \tilde{\gamma}, \gamma)$ не зависит от $\tilde{x}$ и линейна по γ:

$$\rho^j = \gamma^k\sigma_k^j(x, \tilde{\gamma}).$$

Подставляя это выражение в (2.28), получаем

$$A^j = A^k \left(\int_0^1 \operatorname{Exp} \left\{ -\int_0^t x \cdot \Lambda (\mathcal{B}(B, x, \tau - t))\, d\tau \right\}_k^l dt \right) \times$$
$$\times \sigma_l^j (x, \mathcal{B}(B, x, -1)).$$

Отсюда следует формула $\sigma(x, \tilde{\gamma}) = R^{\tilde{\gamma}}(x)$ (в обозначениях (2.21)). Итак, $\rho^j = \gamma^k R^{\tilde{\gamma}}(x)_k^j$.

В силу (2.28) имеем

$$T(u) A^j = \rho^j \left(\overset{2}{u}, \; i\overset{1}{\partial}/\partial u \right) T(u). \tag{2.29}$$

Отсюда

$$T(u) e^{-iy \cdot A} = e^{-i \left[y \cdot \rho \left(\overset{2}{u}, \; i\overset{1}{\partial}/\partial u \right) \right]} T(u).$$

Используя найденную выше формулу для ρ^j, а также вспоминая, что $T(u) = e^{-i\tilde{x} \cdot B} e^{-ix \cdot A}$, и сокращая слева и справа на $e^{-i\tilde{x} \cdot B}$, получаем

$$e^{-ix \cdot A} e^{-iy \cdot A} = e^{\langle R^B(x) y, \; \partial/\partial x \rangle} (e^{-ix \cdot A}).$$

Отсюда и из определения функции $z_{x,y}(b)$ (2.22) следует искомая формула композиции. Теорема доказана.

Из (2.29), проинтегрировав с преобразованием Фурье $\tilde{g}$ символа $g = g(b, a)$, получим

$$\left[g \left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A} \right) \right] A^j = \int \tilde{g}(u) T(u) A^j du =$$
$$= \int \left[\rho^j \left(\overset{1}{u}, \; -i\overset{2}{\partial}/\partial u \right) \tilde{g}(u) \right] T(u) du = (R_{A^j} g) \left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A} \right),$$

где

$$R_{A^j} g = \rho^j \left(i\overset{1}{\partial}/\partial b, \; i\overset{1}{\partial}/\partial a, \; \overset{2}{b}, \; \overset{2}{a} \right) g(b, a) = a^k R^b (i\,\partial/\partial a)_k^j g(b, a). \tag{2.30}$$

Аналогично из (2.25) следует

$$e^{-ix \cdot A} (B^j) = \mathcal{B}^j (B, x, 1) e^{-ix \cdot A},$$

и потому

$$\left[g \left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A} \right) \right] B^j = (R_{B^j} g) \left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A} \right),$$

где

$$R_{B^j} = \mathcal{B}^j (b, \; i\,\partial/\partial a, \; 1). \tag{2.30a}$$

Таким образом, *в формулах* (2.30), (2.30a) *вычислены операторы* R_B, R_A *правого регулярного представления набора* $\overset{2}{B}, \overset{1}{A}$.

Теперь можно проверить, при каких ограничениях на Δ_s^{jk}, μ^{jk} они удовлетворяют исходным соотношениям (2.19), т. е. когда выполнены обобщенные условия Якоби.

Лемма 2.6. *Для полулинейных соотношений (2.19) обобщенные условия Якоби эквивалентны следующим тождествам:*

$$\Delta_s^{jk} = -\Delta_s^{kj},$$
$$\underset{(j,\,k,\,m)}{\mathfrak{S}} (\Delta_s^{jk}\Delta_r^{sm} + \partial_s\Delta_r^{jk}\mu^{sm}) = 0,$$
$$\mu^{ms}\Delta_s^{jk} + \partial_s\mu^{mk}\mu^{sj} - \partial_s\mu^{mj}\mu^{sk} = 0,$$

где $\mathfrak{S}$ обозначает суммирование по циклическим перестановкам.

2.4. Сильно нелинейные и разрешимые соотношения. Вопрос о построении операторов регулярного представления для общих алгебр с нелинейными соотношениями чрезвычайно сложен. Сейчас мы укажем класс таких алгебр, где этот вопрос успешно решается с помощью исчисления упорядоченных операторов [96]. Будем следовать схеме, предложенной в [100] и развитой в [56—58, 101].

Рассмотрим соотношения

$$A^jA^k = \sum_{s=1}^{n} A^s\omega_s^{jk}(A^j), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.31}$$

где ω_s^{jk} — заданные функции (например, полиномы), причем $\omega_s^{jj}(z) \equiv z\delta_s^j$. Если эти функции нелинейны, то соотношения (2.31) назовем *сильно нелинейными*.

Запишем (2.31) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^n \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^n \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \omega^{(j)}(A^j),$$

где $\omega^{(j)}(\xi)$ — матрицы с элементами $\omega_s^{jk}(\xi)$. Применяя формулу квазикоммутации, получаем

$$\begin{bmatrix} g(A^j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g(0) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^n \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & \dots & A^n \\ 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} g(\omega^{(j)}(A^j))$$

или

$$g(A^j)A^k = \sum_{s=1}^{n} A^s[g(\omega^{(j)}(A^j))]_s^k.$$

Здесь $[\dots]_s^k$ — это (s, k)-й элемент матрицы, стоящей в квадратных скобках. Многократно используя полученную формулу перестановки, придем к тождеству

$$\overset{j}{A^j} g(\overset{1}{A^1}, \dots, \overset{n}{A^n}) = \sum_{s=1}^{n} A^s(Dg)_s^j(\overset{1}{A^1}, \dots, \overset{n}{A^n}).$$

Здесь оператор D переводит скалярные функции в матричные функции от n переменных по правилу

$$[Dg]_s^j(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \begin{cases} \Big[g\Big(\xi^1, \ldots, \xi^j, \overset{1}{\omega^{(j+1)}}(\xi^{n+1}) \ldots, \overset{n-j}{\omega^{(n)}}(\xi^n)\Big)\Big]_s^j & \text{при } j < n, \\ g(\xi^1, \ldots, \xi^n)\,\delta_s^n & \text{при } j = n. \end{cases}$$

Можно продолжить этот оператор на любые матричные функции так:

$$[\mathcal{D}G]_s^j = \sum_{k=1}^n (DG_k^j)_s^k, \quad G \equiv ((G_k^j(\xi))).$$

В итоге мы получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Если существует обратный* $\mathcal{D}^{-1}$, *то операторы* $L^j = \sum_{s=1}^n \xi^s(\mathcal{D}^{-1})_s^j$ *являются левыми операторами упорядоченного регулярного представления набора* $\overset{1}{A^1}, \ldots, \overset{n}{A^n}$, *удовлетворяющего соотношениям* (2.31).

Формальное условие существования $\mathcal{D}^{-1}$ такое: $\det\Big(\Big(\frac{d}{d\xi}\omega^{(j)}(\xi)\Big)\Big) \neq 0$ при $j = 2, \ldots, n$. В частности, оно выполнено, если

$$\omega_s^{jk}(\xi) = \varkappa_s^{jk}\xi + \gamma_s^{jk}, \quad \det((\varkappa^{(j)})) \neq 0.$$

Другой важный случай: все матрицы $\omega^{(j)}(\xi)$ треугольные. Здесь оператор $\mathcal{D}^{-1}$ удается явно вычислить. Такие соотношения назовем *разрешимыми*.

Пример 2.5. *Циклические антикоммутационные соотношения* [100].

$$A^1A^2 + A^2A^1 = A^3, \quad A^2A^3 + A^3A^2 = A^1, \quad A^3A^1 + A^1A^3 = A^2. \tag{2.32}$$

Эти соотношения реализуются, например, матрицами

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{D}$ в данном случае действует по формуле

$$(\mathcal{D}G)_s^j = \sum_{k=1}^3 b_s^k\Big(-i\overset{1}{\partial/\partial\xi}, \overset{2}{\xi}\Big)\,G_k^j(\xi),$$

где

$$b(x, \xi) = \begin{bmatrix} e^{-2i\xi^3x_3 - 2i\xi^2x_2}\cos x_3\cos x_2 & ie^{-2i\xi^3x_3}\sin x_3 & 0 \\ ie^{-2i\xi^3x_3 - 2i\xi^2x_2}\sin x_3\cos x_2 & e^{-2i\xi^3x_3}\cos x_3 & 0 \\ ie^{-2i\xi^2x_2}\sin x_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\det b(x, \xi)$ обращается в нуль при $x_2 = \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ На функциях из $S^\infty(\mathbf{R}^3)$, носитель преобразования Фурье которых по переменной ξ^2 не содержит точек

$\pi/2+\pi k$ (при любых ξ^1, ξ^2), оператор $\mathcal{D}$ обратим. Указанный класс функций обозначим через $\mathfrak{X}$; он включает в себя, в частности, все полиномы.

Итак, для любого $f\in\mathfrak{X}$ и любого полинома $\mathcal{P}$ на $\mathbf{R}^3$ имеем

$$\left[\mathcal{P}\left(\overset{1}{A^1},\ \overset{2}{A^2},\ \overset{3}{A^3}\right)\right]\cdot\left[f\left(\overset{1}{A^1},\ \overset{2}{A^2},\ \overset{3}{A^3}\right)\right]=(\mathcal{P}*f)\left(\overset{1}{A^1},\ \overset{2}{A^2},\ \overset{3}{A^3}\right),$$

где

$$\mathcal{P}*f=\mathcal{P}\left(\overset{1}{L^1},\ \overset{2}{L^2},\ \overset{3}{L^3}\right)f$$

и операторы $L^j\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ определены формулами:

$$L^j=l^j\left(-i\overset{1}{\partial/\partial\xi},\ \overset{2}{\xi}\right),$$

$$l^1(x,\ \xi)=\xi^1I_2I_3\frac{\cos x_3}{\cos x_2}+i\xi^2I_3\sin x_3+i\xi^3I_3\operatorname{tg}x_2\cos x_3,$$

$$l^2=i\xi^1I_2I_3\frac{\sin x_3}{\cos x_2}+\xi^2I_3\cos x_3-\xi^3I_3\operatorname{tg}x_2\sin x_3,$$

$$l^3=\xi^3,$$

I_k — инверсия (смена знака) по переменной ξ^k. Нетрудно проверить, что операторы L^1, L^2, L^3 удовлетворяют соотношениям (2.32). Таким образом, обобщенные условия Якоби для (2.32) выполнены.

Подчеркнем, что полученные в этом примере операторы локальны: их символы имеют особенность при $\cos x_2=0$. Такие же локальные операторы удается построить для широкого класса градуированных лиево-йордановых алгебр [68, 107]. Глобальные версии операторов L^j, в том числе для соотношений (2.32), будут рассмотрены ниже.

Пример 2.6. *Вырожденные соотношения Склянина — Фаддеева.* Из (2.13) при $J_1=J_2=1$, $J_3=1+\omega$, где $\omega\geqslant 0$, $\omega\neq 1$, получим такие соотношения (см. [124, 127]) между четырьмя образующими S_0, S_1, S_2, S_3:

$$\begin{aligned}&[S_0,\ S_1]=i\omega(S_2S_3+S_3S_2), && [S_0,\ S_2]=-i\omega(S_1S_3+S_3S_1),\\ &[S_0,\ S_3]=0, && [S_\alpha,\ S_\beta]=i(S_0S_\gamma+S_\gamma S_0).\end{aligned}\tag{2.33}$$

Если ввести в этой алгебре новые образующие

$$a_\pm=S_1\pm iS_2,\quad b_\pm=\pm S_0+\sqrt{\omega}\,S_3,$$

то соотношения (2.33) перепишутся так:

$$\begin{aligned}&[b_+,\ a_\pm]=\pm\sqrt{\omega}(b_+a_\pm+a_\pm b_+), && [b_-,\ a_\pm]=\mp\sqrt{\omega}(b_-a_\pm+a_\pm b_-),\\ &[b_+,\ b_-]=0, && [a_+,\ a_-]=\sqrt{\omega}(b_+^2-b_-^2).\end{aligned}$$

Полезно представить их не как коммутационные, а как перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned}&b_+a_+=\alpha a_+b_+, && b_-a_+=\frac{1}{\alpha}a_+b_-,\\ &b_+a_-=\frac{1}{\alpha}a_-b_+, && b_-a_-=\alpha a_-b_-,\\ &[b_+,\ b_-]=0, && [a_+,\ a_-]=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(b_+^2-b_-^2),\end{aligned}\tag{2.34}$$

где

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{\omega}}{1-\sqrt{\omega}}.$$

Очевидно, эти соотношения разрешимые.

Нетрудно вычислить левое регулярное представление набора

$$\overset{4}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-.$$

Скалярные переменные, соответствующие элементам этого набора, обозначим w, z, y, x. Тогда $L_{b_+}=w$, $L_{b_-}=z$. Далее в силу формулы квазикоммутации и в силу двух верхних соотношений (2.34) имеем

$$a_+\left[f\left(\overset{4}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)\right]=\overset{4}{a}_+f\left(\frac{1}{\alpha}\overset{5}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)=$$

$$=\overset{2}{a}_+f\left(\frac{1}{\alpha}\overset{4}{b}_+,\ \alpha\overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right).$$

Поэтому, $L_{a_+}=y\cdot I_z^{\alpha}\cdot I_w^{1/\alpha}$, где через I_z^{α} обозначен оператор растяжения в α раз по переменной z:

$$I_z^{\alpha}f(w,\ z,\ y,\ x)\overset{\text{def}}{=}f(w,\ \alpha z,\ y,\ x).$$

Аналогично получаем цепочку перестановок для элемента a_-:

$$a_-\left[f\left(\overset{4}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)\right]=\overset{4}{a}_-f\left(\alpha\overset{5}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)=$$

$$=\overset{3}{a}_-f\left(\alpha\overset{5}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{4}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right),$$

и далее применяем формулу коммутации, учитывая последние соотношения (2.34):

$$a_-\left[f\left(\overset{4}{b}_+,\ \overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)\right]=\overset{1}{a}_-f\left(\alpha\overset{4}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{3}{b}_-,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)+$$

$$+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\overset{3}{\overline{(b_-^2-b_+^2)}}\,\delta_yf\left(\alpha\overset{6}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{5}{b}_-,\ \overset{4}{a}_+,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right).\qquad(2.35)$$

Теперь используем перестановочные тождества:

$$a_+b_-^2=b_-^2(\alpha^2a_+),\quad a_+b_+^2=b_+^2\left(\frac{1}{\alpha^2}a_+\right).$$

Отсюда имеем

$$\overset{3}{\overline{(b_-^2-b_+^2)}}\,\delta_yf\left(\alpha\overset{6}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{5}{b}_-,\ \overset{4}{a}_+,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)=$$

$$=\overset{3}{b_-^2}\delta_yf\left(\alpha\overset{4}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{3}{b}_-,\ \alpha^2\overset{2}{a}_+,\ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right)-$$

$$-\overset{4}{b_+^2}\delta_yf\left(\alpha\overset{4}{b}_+,\ \frac{1}{\alpha}\overset{3}{b}_-,\ \frac{1}{\alpha^2}\overset{2}{a}_+\ \ \overset{2}{a}_+,\ \overset{1}{a}_-\right).$$

Вычислим участвующие здесь разностные производные:

$$\delta f(\ldots, \alpha^2 y, y, \ldots) = \frac{f(\ldots, \alpha^2 y, \ldots) - f(\ldots, y, \ldots)}{(\alpha^2-1)y},$$

$$\delta f\left(\ldots, \frac{1}{\alpha^2}y, y, \ldots\right) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\,\frac{f(\ldots, y, \ldots) - f\left(\ldots, \frac{1}{\alpha^2}y, \ldots\right)}{y}.$$

Таким образом, подставляя все это в (2.35), получаем

$$L_{a_-} = \left[x + \frac{1}{(\alpha+1)^2}\left(\frac{z^2}{y}\left(I_y^{\alpha^2}-1\right) + \alpha^2\frac{w^2}{y}\left(I_y^{1/\alpha^2}-1\right)\right)\right] I_w^{\alpha} I_z^{1/\alpha}.$$

Нетрудно проверить, что построенные операторы левого регулярного представления L_{b_+}, L_{b_-}, L_{a_+}, L_{a_-} удовлетворяют соотношениям (3.15), т. е. обобщенные условия Якоби и свойство ПБВ выполнены.

Сделаем теперь обратную линейную замену:

$$S_1 = \frac{1}{2}(L_{a_+} + L_{a_-}), \qquad S_2 = \frac{1}{2i}(L_{a_+} - L_{a_-}),$$

$$S_3 = \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}(L_{b_+} + L_{b_-}), \quad S_0 = \frac{1}{2}(L_{b_+} - L_{b_-}).$$

Получим следующее представление алгебры (2.33) разностными операторами:

$$S_1 f = \frac{x+y}{2} f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}y, x\right) + \left(\frac{z}{\alpha+1}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, \alpha^2 y, x\right) - f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, y, x\right)}{2y} +$$
$$+ \left(\frac{\alpha w}{\alpha+1}\right)^2 \frac{f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, \frac{y}{\alpha^2}, x\right) - f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, y, x\right)}{2y},$$

$$S_2 f = \frac{y-x}{2i} f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, y, x\right) - \left(\frac{z}{\alpha+1}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, \alpha^2 y, x\right) - f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, y, x\right)}{2iy} -$$
$$- \left(\frac{\alpha w}{\alpha+1}\right)^2 \frac{f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, \frac{y}{\alpha^2}, x\right) - f\left(\alpha w, \frac{z}{\alpha}, y, x\right)}{2iy},$$

$$S_3 f = \frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}(z+w) f(w, z, y, x),$$

$$S_0 f = \frac{w-z}{2} f(w, z, y, x).$$

Пример 2.7. *Квадратично-линейные соотношения.* Рассмотрим еще один простой пример разрешимых соотношений [100]:

$$BA = \alpha AB + \sigma C,$$
$$BC = \gamma CB + \nu B, \tag{2.36}$$
$$CA = \beta AC + \mu A,$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, μ, ν, σ — некоторые константы.

Нетрудно найти условия на константы, обеспечивающие свойство ПБВ на полиномах не выше третьей степени от образующих A, B, C. Для этого в мономе $A\cdot B\cdot C$ произведем перестановки соседних сомножителей по схеме:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & ACB \arrow[r] & CAB \arrow[dr] & \\ ABC \arrow[ur] \arrow[dr] & & & CBA. \\ & BAC \arrow[r] & BCA \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Верхняя цепочка дает

$$ABC = A(\gamma CB + \nu B) = \gamma\left(\frac{1}{\beta}CA - \frac{\mu}{\beta}A\right)B + \nu AB =$$
$$= \frac{\gamma}{\beta}C\left(\frac{1}{\alpha}BA - \frac{\sigma}{\alpha}C\right) + \left(\nu - \frac{\mu\gamma}{\beta}\right)AB.$$

Нижняя цепочка будет вида

$$ABC = \left(\frac{1}{\alpha}BA - \frac{\sigma}{\alpha}C\right)C = \frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1}{\beta}CA - \frac{\mu}{\beta}A\right) - \frac{\sigma}{\alpha}C^2 =$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}(\gamma CB + \nu B)A - \frac{\mu}{\alpha\beta}BA - \frac{\sigma}{\alpha}C^2.$$

Приравнивая эти два выражения и учитывая соотношение между BA и AB, получаем

$$\frac{\nu(1-\beta) - \mu(1-\gamma)}{\beta}AB + \frac{\sigma(\gamma-\beta)}{\alpha\beta}C^2 + \frac{\sigma(\nu-\mu)}{\alpha\beta}C = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\text{либо } \sigma = 0, \quad \nu(1-\beta) = \mu(1-\gamma), \\ &\text{либо } \beta = \gamma, \quad \nu = \mu. \end{aligned} \tag{2.37}$$

На самом деле эти условия являются *обобщенными тождествами Якоби* для соотношений (2.36), т. е. обеспечивают свойство ПБВ во всей алгебре, порожденной данными соотношениями. Мы докажем это, построив операторы регулярного представления.

В пространство полиномов от одной переменной ξ введем операторы растяжения:

$$I^{\alpha}f(\xi) = f(\alpha\xi),$$
$$\tilde{I}^{\alpha,\beta}f(\xi) = \frac{f(\alpha\xi) - f(\beta\xi)}{(\alpha-\beta)\xi} \equiv \delta f(\alpha\xi, \beta\xi),$$
$$\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\beta,\gamma}f(\xi) = \frac{1}{\xi^2}\left[\frac{f(\alpha\xi)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{f(\beta\xi)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{f(\gamma\xi)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\right] \equiv$$
$$\equiv \delta^2 f(\alpha\xi, \beta\xi, \gamma\xi).$$

Подобные операторы в пространстве полиномов от трех переменных $f(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, действующие по i-й переменной, будем обозначать I_i^{α}, $\tilde{I}_i^{\alpha,\beta}$, $\tilde{\tilde{I}}_i^{\alpha,\beta,\gamma}$.

В силу формул квазикоммутации из соотношений (2.36) имеем

$$\overset{4}{C}f\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{B}, \overset{3}{A}\right) = \overset{3}{C}f\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{B}, \beta\overset{4}{A}\right) + \mu\overset{3}{A}\delta_3 f\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{B}, \overset{3}{A}, \beta\overset{3}{A}\right).$$

Первое слагаемое в правой части преобразуем опять с помощью формулы квазикоммутации:

$$\overset{3}{C}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \beta\overset{4}{A}\right)=\overset{1}{C}f\left(\overset{1}{C},\ \frac{1}{\gamma}\overset{2}{B},\ \beta\overset{3}{A}\right)-\frac{\nu}{\gamma}\overset{2}{B}\delta_2 f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \frac{1}{\gamma}\overset{2}{B},\ \beta\overset{3}{A}\right).$$

Используя введенные выше операторы растяжения, записываем полученное тождество так:

$$\overset{4}{C}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right)=f_1\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right),\quad f_1\equiv L_C f,$$

где

$$L_C=\xi^1 I_3^\beta I_2^{1/\gamma}-\frac{\nu}{\gamma}\xi^2 I_3^\beta \tilde{I}_2^{1/\gamma,\ 1}+\mu\xi^3\tilde{I}_3^{\beta,\ 1}. \tag{2.38a}$$

Аналогично для образующей B имеем

$$\overset{4}{B}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right)=\overset{2}{B}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \alpha\overset{3}{A}\right)+\sigma\overset{4}{C}\delta_3 f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B};\ \overset{3}{A},\ \alpha\overset{5}{A}\right).$$

Второе слагаемое преобразуем, используя полученную ранее формулу перестановки образующей C. Получим

$$\overset{4}{B}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right)=f_2\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right),\quad f_2\equiv L_B f,$$

где

$$L_B=\sigma\xi^1\tilde{I}_3^{\alpha,\ \beta} I_2^{1/\gamma}+\xi^2\left(I_3^\alpha-\frac{\sigma\nu}{\gamma}\ \tilde{I}_3^{\alpha,\ \beta}\tilde{I}_2^{1/\gamma,\ 1}\right)+\sigma\mu\xi^3\tilde{\tilde{I}}_3^{\alpha,\ \beta,\ 1}. \tag{2.38b}$$

Ну и, конечно, для образующей A оператор L_A тривиален: .

$$\overset{4}{A}f\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right)=f_3\left(\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}\right),\quad f_3\equiv L_A f,$$

где

$$L_A=\xi^3. \tag{2.38c}$$

Формулы (2.38a, b, c) задают операторы левого регулярного представления для упорядоченного набора элементов $\overset{1}{C},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{A}$ алгебры (2.36).

Теперь вычислим перестановочные соотношения между операторами L_C, L_B, L_A, воспользовавшись следующими соотношениями между операторами растяжения:

$$\begin{gathered}
I^\alpha\circ\xi=\alpha\xi\circ I^\alpha,\\
\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}\circ\xi=\beta\xi\circ\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}+I^\alpha=\alpha\xi\circ\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}+I^\beta,\\
\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\ \beta,\ \gamma}\circ\xi=\gamma\xi\circ\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\ \beta,\ \gamma}+\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\ \beta},\\
\omega I^\omega\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}=\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}I^\omega,\\
\omega^2 I^\omega\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\ \beta,\ \gamma}=\tilde{\tilde{I}}^{\alpha,\ \beta,\ \gamma}I^\omega,\\
\tilde{I}^{p,\ q}\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}=\frac{\alpha}{p}\tilde{I}^{\alpha,\beta}\tilde{I}^{p,q}+\frac{1}{p\xi}\left(I^\beta\tilde{I}^{p,q}-I^q\tilde{I}^{\alpha,\ \beta}\right)
\end{gathered} \tag{2.39}$$

(отметим характерную «квадратичность» выписанных соотношений; именно это обстоятельство обусловливает тот факт, что операторы регулярного представления квадратичных соотношений (2.36) записываются через операторы растяжения).

Прямым подсчетом доказывается

Лемма 2.7. *Операторы* L_C, L_B, L_A *удовлетворяют исходным соотношениям* (2.36), *т. е.*

$$L_B L_A = \alpha L_A L_B + \sigma L_C,$$
$$L_B L_C = \gamma L_C L_B + \nu L_B,$$
$$L_C L_A = \beta L_A L_C + \mu L_A,$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.37).

Следствие 2.1. *Условия* (2.37) *необходимы и достаточны для того, чтобы в алгебре, порожденной образующими* A, B, C *и соотношениями* (2.36), *каждый элемент однозначно представлялся в виде полинома от* $\overset{3}{A}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{1}{C}$. *Произведение двух элементов дается формулой*

$$\left[\mathcal{P}\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{B}, \overset{1}{C}\right)\right]\cdot\left[\mathcal{Q}\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{B}, \overset{1}{C}\right)\right] = (\mathcal{P}*\mathcal{Q})\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{B}, \overset{1}{C}\right).$$

Здесь $*$ — *ассоциативная операция умножения в алгебре полиномов от трех переменных, определенных так:*

$$\mathcal{P}*\mathcal{Q} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}\left(\overset{3}{L_A}, \overset{2}{L_B}, \overset{1}{L_C}\right)\mathcal{Q}.$$

При этом $\mathcal{P}*1 = 1*\mathcal{P} = \mathcal{P}$.

2.5. Квантовое уравнение Янга — Бакстера. Заданные перестановочные соотношения часто трудно исследовать «в лоб». В этом случае бывают полезны различные преобразования образующих исходной алгебры, например типа замены переменных в примере 2.6. Общее преобразование такого типа можно искать в виде

$$A^\alpha = \sum_s \sigma_s^\alpha \otimes a^s, \tag{2.40}$$

где A^α — исходные образующие, a^s — новые образующие, σ_s^α — вспомогательные множители.

Мы рассмотрим такой специальный случай, когда множество исходных образующих организовано в квадратную ($n\times n$)-матрицу $A = ((A_\alpha^\beta))$, и вместо индекса α в (2.40) будем писать пару индексов $\binom{\beta}{\alpha}$, где α — номер строки, β — номер столбца матрицы.

Итак, наша замена переменных следующая:

$$A_\alpha^\beta = \sum_s (\sigma_s)_\alpha^\beta \otimes a^s \quad \text{или} \quad A = \sigma_s \otimes a^s. \tag{2.41}$$

Мы хотим установить связь перестановочных соотношений между элементами A_α^β и перестановочных соотношений между элементами a^s.

Логика рассуждений будет обратной: начинаем с некоторой алгебры, порожденной образующими a^s, и рассматриваем получающиеся соотношения между элементами (2.41) при специальном выборе числовых матриц σ_s.

Пусть N — алгебра с единицей I. Элемент $\mathbb{R}\in N\otimes N$ назовем *элементом Янга — Бакстера*, если выполнено тождество

$$\mathbb{R}^{12}\mathbb{R}^{13}\mathbb{R}^{23}=\mathbb{R}^{23}\mathbb{R}^{13}\mathbb{R}^{12}. \tag{2.42}$$

Здесь $\mathbb{R}^{12}, \ldots \in N\otimes N\otimes N$ определены так: если $\mathbb{R}=\sigma_s\otimes b^s$, то $\mathbb{R}^{12}=\sigma_s\otimes b^s\otimes I$, $\mathbb{R}^{13}=\sigma_s\otimes I\otimes b^s$, $\mathbb{R}^{23}=I\otimes\sigma_s\otimes b^s$.

Отметим, что каждый элемент $\mathbb{R}\in N\otimes N$ задает линейное отображение $N^*\to N$ по формуле

$$N^*\ni l\to(l\otimes \mathrm{id})\,\mathbb{R}=l(\sigma_s)\,b^s\in N. \tag{2.43}$$

Предположим теперь, что $N\subset \mathrm{Mat}\,(n, \mathbf{C})$ — подалгебра в алгебре $(n\times n)$-матриц и что задано невырожденное линейное отображение $N^*\to N$ с помощью некоторого элемента Янга — Бакстера $\mathbb{R}=\sigma_s\otimes b^s$. Можно считать, что $\{\sigma_s\}$ — базис в N.

Условие невырожденности означает, что матрицы $\{b^s\}$ также образуют базис в N. Такой элемент Янга — Бакстера назовем невырожденным, а подалгебру N — *алгеброй Янга — Бакстера* или YB-алгеброй (устоявшейся терминологии здесь пока нет; см. [49, 175]).

Умножение из N перенесем в $M\equiv N^*$ и рассмотрим функционалы $l^\beta_\alpha\in M$, которые определяются как матричные элементы

$$l^\beta_\alpha(\sigma)\overset{\mathrm{def}}{=}\sigma^\beta_\alpha,\quad \sigma\in N.$$

Через $\mathbb{R}^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}$ обозначим матричные элементы $(l^\beta_\alpha\otimes l^{\beta'}_{\alpha'})(\mathbb{R})$.

Лемма 2.8. *В алгебре, сопряженной к YB-алгебре, выполнены перестановочные соотношения*

$$\mathbb{R}^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}l^\gamma_\beta l^{\gamma'}_{\beta'}=\mathbb{R}^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'}l^{\beta'}_{\alpha'}l^\beta_\alpha. \tag{2.44}$$

Доказательство. При изоморфизме $M\to N$ функционалу l^γ_β соответствует элемент $\mathbb{R}^\gamma_\beta=(l^\gamma_\beta\otimes\mathrm{id})(\mathbb{R})=((\mathbb{R}^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'}))\in N$. Соотношения (2.44) эквивалентны соотношениям в N:

$$\mathbb{R}^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}\mathbb{R}^\gamma_\beta\mathbb{R}^{\gamma'}_{\beta'}=\mathbb{R}^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'}\mathbb{R}^{\beta'}_{\alpha'}\mathbb{R}^\beta_\alpha, \tag{2.42a}$$

а они в свою очередь совпадают с (2.42). Лемма доказана.

Замечание 2.2. Уравнение (2.42) называется *квантовым уравнением Янга — Бакстера* [154, 266]. Оно изучено *в методе квантовой обратной задачи* [85, 125, 203]. Соотношения (2.44) являются в этой теории ключевыми. Абстрактную алгебру $M_{\mathbb{R}}$ с такими соотношениями называют *алгеброй Замолодчикова — Фаддеева* (или ZF-алгеброй) [131, 267].

Выполнение свойства ПБВ в этой алгебре на многочленах степени не более 3 обеспечено условием (2.42). Лемма 2.8 утверждает, что алгебра M, сопряженная к YB-алгебре, является представлением ZF-алгебры $M_{\mathbb{R}}$.

Следствие 2.2. *Каждому представлению* YB-*алгебры* $N\to N_0$, $b^s\to a^s$ *соответствует представление* ZF-*алгебры* $M_{\mathbb{R}}\to M\to N_0$.

В частности, элементы (2.41) *удовлетворяют соотношениям Замолодчикова — Фаддеева*:

$$\mathbb{R}^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'} A^{\gamma}_{\beta} A^{\gamma'}_{\beta'} = \mathbb{R}^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'} A^{\beta'}_{\alpha'} A^{\beta}_{\alpha}. \tag{2.44a}$$

Замечание 2.3. Умножение на M задает коумножение на N:

$$\Delta\colon N \to N \otimes N, \quad l \times l' (\Delta(\sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} (l \cdot l')(\sigma).$$

Наоборот, умножение на N задает коумножение на M:

$$\Delta_*\colon M \to M \otimes M, \quad \Delta_*(l)(\sigma \otimes \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} l(\sigma\sigma').$$

Поскольку Δ_* сохраняет перестановочные соотношения (2.44), то Δ_* — гомоморфизм. А отсюда автоматически следует, что Δ — гомоморфизм. Таким образом, алгебры N и M превращаются в алгебры Хопфа. Детальное обсуждение уравнений Янга — Бакстера с точки зрения теории алгебр Хопфа приведено в [49, 94].

В терминах структурных констант алгебр N и M

$$\sigma_s \sigma_m = \varkappa^r_{sm} \sigma_r, \quad b^s b^m = \mu^{sm}_r b^r$$

коумножение Δ можно вычислить по формуле

$$\Delta(\sigma_k) = \mu^{sm}_k \sigma_s \otimes \sigma_m,$$

и тогда гомоморфность Δ означает выполнение тождеств

$$\varkappa^m_{ss'} \mu^{kk'}_m = \mu^{rr'}_s \mu^{tt'}_{s'} \varkappa^k_{rt} \varkappa^{k'}_{r't'}. \tag{2.45}$$

Отметим, что соотношения (2.44) в терминах коумножения выглядят так:

$$\mathbb{R} \cdot \Delta(\sigma) = \Delta(\sigma)' \cdot \mathbb{R} \quad \forall \sigma \in N \tag{2.46}$$

(штрих обозначает транспонирование сомножителей в $N \otimes N$).

Замечание 2.4. Пусть элемент $\mathbb{R} \in N \otimes N$ вырожден. Тогда (2.43) не инъективно. Тем не менее пусть на N^* задано умножение так, что (2.45) — гомоморфизм алгебр и, кроме того, выполнены соотношения (2.44). Будем в этом случае также называть N алгеброй Янга — Бакстера. (Очевидно, уравнение (2.42) и соотношения (2.44a) будут автоматически обеспечены.) Если отображение, сопряженное к гомоморфизму (2.43), является антигомоморфизмом, то назовем N *биалгеброй Янга — Бакстера*.

Пример 2.8. *Квантовые группы* [49, 120, 146, 175, 196, 263—265]. Пусть $\mathcal{N}$ — группа Ли, $\mathfrak{n}$ — ее алгебра Ли. Будем считать, что $\mathcal{N}$ и $\mathfrak{n}$ реализованы в алгебре матриц $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Обозначим через $\mathcal{U}$ универсальную обертывающую алгебры $\mathfrak{n}$. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$, причем группа $\mathcal{N}$ выделена в $\mathcal{U}$ набором полиномиальных соотношений $\mathcal{P}^i(\ldots) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ между матричными элементами (например, группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ выделена в $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ соотношением $\det(\ldots) - 1 = 0$).

Алгебра $\mathcal{U}^*$ абелева; соответствующее коумножение в $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\Delta^0(\sigma_k) = I \otimes \sigma_k + \sigma_k \otimes I.$$

Очевидно, $\mathcal{U}$ — это биалгебра Янга — Бакстера, отвечающая единичному элементу $\mathbb{R}=I\otimes I$.

Формальным квантованием алгебры $\mathcal{U}$ называется биалгебра Янга — Бакстера $N\equiv\mathcal{U}_\hbar\subset\mathrm{Mat}(n, \mathrm{C})$, структура которой гладко зависит от параметра $\hbar\to 0$ и в пределе совпадает с $\mathcal{U}$, а предел коммутатора $\lim\limits_{\hbar\to 0}\frac{i}{\hbar}[\ldots, \ldots]_{\mathcal{U}^*_\hbar}$ задает в $\mathcal{U}^*$ структуру пуассоновой алгебры.

Отметим, что функции на $\mathcal{U}$ — это функции от матричных элементов, т. е. от линейных функционалов из $\mathcal{U}^*$. Поскольку задана скобка между функционалами, то тем самым задана скобка Пуассона на $\mathcal{U}$ и на $\mathcal{N}$.

Предположим теперь, что существуют полиномы $\mathcal{P}^i_\hbar$ от образующих алгебры $\mathcal{U}^*_\hbar$, которые лежат в ц е н т р е этой алгебры и в пределе $\hbar\to 0$ совпадают с полиномиальными соотношениями $\mathcal{P}^i$ между матричными элементами группы $\mathcal{N}$. Тогда алгебра $M\equiv\mathcal{U}^*_\hbar$ с дополнительными соотношениями $\mathcal{P}^i_\hbar=0$ $(i=1, \ldots, k)$ называется алгеброй функций на квантовой группе $\mathcal{N}_\hbar$. Сама *квантовая группа* $\mathcal{N}_\hbar$ определяется как спектр (множество неприводимых представлений) этой алгебры: $\mathcal{N}_\hbar=\mathrm{spec}(M)$.

Для того чтобы нагляднее увидеть структуру этой алгебры, рассмотрим первое приближение по $\hbar$ в деформации $\mathcal{N}\to\mathcal{N}_\hbar$. Имеем

$$\mathbb{R}=I+i\hbar\tilde{r}+O(\hbar^2),\qquad \Delta=\Delta^0+i\hbar\,\Delta^1+O(\hbar^2), \tag{2.47}$$

где

$$\Delta^1(\sigma_k)=\nu_k^{sm}\sigma_s\otimes\sigma_m,\qquad \tilde{r}=r^{mk}\sigma_m\otimes\sigma_k.$$

Соотношения (2.44а) между образующими алгебры $M_\mathbb{R}$ в первом приближении по $\hbar$ выглядят так:

$$[A^\gamma_\alpha,\ A^{\gamma'}_{\alpha'}]=-i\hbar\,(\tilde{r}^{\beta\beta'}_{\alpha\alpha'}A^\gamma_\beta A^{\gamma'}_{\beta'}-A^\beta_\alpha A^{\beta'}_{\alpha'}\tilde{r}^{\gamma\gamma'}_{\beta\beta'})+O(\hbar^2),$$

или в матричных обозначениях

$$[A\overset{\otimes}{,}A]=-i\hbar\,[\tilde{r},\ A\otimes A]+O(\hbar^2). \tag{2.48}$$

Из (2.44) или, что то же самое, из (2.46) в первом порядке по $\hbar$ получим

$$r^{mn}f^l_{ns}+r^{nl}f^m_{ns}=\lambda^{lm}_s, \tag{2.49}$$

где обозначено

$$f^l_{ns}=(\varkappa^l_{ns}-\varkappa^l_{sn})\,|_{\hbar=0},\qquad \lambda^{lm}_s=\nu^{lm}_s-\nu^{ml}_s.$$

Нетрудно видеть, что приращения Δ^1 и $\tilde{r}$ в (2.47) эффективно зависят лишь от базисных элементов $\sigma_s\in\mathfrak{n}$ из алгебры Ли. Поэтому числа f^l_{ns} фактически задают структурные константы этой алгебры Ли, а числа λ^{lm}_s задают структуру сопряженной алгебры Ли на $\mathfrak{n}^*$ (см. (1.48) гл. I; тождество Якоби для λ^{lm}_s обеспечено специальным уравнением Янга — Бакстера, которому удовлетворяет элемент $\tilde{r}$ в силу (2.42)).

Отметим, что условия Хопфа (2.45) дают в первом приближении по $\hbar$ соотношения (1.28) гл. I, которые автоматически выполняются в силу (2.49).

Итак, инфинитезимально мы получили структуру биалгебры Ли на $\mathfrak{n}$. На самом деле не только инфинитезимально, но и глобально скобка Пуассона на $\mathcal{U}$ и на $\mathcal{N}$ инвариантна относительно матричного умножения (см. п. 1.3 гл. I). Это легко следует из хопфовости алгебры $\mathcal{U}_\hbar$.

Отметим попутно важное свойство соотношений (2.48): матричный детерминант $\det((A_\alpha^\gamma))$ коммутирует с каждой образующей A_α^γ по $\operatorname{mod} O(\hbar^2)$, если $\mathfrak{n}\subset \mathrm{sl}(n)$ (т. е. если следы $\operatorname{tr}\sigma_k=0$ для всех $\sigma_k\in\mathfrak{n}$). Аналогичные функции Казимира связаны с минорами матрицы $((A_\alpha^\gamma))$. Квантовый аналог этого свойства изучается в работах по методу обратной задачи.

2.6. Приведение к «треугольному» виду. Обратимся теперь к алгебрам с общими соотношениями:

$$A^iA^j=\omega_{mk}^{ij}A^mA^k+\mu_s^{ij}A^s. \tag{2.50}$$

По повторяющимся индексам здесь идет суммирование от 1 до n. Комплексные коэффициенты ω и μ в (2.50) (назовем их *масштабными* и *структурными* константами) подчинены тождествам:

$$\begin{aligned}
&\omega_{mk}^{ij}\omega_{qp}^{kl}\omega_{sr}^{mq}=\omega_{mk}^{jl}\omega_{sq}^{im}\omega_{rp}^{qk} && \text{(уравнение Янга—Бакстера)},\\
&\omega_{ij}^{mk}\mu_s^{ij}=-\mu_s^{mk} && \text{(антисимметричность)},\\
&\mu_k^{ij}\mu_r^{kp}-\mu_k^{jp}\mu_r^{ik}-\omega_{ml}^{jp}\mu_k^{im}\mu_r^{kl}=0 && \text{(тождество Якоби)}, \qquad (2.51)\\
&\omega_{qp}^{il}\mu_l^{jr}+\omega_{mk}^{jr}\omega_{qp}^{lk}\mu_l^{im}-\omega_{qp}^{lr}\mu_l^{ij}+\\
&+\omega_{mk}^{jr}\omega_{ql}^{im}\mu_p^{lk}-\omega_{km}^{ij}\omega_{lp}^{mr}\mu_q^{kl}-\omega_{qk}^{ij}\mu_p^{kr}=0 && \text{(условие согласования)}.
\end{aligned}$$

Эти тождества обеспечивают в алгебре (2.50) свойство ПБВ на многочленах степени 3.

Первое из тождеств (2.51) совпадает с (2.42a), если выбрать $\mathbb{R}_{mk}^{ij}=\omega_{km}^{ij}$.

Помимо указанных тождеств иногда удобно требовать

$$\begin{aligned}
&\omega_{ij}^{mk}\omega_{m'k'}^{ij}=\delta_{m'}^m\delta_{k'}^k,\quad \omega_{ij}^{mm}=\delta_j^m\delta_i^m && \text{(унитарность)},\\
&\omega_{mk}^{ij}=\overline{\omega_{km}^{ji}},\qquad \mu_s^{ij}=\overline{\mu_s^{ji}} && \text{(эрмитовость)},
\end{aligned}$$

где черта — это комплексное сопряжение. Условие унитарности означает, что соотношения (2.50) эквивалентны лиево-йордановым, так как здесь $\omega^2=I$, т. е. спектр тензора ω состоит лишь из ± 1. Условие эрмитовости означает, что соотношения (2.50) допускают представление самосопряженными операторами A^i.

Теперь мы рассмотрим важный вариант перестановочных соотношений, в которых

$$\begin{gathered}
\omega_{km}^{sj}=\delta_m^s\delta_k^j+c_{km}^{sj},\\
c_{mk}^{sj}=c_{km}^{sj}=-c_{mk}^{js},\quad \mu_r^{sj}=-\mu_r^{js}.
\end{gathered} \tag{2.52}$$

В этом случае (2.50) выглядят так:

$$[A^s, A^j] = \frac{1}{2} c^{sj}_{mk} (A^m A^k + A^k A^m) + \mu^{sj}_r A^r. \tag{2.53}$$

Все коммутаторы между образующими здесь линейно выражаются через антикоммутаторы и сами образующие. Такие соотношения называют квадратичными *коммутационными*. Они интересны и с точки зрения процедуры квантования (см. п. 4.1 гл. IV), и с чисто алгебраической точки зрения из-за следующего свойства.

Теорема 2.4. *Если тензор c^{sj}_{mk} в квадратичных коммутационных соотношениях* (2.53) *невырожден (т. е. все антикоммутаторы между образующими линейно выражаются через коммутаторы и сами образующие), то соотношения* (2.53) *линейной заменой приводятся к «треугольному» виду*:

$$[\tilde{A}^s, \tilde{A}^j] = \frac{1}{2} \sum_{m, k \leqslant \min(s, j)} \tilde{c}^{sj}_{mk} (\tilde{A}^m \tilde{A}^k + \tilde{A}^k \tilde{A}^m) + \tilde{\mu}^{sj}_r A^r, \tag{2.54}$$

причем коэффициенты $\tilde{c}$, $\tilde{\mu}$ удовлетворяют тем же тождествам, что и c, μ.

Доказательство. Обозначим $L^k_m = ((\omega^{jk}_{im}))_{i, j=1, \ldots, n}$. Тогда тождество Янга — Бакстера в (2.51) означает, что

$$\omega^{mq}_{sr} L^k_q L^j_m = \omega^{jk}_{ml} L^l_r L^m_s$$

или с учетом структуры тензора ω в (2.53), что

$$[L^k_s, L^j_r] + c^{mq}_{rs} L^k_q L^j_m = c^{jk}_{lm} L^l_r L^m_s.$$

Поменяем местами индексы $n \leftrightarrow j$, $s \leftrightarrow r$ и учтем тождества (2.52):

$$-[L^k_s, L^j_r] - c^{mq}_{rs} L^j_m L^k_q = -c^{jk}_{lm} L^m_s L^l_r.$$

Складывая с предыдущим равенством, получаем

$$c^{mq}_{rs} [L^k_q, L^j_m] = c^{jk}_{lm} [L^l_r, L^m_s]. \tag{2.55}$$

Преобразуем правую часть:

$$c^{jk}_{lm} [L^l_r, L^m_s] = -c^{jk}_{lm} [L^l_s, L^m_r] = -c^{mq}_{sr} [L^k_q, L^j_m] = -c^{mq}_{rs} [L^k_q, L^j_m]$$

(здесь во втором равенстве мы использовали (2.55)). Сравнивая полученное с (2.55), заключаем, что

$$c^{jk}_{lm} [L^l, L^m_s] = 0$$

или в силу обратимости тензора c

$$[L^l_r, L^m_s] = 0 \quad \forall l, r, m, s.$$

Итак, мы имеем набор коммутирующих матриц. По теореме Шура существует ортогональная матрица U, приводящая все L^l_r к треугольному виду:

$$U^{-1} L^l_r U = \mathring{L}^l_r, \quad \mathring{L}^l_r = ((\mathring{\omega}^{sl}_{mr}))_{m, s=1, \ldots, n},$$

где

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{sl}_{mr}=\delta^s_m\delta^l_r+\overset{\bullet}{c}{}^{sl}_{mr},\quad \overset{\bullet}{c}{}^{sl}_{mr}=0\quad \text{при}\quad m>s.$$

Остается выбрать

$$\tilde{A}^s=U^s_jA^j,\quad \tilde{c}^{sj}_{mk}=\overset{\circ}{c}{}^{sl}_{mr}U^j_lU^{-1r}_k=c^{il}_{pr}U^j_lU^s_iU^{-1r}_kU^{-1p}_m,$$
$$\tilde{\nu}^{sj}_r=\nu^{kl}_mU^s_kU^j_lU^{-1m}_r.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Если тензор $c=((c^{jk}_{im}))$ невырожден, а все матрицы $((c^{jk}_{im}))_{i,\,j=1,\,\ldots,\,n}$ нормальны относительно некоторого скалярного произведения (т. е. коммутируют со своими сопряженными), то соотношения* (2.53) *линейной заменой переменных приводятся к линейным коммутационным соотношениям (т. е. к алгебре Ли).*

Доказательство. Так как все матрицы L^l_r нормальны, то они приводятся к диагональному виду, т. е. $\overset{\circ}{c}{}^{sl}_{mr}=0$ при $m\neq s$. Следовательно, $\tilde{c}^{sj}_{mk}=0$ при $m\neq s$ и $m\neq j$, а значит, эти коэффициенты тождественно нулевые: $\tilde{c}^{sj}_{mk}\equiv 0$ $\forall s,\ j,\ m,\ k$. Следствие доказано.

Пример, в котором выполнено условие невырожденности теоремы 2.4, дают соотношения Склянина (2.13). Таким образом, они приводятся к треугольному виду (2.54).

Расклассифицируем теперь соотношения (2.54) в простейшем случае трех образующих, т. е. $n=3$.

Пример 2.9. *Треугольные коммутационные соотношения с тремя образующими*

$$\begin{aligned}
&[A,\ B]=\alpha A^2+kA+lB+gC,\\
&[B,\ C]=\beta A^2+\gamma AB+\sigma B^2+qA+rB+nC,\\
&[A,\ C]=\delta A^2+tA+sB+pC.
\end{aligned}\tag{2.56}$$

Здесь выписаны соотношения (2.54) в случае $n=3$ *). Коэффициенты должны быть подчинены тождествам типа (2.51). В частности, условие Янга — Бакстера дает

$$\alpha\gamma=\alpha\sigma=0.$$

Ясно, что без ограничения общности можно положить $\alpha=0$. Действительно, если $\alpha\neq 0$, то $\gamma=\sigma=0$. Тогда если $\delta=0$, то, изменив обозначения $B\to C$, $C\to B$, мы придем к соотношениям (2.56) с $\alpha=0$. Если же $\delta\neq 0$, то, заменив B на $B'=B-\frac{\alpha}{\delta}C$, мы опять приведем (2.56) к случаю $\alpha=0$.

*) То, что во второй строке (2.56) стоит AB, а не антикоммутатор $AB+BA$, как в (2.54), не играет роли, поскольку $AB+BA$ в силу первого соотношения (2.56) выражается через линейную комбинацию AB, A^2 и A, B, C.

Итак, пусть $\alpha=0$. Условие согласования в (2.51) дает:

$$
\begin{gathered}
g\sigma=0,\\
g(\gamma+2\delta)=0, \qquad g\sigma\gamma+p\gamma=2k\sigma+2l\delta,\\
g\sigma^2+\rho\sigma=p\sigma, \quad g(\sigma\beta+\delta^2)+(l+p)\beta=k(\delta+\gamma)+n\delta.
\end{gathered}
$$

Случай I. $\sigma=\gamma=\delta=0$. Тогда либо $\beta=0$ и соотношения (2.56) превращаются в линейные, либо $\beta\neq0$ (перенормировкой можно добиться $\beta=1$). Условия согласования тогда эквивалентны тождеству $p=-l$. Поэтому соотношения (2.56) имеют вид

$$
\begin{aligned}
[A, B]&=kA+lB+gC,\\
[B, C]&=A^2+qA+rB+nC,\\
[A, C]&=tA+sB-lC.
\end{aligned}
$$

Тождества Якоби (2.51) между структурными константами сводятся к следующим случаям:

(Ia) $g=1, \quad k=l=nt=nl=ns=0, \quad r=-t$;

(Ib) $g=0, \quad l(k-n)=0, \quad l(t+s)=s(k-n), \quad l(q-t)=tn+kr$.

Случай II. $\sigma=0, \ \gamma\neq\delta$. Тогда заменой $B'=B+\frac{\beta}{\gamma-\delta}A$ исключается слагаемое с A^2 во второй строке (2.56). Поэтому здесь можно считать, что $\beta=0$. Получаем

$$
\begin{aligned}
[A, B]&=kA+lB+gC,\\
[B, C]&=\gamma AB+qA+rB+nC,\\
[A, C]&=\delta A^2+tA+sB+pC.
\end{aligned}
$$

Условия согласования и тождества Якоби дают варианты

(IIa) $g=1, \ \gamma=-2, \ r=-t, \ n=\delta=1, \ p=0$;

(IIb) $g=0, \ p\gamma=2l\delta, \ k(\delta+\gamma)+n\delta=0, \ kp+ln=0,$
$l^2\delta-lt=(n-p-k)s, \ l(q+k\delta)+t(p-n)=kr$.

Случай III. $\gamma=\delta\neq0$. Перенормировкой можно добиться равенства $\gamma=\delta=1$. Здесь получаем соотношения

$$
\begin{aligned}
[A, B]&=kA,\\
[B, C]&=A^2+AB+qA+rB-2kC,\\
[A, C]&=A^2+tA+sB,
\end{aligned}
$$

причем тождества Якоби дают $ks=k(r-2t)=0$.

Случай IV. $g=0, \ \sigma\neq0, \ \beta\neq0$. Перенормировкой можно добиться равенства $\sigma=1$ и заменой $B'=B+\frac{\gamma}{2\sigma}A$ исключить член AB во второй строке (2.56). Итак, здесь можно считать, что $\gamma=0$. Имеем соотношения

$$
\begin{aligned}
[A, B]&=kA+lB,\\
[B, C]&=\beta A^2+B^2+qA+rB+nC,\\
[A, C]&=\delta A^2+tA+sB+pC.
\end{aligned}
$$

Условия согласования и тождества Якоби дают варианты

(IVa) $k=l=n=p=0$;

(IVb) $k=l=p=s=t=\delta=0,\ n=1$.

Случай V. $g=\beta=0,\ \sigma\neq 0$. Как и выше, сводим исходные соотношения к случаю $\sigma=1,\ \gamma=0$. Получаем

$$[A,\ B]=kA+lB,$$
$$[B,\ C]=B^2+qA+rB+nC,$$
$$[A,\ C]=\delta A^2+tA+sB+pC.$$

Условия на коэффициенты возможны следующие:

(Va) $k=q=n=p=\delta=0,\ r=t,\ l=1$;

(Vb) $k=-1,\ l=n=p=\delta=1,\ s=-t,\ r=-q$;

(Vc) $k=l=n=p=s=0$;

(Vd) $k=l=t=s=p=\delta=0,\ n=1$.

Итак, перечислены все возможные типы треугольных соотношений (2.56). Типы (II) и (V), где $\beta=0$, попадают в класс соотношений (2.31). Для них методом из п. 2.4 строится регулярное представление (например, при упорядочении $\overset{3}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}$ или $\overset{3}{B},\ \overset{2}{A},\ \overset{1}{C}$). Оставляем это упражнение читателю.

2.7. Спектр и коспектр квадратично-линейных соотношений. Изложим теперь подход к проблеме построения регулярного представления общих квадратично-линейных соотношений (2.50), который опирается на их внутреннюю скрытую симметрию.

Как и в предыдущем пункте, будем использовать замены переменных типа (2.40), но не будем ограничиваться скалярными коэффициентами σ_s^α. Пусть теперь σ_s^α — это матрицы или вообще некоммутирующие линейные операторы. Подчиним их некоторым условиям, обеспечивающим инвариантность класса соотношений (2.50) относительно замены (2.40) и приводящим соотношения к более простому виду.

Идея введения подобных некоммутирующих (например, антикоммутирующих) множителей перекликается с идеями теории супералгебр и супергрупп [12, 218] и активно используется в «некоммутативной геометрии» [164, 175, 264]. Эффективность такой операторной замены переменных на примере некоторых классов квадратично-линейных соотношений была продемонстрирована в [68]. Мы излагаем здесь метод этой работы сразу для общего случая.

Пусть M — алгебра с образующими $\{A^i\}$ и перестановочными соотношениями (2.50). Линейную оболочку образующих обозначаем через $\mathscr{L}$. Масштабные и структурные константы в (2.50) можно рассматривать как линейные отображения

$$\omega\in\mathrm{Hom}\,(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}\to\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}),\qquad \mu\in\mathrm{Hom}\,(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}\to\mathscr{L}),$$
$$\omega\,(A^i\otimes A^j)=\omega_{mk}^{ij}A^m\otimes A^k,\qquad \mu\,(A^i\otimes A^j)=\mu_k^{ij}A^k.$$

Пусть $\tilde{M}$ — еще одна алгебра с образующими $\{\tilde{A}^i\}$ и соответствующими масштабными и структурными константами $\tilde{\omega}$, $\tilde{\mu}$.

Пусть также P — некоторая алгебра с единицей I.

Элемент

$$d \in \mathrm{Hom}(\tilde{\mathscr{L}} \to \mathscr{L}) \otimes P \tag{2.57}$$

назовем *P-гомоморфизмом* соотношений (2.50), если выполнены тождества

$$\begin{aligned}(\omega \otimes I)\, d^{\otimes 2} &= d^{\otimes 2}(\tilde{\omega} \otimes I),\\ (\mu \otimes I)\, d^{\otimes 2} &= d\,(\tilde{\mu} \otimes I).\end{aligned} \tag{2.58}$$

В этих тождествах тензорный квадрат

$$d^{\otimes 2} \in \mathrm{Hom}(\tilde{\mathscr{L}} \otimes \tilde{\mathscr{L}} \to \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}) \otimes P$$

определен естественным образом:

$$d^{\otimes 2}(a \otimes b) = a_s b_k\, (A^i \otimes A^j) \otimes d^s_i \cdot d^k_j$$

для любых $a \equiv a_s \tilde{A}^s$, $b = b_k \tilde{A}^k$ из $\tilde{\mathscr{L}}$. Здесь $d^s_i \in P$ — матричные элементы d.

В индексной записи условия (2.58) выглядят так:

$$\begin{aligned}\omega^{ij}_{rp} d^s_i \cdot d^k_j &= \tilde{\omega}^{sk}_{ml}\, d^m_r \cdot d^l_p,\\ \mu^{ij}_m\, d^s_i \cdot d^k_j &= \tilde{\mu}^{sk}_l\, d^l_m.\end{aligned} \tag{2.58a}$$

Из этих условий немедленно следует, что элементы

$$\tilde{B}^i = A^s \otimes d^i_s \in \mathscr{L} \otimes P \tag{2.59}$$

удовлетворяют соотношениям «с тильдой»:

$$\tilde{B}^i \tilde{B}^j = \tilde{\omega}^{ij}_{mk} \tilde{B}^m \tilde{B}^k + \tilde{\mu}^{ij}_s \tilde{B}^s, \tag{$\widetilde{2.50}$}$$

т. е. задают представление алгебры $\tilde{M}$. Итак, получаем гомоморфизм алгебр

$$\tilde{M} \to M \otimes P, \quad \tilde{A}^i \to \tilde{B}^i.$$

Если $\tilde{d} \in \mathrm{Hom}(\tilde{\tilde{\mathscr{L}}} \to \tilde{\mathscr{L}}) \otimes \tilde{P}$ какой-то новый $\tilde{P}$-гомоморфизм соотношений $(\widetilde{2.50})$, то композиция $d \otimes \tilde{d}$ является $P \otimes \tilde{P}$-гомоморфизмом исходных соотношений (2.50).

В частности, если $\tilde{d} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}) \otimes P^{(-)}$, где $P^{(-)}$ антигомоморфна P, то элемент

$$d \otimes \tilde{d} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{L} \to \mathscr{L}) \otimes P \otimes P^{(-)}$$

порождает сквозной гомоморфизм алгебр

$$M \to \tilde{M} \otimes P^{(-)} \to M \otimes P \otimes P^{(-)}, \tag{2.60}$$

т. е. элементы

$$B^i = \tilde{B}^l \otimes \tilde{d}^i_l = A^s \otimes d^l_s \otimes \tilde{d}^i_l$$

удовлетворяют исходным соотношениям (2.50):

$$B^i B^j = \omega^{ij}_{mk} B^m B^k + \mu^{ij}_s B^s.$$

Если элементы d и $\tilde{d}$ обратимы справа, то гомоморфизм (2.60) инъективен. Тогда функции от образующих алгебры M выражаются через функции от образующих алгебры $\tilde{M}$ и от матричных элементов $\tilde{d}$. И наоборот. Алгебры M и $\tilde{M}$ в этом смысле эквивалентны.

Две алгебры с квадратично-линейными соотношениями назовем *эквивалентными*, если их связывает обратимый справа P-гомоморфизм. Сами соотношения также будем называть *эквивалентными*.

Подчеркнем, что эквивалентные алгебры не обязательно изоморфны, но если P одномерна (т. е. состоит из скаляров), то это так.

В заданном классе эквивалентных алгебр любой обратимый справа P-гомоморфизм d мы будем называть *симметрией*, а соответствующую алгебру *P—алгеброй симметрий*.

Здесь предполагается, что алгебра симметрии — это минимальная алгебра, порожденная матричными элементами симметрии d^i_j.

Замечание 2.5. В качестве алгебры $P^{(-)}$ в (2.60) нам будет удобно выбрать подалгебру в $\mathrm{Hom}(P \to P)$, порожденную операторами правого умножения $r(q)$ на элементы $q \in P$, а в качестве симметрии $\tilde{d}$ — оператор $\tilde{d} = r(d^{-1})$. Сопряженные операторы из $\mathrm{Hom}(P^* \to P^*)$ будем обозначать $\pi \equiv r(d^{-1})^*$. Итак, полагаем

$$\tilde{d}^i_j \equiv r(d^{-1i}_j), \qquad \pi^i_j \equiv r(d^{-1i}_j)^*.$$

Здесь d^{-1} — правый обратный к d, т. е. $d^s_j d^{-1i}_s = \delta^i_j \cdot I$.

Замечание 2.6. Множество элементов вида $d \otimes \tilde{d}$ порождает подалгебру $M_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{L} \to \mathscr{L}) \otimes P \otimes P^{(-)}$, которая является ZF-алгеброй, отвечающей элементу Янга — Бакстера $\mathbb{R}^{ij}_{km} = \omega^{ij}_{mk}$ (действительно, матричные элементы $A^i_j \equiv d^s_j \otimes \tilde{d}^i_s$, как нетрудно проверить, удовлетворяют соотношениям (2.44а)). Из (2.60) следует, что элементы $M_{\mathbb{R}}$ отождествляются с автоморфизмами алгебры M, т. е. $M_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(M)$.

Перейдем теперь к построению операторов регулярного представления и обобщенного сдвига.

Итак, пусть M и $\tilde{M}$ — эквивалентные алгебры с квадратично-линейными соотношениями. Покажем, что если для $\tilde{M}$ известно регулярное представление, то его можно построить и для алгебры M. Но предварительно изменим принятую до сих пор точку зрения на понятие символа.

Обозначим через $\tilde{B} = A \otimes d$ набор элементов (2.59). Через $f(\tilde{B}) \equiv f(A \otimes d)$ обозначим вейлевскую функцию от этих элементов с полиномиальным символом f.

Элемент $f(A \otimes d)$ принадлежит $M \otimes P$. По второй компоненте в этом тензорном произведении можно устроить спаривание с любым функционалом из P^*. В частности, можно считать, что сам символ f принимает значения в P^*. Обозначим пространство таких P^*-значных полиномов от n переменных через $\vec{\mathcal{P}}^n$. Тогда для любого $\vec{f} \in \vec{\mathcal{P}}^n$ определен элемент $\vec{f}(A) \in M$. Например, если $\vec{f}$ разлагается по базису $\vec{f} = \sum \chi^\alpha f_\alpha$, где $\chi^\alpha \in P^*$, а f_α — обычные скалярные символы, то

$$\vec{f}(A) = \sum \langle \chi^\alpha, \ f_\alpha(A \otimes d)\rangle_2, \tag{2.61}$$

где функционалы χ^α действуют по второй компоненте тензорного произведения $M \otimes P$ (что отражено индексом 2 под угловыми скобками).

Назовем $\vec{f}$ вектор-символом элемента $\vec{f}(A)$.

Лемма 2.9. *Пусть соотношения* $\widetilde{(2.50)}$ *имеют правое регулярное представление операторами* $\tilde{R}^i$ *на классе скалярных символов. Тогда соотношения* (2.50) *имеют правое регулярное представление на вектор-символах; точнее,*

$$\vec{f}(A)\, A^i = (R^i \vec{f})(A), \qquad R^i = \tilde{R}^s \otimes \pi^i_s. \tag{2.62}$$

При этом алгебра M *совпадает с множеством элементов* $\{\vec{f}(A) \mid \vec{f} \in \vec{\mathcal{P}}^n\}$. *Если для соотношений* $\widetilde{(2.50)}$ *выполнены обобщенные условия Якоби, то они выполнены и для соотношений* (2.50). *При этом*

$$\vec{f}(A) \cdot \vec{g}(A) = (\vec{f} * \vec{g})(A), \quad \vec{f} * \vec{g} \overset{\text{def}}{=} \vec{g}(R)\vec{f}, \tag{2.62a}$$

и почти-$*$-произведение вектор-символов задает на $\vec{\mathcal{P}}^n$ *структуру ассоциативной алгебры с правой единицей.*

Доказательство. Для наглядности будем использовать определение (2.61). Имеем

$$\vec{f}(A)\, A^i = \sum \langle \chi^\alpha, \ f_\alpha(\tilde{B}) \cdot \tilde{B}^s (I \otimes d_s^{-1i})\rangle =$$
$$= \sum \langle r\,(d_s^{-1i})^* \chi^\alpha, \ f_\alpha(\tilde{B})\, \tilde{B}^s\rangle = \sum \langle \pi^{i\alpha}_{s\beta}\chi^\beta, \ (\tilde{R}^s f_\alpha)(\tilde{B})\rangle =$$
$$= \sum \langle \chi^\beta, \ (R^i \vec{f})_\beta (\tilde{B})\rangle \equiv (R^i \vec{f})(A).$$

Этим доказано (2.62).

Теперь докажем, что любой элемент алгебры M представим в виде $\vec{f}(A)$. Достаточно это доказать для образующих A^i и затем воспользоваться (2.62). Положим $\vec{f}^i(\xi) = \xi^j \pi^i_j(c)$, где $c = \sum c_\alpha \chi^\alpha \in P^*$, причем $\sum c_\alpha \chi^\alpha(I) = 1$. Тогда $\sum \langle \chi^\alpha, \ f^i_\alpha(\xi \otimes d)\rangle = \xi^k \langle \pi^i_j(c), \ d^j_k\rangle = \xi^k \cdot \langle c, \ d^i_k d_j^{-1i}\rangle = \xi^k \cdot \langle c, \ I\rangle\, \delta^i_k = \xi^i$. Следовательно, $\vec{f}^i(A) = A^i$.

Далее обобщенные условия Якоби для $(\widetilde{2.50})$ в терминах операторов правого регулярного представления выглядят так:

$$\tilde{R}^k\tilde{R}^s = \tilde{\omega}^{sk}_{ml}\tilde{R}^l\tilde{R}^m + \tilde{\mu}^{sk}_l\tilde{R}^l$$

(соотношения, сопряженные к $(\widetilde{2.50})$). С другой стороны, матричные элементы π^l_s удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\omega^{ij}_{rp}\pi^p_l\pi^r_m &= \tilde{\omega}^{sk}_{ml}\pi^j_k\pi^i_s,\\ \mu^{ij}_s\pi^s_l &= \tilde{\mu}^{sk}_l\pi^j_k\pi^i_s.\end{aligned} \tag{2.58b}$$

Это следует из определения π и из (2.58a).

Из выписанных тождеств прямым подсчетом получаем соотношения для операторов R^i:

$$R^jR^i = \omega^{ij}_{rm}R^mR^r + \mu^{ij}_lR^l,$$

сопряженные к (2.50), что и означает выполнение обобщенных условий Якоби для (2.50).

Формула для произведения $*$ сразу следует из (2.62), а его ассоциативность—следствие обобщенных условий Якоби (см. п. 2.1).

Правой единицей для $*$ служит любая вектор-функция вида $\vec{c} = \{c_\alpha\}$, где $\sum c_\alpha\chi^\alpha(I) = 1$ и $c_\alpha = \mathrm{const}$. Действительно, в этом случае $\vec{c}(R) = \mathrm{id}$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь в алгебре $\vec{\mathscr{P}}^n$ двусторонний идеал J, составленный из вектор-символов, аннулирующих $*$-произведение справа: $J = \{\vec{g}\,|\,\vec{f}*\vec{g} = 0 \ \ \forall\vec{f}\in\vec{\mathscr{P}}^n\}$. Очевидно, что $\vec{g}\in J \Leftrightarrow \vec{g}(R) = 0$, а поэтому и $\vec{g}(A) = 0$, так как $\vec{g}(A) = \vec{c}(A)\,\vec{g}(A) = (\vec{g}(R)\,\vec{c})(A)$. Следовательно, символы из J не существенны в любом представлении алгебры M.

Подмножество

$$\mathrm{Spec}(M) = \{(\xi,\ p)\in\mathbf{C}^n\times P\,|\,\langle\vec{g}(\xi),\ p\rangle = 0 \quad \forall\vec{g}\in J\}$$

назовем *спектром алгебры* M. Элементы фактор-алгебры символов $\mathrm{Smb} = \vec{\mathscr{P}}^n/J$ — это «функции на спектре». Для каждой такой функции $f\in\mathrm{Smb}$ корректно определен элемент $f(A)\in M$.

Следствие 2.4. *Пусть алгебра* M (см. (2.50)) *эквивалентна алгебре* $\tilde{M}$, *в которой выполнено свойство ПБВ. Тогда в классе* Smb *функций на спектре* Spec (M) *определено $*$-произведение, которое задает структуру алгебры с двусторонней единицей, причем соответствие* $f\to f(A)$ *является изоморфизмом алгебр* $\mathrm{Smb}\to M$.

Выполнено ли в алгебре M свойство ПБВ, остается неясным.

Опишем теперь двойственную картину, т. е. вместо $*$-произведения рассмотрим свертку или обобщенный сдвиг (см. пример 2.3).

Предположим, что на многообразии $\tilde{\mathscr{M}}$ определен оператор обобщенного сдвига $\tilde{U}$, отвечающий соотношениям (2.50). Его генераторы обозначим через $\tilde{u}^{\cdot}$. Пусть $\tilde{T}^x_{\tilde{B}}$ — представление этого обобщенного сдвига с генераторами $\tilde{B}=A\otimes d$ (2.59), и пусть $\rho\in P^*$.

Положим

$$T_A^{x,\rho}=\langle\rho,\ \tilde{T}^x_{A\otimes d}\rangle_2,\quad x\in\tilde{\mathcal{M}},$$

где индекс 2 обозначает, что спаривание происходит по второй компоненте тензорного произведения.

Тем самым определено отображение $T_A\colon \tilde{\mathcal{M}}\times P^*\to M$.

Множество функций на $\tilde{\mathcal{M}}\times P^*$, линейных по второму аргументу и гладких по первому, обозначим через $\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P$, а сопряженное к нему пространство — через $\mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P^*$. Для любого $\varphi\in\mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P^*$ определим

$$\Pi_A(\varphi)=\langle\varphi,\ T_A\rangle. \tag{2.63}$$

Очевидно, что если $\vec{f}\in\vec{\mathcal{P}}^n$, то Фурье-образ $\mathcal{F}\vec{f}=\vec{f}(\tilde{u}^*)\,\delta(x)\in\mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P^*$ и

$$\Pi_A(\mathcal{F}\vec{f})=\vec{f}(A)\in M.$$

Таким образом, исходная алгебра M принадлежит множеству элементов вида (2.63). Это более широкое множество также образует алгебру (аналог групповой алгебры), и закон композиции в нем выглядит так.

Лемма 2.10.

$$\text{(a)}\qquad \Pi_A(\varphi)\,\Pi_A(\psi)=\Pi_A(\varphi*\psi),\quad \varphi*\psi=\langle\psi,\ U\rangle^*\varphi. \tag{2.64}$$

Здесь семейство $U=\{U^{x,\rho}\mid x\in\tilde{\mathcal{M}},\ \rho\in P^*\}$ операторов в $\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P$ задано формулой

$$U^{x,\rho}=\left\langle\rho,\ \tilde{T}^x_{\tilde{u}\otimes\tilde{d}\otimes d}\right\rangle_3,\quad \tilde{d}\equiv r(d^{-1}). \tag{2.65}$$

(b) *Семейство U является почти-обобщенным сдвигом на $\tilde{\mathcal{M}}\times P^*$, т. е. для него выполнены первые две аксиомы* (2.14) (*если в качестве единичного элемента в $\tilde{\mathcal{M}}\times P^*$ взять* $(e,\ c)$, *где* $c\in P^*$, $\langle c,\ I\rangle=1$).

(c) *Свертка* (2.64) *на $\mathcal{E}^*(\tilde{\mathcal{M}})\otimes P^*$ ассоциативна и обладает правой единицей $c\otimes\delta(x)$.*

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству леммы 2.9.

Поясним структуру формулы (2.65). Элементы $\tilde{d}\otimes d$ порождают ZF-алгебру, отвечающую решению $\tilde{\mathbb{R}}^{lj}_{km}=\tilde{\omega}^{lj}_{mk}$ квантового уравнения Янга — Бакстера (см. замечание 2.6). Они задают автоморфизм

$$\tilde{u}^{i}\to\hat{u}^{\cdot}\equiv\tilde{u}^s\otimes\tilde{d}^k_s\otimes d^l_k$$

соотношений $(\widetilde{2.50})$. Оператор $\tilde{T}^x_{\hat{u}}$ в (2.65) является представлением обобщенного сдвига $\tilde{U}^x$ с генераторами $\hat{u}^i$.

Можно указать еще одну формулу для почти-свертки (2.64), порожденной почти-сдвигом U:

$$(\varphi * \psi)(y) = \left\langle \int\limits_{\tilde{\mathscr{M}}} \Phi(x,\ y,\ x)\,dx,\ I \otimes I \right\rangle_2. \tag{2.66}$$

Здесь $\varphi,\ \psi \in \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P^*$, элемент $\Phi(x,\ y,\ z) \in P^* \otimes P^*$ по переменной x принадлежит $\mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}})$, а по y, z принадлежит $\mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}} \otimes \tilde{\mathscr{M}})$; внутренний интеграл в (2.66) означает спаривание обобщенной функции с основной на $\tilde{\mathscr{M}}$, а внешнее спаривание с единицей в (2.66) происходит по второй компоненте тензорного произведения. Элемент $\Phi(x,\ y,\ z)$ в (2.66) является решением задачи Коши:

$$\tilde{u}^i_x (I \otimes \theta^k_i)\,\Phi = \tilde{u}^{i*}_y (\pi^k_i \otimes I)\,\Phi, \quad \Phi|_{x=e} = \varphi(y) \otimes \psi(z), \tag{2.67}$$

где $\pi^k_i \equiv r(d_i^{-1k})^*$, $\theta^k_i \equiv l(d_i^{-1k})^*$ — операторы на P^*.

Но построенная почти-свертка не обладает единицей, поскольку для U нарушена третья из аксиом (2.14). Для того чтобы получить настоящую свертку, настоящий обобщенный сдвиг и истинный коспектр алгебры M, необходимо профакторизовать множество $\tilde{\mathscr{M}} \times P^*$ по некоторому отношению эквивалентности.

Обозначим через J' идеал в алгебре $\mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P^*$, составленный из функционалов, аннулирующих свертку справа: $J' = \{\psi \,|\, \varphi * \psi = 0 \quad \forall \varphi\}$. Тогда, если $\psi \in J'$, то $\Pi_1(\psi) = 0$. Поэтому не существенны те «направления» в $\tilde{\mathscr{M}} \times P^*$, вдоль которых «дифференцируют» распределения из J'.

Через $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ обозначим подмножество в $\mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P$, аннулирующее J':

$$\mathscr{E}(\mathscr{M}) = \{F^i \otimes p_i \,|\, \langle \psi,\ F^i \otimes p_i \rangle = 0 \ \ \forall \psi \in J'\}.$$

Две точки из $\tilde{\mathscr{M}} \times P^*$ назовем эквивалентными, если в них любой элемент из $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ принимает одинаковые значения. Фактор $\tilde{\mathscr{M}} \times P^*$ по этому отношению эквивалентности обозначим через $\mathscr{M}$. Очевидно, что $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ можно рассматривать как пространство «гладких» функций на $\mathscr{M}$, а фактор $\mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P^*/J' \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{E}^*(\mathscr{M})$ — как пространство распределений на $\mathscr{M}$.

Лемма 2.11. *Операторы $U^{x,\rho}$ оставляют инвариантным множество $\mathscr{E}(\mathscr{M})$. Если точки $(x,\ \rho) \sim (x',\ \rho')$ эквивалентны, то $U^{x,\rho} = U^{x',\rho'}$.*

Доказательство. Последнее утверждение прямо следует из того, что в силу (2.64) $\langle \psi,\ U \rangle = 0 \quad \forall \psi \in J'$. Далее, пусть $F^i \otimes p_i \in \mathscr{E}(\mathscr{M})$. Нужно доказать, что $U^{x,\rho}(F^i \otimes p_i) \in \mathscr{E}(\mathscr{M})$, т. е. что

$$\langle \psi,\ U^{x,\rho}(F^i \otimes p_i) \rangle = 0 \quad \forall x \in \tilde{\mathscr{M}}, \quad \rho \in P^*, \quad \psi \in J'.$$

Для этого достаточно доказать, что при любом $\varphi\in\mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}})\otimes P^*$

$$\langle\varphi_{x,\rho},\ \langle\psi,\ U^{x,\rho}(F^i\otimes p_i)\rangle\rangle=0. \tag{2.68}$$

Здесь нижние индексы x, ρ обозначают переменные, по которым действует распределение φ.

Левая часть (2.68) в силу (2.64) равна

$$\langle\langle\varphi,\ U\rangle^*\psi,\ F^i\otimes p_i\rangle=\langle\psi*\varphi,\ F^i\otimes p_i\rangle.$$

Поскольку J' — идеал, то $\psi*\varphi\in J'$, и, следовательно, $\langle\psi*\varphi,$ $F^i\otimes p_i\rangle=0$ по определению $\mathscr{E}(\mathscr{M})$. Отсюда получаем (2.68). Лемма доказана.

В силу этой леммы операторы U (2.65) корректно задают на $\mathscr{M}$ обобщенный сдвиг (будем обозначать его той же буквой U). Единицей на $\mathscr{M}$ служит класс эквивалентности элемента (e, c) из леммы 2.10(b). Свертка (2.64), (2.66) задает в $\mathscr{E}^*(\mathscr{M})$ структуру ассоциативной алгебры с единицей. Итак, доказана

Теорема 2.5. *Пусть алгебра M (2.50) эквивалентна алгебре $\tilde{M}$, для которой существует обобщенный сдвиг $\tilde{U}$. Тогда для M существует обобщенный сдвиг U (2.65) на коспектре $\mathscr{M}=\operatorname{cospec}(M)$.*

Кроме того,

(a) *Семейство T_A корректно определяет на $\mathscr{M}$ представление обобщенного сдвига U. Отображение Π_A (2.63) корректно определено на $\mathscr{E}^*(\mathscr{M})$ и задает представление этой сверточной алгебры.*

(b) *Для любого $f\in\mathrm{Smb}$ определено преобразование Фурье $\mathscr{F}f\in$ $\in\mathscr{E}^*(\mathscr{M})$, причем*

$$\Pi_A(\mathscr{F}f)=f(A),\quad \varphi*\mathscr{F}f=f(u)^*\varphi.$$

Здесь $u=(u^1,\ \ldots,\ u^n)$ — набор операторов

$$u^i=\tilde{u}^k\otimes r\,(d_k^{-1i}):\ \mathscr{E}(\mathscr{M})\to\mathscr{E}(\mathscr{M}),$$

где $\tilde{u}^k$ — генераторы обобщенного сдвига $\tilde{U}$.

(c) *Операторы u^i являются генераторами обобщенного сдвига U на коспектре*

$$Uu^i=u^i(U),\quad T_AA^i=u^i(T_A)$$

и удовлетворяют исходным соотношениям (2.50):

$$u^iu^j=\omega_{mk}^{ij}u^mu^k+\mu_k^{ij}u^k.$$

2.8. Преобразование масштабных и структурных констант. Приведем теперь один частный вариант изложенной выше общей схемы, используя подход работы [37]. Мы сможем указать здесь в каком-то смысле явные формулы, связывающие масштабные и структурные константы эквивалентных квадратично-линейных соотношений, а также более простые формулы для обобщенного сдвига (2.65).

Пусть Γ — некоторая полугруппа с единицей E, а $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\Gamma)$ — алгебра функций на ней. Не будем уточнять топологическую структуру Γ и структуру пространства функций $\mathbf{F}$; например, можно считать, что Γ компактна и $\mathbf{F} = L^2(\Gamma)$.

Предположим, что в $\mathbf{F}(\Gamma)$ задано помимо обычного поточечного умножения еще одно умножение $\circ$, относительно которого $\mathbf{F}(\Gamma)$ является алгеброй с единицей 1. Пусть это умножение правоинвариантно, т. е.

$$(R(\alpha)^*\Phi)\circ(R(\alpha)^*\Psi) = R(\alpha)^*(\Phi\circ\Psi)$$

для любых Φ, $\Psi \in \mathbf{F}(\Gamma)$ и любого $\alpha \in \Gamma$, где $R(\alpha)$ — правый сдвиг на Γ. Будем обозначать $\Phi \odot \Psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\Phi\circ\Psi)(E)$.

Предположим далее, что задан антигомоморфизм

$$H\colon\ \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}),$$

связанный с масштабными и структурными константами алгебры $(\widetilde{2.50})$ следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}\,(H(\alpha)\otimes H(\alpha)) = (H(\alpha)\otimes H(\alpha))\,\tilde{\omega}, \\ &\tilde{\mu}\,(H(\alpha)\otimes H(\alpha)) = H(\alpha)\,\tilde{\mu} \quad \forall \alpha \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Лемма 2.12. *Пусть матрица* $\Lambda = H^{-1}\odot H$ (*т. е.* $\Lambda_i^l = H_i^{-1s}\odot H_s^l$) *обратима. Тогда и матрица* $\mathbb{H}_{ml}^{rk} = H_l^k \odot H_m^r$ *обратима (формула для обратной матрицы* $\mathbb{H}^{-1}$ *приведена ниже). При этом соотношения* $(\widetilde{2.50})$ *эквивалентны квадратично-линейным соотношениям* (2.50) *с масштабными константами* $\omega = \mathbb{H}^{-1}\tilde{\omega}\mathbb{H}$ *и структурными константами* $\mu = \tilde{\mu}\mathbb{H}$.

Доказательство. В силу правоинвариантности умножения $\circ$ и в силу антигомоморфности H имеем

$$H_l^i \circ H_m^r = (H_k^i \odot H_s^r)\, H_l^k H_m^s, \tag{2.70}$$

и аналогично

$$H_l^{-1i}\circ H_m^r = (H_l^{-1k}\odot H_s^r)\, H_k^{-1i} H_m^s.$$

В частности,

$$H_l^{-1i}\circ H_i^r = H_l^{-1i}\odot H_i^r \equiv \Lambda_l^r \quad \text{или} \quad N_l^i\circ H_i^r = \delta_l^r,$$

где $N \equiv \Lambda^{-1}H^{-1}$. А отсюда и из (2.70) получаем, обращая H

$$[N_{r'}^m \circ N_{i'}^l \circ (H_m^s H_l^k)]\,\mathbb{H}_{sk}^{ri} = \delta_{r'}^r \delta_{i'}^i,$$

т. е. матрица $\mathbb{H}$ обратима и

$$\mathbb{H}_{ri}^{-1sk} = (N_r^m \circ N_i^l)\odot(H_m^s H_l^k).$$

Алгебру $\mathbf{F}$ вложим в $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}\to\mathbf{F})$ левыми умножениями, т. е. $\mathbf{F} \ni \Phi \to (\Phi\circ) \in \mathrm{Hom}(\mathbf{F}\to\mathbf{F})$. Далее, полученную подалгебру $(\mathbf{F}\circ) \subset \mathrm{Hom}(\mathbf{F}\to\mathbf{F})$ вложим левым умножением l в алгебру операторов над $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}\to\mathbf{F})$, т. е. $T \to l(T)$, $l(T)Q \equiv TQ$. Полученную подалгебру операторов обозначим P^*. Таким образом, $\mathbf{F} \approx P^*$.

Далее каждому $T \in \mathrm{Hom}(\mathbf{F} \to \mathbf{F})$ соответствует $T^* \in \mathrm{Hom}(\mathbf{F}^* \to \mathbf{F}^*)$, а ему в свою очередь можно сопоставить оператор умножения справа, т. е. $T^* \to r(T^*)$, $r(T^*)Q^* \equiv Q^*T^*$. Подалгебру операторов $\{r(T^*) \mid T \in (\mathbf{F}\circ)\}$ обозначим через P. Итак, мы отождествляем $(\mathbf{F}\circ)^* \approx P$. При этом сопряженным к P пространством будет P^*,если отождествить $l(P)^* \approx r(P)$.

Обозначим теперь $d_i^j \equiv (N_i^j\circ)^* \in P$. Тогда операторы умножения слева на $N_i^j\circ$ отождествляются с $r(d_i^j)^*$, а операторы умножения слева на $H_i^j\circ$ отождествляются с $r(d_i^{-1j})^* \equiv \pi_i^j$.

Мы хотим доказать, что элемент d задает P-гомоморфизм соотношений (2.50). Для этого нужно проверить (2.58а) или проверить, что элементы $\pi_i^j = H_i^j\circ$ удовлетворяют (2.58b). Итак, нужно доказать, что

$$\omega_{rp}^{ij} H_l^p \circ H_m^r = \tilde{\omega}_{ml}^{sk} H_k^j \circ H_s^i, \qquad \mu_p^{ij} H_l^p = \tilde{\mu}_l^{sk} H_k^j \circ H_s^i.$$

Достаточно иметь эти тождества в точке $E \in \Gamma$, поскольку в силу (2.70) и (2.69) они тогда будут выполнены в любой точке на Γ. А в точке E они выполнены по определению коэффициентов ω и μ, указанному в формулировке. Лемма доказана.

Итак, мы получаем способ перечисления квадратично-линейных соотношений, эквивалентных данным. Исходным объектом при этом служит пространство функций $\mathbf{F}$ на некоторой полугруппе Γ. В $\mathbf{F}$ должно быть задано правоинвариантное умножение и должен быть задан антигомоморфизм H со свойствами (2.69) и обратимой матрицей Λ. Будем называть такие соотношения Γ-*эквивалентными*.

Отметим, что условия (2.69) автоматически выполнены, например, в следующих случаях:

(A) соотношения $\widetilde{(2.50)}$ абелевы, т. е. $\tilde{\omega}_{mk}^{ij} = \delta_k^i \delta_m^j$, $\tilde{\mu}_k^{ij} = 0$;

(B) соотношения $\widetilde{(2.50)}$ линейны, а полугруппа Γ действует автоморфизмами на соответствующей группе Ли $\tilde{\mathcal{M}}$;

(C) для соотношений $\widetilde{(2.50)}$ определен обобщенный сдвиг $\tilde{U}$ на многообразии $\tilde{\mathcal{M}}$, полугруппа Γ действует диффеоморфизмами на $\tilde{\mathcal{M}}$, причем точка e неподвижна, а сдвиг $\tilde{U}$ Γ-*инвариантен* относительно этого действия, т. е.

$$\tilde{U}^x K(\alpha) = (K(\alpha)_x \otimes K(\alpha))\, \tilde{U}^x. \tag{2.71}$$

Здесь K — представление Γ в $\mathscr{E}(\tilde{\mathcal{M}})$, $(K(\alpha)F)(x) \equiv F(\alpha(x))$, где $\alpha \in \Gamma$, $F \in \mathscr{E}(\tilde{\mathcal{M}})$.

Во втором и в третьем случаях в качестве антигомоморфизма H: $\Gamma \to GL(n, \mathbf{R})$, $n = \dim \tilde{\mathcal{M}}$, берем дифференциал действия полугруппы в точке e:

$$H(\alpha)_j^i = \left.\frac{\partial \alpha(x)_j}{\partial x_i}\right|_{x=e}.$$

Свойства (2.69) следуют тогда из перестановочных соотношений между генераторами $\tilde{u}^{\cdot}$ обобщенного сдвига $\tilde{U}$ и тождеств, вытекающих из (2.71) после дифференцирования по x_i при $x=e$:

$$\tilde{u}^i K(\alpha) = H^i_j(\alpha) K(\alpha) \tilde{u}^j. \tag{2.71a}$$

Во всех случаях (A), (B), (C) работает лемма 2.12, а тем самым и теорема 2.5, т. е. для квадратично-линейных соотношений (2.50) можно построить обобщенный сдвиг, исходя из сдвига $\tilde{U}$. Более того, здесь конструкция теоремы 2.5 упрощается.

Рассмотрим вложения

$$K^{-1}\colon\ \mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}) \to \mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P^*, \qquad K^{-1}(F)(x,\ \alpha) \equiv (K(\alpha)^{-1}F)(x),$$
$$K^*\colon\ \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}) \to \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes P^*, \qquad K^*(\lambda)(x,\ \alpha) \equiv (K(\alpha)^*\lambda)(x).$$

Здесь мы отождествляем $\mathbf{F} \approx P^*$ (см. доказательство леммы 2.12). Устроим теперь композицию этих вложений с отображением $\varphi \otimes \psi \xrightarrow{\tau} \Phi$ из (2.67):

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}_y \times \tilde{\mathscr{M}}_z) \arrow[r, "K^* \otimes K^*"] \arrow[d, "\Omega"] & \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}_y \times \tilde{\mathscr{M}}_z) \otimes P^* \otimes P^* \arrow[dd, "\tau"] \\
\mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}_x) \otimes \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}_y \times \tilde{\mathscr{M}}_z) \arrow[d, "K_y^* \otimes K_x^{-1} K_z^*"] & \\
(\mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}_x) \otimes \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}_y \times \tilde{\mathscr{M}}_z)) \otimes P^* \otimes P^* \arrow[r, phantom] &
\end{tikzcd} \tag{2.72}$$

Здесь в нижней стрелке отображение K^{-1} действует на первую компоненту, т. е. на $\mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}_x)$, а в верхней вертикальной стрелке участвует новое отображение

$$\Omega\colon\ \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}} \times \tilde{\mathscr{M}}) \to \mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}}) \otimes \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}} \times \tilde{\mathscr{M}}).$$

Лемма 2.13. *Положим*

$$\mathring{U}^x \overset{\text{def}}{=} (K_x \odot K)\tilde{U}^x. \tag{2.73}$$

Тогда отображение Ω, *заданное формулой*

$$\Omega(\lambda \otimes \rho)(x,\ y,\ z) = (\mathring{U}^{x*}\lambda)(y)\,\rho(z)$$

(*где* $\lambda,\ \rho \in \mathscr{E}^*(\tilde{\mathscr{M}}),\ x,\ y,\ z \in \tilde{\mathscr{M}}$), *замыкает диаграмму* (2.72) *до коммутативной*.

Доказательство. Отображение τ в (2.72) определяется решением задачи Коши (2.67). Утверждение леммы означает, что решение этой задачи на специальных начальных данных вида

$$\varphi(y) \otimes \psi(z) = (K^*\lambda)(y) \otimes (K^*\rho)(z)$$

можно представить в виде

$$\Phi(x,\ y,\ z) = K_y^* \otimes K_x^{-1} K_z^* [\Omega(\lambda \otimes \rho)(x,\ y,\ z)]. \tag{2.74}$$

Докажем это.

Уравнение (2.67) в данном случае выглядит так:

$$\tilde{u}^i_x (I \otimes (H^j_i \circ)^*)\Phi = \tilde{u}^{i*}_y ((H^j_i \circ) \otimes I)\Phi. \tag{2.75}$$

В силу правой инвариантности умножения $\circ$ выполнено тождество

$$H_i^j \circ K^* = H_i^s K^* (H_s^j \odot K^*).$$

Далее в силу (2.71а) имеем

$$\tilde{u}^{i*} H_i^s K^* = K^* \tilde{u}^{s*}.$$

Комбинируя это с предыдущим тождеством, получаем

$$\tilde{u}^{i*} H_i^j \circ K^* = K^* \tilde{u}^{s*} (H_s^j \odot K^*) \equiv K^* \mathring{u}^{j*}, \tag{2.76}$$

где

$$\mathring{u}^j = (H_s^j \odot K)\, \tilde{u}^s. \tag{2.77}$$

Из (2.76) после сопряжения следует

$$K \tilde{u}^i (H_i^j \circ)^* = (H_s^j \odot K)\, \tilde{u}^s K$$

или

$$\tilde{u}^i (H_i^j \circ)^* K^{-1} = K^{-1} \mathring{u}^j. \tag{2.76a}$$

Подставив теперь (2.74) в (2.75), мы в силу тождеств (2.76) и (2.76а) получим уравнение для Ω:

$$\mathring{u}_x^j \Omega (\lambda \otimes \rho) = \mathring{u}_y^{j*} \Omega (\lambda \otimes \rho) \tag{2.78}$$

с начальным условием

$$\Omega (\lambda \otimes \rho)|_{x=e} = \lambda (y)\, \rho (z).$$

Теперь изучим свойства оператора $\mathring{U}$.

Лемма 2.14. *Формула* (2.73) *задает на* $\tilde{\mathscr{M}}$ *обобщенный сдвиг с генераторами* (2.77).

Доказательство. Поскольку e — неподвижная точка действия полугруппы Γ, то $(KF)(e) = F(e)$ для любой $F \in \mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}})$. Следовательно,

$$\mathring{U}^x F|_{x=e} = (I \odot K)\, \tilde{U}^x F|_{x=e} = (I \odot K) F = F.$$

И, кроме того,

$$(\mathring{U}^x F)(e) = (K_x \odot I)(\tilde{U}^x F)(e) = (K_x \odot I) F(x) = F(x).$$

Остается проверить аксиому ассоциативности (2.14) для $\mathring{U}$. Имеем в силу Γ-инвариантности (2.71)

$$\mathring{U}^x \mathring{U}^y = (K_x \odot K)\, \tilde{U}^x (K_y \odot K)\, \tilde{U}^y = (K_x \odot K)(K_y \odot K_x K)\, \tilde{U}^x \tilde{U}^y. \tag{2.79}$$

Далее в силу правоинвариантности умножения в $\mathbf{F}$ для любых двухкоммутирующих гомоморфизмов σ и $\varkappa$ полугруппы Γ выполнено тождество

$$(\sigma \circ \varkappa)(\alpha) = (\sigma \odot \varkappa)\, \sigma(\alpha)\, \varkappa(\alpha) \quad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Выберем в качестве таких гомоморфизмов два экземпляра представления K, действующих один по x, а другой по текущей переменной на $\tilde{\mathcal{M}}$. Получим

$$K_x \circ K = (K_x \odot K) K_x K$$

или

$$(K_x \odot K)(K_y \odot K_x K) = K_y \odot (K_x \circ K).$$

Поэтому (2.79) дает

$$\mathring{U}^x \mathring{U}^y = (K_y \odot (K_x \circ K)) \tilde{U}^x \tilde{U}^y.$$

Совершенно аналогично

$$\mathring{U}^y_x \mathring{U}^x = (K_y \odot K_x)(K_y K_x \odot K) \tilde{U}^y_x \tilde{U}^x = (K_y \circ K_x) \odot K) \tilde{U}^y_x \tilde{U}^x.$$

Теперь осталось учесть ассоциативность обобщенного сдвига $\tilde{U}$ и ассоциативность умножения в $\mathbf{F}$, т. е. $K_y \odot (K_x \circ K) = (K_y \circ K_x) \odot K$. Таким образом, $\mathring{U}^x \mathring{U}^y = \mathring{U}^y_x \mathring{U}^x$, т. е. $\mathring{U}$ — обобщенный сдвиг.

Его генераторы вычисляются дифференцированием (2.73) по x_j при $x = e$, что дает (2.77). Лемма 2.14 доказана.

В качестве следствия немедленно получаем уравнения

$$\mathring{u}^j_x \mathring{U}^x = \mathring{U}^x \mathring{u}^j$$

или

$$\mathring{u}^j_x \mathring{U}^{x*} = \mathring{u}^{j*} \mathring{U}^{x*}.$$

Поэтому решение (2.78) имеет вид, указанный в формулировке леммы 2.13. Лемма 2.13 доказана.

Подставляя теперь (2.74) в (2.66), находим формулу для свертки, порожденной обобщенным сдвигом U:

$$(K^*\lambda)*(K^*\rho) = K^*(\lambda*\rho),$$

где

$$\lambda*\rho = \left\langle \int_{\tilde{\mathcal{M}}} (K_x^{-1} \mathring{U}^{x*}\lambda)(K^*\rho)(x)\,dx,\ I \right\rangle = \langle \rho,\ \mathring{U} \rangle^* \lambda.$$

Таким образом, свертка $\lambda*\rho$ соответствует обобщенному сдвигу $\mathring{U}$. Кроме того, из (2.76) следуют перестановочные формулы для генераторов двух обобщенных сдвигов U и $\mathring{U}$:

$$u^j K^{-1} = K^{-1} \mathring{u}^j.$$

Следствие 2.5. *Пусть квадратично-линейные соотношения* (2.50) *и* $\widetilde{(2.50)}$ Г-*эквивалентны, причем для соотношений* $\widetilde{(2.50)}$ *существует* Г-*инвариантный обобщенный сдвиг* $\tilde{U}$ *на многообразии* $\tilde{\mathcal{M}}$. *Тогда обобщенные сдвиги* U (2.65) *и* $\mathring{U}$ (2.73), *соответствующие соотношениям* (2.50), *связаны сплетающим оператором* K^{-1} (*а их сверточные алгебры — гомоморфизмом* K^*). *В частности, коспектр алгебры* (2.50) *совпадает с* $\tilde{\mathcal{M}}$.

Переход от соотношений $\widetilde{(2.50)}$ к (2.50) и от сдвига $\tilde{U}$ к сдвигу $\mathring{U}$ можно повторить, если $\mathring{U}$ окажется Г-инвариантным.

С л е д с т в и е 2.6. *Если умножение в* $\mathbf{F}(\Gamma)$ *двусторонне инвариантно, например если полугруппа* Γ *абелева, то сдвиг* $\mathring{U}$ (см. (2.73)) Γ-*инвариантен. В этом случае существует еще один обобщенный сдвиг* $\mathring{\mathring{U}}$ (*тоже* Γ-*инвариантный*), *отвечающий квадратично-линейным соотношениям с масштабными константами* $\mathbb{H}^{-2}\tilde{\omega}\mathbb{H}^2$ *и структурными константами* $\tilde{\mu}\mathbb{H}^2$ (*см. лемму* 2.12). *И так далее.*

Описание всех возникающих таким образом масштабных и структурных констант остается открытой проблемой. Неизвестно также, всегда ли можно для заданных масштабных и структурных констант подобрать полугруппу Γ и умножение в $\mathbf{F}(\Gamma)$ так, чтобы заданные соотношения оказались Γ-эквивалентными каким-нибудь стандартным, например линейным, соотношениям. Важный шаг здесь — описание всех правоинвариантных умножений в $\mathbf{F}(\Gamma)$.

П р и м е р 2.10. *Сдвиги, порожденные абелевыми группами* [37]. Самый простой вариант: Γ—компактная абелева группа. Разложим каждую функцию $\Phi \in \mathbf{F}(\Gamma)$ по ортогональному базису характеров $\{\chi^a\} \subset \Gamma^*$:

$$\Phi = \sum \Phi_a \chi^a$$

и построим искомое произведение в $\mathbf{F}(\Gamma)$ по формуле

$$(\Phi \circ \Psi)(\alpha) = \Phi_a \Psi_b Q^{ab} \chi^a(\alpha)\, \chi^b(\alpha),$$

где $Q^{ab} \equiv \chi^a \odot \chi^b$. Задавать числовую матрицу Q можно произвольно с единственным ограничением: должно выполняться условие ассоциативности

$$(\chi^a \circ \chi^b) \circ \chi^c = \chi^a \circ (\chi^b \circ \chi^c).$$

После того как матрица Q выбрана, можно записать произведение $\circ$ в более удобном виде:

$$(\Phi \circ \Psi)(\alpha) = \iint\limits_{\Gamma \times \Gamma} \mathscr{B}(\beta, \gamma)\, \Phi(\beta\alpha)\, \Psi(\gamma\alpha)\, dh(\beta)\, dh(\gamma),$$

где матрица $\mathscr{B}$ определяется формулой

$$\mathscr{B} = \chi'^{-1} Q \chi^{-1}, \quad \chi \equiv ((\chi^a(\beta))) \tag{2.80}$$

(штрих означает транспонирование), h — мера Хаара на Γ с единичной плотностью в точке E.

В терминах «интегрального ядра» $\mathscr{B}$ оператор (2.73) можно записать так:

$$(\mathring{U}^x F)(y) = \iint\limits_{\Gamma \times \Gamma} \mathscr{B}(\beta, \gamma)\, (U^{\beta(x)} F)(\gamma(y))\, dh(\beta)\, dh(\gamma), \tag{2.81}$$

где $F \in \mathscr{E}(\tilde{\mathscr{M}})$. Мы видим, что группа Γ создает р е ш е т к у на $\tilde{\mathscr{M}}$, по которой идет суммирование в (2.81).

Простейшая решетка — одномерная — соответствует группе с одной образующей. Рассмотрим, например, циклическую группу с образующей α и соотношением $\alpha^2=E$. Базис характеров такой:

$$\chi^0 \equiv 1, \quad \chi^{(1)}(\beta)=\begin{cases} 1, & \text{если } \beta=E, \\ -1, & \text{если } \beta=\alpha. \end{cases}$$

Таблица умножения:

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+4\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Здесь ε — произвольное число, характеризующее отклонение умножения от обычного поточечного. Матрица $\mathcal{B}$ (2.80) имеет в данном случае вид

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+4\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Обобщенный сдвиг (2.81), порожденный такой группой Г, задается формулой

$$\mathring{U}^x=(1+\varepsilon)\tilde{U}^x-\varepsilon(\tilde{U}^{\alpha(x)}+K(\alpha)\tilde{U}^x-K(\alpha)\tilde{U}^{\alpha(x)}). \qquad (2.82)$$

Точно такой же сдвиг получим и в случае, если Г — полугруппа с одной образующей $\alpha^2=\alpha$.

Отметим, что сдвиг $\mathring{\mathring{U}}$, который в силу следствия 2.6 можно построить, исходя из $\mathring{U}$, в данном случае не даст ничего нового: он совпадает с $\mathring{U}$ после замены ε на $2\varepsilon(1+2\varepsilon)$. При $\varepsilon=-1/4$ сдвиг вообще меняться не будет.

Случай $\varepsilon=-1/4$ особый; он соответствует тривиальной таблице умножения $Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

В общем случае умножение в $\mathbf{F}(\Gamma)$ с тривиальной таблицей выглядит так:

$$(\Phi\circ\Psi)(\alpha)=$$
$$=\Phi(\alpha)\int_\Gamma \Psi(\beta)\frac{dh(\beta)}{h(\Gamma)}+\Psi(\alpha)\int_\Gamma \Phi(\beta)\frac{dh(\beta)}{h(\Gamma)}-\int_\Gamma \Phi(\beta)\frac{dh(\beta)}{h(\Gamma)}\int_\Gamma \Psi(\gamma)\frac{dh(\gamma)}{h(\Gamma)}.$$

Обобщенный сдвиг (2.73), соответствующий этому умножению, мы обозначим специальным значком «диез»:

$$(U^{\#x}F)(y)=$$
$$=\int_\Gamma [(\tilde{U}^xF)(\beta(y))+(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(y)]\frac{dh(\beta)}{h(\Gamma)}-\iint_{\Gamma\times\Gamma}(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\gamma(y))\frac{dh(\beta)}{h(\Gamma)}\frac{dh(\gamma)}{h(\Gamma)}. \qquad (2.83)$$

Такой сдвиг не меняется при повторном применении операции «диез». Назовем его *сдвигом типа Дельсарта*.

Использование других таблиц умножения приводит к обобщенным сдвигам более сложной структуры, чем дельсартовский.

Рассмотрим, например, абелеву группу с тремя образующими α, β, $\alpha\beta$ и соотношениями $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha^2=\beta^2=E$.

Матрица характеров χ (см. (2.80)) здесь такова:

$$\chi=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\\ \hline E \quad \alpha \quad \beta \quad \alpha\beta\end{array}\begin{array}{r} a=0\\ 1\\ 2\\ 3\end{array}$$

Возможны следующие три типа таблиц умножения $Q=((Q^{ab}))$:

Тип I:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & p & 0\\ 1 & q & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Тип II:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & s\\ 1 & 0 & 0 & t\\ 1 & m & r & st\end{bmatrix}, \quad st=mr.$$

Тип III:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & ps & p & s\\ 1 & \pm p & \pm pt & t\\ 1 & \pm s & \pm t & st\end{bmatrix}.$$

Здесь p, q, s, t, m, r — произвольные комплексные числа (единственное ограничение на них имеется в типе II).

Каждая из этих таблиц задает на $\mathbf{F}(\Gamma)$ билинейное правоинвариантное ассоциативное произведение с двусторонней единицей 1. Матрица $\mathscr{B}=\chi'^{-1}Q\chi^{-1}$ в каждом из трех случаев устроена следующим образом:

Тип I:

$$\mathscr{B}=\frac{(p+q)}{16}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{(p-q)}{16}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}+\mathscr{B}_D.$$

Тип II:

$$\mathscr{B}=\frac{(s+t)}{16}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}+\frac{(s-t)}{16}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{(m+r)}{16}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}+\frac{(m-r)}{16}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{st}{16}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\mathscr{B}_D, \quad \text{где} \quad st=mr.$$

Тип III: Для верхнего знака $\oplus$

$$\mathcal{B}=\frac{2p}{16}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}+\frac{2s}{16}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{2t}{16}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}+\frac{st}{16}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{ps}{16}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}+\frac{pt}{16}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}.$$

Для нижнего знака $\ominus$

$$\mathcal{B}=\frac{2p}{16}\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&-1&1&0\end{bmatrix}+\frac{2s}{16}\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{2t}{16}\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\end{bmatrix}+\frac{st}{16}\begin{bmatrix}\\ \\ & \ldots & \end{bmatrix}+\frac{ps}{16}\begin{bmatrix}\\ \\ & \ldots & \end{bmatrix}-$$

$$-\frac{pt}{16}\begin{bmatrix}\\ \\ & \ldots & \end{bmatrix}+\mathcal{B}_D.$$

Здесь обозначено

$$\mathcal{B}_D=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}7&3&3&3\\3&-1&-1&-1\\3&-1&-1&-1\\3&-1&-1&-1\end{bmatrix},$$

и в последней формуле для типа $\mathrm{III}_{\ominus}$ многоточиями обозначены те же матрицы, что стоят при st, ps, pt в типе $\mathrm{III}_{\oplus}$.

Во всех трех типах слагаемое $\mathcal{B}_D$ порождает дельсартову компоненту $U^{\#}$ обобщенного сдвига:

$$\begin{aligned}(U^{\#x}F)(y)=\frac{1}{16}[7(\tilde{U}^{x}F)(y)+3(\tilde{U}^{x}F)(\alpha(y))+3(\tilde{U}^{x}F)(\beta(y))+\\+3(\tilde{U}^{x}F)(\alpha\beta(y))+3(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(y)+3(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(y)+3(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(y)-\\-(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\alpha(y))-(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\alpha\beta(y))-\\-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\alpha(y))-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\beta(y))-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\alpha\beta(y))-\\-(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\alpha(y))-(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\alpha\beta(y))].\end{aligned}$$

•

Остальные слагаемые в матрице $\mathcal{B}$ (где участвуют множителями числа p, q, s, t, m, r) задают по формуле (2.81) недельсартову компоненту обобщенного сдвига:

$$\mathring{U}=U^{\#}+(\mathrm{Non}-\mathrm{Delsarte}).$$

Например, в типе I имеем

$$(\text{Non}-\text{Delsarte})^x F(y)=$$
$$=\frac{(p+q)}{16}[(\tilde{U}^x F)(y)-(\tilde{U}^x F)(\alpha\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\alpha(y))+(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\beta(y))+$$
$$+(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\alpha(y))-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(y)+(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\alpha\beta(y))]+$$
$$+\frac{(p-q)}{16}[(\tilde{U}^x F)(\alpha(y))-(\tilde{U}^x F)(\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(y)+(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\alpha\beta(y))+$$
$$+(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(y)-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\alpha\beta(y))-(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\alpha(y))+(\tilde{U}^{\alpha\beta(x)}F)(\beta(y))].$$

Мы не будем выписывать аналогичную формулу в типе II, а рассмотрим лишь в типе $\mathrm{III}_{\ominus}$ один частный вариант (при $p=s=1$, $t=-1$):

$$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Этому варианту соответствует такой оператор обобщенного сдвига:

$$(\mathring{U}^x F)(y)=\frac{1}{2}[(\tilde{U}^x F)(y)+(\tilde{U}^x F)(\alpha(y))+(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(y)-(\tilde{U}^{\beta(x)}F)(\alpha(y))]. \tag{2.84}$$

Его генераторы имеют вид

$$\mathring{u}^i=\frac{1}{2}\left[\tilde{u}^i+K(\alpha)\tilde{u}^i+H(\beta)^i_j\tilde{u}^j-K(\alpha)H(\beta)^i_j\tilde{u}^j\right].$$

Матрица Λ из леммы 2.12 здесь устроена так:

$$\Lambda=\frac{1}{2}(I+a+b-ab),\quad \text{где}\quad a\equiv H(\alpha),\quad b\equiv H(\beta).$$

Поскольку $a^2=b^2=I$, $[a, b]=0$, то Λ обратима.

Следствие 2.7. *Если α, β — два диффеоморфизма многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$, причем $\alpha^2=\beta^2=\mathrm{id}$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, и, кроме того, если на $\tilde{\mathcal{M}}$ определен обобщенный сдвиг $\tilde{U}$, инвариантный относительно α и β, т. е.*

$$\tilde{U}^x_y F(\alpha(y))=(\tilde{U}^{\alpha(x)}F)(\alpha(y))$$

(и то же для β), то формула (2.84) задает обобщенный сдвиг на $\tilde{\mathcal{M}}$, отвечающий соотношениям (2.50) с масштабными и структурными константами $\omega=\mathbb{H}^{-1}\tilde{\omega}\mathbb{H}$, $\mu=\tilde{\mu}\mathbb{H}$. Здесь

$$\mathbb{H}=\frac{1}{2}[I\otimes I+I\otimes b+a\otimes I-a\otimes b],\quad a\equiv d_e\alpha,\quad b\equiv d_e\beta.$$

Мы вычислим ниже константы ω, μ явно в случае, когда $\tilde{\mathcal{M}}$ — группа Ли, $\tilde{U}$ — правый групповой сдвиг, a и b — автоморфизмы алгебры Ли.

2.9. Алгебры, эквивалентные алгебрам Ли. Алгебру M с квадратично-линейными соотношениями (2.50) мы называем, следуя иям, данным выше в п. 2.7, *эквивалентной алгебре Ли* со структурными константами λ_k^{ij}, если существуют алгебра P и набор элементов $d_j^i \in P$ таких, что

$$\omega_{rn}^{ij} d_i^s \cdot d_j^k = d_r^k \cdot d_n^s, \quad \mu_m^{ij} d_i^s \cdot d_j^k = \lambda_l^{sk} d_m^l, \tag{2.58c}$$

причем матрица $d = ((d_j^i))$ обратима справа, т. е. существует $d^{-1} = ((d_j^{-1i})) \subset P$ такая, что

$$d_j^s \cdot d_s^{-1i} = \delta_j^i I.$$

Посмотрим, как выглядят эти условия для алгебр Замолодчикова — Фаддеева.

Пример 2.11. ZF-*алгебры и уравнение для* L-*оператора*. Пусть $\mathbb{R} = ((\mathbb{R}_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'}))$ невырожденное решение квантового уравнения Янга — Бакстера. Рассмотрим алгебру, порожденную образующими A_α^β (α, $\beta = 1, \ldots, n$) и соотношениями (2.44a):

$$\mathbb{R}_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} A_\beta^\gamma A_{\beta'}^{\gamma'} = \mathbb{R}_{\beta\beta'}^{\gamma\gamma'} A_{\alpha'}^{\beta'} A_\alpha^\beta.$$

Иногда удобно использовать безындексную запись этих соотношений:

$$\mathbb{R} A' A'' = A'' A' \mathbb{R}, \quad A' \equiv A \otimes I, \quad A'' \equiv I \otimes A.$$

В квантовом методе обратной задачи [125] этим соотношениям сопоставляется так называемое уравнение для L-оператора:

$$\mathbb{R} L(w)' L(v)'' = L(v)'' L(w)' \mathbb{R}. \tag{2.85}$$

Здесь $L(w) = ((L_\alpha^\beta(w)))$ — матрица из элементов некоторой алгебры операторов P, зависящая от параметра w (который называют спектральным параметром).

Предположим, что параметр w пробегает квадратную $n \times n$-решетку: $w = \binom{\mu}{\nu}$, μ, $\nu = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$d_{\binom{\alpha}{\beta}}^{\binom{\mu}{\nu}} \equiv L_\alpha^\beta \binom{\mu}{\nu}.$$

Тогда уравнение (2.85) переписывается так:

$$\omega_{\binom{\sigma'}{\alpha'}, \binom{\sigma}{\alpha}}^{\binom{\gamma}{\beta} \binom{\gamma'}{\beta'}} d_{\binom{\gamma}{\beta}}^{\binom{\mu}{\nu}} \cdot d_{\binom{\gamma'}{\beta'}}^{\binom{\mu'}{\nu'}} = d_{\binom{\sigma'}{\alpha'}}^{\binom{\mu'}{\nu'}} \cdot d_{\binom{\sigma}{\alpha}}^{\binom{\mu}{\nu}},$$

где

$$\omega_{\binom{\sigma'}{\alpha'}, \binom{\sigma}{\alpha}}^{\binom{\gamma}{\beta}, \binom{\gamma'}{\beta'}} \equiv \mathbb{R}_{\beta\beta'}^{-1\alpha\alpha'} \mathbb{R}_{\sigma\sigma'}^{\gamma\gamma'}.$$

Полученное уравнение совпадает с первым условием (2.58c). Второе условие тривиально выполнено, поскольку структурные константы μ и λ в данном случае равны нулю.

Итак, *если существует решение уравнения для* L-*оператора* (2.85) *со спектральным параметром, меняющимся на решетке,* *причем это решение обратимо*:

$$L_{\alpha}^{\beta}\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}\cdot L_{\mu}^{-1\nu}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}=\delta_{\alpha}^{\alpha'}\delta_{\beta}^{\beta'}\cdot I,$$

то ZF-*алгебра с квадратичными соотношениями* (2.44а) *эквивалентна коммутативной алгебре* и для соотношений (2.44а) выполнены все утверждения теоремы 2.5.

Пример 2.12. *Проективные представления градуированных алгебр Ли*. Рассмотрим теперь градуированные квадратично-линейные соотношения, на примере которых в [68] была первоначально развита конструкция, изложенная в п. 2.7 (см. по этому поводу также работы [107, 236, 248]).

Пусть Γ — конечная абелева группа (т. е. прямое произведение циклических групп), и пусть $\varkappa$: $\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{C}\setminus\{0\}$ — ее 2-коцикл:

$$\varkappa(\alpha,\ \beta)\varkappa(\alpha\beta,\ \gamma)=\varkappa(\alpha,\ \beta\gamma)\varkappa(\beta,\ \gamma). \tag{2.86}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\varkappa(\alpha,\ E)=\varkappa(E,\ \alpha)=1. \tag{2.87}$$

Обозначим $\omega(\alpha,\ \beta)=\dfrac{\varkappa(\alpha,\ \beta)}{\varkappa(\beta,\ \alpha)}$. Рассмотрим алгебру с образующими $\{A^{\alpha}\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ и перестановочными соотношениями

$$A^{\alpha}A^{\beta}=\omega(\beta,\ \alpha)A^{\beta}A^{\alpha}+\mu^{\alpha,\beta}A^{\alpha\beta}. \tag{2.88}$$

Здесь структурные константы $\mu^{\alpha,\beta}$ связаны с масштабными константами $\omega(\beta,\ \alpha)$ тождествами

$$\omega(\alpha,\ \beta)\mu^{\alpha,\beta}=-\mu^{\beta,\alpha} \qquad \text{(антисимметричность)},$$
$$\mu^{\alpha,\beta}\mu^{\alpha\beta,\gamma}-\mu^{\beta,\gamma}\mu^{\alpha,\beta\gamma}-\omega(\gamma,\ \beta)\mu^{\alpha,\gamma}\mu^{\alpha\gamma,\beta}=0 \quad \text{(тождество Якоби)}.$$

Кроме того, в силу своего определения константы $\omega(\beta,\ \alpha)$ удовлетворяют равенствам

$$\omega(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{\omega(\beta,\ \alpha)},\ \omega(\alpha,\ \alpha)=1 \quad \text{(унитарность)},$$
$$\omega(\beta,\ \alpha)\omega(\gamma,\ \alpha)=\omega(\beta\gamma,\ \alpha).$$

Эти равенства обеспечивают выполнение условий согласования из (2.51). Уравнение Янга — Бакстера из (2.51) в данном случае тривиально.

Отметим, что соотношения (2.88) можно записать в виде

$$[A^{\alpha},\ A^{\beta}]_{\varkappa}=\lambda^{\alpha,\beta}A^{\alpha\beta}, \tag{2.89}$$

где $\lambda^{\alpha,\beta}\equiv\varkappa(\alpha,\ \beta)\mu^{\alpha,\beta}$, а «квазикоммутатор» в левой части определен формулой

$$[A^{\alpha},\ A^{\beta}]_{\varkappa}\equiv\varkappa(\alpha,\ \beta)A^{\alpha}A^{\beta}-\varkappa(\beta,\ \alpha)A^{\beta}A^{\alpha}.$$

Очевидно, квазикоммутатор задает структуру алгебры Ли на линейной оболочке $\mathscr{L}$ образующих $\{A^{\alpha}\}$. Ее структурные константы такие: $\lambda^{\alpha,\beta}\delta_{\gamma}^{\alpha\beta}$, где $\delta_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}$ — символ Кронекера. Обозначим эту алгебру Ли через $\mathfrak{g}_{\Gamma}$. Она называется *градуированной* с помощью группы Γ, а имеющееся у нас линейное отображение $\mathfrak{g}_\Gamma \to \mathscr{L}$ называется *проективным представлением* $\mathfrak{g}_\Gamma$ с мультипликатором $\varkappa$. Построить регулярное представление соотношений (2.88) означает установить связь между умножением в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_\Gamma)$ и умножением в алгебре M с образующими $\{A^\alpha\}$.

Лемма 2.15. *Соотношения* (2.88) *эквивалентны линейным коммутационным соотношениям* (2.89) *в алгебре* $U(\mathfrak{g}_\Gamma)$.

Доказательство. По группе Γ и ее коциклу $\varkappa$ построим новую группу $\Gamma_\varkappa$ с умножением $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \varkappa(\alpha, \beta)\widehat{\alpha\beta}$ (крышкой $\hat{\alpha}$ мы обозначаем элементы $\Gamma_\varkappa$, соответствующие элементам $\alpha \in \Gamma$). Пусть $P = U(\Gamma_\varkappa)$ — обертывающая алгебра. Положим $d^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha \hat{\alpha}$. Тогда элемент d задает P-гомоморфизм соотношений (2.88), т. е. удовлетворяет (2.58с). Очевидно, этот P-гомоморфизм обратим (обратный имеет вид $d^{-1\alpha}_\beta = \delta^\alpha_\beta \hat{\beta}^{-1}$). Лемма доказана.

Таким образом, к соотношениям (2.88) применимы результаты п. 2.7. Вычислим $*$-произведение из леммы 2.9 и почти-свертку из леммы 2.10.

Мы отождествим пространство $P^* = U(\Gamma_\varkappa)^*$ с пространством $\mathbf{F}(\Gamma)$ функций на группе Γ и введем на $\mathbf{F}(\Gamma)$ два сдвига:

$$s_\alpha\colon \{\psi_\beta\} \to \{\varkappa(\beta, \alpha)\psi_{\beta\alpha}\},$$
$$t_\alpha\colon \{\psi_\beta\} \to \{\varkappa(\alpha, \beta)\psi_{\beta\alpha}\}.$$

Тогда операторы $\tilde{d}$, π, θ, участвующие в (2.61), (2.62), (2.65), задаются формулами

$$\tilde{d}^\beta_\alpha \equiv r(d^{-1\beta}_\alpha) = \delta^\beta_\alpha s^{-1*}_\alpha, \quad \pi^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha s^{-1}_\alpha,$$
$$l(d^\beta_\alpha) = \delta^\beta_\alpha t^*_\alpha, \qquad \theta^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha t^{-1}_\alpha.$$

Следовательно, согласно (2.61), (2.62а),

$$\vec{f} * \vec{g} = \vec{g}(R)\vec{f} = \sum \langle \chi_\beta, \ g_\beta(\tilde{R} \otimes \pi \otimes l(d))\, I\rangle_3 \vec{f} =$$
$$= \sum \langle g_\beta(\tilde{R} \otimes s^{-1} \otimes t)(f_\gamma \otimes \chi^\gamma \otimes \chi^\beta), \ I\rangle_3. \qquad (2.90)$$

Здесь $\tilde{R}^\alpha$ — операторы правого регулярного представления линейных соотношений (2.89), а $\vec{f} = \{f_\gamma(\xi)\}$, $\vec{g} = \{g_\beta(\xi)\}$ — полиномиальные по $\xi \in \mathfrak{g}^*_\Gamma$ символы со значениями в $P^* = \mathbf{F}(\Gamma)$. Через $\{\chi^\beta\}$ обозначается базис $\chi^\beta(\alpha) \equiv \delta^\beta_\alpha$ в $\mathbf{F}(\Gamma)$, а через $\langle \ldots, I\rangle_3$ — спаривание с единицей $I \in P$ по третьей компоненте тензорного произведения, т. е. $\langle \chi, I\rangle = \chi(E)$, где $\chi \in P^* = \mathbf{F}(\Gamma)$, E — единица в Γ.

Заметим теперь, что операторы s_α задают проективное представление группы Γ с мультипликатором $\varkappa$, а операторы t_α — представление с сопряженным мультипликатором. Поэтому операторы $s^{-1}_\alpha \otimes t_\alpha$, участвующие в (2.90), задают обычное представление (абелевой) группы Γ в пространстве $\mathbf{F}(\Gamma \times \Gamma)$. Разложим его на неприводимые компоненты:

$$s^{-1}_\alpha \otimes t_\alpha = \sum_{\varepsilon \in \Gamma^*} \Lambda_\varepsilon(\alpha) X^\varepsilon,$$

где Γ^* — группа характеров, $\Lambda_\varepsilon(\alpha)$ — собственные числа матриц $s_\alpha^{-1} \otimes t_\alpha$, а X^ε — собственные проекторы. Это разложение задает действие группы характеров Γ^* на коалгебре $\mathfrak{g}_\Gamma^*$ по формуле

$$\xi \to \varepsilon(\xi), \quad \varepsilon(\xi)^\alpha \equiv \Lambda_\varepsilon(\alpha)\,\xi^\alpha \quad \text{где} \quad \xi \in \mathfrak{g}_\Gamma^*, \quad \varepsilon \in \Gamma^*.$$

Тогда (2.90) можно переписать так:

$$\vec{f} * \vec{g} = \sum_{\varepsilon \in \Gamma^*} g_\beta(\varepsilon(\tilde{R}))\, f_\gamma \langle X^\varepsilon(\chi^\gamma \otimes \chi^\beta),\ I\rangle_2.$$

Спаривание $\langle \ldots, \ldots \rangle_2$ дает матричный элемент $(X^\varepsilon)^{\gamma\beta}_{\alpha E}$, и, кроме того,

$$g_\beta(\varepsilon(\tilde{R}))\, f_\gamma = f_\gamma * (\varepsilon^* g_\beta),$$

где справа стоит $*$-произведение для линейных коммутационных соотношений (2.89). Итак, почти-$*$-произведение для соотношений (2.88) имеет вид

$$(\vec{f} * \vec{g})_\alpha(\xi) = \sum_{\varepsilon \in \Gamma^*} \sum_{\beta, \gamma \in \Gamma} (X^\varepsilon)^{\gamma\beta}_{\alpha E}\, f_\gamma(\xi) * g_\beta(\varepsilon(\xi)).$$

Спектр соотношений (2.88), следуя определениям п. 2.7, будет таким:

$$\mathrm{Spec} = \left\{ (\xi,\ \mathbf{p}) \mid \xi \in \mathfrak{g}_\Gamma^*,\ \mathbf{p} = \{\mathbf{p}^\beta\} \in \mathbf{F}(\Gamma)^*,\ \sum_{\beta \in \Gamma} g_\beta(\xi)\,\mathbf{p}^\beta = 0 \quad \forall \vec{g} \in J \right\},$$

где идеал J состоит из вектор-символов $\vec{g} = \{g_\beta\}$, для которых

$$\sum_{\varepsilon \in \Gamma^*} \sum_{\beta \in \Gamma} (X^\varepsilon)^{E\beta}_{\alpha E}\, g_\beta(\varepsilon(\xi)) = 0 \quad \forall \alpha \in \Gamma, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}_\Gamma^*.$$

Интересной задачей является явное описание этого спектра, а также коспектра из теоремы 2.5.

Лемма 2.10 в данном случае дает

Следствие 2.8. *Пусть G_Γ — группа Ли для алгебры Ли $\mathfrak{g}_\Gamma$* (2.89). *Соотношениям* (2.88) *соответствует почти-свертка на $\mathscr{E}^*(G_\Gamma) \times \mathbf{F}(\Gamma)$*:

$$(\varphi * \psi)_\alpha = \sum_{\varepsilon \in \Gamma^*} \sum_{\beta, \gamma \in \Gamma} (X^\varepsilon)^{\gamma\beta}_{\alpha E} \langle \psi_\beta,\ V_\varepsilon \rangle^* \varphi_\gamma,$$

где V_ε — представление группы G_Γ в $\mathscr{E}(G_\Gamma)$ с генераторами $\varepsilon(\mathscr{D})^\alpha = \Lambda_\varepsilon(\alpha)\,\mathscr{D}^\alpha$, $\mathscr{D}^\alpha$ — левые векторные поля на G_Γ. Генераторы почти-обобщенного сдвига, отвечающего соотношениям (2.88), *имеют вид*

$$u^\alpha\{F^\beta\} = \left\{ \frac{1}{\varkappa(\beta, \alpha)}\, \mathscr{D}^\alpha F^{\beta\alpha} \right\}. \tag{2.91}$$

Спектр и коспектр соотношения (2.88), а также настоящее $*$-произведение и обобщенный сдвиг можно легко предъявить при дополнительном ограничении на коцикл $\varkappa$.

Предположим, что функция $\varkappa(\alpha, \cdot)$ при каждом фиксированном $\alpha \in \Gamma$ является характером группы

Г и, кроме того, что матрица $\frac{1}{\varkappa} = \left(\left(\frac{1}{\varkappa(\alpha, \beta)}\right)\right)$ обратима.

Определим умножение в $\mathbf{F}(\Gamma)$ по формуле (2.80), причем выберем

$$\mathscr{B} = \left[\frac{1}{\varkappa}\right]^{-1}, \tag{2.92}$$

т. е. $\sum\limits_{\gamma} \frac{\mathscr{B}(\beta, \gamma)}{\varkappa(\beta, \alpha)} = \delta^{\beta}_{\alpha}$. Положим также $H^{\alpha}_{\beta}(\gamma) = \frac{\delta^{\alpha}_{\beta}}{\varkappa(\gamma, \beta)}$. Тогда матрица $H(\gamma)$ задает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\Gamma}$, и, следовательно, ему соответствует автоморфизм группы Ли G_{Γ}. Поскольку $H(\gamma_1) H(\gamma_2) = H(\gamma_2\gamma_1)$, то тем самым задано действие Г на G_{Γ} автоморфизмами $x \to \gamma(x)$ или задано представление Г в $\mathscr{E}(G_{\Gamma})$:

$$K\colon \gamma \to K(\gamma), \quad (K(\gamma) F)(x) \equiv F(\gamma(x)).$$

Таким образом, мы попадаем в случай (А) из п. 2.8. Вычисляя матрицы, указанные в лемме 2.12, получаем

$$\mathbb{H}^{\beta,\,\beta'}_{\alpha,\,\alpha'} = \frac{1}{\varkappa(\alpha, \alpha')}\,\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\beta'}_{\alpha'},$$
$$\omega^{\beta,\,\beta'}_{\alpha,\,\alpha'} = \omega(\beta', \beta)\,\delta^{\beta'}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\alpha'},$$
$$\mu^{\beta,\,\beta'}_{\alpha} = \mu^{\beta,\,\beta'}\delta^{\beta\beta'}_{\alpha}.$$

Масштабные и структурные константы, полученные согласно процедуре леммы 2.12, как мы видим, совпали с константами соотношений (2.88). Поэтому эти соотношения Г-эквивалентны линейным (2.89) и применимы следствия 2.5, 2.6. Формула (2.73) дает обобщенный сдвиг

$$(\overset{\circ}{U}{}^{x}F)(y) = \sum_{\alpha,\,\beta \in \Gamma} \left[\frac{1}{\varkappa}\right]^{-1}(\alpha, \beta)\, F(\beta(y)\,\alpha(x)), \quad F \in \mathscr{E}(G_{\Gamma}), \tag{2.93}$$

а формула (2.77) — его генераторы:

$$(\overset{\circ}{u}{}^{\gamma}F)(y) = \sum \left[\frac{1}{\varkappa}\right]^{-1}(\alpha, \beta)\,\frac{1}{\varkappa(\alpha, \gamma)}\,(\mathscr{D}^{\gamma}F)(\beta(y)). \tag{2.94}$$

Итак, при сделанном выше предположении спектр соотношений (2.88) — это $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{\Gamma} \approx \mathbf{R}^n$, а *коспектр — это группа* G_{Γ}.

Пример 2.13 [68]. *Коспектр циклических антикоммутационных соотношений.* Рассмотрим вновь соотношения (2.32). Их можно записать в виде (2.88), если взять в качестве Г группу с тремя образующими α, β, γ, причем $\gamma = \alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 = \beta^2 = E$, и положить

$$I = A^E, \quad A^1 = A^{\alpha}, \quad A^2 = A^{\beta}, \quad A^3 = A^{\gamma},$$

$$\varkappa \equiv ((\varkappa(\alpha, \beta))) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\Gamma}$ (2.89) в данном случае — это алгебра $\mathbf{R} \times \mathrm{su}(2)$ с соотношениями

$$[X^E,\ X^\alpha]=[X^E,\ X^\beta]=[X^E,\ X^\gamma]=0,$$
$$[X^\alpha,\ X^\beta]=X^\gamma\ (+\text{ циклические перестановки}). \tag{2.95}$$

Антипредставление H группы Γ в $\mathfrak{g}_\Gamma$ устроено здесь так:

$$H(E)=\mathrm{id},$$
$$H(\alpha)(X^E,\ X^\alpha,\ X^\beta,\ X^\gamma)=(X^E,\ -X^\alpha,\ X^\beta,\ -X^\gamma),$$
$$H(\beta)(\qquad\ldots\qquad)=(X^E,\ -X^\alpha,\ -X^\beta,\ X^\gamma),$$
$$H(\gamma)(\qquad\ldots\qquad)=(X^E,\ X^\alpha,\ -X^\beta,\ -X^\gamma).$$

Ему соответствует антипредставление группы Γ автоморфизмами группы Ли $G_\Gamma=\mathrm{SU}(2)$.

Умножение (2.92) в $\mathbf{F}(\Gamma)$ относится к типу $\mathrm{III}_\ominus$ при $t=p=1$, $s=-1$ (см. пример 2.11).

Обобщенный сдвиг (2.93) на $\mathrm{SU}(2)$, отвечающий соотношениям (2.32), устроен следующим образом:

$$\begin{aligned}(\mathring{U}^x F)(y)=\frac{1}{4}\,[&F(yx)+F(y\alpha(x))+F(y\beta(x))+F(y\gamma(x))+\\&+F(\alpha(y)x)-F(\alpha(y)\alpha(x))+F(\alpha(y)\beta(x))-F(\alpha(y)\gamma(x))+\\&+F(\beta(y)x)-F(\beta(y)\alpha(x))-F(\beta(y)\beta(x))+F(\beta(y)\gamma(x))+\\&+F(\gamma(y)x)+F(\gamma(y)\alpha(x))-F(\gamma(y)\beta(x))-F(\gamma(y)\gamma(x))].\end{aligned}$$

Его генераторы (2.94) такие:

$$(\mathring{u}^\alpha F)(y)=(\mathscr{D}^\alpha F)(\beta(y)),\quad (\mathring{u}^\beta F)(y)=(\mathscr{D}^\beta F)(\gamma(y)),$$
$$(\mathring{u}^\gamma F)(y)=(\mathscr{D}^\gamma F)(\alpha(y)),$$

где $\mathscr{D}^\alpha$, $\mathscr{D}^\beta$, $\mathscr{D}^\gamma$ — базис левых полей на $\mathrm{SU}(2)$. Генераторы $\mathring{u}^\alpha$, $\mathring{u}^\beta$, $\mathring{u}^\gamma$ удовлетворяют соотношениям (2.32) (тривиальный генератор $\mathring{u}^E$, соответствующий центру алгебры (2.95), мы здесь не выписали). Таким образом, *коспектром соотношений* (2.32) *является сфера* $\mathrm{SU}(2)\approx\mathbf{S}^3$.

Отметим в заключение, что генераторы (2.91) в данном случае будут иметь вид [68]

$$u^\alpha=\begin{bmatrix} i\sigma_3 & 0\\ 0 & i\sigma_3\end{bmatrix}\mathscr{D}^\alpha,\quad u^\beta=\begin{bmatrix} 0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}\mathscr{D}^\beta,\quad u^\gamma=\begin{bmatrix} 0 & i\sigma_3\\ i\sigma_3 & 0\end{bmatrix}\mathscr{D}^\gamma,$$

где I — единичная 2×2-матрица, σ_3 — одна из матриц Паули (2.10), i — мнимая единица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1988.— Т. 28.— 297 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1989.
3. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования//Функц. анализ. и его прил.—1967—Т. 1, № 1.— С. 1—14.
4. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия// Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 4.— С. 7—139.
5. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики//Совр. пробл. мат. фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 3.— С. 5—303.
6. Бабич В. М. Многомерный метод ВКБ и лучевой метод. //Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1988.— Т. 34.— С. 93—134.
7. Баталин И. А. Конструкция квазигруппы и связи 1-рода.— Препринт/ФИАН.— М., 1979.— № 157.—44 с.
8. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Канонический оператор Маслова на изотропных многообразиях с комплексным ростком и приложения к спектральным задачам //ДАН СССР.—1988.— Т. 298.— С.1037—1042.
9. Березанский Ю. М., Калюжный А. А. Спектральные разложения представлений гиперкомплексных систем//Спектр. теор. опер. и беск. анализ.— Киев, 1984.— С. 4—19.
10. Березин Ф. А. Квантование//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— Т. 38, № 5.— С. 1116—1175.
11. Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических пространствах//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— Т. 39, № 2.— С. 363—402.
12. Березин Ф. А., Кац Г. И. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами//Мат. сб.— 1970.— Т. 82, № 3.— С. 343—359.
13. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими.— М.: Мир, 1981.
14. Браун П. А. Дискретный квазиклассический метод в задачах квантовой механики молекул//Вопросы квант. теории атомов и молекул.— Л., 1981.— Т. 2.— С. 240—252.
15. Бредон П. Теория пучков.— М.: Наука, 1988.
16. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.— М.: Мир, 1976.— С. 82.
17. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1976.
18. Буслаев В. С. Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ//Функц. анализ и его прил.—1969.—Т. 3, № 3.— С. 17—31.
19. Буслаев В. С. Квантоваиие и метод ВКБ//Тр. МИАН.— 1970.— Т. 110.— С. 5—28.
20. Ваксман Л. Л., Сойбельман Я. С. Алгебра функций на квантовой группе SL (2)//Функц. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, № 3.— С. 1—14.

21. Вершик А. М. Алгебры с квадратичными соотношениями//Спектр. теор. опер. и беск. анализ.— Киев, 1984.— С. 32—57.
22. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Что такое гамильтонов формализм?//УМН.— 1975.— Т. 30, № 1.— С. 173—198.
23. Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Квазиклассическое приближение для моделей спин-спинового взаимодействия на одномерной решетке//Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1984.— Т. 133.— С. 63—76.
24. Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. Квазиклассическое квантование периодической цепочки Тоды с точки зрения алгебр Ли//ТМФ.— 1983.— Т. 54. № 3.— С. 477—480.
25. Воробьев Ю. М., Карасев М. В. Поправки к классической динамике и условиям квантования, возникающие при деформации скобок Пуассона//ДАН СССР.— 1987.— Т. 247, № 6.— С. 1294—1298.
26. Воробьев Ю. М., Карасев М. В. О пуассоновых многообразиях и скобке Схоутена//Функц. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, № 1.— С. 1—11.
27. Воробьев Ю. М., Карасев М. В. Деформация и когомологии скобок Пуассона//Топол. и геом. методы анализа.— Воронеж, Изд.-во ВГУ.— С. 75—89.
28. Гамкрелидзе Р. В. Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— Т. 20, № 5.— С. 685—706.
29. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы//Функц. анализ и его прил.—1980.— Т. 14, № 3.— С. 71—74.
30. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и классическое уравнение Янга—Бакстера//Функц. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 4.— С. 1—9.
31. Гельфанд И. М., Чередник И. В. Абстрактный гамильтонов формализм для классических пучков Янга—Бакстера//УМН.— 1983.— Т. 38, № 3.— С. 3—21.
32. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики.— М.: Мир, 1981.
33. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.— М.: Наука, 1969.
34. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М.: Мир, 1973.
35. Головкин К. К. Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы//Тр. МИАН.— 1969.— Т. 106.
36. Грабовская Р. Я., Крейн С. Г. О формуле перестановки функций от операторов, представляющих алгебру Ли//Функц. анализ и его прил.—1979.— Т. 7, № 3.— С. 81.
37. Гуревич Д. И. Операторы обобщенного сдвига на группах Ли// Изв. АН АрмССР.— 1983.— Т. 18, № 4.— С. 305—317.
38. Гуревич Д. И. О скобках Пуассона, ассоциированных с классическим уравнением Янга—Бакстера//Функц. анализ и его прил.— 1989.— Т. 23, № 1.— С. 68—69.
39. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Формулы дифференцирования по параметру функций от эрмитовых операторов//ДАН СССР.—1951.— Т. 76, № 1.— С. 13—16.
40. Далецкий Ю. Л. Супералгебры Ли в теории гамильтоновых операторов//II Междунар. раб. группа «Пробл. нелин. и турбул. процессов в физ.».— Киев, 1985.— Т. 1.— С. 34—38.
41. Данилов В. Г. Оценки псевдодифференциального канонического оператора с комплексной фазой//ДАН СССР.— 1979.— Т. 244, № 4.— С. 800—804.
42. Данилов В. Г., Маслов В. П. Принцип двойственности Понтрягина для вычисления эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах//Тр. МИАН.— 1984.— Т. 166.— С. 130—160; 1985.— Т. 167.— С. 24—45.

43. Дирак П. М. Обобщенная гамильтонова динамика. Вариационные принципы динамики.— М.: Физматгиз, 1959.
44. Дирак П. М. Лекции по квантовой механике.— М.: Мир, 1968.
45. Дорфман И. Я. Деформации гамильтоновых структур и интегрируемые системы//II Междунар. раб. группа «Пробл. нелин. и турбул. процессов в физ.».— Киев, 1985.— Т. 1.— С. 39—41.
46. Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли; биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера//ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 2.— С. 285—287.
47. Дринфельд В. Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга—Бакстера//ДАН СССР.— 1983.— Т. 273, № 3.— С. 531—535.
48. Дринфельд В. Г. О квадратичных коммутационных соотношениях в квазиклассическом случае//Матем. физика и функц. анал.— Киев: Наукова думка, 1986.— С. 25—34.
49. Дринфельд В. Г. Квантовые группы//Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1986.— Т. 155.— С. 19—49.
50. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
51. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 4.— С. 179—284.
52. Егоров Ю. В. О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов//УМН.— 1969.— Т. 24, № 5.— С. 235—236.
53. Карасев М. В. Разложение функций от некоммутирующих операторов//ДАН СССР.— 1974.— Т. 214, № 6.— С. 1254—1257.
54. Карасев М. В. Некоторые формулы для функций от упорядоченных операторов//Мат. заметки.— 1975.— Т. 18, № 2.— С. 267—277.
55. Карасев М. В. Асимптотический спектр и фронт осцилляций для операторов с нелинейными коммутационными соотношениями//ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, № 1.— С. 15—18.
56. Карасев М. В. Операторы регулярного представления для одного класса нелиевских перестановочных соотношений//Функц. анализ и его прил.— 1979.— Т. 13, № 3.— С. 91—92.
57. Карасев М. В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов//Мат. заметки.— 1979.— Т. 26. № 6.—С. 885—907.
58. Карасев М. В. Задачник по операторным методам.— М.: МИЭМ, 1979.
59. Карасев М. В. Условия квантования Маслова в высших когомологиях и аналоги объектов теории Ли для канонических расслоений симплектических многообразий. I, II/ МИЭМ.— М., 1981.— 64 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1092, 1093 (РЖ мат., 1982, 7А676, 7А677).
60. Карасев М. В. Асимптотика спектра смешанных состояний для уравнений самосогласованного поля//ТМФ.— 1984.— Т. 61, № 1.— С. 118—127.
61. Карасев М. В. Квантование нелинейных скобок Ли—Пуассона в квазиклассическом приближении.— Препринт/ИТФ АН УССР.— Киев, 1985.— ИТФ-85-72Р.
62. Карасев М. В. Пуассоновские алгебры симметрий и асимптотика спектральных серий//Функц. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, № 1.— С. 21—32.
63. Карасев М. В. Аналоги объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— Т. 50, № 3.— С. 508—538.
64. Карасев М. В. Скрытая симметрия системы уравнений нелинейной оптики. Гистерезис//ДАН СССР.— 1986. — Т. 286, № 4.— С. 852—856.
65. Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста.—Препринт/ИТФ АН УССР.— Киев, 1987.— ИТФ-87-157Р.

66. Карасев М. В. Суперкоммутатор форм и обобщенные скобки Дирака //Тр. конф. «Теория представлений групп и ее прилож. в физике».— Тамбов, 1989.— М., Наука, 1990.
67. Карасев М. В. Плоские пуассоновы многообразия и конечномерные псевдогруппы//Мат. заметки.— 1989.— Т. 45, № 3.— С. 53—65.
68. Карасев М. В., Маслов В. П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II//Совр. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1979.— Т. 13.— С. 145—267.
69. Карасев М. В., Маслов В. П. Глобальные асимптотические операторы регулярного представления//ДАН СССР.— 1981.— Т. 257, № 1.— С. 33—38.
70. Карасев М. В., Маслов В. П. Квантование симплектических многообразий с коническими точками//ТМФ.— 1982.— Т. 53, № 3.— С. 374—387.
71. Карасев М. В., Маслов В. П. Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в общих симплектических многообразиях//Изв. АН СССР.— 1983.— Т. 47, № 5.— С. 999—1029.
72. Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование//УМН.— 1984.— Т. 39, № 6.— С. 115—173.
73. Карасев М. В., Мосолова М. В. Бесконечные произведения и T-произведения экспонент//ТМФ.— 1976.— Т. 28, № 2.— С. 189—200.
74. Карасев М. В., Назайкинский В. Е. О квантовании быстроосциллирующих символов//Мат. сб.— 1978.— Т. 106, № 2.— С. 183—214.
75. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера.— М.: Изд-во МГУ, 1963.
76. Кац Г. И. Кольцевые группы и принцип дуальности. I, II//Тр. ММО.— 1963.— Т. 12.— С. 259—301; 1965.— Т. 13.— С. 84—113.
77. Кириллов А. А. Геометрическое квантование//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ.— 1985.— Т. 4.— С. 141—178.
78. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.
79. Кириллов А. А. Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. Астрономия.— 1970.— № 2.— С. 41—45.
80. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли//УМН.— 1976.— Т. 31, № 4.— С. 57—76.
81. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1.— М.: Мир, 1981.
82. Красильщик И. С. Гамильтоновы когомологии канонических алгебр//ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 6.— С. 1306—1309.
83. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.
84. Кричевер И. М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия// Функц. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, № 2.— С. 22—35.
85. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга — Бакстера//Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1980.— Т. 95.— С. 129—160.
86. Кучеренко В. В. Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера//ТМФ.— 1969.— Т. 1, № 3.— С. 384—405.
87. Лазуткин В. Ф. Комплексный бильярд//Пробл. матфиз.— 1986.— Т. 11.— С. 138—164.
88. Лазуткин В. Ф. Квазиклассическая асимптотика собственных функций//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1988.— Т. 34.— С. 135—174.
89. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига.— М.: Наука, 1973.
90. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика.— М.: Мир, 1981.
91. Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тета-ряды.— М.: Мир, 1983.

92. Литвинов Г. Л. О двойных топологических алгебрах и топологических алгебрах Хопфа//Тр. семин. по вектор. и тензор. анал.— М.: Изд-во МГУ, 1978.— Т. 18.— С. 372—375.
93. Литвинов Г. Л. Гипергруппы и гипергрупповые алгебры//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1985.— Т. 26.— С. 57—106.
94. Любашенко В. В. Алгебры Хопфа и симметрии/Киевск. политехн. ин-т.— Киев, 1985.— 50 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1000 (РЖ мат., 1985, № 8А447).
95. Мальцев А. И. Аналитические лупы//Мат. сб.— 1955.— Т. 36, № 3.— С. 569—573.
96. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
97. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
98. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана.— М.: Наука, 1976.
99. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.— М.: Наука, 1977.
100. Маслов В. П. Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений//ТМФ.— 1977.— Т. 33, № 2.— С. 185—209.
101. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I//Совр. пробл. мат. М.: ВИНИТИ, 1979.— Т. 13.— С. 5—144.
102. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
103. Михеев П., Сабинин Л. В. Квазигруппы и дифференциальная геометрия//Пробл. геом.— М.: ВИНИТИ.— 1988.— Т. 20.
104. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М.: Наука, 1978.
105. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем//Функц. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, № 2.— С. 46—56.
106. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями//Тр. семин. по вект. и тензор. анал. Вып. XX.— М.: Изд-во МГУ, 1981.— С. 5—54.
107. Мосолова М. В. О функциях от некоммутирующих операторов, порождающих градуированную алгебру Ли//Мат. заметки.—1981.— Т. 29, № 1.— С. 35—43.
108. Нелсон Э. Аналитические векторы//Математика.— М.: ИЛ.— 1962.— № Т. 6, № 3.— С. 89—131.
109. Нестеров А. И., Степаненко В. А. О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике.— Препринт/ИФ СО АН СССР.— Красноярск, 1986.—№ 400Ф.—48 с.
110. Нехорошев Н. Н. Переменные действие—угол и их обобщения// Тр. ММО.— 1972.— Т. 26.— С. 181—198.
111. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса//УМН.— 1982.— Т. 37, № 5.— С. 3—49.
112. Новиков С. П. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. I, II//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— Т. 34, № 2.— С. 253—288; № 3.— С. 475—500.
113. Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения.— М.: Наука, 1987.
114. Помарре Ж. Ф. Системы дифференциальных уравнений и псевдогруппы Ли.— М.: Мир, 1983.
115. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.
116. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей.— Препринт/ИТФ АН УССР.— Киев, 1967.
117. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.— М.: Наука, 1987.

118. Сабинин Л. В. Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии//Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1.— М.: Мир, 1981.— С. 293—339.
119. Семенов-Тян-Шанский М. А. Что такое классическая r-матрица?//Функц. анализ и его прил.— 1983.— Т. 13, № 4.— С. 17—33.
120. Семенов-Тян-Шанский М. А. Классические r-матрицы и квантование//Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1984.— Т. 133.— С. 228—236.
121. Семенов-Тян-Шанский М. А. Пуассоновы группы и одевающие преобразования//Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1986.— Т. 150.— С. 119—141.
122. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969.
123. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга—Бакстера//Функц. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 4.— С. 27—34; 1983.— Т. 17, № 4.— С. 34—48.
124. Склянин Е. К. Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями//УМН.— 1985.— Т. 40, № 2.— С. 214.
125. Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи//ТМФ.— 1979.— Т. 40, № 2.— С. 194—220.
126. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
127. Тарасов В. О., Тахтяждан Л. А., Фаддеев Л. Д. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке//ТМФ.— 1983.— Т. 57, № 2.— С. 163—181.
128. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах//Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1986.— Т. 29.— С. 3—108.
129. Тураев В. Г. Коцикл для симплектического первого класса Черна и индексы Маслова//Функц. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, № 1.— С. 43—48.
130. Фаддеев Л. Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов// ТМФ.— 1969.— Т. 1, № 1. — С. 3—18.
131. Фаддеев Л. Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля//Пробл. квант. теории поля.—Дубна, 1979.— Р. 12462.— С. 249—299.
132. Фаддеев Л. Д. Операторная аномалия для закона Гаусса//ЛОМИ.— Препринт.— 1984.— Р-5-84.
133. Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л. Алгебраические и гамильтоновы методы в теории неабелевых аномалий//ТМФ.— 1984.— Т. 60, № 2.— С. 206—217.
134. Федосов Б. В. Квантование и индекс//ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 1.— С. 82—86.
135. Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. Когомологии групп и алгебр Ли// Совр. пробл. мат. Фундам. направл.— М.: ВИНИТИ, 1988.— Т. 21.— С. 121—209.
136. Фейнман Р. П. Пространственно-временной подход к нерелятивисткой квантовой механике//В кн.: «Вопросы причинности в квант. механике».— М., 1955.
137. Фейнман Р. П., Об операторном исчислении, имеющем приложение в квантовой электродинамике//Пробл. совр. физ.— М., 1955.— Т. 3.— С. 37—79.
138. Фок В. А. О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике//Вестн. ЛГУ.— 1959.— Т. 16.— С. 67—71.
139. Фоменко А. Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах//Мат. сб.— 1981.— Т. 115, № 2.— С. 263—280.
140. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
141. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1985.
142. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах.— М.: Мир, 1970.
143. Харт Н. Геометрическое квантование в действии.— М.: Мир, 1985.

144. Хермандер Л. Интегральные операторы Фурье//Сб. Математика.— М.: ИЛ, 1972.— Т. 16, № 1.— С. 17—61; № 2.— С. 79—136.
145. Чеботарев А. М. О представлении решения уравнения Шредингера в виде математического ожидания функционалов скачкообразного процесса//Мат. зам.— 1978.— Т. 24, № 5.— С. 699—706.
146. Чередник И. В. О квантовых деформациях непрерывных конечномерных представлений $gl(n)$//ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 5.— С. 1076—1079.
147. Шерешевский И. А. Квантование в кокасательных расслоениях//ДАН СССР.— 1979.— Т. 245, № 5.— С. 1057—1060.
148. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
149. Anderson R. F. V. The Weyl functional calculus//J. Funct. Anal.— 1969.— V. 4, № 2.— P. 240—267.
150. Atiyah M. Convexity and commuting Hamiltonians//Bull. London Math. Soc.— 1982.— V. 14, № 1.— P. 1—15.
151. Atiyah M., Bott R. The moment map and equivariant cohomology//Topology.— 1984.— V. 23, № 1.— P. 1—23.
152. Baer R. Nets and groups//Trans. Amer. Math. Soc.— 1939.— V. 46, № 1.— P. 119—122.
153. Baulieu L., Grossman B. Constrained systems and Grassmannians//Nucl. Phys. B.— 1986.— V. 264.— P. 317—336.
154. Baxter R. J. Partition function of the eightvertex lattice model//Ann. Phys.— 1972.— V. 70.— P. 193—228.
155. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., Deformation theory and quantization//Ann. Phys.—1978.— V. 111, № 1.— P. 61—151.
156. Bayen F., Fronsdal C. Quantization on a sphere//J. Math. Phys.— 1981.— V. 22, № 7.— P. 1345—1349.
157. Blockhintzev D. I. The Gibbs quantum ensemble and its connection with the classical ensemble//J. Phys. USSR.— 1940.— V. 2, № 1.— P. 71—74.
158. Borel A., Hirzebruch F. Caracteristic classes and homogeneous spaces. II/Amer. J. Math.— 1959.—V. 81, № 2.— P. 315—382.
159. Boutet de Monvel L., Guillemin V. The spectral theory of Toeplitz operators//Ann. Math. Stud.— 1981.— V. 99.
160. Brown R., Danesh-Naruie G., Hardy J. P. L. Topological groupoids//Math. Nachr.—1976.— V. 74.— P. 143—156.
161. Calabi E. On the group automorphisms of a symplectic manifold//Problems in Analysis.— Princeton. 1970.— P. 1—26.
162. Cartan E. Les groupes de transformations continus infinis simples//Ann. Ecole Norm. Sup.— 1909.— V. 26.— P. 93—161.
163. Conn J. F. Normal forms for smooth Poisson structures//Ann. Math.— 1985.— V. 21.— P. 565—593.
164. Connes A. Non-commutative differential geometry//Public. Math. IHES.— 1986.— № 62.
165. Coste A., Dazord P., Weinstein A. Groupoides symplectiques.— Publ. Department Math., Univ. Claude Bernard, Lyon I, 1987.
166. Crumeyrolle A. Le cocycle d'inertie trilatere d'une variete a structure presque symplectique et la premiere classe de Chern//C. R. Acad. Sci.— 1977.— V. A284, № 23.— P. 1507—1509.
167. Crumeyrolle A. Algébre de Clifford symplectique revêtements du groupe symplectique, indices de Maslov et spineurs symplectiques//J. Math. Pure Appl.— 1977.— V. 56.— P. 205—230.
168. Czyz J. On geometric quantization and its connections with the Maslov theory//Repts. Math. Phys.— 1979.— V. 15, № 1.— P. 57—97.
169. DeWitt B. S. Dynamical theory of groups and fields.— N. Y.: Gordon and Breach, 1965.
170. Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor//J. Math. Pure Appl.— 1938.— V. 17.— P. 213—230.

171. Dixmier J. Algebres quasi-unitares//Comment. Math. Helv.— 1952.— V. 26.— P. 275—322.
172. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann).— Paris, 1957.
173. Duflo M. Sur les representations unitaires des groups de Lie contenant un sous-groupe invariant nilpotent//C. R. Acad. Sci.— 1970.— V. A270, № 9.— P. 578—581.
174. Duistermaat J. J., Heckman H. J. On the variation in cohomology of the symplectic form of the reduced phase space//Invent. Math.— 1982.— V. 69.— P. 259—268.
175. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu., Takhtajan L. A. Quantization of Lie groups and Lie algebras//Preprint LOMI, Leningrad, 1987.— E-14-87.
176. Finkelstein D. On relations between commutators//Comm. Pure Appl. Math.— 1955.— V. 8.— P. 245—250.
177. Flato M., Lichnerowicz A., Sternheimer D. Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications//J. Math. Phys.— 1976.— V. 17, № 9.—P. 1794—1762.
178. Fronsdal C. Some ideas about quantization//Repts. Math. Phys.— 1979.—V. 15, № 1.— P. 111—145.
179. Fujiwara H., Lion G., Magneron B. Operateurs d'entrelacement. Calcul d'obstructions sur les groups de Lie resolubles//Lect. Notes in Math.— 1981.— V. 880.— P. 102—137.
180. Fujiwara H. Certain operateurs d'entrelacement pour des groups de Lie resobles exponentiels et leurs applications//Mem. Fac. Sci. Kynshu Univ.—1982.— Ser. A.— V. 36, № 11.— P. 13—72.
181. Golo V. L. Nonlinear regimes in superfluid ^{3}He//Lett. Math. Phys.— 1981.— V. 5.— P. 155—159.
182. Gotay M. J., Sniatycki J. On the quantization of presymplectic dynamical systems via coisotropic imbedding//Comm. Math. Phys.— 1981.— V. 82, № 3.— P. 377—389.
183. Grossmann A., Huguenin P. Group-theoretical aspects of Wigner—Weyl isomorphism//Helv. Phys. Acta.— 1978.— V. 51, № 2.— P. 252—261.
184. Grossmann A., Loupias G., Stein E. M. An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space//Ann. Inst. Fourier.—1986.— V. 18, № 2.— P. 343—368.
185. Guillemin V., Sternberg S. Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis//Amer. J. Math.— 1979.— V. 101.— P. 915—955.
186. Guillemin V., Sternberg S. The moment map and collective motion//Ann. Phys.— 1980.— V. 127, № 1.— P. 220—253.
187. Guillemin V., Sternberg S. The metaplectic representation, Weyl operators and spectral theory//J. Funct. Anal.— 1981.— V. 42, № 2.— P. 128—225.
188. Guillemin V., Sternberg S. Homogeneous quantization and multiplicities of group representations//J. Funct. Anal.— 1982.— V. 47, № 3.— P. 344—380.
189. Hahn P. Haar measure for measure groupoids//Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— V. 242, № 1.— P. 1—33.
190. Hermann R. Quantum mechanics and geometric analysis on manifolds//Int. J. Theor. Phys.— 1982.— V. 21. № 10-11.— P. 803—821.
191. Hess H. On a geometric quantization scheme generalizing those of Kostant—Souriau and Czyz//Lect. Notes in Phys.— 1981.— V. 139.— P. 1—35.
192. Hõrmander L. The Weyl calculus of pseudo-differential operators// Comm. Pure Appl. Math.— 1979.— V. 32, № 3.— P. 359—443.
193. Howe R. Quantum mechanics and partial differential equations//J. Funct. Anal.— 1980.— V. 38.— P. 188—254.
194. Huguenin P. Expression explicité de l'exponentialle symplectique inhomogenue//Lett. Math. Phys.— 1978.— V. 2, № 4.— P. 321—324.

195. Huynh T. V. Star-polarization: a natural link between phase space representation and operator representation of quantum mechanics//Lett. Math. Phys.— 1980.—V. 4, № 3.— P. 201—208.
196. Jimbo M. A q-difference analogue of Ug and the Yang—Baxter equation//Lett. Math. Phys.— 1985.— V. 10.— P. 63—69.
197. Karasev M. V. Index of two-dimensional films and Maslov's quantization//Baku Intern. Topol. Conference.— Baku, 1987.
198. Keller J. B. Corrected Bohr—Sommerfeld quantum conditions for non-separable systems//Ann. Phys.— 1958.— V. 4, № 2.— P. 180—188.
199. Kikkawa M. Geometry of homogeneous Lie loops//Hiroshima Math. J.— 1975.— V. 5, № 2.— P. 141—179.
200. Kostant B. Quantization and unitary representations//Lect. Notes in Math.— 1970.— V. 170.— P. 87—208.
201. Kostant B. Quantization and representation theory//London Math. Soc., Note ser.— 1979.— № 34.— P. 287—316.
202. Koszul S. L. Crochet de Schouten—Nijenhuis et cohomologie. Elie Cartan et les mathematiques d'adjourd'hui//Asterisque, hors ser., Soc. Math. France.— 1985.— P. 257—271.
203. Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Yang—Baxter equation and representation theory//Lett. Math. Phys.— 1985.— V. 5, № 5.— P. 393—403.
204. Kumar K. Expansion of function of noncommuting operators//J. Math. Phys.— 1965.— V. 6, № 12.— P. 1923—1927.
205. Leray J. Solutions asymptotiques et groups symplectique//Lect. Notes in Math.— 1975.— V. 459.— P. 473—497.
206. Lichnerowicz A. New geometrical dynamics//Lect. Notes Math.— 1975.— V. 570.— P. 377—395.
207. Lichnerowicz A. Les varieties de Poisson et leurs algebras de Lie associes//J. Diff. Geom.— 1977.— V. 12, № 2.— P. 253—299.
208. Lichnerowicz A. Deformation of quantification//Lect. Notes in Phys.— 1979.— V. 106.— P. 209—219.
209. Lie S. (unter Mitwirkung von F. Engel) Theorie der Transformationsgruppen. Bd 2.— Lpz.: Teubner, 1890.
210. Lion G. Extensions de representations de groupes de Lie nilpotent et indices de Maslov//C. R. Acad. Sci.— 1979.— AB288, № 12.— P. A615—A618.
211. Lu J.-H., Weinstein A. Poisson Lie groups, dressing transformations and bruhat decompositions//Preprint Univ. California, Berkeley.— 1988.— PAN-414.— 35 p.
212. Mackey G. W. Ergodic theory, group theory and differential geometry//Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1963.— V. 50.— P. 1184—1191.
213. Magneron B. Une extension de la notion d'indices de Maslov//C. R. Acad. Sci.— 1979.— AB289, № 14.— P. A683—A686.
214. Magneron B. Operateurs d-entrelacement des representations unitaires irreductibles des groups de Lie nilpotents et indice de Maslov//C. R. Acad. Sci.— 1980.— AB290, № 20.— P. A943—A946.
215. Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator//Comm. Pure Appl. Math.— 1954.— V. 7, P. 649—673.
216. Marsden J., Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry//Repts Math. Phys.— 1974.— V. 5, № 1.— P. 121—131.
217. Marsden J., Ratiu T., Weinstein A. Semidirect products and reduction in mechanics//Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— V. 281.— P. 147—177.
218. Martin J. L. Generalized classical dynamics and the «classical analogue» of a Fermi oscillator//Proc. Roy. Soc.— 1959.— A251, № 1267.— P. 533—543.
219. Mello P. A., Moshinsky M. Nonlinear canonical transformations and their representation in quantum mechanics//J. Math. Phys.— 1975.— V. 16, № 10.— P. 2017—2028.
220. Mikami K., Weinstein A. Moments and reduction for symplectic groupoids//Preprint Univ. Tokyo.— 1987.— UTYO-MATH 87-19.

221. Moser Y. Hidden symmetries in dynamical systems//Amer. Sci.— 1979.— V. 67, № 6.— P. 689—695.
222. Neroslavskii O., Vlasov A. Sur les deformations de l'algebra des fonctions//C. R. Acad. Sci.— Ser. 1.— 1981.— V. 292.— P. 71—73.
223. Nono T. Sur les familles triples locales de transformations locales de Lie//J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A.— 1961.— V. 25, № 2.— P. 357—366.
224. Omori H., Maeda Y., Yoshioka A. On regular Frechet—Lie groups. I, II, III//Tokyo. J. Math.— 1980.— V. 3, № 2.— P. 353—390; 1981.— V. 4, № 2.— P. 221—257.
225. Onofri E., Pauri M. Analyticity and quantization//Lett. Nuovo Cimento.— 1972.— V. 3.— P. 35—42.
226. Onofri E., Pauri M. Dynamical quantization//J. Math. Phys.— 1972.— V. 13.— P. 533—543.
227. Palais R. S. A global formulation of the Lie theory of transportation groups//Mem. Amer. Math. Soc.— 1957.— № 22.
228. Renault T. A groupoid approach to C^*-algebras//Lect. Notes Math.— 1980.— V. 793.— P. 160.
229. Podles P. Quantum spheres//Lett. Math. Phys.— 1987.— V. 14.— P. 193—202.
230. Poisson S. D. Traite de mecanique.— Paris, 1833.
231. Rawnsley J. H. On the cohomology groups of a polarization and diagonal quantization//Trans. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 23A.— P. 235—255.
232. Rawnsley J. H. On the pairing of polarization//Comm. Math. Phys.— 1978.— V. 58, № 1.— P. 1—8.
233. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations. I, II//Invent. Math.— 1979.— V. 54, № 1.— P. 81—100; 1981.— V. 63, № 3.— P. 423—432.
234. Ross K. A. Hypergroups and centers of measure algebras//Symposia Math.— 1977.— V. 22.— P. 189—203.
235. Satake I. The Gauss—Bonnet theorem for V-manifolds//J. Math. Soc. Jap.— 1957.— V. 9.— P. 464—492.
236. Scheunert M. Generalized Lie algebras//Lect. Notes Phys.— 1979.— V. 94.— P. 450.
237. Schouten J. A. Über differentialkomitanten zweier Kontravarianter Grössen//Proc. Nederl. Acad. Wetensh., ser. A.— 1940.— V. 43.— P. 449—452.
238. Simms D. J. Metalinear structures and geometric quantization of the harmonic oscillator//Int. Coll. Sympos. Geom., Aix en Provence.— 1974.
239. Simms D. J., Woodhouse N. M. J. Lectures on geometric quantization//Lect. Notes in Phys.— 1976.— V. 53.
240. Sniatycki J., Geometric quantization and quantum mechanics.— Berlin: Springer, 1980.— 230 p.
241. Sniatycki J., Weinstein A. Reduction and quantization for singular momentum mappings//Lett. Math. Phys.— 1983.—V. 7, № 2.— P. 155—161.
242. Souriau J. M. Quantification geometrique//Comm. Math. Phys.— 1966.— V. 1.— P. 374—398.
243. Souriau J. M. Structure des systems dynamiques.— Paris: Dunoud.— 1970.
244. Souriau J. M. Geometrie symplectique et physique mathematique.— Paris.— 1975.
245. Souriau J. M. Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications//Lect. Notes in Phys.— 1976.— V. 50.— P. 117—148.
246. Souriau J. M. Interpretation geometrique des etats quantiques//Lect. Notes in Math.— 1977.— V. 570.— P. 76—96.
247. Takesaki M. Duality and von Neumann algebras//Lect. Notes.— Tulane Univ., New Orleans, Louisiana, 1970.
248. Trostel R. Colour analysis, variational self-adjointness, and colour Poisson (super) algebras//J. Math. Phys.— 1984.— V. 25, № 11.— P. 3183—3189.

249. V a n H o v e L. Sur le probleme des relations entre les transformations unitaires de la mecanique quantique et les transformations canoniques de la mecanique classical//Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.— 1951.— V. 37.— P. 610—620.
250. V e y J. Deformation du crochet de Poisson sur une variete symplectique//Comm. Math. Helv.— 1975.— V. 50, № 3.— P. 421—454.
251. W e i n s t e i n A. Symplectic manifold and their Lagrangian submanifolds//Adv. Math.— 1971.— V. 6.— P. 329—346.
252. W e i n s t e i n A. Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems//Ann. Math.— 1973.— V. 98.— P. 377—410.
253. W e i n s t e i n A. Symplectic *V*-manifolds, periodic orbits of Hamiltonian systems, and the volume of certain Riemannian manifolds//Comm. Pure Appl. Math.— 1977.— V. 30, № 2.— P. 265—271.
254. W e i n s t e i n A. On Maslov's quantization conditions//Lect. Notes in Math.— 1975.— V. 459.— P. 341—372.
255. W e i n s t e i n A. Lectures on symplectic manifolds//Amer. Math. Soc., Prov.— 1979.
256. W e i n s t e i n A. The local structure of Poisson manifolds//J. Diff. Geom.— 1983.— V. 18.— P. 523—557.
257. W e i n s t e i n A. Symplectic groupoids and Poisson manifolds//Bull. Amer. Math. Soc.— 1987.— V. 16.— P. 101—104.
258. W e i n s t e i n A. Some remarks on dressing transformations//Preprint Univ. of Tokyo.— 1987.— UTYO-MATH87-16.— 7 p.
259. W e i n s t e i n A. Coisotropic calculus and Poisson groupoids//Preprint Univ. California, Berkeley, 1987.— PAM-389.
260. W e y l H. Gruppentheorie und Quantenmechanik.— Leipzig, 1928.
261. W i d o m H. A complete symbolic calculus for pseudo-differential operators//Bull. Sci. Math.— 1980.— V. 104, № 1.— P. 19—63.
262. W o o d h o u s e N. Geometric quantization and Bogoliubov transformation//Proc. Roy. Soc. London.— 1981.— A378, № 1772.— P. 119—139.
263. W o r o n o w i c z S. L. Pseudospaces, pseudogroups and Pontriagin duality//Lect. Notes Phys.— 1980,— V. 116.
264. W o r o n o w i c z S. L. Compact matrix pseudogroups//Conn. Math. Phys.— 1987.— V. 111, № 4. — P. 613—666.
265. W o r o n o w i c z S. L. Twisted SU (2) group. An example of a non-commutative differential calculus//Preprint Univ. Warsawa, 1986.— № 1/86.— 89 p.
266. Y a n g C. N. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function inversation//Phys. Rev. Lett.— 1967.— V. 19, № 23.— P. 1312—1314.
267. Z a m o l o d c h i k o v A. B., Z a m o l o d c h i k o v Al. B. Two-dimensional factorizable *S*-matrices as exact solutions of some quantum field theory models//Ann. Phys.— 1979.— V. 120.— P. 253—291.

ДОБАВЛЕНИЕ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ

С того времени как рукопись книги была сдана в печать, появился ряд новых статей, относящихся к данной теме, кроме того, авторам дополнительно стало известно несколько более старых работ. Мы хотим обратить на них внимание читателей. Это добавление сделано при корректуре; нумерация продолжает основной список литературы.

Прежде всего отметим работу [281], содержащую результаты, аналогичные лемме 1.1 гл. I. Затем — работы [272, 275] о слоениях пуассоновых и симплектических многообразий и об инфинитезимальных структурах, связанных с такими слоениями. Важная работа [279] о комплексных пуассоновых и якобиевых многообразиях. Далее, нам стала известна работа [378] о бирасслоениях симплектических многообразий (в смысле п. 2.2 гл. I), содержащая ряд результатов, аналогичных [59]. Английский перевод работы [59] появился в [276].

Общие теоремы о дифференцируемых группоидах и алгеброидах, но вне связи с теорией скобок Пуассона, были получены уже в [283]; см. также [280]. В работе [277] изучены также предгруппоиды (или аффиноиды в терминологии [285]). В [285] показано, что симплектический аффиноид — это симплектическое многообразие с действием пары полярных симплектических группоидов — т. е. бирасслоение (см. п. 2.1 гл. II).

Появились интересные сборники работ Seminaire Sud-Rhodanien de Geometrie [271, 273], кроме того — работы по квантованию симплектических группоидов и псевдогрупп [268, 286, 287]. Интенсивно развивается теория квантовых групп и уравнений Янга — Бакстера [274, 282, 284]; обнаружились ее взаимодействия с теорией скобок гидродинамического типа [269, 27

268. Далецкий А. Ю. Задача факторизации в симплектическом группоиде и гамильтоновы системы в пространствах с нелинейными скобками Пуассона // ДАН СССР.— 1989.— Т. 308, № 5.— С. 1033—1037.
269. Дубровин Б. А. О дифференциально-геометрических скобках Пуассона на решетке // Функцион. анализ и прил.— 1989.— Т. 23, № 2.— С. 57—59.
270. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитоновых решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН.— 1989.— Т. 44, № 6.— С. 29—98.
271. Coste A., Sondaz D. Classification de submersions de Poisson isotropes // Seminaire Sud-Rhodanien. I — Univ. Lyon I, 1988 — 1/B, P. 91—102.
272. Dazord P. Feuilletages á singularites // Indag. Math. — 1985. — V. 47, № 1. — P. 21—39.
273. Dasord P., Sondaz D. Varietes de Poisson. Algebroids de Lie // Seminaire Sud-Rhodanien. I — Unlv. Lyon I, 1988 — 1/B, P. 1—68.
274. Drinfeld V. G. Quasi-Hopf algebras and Kniznik — Zamolodchikov equations // Preprint Inst. Theor. Phys., Kiev, 1989, ITP-89-43E, 16 pp.
275. Guedira F., Lichnerowicz A. Geometrie des algebres de Lie locales de Kirillov // J. Math. Pures et Appl. — 1984. — V. 63. — P. 407—484.

276. K a r a s e v M. V. The Maslov quantization conditions in higher cohomology and analogues of notions developed in Lie theory for canonical fibre bundles of symplectic manifolds // Selecta Math. Sov.— 1989.—V. 8, № 3. —P. 213—258.
277. K o c k A. Generalized fibre bundles // Lect. Notes Math.— 1988.— V. 1348.— P. 194—207.
278. L i b e r m a n n P. Problémes d'équivalence et géometrie sympldctique // Soc. Math. France, Asterisque.— 1983.— № 107/108.— P. 43—68.
279. L i c h n e r o w i c z A. Varietes de Jacobi et espaces homogenes de contact complexes // J. Math. Pures et Appl.—1988.—V. 67.—P. 131—173.
280. M a c k e n z i e K. Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry // London Math. Soc., Lect. Notes Ser.— 1987.
281. M a g r i F., M o r o s i C. A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson — Nijenhuis manifolds // Univ. di Milano.— 1984.— Quaderno.— S. 19.
282. P o d l e s P., W o r o n o w i c z S. L. Quantum deformation of Lorentz group // Preprint Inst. Mittag-Leffler.— № 20,— 1988/89, 99 pp.
283. P r a d i n e s J. Théorie de Lie pur les groupoides différentiels // C. R. Acad. Sci., Paris.— 1967.— V. 264, et 1968.— V. 267.
284. R e s h e t i k h i n N. Yu., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M. A. Central extensions of quantum current groups // Lett. Math. Phys.— 1990.— V. 19.— P. 133—142.
285. W e i n s t e i n A. Affine Poisson structure // Preprint Univ. of California, Berkeley.— 1990.— PAM-489.
286. W e i n s t e i n A., X u P. Extensions of symplectic groupoids and quantization // Preprint Univ. of California, Berkeley.— 1990.— PAM-488.
287. Z a k r z e w s k i S. Quantum aud classical pseudogroups. I and II // Preprint Warsaw Univ.— 1989.