

**С. Альбеверио  
Й. Фенстад  
Р. Хеэг-Крон  
Т. Линдстрём**

---

**Нестандартные методы  
в стохастическом анализе  
и математической физике**

Перевод с английского

**А. К. Звонкина**

под редакцией

**М. А. Шубина**



Москва «Мир» 1990

ББК 22.171

H55

УДК 519.22

Авторы: Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линд-стрём Т.

**H55** **Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике:** Пер. с англ.—М.: Мир, 1990.— 616 с., ил.

ISBN 5-03-001180-3

Книга известных математиков (ФРГ, Норвегия), охватывающая разнообразные приложения нестандартного математического анализа — мощного метода прикладной математики. Приложения включают в себя релаксационные колебания, стохастические дифференциальные уравнения, броуновское движение, марковские процессы, оптимальное управление, уравнение Больцмана, полимерные модели, решетчатые модели в статистической физике и квантовой теории поля. Для удобства читателей дается краткое и доступное введение в нестандартный анализ.

Для математиков и физиков, аспирантов и студентов университетов.

**H**  $\frac{1702070000-040}{041(01)-90}$  15-90

**ББК 22.171**

*Редакция литературы по математическим наукам*

---

Научное издание

Серджио Альбеверио, Йенс Эрик Фенстад, Рафаэль Хеэг-Крон и др.

**НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ В СТОХАСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Заведующий редакцией чл.-кор. АН СССР В. И. Арнольд. Зам. зав. редакцией А. С. Попов. Ст. научн. редактор А. А. Бряндинская. Мл. научн. редактор Н. С. Полякова. Художник О. С. Василькова. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор О. Г. Лапко

ИБ № 7003

Сдано в набор 10.03.89. Подписано к печати. 21.11.89. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага кн.-журн. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 19,25 бум. л. Усл. печ. л. 38,50. Усл. кр.-отт. 38,50. Уч.-изд. л. 37,71. Изд. № 1/6437. Тираж 4500. Зак. 125. Цена 3 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано в Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29. Отпечатано с набора в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.

---

ISBN 5-03-001180-3 (русск.)

ISBN 0-12-048861-2 (англ.)

© 1986 by Academic Press, Inc.

© перевод на русский язык, с добавлениями, Звонкин А. К., 1990

## Предисловие переводчика и редактора перевода

Предлагаемая вниманию читателей книга, написанная четырьмя известными математиками (ФРГ, Норвегия), посвящена теории случайных процессов и случайных полей и связанным с ними вопросам математической физики. Книга чрезвычайно содержательна. Стохастические интегралы, формы Дирихле, формулы Ито и Фейнмана — Каца, уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом, уравнения Больцмана, модель Изинга и модели евклидовой квантовой теории поля, несамопересекающиеся случайные блуждания и полимерные меры — вот далеко не полный перечень вопросов, нашедших в ней отражение.

Одна особенность этой книги, резко отличающая ее от всех книг, посвященных данной теме, должна, как мы надеемся, вызвать особый интерес читателей. Вся монография написана на языке (и с точки зрения) так называемого «нестандартного анализа». Нестандартный анализ — это теория, позволяющая строго и математически корректно пользоваться бесконечно большими и бесконечно малыми числами. Идея бесконечно малых, впервые в сравнительно четком виде встречающаяся у Лейбница, интуитивно очень проста и всегда использовалась физиками и инженерами. Однако в течение почти трех столетий для этой идеи не удавалось построить строгое математическое основание. По-видимому, с времен Коши в математике господствовало убеждение, что сделать это невозможно.

Тем не менее — и вопреки всеобщему убеждению — такое основание в 1961 году удалось построить Абрахаму Робинсону. Новый язык вскоре приобрел как страстных поклонников, так и скептиков — и даже противников (см., например, Eckhaus [1\*]), которые считают, что нестандартное доказательство можно переделать в стандартное (и часто без особых усилий). В этом смысле нестандартный анализ и в самом деле не дает «ничего нового» — за исключением новой точки зрения, всегда сопутствующей новому удачному языку. Однако, как показывает опыт, психологическое преимущество, которое новые методы дают владеющему ими математику, часто превращается в первоначальный импульс, который может оказаться достаточно сильным для получения вполне содержательных результатов. А в ряде ситуаций (например, в теории уток — см. § 1.5) сама постановка задач выглядит намного более естественно именно на нестандартном языке. Поэтому мы считаем, что критики не вполне правы: эвристические возможности и красота нестан-

дартных методов вполне окупают не слишком большие затраты времени, необходимые для их освоения.

По сравнению с переведенной на русский язык книгой Davis [1] настоящая книга имеет несколько иное направление и помимо краткого, но замкнутого изложения основ нестандартного анализа содержит значительно более богатый набор приложений.

Она может быть использована для первоначального знакомства со стохастическим анализом и некоторыми разделами математической физики. Такое знакомство может оказаться для определенной категории читателей более простым, чем, например, изучение классической теории броуновского движения и стохастического интегрирования.

К сожалению, книга написана неровно и текст заметно усложняется к концу. Читатель может вдохновляться той известной истиной, что польза, полученная от чтения содержательной математической книги, более или менее пропорциональна затраченным на чтение усилиям.

В январе 1988 года, не дожив всего нескольких недель до своего 50-летия, умер один из авторов этой книги Рафаэль Хеэг-Крон. Его памяти был посвящен международный симпозиум, состоявшийся в Осло осенью того же года. Мы надеемся, что и наш перевод будет еще одной скромной данью его памяти.

Переводчик и редактор перевода благодарят авторов С. Альбеверию и Т. Линдстрёма за полезные контакты, облегчившие работу над переводом и, в частности, за присланные ими исправления. Мы благодарим также всех сотрудников издательства «Мир» за проявленное ими терпение и неоценимую помощь в работе над переводом.

*А. К. Звонкин, М. А. Шубин*



## Предисловие

Эта книга посвящена прикладному нестандартному анализу. Она делится на две части. *Основной курс* (см. прилагаемую диаграмму) включает анализ, топологию и линейные пространства, а также теорию вероятностей и представляет собой законченное и замкнутое введение в нестандартные методы. Назначение этой части — изложить самые основы теории; мы, однако, постарались оживить текст несколькими содержательными примерами из теории дифференциальных уравнений, линейных пространств и броуновского движения.

Вторая часть представляет собой *избранные приложения* к стохастическому анализу и математической физике. Некоторые приложения из этой части являются новыми; другие представляют собой переосмысление известных результатов с новой точки зрения. Мы надеемся, что это разнообразие примеров убедит читателя в том, что нестандартный анализ является жизнеспособным инструментом во многих разделах математических наук.

Сотрудничество, приведшее к этой книге, началось осенью 1976 года. Как раз в это время П. Лёб и Р. Андерсон установили основные факты нестандартной теории меры и гиперконечной теории вероятностей с приложениями к броуновскому движению и стохастическому интегрированию. Но наше первое знакомство с предметом произошло на другой почве. Летом 1976 года Э. Нельсон на заседании Американского математического общества сделал доклад о нестандартном анализе и его применениях к задаче о сингулярных возмущениях. Эта тема входила в круг интересов двух авторов (С. А. и Р. Х.-К.). Они заинтересовались, могут ли «новые» числа нестандартной теории сделать строгими некоторые их «эвристические» выкладки. Это привело к совместному семинару трех из нас (С. А., И. Э. Ф. и Р. Х.-К.) в 1976—1977 гг. и к дальнейшей работе о сингулярных возмущениях (см. гл. 6).

Семинар проходил очень оживленно, и в нем приняли активное участие некоторые наши коллеги из Осло, в частности, Бент Биркланд и Даг Норманн. Фактически, как увидит читатель, они внесли существенный вклад в эту книгу. В это время четвертый автор (Т. Л.) был студентом-старшекурсником. Мы дали ему стандартный текст по стохастическому анализу и попросили улучшить его, используя новые методы нестандартной теории. Это привело к его диссертации (см. гл. 4) и в дальнейшем вылилось в сотрудничество в работе над книгой. Он провел

два года в Мэдисоне, и установленный им контакт с Х. Дж. Кейслером оказался важным для нашего проекта. Фактически монография Кейслера *«Инфинитезимальный подход к стохастическому анализу»* на разных стадиях работы над текстом служила для нас постоянным источником воодушевления и пищей для интуиции.

Многие другие внесли свой вклад в наш проект. В Бохуме Альбеверио работал в тесном контакте с К. Кесслером и А. Столлом; некоторая часть их результатов вошла в эту книгу. Л. Аркерид из Готенбурга и Н. Катленд из Халла также оказали нам дружескую помощь в нашем предприятии. В главе 6 мы приводим новые результаты Аркериды об уравнении Больцмана, а в гл. 4 включены некоторые результаты Катленда по теории управления. Контакты с Аркеридом и Катлендом были очень стимулирующими; мы от них многому научились.

Работа над книгой заняла несколько лет, в течение которых мы имели полезные контакты с множеством друзей и коллег. В дополнение к тем, кто был упомянут выше, мы хотели бы поблагодарить Ф. Бланшара, С. Файярдо, У. Хенсона, Х. Холдена, П. Лёба, У. Люксембурга, Д. Миллера, Х. Освальда, Э. Перкинса, Д. Росса, К. Румбергера, Р. Сейзинга, К. Строяна, П. Саппса, Т. Т. Ву, Р. Живалевича за полезные советы и комментарии по поводу следующих один за другим вариантов текста.

Мы хотим также выразить нашу искреннюю признательность Сигни Кордтсен за квалифицированную перепечатку рукописи, а также наших издателей из Академик Пресс за их разнообразную помощь в деле превращения рукописи в книгу.

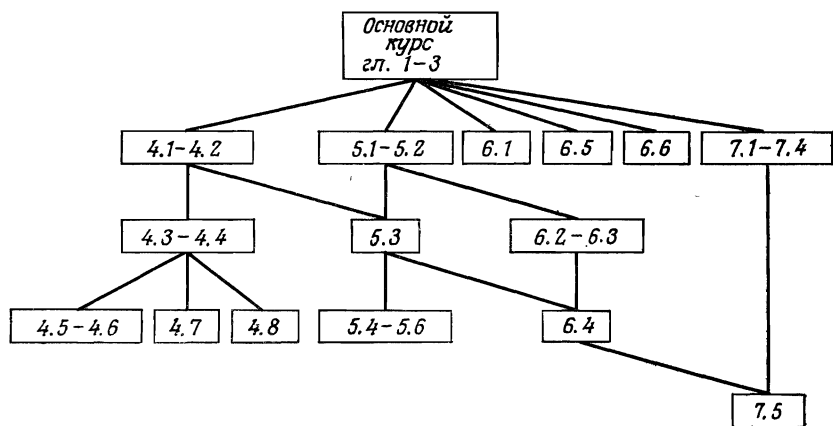


Диаграмма основных зависимостей

В этой диаграмме имеются некоторые пропуски, но все они вполне невинны. Типичным примером является зависимость теорем 5.3.9 и 6.4.5 от предложения 4.8.5; она не указана в диаграмме, так как доказательство предложения 4.8.5 может быть прочитано независимо от остального содержания § 4.8. Примером противоположного рода являются §§ 1.5, 2.4 и 3.5; ни одна из дальнейших глав от них не зависит; они были включены лишь для того, чтобы оживить текст яркими и ценными применениями развитого аппарата.

## Предисловие к русскому изданию

Мы благодарны А. Звонкину и М. Шубину за перевод нашей книги. Мы также признательны профессорам И. Гельфанду и Ю. Розанову за помощь в осуществлении этого издания. По сравнению с английским изданием данной книги в нем добавлены наши комментарии по поводу новых работ, пополнен список литературы, а также исправлены некоторые ошибки и опечатки. Мы благодарим профессора Э. Нельсона за то, что он использовал материалы нашей книги в своем годичном семинаре в Принстонском университете и сообщил нам свои замечания, а также ряд улучшений, которые он обсуждал с участниками своего семинара. Эти улучшения мы внесли в настоящее издание.

Мы также благодарны профессору Л. Аркериду за его любезную помощь в переработке п. 6.5. Мы также с благодарностью приняли множество исправлений и улучшений, предложенных А. Звонкиным и М. Шубиным. Работа с ними доставила нам большое удовольствие и обогатила нас опытом. Книга очень выиграла в переводе.

*С. Альбеверйо, Й. Э. Фенстад, Т. Линдстрём*

7.07.89

Мы глубоко скорбим по поводу безвременной кончины нашего большого друга и сотрудника Рафаэля Хезг-Крона (1938—1988).

# Часть I

## Основной курс

### Глава 1

#### Дифференциальное и интегральное исчисление

Основная идея, или, если угодно, основное открытие нестандартного анализа состоит в том, что геометрическая прямая, или континуум, может нести в себе множество точек, более богатое, чем множество обычных действительных чисел. Это, кроме всего прочего, дает нам подходящие рамки для геометрического анализа физических явлений с многими масштабами, а также физических явлений, которые чересчур сингулярны для того, чтобы непосредственно уместиться в стандартные рамки.

Разовьем немного эту мысль. Возьмем обычную аксиоматизацию аффинной плоскости. Имеется два основных вида объектов: *прямые* и *точки*. Каждая точка лежит на некоторой прямой, но прямая не есть просто множество точек<sup>1)</sup>. Аксиомы с «истинным» геометрическим содержанием позволяют нам ввести координаты, являющиеся элементами поля. Однако необходимо добавить менее элементарную аксиому — аксиому Архимеда — для того, чтобы поле, отвечающее геометрии, в аксиомы которой включены отношения порядка, было изоморфно подполю поля действительных чисел.

Является ли аксиома Архимеда «истинным» геометрическим фактом? В непосредственном опыте нам дана лишь *ограниченная* часть геометрической прямой, на которой может быть отмечено не более чем *конечное* множество точек, представляющих, скажем, результаты некоторого физического измерения. Все остальное — это идеализация.

В соответствии с ортодоксальной точкой зрения действительные числа создаются из рациональных с помощью предельной конструкции, в которой мы добавляем точки, представляющие собой некоторые классы эквивалентности сходящихся последовательностей. Утверждается при этом, что полученные таким путем «идеальные элементы» заполняют всю прямую. Но в этом процессе мы не обращаем никакого внимания на скорость схо-

---

<sup>1)</sup> При аксиоматическом построении геометрии прямая является таким же элементарным объектом, как и точка, хотя из полного списка всех аксиом аффинной плоскости можно вывести, что прямая определяется множеством лежащих на ней точек. — *Прим. ред.*

димости. Если мы сделаем это и добавим некие «свидетельства», позволяющие отличать друг от друга по-разному сходящиеся последовательности, мы приходим к более богатому множеству точек на прямой. А если мы к тому же еще будем интересоваться асимптотическим поведением последовательностей, мы неизбежно приходим к понятию гипердействительного числа, или нестандартного действительного числа, во всей его полноте. Нестандартный анализ утверждает, что геометрическая прямая может нести на себе это более богатое множество. Мы увидим, как этот подход дает возможность рассуждать о масштабах, т. е. анализировать геометрически явления с многими масштабами.

Наша книга посвящена прикладному нестандартному анализу, и мы не ставили себе задачу изложения всей истории бесконечно малых и нестандартного анализа. Но два имени должны быть упомянуты.

«Основополагающим» мемуаром для нестандартного анализа является статья Т. А. Сколема 1934 года «О нехарактеризуемости числового ряда конечным или счетно бесконечным множеством высказываний с одними лишь числовыми переменными» (Skolem [1]).

Цель Сколема была, как показывает заглавие, в некотором смысле деструктивной. Но глубокая идея не может быть только негативной. В 1960 году Абрахам Робинсон превратил нестандартный метод в новое и эффективное математическое средство. Это был действительно замечательный шаг вперед. Робинсон перенес анализ Сколема с арифметики на действительные числа и увидел, как это дает подходящие рамки для развития анализа с помощью бесконечно малых и бесконечно больших чисел; см. его книгу (Robinson [1]), а также второй том его избранных трудов (Robinson [2]).

Некоторые видят в нестандартном анализе подтверждение справедливости лейбниевского исчисления бесконечно малых. Эти теории действительно кое в чем похожи. Но нужно быть очень осторожным, утверждая, что новые достижения доказывают правильность более старых идей.

Однако история бесконечно малых в самом деле захватывающая. На эту тему см. гл. X книги Robinson [1], а также множество исторических замечаний в работе Laugwitz [1].

Теперь мы переходим собственно к тексту. В § 1.1 и § 1.2 закладываются основания инфинитезимальных методов. В § 1.3 и § 1.4 мы кратко обсуждаем основные понятия элементарного анализа. Наконец, в § 1.5 мы рассматриваем некоторые более содержательные примеры из теории дифференциальных уравнений.

### 1.1. Бесконечно малые

Если вы твердо убеждены в том, что бесконечно малые, и, следовательно, обратные к ним бесконечно большие числа существуют, вам не обязательно читать этот параграф, вы можете сразу перейти к следующему параграфу «Расширенный универсум».

Но если у вас остаются какие-то сомнения на этот счет, и вам необходимо, чтобы вас убедили, мы добавили здесь для вас некоторые вводные замечания, показывающие, что действительная прямая может быть расширена таким образом, чтобы вместить в себя и бесконечно малые, и бесконечно большие числа.

Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  может быть построено из множества рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  разными методами. Один из них состоит в добавлении к  $\mathbb{Q}$  новых точек, представляющих собой пределы сходящихся последовательностей рациональных чисел. При этом мы должны отождествить последовательности, сходящиеся к «одной и той же точке» в  $\mathbb{R}$ .

Мы пойдем тем же путем, добавляя бесконечно малые и бесконечно большие числа. Однако мы будем более аккуратны при отождествлении последовательностей. Если мы будем обращать внимание на скорость сходимости и на асимптотические свойства, мы отождествим меньше последовательностей, следовательно, получим более богатое множество точек на прямой — искомое нестандартное расширение.

Опишем эту конструкцию. Пусть  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . В обычных теоретико-множественных обозначениях пусть  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — *прямое произведение*  $\mathbb{N}$  экземпляров прямой  $\mathbb{R}$ , т. е.  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — множество всех действительных последовательностей  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  или, что то же самое, множество всех функций  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Прямое произведение имеет естественную алгебраическую структуру: можно складывать и умножать последовательности, складывая и умножая отдельно по каждой координате, т. е., если  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , мы определяем  $f + g$  и  $f \cdot g$  покоординатными равенствами

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i), \quad (f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i).$$

Нас интересует, как ведет себя последовательность «в пределе», т. е. ее асимптотические свойства. В качестве первого шага мы, разумеется, хотим отождествить последовательности, совпадающие на *кофинитном* множестве, т. е. множестве  $E \subset \mathbb{N}$  вида  $E = \mathbb{N} - \{m_1, \dots, m_k\}$ . Заметим, что каждое  $m > \max\{m_1, \dots, m_k\}$  принадлежит  $E$ .

Пусть две последовательности  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  совпадают на кофинитном множестве  $E$ , т. е.  $f(m) = g(m)$  для всех  $m \in E$ . Оче-

видно, что в этом случае  $f$  и  $g$  имеют одно и то же «предельное поведение». Наоборот, если множество  $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq g(i)\}$  кофинитно, мы хотели бы различать предельное поведение  $f$  и  $g$ , т. е. в расширении  $\mathbb{R}$  добавлять для  $f$  и  $g$  разные точки.

Но кофинитные множества недостаточно хороши. Из алгебры хорошо известно, что при построении прямого произведения могут появиться делители нуля, т. е. такие элементы  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , что  $ab=0$ . Естественный кандидат в нули в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — это последовательность  $0 = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , в которой  $c_n = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность, в которой  $a_n = 0$  для всех четных  $n$  и только для них, а  $g = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность, в которой  $b_n = 0$  тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно. Ясно, что  $f \cdot g = 0$ , но  $f \neq 0$  и  $g \neq 0$ . Отождествление последовательностей по модулю кофинитных множеств ничему не помогает, так как ни  $f$ , ни  $g$  не совпадают с последовательностью  $0$  на кофинитном множестве.

Существование делителей нуля разрушает обычную алгебру, поэтому в нашей конструкции нам нужно что-то более точное, чем кофинитные множества.

*Фильтром* называется семейство  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\mathbb{N}$ , обладающее следующими свойствами:

- (1)  $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ ,  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
- (2)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$ .
- (3)  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ .

Первое свойство есть условие нетривиальности. Второе — важное свойство *замкнутости относительно конечных пересечений*, которое будет появляться во многих контекстах. Третье — удобное свойство замкнутости относительно расширений. Класс кофинитных множеств, обозначаемый  $\text{Cof}$ , является примером фильтра.

- (4) Фильтр  $\mathcal{F}$  на  $\mathbb{N}$  называется *свободным*, если он не содержит конечных множеств.

Нас будут в особенности интересовать свободные фильтры, являющиеся расширениями фильтра кофинитных множеств.

- (5) Фильтр  $\mathcal{U}$  называется *ультрафильтром* на  $\mathbb{N}$ , если для любого  $E \subset \mathbb{N}$  либо  $E \in \mathcal{U}$ , либо  $\mathbb{N} - E \in \mathcal{U}$ .

Заметим, что из условия нетривиальности (1) следует, что если  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр на  $\mathbb{N}$ , и  $E \subset \mathbb{N}$ , то в точности одно из множеств  $E$  и  $\mathbb{N} - E$  принадлежит  $\mathcal{U}$ . Заметим также, что если конечное объединение  $E_1 \cup \dots \cup E_n$  принадлежит  $\mathcal{U}$ , то хотя бы одно  $E_i$  принадлежит  $\mathcal{U}$ .

**1.1.1. Теорема об ультрафильтрах.** *Существуют свободные ультрафильтры  $\mathcal{U}$  на  $\mathbb{N}$ , являющиеся расширениями фильтра кофинитных множеств.*

*Доказательство* представляет собой простое упражнение на использование трансфинитных методов теории множеств, а именно — леммы Цорна. Пусть  $\Delta$  — множество всех фильтров  $\mathcal{F}$ , содержащих фильтр  $\text{CoF}$  кофинитных множеств. Тогда  $\Delta$  непусто и замкнуто относительно объединения цепей<sup>1)</sup>. По лемме Цорна каждое такое семейство имеет максимальные элементы. Докажем, что каждый максимальный элемент множества  $\Delta$  является ультрафильтром, расширяющим  $\text{CoF}$ . Итак, пусть  $\mathcal{U}$  — максимальный элемент множества  $\Delta$ . Очевидно,  $\mathcal{U}$  — фильтр; покажем, что для любого  $E \subset \mathbb{N}$  либо  $E \in \mathcal{U}$ , либо  $\mathbb{N} - E \in \mathcal{U}$ . Возможны два случая. (1) Предположим, что  $E \cap F$  бесконечно для всех  $F \in \mathcal{U}$ ; тогда множество  $\mathcal{V} = \{D \subset \mathbb{N} \mid D \supset E \cap F \text{ для некоторого } F \in \mathcal{U}\}$  является фильтром, принадлежащим  $\Delta$  и содержащим  $\mathcal{U}$ , и при этом  $E \in \mathcal{V}$ . Из максимальной  $\mathcal{U}$  следует, что  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ , так что  $E \in \mathcal{U}$ . (2) Предположим, что  $E \cap F$  конечно для некоторого  $F \in \mathcal{U}$ . Если к тому же  $(\mathbb{N} - E) \cap D$  конечно для некоторого  $D \in \mathcal{U}$ , то оба множества  $(\mathbb{N} - E) \cap (D \cap F)$  и  $E \cap (D \cap F)$  конечны, и, значит,  $D \cap F$  тоже конечно, что приводит нас к противоречию, так как  $D, F \in \mathcal{U} \supset \text{CoF}$ . Таким образом,  $(\mathbb{N} - E) \cap D$  бесконечно для всех  $D \in \mathcal{U}$ ; далее продолжаем так же, как в случае (1).  $\square$

Теперь мы можем построить искомое нестандартное расширение. Пусть  $\mathcal{U}$  — свободный ультрафильтр на  $\mathbb{N}$ ; введем отношение эквивалентности на последовательностях из  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

$$(6) \quad f \sim_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Множества, принадлежащие ультрафильтру — это «большие» множества. На самом деле, существует очевидное взаимно однозначное соответствие между ультрафильтрами на  $\mathbb{N}$  и конечно аддитивными мерами на  $\mathbb{N}$ , принимающими всего два значения: 0 и 1.<sup>2)</sup> При этом соответствии отношение (6) отождествляет последовательности, совпадающие «почти всюду», т. е. равные на множестве меры 1 (относительно меры, ассоциированной с  $\mathcal{U}$ ).

Поскольку ультрафильтр  $\mathcal{U}$  свободен, отношение (6) отождествляет любые две последовательности, совпадающие на ко-

<sup>1)</sup> Семейство  $\mathcal{S}$  множеств называется цепью, если оно линейно упорядочено по включению, т. е. для любых  $A, B \in \mathcal{S}$  либо  $A \subset B$ , либо  $B \subset A$ . Легко проверить, что если есть цепь фильтров, то объединение всех входящих в нее фильтров тоже образует фильтр. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> А именно, при этом соответствии принадлежащим данному ультрафильтру подмножествам  $\mathbb{N}$  и только им приписывается мера 1, а всем остальным подмножествам мера 0. — *Прим. ред.*



финитном множестве. Но и другие пары последовательностей отождествляются: поскольку  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр, то одно из множеств  $\{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ четно}\}$ ,  $\{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ нечетно}\}$  принадлежит  $\mathcal{U}$ . Поэтому с нулевой последовательностью  $0 = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , где  $c_n = 0$  для всех  $n$ , будут отождествлены либо все последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , для которых  $a_n = 0$  при всех четных  $n$ , либо все последовательности  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , для которых  $b_n = 0$  при всех нечетных  $n$ . Таким образом, отождествление по модулю ультрафильтра устраняет замеченную нами выше трудность с делителями нуля.

Фактормножество множества  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  по отношению эквивалентности  $\sim_{\mathcal{U}}$  — это и есть искомое нестандартное расширение  ${}^*\mathbb{R}$ , состоящее из *гипердействительных чисел*; при этом мы будем писать

$$(7) \quad {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \mathcal{U}.$$

Если  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , то через  $f_{\mathcal{U}}$  обозначается образ  $f$  в  ${}^*\mathbb{R}$ ; разумеется, каждый элемент множества  ${}^*\mathbb{R}$  имеет вид  $f_{\mathcal{U}}$  для некоторого  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Для любого  $r \in \mathbb{R}$  обозначим через  $\mathbf{r}$  принадлежащую  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  постоянную функцию, всюду равную  $r$ , т. е.  $\mathbf{r}(n) = r$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Полагая  ${}^*r = \mathbf{r}_{\mathcal{U}}$ , мы получаем естественное вложение

$$(8) \quad *: \mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}.$$

Теперь мы должны поднять структуру  $\mathbb{R}$  на множество гипердействительных чисел  ${}^*\mathbb{R}$ .

**Замечание.** Что произойдет, если в определении (7) вместо  $\mathcal{U}$  использовать ультрафильтр  $\mathcal{U}_0$ , не являющийся свободным? Если  $\mathcal{U}_0$  не свободен, т. е. не является расширением фильтра кофинитных множеств, то он должен содержать некоторое конечное множество; фактически легко показать, что в этом случае должно существовать такое число  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что

$$\mathcal{U}_0 = \{E \subset \mathbb{N} \mid n_0 \in E\}.$$

Тогда конструкция  ${}^*\mathbb{R}$  ничего нового не дает:  ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \mathcal{U}_0 \cong \mathbb{R}$ .

Как алгебраическая структура множество  $\mathbb{R}$  есть полное упорядоченное поле, т. е. структура вида

$$(9) \quad (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1),$$

где  $\mathbb{R}$  — множество элементов структуры,  $+$  и  $\cdot$  суть бинарные операции сложения и умножения,  $<$  есть отношение порядка, а 0 и 1 — два выделенных элемента. При этом  $\mathbb{R}$  *полно* в том

смысле, что любое непустое множество его элементов, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.

Вложение  $*$ , определенное в (8), отображает 0 в  $*0 = 0_{\mathcal{U}}$  и 1 в  $*1 = 1_{\mathcal{U}}$ . Мы должны поднять операции и отношения, имеющиеся в  $\mathbb{R}$ , на  $*\mathbb{R}$ . Намек содержится в формуле (6), которая говорит нам, когда два элемента  $f_{\mathcal{U}}$  и  $g_{\mathcal{U}}$  из  $*\mathbb{R}$  равны:

$$(10) \quad f_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Аналогичным образом мы продолжаем отношение  $<$  на  $*\mathbb{R}$ , полагая для произвольных  $f_{\mathcal{U}}$  и  $g_{\mathcal{U}}$  из  $*\mathbb{R}$

$$(11) \quad f_{\mathcal{U}} < g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

При таком определении отношения  $<$  на  $*\mathbb{R}$  легко показать, что расширенное множество  $*\mathbb{R}$  линейно упорядочено. В качестве примера проверим транзитивность отношения  $<$  на  $*\mathbb{R}$ : пусть  $f_{\mathcal{U}} < g_{\mathcal{U}}$  и  $g_{\mathcal{U}} < h_{\mathcal{U}}$ , т. е.

$$D_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U},$$

$$D_2 = \{i \in \mathbb{N} \mid g(i) < h(i)\} \in \mathcal{U}.$$

По свойству (2) имеем  $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{U}$ . Если  $i \in D_1 \cap D_2$ , то  $f(i) < g(i)$  и  $g(i) < h(i)$ , так что  $f(i) < h(i)$  ввиду обычной транзитивности отношения  $<$  на  $\mathbb{R}$ . Поэтому

$$D_1 \cap D_2 \subset \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) < h(i)\}.$$

Из свойства замкнутости (3) теперь получаем  $f_{\mathcal{U}} < h_{\mathcal{U}}$ .  $\square$

Мы предлагаем читателю доказать, что для любых  $f_{\mathcal{U}}, g_{\mathcal{U}} \in *\mathbb{R}$  справедливо одно и только одно из соотношений  $f_{\mathcal{U}} < g_{\mathcal{U}}$ ,  $f_{\mathcal{U}} = g_{\mathcal{U}}$  или  $f_{\mathcal{U}} > g_{\mathcal{U}}$ .

**Замечание.** Отношение  $<$  на  $*\mathbb{R}$ , введенное в (11), продолжает отношение  $<$  на  $\mathbb{R}$ , т. е. если  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ , то неравенство  $r_1 < r_2$  в  $\mathbb{R}$  равносильно неравенству  $*r_1 < *r_2$  в  $*\mathbb{R}$ . По этой причине мы не навесили звездочки на знак равенства, введенный в (10), и знак неравенства, введенный в (11).

Теперь на  $*\mathbb{R}$  имеется линейный порядок и можно проверить, что  $*\mathbb{R}$  содержит бесконечно малые и бесконечно большие числа. Назовем (положительным) *бесконечно малым* числом  $\delta$  в  $*\mathbb{R}$  такой элемент  $\delta \in *\mathbb{R}$ , что  $*0 < \delta < *r$  для всех  $r > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Вообще элемент  $\delta \in *\mathbb{R}$  называется бесконечно малым, если либо  $\delta = *0$ , либо один из элементов  $\pm\delta$  является положительным бесконечно малым. — *Прим. ред.*

Бесконечно малые существуют: пусть  $f(n) = 1/n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ; тогда  $\delta = f_{\mathcal{U}}$  — положительное бесконечно малое число. Заметим также, что  $f'(n) = 1/n^2$  задает другое бесконечно малое  $\delta'$ , причем  $\delta' < \delta$  в  ${}^*\mathbb{R}$ .

Таким же образом последовательности  $g(n) = n$  и  $g'(n) = n^2$  задают бесконечно большие<sup>1)</sup> числа  $\omega = g_{\mathcal{U}}$  и  $\omega' = g'_{\mathcal{U}}$ , причем  $\omega < \omega'$  в  ${}^*\mathbb{R}$ .

Осталось продолжить на  ${}^*\mathbb{R}$  операции  $+$  и  $\cdot$ . Оглядываясь на (10) и (11), мы, разумеется, полагаем

$$f_{\mathcal{U}} + g_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) + g(i) = h(i)\} \in \mathcal{U},$$

$$f_{\mathcal{U}} \cdot g_{\mathcal{U}} = h_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \cdot g(i) = h(i)\} \in \mathcal{U}.$$

На основе этих определений легко доказать, что  ${}^*\mathbb{R}$  — упорядоченное поле, являющееся расширением  $\mathbb{R}$ . При этом для бесконечно больших и бесконечно малых чисел получается вполне честная алгебра. В качестве упражнения читатель может проверить, например, что если  $f_{\mathcal{U}} < g_{\mathcal{U}}$  и  $h_{\mathcal{U}} > 0$ , то  $f_{\mathcal{U}} \cdot h_{\mathcal{U}} < g_{\mathcal{U}} \cdot h_{\mathcal{U}}$ . Необходимо также отметить, что для введенных выше бесконечно малых  $\delta$ ,  $\delta'$  и бесконечно больших  $\omega$ ,  $\omega'$  выполняются такие соотношения:  $\omega' = \omega^2$ ,  $\delta \cdot \omega = 1$ ,  $\delta' \cdot \omega$  бесконечно мало,  $\delta \cdot \omega'$  бесконечно велико. (Тот факт, что  $\delta \cdot \omega'$  бесконечно велико, можно проверить непосредственно из определения, а можно с помощью вычисления  $\delta \cdot \omega' = (1/\omega) \cdot \omega^2 = \omega$ .) Таким образом, мы имеем вполне пристойную арифметику для бесконечно больших и бесконечно малых чисел.

Тот способ, которым мы продолжили операции  $+$  и  $\cdot$  и отношение  $=$  с  $\mathbb{R}$  на  ${}^*\mathbb{R}$ , может быть использован для того, чтобы продолжить с  $\mathbb{R}$  на  ${}^*\mathbb{R}$  любую функцию и любое отношение. Пусть  $F$  — функция от  $n$  действительных переменных, т. е.

$$F: \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Так же, как в (12), введем продолжение  ${}^*F$  с помощью соотношения

$$(13) \quad {}^*F(f^1_{\mathcal{U}}, \dots, f^n_{\mathcal{U}}) = g_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid F(f^1(i), \dots, f^n(i)) = g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

(Читатель сможет при желании легко проверить, что  ${}^*F$  на самом деле является функцией, и что  ${}^*F$  на самом деле продолжает  $F$ , т. е. равенства  ${}^*F({}^*r_1, \dots, {}^*r_n) = {}^*r$  и  $F(r_1, \dots, r_n) = r$

<sup>1)</sup> Элемент  $\omega \in {}^*\mathbb{R}$  называется (положительным) бесконечно большим числом, если  $\omega > {}^*r$  для всех  $r \in \mathbb{R}$ . Элемент  $\omega \in {}^*\mathbb{R}$  называется бесконечно большим, если один из элементов  $\pm \omega$  является положительным бесконечно большим. — *Прим. ред.*

равносильны). Таким же образом  $n$ -арное отношение  $S$  на  $\mathbb{R}$  продолжается до  $n$ -арного отношения  $*S$  на  $*\mathbb{R}$ <sup>1)</sup>. Заметим, что любое подмножество  $E \subset \mathbb{R}$  соответствует унарному отношению, причем продолжение (расширение)  $*E$  характеризуется условием

$$(14) \quad f_{\mathcal{U}} \in *E \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in E\} \in \mathcal{U}.$$

Например, если  $E = (0, 1]$ , то  $*E$  как подмножество в  $*\mathbb{R}$  будет содержать все положительные бесконечно малые элементы, но не  $*0$  — факт, который выводится непосредственно из (14). Мы еще вернемся в дальнейшем к интуитивной характеристике открытых, замкнутых и компактных подмножеств  $\mathbb{R}$  в терминах их  $*$ -расширений в  $*\mathbb{R}$ .

Но сначала — несколько элементарных наблюдений над  $*$ -расширениями подмножеств в  $\mathbb{R}$ :  $*\emptyset$  — пустое подмножество в  $*\mathbb{R}$ ; если  $E \subset \mathbb{R}$ , то  $*r \in *E$  для всех  $r \in E$ , но, вообще говоря (как показывает приведенный выше пример  $E = (0, 1]$ ),  $*E$  содержит также элементы, не представимые в виде  $*r$  ни для какого  $r \in \mathbb{R}$ . Далее,  $*$  представляет собой булевский гомоморфизм — в том смысле, что  $*(E_1 \cup E_2) = *E_1 \cup *E_2$  и  $*(E_1 \cap E_2) = *E_1 \cap *E_2$  для произвольных подмножеств  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ . Наконец, заметим, что  $*E_1 = *E_2$  тогда и только тогда, когда  $E_1 = E_2$ , и  $*r \in *E$  тогда и только тогда, когда  $r \in E$ . В заключение заметим, что  $*$  не является  $\sigma$ -гомоморфизмом<sup>2)</sup>; см. обсуждение меры Лёба в § 3.1. И, конечно, расширение  $*$  не сюръективно, так как в  $*\mathbb{R}$  существуют подмножества, не представимые в виде  $*E$  ни для какого  $E \subset \mathbb{R}$ <sup>3)</sup>.

Прежде чем двигаться дальше, мы должны обсудить важное понятие *стандартной части*. Согласно (13), функция взятия абсолютной величины имеет продолжение на  $*\mathbb{R}$ , которое мы будем обозначать обычным образом  $|\cdot|$  вместо более «правильного»  $*|\cdot|$ .

Элемент  $x \in *\mathbb{R}$  называется *конечным*, если  $|x| < *r$  для некоторого  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . Как мы вскоре увидим, каждый конечный элемент  $x \in *\mathbb{R}$  бесконечно близок к некоторому (единственному)  $r \in \mathbb{R}$  в том смысле, что  $|x - *r|$  равно либо нулю, либо некоторому положительному бесконечно малому в  $*\mathbb{R}$ . Это (един-

<sup>1)</sup> Напомним, что  $n$ -арное отношение на множестве  $M$  — это произвольное подмножество в прямом произведении  $\underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ раз}}$ . Продолжение

$*L \subset *\mathbb{R} \times \dots \times *\mathbb{R}$  для  $n$ -арного отношения  $L \subset \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  строится по формуле (14) как для унарного отношения. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> То есть счетное объединение, вообще говоря, не переходит в объединение образов. — *Прим. ред.*

<sup>3)</sup> Например, естественным образом определяемый «интервал»  $(0, \epsilon)$ , где  $\epsilon > 0$  бесконечно мало. — *Прим. ред.*

ственное)  $r$  называется *стандартной частью* числа  $x^1$ ) и обозначается  $\text{st}(x)$  или  $^\circ x$ .

Доказательство существования стандартной части довольно просто. Пусть  $x \in {}^*\mathbb{R}$  конечно. Обозначим через  $D_1$  множество таких  $r \in \mathbb{R}$ , для которых  ${}^*r < x$ , а через  $D_2$  — множество таких  $r' \in \mathbb{R}$ , для которых  $x < {}^*r'$ . Тогда  $(D_1, D_2)$  образует дедекиндово сечение в  $\mathbb{R}$ , и, следовательно, определяет единственное  $r_0 \in \mathbb{R}$ . Простое рассуждение показывает, что  $|x - {}^*r_0|$  бесконечно мало, так что  $\text{st}(x) = r_0$ .

**Замечание.** Читатель заметит, что мы не стали запутывать приведенное выше изложение не относящимися к делу подробностями построения  ${}^*\mathbb{R}$ . По существу оно основывается на уже установленных нами свойствах  $*$ -вложения. Это важное место, и мы к нему еще вернемся. Свойства нестандартного расширения  ${}^*\mathbb{R}$  могут быть суммированы в виде небольшого числа фундаментальных принципов: см. обсуждение в § 1.2. Мы делаем то же самое, когда характеризуем  $\mathbb{R}$  как полное упорядоченное поле, являющееся расширением поля рациональных чисел. Ни для  $\mathbb{R}$ , ни для  ${}^*\mathbb{R}$  основные свойства расширения не зависят от конкретного способа построения этих расширений. Для  $\mathbb{R}$  мы можем использовать дедекиндовы сечения либо фундаментальные последовательности Коши. Для  ${}^*\mathbb{R}$  мы можем использовать приведенную выше конструкцию с помощью ультрафильтров или теорему Геделя о полноте для логических исчислений первого порядка.

Отображение (взятия) стандартной части обладает естественными свойствами. Если  $r \in \mathbb{R}$ , то  $\text{st}({}^*r) = r$ ; если  $x, y \in {}^*\mathbb{R}$  оба конечны, то  $\text{st}(x + y) = \text{st}(x) + \text{st}(y)$ ,  $\text{st}(x - y) = \text{st}(x) - \text{st}(y)$ ; и если  $\text{st}(y) \neq 0$ , то  $\text{st}(x/y) = \text{st}(x)/\text{st}(y)$ .

Теперь мы используем нестандартное расширение  ${}^*\mathbb{R}$  и отображение стандартной части для характеристики некоторых топологических понятий в  $\mathbb{R}$ . Назовем *монадой* <sup>2)</sup> действительного числа  $r \in \mathbb{R}$  множество всех таких  $x \in {}^*\mathbb{R}$ , что  $\text{st}(x) = r$ ; монада числа  $r$  обозначается  $\mu(r)$ .

### 1.1.2. Предложение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ . Тогда

- (i)  $E$  открыто тогда и только тогда, когда  $\mu(r) \subset {}^*E$  для всех  $r \in E$ ;
- (ii)  $E$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\text{st}(x) \in E$  для всех конечных  $x \in {}^*E$ ;
- (iii)  $E$  компактно тогда и только тогда, когда для любого  $x \in {}^*E$  число  $\text{st}(x)$  существует и принадлежит  $E$ .

<sup>1)</sup> Или его «тенью». — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Вместо термина «монада» часто используется термин «ореол». — Прим. перев.

Утверждение (ii) двойственно утверждению (i), а (iii) следует из (ii), если вспомнить, что компактность в  $\mathbb{R}$  означает замкнутость и ограниченность. Поскольку  $\mu(x)$  содержится в  $*$ -расширении любой стандартной окрестности  $x$ , утверждение (i) в одну сторону очевидно. Предположим теперь, что  $E$  не открыто; тогда существует такое  $r \in E$ , что любая окрестность точки  $r$  в  $\mathbb{R}$  пересекается с  $\mathbb{R} - E$ . Мы построим такой элемент  $x \in \mu(r)$ , что  $x \notin *E$ : для каждого  $n \in \mathbb{N}$  выберем такое  $r_n \notin E$ , что  $|r - r_n| < 1/n$ . Определим  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $f(n) = r_n$ . Из формулы (14) и из определения  $f$  следует, что  $f_{\mathcal{U}} \notin *E$ . Но  $f_{\mathcal{U}} \in \mu(r)$ , поскольку по построению  $|*r - f_{\mathcal{U}}| < \delta$ , где  $\delta$  — бесконечно малое число, отвечающее последовательности  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

Мы надеемся, что к настоящему моменту сомнения читателя по поводу существования бесконечно больших и бесконечно малых чисел до некоторой степени развеяны. Завершим этот параграф одним общим результатом о расширениях при помощи ультрафильтров, в котором окажутся собранными вместе и отчетливо сформулированными те многочисленные разрозненные идеи, которые были рассыпаны на предыдущих страницах.

Результат, который мы имеем в виду — это *общий принцип переноса* в нестандартном анализе. Мы уже заметили, что  $\mathbb{R}$  и  $*\mathbb{R}$  во многом похожи; например, оба являются упорядоченными полями. Сейчас мы уточним, в каком смысле  $\mathbb{R}$  и  $*\mathbb{R}$  похожи; точнее, мы *укажем* более детально, какие свойства поля  $\mathbb{R}$  переносятся в  $*\mathbb{R}$ .

Будем рассматривать множество действительных чисел как структуру

$$(15) \quad (\mathbb{R}, +, \cdot, <, |\cdot|, 0, 1),$$

где в дополнение к (9) мы добавим абсолютную величину, которая определяет метрику на  $\mathbb{R}$ . Конечно,  $|\cdot|$  можно определить в терминах других объектов, перечисленных в (15), но, чтобы упростить изложение, удобно ввести ее в определение явно.

Структуре  $\mathbb{R}$  соответствует простой язык  $L(\mathbb{R})$ , который можно использовать для описания того типа свойств  $\mathbb{R}$ , которые сохраняются при вложении  $*$ :  $\mathbb{R} \rightarrow *\mathbb{R}$ .

*Атомарными формулами* языка  $L(\mathbb{R})$  назовем выражения следующего вида:

- (i)  $t_1 + t_2 = t_3$ ;
- (ii)  $t_1 \cdot t_2 = t_3$ ;
- (iii)  $|t_1| = t_2$ ;
- (iv)  $t_1 = t_2$ ;
- (v)  $t_1 < t_2$ ;
- (vi)  $t_1 \in X$ ,

где  $t_1, t_2, t_3$  суть либо константы 0 или 1, либо переменные, обозначающие произвольное число  $r \in \mathbb{R}$ , а  $X$  — переменная, обозначающая произвольное подмножество  $A \subset \mathbb{R}$ .

Из атомарных формул мы строим класс всех *элементарных формул*, или *формул языка*  $L(\mathbb{R})$  с помощью *пропозициональных связок*

$\wedge$  и  
 $\vee$  или  
 $\neg$  не  
 $\rightarrow$  если, то

и *кванторов для чисел*

$\forall x$  для любого  $x$  (из  $\mathbb{R}$ )

$\exists x$  существует  $x$  (в  $\mathbb{R}$ )

по следующим правилам:

(vii) Если  $\Phi$  и  $\Psi$  — формулы языка  $L(\mathbb{R})$ , то  $\Phi \wedge \Psi$ ,  $\Phi \vee \Psi$ ,  $\neg \Phi$ ,  $\Phi \rightarrow \Psi$  — тоже формулы языка  $L(\mathbb{R})$ .

(viii) Если  $\Phi$  — формула языка  $L(\mathbb{R})$ , а  $x$  — числовая переменная, то  $\forall x \Phi$  и  $\exists x \Phi$  — тоже формулы языка  $L(\mathbb{R})$ . Когда это будет необходимо, мы будем добавлять к формулам языка  $L(\mathbb{R})$  скобки, чтобы избежать возможных двусмысленностей.

Язык  $L(\mathbb{R})$  — это язык первого порядка, т. е. в нем допустимы кванторы для чисел, но не для множеств. Читателя с некоторыми познаниями в логике может удивить узость введенного понятия формулы; например, формула  $(x + 1) \cdot y = z$  не является элементарной; однако можно легко написать элементарную формулу, имеющую тот же смысл, а именно:

$$\exists x_1 [x + 1 = x_1 \wedge x_1 \cdot y = z].$$

Этот прием является универсальным и показывает, что язык  $L(\mathbb{R})$  обладает требуемой выразительной силой.

Дадим несколько примеров: в языке  $L(\mathbb{R})$  мы можем записать условия, выражающие тот факт, что отношение  $<$  является линейным порядком:

транзитивность  $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$

антирефлексивность  $\forall x \neg [x < x]$

линейность  $\forall x \forall y [x < y \vee x = y \vee y < x].$

Запишем также формулу  $\Phi(X)$ , выражающую, что множество  $X$  открыто:

$$(16) \quad \Phi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y [y \in X \rightarrow \exists z [z > 0 \wedge \forall y_1 [|y - y_1| < z \rightarrow y_1 \in X]]].$$

Вообще формула  $\Phi$  языка  $L(\mathbb{R})$  имеет вид

$$\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n),$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — «свободные» числовые переменные, входящие в формулу  $\Phi$ , т. е. переменные, не связанные кванторами  $\forall$  или  $\exists$ , а  $X_1, \dots, X_m$  — (свободные) переменные для множеств, входящие в формулу  $\Phi$ . Каждая формула из  $L(\mathbb{R})$  имеет непосредственный смысл, или интерпретацию, в структуре  $\mathbb{R}$ ; например, если  $\Phi(X)$  — это формула (16), и  $A \subset \mathbb{R}$ , то  $\Phi(A)$  выражает тот факт, что  $A$  открыто в  $\mathbb{R}$ .

Но формулы языка  $L(\mathbb{R})$  могут быть также проинтерпретированы в расширенной структуре  $^*\mathbb{R}$ . А именно, будем использовать (12) для интерпретации атомарных формул вида (i) и (ii), (13)—(iii), а (10) и (11) — для интерпретации (iv) и (v) соответственно. Наконец, будем использовать (14) для интерпретации (vi). Поскольку логические символы имеют везде один и тот же смысл, любая формула  $\Phi$  языка  $L(\mathbb{R})$  имеет интерпретацию и в  $\mathbb{R}$ , и в  $^*\mathbb{R}$ . Вернемся еще раз к (16); мы уже объясняли, что означает  $\Phi(A)$  для данного  $A \subset \mathbb{R}$ . Теперь мы можем также в соответствии с указаниями, данными выше в этом абзаце, проинтерпретировать  $\Phi(^*A)$  в  $^*\mathbb{R}$ .

**Замечания.** (1) Как уже было замечено выше, не каждое подмножество в  $^*\mathbb{R}$  имеет вид  $^*A$  для какого-либо  $A \subset \mathbb{R}$ . Если  $A_0$  — подмножество в  $^*\mathbb{R}$ , не являющееся множеством вида  $^*A$  ни для какого  $A \subset \mathbb{R}$ , то мы пока не приписали никакого смысла формуле  $\Phi(A_0)$ , поскольку (14) применимо только к подмножествам вида  $^*A$  в  $^*\mathbb{R}$ . (2) Используя общий формат (13), можно добавлять к формулам языка  $L(\mathbb{R})$  также произвольные функциональные параметры <sup>1)</sup>.

Теперь мы можем сформулировать основной результат о расширениях с помощью ультрафильтров, непосредственным следствием которого является общий принцип переноса.

**1.1.3. Теорема Лося.** Пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$  — формула языка  $L(\mathbb{R})$ . Тогда для любых  $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$  и  $f_{\mathcal{U}}^1, \dots, f_{\mathcal{U}}^n \in ^*\mathbb{R}$ .

$$(17) \quad \Phi(^*A_1, \dots, ^*A_m, f_{\mathcal{U}}^1, \dots, f_{\mathcal{U}}^n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(A_1, \dots, A_m, f^1(i), \dots, f^n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

<sup>1)</sup> То есть в язык  $L(\mathbb{R})$  можно было с самого начала ввести переменные не только для чисел и множеств, но также и для функций. На эти переменные, как и на переменные для множеств, нельзя навешивать кванторы. Формат (13) позволял интерпретировать формулы, включающие такие переменные. — Прим. перев.



Доказательство проводится индукцией по количеству логических символов в  $\Phi$ . Если формула  $\Phi$  не имеет логических символов, то она является атомарной формулой вида (i)–(vi), и тогда (17) сводится к одному из утверждений (12), (13), (10), (11) или (14). Если  $\Phi$  содержит логические символы, то она имеет одну из следующих форм:  $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ ,  $\Phi_1 \vee \Phi_2$ ,  $\neg \Phi_1$ ,  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ ,  $\forall x \Phi_1$  или  $\exists x \Phi_1$ . В каждом случае проверка (17) по индукции сводится к какому-либо из элементарных свойств ультрафильтра  $\mathcal{U}$ . Фактически мы уже приводили некоторые фрагменты доказательства, когда проверяли транзитивность отношения  $<$  в  ${}^*\mathbb{R}$ : см. абзац, следующий за (11).

Прокомментируем, однако, вкратце несколько случаев. Например, если  $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ , то (17) следует из свойства замкнутости относительно конечного пересечения для ультрафильтров. В случае  $\Phi = \neg \Phi_1$  существенно используется, что  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр, а именно, то, что  $\mathbb{N} - E \in \mathcal{U}$  в том и только том случае, когда  $E \notin \mathcal{U}$ ; читатель должен вспомнить приведенное выше обсуждение вопроса о делителях нуля.

Рассмотрение кванторов не приводит к специальным трудностям; давайте, однако, обсудим во всех деталях случай  $\Phi = \exists x \Phi_1$ . Для простоты пусть формула  $\Phi$  имеет одну свободную переменную. Докажем, что

$$\Phi(f_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(f(i))\} \in \mathcal{U},$$

где  $\Phi(f_{\mathcal{U}})$  имеет вид  $\exists x \Phi_1(x, f_{\mathcal{U}})$ . Формула  $\Phi(f_{\mathcal{U}})$  справедлива в  ${}^*\mathbb{R}$  в том и только том случае, когда существует такое  $g_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$ , что формула  $\Phi_1(g_{\mathcal{U}}, f_{\mathcal{U}})$  справедлива в  ${}^*\mathbb{R}$ . По предположению индукции это означает, что  $\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi_1(g(i), f(i))\} \in \mathcal{U}$ . Но если формула  $\Phi_1(g(i), f(i))$  справедлива в  $\mathbb{R}$ , то формула  $\exists x \Phi_1(x, f(i))$  тоже справедлива в  $\mathbb{R}$ , т. е.  $\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi_1(g(i), f(i))\} \subset \{i \in \mathbb{N} \mid \exists x \Phi_1(x, f(i))\}$ . Из свойства фильтров (3) теперь следует, что  $\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(f(i))\} \in \mathcal{U}$ .

Чтобы доказать обратное, предположим, что  $\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(f(i))\} \notin \mathcal{U}$ . Для каждого  $i$  из этого множества выберем некоторое  $a_i \in \mathbb{R}$  таким образом, чтобы была справедливо  $\Phi_1(a_i, f(i))$ . Пусть  $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — такая функция, что  $g(i) = a_i$ , если  $i$  принадлежит рассматриваемому множеству, и  $g(i) = a'$  для остальных  $i$ ; здесь  $a' \in \mathbb{R}$  можно выбрать произвольно. Тогда мы имеем  $\Phi_1(g(i), f(i))$  для множества индексов, принадлежащего  $\mathcal{U}$ ; следовательно, по предположению индукции  $\Phi_1(g_{\mathcal{U}}, f_{\mathcal{U}})$  справедливо в  ${}^*\mathbb{R}$ , поэтому  $\Phi(f_{\mathcal{U}}) = \exists x \Phi_1(x, f_{\mathcal{U}})$  тоже справедливо в  ${}^*\mathbb{R}$ .  $\square$

Непосредственным следствием теоремы Лося является принцип переноса.

**1.1.4. Принцип переноса.** Пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$  — формула языка  $L(\mathbb{R})$ . Тогда для любых  $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$  и  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$  утверждение  $\Phi(A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n)$  справедливо в  $\mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда утверждение  $\Phi(*A_1, \dots, *A_m, *r_1, \dots, *r_n)$  справедливо в  $*\mathbb{R}$ .

Доказательство в самом деле получается непосредственно. Из (17) сразу вытекает равносильность  $\Phi(*A_1, \dots, *A_m, *r_1, \dots, *r_n)$  и включения  $\{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n)\} \in \mathcal{U}$ . Но последнее множество равно  $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ , если утверждение  $\Phi$  справедливо для  $A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n$  в  $\mathbb{R}$ , и равно  $\emptyset \notin \mathcal{U}$ , если  $\Phi$  неверно для  $A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n$  в  $\mathbb{R}$ . Значит,  $\Phi(A_1, \dots, A_m, r_1, \dots, r_n)$  справедливо в  $\mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда  $\Phi(*A_1, \dots, *A_m, *r_1, \dots, *r_n)$  справедливо в  $*\mathbb{R}$ .  $\square$

Существование вложения  $*$ :  $\mathbb{R} \rightarrow *\mathbb{R}$ , удовлетворяющего принципу переноса 1.1.4 — это все, что нужно для элементарного нестандартного анализа. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, давайте ненадолго вернемся к доказательству предложения 1.1.2. Решающим моментом было доказательство того, что если  $\mu(r) \subset *E$  для всех  $r \in E$ , то  $E$  открыто. Предыдущее доказательство было проведено в рамках нашей модели; сейчас же мы воспользуемся принципом переноса: пусть  $a \in E$ ; поскольку  $\mu(a) \subset *E$ , утверждение

$$\Phi(X, x) = \exists z[0 < z \wedge \forall y[|x - y| < z \rightarrow y \in X]]$$

справедливо в  $*\mathbb{R}$  при  $X = *E$  и  $x = *a$ . По принципу переноса  $\Phi(E, a)$  справедливо в  $\mathbb{R}$ , а это означает, что некоторая стандартная окрестность числа  $a$  содержится в  $E$ , т. е.  $E$  открыто.

Читателю будет полезно сравнить оба доказательства.

Мы завершим это вводное обсуждение следующими более общими комментариями. Начав с множества рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , мы можем образовать ультрапроизведение

$$(18) \quad *\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U},$$

где  $\mathcal{U}$  — некоторый ультрафильтр на  $\mathbb{N}$ , являющийся расширением фильтра кофинитных множеств. Так же, как в случае  $*\mathbb{R}$ , у нас есть понятия *конечного*, *бесконечно большого* и *бесконечно малого* элементов  $*\mathbb{Q}$ . Но на этот раз мы должны быть более осторожны с понятием *стандартной части*, поскольку множество  $\mathbb{Q}$  не полно в стандартной метрике. Пусть  $Q_f$  обозначает множество конечных точек из  $*\mathbb{Q}$ , а  $Q_i$  — множество бесконечно малых. Легко доказать, что существует сюръективное отображение  $\pi$ :  $Q_f \rightarrow \mathbb{R}$ , получаемое отождествлением по модулю бесконечно малых, т. е.

$$\mathbb{R} \cong Q_f/Q_i.$$

Это, быть может, самый прямой путь построения действительных чисел из рациональных;  ${}^*\mathbb{Q}$  — это элементарное расширение поля  $\mathbb{Q}$ , подструктуру  $\mathbb{Q}_f$  можно рассматривать как область целостности, а  $\mathbb{Q}_i$  — максимальный идеал в  $\mathbb{Q}_f$ . Поэтому факторкольцо является полем, а именно — полем действительных чисел.

Этот пример можно обобщить:  $\mathbb{R}$  обычно рассматривается как пополнение нормированной алгебраической структуры  $\mathbb{Q}$ . В общем случае, если дана нормированная алгебраическая структура  $E^1$ , мы можем построить ее стандартное пополнение  $\hat{E}$  и нестандартное расширение  ${}^*E$ . В  ${}^*E$  мы можем выделить множество  $E_f$  *пред-околостандартных* точек<sup>2)</sup>. Тогда существует такое отображение  $\pi$ , что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}^*E \supset E_f & \xrightarrow{\pi} & \hat{E} \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & E & \end{array}$$

коммутативна (детальное обсуждение см. в работе Fenstad, Nyberg [1]). Отображение  $\pi$  обладает тем свойством, что если  $F$  — полное метрическое пространство и отображение  $f: E \rightarrow F$  продолжается до отображения  $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow F$ , то

$$\text{st}({}^*f(x)) = \hat{f}(\pi(x))$$

для всех  $x \in E_f$ .

Написанная коммутативная диаграмма как раз и «объясняет» успешное использование нестандартных методов во многих ситуациях. Хорошо известно, что алгебраическая структура, имеющаяся в  $E$ , не всегда продолжается на  $\hat{E}$ . Но по принципу переноса она продолжается на  ${}^*E$ . Отображение  $\pi: E_f \rightarrow \hat{E}$  «слепляет» точки, которые с алгебраической точки зрения следовало бы считать различными. Зато богатство множества  ${}^*E$  прибавляет нестандартным методам силу и интуитивную прозрачность.

**Замечание.** Мы должны признать, что, в то время как  $\hat{E}$  представляет собой «хорошее» расширение  $E$  с топологической точки зрения, расширению  ${}^*E$  не присуща никакая хорошая топологическая структура; см. Закон [1]. Но мы, вообще говоря, вовсе не интересуемся топологией в  ${}^*E$ . Топологический аспект

<sup>1)</sup> Например, нормированное пространство или нормированная алгебра. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> То есть точек, содержащихся в монадах точек из  $E$  — см. ниже предложение 2.2.2. — *Прим. ред.*

входит в ситуацию иным путем, например, через приведенную выше коммутативную диаграмму; см. также предложение 1.1.2 и обсуждение продолжений мер в §§ 3.4 и 3.5.

## 1.2. Расширенный универсум

К настоящему моменту мы узнали, что полное упорядоченное поле  $\mathbb{R}$  действительных чисел имеет собственное (но не единственное) расширение — упорядоченное поле  $^*\mathbb{R}$  гипердействительных чисел. Это расширение элементарно, что означает, что оно преобразует истинные в  $\mathbb{R}$  утверждения, выражимые на языке  $L(\mathbb{R})$ , в истинные утверждения.

Структура  $\mathbb{R}$  недостаточно широка для развития классической математики. Мы нуждаемся в расширенном универсуме, который в дополнение к числам и функциям содержал бы также множества функций, множества функциональных пространств и т. д.; иными словами, нам нужна структура конечного типа над  $\mathbb{R}$ . Более общо, если дано некоторое множество  $S$ , мы вводим суперструктуру  $V(S)$  над  $S$  следующим образом.

**1.2.1. Определение.** Для произвольного множества  $S$  положим

$$\begin{aligned} V_1(S) &= S, \\ V_{n+1}(S) &= V_n(S) \cup \{X \mid X \subset V_n(S)\}, \\ V(S) &= \bigcup_n V_n(S). \end{aligned}$$

Таким образом, суперструктура над  $S$  получается счетным повторением операции взятия множества всех подмножеств заданного множества. Классический анализ строится внутри  $V(\mathbb{R})$ . Мы получим расширенный универсум нестандартного анализа, описав постулатами во-первых, расширение  $^*\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ , и, во-вторых, вложение

$$(1) \quad *: V(\mathbb{R}) \rightarrow V(^*\mathbb{R}),$$

свойства которого будут аналогичны свойствам вложения  $*: \mathbb{R} \rightarrow ^*\mathbb{R}$ , построенного в § 1.1. Прежде всего, мы выдвинем следующий принцип.

**1.2.2. Принцип расширения.**  $^*\mathbb{R}$  — собственное расширение  $\mathbb{R}$ , и  $^*r = r$  для всех  $r \in \mathbb{R}$ .

В рамках модели § 1.1 это означает, что мы отождествляем  $\mathbb{R}$  с его  $*$ -образом в  $^*\mathbb{R}$ . Сейчас мы обобщим «ультрафильтровую» конструкцию так, чтобы показать, что вложение суперструктур типа (1), удовлетворяющее принципу переноса, аналогичному 1.1.4, в самом деле существует. Это построение не есть часть нашего систематического исследования предмета,

а просто доказательство того, что наши аксиомы непротиворечивы, т. е. что они допускают модель.

Построение проводится в два этапа. Сначала мы построим *ограниченную ультрастепень* суперструктуры  $V(\mathbb{R})$ , используя свободный ультрафильтр  $\mathcal{U}$  на  $\mathbb{N}$ . Это аналогично конструкции  ${}^*\mathbb{R}$  в § 1.1. Затем мы отобразим эту ограниченную ультрастепень в суперструктуру  $V({}^*\mathbb{R})$  таким образом, что вложение (1) будет удовлетворять принципу переноса.

I. *Построение ограниченной ультрастепени.* Последовательность  $A = (A_1, A_2, \dots)$  элементов  $V(\mathbb{R})$  *ограничена*, если существует такое фиксированное  $n$ , что  $A_i \in V_n(\mathbb{R})$  при всех  $i$ . Две ограниченные последовательности  $A$  и  $B$  эквивалентны по отношению к свободному ультрафильтру  $\mathcal{U}$  (обозначение:  $A \sim \sim_{\mathcal{U}} B$ ), если  $\{i \in \mathbb{N} \mid A_i = B_i\} \in \mathcal{U}$ . Будем обозначать через  $A_{\mathcal{U}}$  класс эквивалентности, содержащий последовательность  $A$ , и определим ограниченную ультрастепень

$$(2) \quad V(\mathbb{R})^{\mathcal{U}} = \{A_{\mathcal{U}} \mid A \text{ — ограниченная последовательность элементов } V(\mathbb{R})\}.$$

Определим отношение принадлежности  $\in_{\mathcal{U}}$  для элементов ультрастепени:

$$(3) \quad A_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} B_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \in B_i\} \in \mathcal{U}.$$

Читатель легко увидит, каким образом это определение обобщает определение (14) из § 1.1.

Существует естественное собственное вложение

$$(4) \quad i: V(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R})^{\mathcal{U}},$$

а именно,  $i(A) = (A, A, \dots)_{\mathcal{U}}$  — класс эквивалентности, отвечающий постоянной последовательности: оно аналогично вложению (8) из § 1.1.

II. *Вложение  $V(\mathbb{R})^{\mathcal{U}}$  в  $V({}^*\mathbb{R})$ .* Само множество  ${}^*\mathbb{R}$  является (ограниченной) ультрастепенью  $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ . Но ультрастепень  $V(\mathbb{R})^{\mathcal{U}}$  — это не то же самое, что полная суперструктура  $V({}^*\mathbb{R})$ . Сейчас мы построим такое вложение

$$(5) \quad j: V(\mathbb{R})^{\mathcal{U}} \rightarrow V({}^*\mathbb{R}),$$

что (i)  $j$  является тождественным отображением на  ${}^*\mathbb{R}$ , и (ii) если  $A_{\mathcal{U}} \notin {}^*\mathbb{R}$ , то  $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) \mid B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$ . Это означает, что отношение  $\in_{\mathcal{U}}$  в ультрастепени переходит в обычное отношение принадлежности в  $V({}^*\mathbb{R})$ .

Вложение  $j$  строится поэтапно. Пусть

$$V_k(\mathbb{R})^N/\mathcal{U} = \{A_{\mathcal{U}} \mid A \text{ — последовательность элементов из } V_k(\mathbb{R})\}.$$

Тогда ограниченная ультрастепень есть объединение множеств цепи

$${}^*\mathbb{R} = V_1(\mathbb{R})^N/\mathcal{U} \subset \dots \subset V_k(\mathbb{R})^N/\mathcal{U} \subset \dots,$$

и мы можем определить  $j$  по индукции. Для  $k = 1$  отображение  $j$  будет тождественным. Если  $A_{\mathcal{U}} \in V_{k+1}(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$ , и  $A_{\mathcal{U}} \notin {}^*\mathbb{R}$ , мы просто полагаем  $j(A_{\mathcal{U}}) = \{j(B_{\mathcal{U}}) \mid B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}\}$ . Это определение корректно: если  $B_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A_{\mathcal{U}}$ , то из (3) следует, что  $\{i \in \mathbb{N} \mid B_i \in V_k(\mathbb{R})\} \in \mathcal{U}$ , так что  $B_{\mathcal{U}} \in V_k(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$  и  $j(B_{\mathcal{U}})$  определено на предыдущем шаге индукции.

Комбинируя вложения  $i$  и  $j$ , мы получаем модель расширенного нестандартного универсума:

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U} & \xrightarrow{j} & V({}^*\mathbb{R}) \\ & \swarrow i \quad \searrow * & \\ & V(\mathbb{R}) & \end{array}$$

где по определению  $*A = j(i(A))$  для  $A \in V(\mathbb{R})$ . Читатель может проверить, что это  $*$ -вложение продолжает  $*$ -вложение, построенное в § 1.1.

Суперструктуры  $V(\mathbb{R})$  и  $V({}^*\mathbb{R})$  связаны между собой принципом переноса, обобщающим утверждение 1.14 из § 1.1. Структура  $\mathbb{R}$  имеет отвечающий ей элементарный язык  $L(\mathbb{R})$ , который мы использовали для того, чтобы придать необходимую точность формулировке принципа переноса. Теперь нам требуется аналогичное формальное средство для того, чтобы сформулировать расширенный вариант принципа переноса.

**1.2.3. Ограниченный язык  $L(V(\mathbb{R}))$ .** Язык  $L(V(\mathbb{R}))$  будет расширением языка  $L(\mathbb{R})$ . К нашему набору элементарных формул (см. (i)–(vi) в § 1.1) мы добавим выражения вида

$$(6) \quad X \in Y,$$

где  $X$  и  $Y$  — переменные для произвольных множеств из  $V(\mathbb{R})$ . Напомним, что в п. (vi) § 1.1 мы ограничились формулами вида  $t \in Y$ , где  $t$  было переменной для элементов множества  $\mathbb{R}$ .

Мы сохраним логические символы языка  $L(\mathbb{R})$ , но к кванторам для чисел добавим *ограниченные кванторы для множеств*:

$$(7) \quad \begin{aligned} &\forall X \in Y \text{ для всех множеств } X, \text{ являющихся элементами } Y; \\ &\exists X \in Y \text{ существует множество } X, \text{ являющихся элементами } Y. \end{aligned}$$

Формулы  $\Phi$  языка  $L(V(\mathbb{R}))$  строятся точно так же, как формулы языка  $L(\mathbb{R})$ .

Произвольная формула  $\Phi$  языка  $L(V(\mathbb{R}))$  может быть естественным образом интерпретирована в любой из структур  $V(\mathbb{R})$ ,  $V(\mathbb{R})_N/\mathcal{U}$  и  $V(*\mathbb{R})$ ; заметим, что в  $V(\mathbb{R})$  и  $V(*\mathbb{R})$  у нас есть обычная интерпретация символа  $\in$ , а в  $V(\mathbb{R})_N/\mathcal{U}$  для интерпретации отношения принадлежности мы используем определенное в (3) отношение  $\in_{\mathcal{U}}$ . Если задана формула

$$\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n),$$

где  $X_1, \dots, X_n$  — все ее свободные параметры для множеств и если даны множества  $A_1, \dots, A_n \in V(\mathbb{R})$ , то под  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$  мы понимаем утверждение о структуре  $V(\mathbb{R})$ , которое получается подстановкой  $A_1, \dots, A_n$  в качестве значений переменных  $X_1, \dots, X_n$  соответственно. Аналогично  $\Phi(*A_1, \dots, *A_n)$  интерпретируется как условие на  $V(*\mathbb{R})$ , полученное подстановкой  $*A_k = j(i(A_k))$  в качестве значения переменной  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**1.2.4. Принцип переноса.** Пусть  $A_1, \dots, A_n \in V(\mathbb{R})$ . Любое утверждение  $\Phi$  языка  $L(V(\mathbb{R}))$ , справедливое относительно  $A_1, \dots, A_n$  из  $V(\mathbb{R})$ , справедливо также и относительно  $*A_1, \dots, *A_n$  из  $V(*\mathbb{R})$ , и наоборот.

Мы будем использовать перенос снова и снова. Мы отдаем себе отчет в том, что для обретения полной свободы в манипулировании элементарными формулами, т. е. формулами языка  $L(V(\mathbb{R}))$ , требуется некоторое время. Но наш опыт показывает, что это не более чем временное препятствие. Пока обсудим простой пример.

Пусть  $A \subset *\mathbb{R}$ ; тогда  $A \in V_2(*\mathbb{R})$ . Вложение (1) ставит в соответствие множеству  $V_2(\mathbb{R})$  множество  $*(V_2(\mathbb{R}))$  — элемент  $V(*\mathbb{R})$ . Будет ли  $A$  принадлежать множеству  $*(V_2(\mathbb{R}))$ ? Не обязательно, как будет показано ниже (см. замечание после п. 1.2.6). Но если  $A \in *B$  для некоторого  $B \in V(\mathbb{R})$ , то  $A \in *(V_2(\mathbb{R}))$ .

**Замечание.** Последнее утверждение может быть «доказано» двумя способами. Во-первых, мы можем показать, что оно справедливо для модели, и это будет означать, что оно не противоречит нашим аксиоматическим принципам — принципу расширения и принципу переноса. Но мы можем также вывести его непосредственно из самих принципов, и это будет означать, что оно истинно. Мы изберем второй путь, оставив первый читателю. Быть может, сейчас уместно напомнить приведенные выше два «доказательства» утверждения 1.1.2(i).

Итак, мы хотим доказать, что

$$(8) \quad \forall A [A \in {}^*B \wedge A \subset {}^*\mathbb{R} \rightarrow A \in {}^*V_2(\mathbb{R})].$$

В таком виде формула (8) не принадлежит языку  $L(V(\mathbb{R}))$ . Она, однако, эквивалентна формуле

$$(9) \quad (\forall A \in {}^*B) [\forall r \in A (r \in {}^*\mathbb{R}) \rightarrow A \in {}^*V_2(\mathbb{R})].$$

Это уже формула языка  $L(V(\mathbb{R}))$ : в нее входят только ограниченные кванторы для множеств. При небольшом опыте всегда легко увидеть, как некоторое условие может быть переписано в виде корректной формулы языка  $L(V(\mathbb{R}))$ . Поэтому в будущем мы будем предпочитать формулы в стиле (8), не обязательно настаивая на корректной форме (9).

Формула (9) представляет собой утверждение  $\Phi({}^*B, {}^*\mathbb{R}, {}^*V_2(\mathbb{R}))$ , которое, согласно принципу переноса, справедливо в  $V({}^*\mathbb{R})$  тогда и только тогда, когда соответствующее утверждение  $\Phi(B, \mathbb{R}, V_2(\mathbb{R}))$  справедливо в  $V(\mathbb{R})$ . Но последнее утверждение тривиально. Таким образом, мы показали, что если подмножество  $A \subset {}^*\mathbb{R}$  является элементом некоторого множества  ${}^*B$  из  $V({}^*\mathbb{R})$ , то оно является также элементом  $*$ -образа множества  $V_2(\mathbb{R})$ .

**Замечание.** Прокомментируем вкратце доказательство утверждения 1.2.4. В ультрафильтровую модель вовлечены три структуры:  $V(\mathbb{R})$ ,  $V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$  и  $V({}^*\mathbb{R})$ . Мы уже объясняли, как проинтерпретировать в этих трех структурах произвольную формулу  $\Phi(X, Y)$  языка  $L(V(\mathbb{R}))$ . Далее, теорема Лося 1.1.3 непосредственно обобщается на *ограниченную* ультрастепень  $V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$  (ее доказательство остается в точности тем же), а именно, для любых  $A_{\mathcal{U}}, B_{\mathcal{U}} \in V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$

$$(10) \quad \Phi(A_{\mathcal{U}}, B_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(A_i, B_i)\} \in \mathcal{U},$$

откуда перенос между  $V(\mathbb{R})$  и  $V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$  получается в точности так же, как в 1.1.4.

Но принцип 1.2.4 утверждает наличие переноса между  $V(\mathbb{R})$  и  $V({}^*\mathbb{R})$ . Для того чтобы его доказать, нужно заменить формулу (10) на

$$(11) \quad \Phi(j(A_{\mathcal{U}}), j(B_{\mathcal{U}})) \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \Phi(A_i, B_i)\} \in \mathcal{U}.$$

Но это непосредственно следует из того факта, что каждый элемент множества, скажем  $j(A_{\mathcal{U}})$  в  $V({}^*\mathbb{R})$  имеет вид  $j(A'_{\mathcal{U}})$  для некоторого  $A'_{\mathcal{U}}$  в  $V(\mathbb{R})^N/\mathcal{U}$  (см. конструкцию отображения  $j$ ).

Из формулы (11) принцип переноса 1.2.4 получается с помощью тех же рассуждений, что и в 1.1.4.  $\square$



Все свойства множества  ${}^*\mathbb{R}$ , обсуждавшиеся нами в § 1.1, остаются справедливыми и для  ${}^*\mathbb{R}$  в  $V({}^*\mathbb{R})$ . Элементы множества  ${}^*\mathbb{R}$  либо *конечны*, либо *бесконечно велики*, и каждый конечный элемент из  ${}^*\mathbb{R}$  имеет единственную *стандартную часть* (или *тень*), лежащую в  $\mathbb{R}$ . Бесконечно малые в  ${}^*\mathbb{R}$ , кроме  ${}^*0$ , обратны к бесконечно большим числам из  ${}^*\mathbb{R}$ .

Но в расширенном универсуме возникают еще дополнительные возможности.

**1.2.5. Определение.** Пусть  $A \in V({}^*\mathbb{R})$ ; тогда

- (i)  $A$  называется *стандартным*, если  $A = {}^*B$  для некоторого  $B \in V(\mathbb{R})$ ;
- (ii)  $A$  называется *внутренним*, если  $A \in {}^*B$  для некоторого  $B \in V(\mathbb{R})$ ;
- (iii)  $A$  называется *внешним*, если оно не является внутренним.

Легко видеть, что каждое стандартное множество является внутренним и любой элемент внутреннего множества тоже является внутренним. Последний факт следует из нашего предыдущего обсуждения: пусть  $A \in {}^*B$ ; тогда  $A \subset V_k({}^*\mathbb{R})$  для некоторого  $k$ , и, значит,  $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ . Но из определения 1.2.1 и принципа переноса следует, что если  $A_1 \in A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$ , то  $A_1 \in {}^*(V_k(\mathbb{R}))$ ; в теоретико-множественной терминологии этажи универсума *транзитивны*.

**Замечание.** В силу важности внутренних множеств мы детально опишем их в нашей модели. Пусть множество  $A$  — внутреннее; тогда  $A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R}))$  для некоторого  $k \geq 1$ . Это означает, что  $A$  будет иметь вид  $A = j(A_{\mathcal{U}})$  для некоторого  $A_{\mathcal{U}}$ . По построению отображения  $j$  мы получаем

$$A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow j(A_{\mathcal{U}}) \in j(i(V_{k+1}(\mathbb{R}))) \Leftrightarrow A_{\mathcal{U}} \in {}_{\mathcal{U}}i(V_{k+1}(\mathbb{R})),$$

где  $i$  — вложение  $V(\mathbb{R})$  в ультрастепень. Теперь определение отношения  $\in_{\mathcal{U}}$  дает

$$A \in {}^*(V_{k+1}(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \in V_{k+1}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{U},$$

где  $(A_1, A_2, \dots)$  — ограниченная последовательность, определяющая  $A_{\mathcal{U}}$ . Таким образом, *внутренние* множества суть в точности те объекты, которые мы получаем из произвольных ограниченных последовательностей  $(A_1, A_2, \dots)$ ; среди них *стандартные* — те, которые получаются из последовательностей вида  $(A, A, \dots)$ .

В качестве примера рассмотрим последовательность  $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ , где  $A_n = [0, n] \subset \mathbb{R}$ . Внутреннее (но не стандартное) множество, определяемое этой последовательностью,

есть отрезок  $[0, \omega] \subset {}^*\mathbb{R}$ , где  $\omega$  — бесконечное большое число в  ${}^*\mathbb{R}$ , определяемое последовательностью  $(1, 2, \dots, n, \dots)$ ; число  $x \in {}^*\mathbb{R}$  принадлежит отрезку  $[0, \omega]$  тогда и только тогда, когда  $0 \leq x \leq \omega$ . Внутренние множества обладают следующим важным свойством.

**1.2.6. Предложение.** (i) *Каждое непустое внутреннее подмножество  $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$  имеет наименьший элемент.*

(ii) *Каждое непустое ограниченное сверху внутреннее подмножество  $A \subset {}^*\mathbb{R}$  имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство представляет собой простое упражнение на использование принципа переноса. Докажем (i). Ввиду (9) ясно, что  $A \in {}^*(V_2(\mathbb{R}))$ . Тот факт, что любое внутреннее подмножество  $X \subset {}^*\mathbb{N}$  имеет наименьший элемент, можно выразить формулой

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \forall X \in {}^*V_2(\mathbb{R}) \quad [X \neq \emptyset \wedge X \subset {}^*\mathbb{N} \rightarrow \\ \rightarrow X \text{ имеет } <\text{-наименьший элемент}].$$

Чтобы быть совсем точным, мы должны были бы записать во всех деталях условие « $X$  имеет  $<$ -наименьший элемент», т. е. написать

$$\exists x \in X [\forall y \in X \cap (y < x)];$$

однако развертывание таких выражений в «правильные» высказывания языка  $L(V(\mathbb{R}))$  — дело довольно рутинное, и мы часто будем его опускать.

Мы получили такую формулу  $\Phi$ , что утверждение  $\Phi(\mathbb{N}, V_2(\mathbb{R}))$  справедливо в  $V(\mathbb{R})$ . Согласно принципу переноса, утверждение  $\Phi({}^*\mathbb{N}, {}^*V_2(\mathbb{R}))$  справедливо в  $V({}^*\mathbb{R})$ , что и доказывает п. (i) предложения 1.2.6.  $\square$

**Замечание.** Из доказанного следует, что множество  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  внешнее, так как в нем нет  $<$ -наименьшего элемента: если  $x \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то также и  $x - 1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Отсюда видно также и то, что множество  $\mathbb{N} - \text{внешнее}$ , т. е.  $\mathbb{N} \in V_2({}^*\mathbb{R}) - {}^*V_2(\mathbb{R})$ . Из (ii) следует, что  $\mathbb{R}$  как подмножество в  ${}^*\mathbb{R}$  тоже является внешним. Приведем еще пример того, что утверждение (ii) предложения 1.2.6 может быть неверным для внешних множеств: множество положительных бесконечных малых в  ${}^*\mathbb{R}$  ограничено сверху, но не имеет точной верхней грани.

Сформулируем несколько важных следствий предложения 1.2.6.

**1.2.7. Предложение.** (i) *Если множество  $A$  — внутреннее, и  $\mathbb{N} \subset A$ , то  $A$  содержит некоторое бесконечно большое натуральное число, т. е. элемент множества  ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .*

(ii) Если множество  $A$  — внутреннее, и каждое бесконечно большое  $n \in {}^*\mathbb{N}$  принадлежит  $A$ , то  $A$  содержит некоторое стандартное  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii) Если внутреннее множество  $A$  содержит все положительные бесконечно малые числа, то  $A$  содержит некоторое стандартное положительное действительное число.

(iv) Если внутреннее множество  $A$  содержит все стандартные положительные действительные числа, то  $A$  содержит некоторое положительное бесконечно малое число.

(v) Если внутреннее множество  $A$  содержит все конечные положительные гипердействительные числа, то  $A$  содержит некоторое положительное бесконечно большое число<sup>1)</sup>.

Эффект, описанный в первых двух частях этого предложения часто называют «переполнением» и «переполнением снизу». Доказательства легко получаются из 1.2.6; например, если бы внутреннее множество  $A$  содержало все положительные бесконечно малые, но не содержало никакого положительного стандартного числа, то это множество было бы ограниченным сверху, но не имело бы точной верхней грани.

Как распознавать внутренние множества? Весьма мощным является следующий простой принцип.

**1.2.8. Принцип внутреннего определения.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — внутренние множества из  $V({}^*\mathbb{R})$ , и пусть  $\Phi(X_1, \dots, X_n, x)$  — формула языка  $L(V(\mathbb{R}))$ . Тогда множество

$$\{x \in A_1 \mid \Phi(A_1, \dots, A_n, x)\}$$

— внутреннее.

Доказательство проводится следующим образом. Поскольку множества  $A_1, \dots, A_n$  — внутренние, существует такое целое  $m$ , что  $A_1, \dots, A_n \in {}^*(V_m(\mathbb{R}))$ . В  $V(\mathbb{R})$  является истинным следующее утверждение о существовании множеств, или «принцип выделения»:

$$\forall X_1 \dots \forall X_n \in V_m(\mathbb{R}) \quad \exists y \in V_{m+1}(\mathbb{R}) \\ [y = \{x \in X_1 \mid \Phi(X_1, \dots, X_n, x)\}],$$

где  $y = \{x \in X_1 \mid \Phi(X_1, \dots, X_n, x)\}$  служит сокращением формулы  $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in X_1 \wedge \Phi(X_1, \dots, X_n, x))$ , т. е.  $x \rightarrow$  связанная переменная, входящая в формулу  $\{x \in X_1 \mid \Phi(X_1, \dots, X_n, x)\}$ .

Используя принцип переноса и тот факт, что  $A_1, \dots, A_n \in {}^*(V_m(\mathbb{R}))$ , мы заключаем, что множество  $\{x \in A_1 \mid \Phi(A_1, \dots, A_n, x)\}$  принадлежит  ${}^*V_{m+1}(\mathbb{R})$ , т. е. является внутренним.  $\square$

<sup>1)</sup> Сформулированные утверждения в литературе по нестандартному анализу часто называются принципами перманентности. — Прим. перев.

**1.2.9. Замечание.** Предложения 1.2.7 и 1.2.8 вместе содержат больше, чем можно заподозрить. Пусть функции  $f$  и  $g$  — внутренние, т. е. их графики суть внутренние множества из  $J(*\mathbb{R})$ . Пусть мы доказали, что для каждого  $t \in *[0, 1]$  найдется такое бесконечно малое  $\delta_t > 0$ , что  $|f(t) - g(t)| < \delta_t$ . Можно ли получить равномерную оценку: найти такое бесконечно малое  $\delta$ , что  $|f(t) - g(t)| < \delta$  для всех  $t \in *[0, 1]$ ?

Ответ положительный и следует непосредственно из 1.2.7 (iv) и 1.2.8. Множество

$$(12) \quad A = \{r \in *\mathbb{R} \mid r > 0 \wedge \forall t \in *[0, 1] (|f(t) - g(t)| < r)\}$$

является внутренним согласно 1.2.8. Легко видеть, что  $A$  содержит любое стандартное положительное число; поэтому, согласно 1.2.7 (iv),  $A$  содержит некоторое бесконечно малое положительное число  $\delta$ , которое и будет давать искомую равномерную оценку.  $\square$

Приведем еще один важный результат, являющийся следствием предложения 1.2.7.

**1.2.10. Лемма Робинсона.** (i) Если функция  $f: *\mathbb{N} \rightarrow *\mathbb{R}$  внутренняя, и  $f(n) \approx 0$  для всех конечных  $n$ , то найдется такое  $\omega \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $f(n) \approx 0$  при всех  $n \leq \omega$ ,  $n \in *\mathbb{N}$ .

(ii) Если функция  $f: *\mathbb{R}_+ \rightarrow *\mathbb{R}$  внутренняя, и  $f(x) \approx 0$  для всех конечных положительных  $x$ , то найдется такое бесконечно большое положительное  $\omega \in *\mathbb{R}$ , что  $f(x) \approx 0$  для всех  $x \in (0, \omega] \subset *\mathbb{R}$ .

Заметим, что множество  $\{n \in *\mathbb{N} \mid f(n') \approx 0 \text{ при } n' \leq n, n' \in *\mathbb{N}\}$  — внешнее, и утверждение 1.2.7 (i) к нему не применимо. Однако множество  $\{n \in *\mathbb{N} \mid |f(n')| < 1/n' \text{ при } n' \leq n, n' \in *\mathbb{N}\}$  — уже внутреннее, и доказательство утверждения (i) леммы Робинсона теперь следует из 1.2.7 (i). Аналогично, для доказательства утверждения (ii) надо рассмотреть внутреннее множество  $\{x \in *\mathbb{R}_+ \mid |f(x')| < 1/x' \text{ при } x' \leq x, x' \in *\mathbb{R}\} \subset *\mathbb{R}$  и применить к нему утверждение 1.2.7 (v).  $\square$

Подведем итоги нашего общего описания расширенного универсума. Мы ввели суперструктуру  $V(\mathbb{R})$  и постулировали вложение суперструктур (1):

$$*: V(\mathbb{R}) \rightarrow V(*\mathbb{R}),$$

удовлетворяющее принципу расширения 1.2.2 и принципу переноса 1.2.4. Мы построили модель для вложения суперструктур с помощью понятия ограниченной ультрастепени. Таким образом, наши аксиомы совместны, т. е. существует последовательная теория бесконечно малых и бесконечно больших чисел. Во

главе этой теории стоит принцип переноса, который будет нашим основным инструментом в следующих разделах.

**1.2.11. Замечание.** Мы ограничили себя рамками  $V(\mathbb{R})$ ; в некоторых случаях более естественно работать в рамках другой суперструктуры. Пусть, например  $E$  — нормированное линейное пространство над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Чтобы можно было применить к ним изложенную выше технику, множества  $E$  и  $\mathbb{C}$  должны быть объектами суперструктуры  $V(\mathbb{R})$ . Однако было бы ничуть не менее естественно работать в рамках суперструктуры  $V(E \cup \mathbb{C})$ , т. е. рассматривать  $E$  и  $\mathbb{C}$  как базовые, несводимые объекты. При этом все остальное получалось бы с помощью теоретико-множественной конструкции из множества «праэлементов»  $E \cup \mathbb{C}$ .

Конструкция ультрастепени легко может быть приспособлена для того, чтобы построить вложение

$$*: V(E \cup \mathbb{C}) \rightarrow V(*E \cup *C),$$

где  $*E$  — нормированное линейное пространство над полем  $*\mathbb{C}$ , удовлетворяющее двум принципам:

- (14) *Принцип расширения:*  $*E$  и  $*\mathbb{C}$  суть собственные расширения множеств  $E$  и  $\mathbb{C}$  соответственно, и  $*x = x$  для любого  $x \in E \cup \mathbb{C}$ .
- (15) *Принцип переноса.* Пусть  $A_1, \dots, A_n \in V(E \cup \mathbb{C})$ . Любое утверждение  $\Phi(X_1, \dots, X_n)$  языка  $L(V(E \cup \mathbb{C}))$  справедливо для множеств  $A_1, \dots, A_n$  в  $V(E \cup \mathbb{C})$  в том и только том случае, когда оно справедливо для множеств  $*A_1, \dots, *A_n$  в  $V(*E \cup *C)$ .

Здесь  $L(V(E \cup \mathbb{C}))$  — язык структуры  $E$  как нормированного линейного пространства над  $\mathbb{C}$ , дополненный отношением принадлежности  $\in$  и ограниченными кванторами для множеств.

Описанная ситуация естественным образом возникнет при обсуждении линейных операторов в § 2.2; для других целей мы можем выбрать иную базовую структуру  $S$  для  $V(S)$ .

### 1.3. Пределы, непрерывность и производная

Продолжим наш основной курс кратким обсуждением пределов, непрерывности и производной.

Последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , будучи отображением  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , продолжается до отображения  $*a: *\mathbb{N} \rightarrow *\mathbb{R}$ <sup>1)</sup>. Для  $n \in *\mathbb{N}$

<sup>1)</sup> Чтобы это доказать, надо записать на языке  $L(V(\mathbb{R}))$  утверждение « $a(n)$  есть функция, отображающая  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{R}$ », т. е.  $a(n)$  есть подмножество в  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , являющееся графиком, так что каждому  $n \in \mathbb{N}$  отвечает одно и только одно  $a(n) \in \mathbb{R}$ , и применить к этому утверждению принцип переноса. — *Прим. перев.*

будем писать  $a_n = {}^*a(n)$ . Продолженную последовательность будем обозначать  $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ .

Для элементов  $a, a' \in {}^*\mathbb{R}$  будем записывать в виде  $a \approx a'$  тот факт, что число  $a - a'$  бесконечно мало.

**1.3.1. Предложение.** Равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  равносильно тому, что  $a_\omega \approx a$  для всех  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

Здесь первое утверждение имеет стандартный смысл внутри  $V(\mathbb{R})$ . Второе же относится к расширенному универсуму  $V({}^*\mathbb{R})$ . Таким образом, предложение 1.3.1 дает *характеризацию* понятия предела в нестандартных терминах. Но его можно также рассматривать и как *определение* сходимости и предела стандартной последовательности.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то для  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что в  $V(\mathbb{R})$  будет справедливо следующее утверждение:

$$\forall m \in \mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \varepsilon).$$

По принципу переноса 1.2.4 в  $V({}^*\mathbb{R})$  справедливо утверждение

$$\forall m \in {}^*\mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \varepsilon).$$

Значит, если  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то в  $V({}^*\mathbb{R})$  верно неравенство  $|a - a_\omega| < \varepsilon$ . Поскольку оно верно для любого стандартного  $\varepsilon > 0$ , то разность  $a - a_\omega$  бесконечно мала, т. е.  $a_\omega \approx a$ .

Для обратного утверждения мы приведем два доказательства.

(i) Если  $a \approx a_\omega$  для всех  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то для любого стандартного  $\varepsilon > 0$  в  $V({}^*\mathbb{R})$  справедливо следующее утверждение  $\Phi(\varepsilon, {}^*\mathbb{N})$ :

$$\exists n \in {}^*\mathbb{N} \forall m \in {}^*\mathbb{N} (m \geq n \rightarrow |a - a_m| < \varepsilon).$$

По принципу переноса 1.2.4 утверждение  $\Phi(\varepsilon, \mathbb{N})$  справедливо в  $V(\mathbb{R})$ . Поскольку  $\varepsilon$  произвольно, это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  в стандартном смысле.

(ii) Пусть снова  $a \approx a_\omega$  для всех  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда множество

$$A = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid |a - a_m| < \varepsilon \text{ для всех } m \in {}^*\mathbb{N}, m \geq n\}$$

— внутреннее согласно 1.2.8. Теперь из 1.2.7(ii) следует, что  $A$  содержит некоторое конечное  $n_\varepsilon$ , а это и означает сходимость в стандартном смысле.  $\square$

Продолжая начатые рассмотрения, мы можем развить нестандартный вариант теории пределов. Например, критерий Коши говорит нам, что стандартная последовательность  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  сходится тогда и только тогда, когда  $a_\omega \approx a_\lambda$  для всех  $\omega, \lambda \in \mathbb{N}$ .

$\in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , и что предел в этом случае равен  $\text{st}(a_\omega)$  для любого  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Вообще стандартная часть  $\text{st}(a_\omega)$ , если она существует, определяет предельную точку последовательности, причем любая предельная точка имеет такой вид. Но мы оставим эту общую теорию читателям и сконцентрируем наше внимание на одном частном вопросе, который будет очень важен для нас в гл. 7, а именно — на двойных пределах.

Если дана двойная последовательность  $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  в  $\mathbb{R}$ , то мы будем обозначать через  $(a_{m,n})_{m,n \in {}^*\mathbb{N}}$  ее продолжение  $^*((a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}})$ . По аналогии с предложением 1.3.1 естественно высказать догадку, что

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \text{st}(a_\omega, \lambda)$$

для всех  $\omega, \lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Но тогда было бы верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \text{st}(a_\omega, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n},$$

а мы знаем, что оно, вообще говоря, неверно: порядок пределов имеет значение. Мы покажем, что равенство (1) справедливо, если мы будем более аккуратны в выборе  $\omega$  и  $\lambda$ ; грубо говоря, мы покажем, что (1) верно, если  $\omega$  «велико» по сравнению с  $\lambda$ , но если, наоборот,  $\lambda$  «велико» по сравнению с  $\omega$ , мы получим

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \text{st}(a_\omega, \lambda).$$

Проиллюстрируем это сначала на простом примере. Зададим последовательность  $(a_{m,n})_{m,n \in {}^*\mathbb{N}}$  формулой

$$(3) \quad a_{m,n} = \begin{cases} a, & \text{если } m > n, \\ b, & \text{если } m < n, \\ c, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

где  $a, b, c$  — действительные числа. Тогда

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = a,$$

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = b.$$

По принципу переноса формула (3) остается справедливой и для бесконечно больших целых чисел, так что

$$a = \text{st}(a_\omega, \lambda)$$

при  $\omega > \lambda$ , но

$$b = \text{st}(a_\omega, \lambda)$$

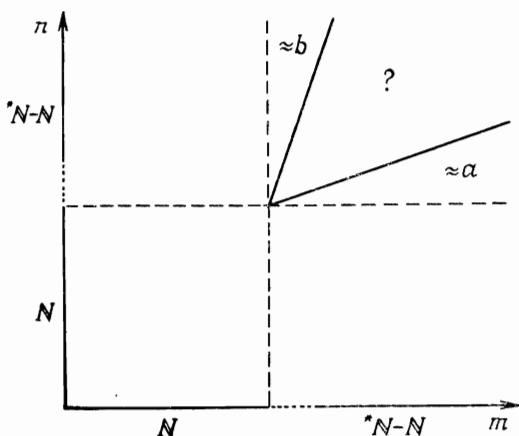


РИС. 1.1.

при  $\omega < \lambda$ . Заметим, что если  $\omega = \lambda$ , то  $c = \text{st}(a_{\omega, \lambda})$ , и, значит, могут быть такие бесконечно большие целые числа  $\omega, \lambda$ , что рассматриваемая стандартная часть отличается от обоих пределов.

**1.3.2. Предложение.** Пусть  $(a_{m, n})_{m, n \in \mathbb{N}}$  — стандартная последовательность. (i) Предположим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m, n} = a$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m, n} = b$ . Тогда для любого  $t \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  найдутся такие числа  $n_1, n_2 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $a_{m, n} \approx a$  при  $n \leq n_1, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , и  $a_{m, n} \approx b$  при  $n \geq n_2$ . Аналогично, для любого  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  найдутся такие  $m_1, m_2 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $a_{m, n} \approx b$  при  $m \leq m_1, m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , и  $a_{m, n} \approx a$  при  $m \geq m_2$ .

(ii) Соотношение  $a_{m, n} \approx a$  выполнено для всех  $m, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $|a_{m, n} - a| < \varepsilon$  для всех  $m, n < N, m, n \in \mathbb{N}$ .

Часть (i) нашего утверждения проиллюстрирована на рис. 1.1. Прежде чем перейти к доказательству, заметим, что нестандартное условие в (ii) не обязательно выполняется в том случае, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m, n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m, n}$ : достаточно выбрать скажем,  $a = b \neq c$  в приведенном выше примере.

Чтобы доказать (i), положим  $a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m, n}$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Тогда  $a_{m, n} - a_n \approx 0$  при  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$  ввиду предложения 1.3.1. Зафиксируем  $t \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Тогда по лемме Робинсона  $a_{m, n} - a_n \approx 0$  при  $n \leq n_1$  для некоторого  $n_1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Если при этом  $n$  бесконечно большое, то  $a_n \approx a$  и, следовательно,  $a_{m, n} \approx a$ , что доказывает первое утверждение в (i).



Чтобы найти  $n_2$ , мы сначала определим

$$b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n}$$

и заметим, что  $b_m \approx b$  при  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Поскольку утверждение

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad (|a_{m,n} - b_m| < \varepsilon)$$

справедливо в стандартном универсуме, то, подвергнув его переносу, мы получим справедливое в нестандартном универсуме утверждение

$$\forall m \in {}^*\mathbb{N} \quad \forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+ \quad \exists n_2 \in {}^*\mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad (|a_{m,n} - b_m| < \varepsilon).$$

Выбрав бесконечно большое  $m$  и бесконечно малое  $\varepsilon$ , мы получим требуемое  $n_2$ .

Второе утверждение части (i) получается из первого, если поменять местами  $m$  и  $n$ , поэтому оно не требует отдельного доказательства.

Доказательство утверждения (ii) является почти точной копией доказательства предложения 1.3.1. Если  $a_{m,n} \approx a$  для всех  $m, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  справедливо утверждение

$$\exists N \in {}^*\mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad (|a_{m,n} - a| < \varepsilon),$$

и по принципу переноса

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad (|a_{m,n} - a| < \varepsilon).$$

Чтобы доказать обратное, заметим, что если  $N \in \mathbb{N}$  таково, что

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq N \rightarrow |a_{m,n} - a| < \varepsilon),$$

то по принципу переноса

$$(6) \quad \forall m, n \in {}^*\mathbb{N} \quad (m, n \geq N \rightarrow |a_{m,n} - a| < \varepsilon).$$

Если  $m, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то условие (6) выполняется для любого стандартного  $\varepsilon > 0$ . Поэтому  $a_{m,n} \approx a$ , и предложение 1.3.2 доказано.  $\square$

Теперь вкратце обсудим непрерывность и равномерную непрерывность. Пусть  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  — стандартная функция,  $I$  — некоторый промежуток в  $\mathbb{R}$ .

**1.3.3. Предложение.** (i) Функция  $f$  непрерывна в точке  $a \in I$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \approx f(a)$  для всех таких  $x \in {}^*I$ , что  $a \approx x$ .

(ii) Функция  $f$  равномерно непрерывна на  $I$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \approx f(y)$  для всех таких  $x, y \in {}^*I$ , что  $x \approx y$ .

Обратите внимание на разницу между двумя утверждениями. Функция  $f(x) = 1/x$  непрерывна на  $(0, 1)$ . Пусть  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ; тогда  $1/\omega \approx 1/\omega^2 \approx 0$ , но числа  $f(1/\omega) = \omega$  и  $f(1/\omega^2) = \omega^2$  весьма

далеки друг от друга. Здесь  $1/\omega$  и  $1/\omega^2$  представляют два различных способа стремления к нулю.

Доказательства опять просты; предположим, например, что  $f(a) \approx f(x)$  для всех таких  $x \in {}^*I$ , что  $a \approx x$ . Фиксируем  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , т. е.  $\varepsilon > 0$ . Множество

$$A = \{\delta \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall x \in {}^*I \ (|a - x| < \delta \rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon)\}$$

*внутреннее* (согласно 1.2.8) и содержит все положительные бесконечно малые числа. Тогда согласно 1.2.7 (iii) множество  $A$  должно содержать некоторое положительное  $\delta \in \mathbb{R}$ ; отсюда следует непрерывность  $f$  в стандартном смысле.  $\square$

**1.3.4. Замечания.** Опять мы могли бы развивать дальше нестандартную теорию непрерывности, равномерной непрерывности, равномерной сходимости, равностепенной непрерывности и т. д. Мы не будем этим заниматься; однако невозможно удержаться чтобы не вставить следующий безболезненный способ доказательства того, что если функция  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и промежуток  $I$  компактен, то  $f$  равномерно непрерывна на  $I$ . Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 1.1.2 и 1.3.3. Пусть  $x, y \in {}^*I$  и  $x \approx y$ . Из компактности  $I$  следует, что числа  $\text{st}(x)$  и  $\text{st}(y)$  существуют и принадлежат  $I$ ; очевидно,  $\text{st}(x) = \text{st}(y)$ . Поскольку  $f$  непрерывна в  $I$ , мы имеем  $f(x) \approx f(\text{st}(x)) = f(\text{st}(y)) \approx f(y)$ .

Мы завершим этот параграф тем, что введем нестандартную версию производной.

**1.3.5. Производная.** Пусть  $I$  — открытый интервал в  $\mathbb{R}$ , и  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $dx$  — отличная от нуля бесконечно малая. Будем называть величину  $dy = f(a + dx) - f(a)$  *дифференциалом* функции  $f$  в точке  $a \in I$ . Если стандартная часть отношения  $dy/dx$  существует и одинакова для всех ненулевых  $dx$ , то функция  $f$  имеет производную в точке  $a$ , и

$$f'(a) = \text{st}(dy/dx).$$

Читатель может поразвлекаться доказательством стандартных результатов.<sup>1)</sup> Будет ли, например, правило дифференцирования сложной функции не более чем выкладкой

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} ?$$

## 1.4. Интеграл

Общая теория меры и интегрирования будет развита в гл. 3. Здесь же мы попытаемся в как можно более простой ситуации

<sup>1)</sup> Или прочесть эти доказательства у Дэвиса (Davis [1]). — Прим. ред.

придать смысл эвристической идее о том, что интеграл есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

В этом параграфе  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  будет положительной непрерывной функцией на промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $[a, b] \subset I$ , а  $\Delta x$  — положительное действительное число. Определим *сумму Римана* формулой

$$(1) \quad \sum_a^b f(x) \Delta x = f(x_0) \Delta x + f(x_1) \Delta x + \dots \\ \dots + f(x_{n-1}) \Delta x + f(x_n) (b - n \cdot \Delta x),$$

где  $n$  — наибольшее целое число, для которого  $a + n \cdot \Delta x \leq b$ , и  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \Delta x$ , ...,  $x_n = a + n \cdot \Delta x$ . Заметьте, что мы допускаем возможность выполнения строгих неравенств  $n \cdot \Delta x < b - a < (n + 1) \Delta x$ . (Поскольку функция  $f$  положительна и непрерывна, мы формируем сумму Римана как сумму площадей прямоугольников, построенных над каждым из подотрезков, причем высота каждого прямоугольника равна значению функции  $f$  в левом конце его основания.)

Для фиксированных  $a, b$  сумма Римана является функцией от  $\Delta x$ . Согласно принципам продолжения и переноса эта функция определена также для положительных бесконечно малых  $dx$ . Мы получаем соответствующую гиперконечную сумму

$$\sum_a^b f(x) dx,$$

где число  $n$  в (1) теперь бесконечно велико. Читатель должен заметить, что сумма Римана является конечным гипердействительным числом; поэтому она имеет стандартную часть.

**1.4.1. Определение.** Пусть  $[a, b] \subset I$  и пусть  $dx$  — положительное бесконечно малое. *Определенный интеграл* функции  $f$  от  $a$  до  $b$  по  $dx$  есть стандартная часть суммы Римана:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{st} \left( \sum_a^b f(x) dx \right).$$

Это определение использует выбор бесконечно малого  $dx$ . Но легко доказать, что если  $dx$  и  $du$  — два положительных бесконечно малых числа, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du.$$

Заметим, что  $x$  в  $f(x)$  и  $u$  в  $f(u)$  — немые переменные, а  $dx$  и  $du$  — нет. Поэтому последнее равенство — это не просто типографское соглашение, а утверждение, нуждающееся в проверке.

Определение 1.4.1 позволяет развить элементарную теорию интегрирования. Упомянем один результат, который служит «оправданием» интуитивной идеи о вычислении интеграла путем взятия типичных бесконечно малых элементов и их суммирования. Наше изложение следует книге Keisler [1].

Сначала немного обозначений. Если задано ненулевое бесконечно малое число  $\Delta x$ , то запись

$$u \approx v \text{ (в сравнении с } \Delta x \text{)}$$

означает, что  $u/\Delta x \approx v/\Delta x$ .

**1.4.2. Теорема о бесконечной сумме.** Пусть выполнены следующие условия: (i)  $h$  — вещественнозначная непрерывная функция на  $[a, b]$ ;

(ii)  $B(u, v)$  — вещественнозначная функция, определенная при  $a \leq u < v \leq b$  и обладающая свойством аддитивности:

$$B(u, w) = B(u, v) + B(v, w)$$

при  $u < v < w$ ;

(iii) для любого бесконечно малого отрезка  $[x, x + \Delta x] \subset \subset {}^*[a, b]$

$$B(x, x + \Delta x) \approx h(x)\Delta x \text{ (в сравнении с } \Delta x \text{)}.$$

Тогда

$$B(a, b) = \int_a^b h(x) dx.$$

Доказательство совсем просто. Выберем  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и положим  $\Delta x = (b - a)/\omega$ . Покажем, что для любого  $r > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$

$$\sum_a^b (h(x) - r)\Delta x < B(a, b) < \sum_a^b (h(x) + r)\Delta x,$$

откуда и следует утверждение теоремы. Чтобы доказать это неравенство, заметим, что если  $B(a, b) \geq \sum_a^b (h(x) + r)\Delta x$ , то по принципу переноса найдется такое  $x$ , что  $a \leq x < x + \Delta x \leq b$  и  $B(x, x + \Delta x) \geq (h(x) + r)\Delta x$ . Но, поскольку  $r \in \mathbb{R}_+$ , последнее неравенство противоречит тому факту, что  $\Delta B = B(x, x + \Delta x) \approx h(x)\Delta x$  (в сравнении с  $\Delta x$ ).  $\square$

Типичное применение теоремы о бесконечной сумме — следующий способ определения объема (см. рис. 1.2). Пусть  $D$  — это плоская фигура

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x)\},$$

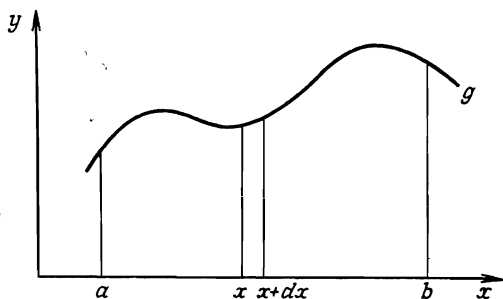


РИС. 1.2.

$g$  — непрерывная функция на  $[a, b]$ ,  $g \geq 0$ . Тогда тело, образованное вращением области  $D$  вокруг оси  $x$  имеет объем

$$V = \int_a^b \pi (g(x))^2 dx.$$

Эта формула является непосредственным следствием теоремы 1.4.2, поскольку  $\Delta V \approx \pi (g(x))^2 \Delta x$  (в сравнении с  $\Delta x$ ).

## 1.5. Дифференциальные уравнения

Мы завершим наш курс анализа, дав несколько примеров применения нестандартных методов к дифференциальным уравнениям. Для начала дадим нестандартное доказательство теоремы Пеано о существовании решений у обыкновенных дифференциальных уравнений.

**1.5.1. Теорема.** Пусть функция  $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и ограничена,  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда существует такая функция  $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $u(0) = u_0$  и

$$du(t)/dt = f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Ключом к нестандартному доказательству теоремы является наблюдение, что следующая процедура определяется формулой языка  $L(V(\mathbb{R}))$  относительно всех входящих в нее параметров:

(1) Для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  разделим отрезок  $[0, 1]$  на равные части точками  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1/n$ , ...,  $t_n = 1$  и определим  $v_n(t)$  на  $[0, 1]$  индуктивно, сперва положив

$$v_n(0) = u_0, \quad \frac{v_n(t_{i+1}) - v_n(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, v_n(t_i)),$$

а затем доопределив  $v_n(t)$  для всех  $t \in [0, 1]$  путем линейной интерполяции.

Поскольку эта процедура элементарна, т. е. выразима в языке  $L(V(\mathbb{R}))$ , мы можем проделать ее для некоторого  $\lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Простая выкладка показывает, что при  $1 \leq \omega \leq \lambda$ ,  $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ ,

$$(2) \quad v_\lambda(t_\omega) = u_0 + \sum_{i=0}^{\omega-1} f(t_i, v_\lambda(t_i))(t_{i+1} - t_i).^1)$$

Введем теперь стандартную функцию  $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемую соотношением

$$(2) \quad u(t) = \text{st}(v_\lambda(*t)), \quad t \in [0, 1].^2)$$

Элементарные рассмотрения (использующие компактность отрезка  $[0, 1]$ , а также ограниченность и непрерывность функции  $f$ ) показывают, что

$$(3) \quad f(t, *u(t)) \approx f(t, v_\lambda(t))$$

для  $t \in {}^*[0, 1]$ . (Для того чтобы подчеркнуть, что рассматривается продолженная функция  $u$ , мы навесили на нее звездочку, но в соответствии с нашими прежними соглашениями опустили звездочку у продолженной функции  $f$ ).

Формула (3) означает, что для любого  $t \in {}^*[0, 1]$  найдется такое бесконечно малое  $\delta_t > 0$ , что

$$|f(t, *u(t)) - f(t, v_\lambda(t))| < \delta_t.$$

В соответствии с замечанием 1.2.9 выбор  $\delta_t$  можно сделать равномерным (принцип внутреннего определения); т. е. существует такое бесконечно малое  $\delta > 0$ , что

$$|f(t, *u(t)) - f(t, v_\lambda(t))| < \delta$$

для всех  $t \in {}^*[0, 1]$ . Эта оценка дает требуемую равномерность для перехода от формулы (2) к формуле

$$(4) \quad u(t) \approx u_0 + \sum_{i=0}^{\omega-1} f(t_i, u(t_i))(t_{i+1} - t_i),$$

где  $\omega$  таково, что  $t \approx t_\omega$ . Но формула (4) равносильна стандартной формуле

$$(5) \quad u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds$$

— см. определение 1.4.1.  $\square$

<sup>1)</sup> Это легко проверяется для конечных  $\lambda$  и по принципу переноса верно при всех  $\lambda \in {}^*\mathbb{N}$ . — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Конечность  $v_\lambda(*t)$  вытекает из оценки  $|v_\lambda(\tau)| \leq |u_0| + M \cdot |\tau|$ ,  $\tau \in {}^*[0, 1]$ , где  $M > 0$  таково, что  $|f(t, u)| \leq M$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . — *Прим. ред.*

В этом месте мы позволим себе одно слегка полемическое замечание. Часто высказывается такая точка зрения, что нестандартный анализ весьма неконструктивен (и потому является чем-то сомнительным), так как вся конструкция зависит от выбора ультрафильтра для построения модели (см. § 1.1). С другой стороны, нестандартная *практика* в высшей степени конструктивна; имея расширенный набор чисел, мы можем делать с ними явные вычисления. Характерным примером является теорема 1.5.1 о существовании решения. При стандартном подходе на последнем этапе доказательства приходится использовать теорему Асколи — Арцела, которая утверждает, что любая равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная последовательность функций на ограниченном промежутке  $I$  имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность. Эта часть рассуждений отсутствует в нестандартном доказательстве, что делает его более прямым. Так оно и есть, в следующем точном смысле. Можно так переделать нестандартное доказательство теоремы Пеано, что единственным его нерекурсивным элементом будет ослабленная лемма Кёнига, утверждающая, что любое бесконечное бинарное дерево, т. е. бесконечное дерево последовательностей из нулей и единиц, содержит бесконечную ветвь. А это утверждение доказуемо слабее, т. е. конструктивнее, чем теорема Асколи — Арцеля (Simpson [1]). С другой стороны, насыщенность (см. гл. 2) придает нестандартным вычислениям реальную силу, чем объясняются большие успехи нестандартных методов в стохастическом анализе и смежных областях (Henson, Kaufmann, Keisler [1]; Henson, Keisler [1]).

В той общности, в которой формулируется теорема 1.5.1, единственности решений нет. Но процедура, описанная в (1), дает какое-то одно решение. Можно ли, производя какую-либо «бесконечно малую» вариацию данных, получить все решения с помощью нестандартного разностного уравнения?

### 1.5.2. Пример. Уравнение

$$(6) \quad u' = 3u^{2/3}$$

с начальным условием  $u(0) = 0$  имеет для каждого  $a \in [0, 1]$  решение

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, & 0 \leq t < a, \\ u(t) &= (t - a)^3, & a \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Это семейство решений может быть также параметризовано значениями  $u(1) = r$ ,  $r \in [0, 1]$ ; точнее, каждому  $r \in [0, 1]$  отвечает единственное решение  $u$  уравнения (6), удовлетворяющее условиям  $u(0) = 0$  и  $u(1) = r$ . Мы покажем, как получить все эти

решения из разностного уравнения (1), т. е. из уравнения

$$(7) \quad v_{\lambda}(t_{i+1}) = v_{\lambda}(t_i) + (1/\lambda) \cdot 3v_{\lambda}(t_i)^{2/3},$$

где  $\lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , выбирая разные начальные условия  $v_{\lambda}(0) = \delta$ , где  $\delta$  — положительное бесконечно малое.

Наш подход использует нестандартное понятие непрерывности (называемое  $*$ -непрерывностью); более тщательно оно будет исследовано в § 2.1, так что наше изложение на данной стадии не является вполне замкнутым.

Пусть  $v_{\delta, \lambda}$  — единственное решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию  $v_{\delta, \lambda}(0) = \delta$ , и пусть  $u_{\delta}$  — соответствующее решение уравнения (6). Ясно, что  $u_0$  тождественно равно нулю и является решением, полученным в доказательстве теоремы 1.5.1.

Заметим, что для любого стандартного действительного  $\delta > 0$  уравнение (6) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию  $u(0) = \delta$ . Это решение является стандартной частью решения  $v_{\delta, \lambda}$ , полученного из (7). При этом  $v_{\delta, \lambda}(1) > 1$ . Поэтому *внутреннее* множество

$$\{\delta \in {}^*\mathbb{R} \mid \delta > 0 \wedge v_{\delta, \lambda}(1) > 1\}$$

содержит все положительные стандартные числа; следовательно, оно содержит и некоторое положительное бесконечно малое  $\delta_0 > 0$ .

Функция  $\varphi_{\lambda}(\tau) = v_{\tau, \lambda}(1)$  — внутренняя и непрерывная в смысле  $V({}^*\mathbb{R})^1$ . Мы знаем, что  $\varphi_{\lambda}(0) = 0$ , и  $\varphi_{\lambda}(\delta_0) > 1$ . Значит, для любого  $r \in {}^*[0, 1]$  найдется такое  $\delta \in [0, \delta_0] \subset {}^*\mathbb{R}$ , что  $\varphi_{\lambda}(\delta) = r$ , т. е. такое, что  $v_{\delta, \lambda}(1) = r$ . Поскольку  $u_{\delta}$  — это стандартная часть  $v_{\delta, \lambda}$ , мы заключаем, что *каждое* решение уравнения (6) с начальным значением  $u(0) = 0$  может быть получено как стандартная часть некоторого решения  $v_{\delta}$  уравнения (7), если выбрать подходящее бесконечно малое  $\delta$ .

Это наблюдение имеет также и вычислительное содержание. Мы можем проводить приближенное вычисление решения, отвечающего заданному значению  $a$ , выбирая начальное значение, так же зависящее от  $a$  и от длины шага, как  $\delta$  зависит от  $a$  и от  $n$ . Тот факт, что различные аппроксимации, длины шага и т. п.

<sup>1)</sup> Непрерывность функции  $\varphi$  в смысле  $V({}^*\mathbb{R})$  означает здесь, что  $\varphi \in {}^*C[0, 1]$ , где  $C[0, 1]$  — пространство функций, непрерывных на  $[0, 1]$ ; или иными словами,  $\varphi$  — внутренняя функция, и  $\forall \tau \in {}^*[0, 1] \quad \forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \quad \forall \tau' \in {}^*[0, 1] \quad |\tau - \tau'| < \delta \rightarrow |\varphi(\tau) - \varphi(\tau')| < \varepsilon$ . Это определение совпадает с определением  $*$ -непрерывности, см. 2.1.11. Включение  $\varphi \in {}^*C[0, 1]$  получается по принципу переноса из того, что  $\varphi_n \in C[0, 1]$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для функций из  ${}^*C[0, 1]$ , опять же по принципу переноса, справедлива теорема о промежуточном значении. — *Прим. перев.*



часто должны выбираться весьма специальным образом, если мы хотим продемонстрировать конкретное явление, разумеется, хорошо известен в численном анализе. Возможно, нестандартная теория и есть правильный способ изложения этих вопросов.

Приведенный пример заимствован из работы Birkeland, Normann [1]; там же читатель может найти более общее обсуждение. Мы упомянем еще несколько результатов этой работы.

Во-первых, если решения уравнения  $u' = f(t, u)$  *единственны влево* в том смысле, что если  $u_1$  и  $u_2$  — решения, и  $u_1(t) = u_2(t)$  для некоторого  $t \in (0, 1]$ , то  $u_1(s) = u_2(s)$  для всех  $s \in [0, t]$ , то тогда все решения  $u$  исходного уравнения с начальным условием  $u(0) = 0$  могут быть получены с помощью процедуры (1) путем подбора подходящего бесконечно малого  $\delta$  в начальном условии  $u_\lambda(0) = \delta$ .

В общем случае недостаточно возмущать только начальное условие, приходится возмущать все уравнение. Функцию  $g$  будем называть  $\delta$ -возмущением функции  $f$ , где  $\delta$  — некоторое бесконечно малое, если  $g$  — такая внутренняя, непрерывная в смысле  $V(\mathbb{R})$  функция, что  $\|f - g\|_\infty < \delta$ <sup>1)</sup>. Множество всех  $\delta$ -возмущений функции  $f$  обозначим  $X_\delta$ . Далее, пусть  $v_{g, \lambda}$  — единственное решение разностного уравнения (1), для которого  $v_\lambda(0) = 0$ , а функция  $f$  заменена ее  $\delta$ -возмущением  $g$ .

Теперь можно доказать, что для данного  $f$  найдется такое бесконечно малое  $\delta > 0$ , что если  $u$  есть решение уравнения  $u' = f(t, u)$  с начальным условием  $u(0) = 0$ , то  $u$  является стандартной частью  $v_{g, \lambda}$  для некоторого  $\delta$ -возмущения  $g$  функции  $f$ .

Наш заключительный пример происходит из изучения векторных полей, или динамических систем, вида

$$(8) \quad \dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y),$$

где  $\varepsilon$  — «малый» параметр. Здесь  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — функции «времени»  $t$ , а  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  означают производные по времени.

Мы интересуемся поведением решений при малых  $\varepsilon$ . Стандартный подход состоит в использовании асимптотических разложений по степеням  $\varepsilon$ . Это часто ведет к громоздким вычислениям (см. § 2.6 книги Cole [1]), в особенности когда  $f$  и  $g$  зависят еще от некоторых дополнительных параметров. В рамках нестандартного подхода мы можем использовать фиксированное бесконечно малое  $\varepsilon$  вместо стандартной, но переменной величины.

**1.5.3. Замечание.** Работа, которую мы излагаем, была выполнена группой французских математиков: см. диссертации Callot [1], F. Diener [1], M. Diener [1]. Для более полной информации

<sup>1)</sup> Здесь  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ . — Прим. ред.

читатель может обратиться к обзорам: Benoit и др. [1]; Cartier [2]; Звонкин, Шубин [1].

Начнем с некоторых общих замечаний о системе (8). Для простоты предположим, что  $f$  и  $g$  — гладкие стандартные функции, а  $\varepsilon$  — фиксированная бесконечно малая постоянная<sup>1)</sup>.

В тех околостандартных<sup>2)</sup> точках  $(x, y) \in {}^*\mathbb{R}^2$ , в которых  $g(x, y)/\varepsilon$  бесконечно велико, траектории системы (8) «квазипараллельны» оси  $y$ ; это значит, что их стандартная часть параллельна ей. В таких точках «скорость»  $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ , с которой траектория движется по плоскости, бесконечно велика; поэтому такие точки называются *быстрыми точками*.

Остальные околостандартные точки — это *медленные точки*; в них траектории могут иметь другие направления, а скорость конечна; все они лежат вблизи множества  $S = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ , которое называется *медленным многообразием*.

Ориентация векторного поля в быстрой точке определяется знаком функции  $g$ , в то время как направление в точке медленного многообразия определяется знаком функции  $f$  в этой точке.

В частности, вблизи тех участков медленного многообразия  $S$ , где частная производная  $g_y(x, y)$  отрицательна, все быстрые траектории приближаются к  $S$ , в то время как вблизи тех участков, где  $g_y(x, y)$  положительна, они все удаляются от  $S$ . Мы говорим в этих случаях об *устойчивых* (притягивающих) и *неустойчивых* (отталкивающих) участках кривой  $S$ .

Мы не будем здесь развивать общую теорию (см. ссылки в замечании 1.5.3), а продемонстрируем довольно сложное поведение траекторий в простом, хотя и типичном примере.

**1.5.4. Пример.** Наша система будет получена из уравнения Ван-дер-Поля вида

$$(9) \quad \varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x - a = 0,$$

где  $a$  — параметр,  $\varepsilon \approx 0$ . Из соображений симметрии мы можем считать, что  $a > 0$  и  $\varepsilon > 0$ .

Есть много способов преобразования этого уравнения в систему вида (8); нам представляется удобным вначале сделать замену переменных, принадлежащую Лъенару:  $u = F(x) + \varepsilon \dot{x}$ , где  $F(x) = x^3/3 - x$ . Эта замена приводит к векторному полю

$$(10) \quad U_a: \begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= u - F(x), \\ \dot{u} &= a - x. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Смысл системы (8) в этой ситуации детально разъяснен в работе Звонкина и Шубина [1]. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Околостандартными называются точки, бесконечно близкие к некоторой стандартной точке  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ : см. определение в п. 2.1.6. В  ${}^*\mathbb{R}^n$  понятие околостандартности совпадает с понятием конечности. — *Прим. перев.*

(Отметим, что использование переменных в (10) не совсем согласовано с формулой (8): теперь быстрые траектории будут квазипараллельны оси  $x$ .)

Мы напомним следующие факты классической теории, касающиеся стандартных  $x$ ,  $u$ ,  $a$ ,  $\varepsilon$  — см., например, книгу LaSalle, Lefschetz [1]. Единственная стационарная точка (или точка равновесия) — это  $(a, F(a))$ . Если  $a > 1$ , она устойчива и все траектории сходятся к ней при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $a < 1$ , она неустойчива, но при малых  $\varepsilon$  имеется устойчивый предельный цикл, обходящий точку равновесия, и все траектории стремятся к нему при  $t \rightarrow \infty$ . Когда  $a$ , возрастая, стремится к 1, предельный цикл непрерывно сжимается к стационарной точке.

По принципу переноса это описание применимо также и в нестандартной ситуации, когда  $\varepsilon$  выбрано бесконечно малым. Но в этом случае можно сказать больше. Для краткости мы ограничим наше обсуждение случаем  $a < 1$ .

Медленное многообразие  $S_u$  системы  $U_a$  из (10) — это кубическая кривая  $u = F(x)$ ; оно устойчиво в тех точках, где  $|x| > 1$ , и неустойчиво в тех точках, где  $|x| < 1$ . Траектории, проходящие через околостандартные точки  $(x, u)$ , квазипараллельны оси  $x$  везде кроме тех точек, где число  $(u - F(x))/\varepsilon$  конечно, и ориентированы в сторону убывания или возрастания  $x$  в зависимости от знака  $u - F(x)$ . Поэтому стандартная часть любой траектории должна быть объединением отрезков прямых, параллельных оси  $x$ , и отрезков медленного многообразия. В частности, единственные возможные формы предельного цикла — те, которые показаны на рис. 1.3а—с.

Соображения непрерывности (вытекающие по принципу переноса из стандартной теории, либо примененные непосредственно к данной нестандартной ситуации, как это сделано в работе Benoit и др. [1]) показывают, что все три формы цикла должны реализоваться. Ясно также, что случаи рис. 1.3b, c могут возникнуть только если  $1 - a$  бесконечно мало. Причина проста: если  $a$  лежит не на бесконечно малом расстоянии от 1 и траектория проходит бесконечно близко от точки  $(1, -2/3)$  на медленном многообразии, то точка с абсциссой  $x = a$  на этой траектории находится на не бесконечно малом расстоянии от медленного многообразия, поскольку  $\dot{u} < 0$  при  $x > a$ ; это значит, что мы находимся в ситуации рис. 1.3а.

Нас будут интересовать ситуации, показанные на рис. 1.3b, c, когда траектория вначале следует бесконечно близко к устойчивой, а затем бесконечно близко к неустойчивой части медленного многообразия, причем оба раза проходит не бесконечно малые расстояния.

Численные эксперименты (см. Benoit и др. [1]) продемонстрировали неожиданное явление: переход от цикла, имеющего

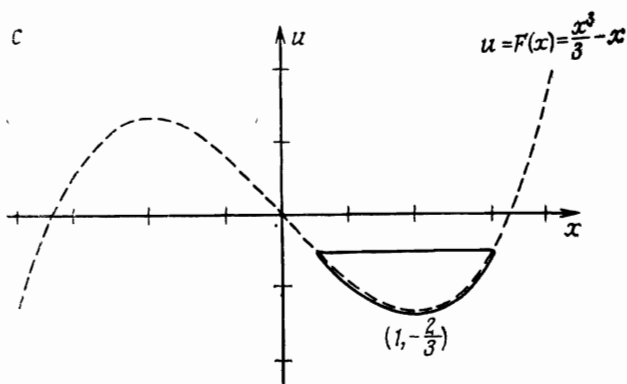
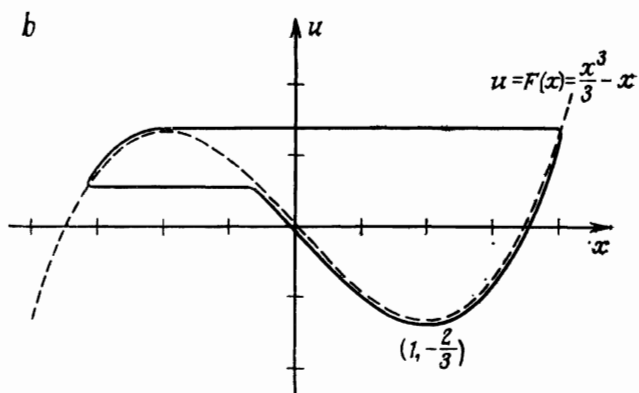
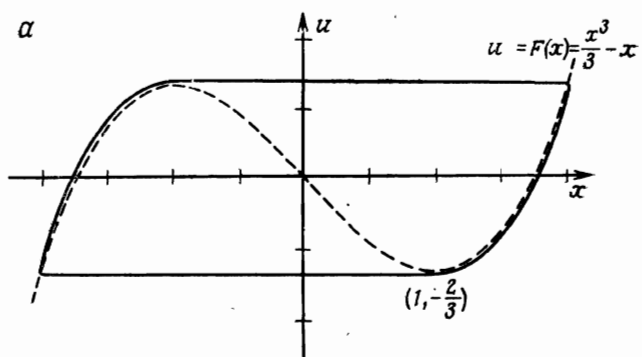


РИС. 1.3.

форму рис. 1.3а, к «бесконечно малому» циклу вида 1.3с происходит чрезвычайно резко, причем при значениях  $a$ , сравнительно сильно отличающихся от  $a = 1$ ; при  $\varepsilon = 1/100$  всё происходит на расстоянии не более  $2 \cdot 10^{-10}$  от значения  $a = 0.9987404512$ .

Таким образом, мы должны ожидать некоторых арифметических ограничений на значение  $a$  для того, чтобы появлялось то, что согласно следующему определению называется «уткой».

**1.5.5. Определение.** Уткой векторного поля  $U_a$  называется отрезок траектории, проходящий бесконечно близко от медленного многообразия, вначале вдоль устойчивой его части, а затем вдоль неустойчивой, причем оба раза проходится не бесконечно малое расстояние.

Термин «утка» мотивирован общей формой цикла на рис. 1.3b; см. Veroyt и др. [1]. Примерами уток являются, конечно, отрезки предельных циклов рис. 1.3b, c, лежащие вблизи точки  $(1, -2/3)$ .

Теперь возникает вопрос: для каких значений  $a$  векторное поле  $U_a$  имеет утки? Напомним, что сейчас  $\varepsilon$  — положительное бесконечно малое и  $a$  должно быть бесконечно близко к 1.

Чтобы ответить на этот вопрос, «увеличим» ближайшую окрестность медленного многообразия  $u = F(x)$  с помощью замены  $y = (u - F(x))/\varepsilon$ . При этом векторное поле  $U_a$  преобразуется в поле

$$(11) \quad Y_a: \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \varepsilon \dot{y} &= a - x - (x^2 - 1)y. \end{aligned}$$

Это типичный пример доступных нам в нестандартной ситуации рассуждений типа «замены масштаба». Медленное многообразие на плоскости  $(x, u)$  переходит в ось  $x$  на плоскости  $(x, y)$ , а конечная часть плоскости  $(x, y)$  отвечает бесконечно тонкой полоске вокруг медленного многообразия на плоскости  $(x, u)$ . (См. рис. 1.4). Произведенная замена масштаба позволит нам дать ответ на поставленный выше вопрос.

Заметим, что поле  $Y_a$  имеет вид (8) — его быстрые траектории квазипараллельны оси  $y$ . Медленное многообразие  $S_y$  определяется уравнением  $(x^2 - 1)y = a - x$ ; оно устойчиво при  $|x| > 1$  и неустойчиво при  $|x| < 1$ . Заметим также, что если  $a \approx 1$ , то стандартная часть  $H$  многообразия  $S_y$  есть объединение прямой  $x = 1$  и гиперболы  $y = -1/(x + 1)$ .

**1.5.6. Замечание.** Отметим, что уравнение (11) дает обычное представление уравнения Ван-дер-Поля (9) на «фазовой плоскости». Мы предпочли начать с представления Лъенара (10) ввиду того, что быстрые траектории уравнения (11) «уходят на бесконечность».

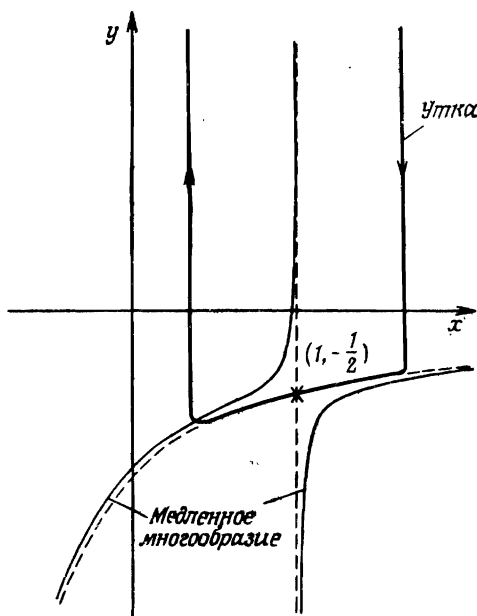


РИС. 1.4.

Прежде чем начать вычисления, обсудим еще один момент. Имеется что-то вроде «переходной зоны», состоящей из точек  $(x, u)$  на плоскости Льенара, для которых  $u - F(x)$  бесконечно мало, но  $(u - F(x))/\varepsilon$  бесконечно велико. Эти точки являются быстрыми на плоскости Льенара, но при этом они бесконечно близки к медленному многообразию; в то же время на фазовой плоскости они лежат бесконечно далеко от оси  $x$ . Мы должны показать, что траектории пересекают эту зону «приличным» образом.

Рассмотрим, например, траекторию, проходящую через около-стандартную точку  $(x_0, y_0)$  на фазовой плоскости, где  $x_0 > 1$ ,  $y_0 > 0$ . Она квазипараллельна оси  $y$  и потому может быть описана как график функции  $x = \gamma(y)$ , определенной по крайней мере для всех конечных  $y \geq y_0$ . Но область ее определения — внутреннее множество, и потому она содержит некоторое бесконечно большое  $y_1 > y_0$ . Для всех конечных  $y$  мы имеем  $\gamma(y) \approx x_0$ , отсюда по лемме Робинсона  $\gamma(y) \approx x_0$  на некотором отрезке  $y_0 \leq y \leq y_2$ , где  $y_2 \leq y_1$  и  $y_2$  бесконечно велико.

Точка  $(\gamma(y_2), y_2)$  соответствует точке  $(x_2, u_2)$  на плоскости Льенара, в которой  $(y_2 - F(x_2))/\varepsilon$  бесконечно велико, т. е. точке на быстром участке траектории, который квазипараллелен оси  $x$ . Короче, соответствие между траекториями на двух координатных

плоскостях настолько хорошо, насколько вообще можно было надеяться.

Пусть теперь  $\gamma: t \mapsto \gamma(t) = (x(t), u(t))$ ,  $t_1 < t < t_2$  — утка векторного поля  $U_a$ ; это означает, что  $\gamma$  — траектория поля  $U_a$ ,  ${}^0x(t_1) > 1 > {}^0x(t_2)$ , и  $u(t) - F(x(t)) \approx 0$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ . На самом деле можно показать, что  $(u(t) - F(x(t)))/\varepsilon$  конечно при этих  $t$ <sup>1)</sup>.

Наша замена масштаба переводит  $\gamma$  в траекторию  $\tilde{\gamma}$  «увеличенного» поля  $Y_a$ . Поскольку координата  $x$  траектории  $\tilde{\gamma}$  та же, что и для  $\gamma$ , то  $\tilde{\gamma}$  также проектируется в не бесконечно малый отрезок  $[x(t_2), x(t_1)]$  оси  $x$ , причем точка  $\tilde{\gamma}(t)$  конечна для всех  $t \in [t_1, t_2]$ . Но это возможно только тогда, когда  $\tilde{\gamma}(t)$  бесконечно близка к медленному многообразию  $S_y$  по крайней мере для тех  $t$ , для которых  ${}^0t_1 < {}^0t < {}^0t_2$ , т. е. если  $\tilde{\gamma}$  снова является уткой (см. рис. 1.4).

Для каких значений  $a$  существуют утки? Эвристически мы можем рассуждать следующим образом: наклон векторного поля  $Y_a$  в точке  $P = (1, -1/2)$  равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{a-x}{y} - (x^2 - 1) \right) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1/2}} = \frac{2(1-a)}{\varepsilon}.$$

Гипербола  $H$  в той же точке имеет наклон  $1/4$ . Если утка существует, она должна быть квазипараллельна  $H$ ; поэтому мы должны ожидать, что  $2(1-a)/\varepsilon - 1/4 \approx 0$ , или

$$(12) \quad a = 1 - \varepsilon/8 - \varepsilon\eta$$

для некоторого  $\eta \approx 0$ .

Этот результат в самом деле верен, но он нуждается в доказательстве. Один из путей — рассмотреть поведение поля  $Y_a$  на некоторой подходящей прямой  $l$ , которая проходит через точку  $P$  и имеет наклон, промежуточный между наклонами  $H$  и  $Y_a$  в точке  $P$ ; тогда можно показать, что если  $a$  не удовлетворяет условию (12), то все траектории — утки пересекают  $l$  в неправильном направлении.

Удобно параметризовать прямую  $l$  формулами  $x = 1 + \tau$ ,  $y = -\frac{1}{2} + \theta\tau = -\frac{1}{2}(1 - 2\theta\tau)$  и обозначить  $\alpha = 2(1-a)/\varepsilon$ . Тогда в точках прямой  $l$  имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - \varepsilon^{-1}\tau^2(1 - 2\theta\tau - 4\theta)}{1 - 2\theta\tau}.$$

<sup>1)</sup> В силу неизбежной краткости изложения авторы в этом параграфе иногда пропускают доказательства далеко не очевидных утверждений. Более детальное изложение, см., например, в статье Звонкин, Шубин [1]. — Прим. перев.

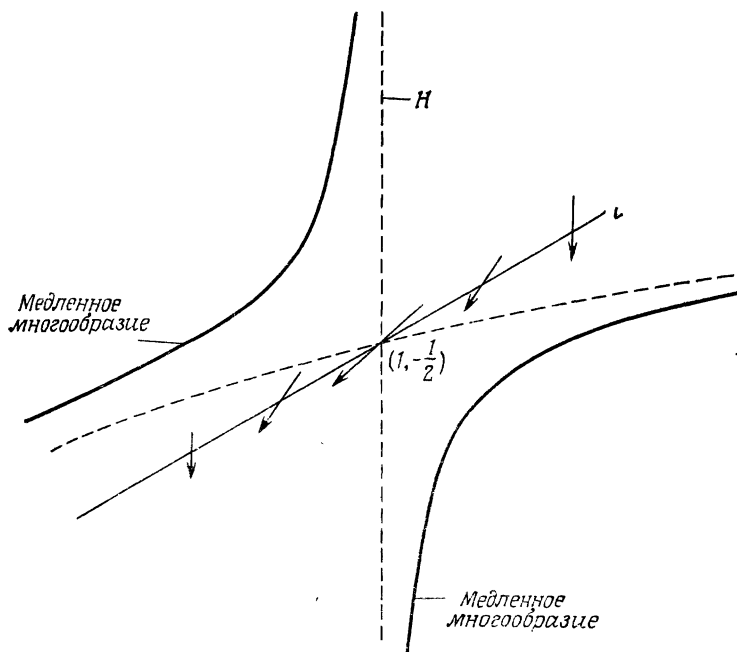


РИС. 1.5.

Допустим теперь, что  $\alpha$  конечно и  $^\circ\alpha > 1/4$ ; случай  $^\circ\alpha < 1/4$  аналогичен, а случай бесконечно большого  $\alpha$  еще проще, так что мы опустим рассмотрение этих случаев. Выберем  $\theta \leq 1/2$  таким образом, чтобы выполнялись неравенства  $^\circ\alpha > ^\circ\theta > 1/4$ , и заметим, что при таком выборе  $dy/dx > 0$  в некоторой стандартной окрестности  $|\tau| \leq \delta$  точки  $P$  на  $l$  (см. рис. 1.5). Отсюда следует, что все траектории поля  $Y_a$  пересекают этот отрезок прямой сверху вниз. Если при данном  $\alpha = 2(1-a)/\varepsilon$  рассматриваемая траектория является уткой, она вынуждена «войти» в нашу картинку в точке  $(1+\tau, y)$ , где  $y > -1/2 + \theta\tau$ . После этого она должна была бы через некоторое время пересечь прямую  $l$  снизу вверх. Однако на отрезке  $|\tau| \leq \delta$  это невозможно, а поскольку концы этого отрезка лежат в быстрой части плоскости, мы видим, что при выбранном значении  $a$  уток быть не может. Значит,  $a$  должно иметь вид (12).

Мы уже отмечали выше, что утка  $\gamma$  поля  $U_a$  остается уткой  $\tilde{\gamma}$  и для поля  $Y_a$ . Этот процесс замен масштаба можно повторять, что в результате приводит к выводу, что значения параметра  $a$ , допускающие утки, имеют вид

$$(13) \quad a = \sum_{j=0}^N a_j \varepsilon^j + \varepsilon^N \eta, \quad \eta \approx 0$$



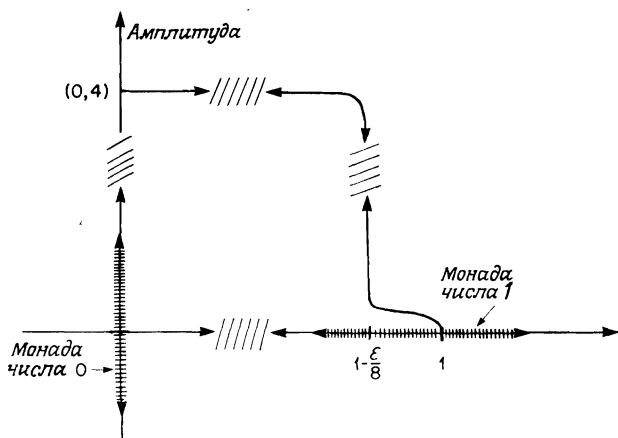


РИС. 1.6.

для любого стандартного натурального  $N$ . Здесь  $a_j$  — стандартные действительные числа, не зависящие от  $a$  и  $\varepsilon$ ; заметим, что  $a_0 = \text{st}(a) = 1$ ,  $a_1 = -1/8$ . Отсюда видно, что все значения  $a$ , для которых утки существуют, лежат на чрезвычайно узком интервале; читателю предлагается вспомнить упоминавшиеся выше численные эксперименты.

**1.5.7. Замечание.** Назовем длину проекции предельного цикла на ось  $x$  его *амплитудой*. В связи с представлением уравнения (9) на плоскости Лъенара (см. рис. 1.3) мы уже отмечали, что переход от цикла вида рис. 1.3а к бесконечно малому циклу вида 1.3с происходит очень резко. Этот факт проиллюстрирован на рис. 1.6. Амплитуда в случае рис. 1.3а равна 4. Вблизи значения 1 амплитуда бесконечно мала. В районе точки 1 —  $\varepsilon/8$  кривая идет чрезвычайно круто; это область значений  $a$ , где возникают утки. Заметим, что наша картинка нестандартна: в стандартной ситуации мы имели бы разрыв.

Как уже отмечалось, линейные замены масштабов с помощью множителей  $\varepsilon^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , недостаточны для разделения разных медленных траекторий. Более сильное увеличение дается функцией

$$\tau \mapsto \tau^{[\varepsilon]} = |\tau|^\varepsilon \operatorname{sgn}(\tau),$$

т. е. нечетной функцией, равной  $\tau^\varepsilon$  при  $\tau > 0$ . Заметим, что  $|\tau^{[\varepsilon]}| \approx 1$  в том случае, когда  ${}^\circ|\tau|$  конечно и не бесконечно мало, и даже тогда, когда  $\varepsilon^n < |\tau| < \varepsilon^{n-1}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  (поскольку  $\varepsilon \ln \varepsilon \approx 0$  при  $\varepsilon \approx 0$ ). Если же  $0 < {}^\circ|\tau^{[\varepsilon]}| < 1$ , то  $\tau$  имеет вид  $\tau = \exp(-k/\varepsilon)$ , где  ${}^\circ k$  конечно и положительно.

Возвращаясь к полю  $U_a$ , мы, начиная с этого момента, будем рассматривать только какое-то одно конкретное значение параметра  $a$ , для которого предельный цикл следует вдоль медленного многообразия  $S_u$  весь путь от  $x=1$  до  $x=-1$ , т. е. пограничный случай между рис. 1.3b и рис. 1.3c. Этот предельный цикл является уткой при  $-1 \leq x \leq 2$ , и мы представим эту утку в виде графика функции  $y = \gamma(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ , на фазовой плоскости рис. 1.4.

Замена масштаба

$$w = (y - \gamma(x))^{[e]}$$

ведет к новому векторному полю

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \gamma(x) + w^{[1/e]}, \\ W_a: \quad \dot{w} &= \frac{(x-a)w}{\gamma(x)}, \end{aligned}$$

которое в области  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $^0|w| < 1$  можно рассматривать как бесконечно малое возмущение системы

$$(15) \quad \begin{aligned} \tilde{W}: \quad \dot{x} &= -1/(x+1), \\ \dot{w} &= (1-x^2)w. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно заметить, что  $^0\gamma(x) = -1/(x+1)$  и что  $w^{[1/e]} \approx 0$  при  $^0|w| < 1$ . Система (15) легко интегрируется: ее фазовые кривые имеют вид

$$(16) \quad w(x) = c \cdot \exp(\varphi(x)),$$

где  $c$  — постоянная, а  $\varphi(x) = x^4/4 + x^3/3 - x^2/2 - x$ . Некоторые из этих кривых показаны на рис. 1.7.

Важная особенность функции  $\varphi$  состоит в том, что она имеет минимум в точке  $x=1$ , а при удалении  $x$  от этой точки монотонно возрастает. Поэтому можно следующим образом определить отображение  $\psi$ :  $\psi(1)=1$ , а если  $x \neq 1$ , то  $\psi(x)$  — это единственное число, для которого  $\psi(x) \neq x$  и  $\varphi(\psi(x)) = \varphi(x)$ . Для наших целей нужны только  $x$  и  $\psi(x)$ , лежащие оба на отрезке  $[-1, 2]$ , поэтому мы будем считать, что  $\psi(x)$  определено только при  $-1 \leq x \leq \psi(-1) = 5/3$ .

**1.5.8. Замечание.** Можно доказать (см. Benoît и др. [1])<sup>1)</sup>, что в рассматриваемой нами области траектории поля  $W_a$  лежат бесконечно близко к траекториям поля  $\tilde{W}$ .

Далее, аналогично уже приводившимся рассуждениям можно показать, что траектория  $w(x)$ , достигающая 1 (или  $-1$ ) при некотором  $x = \xi$ ,  $^0\xi \in (-1, 2)$ , вновь становится быстрой траек-

<sup>1)</sup> Или Звонкин, Шубин [1]. — Прим. ред.

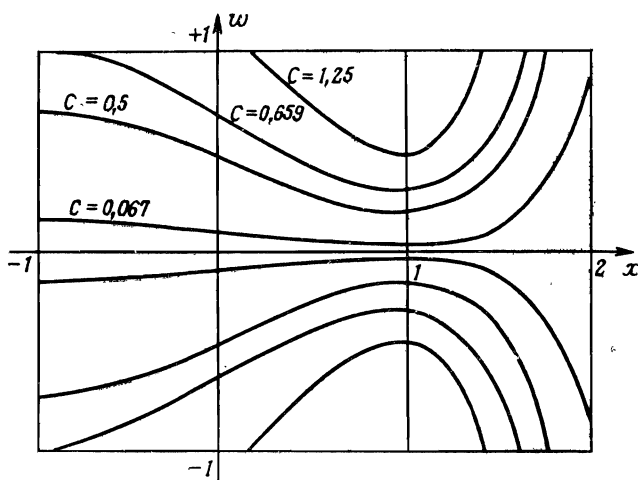


РИС. 1.7.

торией как на фазовой плоскости, так и на плоскости Лъенара в точках, абсциссы которых имеют ту же стандартную часть  $^{\circ}\xi$ .

Теперь мы в состоянии детально описать стандартные части траекторий на плоскости Лъенара. Пусть траектория выходит из стандартной точки  $Q$ , лежащей вне медленного многообразия  $S_u$ . Траектория в этой точке квазигоризонтальна, причем она движется вправо, если точка  $Q$  расположена выше  $S_u$ , и влево, если  $Q$  ниже  $S_u$ . Затем она встречается с  $S_u$  в монаде некоторой стандартной точки  $(\xi, F(\xi))$ ,  $|\xi| > 1$ , и после этого следует вдоль  $S_u$  в направлении уменьшения  $|x|$ . Имеются три возможности:

(i) Если  $1 < \xi < \frac{5}{3}$ , то  $\gamma$  появляется на плоскости  $(x, w)$  в виде кривой  $w(x) = c \cdot \exp(\varphi(x))$ , причем  $w(\xi) = 1$ , если  $Q$  лежало выше  $S_u$ , и  $w(\xi) = -1$ , если  $Q$  лежало ниже  $S_u$ . Поскольку  $\psi(\xi) > -1$  при  $1 < \xi < \frac{5}{3}$ , наша траектория будет уткой на плоскости Лъенара для значений  $x$ , лежащих в пределах  $\psi(\xi) < x < \xi$ ; затем траектория покидает  $S_u$  в ту же сторону, с какой она пришла.

(ii) Если  $\frac{5}{3} < \xi$ , то  $\gamma$  появляется на плоскости  $(x, w)$  в виде кривой  $w(x) = c \cdot \exp(\varphi(x))$ , причем  $|w(x)| < 1$  для всех  $x$  из интервала  $-1 < x < \min(\xi, 2)$ . На плоскости Лъенара это соответствует утке, проходящей весь путь вдоль  $S_u$  вплоть до точки  $(-1, 2/3)$ , где она покидает  $S_u$  и, проходя выше кривой  $S_u$ , вновь встречается с ней вблизи точки  $(2, 2/3)$ .

(iii) Если  $\xi < -1$ , то  $\gamma$  следует вдоль  $S_u$  на плоскости Лье-нара вплоть до точки  $(-1, 2/3)$ , где она покидает  $S_u$  и вновь встречается с ней вблизи точки  $(2, 2/3)$ .

**1.5.9. Замечание.** Видно, что если точка  $Q = (x, u)$  лежит в области  $F(x) < u < F(5/3) = -10/81$ ,  $x > 0$ , то проходящая через нее траектория претерпевает одно или несколько «малых» колебаний типа (i) прежде чем она «войдет» в предельный цикл.

Итак, мы имеем полное описание поведения траекторий для данного конкретного значения  $a$ . Аналогичные результаты справедливы и для других значений  $a$ , допускающих утки (см. Venoit и др. [1]). Интересно отметить, что численные расчеты с конечным  $\varepsilon$ , например, с  $\varepsilon = 0.05$ , дают прекрасное согласие с описанием (i) — (iii).

Мы столь подробно рассмотрели этот пример потому, что он в простой ситуации демонстрирует богатство тех рассуждений, связанных с *заменой масштаба*, которые становятся доступными благодаря нестандартному анализу. Эта тема будет постоянно возникать в нашей книге.

## Топология и линейные пространства

В этой главе в качестве вводного примера мощной нестандартной техники, которую мы будем использовать много раз во второй части этой книги, мы докажем спектральную теорему для компактных эрмитовых операторов. Но сначала нам необходимо напомнить несколько основных фактов о топологии и о линейных операторах в нормированных пространствах. Кроме того, в добавление к принципам расширения и переноса мы введем один новый принцип нестандартной теории — принцип *насыщения*.

## 2.1. Топология и насыщение

Развитая до сих пор нестандартная теория основывалась на двух принципах: принципе расширения 1.2.2 и принципе переноса 1.2.4; см. также 1.2.11. Сейчас нам потребуется добавить новый принцип.

Будем говорить, что семейство  $\mathcal{F}$  подмножеств некоторого множества  $E$  имеет *непустые конечные пересечения*, или обладает *свойством непустоты конечных пересечений*, если  $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$  для любого *конечного* набора элементов  $X_1, \dots, X_n$  семейства  $\mathcal{F}$ . Как мы уже замечали в связи с формулой (2) § 1.1, фильтр как семейство множеств обладает этим свойством.

Вытекает ли из этого свойства, что все множества, входящие в данное семейство, имеют непустое пересечение? Не обязательно; именно этот дефект и является основным побудительным мотивом для построения разнообразных пополнений и компактификаций: он отражает потребность в добавлении «предельных точек» к некоторым семействам с непустыми конечными пересечениями, например, к фильтрам Коши<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> *Фильтром Коши* в топологическом векторном пространстве  $E$  называется такой фильтр  $\mathcal{F}$  в  $E$ , что для любой окрестности  $\mathcal{U}$  нуля в  $E$  найдется такое  $A \in \mathcal{F}$ , что множество  $\{x - y | x, y \in A\}$  содержится в  $\mathcal{U}$ . Одна из возможных конструкций пополнения сопоставляет каждому фильтру Коши точку пополнения пространства  $E$ . — *Прим. ред.*

**2.1.1. Пример.** Пусть  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность рациональных чисел, т. е.  $a_n \in \mathbb{Q}$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что  $|a_{k_\varepsilon} - a_m| < \varepsilon$  для всех  $m \geq k_\varepsilon$ . Значит, множество  $A_\varepsilon = \{a \in \mathbb{Q} \mid |a - a_m| < \varepsilon \text{ для всех } m \geq k_\varepsilon\}$  является непустым подмножеством множества  $\mathbb{Q}$ . Семейство  $\mathcal{F} = \{A_\varepsilon\}$  имеет непустые конечные пересечения, но пересечение  $\bigcap A_\varepsilon$  всех множеств семейства  $\mathcal{F}$  не обязательно непусто; заметим, что  $a \in \bigcap A_\varepsilon$  тогда и только тогда, когда  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Пополнение  $\mathbb{R}$  множества  $\mathbb{Q}$  вводится как раз для того, чтобы добавить предельные точки семейств  $\mathcal{F}$  указанного вида.

Мы будем рассматривать вложения  $*$ :  $V(\mathbb{R}) \rightarrow V(*\mathbb{R})$ , обладающие определенным свойством насыщенности, дающим единый способ добавления предельных точек к семействам множеств, обладающих свойством непустоты конечных пересечений. Для начала проверим следующий счетный вариант этого свойства для введенной в § 1.2 модели ограниченных ультрастепеней.

**2.1.2. Принцип счетного насыщения.** Если  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  — счетная убывающая цепь непустых внутренних множеств, то

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Каждое множество  $A_n$  — внутреннее, и потому имеет вид  $A_n = j(A'_n)$ , где  $A'_n = (A_1^n, A_2^n, \dots)_{\mathcal{U}}$ ; см. конструкцию модели ограниченных ультрастепеней и описание внутренних множеств в этой модели в § 1.2. Мы можем предположить, что  $A_i^n \subset V_k(\mathbb{R})$  для некоторого фиксированного  $k > 1$  и при всех  $i, n$ . Для удобства добавим постоянную последовательность  $A'_0 = (V_k(\mathbb{R}), \dots)_{\mathcal{U}}$ . Определим для  $m \geq 0$

$$I_m = \{i \geq m \mid A_i^0 \supset A_i^1 \supset \dots \supset A_i^m \neq \emptyset\}.$$

Мы видим, что (i)  $I_0 = \mathbb{N}$ ; (ii)  $I_m \in \mathcal{U}$ ,  $I_m \supset I_{m+1}$  для всех  $m \geq 0$ ; и (iii)  $\bigcap I_m = \emptyset$ <sup>1)</sup>.

Для каждого  $i \in \mathbb{N}$  пусть

$$m(i) = \max\{m \mid i \in I_m\}.$$

Поскольку  $I_0 = \mathbb{N}$  и  $\bigcap I_m = \emptyset$ , число  $m(i)$  корректно определено. Для каждого  $i$  выберем некоторый элемент  $B_i \in A_i^{m(i)}$ .

<sup>1)</sup> Для доказательства (ii) надо использовать тот легко проверяемый факт, что если  $A' = (A_1, A_2, \dots)_{\mathcal{U}}$ ,  $B' = (B_1, B_2, \dots)_{\mathcal{U}}$ , то включение  $A' \subset B'$  равносильно тому, что  $\{i \mid A_i \subset B_i\} \in \mathcal{U}$ . — Прим. ред.

Покажем, что  $B = (B_1, B_2, \dots)_{\mathcal{U}} \in_{\mathcal{U}} A'_m$  для всех  $m \geq 0$ , т. е. что  $\{i \in \mathbb{N} \mid B_i \in A_i^m\} \in \mathcal{U}$  (откуда с помощью отображения  $j$  получаем утверждение 2.1.2 для рассматриваемой модели). Но для этого достаточно показать, что  $I_m \subset \{i \in \mathbb{N} \mid B_i \in A_i^m\}$ . Последнее, однако, очевидно, поскольку из включения  $i \in I_m$  вытекает, что  $m(i) \geq m$ .  $\square$

Насыщенность является очень важным принципом равномерности; она лежит в основе многих математических рассуждений, а именно, тех, где осуществляется переход от кванторной структуры  $\forall \exists$  (выражающей «локальное» свойство, связанное с конечными пересечениями) к структуре вида  $\exists \forall$  (выражающей «глобальное», или равномерное свойство); этот переход составляет самую суть многих рассуждений конечности, компактности, равномерной ограниченности.

В качестве первого применения принципа насыщения 2.1.2 докажем следующий полезный принцип продолжения. Мы знаем из принципа переноса, что любая стандартная последовательность  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  имеет каноническое продолжение  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ . А что произойдет, если нам дана счетная последовательность  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  в  $V({}^*\mathbb{R})$ ?

**2.1.3. Предложение.** *Любая ограниченная счетная последовательность  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  внутренних множеств из  $V({}^*\mathbb{R})$  может быть продолжена до внутренней последовательности  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  в  $V({}^*\mathbb{R})$ .*

Заметим, что объект  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  является *внешним* в  $V({}^*\mathbb{R})$ , даже если каждый элемент  $A_n$  последовательности будет внутренним. Поэтому перенос ничем помочь не может. Но насыщение дает то, что надо: определим для каждого  $n \in \mathbb{N}$  множество  $B_n$  следующим образом:

$$f \in B_n \Leftrightarrow \text{dom } f = {}^*\mathbb{N} \wedge \forall i \leq n \ (f(i) = A_i).$$

Каждое множество  $B_n$  — внутреннее. Значит, каждая последовательность  $f \in B_n$  — внутренняя. По принципу насыщения 2.1.2 мы видим, что  $\bigcap B_n \neq \emptyset$ . Любая последовательность  $f$ , лежащая в этом пересечении, может служить искомым продолжением заданной последовательности.  $\square$

Прежде чем переходить к топологии, сформулируем общее свойство насыщенности. Если наше основное пространство удовлетворяет некоторому условию счетности — например, является сепарабельным метрическим пространством — нам будет достаточно счетной насыщенности. Для общих топологических пространств нужно больше.

**2.1.4. Общий принцип насыщения.** (1) Пусть  $\kappa$  — бесконечное кардинальное число. Нестандартное расширение называется  $\kappa$ -насыщенным, если для любого семейства внутренних множеств  $\{X_i\}_{i \in I}$ ,  $\text{card } I < \kappa$ , обладающего свойством непустоты конечных пересечений, пересечение  $\bigcap_{i \in I} X_i$  не пусто, т. е. содержит некоторый внутренний объект.

(2) Вложение  $*$ :  $V(S) \rightarrow V(*S)$  называется *насыщенным*, если расширение  $V(*S)$  является  $\text{card}(*S)$ -насыщенным. Это вложение называется *полинасыщенным*, если оно  $\text{card}(V(S))$ -насыщено.

Сделаем несколько замечаний. Если  $\kappa = \omega_1$ , где  $\omega_1$  — первый несчетный кардинал, то  $\kappa$ -насыщенность означает выполнение принципа счетного насыщения 2.1.2. Мы к тому же доказали, что  $\omega_1$ -насыщенные модели существуют — а именно, модель ограниченных ультрастепеней из § 1.2 является  $\omega_1$ -насыщенной. Заметим также, что если выбрать мощность множества  $*S$  достаточно большой, то из насыщенности следует полинасыщенность; поэтому мы будем использовать термин «общий принцип насыщения» применительно к любому из понятий части (2) определения 2.1.4. За доказательством существования насыщенных моделей мы отсылаем читателя к книге Chang, Keisler [1]<sup>1)</sup>.

**2.1.5. Замечание.** Для тех читателей, которым не по себе из-за неединственности расширения  $*R$ , упомянем следующую теорему единственности для вложений суперструктур: существует единственное с точностью до изоморфизма вложение суперструктур  $*$ :  $V(R) \rightarrow V(*R)$ , для которого: (i) вложение  $*$  удовлетворяет принципу переноса 1.2.4; (ii) вложение  $*$  насыщено в смысле 2.1.4(2); (iii)  $*R$  и множество всех внутренних множеств имеют мощность, равную первому несчетному недостижимому кардиналу (см. прекрасное обсуждение в книге Keisler [1]).

Теперь перейдем к топологии. Будем считать, что топология на пространстве  $E$  задается семейством  $\mathcal{O}$  открытых множеств. Для  $x \in E$  пусть  $\mathcal{O}_x$  — семейство открытых множеств, содержащих  $x$ . Введем монаду  $\mu(x)$  точки  $x \in E$  с помощью равенства

$$(1) \quad \mu(x) = \bigcap \{ *O \mid O \in \mathcal{O}_x \}.$$

<sup>1)</sup> Для построения таких моделей вместо ультрафильтра на множестве  $N$  (как в §§ 1.1—1.2) берется ультрафильтр на множестве  $\Omega$  гораздо более высокой мощности; при этом  $*X$  определяется как множество классов эквивалентности функций  $\xi: \Omega \rightarrow X$ ,  $X \in V(S)$ . — *Прим. перев.*



Читатель сразу увидит, что это определение обобщает определение 1.1.2. Более того, и результаты предложения 1.1.2 обобщаются следующим образом.

**2.1.6. Предложение.** Пусть  $E$  — топологическое пространство.

- (i)  $E$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда  $\mu(x) \cap \mu(y) = \emptyset$  для всех таких  $x, y \in E$ , что  $x \neq y$ .
- (ii) Множество  $A \subset E$  открыто тогда и только тогда, когда  $\mu(x) \subset {}^*A$  для любого  $x \in A$ .
- (iii) Множество  $A \subset E$  замкнуто тогда и только тогда, когда для всех  $x \in E$ ,  $y \in {}^*A$  из  $y \in \mu(x)$  следует  $x \in A$ .
- (iv) Множество  $A \subset E$  компактно тогда и только тогда, когда для любого  $x \in {}^*A$  найдется такое  $y \in A$ , что  $x \in \mu(y)$ .

Мы называем точку  $x \in {}^*E$  *околостандартной*, если  $x \in \mu(y)$  для некоторого  $y \in E$ . Таким образом, 2.1.6(iv) утверждает, что пространство  $E$  компактно тогда и только тогда, когда все точки  $x \in {}^*E$  околостандартны. Обозначим через  $Ns({}^*E)$  множество околостандартных точек из  ${}^*E$ . Пусть  $x \in \mu(y)$  для некоторого  $y \in E$ ; тогда если  $E$  хаусдорфово, то из 2.1.6(i) следует, что точка  $y$  единственна; в этом случае мы пишем  $y = {}^\circ x$ , или  $y = st(x)$ . Заметим, что отображение  $st: {}^*E \rightarrow E$  является частичным, т. е. не везде определено. Для любого  $A \subset {}^*E$  положим

$$st(A) = \{st(x) \mid x \in A \cap Ns({}^*E)\}.$$

В случае, когда  $E$  хаусдорфово, мы имеем следующие полезные переформулировки утверждения 2.1.6 (ii) — (iv):

- (ii)' Множество  $A$  открыто тогда и только тогда, когда  $st^{-1}(A) \subset {}^*A$ .
- (iii)' Множество  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда  ${}^*A \cap Ns({}^*E) \subset st^{-1}(A)$ .
- (iv)' Множество  $A$  компактно тогда и только тогда, когда  ${}^*A \subset st^{-1}(A)$ .

Отображение  $st$  называется *отображением (взятия) стандартной части*, а точка  $st(x)$  называется *стандартной частью* точки  $x$ .

Мы должны кратко прокомментировать доказательство предложения 2.1.6. Для этого остановимся на характеристизации открытых множеств. Из доказательства предложения 1.1.2(i) мы помним, что если  $A \subset \mathbb{R}$  и  $\mu(x) \subset {}^*A$ , то можно найти некоторую стандартную окрестность точки  $x$ , лежащую в множестве  $A$ . Это было упражнением на использование принципа переноса. Но нам пришлось также использовать и некий трюк. Поскольку монада  $\mu(x)$  не является внутренним множеством, мы не могли перевести  $\mu(x)$  с помощью обращения  $*$ -вложения в стандартную

окрестность точки  $x$  в  $A$ . Но мы могли взять положительное бесконечно малое  $\delta > 0$  и рассмотреть внутреннее множество  $D = \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid |x - y| < \delta\}$ . Для него верно включение  $D \subset \subset \mu(x) \subset {}^*A$ , причем  $D$ , очевидно, является элементом множества  ${}^*\mathcal{O}_x$ . Поэтому в  $V({}^*\mathbb{R})$  мы имели истинное утверждение

$$\exists D \in {}^*\mathcal{O}_x [D \subset {}^*A].$$

Тогда по принципу переноса должно существовать такое  $D \in \mathcal{O}_x$ , что  $D \subset A$ . Поскольку в  $\mathbb{R}$  квантор  $\exists D$  сводится к квантору  $\exists \delta$ , то приведенное рассуждение совпадает с доказательством предложения 1.1.2(i), приведенным в § 1.1 сразу после принципа переноса 1.1.4.

Чтобы это доказательство могло работать в общем случае, нам нужен следующий факт.

**2.1.7. Лемма об аппроксимации.** *Для любого  $x \in E$  существует такое внутреннее множество  $D \in {}^*\mathcal{O}_x$ , что  $D \subset \mu(x)$ .*

Для каждого  $D \in \mathcal{O}_x$  положим  $F_D = \{D' \in {}^*\mathcal{O}_x \mid D' \subset {}^*D\}$ . Все множества  $F_D$  — внутренние, и семейство  $\{F_D \mid D \in \mathcal{O}_x\}$  состоит из непустых множеств и замкнуто относительно конечных пересечений. Значит, согласно общему принципу насыщения 2.1.4, существует внутреннее множество  $D_0$ , принадлежащее  $F_D$  для любого  $D \in \mathcal{O}_x$ . Тогда  $D_0 \subset {}^*D$  для всех  $D \in \mathcal{O}_x$ , откуда  $D_0 \subset \subset \mu(x)$ .  $\square$

Используя лемму 2.1.7, мы можем перенести описанное выше доказательство 1.1.2(i) на 2.1.6(ii). Доказательство 2.1.6(i) тоже использует лемму 2.1.7 для аппроксимации  $\mu(x)$  изнутри внутренним множеством. Утверждение 2.1.6(iii) двойственно к утверждению (ii) и в дальнейших комментариях не нуждается.

Мы добавим, однако, некоторые комментарии по поводу характеристики компактности. Утверждается, что компактность пространства  $E$  равносильна тому, что каждое  $x \in {}^*E$  околостандартно. Это утверждение есть не что иное как слегка замаскированная хорошо известная характеристика компактности с помощью ультрафильтров (см. заметку Fenstad [1]). Подробнее: каждой точке  $x \in {}^*E$  мы можем сопоставить следующий ультрафильтр  $\mathcal{F}_x$  на  $E$ :

$$X \in \mathcal{F}_x \iff x \in {}^*X,$$

т. е.  $\mathcal{F}_x$  — это «след» на  $E$  некоторого главного ультрафильтра на  ${}^*E$ , т. е. ультрафильтра, состоящего из всех подмножеств в  ${}^*E$ , содержащих данную точку  $x$ .

Обратно, любому ультрафильтру  $\mathcal{F}$  на  $E$  можно сопоставить точку  $x \in {}^*E$ , принадлежащую всем множествам  ${}^*X$  при  $X \in \mathcal{F}$ ; это следствие общего принципа насыщения.

Отсюда следует, что  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$ . Действительно, если  $X \in \mathcal{F}$ , то по построению  $x \in {}^*X$ , а это означает, что  $X \in \mathcal{F}_x$ , т. е.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_x$ . Теперь равенство следует из максимальнойности  $\mathcal{F}$ .

Комбинируя эти наблюдения, получаем следующее доказательство утверждения 2.1.6(iv). (i) Пусть  $E$  компактно и  $b \in {}^*E$ . Компактность означает, что каждый ультрафильтр на  $E$  сходится<sup>1)</sup>; в частности, существует такое  $a \in E$ , что  $\mathcal{F}_b$  сходится к  $a$ , т. е.  $b \in \mu(a)$ . (ii) Обратно, пусть  $\mathcal{F}$  — ультрафильтр на  $E$ ; тогда он имеет вид  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_b$  для некоторого  $b \in {}^*E$ . Поскольку каждая точка в  ${}^*E$  околостандартна,  $b \in \mu(a)$  для некоторого  $a \in E$ , и, значит,  $\mathcal{F}_b$  сходится.  $\square$

Сделаем одно важное добавление к предложению 2.1.6.

**2.1.8. Предложение.** Пусть пространство  $E$  хаусдорфово и  $A$  — внутреннее подмножество множества  ${}^*E$ . Тогда множество  $\text{st}(A)$  замкнуто.

*Доказательство* предложения 2.1.8 представляет собой простое, но существенное применение принципа насыщения. Допустим, что  $O \cap \text{st}(A) \neq \emptyset$  для всех  $O \in \mathcal{O}_a$ , где  $a \in E$ . Если  $b$  — произвольная точка из  $O \cap \text{st}(A)$ , то  $b = \text{st}(c)$  для некоторого  $c \in A$ . Поскольку  $O$  открыто, из 2.1.6 следует, что  $\mu(b) = \mu(\text{st}(c)) \subset {}^*O$ , откуда  $c \in {}^*O \cap A$ . Значит, из нашего предположения вытекает, что  ${}^*O \cap A \neq \emptyset$  для всех  $O \in \mathcal{O}_a$ . Множество  $A$  — внутреннее, поэтому из принципа насыщения следует, что существует некоторая точка  $c_0 \in \mu(a) \cap A$ ; но это означает, что  $a = \text{st}(c_0) \in \text{st}(A)$ . Таким образом, мы доказали, что если точка  $a$  принадлежит замыканию множества  $\text{st}(A)$ , т. е. если  $O \cap \text{st}(A) \neq \emptyset$  для всех  $O \in \mathcal{O}_a$ , то  $a \in \text{st}(A)$ ; значит, множество  $\text{st}(A)$  замкнуто.  $\square$

**2.1.9. Пример.** Результаты 2.1.6—2.1.8 фактически предполагают, что мы работаем в (поли-)насыщенном расширении. Приведем пример некомпактного пространства, в котором каждая точка околостандартна. Пусть  $\omega_1 = \{0, 1, 2, \dots, \alpha, \dots\}$  — (несчетное) множество всех счетных ординалов<sup>2)</sup>. Структура  $(\omega_1, <)$ , где  $<$  — отношение порядка между ординалами, является вполне упорядоченным множеством. Семейство интервалов  $(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \omega_1 \mid \alpha < \gamma < \beta\}$ ,  $\alpha, \beta \in \omega_1$ , индуцирует топологию на  $\omega_1$ ; легко видеть, что  $\omega_1$  некомпактно в этой топологии.

Пусть  $\mathcal{U}$  — свободный ультрафильтр на  $\mathbb{N}$ ; рассмотрим

$${}^*\omega_1 = \omega_1^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}.$$

<sup>1)</sup> Напомним, что фильтр  $\mathcal{F}$  на  $E$  называется сходящимся к точке  $a \in E$ , если он содержит все окрестности точки  $a$ . — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> По поводу теории вполне упорядоченных множеств и ординалов см., например, Козн [1\*]. — *Прим. ред.*

Мы утверждаем, что каждая точка  $\alpha_{\mathcal{U}} \in {}^*\omega_1$  конечна, т. е. существует такое  $\alpha \in \omega_1$ , что  $\alpha_{\mathcal{U}} < {}^*\alpha$ . В самом деле,  $\alpha_{\mathcal{U}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)_{\mathcal{U}}$ . А поскольку счетное множество счетных ординалов ограничено в  $\omega_1$ , найдется такое  $\alpha \in \omega_1$ , что  $\alpha_n < \alpha$  для всех  $\alpha_n$  из последовательности, определяющей  $\alpha_{\mathcal{U}}$ . Но тогда  $\alpha_{\mathcal{U}} < {}^*\alpha$ , что и требовалось. Таким образом, каждая точка в  ${}^*\omega_1$  конечна. А во вполне упорядоченной структуре любая конечная точка имеет стандартную часть, т. е. все  $\alpha_{\mathcal{U}} \in {}^*\omega_1$  околостандартны.

Расширение  ${}^*\omega_1 = \omega_1^{\mathcal{N}}/\mathcal{U}$  удовлетворяет условиям 2.1.2, но не 2.1.4. Пространство  $\omega_1$ , однако, имеет насыщенные расширения: см. ссылку в замечании 2.1.5.

Завершая наш курс общей топологии, упомянем характеристику непрерывности.

**2.1.10. Предложение.** Пусть даны топологические пространства  $E$  и  $F$ , а также отображение  $f: E \rightarrow F$ . Тогда непрерывность  $f$  в точке  $a \in E$  равносильна тому, что  ${}^*f(\mu(a)) \subset \mu(f(a))$ .

Несколько замечаний по поводу равномерной непрерывности будут отложены до обсуждения метрических пространств. В работе Fenstad, Nyberg [1] имеется, однако, общая дискуссия о стандартных и нестандартных методах в равномерной топологии, которая выходит за рамки коммутативной диаграммы из § 1.1. В качестве ссылок по общей топологии подойдут книги Davis [1] и Stroyan, Luxemburg [1].

Упомянем также новый интересный метод, который ввели недавно в нестандартную топологию Рихтер и Беннингхофен. Их идея состоит в том, чтобы распространить действие принципа переноса на более широкий класс формул (допускающий некоторые внешние кванторы) способом, который делает возможным описание монад; см. работы Richter [1] и Benninghofen, Richter [1]. В работе Benninghofen, Stroyan [1] даются приложения этих методов к ограниченной  $*$ -слабой топологии в линейных пространствах. Идеи Рихтера и Беннингхофена возникли из предложенной Нельсоном формулировки нестандартного анализа (см. Nelson [3]), но их можно использовать и в рамках нашей формулировки.

**2.1.11. Замечание.** До сих пор мы обсуждали нестандартные характеристики стандартных понятий. В частности, отображение  $f: E \rightarrow F$  из предложения 2.1.10 было стандартным объектом. Однако в приложениях нестандартной теории нас будут глубоко интересовать внутренние объекты, например, *внутренние отображения*  $f: {}^*E \rightarrow {}^*F$ . Для внутренних отображений

основные понятия, такие как непрерывность и дифференцируемость, расщепляются на два разных понятия. Взяв для примера непрерывность, рассмотрим отображение  $f: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ; напомним, что  $\mathbb{R}_+$  обозначает множество положительных действительных чисел.

(i) Функция  $f$  называется *S-непрерывной* в точке  $a \in {}^*\mathbb{R}$ , если

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists \delta \in \mathbb{R}_+) (\forall x \in {}^*\mathbb{R}) (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

(ii) Функция  $f$  называется *\*-непрерывной* в точке  $a \in {}^*\mathbb{R}$ , если

$$(\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+) (\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+) (\forall x \in {}^*\mathbb{R}) (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Читатель должен оценить разницу. Пусть  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ; тогда внутренняя функция

$$f(x) = \sin(\omega x)$$

везде \*-непрерывна, но нигде не S-непрерывна. Напротив, внутренняя функция

$$f(x) = \begin{cases} 1/\omega & \text{при } x \in {}^*\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \notin {}^*\mathbb{Q} \end{cases}$$

везде S-непрерывна, но нигде не \*-непрерывна.

Разница между S-непрерывностью/дифференцируемостью и \*-непрерывностью/дифференцируемостью будет важна в нескольких приложениях. Например, «свободная энергия» в модели Изинга всегда \*-дифференцируема, но не всегда S-дифференцируема: см. § 7.2. В случае ее не S-дифференцируемости может иметь место фазовый переход.

**2.1.12. Предложение.** Пусть дан стандартный отрезок  $[c, d] \subset \mathbb{R}$  и S-непрерывная внутренняя функция  $f: {}^*[c, d] \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , принимающая только конечные значения. Введем функцию  $g = \text{st}(f)$ , т. е.  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = {}^\circ f(x)$  при любом  $x \in [c, d]$ . Тогда

(i)  $g$  непрерывна на  $[c, d]$ ;

(ii)  $f(x) \approx {}^*g(x)$  для всех  $x \in {}^*[c, d]$ .

Утверждение (i) следует из определения S-непрерывности, если заметить, что для  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  из неравенства  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  вытекает неравенство  $|{}^\circ f(x) - {}^\circ f(a)| < \varepsilon$ . Утверждение (ii) для стандартных точек  $x \in [c, d]$  справедливо по определению функции  $g$ . Осталось доказать (ii) для нестандартных точек  $x \in {}^*[c, d]$ . Заметим, что все эти точки околостандартны в силу компактности отрезка  $[c, d]$ . Пусть  ${}^\circ x = a$ . Тогда  ${}^*g(x) \approx {}^*g(a) = g(a)$  в силу непрерывности функции  $g$  и предложения 2.1.10;  $g(a) \approx f(a)$  по определению функции  $g$ ; наконец,

$f(a) \approx f(x)$ , так как по определению  $S$ -непрерывности функции  $f$  неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  выполняется для всех стандартных  $\varepsilon > 0$ . Значит,  ${}^*g(x) \approx f(x)$  и предложение доказано.  $\square$

Если заменить отрезок  $[c, d]$  на некомпактное множество, то утверждение (ii) становится неверным. Пусть, например,  $f(x) = \varepsilon x$ , где  $\varepsilon \approx 0$ ; эта функция  $S$ -непрерывна, и  $g(x) = {}^\circ f(x) \equiv 0$  для  $x \in \mathbb{R}$ . Но при  $x = 1/\varepsilon$  мы получим  $f(x) = 1$ , а  ${}^*g(x) = 0$ .

Теперь мы на короткое время обратимся к метрическим пространствам. Пусть  $(E, d)$  — метрическое пространство. Тогда понятие *монады* имеет смысл для всех  $x \in {}^*E$ . Положим

$$\mu(x) = \{y \in {}^*E \mid d(x, y) \approx 0\}.$$

По аналогии с предложением 2.1.10 формулируется следующее обобщение предложения 1.3.3(ii): если  $E$  и  $F$  — метрические пространства, то отображение  $f: E \rightarrow F$  *равномерно непрерывно* тогда и только тогда, когда  $f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$  для всех  $x \in {}^*E$ .

В метрическом пространстве мы должны также аккуратно различать понятия *околостандартной* точки и *конечной* точки.

**2.1.13. Определение.** Точка  $x \in {}^*E$  называется *околостандартной*, если  $d(x, y) \approx 0$  для некоторого  $y \in E$ . Точка  $x$  называется *конечной*, если число  $d(x, y)$  конечно для некоторого  $y \in E$ .

То, что каждая околостандартная точка конечна, тривиально. Обратное неверно. Если  $E$  — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, то в  ${}^*E$  есть конечные точки, не являющиеся околостандартными. Чтобы это увидеть, обозначим через  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ортонормированный базис в  $E$ . Выберем в  ${}^*E$  элемент  $e_\omega$ , где  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Тогда в метрике, полученной из нормы пространства  $E$ , точка  $e_\omega$  конечна, но не околостандартна. Заметим, что для того, чтобы каждая конечная точка пространства  ${}^*E$  была околостандартна, необходимо и достаточно, чтобы каждое замкнутое ограниченное подмножество в  $E$  было компактно.

Любое метрическое пространство  $E$  хаусдорфово. Поэтому, если точка  $x \in {}^*E$  околостандартна, то точка  $y \in E$ , для которой  $x \in \mu(y)$ , единственна; мы пишем тогда  $y = {}^\circ x$  или  $y = \text{st}(x)$ .

Обсудим один результат, в котором фигурирует понятие стандартной части в трех пространствах: во многих приложениях у нас есть пара сепарабельных метрических пространств  $E_1, E_2$  и множество  $C(E_1, E_2)$  непрерывных отображений  $f: E_1 \rightarrow E_2$ , которое в компактно-открытой топологии (т. е. топологии равномерной сходимости на компактах) является сепарабельным метризуемым пространством. Пусть  $F \in {}^*C(E_1, E_2)$ , так

что  $F$  — это отображение из  $*E_1$  в  $*E_2$ . Как элемент пространства  $*C(E_1, E_2)$ , отображение  $F$  может иметь стандартную часть  ${}^\circ F \in C(E_1, E_2)$ . Как это понятие стандартной части связано с понятиями стандартной части в  $*E_1$  и  $*E_2$ ?

**2.1.14. Предложение.** Пусть  $E_1, E_2$  — сепарабельные метрические пространства, причем  $E_1$  локально компактно, и пусть пространство  $C(E_1, E_2)$  снабжено компактно-открытой топологией. Если  $f \in C(E_1, E_2)$  и  $F \in *C(E_1, E_2)$ , то  ${}^\circ F = f$  тогда и только тогда, когда  ${}^\circ(F(x)) = f({}^\circ x)$  для любой околостандартной точки  $x \in *E_1$ .

Приведем доказательство. Пусть  ${}^\circ F = f$  и точка  $x \in *E_1$  околостандартна. Пространство  $E_1$  локально компактно, так что для любой открытой окрестности  $U$  точки  $f({}^\circ x)$  существует такая компактная окрестность  $K$  точки  ${}^\circ x$ , что  $f(K) \subset U$ ; иными словами,  $C(K, U)$  является окрестностью функции  $f$ . Очевидно,  $x \in *K$  и  $F \in *C(K, U)$ . Значит,  $F$  задает отображение  $F: *K \rightarrow *U$  и  $F(x) \in *U$ . Поскольку это справедливо для любой открытой окрестности точки  $f({}^\circ x)$ , мы заключаем, что  ${}^\circ(F(x)) = f({}^\circ x)$ . Чтобы доказать обратное, предположим, что  ${}^\circ(F(x)) = f({}^\circ x)$  для всех околостандартных  $x \in *E$ . Пусть  $C(K, U)$  — некоторая окрестность отображения  $f$ ; чтобы можно было утверждать, что  ${}^\circ F = f$ , мы должны показать, что  $F \in *C(K, U)$ . Выберем произвольное  $x \in *K$ ;  $K$  компактно, поэтому  ${}^\circ x$  существует и принадлежит  $K$ . Тогда  $f({}^\circ x) \in U$ , так что по предположению  ${}^\circ(F(x)) \in U$ , т. е.  $F(x) \in *U$ . Таким образом,  $F: *K \rightarrow *U$ , т. е.  $F \in *C(K, U)$ .  $\square$

Мы докажем еще один результат о метрических пространствах, который потребует нам в дальнейших приложениях.

**2.1.15. Определение.** Пусть  $f$  — отображение метрического пространства  $E$  в метрическое пространство  $F$ . Отображение  $f$  называется *компактным*, если для любого ограниченного подмножества  $A \subset E$  имеем  $f(A) \subset D$  для некоторого компактного подмножества  $D \subset F$ .

**2.1.16. Предложение.** Отображение  $f: E \rightarrow F$  компактно тогда и только тогда, когда  $f$  отображает конечные точки пространства  $*E$  в околостандартные точки пространства  $*F$ .

Пусть  $f$  компактно, и  $x$  — конечная точка в  $*E$ . Существует такое  $r \in \mathbb{R}_+$ , что  $d(x, y) \leq r$  для некоторого  $y \in E$ . Множество  $A = \{u \in E \mid d(u, y) \leq r\}$  ограничено, следовательно,  $f(A) \subset D$  для некоторого компактного  $D \subset F$ . Заметим, что  $x \in *A$ , откуда следует, что  $f(x) \in *D$ . Поскольку  $D$  компактно, точка  $f(x)$  околостандартна.

Чтобы доказать обратное, возьмем ограниченное подмножество  $A \subset E$ . Наш кандидат на роль множества  $D$  — это замыкание

множества  $f(A)$ . По определению замыкания в  $V(\mathbb{R})$  справедливо утверждение

$$(\forall y \in D) (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists x \in f(A)) (d(x, y) < \varepsilon).$$

Отсюда по принципу переноса получаем, что если  $y \in {}^*D$ , то существует такое  $x \in {}^*f(A)$ , что  $x \approx y$ . По предположению множество  $A$  ограничено; поэтому любая точка множества  ${}^*f(A) = f({}^*A)$  околостандартна. Но если точка  $x$  околостандартна и  $y \approx x$ , то точка  $y$  тоже околостандартна; значит, множество  $D$  компактно.  $\square$

## 2.2. Линейные пространства и операторы

В этом параграфе описан нестандартный подход к линейным пространствам и операторам. Мы обсудим лишь небольшое число основных фактов, отсылая читателя за дальнейшей информацией к существующей литературе (Heinrich [1], Henson, Моог [1]). В дальнейшем читателя ожидает гл. 5, в которой будет развита гиперконечная теория квадратичных форм вместе с ее применениями к стохастическому анализу.

Пусть  $(E, \|\cdot\|)$  — линейное нормированное пространство. Элемент  $x \in {}^*E$  называется *конечным* (или *конечным по норме*), если  $\|x\|$  — конечное гипердействительное число. Через  $\text{Fin}({}^*E)$  будем обозначать множество конечных элементов пространства  ${}^*E$ . Элемент  $x \in {}^*E$  называется *бесконечно малым*, если  $\|x\| \approx 0$ ; мы пишем  $x \approx y$ , если  $\|x - y\| \approx 0$ . Множества  $\text{Fin}({}^*E)$  и  $\mu(0) = \{x \in {}^*E \mid \|x\| \approx 0\}$  являются линейными пространствами над тем же самым полем, что и  $E$ . Факторпространство  $\bar{E} = \text{Fin}({}^*E)/\approx$  тоже будет нормированным линейным пространством; мы будем называть его *нестандартной оболочкой* пространства  $E$ . Это понятие было введено Люксембургом (Luxemburg [1]); по этому поводу имеется обширная литература: см., например, работу Henson, Моог [1], где имеется обзор и введение в предмет.

Мы работаем с насыщенными вложениями, и этот факт имеет важные последствия для изучения нестандартных оболочек. Рассмотрим следующую несколько более общую ситуацию. Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — внутреннее нормированное линейное пространство; в этом случае предполагается, что норма есть отображение  $F$  в  ${}^*\mathbb{R}$ . Понятия конечности и бесконечно малости по-прежнему имеют смысл, так что  $\text{Fin}(F)/\approx$  — вполне корректно определенное нормированное линейное пространство. Справедлив следующий результат:

**2.2.1. Предложение.** *Пространство  $\text{Fin}(F)/\approx$  полно, т. е. является банаховым пространством.*



*Доказательство* — это вариация на тему примера 2.1.1. Пусть  $(\hat{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная последовательность в пространстве  $\text{Fin}(F)/\approx$ . Она получена из последовательности  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов пространства  $F$ , которая, согласно предложению 2.1.3, может быть продолжена до внутренней последовательности  $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ . Поскольку последовательность  $(\hat{a}_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  фундаментальна, для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдется такое  $n_k \in \mathbb{N}$ , что  $|a_n - a_{n_k}| < 1/k$  для всех  $n \geq n_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Но тогда внутреннее множество

$$\{N \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall n \leq N, n < n_k \text{ или } |a_n - a_{n_k}| < 1/k\}$$

содержит  $\mathbb{N}$  и, следовательно, содержит некоторое бесконечно большое  $N_k$ . Пусть  $I_k = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n_k \leq n \leq N_k\}$ . Семейство множеств  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  замкнуто относительно конечных пересечений.

Согласно принципу счетного насыщения пересечение  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$  не пусто, и, значит, существует  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , принадлежащее всем  $I_k$ . Тривиально проверяется, что число  $\hat{a} = a_m/\approx$  является пределом исходной последовательности  $(\hat{a}_n)$ .  $\square$

Добавим к сказанному, что если норма в  $F$  получена из скалярного произведения, то  $\text{Fin}(F)/\approx$  будет гильбертовым пространством.

Теперь пусть  $E$  — стандартное нормированное линейное пространство. Напомним, что элемент  $x \in {}^*E$  называется *около-стандартным*, если  $\|x - y\| \approx 0$  для некоторого  $y \in E$ . Элемент  $x \in {}^*E$  называется *предоколостандартным*, если для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $y \in E$ , что  $\|x - y\| < \varepsilon$ ; множество предоколостандартных элементов пространства  ${}^*E$  обозначим  $\text{Pns}({}^*E)$ . Аналогично предложению 2.2.1 имеем

**2.2.2. Предложение.** *Пространство  $\text{Pns}({}^*E)/\approx$  является пополнением пространства  $E$ .*

*Доказательство* в точности такое же, как в 2.2.1. Мы добавим только то наблюдение, что  $\text{Pns}({}^*E)$  является замыканием пространства  $E$  в топологии, которую определяет в  ${}^*E$  продолженная норма, а отсюда следует, что  $\text{Pns}({}^*E)/\approx$  будет пополнением пространства  $E$ . Добавим еще, что если  $E$  — пространство со скалярным произведением (предгильбертово пространство), то  $\text{Pns}({}^*E)/\approx$ , будучи пополнением  $E$ , является гильбертовым. Рассмотрим внутреннюю последовательность

Дальнейшие результаты можно найти в работах Luxemburg [1] и Fenstad, Nyberg [1] (в последней работе вместо термина «предоколостандартный» используется термин «ограниченный»).

Заметим, что пространство  $E$  полно тогда и только тогда, когда каждая предоклостандартная точка пространства  ${}^*E$  околостандартна. Это утверждение обобщает тот факт, что компактность пространства  $E$  эквивалентна околостандартности каждой точки из  ${}^*E$ .

Пусть  $E$  — некоторое нормированное линейное пространство. Обозначим через  $\mathcal{F}_E$  класс всех его конечномерных подпространств. Для  $F \in \mathcal{F}_E$  пусть  $\dim(F)$  обозначает размерность пространства  $F$ . С помощью принципа переноса мы получаем объект  ${}^*\mathcal{F}_E \in V({}^*\mathbb{R})$  и отображение  ${}^*\dim: {}^*\mathcal{F}_E \rightarrow {}^*\mathbb{N}$ ; в соответствии с нашими предыдущими договоренностями мы будем опускать звездочки и писать  $\dim(F)$  для всех  $F \in {}^*\mathcal{F}_E$ .

Если  $F \in {}^*\mathcal{F}_E$  и  $\dim(F) = \eta \in {}^*\mathbb{N}$ , то по принципу переноса существует такая внутренняя последовательность  $(e_i)_{i \leq \eta}$ , что  $e_i \in {}^*E$  и

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in {}^*K \right\},$$

где  $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  — поле скаляров пространства  $E$ . Пространство  $F$  является *гиперконечномерным линейным пространством*. По принципу переноса  $F$  обладает всеми элементарными свойствами конечномерных пространств.

**2.2.3. Предложение.** Пусть  $E$  — нормированное линейное пространство. Тогда существует такое  $F \in {}^*\mathcal{F}_E$ , что

$$E \subset F \subset {}^*E.$$

*Доказательство* существования такого подпространства — это упражнение на использование общего принципа насыщения 2.1.4. Для каждого  $x \in E$  пусть  $A_x = \{F \in {}^*\mathcal{F}_E \mid x \in F\}$ . Семейство внутренних множеств  $\{A_x\}_{x \in E}$  обладает свойством непустоты конечных пересечений; следовательно, существует такое  $F \in {}^*\mathcal{F}_E$ , что  $x \in F$  для всех  $x \in E$ .  $\square$

Это и есть та мощная техника, которую мы упоминали во вступлении к этой главе. Мы вкладываем пространство  $E$  в гиперконечномерное пространство  $F$ . С помощью принципа переноса мы можем доказывать результаты об  $F$ , устанавливая их для конечномерных подпространств пространства  $E$ . Наконец, поскольку  $E$  «сидит» внутри  $F$ , мы будем использовать отображение стандартной части для доказательства результатов про  $E$ . Все это будет проиллюстрировано в следующем параграфе. Здесь же мы добавим несколько замечаний о линейных операторах.

Пусть  $T: E \rightarrow E$  — ограниченный линейный оператор. Его норма  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$  корректно определена и  $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$  для любого  $x \in E$ .

Имеет место следующая нестандартная характеристика ограниченных и компактных операторов.

**2.2.4. Предложение.** Пусть  $T: E \rightarrow E$  — линейный оператор.

(i) Оператор  $T$  ограничен тогда и только тогда, когда  $*T$  отображает конечные точки в конечные.

(ii) Оператор  $T$  компактен тогда и только тогда, когда  $*T$  отображает конечные точки в околостандартные.

Для доказательства сначала отметим, что утверждение (ii) есть следствие предложения 2.1.16. Далее, из неравенства  $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$  сразу следует, что ограниченный оператор  $T$  отображает конечные точки в конечные. Чтобы доказать обратное, заметим, что все точки множества  $\{Tx \in *E \mid x \in *E, \|x\|=1\}$  конечны, поскольку  $T$  отображает конечные точки в конечные. Поскольку это множество внутреннее и норма его элементов ограничена сверху любым бесконечно большим числом, существует конечная верхняя грань для нормы, откуда мы заключаем, что  $\|T\| < \infty$ .  $\square$

Теперь мы переходим к изучению компактных симметрических операторов в гильбертовом пространстве.

### 2.3. Спектральное разложение компактных эрмитовых операторов

В этом параграфе мы проиллюстрируем использование предложения 2.2.3, дав нестандартное доказательство спектральной теоремы для компактных операторов в произвольном гильбертовом пространстве. Мы включили этот результат из педагогических соображений. Результат является классическим; его нестандартное изложение принадлежит Робинсону (Robinson [1]); см. также книгу Davis [1]; другой подход и более общий результат можно найти в работе Моогге [1].

**2.3.1. Теорема.** Если  $T \neq 0$  — компактный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве  $H$ , то существуют такие действительные числа  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i, \dots, \nu_i \neq \nu_j$  при  $i \neq j$ , и конечномерные подпространства  $H_i$  пространства  $H$ , что для всех  $x \in H$

$$Tx = \sum_i \nu_i P_{H_i} x,$$

где  $P_{H_i}$  — оператор ортогонального проектирования на подпространство  $H_i$ . Множество собственных значений  $\{\nu_1, \dots, \nu_i, \dots\}$  либо конечно, либо счетно. В последнем случае  $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i = 0$ .

Напомним, что ограниченный линейный оператор  $T$  на  $H$  называется *эрмитовым*, или *самосопряженным*, если  $(Tx, y) = (x, Ty)$  для всех  $x, y \in H$ . Ограниченный линейный оператор  $P$  на  $H$  называется (ортогональным) *проектором*, если он эрмитов и идемпотентен<sup>1)</sup>. Имеется взаимно однозначное соответствие между замкнутыми линейными подпространствами  $E$  пространства  $H$  и проекторами  $P_E$  в  $H$ . Напомним, что  $P_{Ex}$  — это такая (единственная) точка  $y \in E$ , что  $\|x - y\| \leq \|x - z\|$  для всех  $z \in E$ .

Для доказательства теоремы 2.3.1 мы воспользуемся предложением 2.2.3 и выберем такое гиперконечномерное пространство  $E \in {}^*\mathcal{F}_H$ , что  $H \subset E \subset {}^*H$ . Пространство  $E$  служит «конечным приближением сверху» к пространству  $H$ . Мы будем использовать «конечномерную» линейную алгебру в  $E$  для доказательства спектральной теоремы в  $H$ .

Пусть  $P = P_E$  — проектор на  $E$  в  ${}^*H$ . Заметим, что если точка  $x \in {}^*H$  околостандартна, то  $Px \approx x$ . Пусть  $T$  — нетривиальный компактный эрмитов оператор в  $H$ ; обозначим через  $T'$  ограничение оператора  $P({}^*T)$  на  $E$ . Оператор  $T'$  можно также описать как ограничение на  $E$  оператора  $P({}^*T)P$ .

Отметим несколько элементарных фактов, касающихся оператора  $T'$ . Поскольку  $T$  ограничен на  $H$ ,  $T'$  ограничен на  $E$ ; фактически  $\|T'\| \leq \|T\|$ . А если  $x \in H$ , то  $T'x = Tx$ . Видно также, что оператор  $T'$  эрмитов на  $E$ . Из компактности оператора  $T$  сразу следует, что если точка  $x \in E$  конечна, то точка  $T'x$  околостандартна.

Таким образом, у нас есть эрмитов оператор  $T'$  на гиперконечномерном пространстве  $E$  и мы можем использовать обычную линейную алгебру. По принципу переноса имеется набор собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_v$  ( $v \in {}^*\mathbb{N}$ ) оператора  $T'$ , где  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_v|$ . Имеется также соответствующий ортонормированный набор собственных векторов  $r_1, r_2, \dots, r_v$ , удовлетворяющих уравнениям

$$T'r_i = \lambda_i r_i, \quad i = 1, 2, \dots, v.$$

Взяв «стандартные части», мы можем вернуться к результату об операторе  $T$  в  $H$ . Прежде всего заметим, что все  $\lambda_i$  конечны; фактически  $|\lambda_i| \leq \|T\|$  для всех  $i \leq v$ . Отсюда следует, что векторы  $r_j$  для не бесконечно малых  $\lambda_j$  околостандартны. Обращаем внимание читателя на то, что именно в этом месте мы пользуемся компактностью оператора  $T$ . А именно, из уравнения  $T'r_j = \lambda_j r_j$  и конечности нормы вектора  $r_j$  в предположении компактности оператора  $T'$  следует, что вектор  $\lambda_j r_j$  около-

<sup>1)</sup> Идемпотентность означает, что  $P^2 = P$ . — Прим. ред.

стандартен. Поэтому если  $\lambda_j$  не бесконечно мало, то вектор  $r_j$  околостандартен.

Нам потребуется следующая лемма, добавляющая еще кое-какие ингредиенты из нестандартной теории.

**2.3.2. Лемма.** Пусть  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ; предположим, что  $|\lambda_j| \geq \varepsilon$  для всех  $j \leq k$ ; тогда  $k \in \mathbb{N}$ .

Из нашего замечания следует, что векторы  $r_j$  околостандартны для всех  $j \leq k$ ; кроме того,  $\|r_i - r_j\| = \sqrt{2}$  для всех  $i, j \leq k, i \neq j$ . Предположим, от противного, что  $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Рассмотрим внутреннюю последовательность

$$s_j = \begin{cases} r_j & \text{при } j \leq k, \\ 0 & \text{при } j > k. \end{cases}$$

Эта внутренняя последовательность обладает свойством  $\|s_i - s_j\| \geq \sqrt{2}$  для всех  $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$ . Тогда множество

$$\{i \in {}^*\mathbb{N} \mid (\forall j < i) \|s_j - s_i\| \geq \sqrt{2}\}$$

содержит бесконечно большое  $i_1 < k$ .

Для  $i \in \mathbb{N}$  положим  $t_i = \text{st}(s_i)$ . Эта последовательность стандартна и потому имеет каноническое продолжение  $(t_i)_{i \in {}^*\mathbb{N}}$ . Поскольку  $t_i \approx s_i$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ , по лемме Робинсона существует такое  $i_2 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $t_i \approx s_i$  для всех  $i < i_2$ .

Выберем бесконечно большое  $i_0 < \min\{i_1, i_2\}$ . Тогда  $i_0 < k$ , и векторы  $t_{i_0} \approx s_{i_0}$  околостандартны. Следовательно, точка  $s = \text{st}(t_{i_0}) = \text{st}(s_{i_0}) = \text{st}(r_{i_0})$  является предельной точкой последовательности  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ <sup>1)</sup>. Но это, очевидно, невозможно, т. к.  $\|s - t_i\| \geq \sqrt{2}$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Из доказанной леммы мы видим, что если имеется группа равных не бесконечно малых собственных значений

$$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_{r+k},$$

то длина  $k$  этой группы будет *конечным* целым числом.

Перепишем множество собственных значений в виде последовательности  $\lambda_i, i \leq \mu \leq \nu$ , без повторений. Пусть собственные

<sup>1)</sup> В силу упоминавшегося в § 1.3 критерия, который очевидным образом переносится на метрические пространства: точка  $s$  является предельной точкой стандартной последовательности  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  тогда и только тогда, когда для продолженной последовательности  $(t_i)_{i \in {}^*\mathbb{N}}$  существует такое  $i_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $t_{i_0} \approx s$ . — Прим. ред.

векторы, отвечающие  $\kappa_i$ , суть  $r_1^{(i)}, \dots, r_{m_i}^{(i)}$ ; введем их линейную оболочку

$$E_i = \text{span}(r_1^{(i)}, \dots, r_{m_i}^{(i)}).$$

Здесь числа  $i$  и  $m_i$  могут быть бесконечно большими. По принципу переноса из стандартной теории матриц следует, что можно записать

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_\mu,$$

и этому разложению соответствует спектральное разложение оператора  $T'$ :

$$T' = \kappa_1 P_{E_1} + \kappa_2 P_{E_2} + \dots + \kappa_\mu P_{E_\mu}.$$

Осталось провести рассуждения о регулярности; положим  $W = \{j \in {}^*\mathbb{N} \mid \kappa_j \not\approx 0\}$ .

**2.3.3. Лемма.**  $W$  — непустое подмножество множества  $\mathbb{N}$ .

Фактически нужно лишь показать, что  $W$  не пусто; включение  $W \subset \mathbb{N}$  следует из леммы 2.3.2. Предположим, от противного, что  $W = \emptyset$ ; тогда  $\kappa = |\kappa_1| \approx 0$ . Поскольку  $T \neq 0$ , существует такой элемент  $x \in E$ , что  $\|x\| < 1$  и  $\|T'x\| \not\approx 0$ . В соответствии с полученным выше разложением мы можем записать  $x = x_1 + \dots + x_\mu$  и  $T'x = \kappa_1 x_1 + \dots + \kappa_\mu x_\mu$ . Тогда

$$\|T'x\|^2 = \sum_{i=1}^{\mu} |\kappa_i|^2 \|x_i\|^2 \leq \kappa^2 \approx 0.$$

Это и есть требуемое противоречие; тем самым доказано, что множество  $W$  не пусто.  $\square$

Теперь нам осталось собрать вместе все части доказательства. Если  $\lambda_j \not\approx 0$ , то вектор  $r_j$  околостандартен и тогда  $\text{st}(r_j)$ ,  $\text{st}(\kappa_j)$  — собственный вектор и соответствующее ему собственное значение оператора  $T$  в  $H$ . Если  $j \in W$ , то  $m_j$  конечно. Положим  $s_i^{(j)} = \text{st}(r_i^{(j)})$  и  $v_j = \text{st}(\kappa_j)^{-1}$  для  $j \in W$ . Пусть

$$H_j = \text{span}(s_1^{(j)}, \dots, s_{m_j}^{(j)}) \subset H.$$

Заметим, что если  $x \in H$ , то  $P_{H_j}x \approx P_{E_j}x$ . Теперь мы можем записать

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \dots,$$

<sup>1)</sup> Все числа  $\kappa_j$  были различны, но числа  $v_j = \text{st}(\kappa_j)$  могут оказаться совпадающими. Понятно, однако, что совпавших значений каждый раз будет не более чем конечное число, так что трудность легко преодолевается перенумерацией чисел  $v_j$  и заменой соответствующих значений  $m_j$  на их суммы. — *Прим. перев.*

где  $H_0$  — ортогональное дополнение к пространству  $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$  в  $H$ . Сумма конечна, если множество  $W$  конечно. Она бесконечна, если  $W = \mathbb{N}$ ; оба случая могут иметь место. Из спектрального разложения оператора  $T'$  мы для вектора  $x \in H$  получаем

$$Tx = v_1 P_{H_1} x + v_2 P_{H_2} x + \dots$$

На этом доказательство заканчивается. Добавим лишь, что в случае  $W = \mathbb{N}$  мы сразу получаем, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = 0$ . В самом деле,  $|v_i| \approx |\kappa_i|$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ . Поэтому для некоторого  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  имеем  $|v_\omega| \approx |\kappa_\omega|$ . Из определения множества  $W$  следует, что  $|\kappa_\omega| \approx 0$ . Поэтому 0 — предельная точка убывающей последовательности  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

Одним из ранних успехов техники «приближения сверху» гильбертова пространства  $H$  гиперконечномерным линейным пространством явилось решение Бернштейном и Робинсоном проблемы инвариантных подпространств для полиномиально компактных операторов<sup>1)</sup>. Результат состоит в следующем.

**2.3.4. Теорема.** Пусть  $T$  — ограниченный линейный оператор в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве  $H$ . Пусть существует такой комплексный полином  $p(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_m \lambda^m$ ,  $c_m \neq 0$ , что оператор  $p(T)$  компактен. Тогда  $T$  имеет по крайней мере одно инвариантное замкнутое линейное подпространство в  $H$ , отличное от  $\{0\}$ .

Этот пример стоит отметить: здесь перед нами классическая проблема, впервые решенная нестандартными методами. Для  $p(\lambda) = \lambda$  теорема была доказана фон Нейманом в 1930 г. Последующие продвижения принадлежали Ароншайну, Смиту и Халмошу. В итоге проблема была решена Бернштейном и Робинсоном в 1966 году; решение изложено в работах Robinson [1] и Bernstein [1].

В дальнейшем Ломоносов [1] стандартными методами усилил этот результат; общее изложение см. в книге Radjavi, Rosenthal [1].

Нестандартный подход, однако, демонстрирует общую технику, оказавшуюся полезной во многих ситуациях. Отправной точкой служит конечномерное утверждение — в данном случае то, что в конечномерном линейном пространстве  $E$  размерности

<sup>1)</sup> Общая проблема инвариантных подпространств состоит в следующем: верно ли, что любой ограниченный линейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет инвариантное замкнутое линейное подпространство? Эта проблема до сих пор (1988) не решена. Все известные результаты касаются более узких классов операторов. — Прим. перев.

$m$  любой линейный оператор имеет цепочку инвариантных подпространств

$$E_0 = \{0\} \subset E_1 \subset \dots \subset E_m = E,$$

где  $\dim(E_j) = j$ ,  $0 \leq j \leq m$ . Рассматриваемое гильбертово пространство  $H$  вкладывается в подходящим образом выбранное гиперконечномерное пространство  $H_\infty$ , а затем для получения инвариантного подпространства заданного на  $H$  оператора к упомянутому конечномерному результату применяется принцип переноса: см. Bernstein [1], Robinson [1].

## 2.4. Нестандартные методы в теории банаховых пространств

Конструкция *нестандартной оболочки* (см. § 2.2) нашла важные применения в изучении локальных свойств банаховых пространств. У нашей книги иная цель, но мы чувствуем, что наш вводный обзор будет неполон, если мы хотя бы мельком не упомянем об этой области плодотворных применений нестандартных методов.

Пусть  $(F, \|\cdot\|)$  — внутреннее нормированное линейное пространство. В § 2.2 было введено понятие нестандартной оболочки пространства  $F$ , обозначавшейся  $\hat{F} = \text{Fin}(F)/\approx$ , и показано, что  $\hat{F}$  — банахово пространство. В случае, когда  $F = {}^*E$  — нестандартная версия стандартного нормированного пространства  $E$ , мы будем часто называть  $\hat{F}$  *нестандартной оболочкой пространства  $E$*  и писать  $\hat{E}$  вместо  ${}^*E$ . Заметим, что в этом случае существует изометрическое вложение пространства  $E$  в  $\hat{E}$ .

**2.4.1. Пример.** Для любых  $p \geq 1$ ,  $p \in {}^*\mathbb{R}$ , и  $n \in {}^*\mathbb{N}$  можно определить внутреннее пространство  $l_p(n)$  в точности так же, как определяется соответствующее стандартное понятие.<sup>1)</sup> Нестандартные оболочки  $\hat{l}_p(n)$  для различных  $p$  и  $n$  дают много интересных примеров гиперконечномерных пространств. Легко видеть, что если  $p$  и  $n$  оба конечны, то  $\hat{l}_p(n)$  порядково изометрично  $l_{p'}(n)$ , где  $p' = \text{st}(p)$ . Если  $p$  бесконечно велико, а  $n$  конечно, то  $\hat{l}_p(n)$  изометрично  $l_\infty(n)$ . Но если  $n$  бесконечно велико, возникают новые возможности: см. Henson, Moore [1], § 9.

<sup>1)</sup> Стандартное пространство  $l_p(n)$  состоит из числовых последовательностей  $a = (a_1, \dots, a_n)$  длины  $n$  и имеет норму, задаваемую формулой  $\|a\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}$ . Применяя к стандартной функции  $(p, n) \mapsto l_p(n)$  ка-

ноническое внутреннее продолжение, мы получим  $l_p(n)$  при любых  $p \geq 1$ ,  $p \in {}^*\mathbb{R}$  и  $n \in {}^*\mathbb{N}$ . В  $l_p(n)$  имеется конус положительных элементов  $a$ , для которых  $a_i \geq 0$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Этот конус определяет в  $l_p(n)$  частичное упорядочение и можно говорить о порядковых отображениях, порядковых изометриях и т. п. этих пространств. — *Прим. ред.*



Как отмечалось в § 2.2, понятие нестандартной оболочки было введено в работе Luxemburg [1]. Параллельно Кривиным, а затем Стерном развивалась теория, использующая ультрапроизведения. Обширное введение можно найти в недавних обзорах Heinrich [1] и Henson, Мооге [1]; их авторы входят в число тех, кто внес основной вклад в эту область. Мы упоминаем о ней лишь вкратце, а за подробностями отсылаем читателя к указанным работам.

Напомним, что банахово пространство  $E$  называется *рефлексивным*, если каноническое вложение  $E$  во второе сопряженное пространство  $E^{**}$  сюръективно. Более сильное условие *суперрефлексивности* оказалось важным во многих отношениях. Чтобы объяснить его нам потребуется понятие финитной представимости.

Пусть  $E$  и  $F$  — стандартные банаховы пространства. Пространство  $E$  называется *финитно представимым* в  $F$ , если для любого конечномерного подпространства  $E_0 \subset E$  и любого действительного  $\varepsilon > 0$  существует такое линейное отображение  $T: E_0 \rightarrow F$ , что

$$\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon) \|x\|$$

для всех  $x \in E_0$ . Пространство  $F$  называется *суперрефлексивным*, если из финитной представимости  $E$  в  $F$  следует рефлексивность  $E$ <sup>1)</sup>. Каждое суперрефлексивное банахово пространство рефлексивно, но обратное, вообще говоря, неверно.

**2.4.2. Предложение.** *Нестандартная оболочка  $\hat{F}$  рефлексивна тогда и только тогда, когда она суперрефлексивна.*

Пусть  $\hat{F}$  рефлексивно; тогда любое сепарабельное подпространство  $E \subset \hat{F}$  рефлексивно. Нужно доказать, что любое сепарабельное пространство  $E$ , финитно представимое в  $\hat{F}$ , рефлексивно. Финитная представимость в некотором пространстве, вообще говоря, вовсе не то же самое, что изоморфность какому-то его подпространству. Однако для нестандартных оболочек справедлив следующий результат, который и доказывает предложение 2.4.2.

**2.4.3. Предложение.** *Пусть  $E$  — сепарабельное банахово пространство,  $F$  — внутреннее банахово пространство. Тогда  $E$  финитно представимо в  $\hat{F}$  тогда и только тогда, когда  $E$  изометрически вкладывается в  $\hat{F}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $E$  финитно представимо в  $\hat{F}$ . Поскольку  $E$  сепарабельно, существует такая возрастающая

---

<sup>1)</sup> При этом, как легко проверить, можно ограничиться сепарабельными пространствами  $E$ . — *Прим. ред.*

последовательность  $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$  конечномерных подпространств в  $E$ , что  $\dim(E_n) = n$  и  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  плотно в  $E$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $E_n$ ; по предположению существует такое линейное отображение  $T_n: E_n \rightarrow F$ , что  $\|x\| \leq \|T_n x\| \leq (1 + 1/2n)\|x\|$  для всех  $x \in E_n$ . Выберем такие элементы  $p_1, p_2, \dots, p_n \in F$ , что  $p_i / \approx = T_n(e_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда отображение  $T'_n$  пространства  ${}^*E_n$  на линейную оболочку (в смысле  $V({}^*\mathbb{R})$ ) векторов  $p_1, \dots, p_n$  в  $F$ , задаваемое формулой

$$T'_n \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k,$$

является *внутренним*, линейным, взаимно однозначным отображением  ${}^*E_n$  в  $F$ , удовлетворяющим условию

$$(1) \quad (1 - 1/n)\|q\| \leq \|T'_n q\| \leq (1 + 1/n)\|q\|$$

при  $q \in {}^*E_n$ ,  $\|q\| = 1$ .

Теперь все готово для применения принципа внутреннего определения. Множество чисел  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , для которых существует внутреннее линейное взаимно однозначное отображение  $T'_n$  пространства  ${}^*E_n$  в  $F$ , удовлетворяющее условию (1), является внутренним и содержит  $\mathbb{N}$ ; значит, оно содержит некоторое  $n_0 \in \infty {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Отображение  $T$ , задаваемое формулой

$$T(q/\approx) = T'_{n_0}(q)/\approx,$$

определяет вложение нестандартной оболочки  $\hat{E}_{n_0}$  пространства  $E_{n_0}$  в  $\hat{F}$ . Поскольку объединение  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  естественным образом содержится в гиперконечном расширении  $E_{n_0}$ , то ограничение отображения  $T$  на  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , будучи продолженным на  $E$ , дает требуемое изометричное вложение  $E$  в  $F$ .  $\square$

Используя эти идеи, можно дать простое доказательство одного результата Энфло, Линденстраусса и Пизье (см. Enflo и др. [1]). Хорошо известно, что для рефлексивности «*проблема трех пространств*» решается положительно: если  $E$  — банахово пространство, а  $F$  — его замкнутое подпространство, и пространства  $F$  и  $E/F$  оба рефлексивны, то  $E$  тоже рефлексивно. Энфло и соавторы показали, что для суперрефлексивности проблема трех пространств также имеет положительное решение. Раков заметил, что конструкция нестандартной оболочки дает следующее простое доказательство этого факта (дальнейшие ссылки см. в работе Heinrich [1]).

**2.4.4. Предложение.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $F$  — его замкнутое подпространство. Если пространства  $F$  и  $E/F$  оба суперрефлексивны, то  $E$  тоже суперрефлексивно.

*Доказательство.* Простые рассуждения показывают, что если банахово пространство  $E$  суперрефлексивно, то  $\hat{E}$  рефлексивно. Далее, простое вычисление показывает, что нестандартная оболочка пространства  $E/F$  канонически изометрична  $\hat{E}/\hat{F}$ . Поэтому из условий теоремы следует, что  $\hat{F}$  и  $\hat{E}/\hat{F}$  рефлексивны. Из предложения 2.4.2 вытекает, что  $\hat{E}$  суперрефлексивно, а значит, очевидно, таково же и  $E$ , поскольку  $\hat{E}$  может рассматриваться как подпространство в  $\hat{E}$ .  $\square$

На этом мы заканчиваем наш обзор. Приведенное здесь доказательство проблемы трех пространств для суперрефлексивности наглядно демонстрирует силу конструкции нестандартной оболочки или ультрастепени. Но в нашем беглом изложении мы не коснулись по-настоящему глубоких и трудных результатов, таких, как теорема Кюрстена — Стерна о локальной двойственности и результаты Кривина о блочно финитной представимости базисов пространств  $c_0$  и  $l_p$ . За этими и другими приложениями мы вновь отсылаем читателя к обзорам Heinrich [1] и Henson, Moore [1].

## Глава 3

### Вероятность

Эта глава содержит введение в *гиперконечную теорию вероятностей*, одновременно представляя необходимые основы из теории меры и интегрирования. Мы иллюстрируем общую теорию, обсуждая частный, но важный случай броуновского движения. В последних двух параграфах изложен гиперконечный подход к предельным теоремам и продолжению мер.

#### 3.1. Мера Лёба

Теория меры и теория вероятностей в контексте нестандартного анализа изучались с давних пор. Однако, существовал один неприятный момент:  $*$ -продолжение счетно аддитивной меры, вообще говоря, не счетно аддитивно в расширенном универсуме  $V(*\mathbb{R})$ . Прорыв произошел после выхода работы Лёба (Loeb [2]). Принадлежащая ему конструкция *меры Лёба*, превращающая внутреннюю меру в стандартную счетно аддитивную меру, является ключом к нестандартному подходу к стохастическому анализу.

Пусть  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  — внутреннее пространство с мерой; это значит, что  $X$  — внутреннее множество из  $V(*\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{A}$  — внутренняя алгебра подмножеств множества  $X$ , а  $\nu$  — конечно аддитивная внутренняя мера на  $\mathcal{A}$  со значениями в  $(*\mathbb{R})_+$ . То, что алгебра  $\mathcal{A}$  — внутренняя, означает, что  $\mathcal{A}$  замкнута также и относительно  $*$ -конечных объединений, т. е. если  $\omega \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $\{A_i\}$  — внутренняя последовательность множеств и  $A_i \in \mathcal{A}$  для всех  $i$ , то  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\omega \in \mathcal{A}$ .

Внутренняя алгебра  $\mathcal{A}$  стандартным образом порождает внешнюю  $\sigma$ -алгебру  $\sigma(\mathcal{A})$ . Можно ли каким-нибудь образом получить из меры  $\nu$  на  $\mathcal{A}$  стандартную счетно аддитивную меру на  $\sigma(\mathcal{A})$ ? Конкретнее, пусть  ${}^\circ\nu$  — *стандартная часть*  $\nu$ , т. е. функция множества

$${}^\circ\nu(A) = {}^\circ(\nu(A)), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Тогда  ${}^\circ\nu$  отображает  $\mathcal{A}$  в  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ . Продолжается ли  ${}^\circ\nu$  с  $\mathcal{A}$  на  $\sigma(\mathcal{A})$ ?

Если  $\nu$  — внутренняя вероятностная мера, т. е.  $\nu(X) = 1$ , принцип счетного насыщения 2.1.2 дает немедленный утвердительный ответ. В этом случае  ${}^\circ\nu$  является конечной мерой на алгебре  $\mathcal{A}$ , а хорошо известно, что такая мера продолжается до счетно аддитивной меры на  $\sigma(\mathcal{A})$  при выполнении следующего условия непрерывности: если  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  и  $A_n \downarrow \emptyset$ <sup>1)</sup>, то  ${}^\circ\nu(A_n) \downarrow 0$ . Но это условие тривиально следует из принципа насыщения 2.1.2: если  $A_n \downarrow \emptyset$ , то  $A_n = \emptyset$  для некоторого конечного  $n$  и потому сходимость тривиальна.

В общем случае ответ дает процедура продолжения меры по Каратеодори.<sup>2)</sup> Чтобы это доказать, нам потребуется следующая техническая лемма, показывающая, что счетное объединение непересекающихся непустых множеств из  $\mathcal{A}$  само никогда не будет элементом алгебры  $\mathcal{A}$ , откуда тривиально следует счетная аддитивность меры  ${}^\circ\nu$  на  $\mathcal{A}$ .

**3.1.1. Лемма.** Пусть  $A_n \in \mathcal{A}$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; тогда если  $A_0 \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , то существует такое (конечное)  $m > 0$ , что  $A_0 \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ .

Пусть  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  — внутренняя последовательность, продолжающая последовательность  $A_0, A_1, A_2, \dots$  (см. 2.1.3). Тогда множество

$$\left\{ m \in {}^*\mathbb{N} \mid A_0 \subset \bigcup_{n=1}^m A_n \right\}$$

— внутреннее и содержит любое  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Значит, согласно 1.2.7, оно должно содержать некоторое  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Теперь мы можем сформулировать принадлежащий П. Лёбу (Loeb [2]) основной результат.

**3.1.2. Теорема.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  — внутреннее пространство с мерой. Тогда мера  ${}^\circ\nu$  имеет единственное счетно аддитивное продолжение (обозначаемое через  $L(\nu)$ ) на  $\sigma$ -алгебру  $\sigma(\mathcal{A})$ , порожденную алгеброй  $\mathcal{A}$ . Более того, если  ${}^\circ\nu(X) < \infty$ , то

(i) для любого  $B \in \sigma(\mathcal{A})$  найдется такое  $A \in \mathcal{A}$ , что  $L(\nu)(A \Delta B) = 0$  (где  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ );

(ii) для любых  $B \in \sigma(\mathcal{A})$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдутся такие множества  $C, D \in \mathcal{A}$ , что  $C \subset B \subset D$  и  $L(\nu)(D) - \varepsilon \leq L(\nu)(B) \leq L(\nu)(C) + \varepsilon$ .

Существование  $L$  с очевидностью следует из теоремы Каратеодори о продолжении мер; из нее же вытекает единственность

<sup>1)</sup> Т. е.  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и  $\bigcap_n A_n = \emptyset$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> См., например, Лоев [1\*], гл. 1, § 4. — Прим. перев.

$L(\nu)$  при условии, что  ${}^\circ \nu(X) < \infty$ . Если мера  $\nu$  бесконечна, то для установления единственности  $L(\nu)$  требуются более тонкие рассуждения: см. Neeson [2]. Поскольку нас в основном интересуют вероятностные меры, мы эти рассуждения опустим.

Докажем (ii). По построению меры  $L(\nu)$  существует такая последовательность  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов алгебры  $\mathcal{A}$ , что  $A_n \subset A_{n+1}$  и  $B \subset \tilde{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , причем  $L(\nu)(\tilde{B}) < L(\nu)(B) + \varepsilon$ .

Продолжим эту последовательность до внутренней последовательности  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ . Очевидно,  $B \subset \tilde{B} \subset A_\omega$  для любого  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Нам нужно выбрать такое  $\omega$ , что  $\nu(A_\omega) \leq L(\nu)(B) + \varepsilon$ , тогда мы могли бы положить  $D = A_\omega$ . Пусть  $r = L(\nu)(B)$ ; рассмотрим множество  $\{m \in {}^*\mathbb{N} \mid \nu(A_m) \leq r + \varepsilon\}$ . Это множество внутреннее и содержит  $\mathbb{N}$ . Значит, оно содержит также некоторое  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что и требовалось. Заметим, что  $L(\nu)$  и  $B$  — внешние объекты, но число  $r$  — внутренний объект. Применяя те же рассуждения к множеству  $X - B$ , находим  $C$ .

Теперь легко доказать (i). Для каждого конечного  $n$  пусть  $C_n$  и  $D_n$  — такие элементы алгебры  $\mathcal{A}$ , что  $C_n \subset B \subset D_n$  и

$$L(\nu)(D_n) - 1/n \leq L(\nu)(B) \leq L(\nu)(C_n) + 1/n.$$

Можно считать, что последовательность  $(C_n)$  возрастает, а  $(D_n)$  убывает. Продолжим  $(C_n)$  и  $(D_n)$  до возрастающей и убывающей внутренних последовательностей, причем так, что  $C_n \subset D_n$  для всех  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , и положим  $A = C_\omega$  для некоторого  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .  $\square$

**3.1.3. Пример.** Пространство  $2^{\mathbb{N}}$  бесконечных последовательностей нулей и единиц — это стандартная модель бесконечного (или неограниченного) подбрасывания монеты. Более точно, моделью является пространство с мерой  $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ , определяемое следующим образом: на каждом сомножителе  $2 = \{0, 1\}$  берется  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств и «считающая» мера, приписывающая одинаковый вес каждой точке пространства. Тогда  $\mathcal{B}$  — это обычная  $\sigma$ -алгебра в произведении измеримых пространств, а  $\mu$  — мера, являющаяся произведением мер на сомножителях. В этом случае существование  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}$  и меры  $\mu$  тривиально; в более общих случаях часто возникают проблемы.

Нестандартный метод моделирования того же явления состоит в выборе некоторого  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и рассмотрении пространства  $\Omega = \{0, 1\}^\eta$  всех внутренних последовательностей нулей и единиц длины  $\eta$ . В этом случае пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ , и  $P$  — соответствующая считающая мера. Последнее означает, что для любого  $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = |A|/2^\eta,$$

где  $|A|$  — внутренняя мощность внутреннего множества  $A \subset \Omega$ , т. е. число элементов в  $A$ , а  $2^n = |\Omega|$ .

Мы получили внутреннее пространство с мерой  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Пусть  $L(P)$  — соответствующая мера Лёба на  $\sigma(\mathcal{A})$ . Тогда  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), L(P))$  — стандартное вероятностное пространство, хотя и с довольно необычным пространством элементарных событий. Возможная польза нестандартного подхода состоит в том, что мы можем «играть» одновременно с двумя пространствами. Первое из них  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , будучи внутренним объектом, в некотором смысле «конечно»: в нем можно производить вычисления так, как если бы мы в самом деле были в конечной ситуации. Второе пространство  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), L(P))$  является внешним объектом, но зато имеет хорошую теорию меры и интегрирования.

Как связано с этими структурами пространство  $(2^N, \mathcal{B}, \mu)$ ? Оно должно быть «стандартной частью» нестандартной конструкции, если только придать этим словам подходящий смысл. Пусть  $\text{st}_\eta: \Omega \rightarrow 2^N$  есть отображение ограничения; хотелось бы утверждать, что для любого  $A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = L(P)(\text{st}_\eta^{-1}(A)),$$

т. е. что отображение  $\text{st}_\eta$  сохраняет меру. Это утверждение почти верно: нужно только проявить чуточку аккуратности в обращении с соответствующими  $\sigma$ -алгебрами.

**3.1.4. Замечание.** До сих пор мы рассматривали продолжение  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), L(P))$  пространства  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Часто более удобно работать с пополнением пространства  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), L(P))$ <sup>1)</sup>. Обозначим это пополнение через  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$  и будем называть его *пространством Лёба*, ассоциированным с  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Аналогично, пополненная мера  $L(P)$  будет называться *мерой Лёба*, отвечающей мере  $P$ . Возвращаясь к предыдущему примеру, можно показать, что если  $A \in \mathcal{B}$ , то  $\text{st}_\eta^{-1}(A) \in L(\mathcal{A})$  в  $\Omega$ ; см. общее обсуждение в § 3.4, 3.5.

**3.1.5. Замечание.** Хотя для получения мер Лёба мы использовали теорему Каратеодори о продолжении мер, существует простой и элегантный прямой метод, не предполагающий никаких исходных сведений из теории меры: по внутренней мере  $P$  на внутренней алгебре  $\mathcal{A}$  можно определить внутреннюю<sup>2)</sup> и

<sup>1)</sup> Получаемым расширением  $\sigma(\mathcal{A})$  с помощью присоединения всех множеств внешней  $L(P)$ -меры 0 и естественным продолжением меры  $L(P)$  на полученную  $\sigma$ -алгебру. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Здесь «внутренняя» понимается в смысле теории меры, а не нестандартного анализа («inner» в отличие от «internal»). — *Прим. перев.*

внешнюю меры  $\underline{P}$  и  $\bar{P}$  формулами

$$\underline{P}(A) = \sup \{P(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$$

и

$$\bar{P}(A) = \inf \{P(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \supset A\}.$$

Тогда  $\sigma$ -алгебра Лёба  $L(\mathcal{A})$  — это просто набор всех таких множеств  $A$ , что  $\underline{P}(A) = \bar{P}(A)$ , и  $L(P)(A)$  — это общее значение  $\underline{P}(A)$  и  $\bar{P}(A)$ . Детали см. в работах Cutland [3] и Stroyan, Bayod [1].

Более радикально отличающийся от нашего даниэлевский подход к нестандартной теории меры отстаивает Р. Лёб в работах Loeb [8], [9] (см. также Hurd, Loeb [1]); достоинством этого подхода является возможность развивать теории меры и интегрирования одновременно. Возможны интересные связи этого подхода с теорией векторнозначных мер Лёба — темой, которая лишь недавно начала привлекать внимание (Osswald [1], [3]; Živaljević [1]).

### 3.2. Гиперконечные вероятностные пространства

Мы утверждали выше, что наша внутренняя модель  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  «в подходящем смысле» конечна. Сейчас мы уточним смысл этого высказывания.

Подмножество  $A \subset \mathbb{N}$  конечно, если оно является подмножеством некоторого собственного начального отрезка множества  $\mathbb{N}$ , т. е.  $A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Внутреннее подмножество  $A \subset {}^*\mathbb{N}$  называется *гиперконечным* (или *\*-конечным*), если  $A \subset \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq m\}$  для некоторого  $m \in {}^*\mathbb{N}$ . Вообще, некоторое внутреннее множество  $E \in V({}^*\mathbb{R})$  называется гиперконечным, если существует внутреннее взаимно однозначное соответствие между  $E$  и некоторым гиперконечным подмножеством множества  ${}^*\mathbb{N}$ . Это определение эквивалентно следующему:

**3.2.1. Определение.** Внутреннее множество  $E \in V({}^*\mathbb{R})$  называется *гиперконечным*, если существует внутренняя биекция  $f$  некоторого собственного начального отрезка  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq m\}$  множества  ${}^*\mathbb{N}$  на  $E$ . Число  $m$  называется *внутренней мощностью* множества  $E$ , или (внутренним) количеством элементов в  $E$  и обозначается  $|E|$ .

**Замечание.** В модели ограниченных ультрастепеней внутреннее множество  $A$  определялось с помощью ограниченной последовательности множеств  $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ ; см. замечание после определения 1.2.5. Если каждое множество  $A_n$  конечно, то  $A$  будет гиперконечным множеством, а его внутренняя мощность будет гиперконечным целым числом (т. е. элементом  ${}^*\mathbb{N}$ ), определяемым последовательностью  $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, \dots)$



стандартных целых чисел; здесь  $|A_n|$  — число элементов в  $A_n$ . Любое гиперконечное множество в этой модели описывается таким образом.

Здесь уместно обратить внимание читателя на различие между *внутренней* и *внешней* мощностью. Внутренней мощностью отрезка  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$ , где  $n_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , служит гиперконечное число  $n_0$ ; это означает, что не существует *внутренней* биекции этого отрезка на меньший отрезок. Но если смотреть на это множество «снаружи», т. е. в полной структуре  $V({}^*\mathbb{R})$ , то оно окажется несчетным; это означает, что не существует (внешнего) отображения множества  $\mathbb{N}$  на  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$ . Это следует из того общего факта, что любое внутреннее множество либо конечно, либо несчетно. В самом деле, пусть  $A$  — внутреннее множество, счетное (но не конечное) с внешней точки зрения, т. е. имеется внешняя нумерация элементов множества  $A$  в  $V({}^*\mathbb{R})$ :  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n \dots\}$ . Тогда можно определить внутренние множества  $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , положив  $A_0 = A$  и  $A_n = A - \{a_1, \dots, a_n\}$  для  $n > 0$ . Множества  $A_0, A_1, \dots$  образуют внешнюю последовательность непустых внутренних множеств. По принципу насыщения 2.1.2  $\bigcap A_n \neq \emptyset$ , что противоречит предположению. Точное значение внешней мощности внутреннего множества зависит от того, какая конкретно выбрана конструкция ультрастепени. Но для нашей теории важным понятием является внутренняя мощность, а она обладает хорошими свойствами.

Определение 3.2.1 уточняет, в каком смысле множество  $\Omega = \{0, 1\}^\eta$  из примера 3.1.3 «конечно»: оно гиперконечно. Мы видим, что определение  $P(A) = |A|/|\Omega|$  является точным аналогом определения считающих мер на конечных вероятностных пространствах.

В дальнейшем внутреннее вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , в котором множество  $\Omega$  гиперконечно, мы будем называть *гиперконечным вероятностным пространством*.

**3.2.2. Пример.** Другим важным примером гиперконечного вероятностного пространства служит *гиперконечная ось времени*. Идея состоит в том, чтобы заменить временной интервал  $[0, 1]$  на гиперконечное множество  $T$ . Для этой цели выберем некоторое  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , так что  $\Delta t = \eta^{-1}$  — положительное бесконечно малое. Возьмем

$$T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, \eta\Delta t = 1\};$$

тогда множество  $T$  гиперконечно<sup>1)</sup>. Заметим, что если  $\eta = \omega!$

<sup>1)</sup> В дальнейшем авторы называют  $T$  гиперконечной осью времени, хотя более естественно было бы называть  $T$  гиперконечным отрезком  $[0, 1]$ , определив аналогичным образом другие гиперконечные отрезки и интервалы (в том числе бесконечные). — *Прим. ред.*

для некоторого  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то каждое стандартное рациональное число  $m/n \in [0, 1]$  принадлежит множеству  $T$ ; все они имеют вид  $\lambda \Delta t$  для некоторого  $\lambda \leq \eta$ . Отображение стандартной части  $^\circ: T \rightarrow [0, 1]$  есть отображение  $na$ : ни одно иррациональное число  $r \in [0, 1]$  не принадлежит  $T$ , но для любого иррационального  $r$  существует единственное  $t \in T$ , для которого  $t < r < t + \Delta t$ .

Пусть  $P$  — считающая мера на  $T$ , т. е. для любого внутреннего множества  $A \subset T$  положим

$$P(A) = |A|/|T|.$$

Как мы увидим ниже, пространство  $(T, \mathcal{A}, P)$ , где  $\mathcal{A}$  — внутренняя алгебра всех внутренних подмножеств множества  $T$ , и отвечающее ему пространство Лёба  $(T, L(\mathcal{A}), L(P))$  заменят нам обычное лебеговское пространство  $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$ , где  $\mathcal{B}$  есть  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка  $[0, 1]$ , а  $\mu$  — стандартная мера Лебега.

Пространства и меры дают необходимые рамки, в которых центральными объектами являются отображения и процессы. *Стандартный случайный процесс* — это отображение

$$x: E \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $(E, \mathcal{B}, \mu)$  — некоторое вероятностное пространство. В качестве пространства значений процесса здесь выбрано  $\mathbb{R}$ , но могло бы быть, например, какое-нибудь подходящее сепарабельное метрическое пространство.

*Гиперконечный случайный процесс* — это внутреннее отображение

$$X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R},$$

где  $T$  — гиперконечная ось времени, а  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — некоторое гиперконечное вероятностное пространство.

Мы хотим получить из  $X$  стандартный процесс  $x$ , взяв «стандартную часть». И наоборот, если исходным является внешний объект, а именно, стандартный процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ , можно ли приблизить его гиперконечным процессом  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ? Процессы суть функции двух переменных; поэтому нужно уметь приближать внешние объекты внутренними на каждом сомножителе. Это приводит нас к понятию поднятия.

**3.2.3. Определение.** (1). Пусть даны функции  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Функция  $F$  называется *поднятием* функции  $f$ , если  $F$  — внутренняя, и

$$^\circ F(\omega) = f(\omega)$$

для почти всех  $\omega \in \Omega$  по мере Лёба  $L(P)$  на  $\Omega$ .

(2) Пусть даны функции  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Функция  $F$  называется *поднятием* функции  $f$ , если  $F$  — внутренняя и

$${}^\circ F(t) = f({}^\circ t)$$

для почти всех  $t \in T$  по мере Лёба  $L(P)$  на  $T$ .

Справедлив следующий важный результат.

**3.2.4. Теорема.** (1) Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство и  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$  — соответствующее пространство Лёба. Функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лёбу (т. е. по мере  $L(P)$ ) тогда и только тогда, когда она имеет поднятие  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ .

(2) Пусть  $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$  — стандартное пространство Лебега<sup>1)</sup>, и  $(T, L(\mathcal{A}), L(P))$  — пространство Лёба, соответствующее гиперконечной оси времени  $T$ . Функция  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда она имеет поднятие  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ .

Заметим, что  $\mathbb{R}$  здесь можно заменить на любое сепарабельное метрическое пространство, например, на пространство  $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  с компактно-открытой топологией.

Докажем (1). Пусть  $F$  — поднятие функции  $f$ . Положим  $N_{1/n}(r) = \{r' \in \mathbb{R} \mid |r - r'| < 1/n\}$ ; множество  $N_{1/n}(r)$  — стандартная окрестность точки  $r \in \mathbb{R}$ . Нужно доказать, что множество  $f^{-1}(N_{1/n}(r))$  измеримо по Лёбу. Поскольку  $F$  есть поднятие функции  $f$ , множество

$$U = \{\omega \in \Omega \mid {}^\circ F(\omega) = f(\omega)\}$$

имеет  $L(P)$ -меру 1. Пусть  $\omega \in U$ ; тогда

$$\begin{aligned} f(\omega) \in N_{1/n}(r) &\Leftrightarrow |r - {}^\circ F(\omega)| < 1/n \Leftrightarrow |r - F(\omega)| < 1/n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |r - F(\omega)| \leq 1/n - 1/m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Здесь первая эквивалентность верна по построению, вторая следует из непрерывности абсолютной величины. Важность третьей эквивалентности состоит в том, что *внешнее* условие  $|r - F(\omega)| < 1/n$  заменено на *внутреннее* условие  $|r - F(\omega)| \leq 1/n - 1/m$ . Поэтому  $\{\omega \in \Omega \mid |r - F(\omega)| \leq 1/n - 1/m\} \in \mathcal{A}$ , следовательно,  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid |r - F(\omega)| \leq 1/n - 1/m\} \in L(\mathcal{A})$ . Зна-

чит,

$$U \cap f^{-1}(N_{1/n}(r)) \in L(\mathcal{A}),$$

откуда следует, что функция  $f$  измерима по Лёбу.

Докажем обратное утверждение. Пусть  $N_1, N_2, \dots$  — счетная база открытых подмножеств в  $\mathbb{R}$  и  $U_n = f^{-1}(N_n) \in L(\mathcal{A})$ . По

<sup>1)</sup> Т. е.  $\mathcal{B}$  есть  $\sigma$ -алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств в  $[0, 1]$ ,  $\mu$  — обычная мера Лебега. — *Прим. ред.*

теореме 3.1.2 можно найти такие внутренние множества  $A_{n,m}$ , что  $L(P)(U_n) \leq P(A_{n,m}) + 1/m$  и  $A_{n,m} \subset A_{n,m+1} \subset U_n$ . Мы получаем

$$L(P)\left(U_n - \bigcup_m A_{n,m}\right) = 0.$$

Значит, множество  $U = \Omega - \bigcup_n \left(U_n - \bigcup_m A_{n,m}\right)$  имеет меру Лёба 1.

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  пусть  $\mathcal{G}_{n,m}$  — внутреннее множество всех внутренних функций  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , для которых  $F(A_{k,l}) \subset {}^*N_k$  при всех  $k \leq n$ ,  $l \leq m$ . Каждое множество  $\mathcal{G}_{n,m}$  не пусто<sup>1)</sup>. Значит, по принципу насыщения 2.1.2 существует такая внутренняя функция  $F$ , что  $F \in \bigcap \mathcal{G}_{n,m}$ . Тогда для  $\omega \in U$  имеем

$$F(\omega) \in \bigcap \{{}^*N_n \mid f(\omega) \in N_n\}.$$

Поскольку  $N_1, N_2, \dots$  — база открытых множеств в  $\mathbb{R}$ , мы заключаем, что  ${}^\circ F(\omega) = f(\omega)$  для всех  $\omega \in U$ . Значит,  $F$  является поднятием функции  $f$ .

Для доказательства части (2) теоремы 3.2.4 нам потребуется следующий результат.

**3.2.5. Предложение.** *Множество  $A \subset [0, 1]$  измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда множество  $\text{st}^{-1}(A) = \{t \in \mathbb{T} \mid {}^\circ t \in A\}$  измеримо по Лёбу. В этом случае  $\mu(A) = L(P)(\text{st}^{-1}(A))$ .*

Здесь уместно напомнить читателю обсуждение из примера 3.1.3. С помощью предложения 3.2.5 утверждение 3.2.4 (2) легко сводится к 3.2.4 (1). В самом деле, для функции  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  определим  $f_1: T \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $f_1(t) = f({}^\circ t)$ . Выбрав любое открытое  $U \subset \mathbb{R}$ , мы видим, что в силу предложения 3.2.5 множество  $f^{-1}(U)$  измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда  $f_1^{-1}(U)$  измеримо по Лёбу. Построенное согласно (1) поднятие  $F$  функции  $f_1$  является также поднятием функции  $f$ .

Интуитивный смысл предложения 3.2.5 совершенно ясен. Мера Лебега — это равномерная мера на  $[0, 1]$ , т. е. континуальный аналог считающей меры. Соответствующая мера Лёба является считающей мерой на гиперконечной аппроксимации  $T$  отрезка  $[0, 1]$ . Поэтому все уже было бы ясно, если бы не тот факт, что вопрос касается также и  $\sigma$ -алгебр.

<sup>1)</sup> Для построения функции  $F \in \mathcal{G}_{n,m}$  нужно задать  $F$  на  $B_1 = A_{1,m} - (A_{2,m} \cup A_{3,m} \cup \dots \cup A_{n,m})$  как постоянную из  $N_1$ , затем на  $B_{1,2} = (A_{1,m} \cap A_{2,m}) - (A_{3,m} \cup \dots \cup A_{n,m})$  как постоянную из  $N_1 \cap N_2$  (это возможно, поскольку из непустоты множества  $B_{1,2}$  вытекает в силу определения множеств  $A_{k,l}$  непустота множества  $U_1 \cap U_2$ , а тогда непусто и  $N_1 \cap N_2 = f^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ) и т. д. — Прим. ред.

Половина доказательства вполне очевидна. А именно, пусть множество  $A$  измеримо по Лебегу. Применение общих конструкций приводит к тому, что можно ограничиться случаем, когда  $A = [a, b)$ , где  $a, b \in T^1$ ; тогда  $st^{-1}(A) = \bigcup_m \bigcap_n \{t \in T \mid a - 1/n \leq t < b - 1/m\}$ . Значит,  $st^{-1}(A) \in L(\mathcal{A})$ ; при этом легко проверить, что  $L(P)(st^{-1}(A)) = b - a$ .

Для доказательства обратного утверждения используем тот факт, что если  $B$  — внутреннее подмножество множества  $T$  в  ${}^*\mathbb{R}$ , то  $st(B)$  — замкнутое, и, следовательно, компактное подмножество отрезка  $[0, 1]$  в  $\mathbb{R}$  (см. предложение 2.1.8). Пусть теперь  $A \subset [0, 1]$  и  $st^{-1}(A) \in L(\mathcal{A})$ . Нужно доказать, что множество  $A$  измеримо по Лебегу. Взяв произвольное  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , мы можем, согласно теореме 3.1.2, найти такое внутреннее множество  $B \subset st^{-1}(A)$ , что  $P(B) > L(P)(st^{-1}(A)) - \varepsilon$ . Множество  $C = st(B) \subset A$  — компактное подмножество отрезка  $[0, 1]$ , и, следовательно, измеримо по Лебегу. Согласно первой части нашего доказательства,  $st^{-1}(C) \in L(\mathcal{A})$ , и  $\mu(C) = L(P)(st^{-1}(C)) \geq \mu(st^{-1}(C)) \geq L(P)(st^{-1}(A)) - \varepsilon$ . Используя двойственные рассуждения, можно для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найти такое открытое множество  $D \supset A$ , что  $\mu(D) \leq L(P)(st^{-1}(A)) + \varepsilon$ . Отсюда вытекают измеримость множества  $A$  по Лебегу и равенство  $\mu(A) = L(P)(st^{-1}(A))$ .  $\square$

**3.2.6. Замечание.** Приведенные выше рассуждения можно обобщить таким образом, чтобы показать, что любое радоновское вероятностное пространство может быть получено из гиперконечного вероятностного пространства с помощью отображения, сохраняющего меру. В нашем случае отображение стандартной части  $st: T \rightarrow [0, 1]$  есть сохраняющее меру отображение из  $(T, L(\mathcal{A}), L(P))$  в  $([0, 1], \mathcal{B}, \mu)$ . Более полное обсуждение см. в работах Anderson [2], [3], а также в §§ 3.4, 3.5.

Теория интегрирования в гиперконечном вероятностном пространстве особенно проста.

**3.2.7. Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство, где  $\mathcal{A}$  — алгебра всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ , а  $P$  — считающая мера на  $\mathcal{A}$ . Пусть  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция. *Математическое ожидание*

---

<sup>1)</sup> Монотонность и счетная аддитивность мер  $\mu$  и  $L(P)$  позволяет тогда перейти к интервалам и отрезкам с любыми концами, а затем к любым открытым множествам. После этого использование внешней меры показывает, что если  $\mu(A) = 0$ , то  $L(P)(st^{-1}(A)) = 0$ . Теперь случай любого  $\mu$ -измеримого  $A$  получается с помощью рассмотрения его внешней и внутренней мер. — *Прим. ред.*

$E(F)$  функции  $F$  определяется по формуле

$$E(F) = \int_{\Omega} F(\omega) dP = \sum_{\omega \in \Omega} F(\omega) \cdot \frac{1}{|\Omega|}.$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Во-первых, гиперконечная сумма  $\sum_{\omega \in \Omega}$  существует по принципу переноса, так что  $E(F)$  — корректно определенное гипердействительное число.

Во-вторых, мы ограничились интегрированием по считающей мере  $P$ . Но можно было также разным точкам множества  $\Omega$  приписать разные веса. Пусть  $\{a_{\omega} | \omega \in \Omega\}$  — такая внутренняя последовательность, что  $\sum a_{\omega} = 1$ . По ней обычным образом определяются гиперконечная вероятностная мера на  $\Omega$  и отвечающее ей математическое ожидание

$$E(F) = \sum_{\omega \in \Omega} F(\omega) a_{\omega}.$$

В-третьих, можно развивать всю теорию для произвольной внутренней алгебры  $\mathcal{A}$ ; нужно лишь в соответствующих местах предполагать  $\mathcal{A}$ -измеримость. Например, в теореме 3.2.4(1) функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  окажется измеримой по Лёбу (т. е.  $L(\mathcal{A})$ -измеримой) тогда и только тогда, когда она имеет  $\mathcal{A}$ -измеримое поднятие  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ .

Теперь свяжем гиперконечное математическое ожидание со стандартным интегрированием по Лебегу в  $\mathbb{R}$ . Сначала дадим необходимое определение.

**3.2.8. Определение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство и  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  —  $\mathcal{A}$ -измеримая внутренняя функция. Функция  $F$  называется *S-интегрируемой*, если

(i)  $E(|F|)$  — конечное гипердействительное число;

(ii) если  $A \in \mathcal{A}$  и  $P(A) \approx 0$ , то  $\int_A |F(\omega)| dP \approx 0$ .

Пространству  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  соответствует пространство Лёба  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$  со стандартной теорией интегрирования относительно  $\sigma$ -алгебры  $L(\mathcal{A})$  и счетно аддитивной меры  $L(P)$ . Имеет место следующий не такой уж неожиданный результат.

**3.2.9. Теорема.** (1) Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство и  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$  — соответствующее пространство Лёба. Функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Лёбу тогда и только тогда, когда она имеет S-интегрируемое поднятие  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . В этом случае

$$E(F) \approx \int_{\Omega} f(\omega) dL(P)(\omega).$$

(2) Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство,  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$  — соответствующее пространство Лёба,  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — неотрицательная внутренняя функция. Функция  $F$  является  $S$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда

(i) функция  ${}^\circ F$  интегрируема по Лёбу;

(ii)  ${}^\circ E(F) = \int_{\Omega} {}^\circ F dL(P)$ .<sup>1)</sup>

(3) Пусть  $([0, 1], \mathcal{A}, \mu)$  — обычное пространство Лебега,  $T$  — гиперконечная ось времени,  $(T, \mathcal{A}, P)$  — соответствующее гиперконечное вероятностное пространство. Функция  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда она имеет  $S$ -интегрируемое поднятие  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . В этом случае

$$E(F) \approx \int_0^1 f(r) d\mu(r).$$

Заметим, что если функция  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, то сужение функции  ${}^*f$  на  $T$  служит поднятием функции  $f$ . Поэтому утверждение (3) показывает, что интеграл Римана, определенный как в § 1.4, является частным случаем гиперконечного интегрирования.

Для доказательства теоремы 3.2.9 прежде всего заметим, что утверждение (2) является вариацией на тему (1); оно, однако, нуждается в доказательстве! Утверждение (3) следует из (1) и из того факта, что отображение  $\text{st}: T \rightarrow [0, 1]$  сохраняет меру.

Таким образом, остается утверждение (1). Прежде всего заметим, что если функция  $F$   $S$ -ограничена, т. е.  $F$  — внутренняя функция и  $F: \Omega \rightarrow {}^*[-n, n]$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , то очень простое рассуждение с использованием аппроксимации показывает, что

$$E(F) \approx \int_{\Omega} {}^\circ F(\omega) dL(P)(\omega).$$

Общий случай получается из следующей характеристики.

**3.2.10. Предложение.** Функция  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  является  $S$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда существует такая последовательность  $S$ -ограниченных функций  $\{F_n | n \in \mathbb{N}\}$ , что

$${}^\circ E(|F - F_n|) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

<sup>1)</sup> Эта формула верна для любых  $S$ -интегрируемых  $F$  (не обязательно неотрицательных) ввиду аддитивности по  $F$  обеих ее частей и того очевидного замечания, что если  $F^\pm(\omega) = \max(\pm F(\omega), 0)$ , то  $F = F^+ - F^-$  и из  $S$ -интегрируемости  $F$  вытекает  $S$ -интегрируемость обеих функций  $F^\pm$ . — Прим. ред.

Мы дадим весьма полное доказательство предложения 3.2.10, поскольку именно оно отчетливо показывает роль  $S$ -интегрируемости. Оставшаяся часть доказательства теоремы 3.2.9 довольно стандартна и предоставляется читателю. (При необходимости можно посмотреть работы Loeb [2]; Anderson [1]; о случае неограниченных мер Лёба см. Henson [2]; наконец, мы отсылаем читателя к книге Stroyan, Bayod [1].)

Рассмотрим  $S$ -интегрируемую функцию  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Для каждого  $n \in {}^*\mathbb{N}$  определим функцию  $F_n: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , положив  $F_n(\omega) = F(\omega)$  при  $|F(\omega)| \leq n$ ,  $F_n(\omega) = n$  при  $F(\omega) > n$  и  $F_n(\omega) = -n$  при  $F(\omega) < -n$ . Тогда при  $n \in \mathbb{N}$  функция  $F_n$   $S$ -ограничена. По неравенству Чебышева

$$P(\{\omega \in \Omega \mid |F(\omega)| > m\}) \leq (1/m) \cdot E(|F|) \approx 0$$

при  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , так как  $E(|F|)$  конечно в силу  $S$ -интегрируемости функции  $F$ . Заметим, что

$$E(|F - F_m|) \leq \int_{|F(\omega)| > m} |F(\omega)| dP.$$

Из  $S$ -интегрируемости функции  $F$  следует, что последний интеграл при  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  бесконечно мал, поскольку в этом случае  $P(\{\omega \in \Omega \mid |F(\omega)| > m\}) \approx 0$ .<sup>1)</sup>

Пусть, наоборот, дана последовательность  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Предположим, что  $\sup_{\omega} |F_n(\omega)| < n$ . Очевидно, неравенство  ${}^{\circ}E(|F|) < \infty$  следует из соотношения  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{\circ}E(|F - F_n|) = 0$ .

Чтобы проверить свойство 3.2.8(ii), зададим  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Выберем такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  ${}^{\circ}E(|F - F_n|) < \varepsilon/2$ . Пусть множество  $A \in \mathcal{A}$  таково, что  $P(A) < \varepsilon/2n$ . Тогда

$$\int_A |F| dP \leq \int_A |F_n| dP + \int_A |F - F_n| dP < \varepsilon.$$

Поэтому, если  $A \in \mathcal{A}$  и  $P(A) \approx 0$ , то  $\int_A |F| dP \approx 0$ .  $\square$

Дадим краткое введение в теорию *условных математических ожиданий*. Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное про-

<sup>1)</sup> Для завершения доказательства соотношения  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{\circ}E(|F - F_n|) = 0$  нужно для любого  $\varepsilon > 0$  проверить существование такого  $N \in \mathbb{N}$ , что если  $m > N$ , то  $E(|F - F_m|) < \varepsilon$ . Предполагая от противного, что  $E(|F - F_{m_k}|) \geq \varepsilon$  на некоторой последовательности  $m_1, m_2, \dots$ , стремящейся к  $\infty$ , мы в силу 1.2.7(i) получим существование числа  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  для которого  $E(|F - F_m|) \geq \varepsilon$ , что противоречит уже доказанному соотношению  $E(|F - F_m|) \approx 0$  при  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . — Прим. ред.



странство, где  $\mathcal{A}$  — внутренняя алгебра всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ . Любая внутренняя подалгебра  $\mathcal{B}$  алгебры  $\mathcal{A}$  порождается внутренним гиперконечным разбиением  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_\eta\}$ ,  $\eta \in {}^*\mathbb{N}$ , множества  $\Omega$ <sup>1)</sup>; это следует по принципу переноса из конечного случая.

**3.2.11. Определение.** Пусть  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция, и  $\mathcal{B}$  — подалгебра алгебры  $\mathcal{A}$ , порожденная внутренним разбиением  $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\eta\}$ ,  $\eta \in {}^*\mathbb{N}$ , множества  $\Omega$ . Условное математическое ожидание  $E(F|\mathcal{B})$  определяется по формуле

$$E(F|\mathcal{B})(\omega) = P(\Omega_n)^{-1} \sum_{\omega' \in \Omega_n} F(\omega') P(\omega') \quad \text{для } \omega \in \Omega_n, \\ n = 1, 2, \dots, \eta.$$

Заметим, что функция  $E(F|\mathcal{B}): \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  является  $\mathcal{B}$ -измеримой и

$$E(E(F|\mathcal{B})) = E(F).$$

Следующее предложение связывает только что введенное гиперконечное понятие со стандартным.

**3.2.12. Предложение.** Пусть даны гиперконечное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и  $S$ -интегрируемая функция  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Для произвольной внутренней подалгебры  $\mathcal{B}$  алгебры  $\mathcal{A}$  обозначим через  $E(F|\mathcal{B})$  (гиперконечное) условное математическое ожидание функции  $F$  относительно алгебры  $\mathcal{B}$ , а через  $E({}^\circ F|L(\mathcal{B}))$  — стандартное условное математическое ожидание функции  ${}^\circ F$  относительно  $\sigma$ -подалгебры  $L(\mathcal{B})$   $\sigma$ -алгебры  $L(\mathcal{A})$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Это означает, что  $\mathcal{B}$  состоит из всевозможных внутренних объединений  $\Omega_{i_1} \cup \dots \cup \Omega_{i_k}$ , где  $\{i_1, \dots, i_k\}$  — произвольное внутреннее подмножество множества  $\{1, 2, \dots, \eta\}$ . Отметим, что  $\mathcal{B}$ -измеримость внутренней функции  $g: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  в этом случае равносильна тому, что  $g$  постоянна на каждом  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Если  $(\Omega, \mathcal{M}, P)$  — произвольное вероятностное пространство,  $\mathcal{N}$  есть  $\sigma$ -подалгебра  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  и  $g \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, P)$ , т. е.  $g$  — интегрируемая функция на  $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ , то ее условное математическое ожидание — это такая  $\mathcal{N}$ -измеримая функция  $\bar{g}$  на  $\Omega$ , что

$$\int_A g(\omega) dP(\omega) = \int_A \bar{g}(\omega) dP(\omega)$$

для любого  $A \in \mathcal{N}$ . Если  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, P)$ , т. е.  $g$  является  $\mathcal{M}$ -измеримой и имеет интегрируемый квадрат модуля, то  $\bar{g} = Qg$ , где  $Q$  — оператор ортогонального проектирования пространства  $L^2(\Omega, \mathcal{M}, P)$  на его подпространство  $L^2(\Omega, \mathcal{N}, P)$ . В общем случае также можно писать  $\bar{g} = Qg$ , где оператор  $Q$  следует считать продолженным по непрерывности с  $L^2(\Omega, \mathcal{M}, P)$  до ограниченного линейного оператора в  $L^1(\Omega, \mathcal{M}, P)$ . — Прим. ред.

Тогда функция  $E(F|\mathcal{B})$  является  $S$ -интегрируемой и

$${}^\circ E(F|\mathcal{B}) = E({}^\circ F|L(\mathcal{B}))$$

почти везде по мере  $L(P)$ .

Начнем доказательство с того наблюдения, что для всех  $A \in \mathcal{B}$

$$\int_A {}^\circ E(F|\mathcal{B}) dP = \int_A F dP = \int_A {}^\circ F dL(P) = \int_A E({}^\circ F|L(\mathcal{B})) dL(P)$$

в силу  $S$ -интегрируемости функции  $F$  и утверждения 3.2.9(2). Выбрав  $A$  таким, что  $P(A) \approx 0$ , и заменяя  $F$  на  $|F|$ , мы получим  $S$ -интегрируемость функции  $E(F|\mathcal{B})$ .

Согласно теореме 3.1.2 для любого  $B \in L(\mathcal{B})$  можно найти такое  $A \in \mathcal{B}$ , что  $L(P)(A \Delta B) = 0$ . Следовательно, в силу  $S$ -интегрируемости функции  $E(F|\mathcal{B})$ , утверждения теоремы 3.2.9(2) и приведенного выше вычисления мы имеем

$$\begin{aligned} \int_B {}^\circ E(F|\mathcal{B}) dL(P) &= \int_A {}^\circ E(F|\mathcal{B}) dL(P) = \int_A E(F|\mathcal{B}) dP = \\ &= \int_A E({}^\circ F|L(\mathcal{B})) dL(P) = \int_B E({}^\circ F|L(\mathcal{B})) dL(P). \end{aligned}$$

Теперь требуемый результат следует из  $L(\mathcal{B})$ -интегрируемости функции  ${}^\circ E(F|\mathcal{B})$ .  $\square$

Мы коснулись далеко не всех вопросов, связанных с теорией меры и интегрирования. Добавим несколько замечаний о произведениях мер.

Андерсон (см. Anderson [1]) показал, что если  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$  — гиперконечные вероятностные пространства, и множество  $U \subset \Omega_1 \times \Omega_2$  измеримо относительно произведения  $L(P_1) \times L(P_2)$  мер Лёба  $L(P_1)$  и  $L(P_2)$ , то  $U$  измеримо также относительно меры Лёба  $L(P_1 \times P_2)$  на  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , причем обе меры множества  $U$  совпадают.

Гувер (см. Hoover [2]) впервые заметил, что обратное, вообще говоря, не верно. Наше изложение следует Д. Норманну (не опубликовано).

**3.2.13. Пример.** Фиксируем некоторое  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Пусть  $\Omega_2 = \{1, 2, \dots, m\}$ , а  $\Omega_1$  — множество всех внутренних подмножеств пространства  $\Omega_2$ . Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — считающие меры на  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно.

Обозначим через  $L(P_1) \times L(P_2)$  произведение соответствующих мер Лёба, а через  $L(P_1 \times P_2)$  — меру Лёба, отвечающую

считающей мере  $P_1 \times P_2$  на  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Положим

$$F = \{(x, i) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid i \in x\}.$$

Тогда  $F$  — внутреннее подмножество в  $\Omega_1 \times \Omega_2$  и  $|F| = \frac{1}{2} |\Omega_1| \times |\Omega_2|$ , где  $|\cdot|$  обозначает внутреннюю мощность множеств. Значит, множество  $F$  является  $L(P_1 \times P_2)$ -измеримым, и  $L(P_1 \times P_2)(F) = 1/2$ .

Мы покажем, что множество  $F$  не измеримо относительно меры  $L(P_1) \times L(P_2)$ . Допустим обратное, т. е. что  $F$  является  $L(P_1) \times L(P_2)$ -измеримым. Тогда, согласно упомянутому выше результату Андерсона,  $(L(P_1) \times L(P_2))(F) = 1/2$ .

По определению произведения мер существует такое семейство измеримых прямоугольников  $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , что

$$F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \times B_i),$$

и при этом

$$\sum_{i=1}^{\infty} L(P_1)(A_i) \cdot L(P_2)(B_i) < 1.$$

По теореме 3.1.2 множества  $A_i, B_i$  можно считать внутренними. Тогда по лемме 3.1.1 найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что

$$F \subset \bigcup_{i \leq n} (A_i \times B_i).$$

Дополнение к множеству  $\bigcup_{i \leq n} (A_i \times B_i)$  тоже является конечным объединением внутренних прямоугольников. Поэтому найдутся такие внутренние множества  $A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2$ , что  $F \cap (A \times B) = \emptyset$ , причем  $L(P_1)(A) > 0$  и  $L(P_2)(B) > 0$ . Но это невозможно. В самом деле, заметим, что  $A \subset \{x \in \Omega_1 \mid \forall i \in B (i \notin x)\}$ , а внутренняя мощность последнего множества равна  $2^{m-|B|} = |\Omega_1| \cdot 2^{-|B|}$ . Поэтому  $P_1(A) \leq 2^{-|B|}$ . Но тогда либо множество  $B$  бесконечно и тогда  $P_1(A)$  бесконечно мало, либо  $B$  конечно и в этом случае  $P_2(B)$  бесконечно мало, так что либо  $L(P_1)(A) = 0$ , либо  $L(P_2)(B) = 0$ .  $\square$

Даже если произведение мер Лёба не совпадает с мерой Лёба произведения, верна следующая доказанная Кейслером (см. Keisler [2]) полезная теорема типа Фубини:

**3.2.14. Теорема.** Пусть  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$  и  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$  — гиперконечные вероятностные пространства и функция  $\hat{f}: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по мере  $L(P_1 \times P_2)$ . Тогда

(i) функция  $\hat{f}(\omega_1, \cdot)$  интегрируема по мере  $L(P_2)$  для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1 \in \Omega_1$ ;

(ii) функция  $g(\omega_1) = \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_2)$  интегрируема по мере  $L(P_1)$ ;

$$(iii) \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_1 \times P_2) = \int \left( \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_2) \right) dL(P_1).$$

Мы приведем доказательство, принадлежащее Лёбу. Оно естественным образом разбивается на две части.

(а) Покажем, что если множество  $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$  имеет  $L(P_1 \times P_2)$ -меру нуль, то для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$  сечение  $A(\omega_1) = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\}$  имеет  $L(P_2)$ -меру нуль. Выберем такую убывающую последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  внутренних подмножеств в  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , что  $A \subset B_n$ , и  ${}^\circ(P_1 \times P_2)(B_n) \downarrow 0$ . Пусть  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Поскольку  $(P_1 \times P_2)(B_n) = \int P_2(B_n(\omega_1)) dP_1(\omega_1)$ <sup>1)</sup>, из теоремы 3.2.9 следует, что

$$\begin{aligned} L(P_1 \times P_2)(B_n) &= {}^\circ(P_1 \times P_2)(B_n) = \int P_2(B_n(\omega_1)) dP_1(\omega_1) = \\ &= \int {}^\circ P_2(B_n(\omega_1)) dL(P_1)(\omega_1) = \int L(P_2)(B_n(\omega_1)) dL(P_1)(\omega_1). \end{aligned}$$

По теореме о монотонной сходимости отсюда следует, что  $L(P_2)(B(\omega_1)) = 0$  для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$ , а поскольку  $A \subset B$ , наше утверждение доказано.

(в) Выберем  $S$ -интегрируемое поднятие  $F$  функции  $f$ , и положим  $G(\omega_1) = \int F(\omega_1, \omega_2) dP_2(\omega_2)$ . Достаточно показать, что для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$  функция  $F(\omega_1, \cdot)$  является  $S$ -интегрируемым поднятием функции  $f(\omega_1, \cdot)$  и что функция  $G$  является  $S$ -интегрируемым поднятием функции  $g$ . По теореме 3.2.9 отсюда будут немедленно следовать первые два утверждения, а третье утверждение следует тогда из выкладки

$$\begin{aligned} \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_1 \times P_2) &= \int F(\omega_1, \omega_2) d(P_1 \times P_2) = \int G(\omega_1) dP_1 = \\ &= \int g(\omega_1) dL(P_1) = \int \left( \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_2) \right) dL(P_1). \end{aligned}$$

То, что  $F(\omega_1, \cdot)$  является поднятием функции  $f(\omega_1, \cdot)$  для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$ , непосредственно следует из (а). Что касается  $S$ -интегрируемости, воспользуемся предложением 3.2.10.

<sup>1)</sup> По принципу переноса. Отметим также, что функция  $P_2(B_n(\omega_1))$  является внутренней и ограниченной на  $\Omega_1$ , так что она  $S$ -интегрируема. — Прим. ред.

Для  $m \in \mathbb{N}$  введем  $F_m$  как обычную срезку функции  $F$ :

$$F_m(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} F(\omega_1, \omega_2), & \text{если } -m \leq F(\omega_1, \omega_2) \leq m, \\ m, & \text{если } F(\omega_1, \omega_2) > m, \\ -m, & \text{если } F(\omega_1, \omega_2) < -m. \end{cases}$$

Тогда

$$0 \leq \int \left( \int |F - F_m| dP_2 \right) dL(P_1) \leq \int |F - F_m| d(P_1 \times P_2) \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ .<sup>1)</sup>

Отсюда следует, что  $L(P_1)$ -почти наверное  $\int |F(\omega_1, \omega_2) - F_m(\omega_1, \omega_2)| dP_2(\omega_2) \rightarrow 0$ , так что функция  $F(\omega_1, \cdot)$  является  $S$ -интегрируемой для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$ .

Следствием только что доказанного является то, что для  $L(P_1)$ -почти всех  $\omega_1$

$${}^\circ G(\omega_1) = \int F(\omega_1, \omega_2) dP_2 = \int f(\omega_1, \omega_2) dL(P_2) = g(\omega_1),$$

так что  $G$  служит поднятием функции  $g$ . Если  $G_m(\omega_1) = \int F_m(\omega_1, \omega_2) dP_2(\omega_2)$ , то функция  $G_m$  конечна и

$$0 \leq \int |G - G_m| dP_1 \leq \int \int |F - F_m| dP_2 dP_1 \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Согласно предложению 3.2.10, отсюда следует  $S$ -интегрируемость функции  $G$ . Теорема доказана.  $\square$

В заключение сделаем одно краткое замечание. Мы не всегда будем начинать с гиперконечного вероятностного пространства. Может оказаться удобным в качестве внутреннего пространства взять  $*$ -преобразование стандартного пространства с мерой. Например, если  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$  — стандартное лебегово пространство на  $\mathbb{R}$ , мы можем стартовать с внутреннего пространства с мерой  $(*\mathbb{R}, *\mathcal{B}, *\mu)$ . Мера  $*\mu$  конечно аддитивная, и, следовательно, гиперконечно аддитивная мера на внутренней алгебре  $*\mathcal{B}$ ; счет-

<sup>1)</sup> Здесь использована

**Лемма 3.2.14'.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство,  $F$  — неотрицательная внутренняя функция на  $\Omega$ . Тогда

$$\int {}^\circ F dL(P) \leq \int F dP.$$

Для доказательства положим  $F_m = \min(F, m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и заметим, что  ${}^\circ F_m \uparrow {}^\circ F$  на  $\Omega$ , так что по теореме о монотонной сходимости

$$\int {}^\circ F dL(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int {}^\circ F_m dL(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int F_m dP \leq \int F dP. \quad \square$$

— Прим. ред.

ная аддитивность при переносе теряется. Она, однако, восстанавливается, если перейти к соответствующему пространству Лёба. По принципу переноса мы можем писать «интегралы»

$$\int_A f(r) d(*\mu), \text{ где } A \in *\mathcal{B}, \text{ но с ними надо обращаться осторожно:}$$

никакие счетные операции не допустимы.

**3.2.15. Замечание.** Внутреннее пространство с мерой  $(*\mathbb{R}, *\mathcal{B}, *\mu)$  имеет соответствующее пространство Лёба  $(*\mathbb{R}, L(*\mathcal{B}), L(*\mu))$ , и результаты типа теоремы 3.2.9, связывающие эти два пространства, по-прежнему верны. Нужно отметить, однако, одно важное обстоятельство. Мера  $*\mu$  не является конечной, и поэтому, чтобы распространить теорему 3.2.9 на неограниченный случай, мы должны добавить к определению  $S$ -интегрируемости 3.2.8 еще одно условие. Сформулируем необходимые изменения.

Пусть  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  — внутреннее пространство с мерой, как в § 3.1, и  $(X, L(\mathcal{A}), L(\nu))$  — соответствующее пространство Лёба. Внутренняя функция  $f: X \rightarrow *\mathbb{R}$  называется  $S$ -интегрируемой, если она  $\mathcal{A}$ -измерима, и

$$(i) \int_{\tilde{X}} |f| d\nu \text{ конечен;}$$

$$(ii) \text{ если } A \in \mathcal{A} \text{ и } \nu(A) \approx 0, \text{ то } \int_A |f| d\nu \approx 0;$$

$$(iii) \text{ если } A \in \mathcal{A}, \text{ и } f(x) \approx 0 \text{ для всех } x \in A, \text{ то } \int_A |f| d\nu \approx 0.$$

Условие (iii) для конечной меры  $\nu$  выполняется автоматически и поэтому оно было опущено в определении 3.2.8.

Теорема 3.2.9 обобщается на неограниченный случай. Например,  $\mathcal{A}$ -измеримая функция  $f: X \rightarrow *\mathbb{R}$  будет  $S$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда функция  ${}^\circ f$  является  $L(\nu)$ -интегрируемой, причем  ${}^\circ \int |f| d\nu = \int |{}^\circ f| dL(\nu)$ . Функция  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  будет  $L(\nu)$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда она имеет  $S$ -интегрируемое поднятие  $G: X \rightarrow *\mathbb{R}$ ; в этом случае  ${}^\circ \int G d\nu = \int g dL(\nu)$ .

Мы завершим этот параграф упоминанием об одном элегантном применении гиперконечных идей к эргодической теории.

**3.2.16. Пример.** Пусть  $K = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $k \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Рассмотрим пространство Лёба  $(K, L(\mathcal{A}), L(P))$ , где  $\mathcal{A}$  — алгебра всех внутренних подмножеств множества  $K$ , а  $P$  — считающая мера. Пусть  $\varphi$  — оператор сдвига на  $K$ , определяемый

формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x < k - 1, \\ 0, & \text{если } x = k - 1. \end{cases}$$

Камае (см. Камае [1]) показал, что любая динамическая система вида  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, T)$ , где  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  — (стандартное) вероятностное пространство, а  $T$  — его сохраняющее меру преобразование, является *фактором* «гиперцикла»  $K$  в том смысле, что существует такое сохраняющее меру преобразование  $g: K \rightarrow \Omega$ , что  $g(\varphi(x)) = T(g(x))$  для  $L(P)$ -почти всех  $x \in K$ .

Как показано в работе Камае [1] (см. также Katznelson, Weiss [1]), из этого утверждения легко получить доказательство индивидуальной эргодической теоремы, которая довольно просто доказывается для гиперциклов. Было бы интересно увидеть, имеет ли это понятие гиперцикла другие применения. За дополнительной информацией читатель может обратиться к недавним работам Росса (Ross [1]—[3]) об измеримых преобразованиях пространств Леба.

### 3.3. Броуновское движение

Пришло время спуститься с высот абстрактной теории и обратиться к конкретному примеру. Специалисты в теории вероятностей знают, как построить броуновское движение в виде предела случайных блужданий. Андерсон в важной работе Anderson [1] построил броуновское движение в виде гиперконечного случайного блуждания; см. также работу Кейслера (Keisler [4]), чью версию процесса Андерсона мы здесь используем.

Для нас броуновское движение — это внутреннее отображение

$$B: \Omega \times T \rightarrow {}^*R,$$

где  $T$  — гиперконечная ось времени,  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$ , как в п. 3.2.2, а  $\Omega$  — это по существу наша модель гиперконечного подбрасывания монеты (см. 3.1.3) с тем несущественным изменением, что исходное пространство  $\{0, 1\}$  заменено на  $\{-1, 1\}$ , так что  $\Omega = \{-1, 1\}^T$  (точнее,  $\Omega$  — множество всех внутренних отображений  $T$  в  $\{-1, 1\}$ ).

*Гиперконечное случайное блуждание  $B$  имеет следующее явное определение:*

$$(1) \quad B(\omega, t) = \sum_0^t \omega(s) \sqrt{\Delta t}, \quad \omega \in \Omega.$$

Таким образом, между моментами времени  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$ , где  $t_0 \in T$ , «частица» проходит расстояние  $\sqrt{\Delta t}$  либо влево, либо вправо с вероятностью  $1/2$  независимо от остальных ее перемещений.

**Замечание.** Мы используем следующее соглашение: если  $u, t \in T$ ,  $u < t$ , то

$$\sum_u^t X(\omega, s) = X(\omega, u) + \dots + X(\omega, t - \Delta t),$$

так что  $X(\omega, t)$  не включается в сумму.

Стандартное броуновское движение получится, если положить

$$b(\omega, t) = {}^\circ B(\omega, \tilde{t}),$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $\tilde{t}$  — точка из  $T$ , совпадающая с  $t$  или непосредственно следующая за  $t$ . Процесс  $b$  является стандартным случайным процессом,  $b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , причем структура измеримого пространства на  $\Omega$  дается конструкцией Лёба  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ , где  $\mathcal{A}$  — внутренняя алгебра всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ , а  $P$  — гиперконечная считающая мера на  $\mathcal{A}$ <sup>1)</sup>. Подчеркнем, что  $b$  — стандартный процесс, хотя и на несколько необычном пространстве элементарных событий  $\Omega$ . Но не ближе ли такое  $\Omega$  к «физической интуиции»?

Для того чтобы доказать, что процесс  $b$  является броуновским движением, мы должны проверить следующее:

- (i)  $b(\cdot, t)$  — измеримая функция от  $\omega$  при всех  $t \in [0, 1]$ ;
- (ii) при  $s < t$  разность  $b(\omega, t) - b(\omega, s)$  имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией  $t - s$ ;
- (iii) если  $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$  на  $[0, 1]$ , то  $\{b(\omega, t_1) - b(\omega, s_1), \dots, b(\omega, t_n) - b(\omega, s_n)\}$  есть набор независимых случайных величин.

Утверждение (i) следует непосредственно из построения<sup>2)</sup>. Перейдем к проверке (ii) и (iii).

Прежде чем излагать доказательство, отвлечемся ненадолго, чтобы сделать несколько замечаний о независимости случайных величин в расширенном универсуме.

**3.3.1. Определение.** Внутреннее семейство случайных величин  $(X_i)_{i \in I}$  на гиперконечном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  называется *\*-независимым*, если для любого гиперконечного подмножества  $\{X_1, \dots, X_m\}$ ,  $m \in {}^*\mathbb{N}$ , и любого набора

<sup>1)</sup> Из дальнейшего следует, что  $B(\omega, t)$  конечно для  $L(\mathcal{A})$ - почти всех  $\omega \in \Omega$  и всех  $\tilde{t} \in T$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> И теоремы 3.2.4 (1). — Прим. ред.



$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in {}^*\mathbb{R}^m$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) < \alpha_1, \dots, X_m(\omega) < \alpha_m\}) = \\ = \prod_{k=1}^m P(\{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) < \alpha_k\}). \end{aligned}$$

Семейство  $(X_i)_{i \in I}$  называется *S-независимым*, если для любого конечного множества  $\{X_1, \dots, X_m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и любого  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  справедлива та же формула, но с заменой знака  $=$  на знак  $\approx$ .

Снова мы имеем в расширенном универсуме  $*$ -версию и  $S$ -версию стандартного понятия. При этом именно  $S$ -версия важна для стандартной теории.

**3.3.2. Лемма.** Пусть семейство  $(X_i)_{i \in I}$  является  $S$ -независимым на  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ; тогда семейство  $({}^\circ X_i)_{i \in I}$  будет независимым на соответствующем пространстве Леба  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))^1$ .

*Доказательство* представляет собой выкладку. Пусть  $m \in \mathbb{N}$  и  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ . Тогда

$$\begin{aligned} L(P)(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ X_1(\omega) < \alpha_1, \dots, {}^\circ X_m(\omega) < \alpha_m\}) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ P(\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) < \alpha_1 - 1/n, \dots, X_m(\omega) < \alpha_m - 1/n\}) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^m P(\{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) < \alpha_k - 1/n\}) \right) = \\ = \prod_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ P(\{\omega \in \Omega \mid X_k(\omega) < \alpha_k - 1/n\}) = \\ = \prod_{k=1}^m L(P)(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ X_k(\omega) < \alpha_k\}). \quad \square \end{aligned}$$

Мы привели эту выкладку не потому, что полагали, будто у читателя она вызовет какие-то затруднения. Мы просто хотели еще раз в достаточно простой ситуации продемонстрировать, как внешнее условие, включающее  $L(P)$  и  ${}^\circ X_k$ , превращается во внутреннее условие, включающее  $P$  и  $X_k$ ; см. также доказательство теоремы 3.2.4.

**3.3.3. Предложение (Центральная предельная теорема).** Пусть  $(X_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  — внутренняя последовательность  $*$ -независи-

<sup>1)</sup> Чтобы семейство  $({}^\circ X_i)_{i \in I}$  было определено, здесь нужно считать  ${}^\circ X_i(\omega) = \pm\infty$ , если  $\pm X_i(\omega) > 0$  и  $X_i(\omega)$  бесконечно велико. Аналогичное соглашение относительно стандартных частей случайных величин используется и всюду ниже. — *Прим. ред.*

мых случайных величин на  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , имеющих одну и ту же стандартную функцию распределения  $F$  со средним 0 и дисперсией 1. Тогда для любого  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и любого  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m X_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) \approx {}^*\Psi(\alpha),$$

где

$$\Psi(\alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\alpha} \exp(-x^2/2) dx$$

— стандартное гауссовское распределение.

*Доказательство.* Пусть  $G$  — функция распределения случайных величин  ${}^\circ X_n$  на пространстве Лёба. Поскольку функция  $F$  стандартна, легко показать, что  $G = {}^\circ F$  и  $F = {}^*G$ . Непосредственным вычислением проверяется, что  $E({}^\circ X_n) = 0$  и  $E({}^\circ X_n^2) = 1$ . Следовательно, по стандартной центральной предельной теореме для любых  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  существует такое  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что если  $m > n_0$ , то

$$|L(P)\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m {}^\circ X_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) - \Psi(\alpha)| < \varepsilon.$$

Семейство случайных величин  $({}^\circ X_k)$  независимо. Поэтому сумма  $\sum_{k=1}^m {}^\circ X_k$  имеет функцию распределения  $G^m$ , являющуюся  $m$ -кратной сверткой распределения  $G$ . Значит,  $|G^m(\sqrt{m}\alpha) - \Psi(\alpha)| < \varepsilon$  при  $m > n_0$ . Теперь ввиду равенства  $F = {}^*G$  по принципу переноса получаем, что если  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $F^m(\sqrt{m}\alpha) \approx {}^*\Psi(\alpha)$ . Но  $F^m$  есть функция распределения суммы  $\sum_{k=1}^m X_k$ . Значит, для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m X_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) \approx {}^*\Psi(\alpha).$$

Читатель легко проверит, что функция распределения  $\Psi$  ведет себя столь хорошо (в том числе и вблизи  $\pm\infty$ ), что последний результат можно распространить на любые  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ <sup>1)</sup>.  $\square$

<sup>1)</sup> Например, в силу монотонности по  $\alpha$  левой и правой частей, а также непрерывности  $\Psi$ . — *Прим. ред.*

**3.3.4. Замечание.** В доказательстве предложения 3.3.3 мы использовали стандартную центральную предельную теорему. Читатель может самостоятельно получить другое доказательство этого результата, рассматривая гауссовское распределение как гиперконечное биномиальное распределение.

**3.3.5. Теорема.** Пусть  $B$  — гиперконечное случайное блуждание на  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и  $b$  — его стандартная часть<sup>1)</sup>. Тогда процесс  $b$  является броуновским движением на  $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ .

Нам нужно проверить перечисленные выше условия (i) — (iii). Как мы уже заметили ранее, утверждение (i) получается непосредственно из построения. Утверждение (iii) легко следует из леммы 3.3.2. Утверждение (ii) мы докажем двумя способами.

*Первое доказательство утверждения (ii).* Чтобы воспользоваться предложением 3.3.3, запишем

$$\begin{aligned} L(P)(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, {}^\circ t) - b(\omega, {}^\circ s) \leq \alpha\}) &= \\ = L(P)(\{\omega \in \Omega \mid {}^\circ B(\omega, t) - {}^\circ B(\omega, s) \leq \alpha\}) &= \\ = L(P)\left(\left\{\omega \in P \mid \left({}^\circ \left(\sum_s^t \omega(u) \sqrt{\Delta t}\right) \leq \alpha\right\}\right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_s^t \omega(u) \sqrt{\Delta t} \leq \alpha + 1/n\right\}\right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^m \omega_{i_k} \leq \frac{\alpha + 1/n}{\sqrt{t-s}}\right\}\right). \end{aligned}$$

Здесь  $t - s = m\Delta t$ , а индексы  $i_1, \dots, i_k$  перечисляют случайные величины «между»  $s$  и  $t$ . Последнее выражение имеет вид, подходящий для использования предложения 3.3.3, которое дает

$$\begin{aligned} L(P)(\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, {}^\circ t) - b(\omega, {}^\circ s) \leq \alpha\}) &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ \Psi\left(\frac{\alpha + 1/n}{\sqrt{t-s}}\right) &= \Psi\left(\frac{\alpha}{(\sqrt{{}^\circ t} - {}^\circ s)}\right). \end{aligned}$$

Значит,  $b(\omega, t) - b(\omega, s)$  для  $t, s \in [0, 1]$  имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией  $t - s$ .  $\square$

<sup>1)</sup> В следующем параграфе будет доказана конечность с вероятностью 1 траекторий процесса  $B$  (см., например, предложение 4.2.10). — *Прим. перев.*

Второе доказательство утверждения (ii). Вычислим преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \exp [i (b(\omega, {}^{\circ}t) - b(\omega, {}^{\circ}s)) z] dL(P) = \quad (\text{по теореме 3.2.9}) \\
 &= \int_{\Omega}^{\circ} \exp [i (B(\omega, t) - B(\omega, s)) z] dP = \\
 &= \int_{\Omega}^{\circ} \exp \left[ i \left( \sum_s^t \omega(u) \sqrt{\Delta t} \right) z \right] dP = \\
 &= \int_{\Omega}^{\circ} \prod_{u=s}^t \exp [i \omega(u) \sqrt{\Delta t} z] dP = \quad (\text{в силу независимости}) \\
 &= \left( \prod_{u=s}^t \int_{\Omega} \exp [i \omega(u) \sqrt{\Delta t} z] dP \right) = \quad (\text{поскольку } \omega(u) = \pm 1 \\
 &\quad \text{с вероятностью } 1/2) \\
 &= \left( \prod_{u=s}^t \left[ \frac{\exp(i \sqrt{\Delta t} z) + \exp(-i \sqrt{\Delta t} z)}{2} \right] \right) = \quad (\text{здесь } m = \Delta t^{-1}) \\
 &= \left( \left( \left[ 1 - \frac{z^2}{2m} + O\left(\frac{z^4}{m^2}\right) \right]^m \right)^{i-s} \right) = \exp \left( -\frac{{}^{\circ}t - {}^{\circ}s}{2} z^2 \right).
 \end{aligned}$$

Это снова доказывает наш результат. В данном случае мы сделали непосредственное вычисление, не ссылаясь на центральную предельную теорему. Может быть, следует добавить комментарий по поводу последнего равенства. Мы знаем, что если  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то  $(1 + x/m)^m \approx e^x$ . Поскольку операция взятия стандартной части убивает остаточный член  $O(z^4/m^2)$ , справедливо точное равенство.  $\square$

Но о броуновском движении можно сказать больше. Внутренняя функция  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *S-непрерывной*, если из условия  $t \approx s$ , где  $t, s \in T$ , вытекает, что  $F(t) \approx F(s)$ .

**Лемма.** Если для *S-непрерывной* функции  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  число  $F(t_0)$  конечно при каком-либо  $t_0 \in T$ , то  $F(t)$  конечно при всех  $t \in T$ , причем если для  $t \in T$  положить  $\hat{f}({}^{\circ}t) = {}^{\circ}F(t)$ , то  $\hat{f}$  станет корректно определенной непрерывной функцией на  $[0, 1]$ .

*Доказательство.* Корректность определения  $t$  очевидна, поскольку если  $t_1, t_2 \in T$  и  ${}^{\circ}t_1 = {}^{\circ}t_2$ , то  $t_1 \approx t_2$  и  $F(t_1) \approx F(t_2)$ , так что  ${}^{\circ}F(t_1) = {}^{\circ}F(t_2)$ . Далее, для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , рассмотрим множество

$$\begin{aligned}
 & \{ \delta \mid (\delta \in {}^*\mathbb{R}) \wedge (\delta > 0) \wedge (\forall t_1 \in T, \forall t_2 \in T (|t_1 - t_2| < \delta \rightarrow \\
 & \rightarrow |F(t_1) - F(t_2)| < \varepsilon)) \}.
 \end{aligned}$$

Это множество внутреннее и содержит все бесконечно малые  $\delta > 0$ . Поэтому оно содержит стандартное  $\delta > 0$ , откуда сразу следуют все утверждения леммы.  $\square$

**Теорема 3.3.6.** *Функция  $B(\omega, \cdot)$  является  $S$ -непрерывной при почти всех  $\omega \in \Omega$ ; т. е. существует такое множество  $\Omega' \subseteq \Omega$  левовской меры 1, что  $B(\omega, s) \approx B(\omega, t)$ , если  $\omega \in \Omega'$  и  $s \approx t$ . Следовательно, функция  $b(\omega, \cdot)$  непрерывна для всех  $\omega \in \Omega'$ .*

Прежде чем переходить к доказательству, установим два простых тождества. Прежде всего заметим, что если  $\Delta B(s) = B(s + \Delta t) - B(s)$ , то  $\Delta B(s)^2 = \Delta t$ , так что

$$\begin{aligned} E(B(t))^2 &= E \sum_{s=0}^t ((B(s) + \Delta B(s))^2 - B(s)^2) = \\ &= \sum_{s=0}^t E(2B(s)\Delta B(s) + \Delta t) = \sum_{s=0}^t \Delta t = t; \end{aligned}$$

мы здесь использовали тот факт, что  $E(B(s)\Delta B(s)) = 0$ , поскольку  $\Delta B(s) = \pm \sqrt{\Delta t}$  с вероятностью  $1/2$  независимо от значения  $B(s)$ . Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} E(B(t)^4) &= E \sum_{s=0}^t ((B(s) + \Delta B(s))^4 - B(s)^4) = \\ &= \sum_{s=0}^t E(4B(s)^3 \Delta B(s) + 6B(s)^2 \Delta B(s)^2 + 4B(s) \Delta B(s)^3 + \Delta B(s)^4) = \\ &= \sum_{s=0}^t E(6B(s)^2 \Delta t + \Delta t^2) = \sum_{s=0}^t (6s \Delta t + \Delta t^2) = \\ &= 3t(t - \Delta t) + t \Delta t = 3t^2 - 2t \Delta t \leq 3t^2; \end{aligned}$$

здесь мы просуммировали арифметическую прогрессию:

$$\sum_0^t s \Delta t = t(t - \Delta t)/2. \text{ Аналогично,}$$

$$E((B(t) - B(s))^4) \leq 3(t - s)^2.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Для каждой пары  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  определим «плохое» множество

$$\begin{aligned} \Omega_{m, n} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists i < n, \exists s \in T \cap \left( \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] : \left| B(\omega, s) - \right. \right. \\ \left. \left. - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что траектория  $B(\omega, \cdot)$  не является  $S$ -непрерывной тогда и только тогда, когда  $\omega \in \bigcup_m \bigcap_n \Omega_{m, n}$ ; поэтому достаточно

доказать, что для любого  $m \in \mathbb{N}$  с вероятностью  ${}^{\circ}P(\Omega_{m,n}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим также, что

$$\begin{aligned} P(\Omega_{m,n}) &\leq \sum_{i < n} P \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists s \in T \cap \left( \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] : \left| B(\omega, s) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{1}{m} \right\} \leq \\ &\leq 2 \sum_{i < n} P \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| B\left(\omega, \frac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{1}{m} \right\}, \end{aligned}$$

где второе неравенство получается с помощью рассуждений, связанных с отражением. А именно, предположим, что  $\left| B\left(\omega, \frac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right| < \frac{1}{m}$ , но при этом существует такое  $s \in \left( \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ , что  $|B(\omega, s) - B(\omega, i/n)| > 1/m$ . Пусть  $s_{\omega}$  — наименьшее такое  $s$ ; рассмотрим «отраженную траекторию», определяемую таким  $\omega'$ , что  $\omega'(t) = \omega(t)$  для  $t < s_{\omega}$ , и  $\omega'(t) = -\omega(t)$  для  $t \geq s_{\omega}$ . Очевидно,  $\left| B\left(\omega', \frac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega', \frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{1}{m}$ , а поскольку каждая отраженная траектория соответствует однозначно определяемой неотраженной траектории<sup>1)</sup>, мы получаем наше неравенство.

Завершая вычисления, имеем

$$\begin{aligned} P(\Omega_{m,n}) &\leq 2 \sum_{i < n} P \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| B\left(\omega, \frac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right| \geq \frac{1}{m} \right\} \leq \\ &\leq 2m^4 \sum_{i < n} E \left( \left| B\left(\omega, \frac{i+1}{n}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{n}\right) \right|^4 \right) \leq \\ &\leq 6m^4 \sum_{i < n} \frac{1}{n^2} = \frac{6m^4}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

Точно так же, как мера Лебега может быть получена из считающей меры на гиперконечной оси времени, мера, порожденная процессом  $B$ , индуцирует некоторую меру на  $C[0, 1]$  с помощью отображения взятия стандартной части.

**3.3.7. Замечание (о мере Винера).** Мера Винера определяется как единственная борелевская мера на  $C[0, 1]$ , удовлетворяющая следующим условиям:

<sup>1)</sup> И переход от  $\omega$  к  $\omega'$  сохраняет меру  $P$ . — Прим. ред.

(i) мера множества функций  $\{f \in C[0, 1] \mid f(t) - f(s) < \alpha\}$  равна  $\Psi(\alpha/\sqrt{t-s})$  при любых фиксированных  $t, s \in [0, 1], t > s$ , и при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

(ii) если  $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$  — точки отрезка  $[0, 1]$ , то  $\{f(t_1) - f(s_1), \dots, f(t_n) - f(s_n)\}$  — набор независимых случайных величин.

Используя теоремы 3.3.5 и 3.3.6, можно получить следующую простую конструкцию винеровской меры. Пусть  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра на  $C[0, 1]$ , определенная формулой

$$(2) \quad F \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \{\omega \in \Omega \mid b(\omega, \cdot) \in F\} \in L(\mathcal{A}),$$

где  $L(\mathcal{A})$  —  $\sigma$ -алгебра Лёба на  $\Omega$ . Мера  $W$  на  $\mathcal{B}$  задается равенством

$$(3) \quad W(F) = L(P) (\{f \in \Omega \mid b(\omega, \cdot) \in F\}).$$

Пространство  $(C[0, 1], \mathcal{B}, W)$  является пополнением винеровского пространства; это можно доказать точно так же, как в теореме 3.2.5, если осознать, что равенство (3) может быть также записано в виде

$$(4) \quad W(F) = L(\hat{P})(st^{-1}(F)),$$

где  $\hat{P}$  — мера на множестве  $*C(T)$  всех внутренних функций, отображающих  $T$  в  $*\mathbb{R}$ , определенная по формуле

$$\hat{P}(A) = P\{\omega \in \Omega \mid B(\omega, \cdot) \in A\},$$

а  $st$  — отображение стандартной части на  $*C(T)$ .

В следующем параграфе мы разовьем общую теорию таких «опущенных» мер Лёба, а в § 3.5 вернемся к рассмотрению меры Винера с несколько иной точки зрения.

До сих пор мы рассматривали броуновское движение с фиксированной начальной точкой 0. Что произойдет, если мы фиксируем также и конечное положение  $a$ ? В гиперконечной ситуации все очень просто. Пусть  $\bar{a}$  — точка в монаде точки  $a$ , в которую какая-нибудь гиперконечная броуновская траектория приходит в момент времени 1, т. е.  $\bar{a} = B(\omega, 1)$  для некоторого  $\omega \in \Omega$ ; положим

$$\Omega_{\bar{a}} = \{\omega \in \Omega \mid B(\omega, 1) = \bar{a}\}.$$

Пусть  $P_{\bar{a}}$  — нормированная считающая мера на  $\Omega_{\bar{a}}$ . Как и раньше, мера  $P_{\bar{a}}$  порождает пополненную борелевскую меру на  $C[0, 1]$  по формуле

$$(5) \quad W_a(F) = L(P_{\bar{a}})\{\omega \in \Omega_{\bar{a}} \mid B(\omega, \cdot) \in st^{-1}(F)\}.$$

Меры  $W_a$  называются *условными винеровскими мерами*, а процесс с таким распределением часто называют *броуновским мостом*. Если даны  $s, t \in [0, 1], s < t$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ , можно построить

более общие условные винеровские меры  $W_{s, t, a, b}$ ; они моделируют поведение частицы, выходящей в момент времени  $s$  из точки  $a$  и приходящей в момент  $t$  в точку  $b$ . Мы оставляем детали читателю.

В чисто стандартной ситуации прямое построение условных винеровских мер не столь просто, поскольку мы не можем брать условные вероятности на множествах вида

$$\{\omega \in \Omega \mid b(\omega, 1) = a\},$$

так как эти множества имеют меру нуль. Можно, однако, перечислить требуемые свойства мер  $W_a$ , а затем доказать, что такие меры существуют. Пусть  $P_t(x, y)$  — гауссовские ядра:

$$P_t(x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-|x - y|^2/2t).$$

Для возрастающей последовательности точек  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$  из отрезка  $[0, 1]$  и для борелевских множеств  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$  потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$W_a(A) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} P_1(0, a)^{-1} \cdot P_{t_1}(0, x_1) \cdot P_{t_2-t_1}(x_1, x_2) \cdot \dots \\ \dots \cdot P_{t_{n+1}-t_n}(x_n, a) dx_1 \dots dx_n,$$

где

$$A = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = 0, f(1) = a \text{ и } f(t_i) \in A_i \text{ для всех } i\}.$$

Можно доказать, что существует единственная борелевская мера  $W_a$ , удовлетворяющая указанному условию, и это дает стандартную конструкцию условных винеровских мер. Мы оставляем читателю проверку того, что обе конструкции приводят к одинаковому результату.

**3.3.8. Броуновское локальное время.** Понятие локального времени очень важно для исследования броуновского движения. Формально локальное время  $l(t, x)$  определяется равенством

$$(6) \quad l(t, x) = \int_0^t \delta(x - b(s)) ds,$$

где  $b$  — броуновское движение, а  $\delta$  — дельта-функция. Идея состоит в том, что  $l(t, x)$  измеряет, «сколько раз» броуновская частица посещает точку  $x$  до момента времени  $t$ .

Один из способов сделать эту эвристическую идею точной состоит в том, чтобы показать, что существует такой непрерывный по паре переменных  $(t, x)$  процесс  $l(t, x)$ , что

$$(7) \quad l(t, x) = \frac{d}{dx} \int_0^t I_{(-\infty, x]}(b(s)) ds$$



для почти всех  $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ , где  $I_A$  — характеристическая функция множества  $A$ . Это обычный, но несколько косвенный подход.

Считая процесс  $b$  стандартной частью гиперконечного случайного блуждания, можно использовать другой, более прямой путь. Отправляясь от следующего приближения процесса  $l(t, x)$  (можно использовать как (6), так и (7))

$$(8) \quad \Delta x^{-1} \int_0^t I_{[x, x+\Delta x]}(b(s)) ds,$$

заменяем отрезок  $[0, 1]$  на гиперконечную ось времени  $T$ , а множество  $\mathbb{R}$  заменяем на  $\Lambda = \{0, \pm\Delta x, \dots, \pm n\Delta x, \dots\}$ ,  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , и определим внутренний процесс  $L: T \times \Lambda \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  по формуле

$$(9) \quad L(t, x) = \sum_{s \leq t} I_{\{x\}}(B(s)) (\Delta t)^{1/2}.$$

Заметим, что для гиперконечного случайного блуждания числа  $\Delta x$  и  $\Delta t$  выбираются так, чтобы  $\Delta x = (\Delta t)^{1/2}$ .

Это определение принадлежит Перкинсу (см. Ferkins [1]); он показал, что процесс  $L$  имеет стандартную часть, которая как раз и есть броуновское локальное время, т. е. удовлетворяет (7).

Перкинс использовал гиперконечное представление (9) для доказательства следующей внутренней<sup>1)</sup> характеристики локального времени.

Пусть  $m(t, x, \delta)$  обозначает меру Лебега множества точек на отрезке  $[0, 1]$ , лежащих на расстоянии не более  $\delta/2$  от множества  $\{s \leq t \mid b(s) = x\}$ . Тогда для всех  $t_0 > 0$  и почти всех  $\omega$

$$(10) \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{t \leq t_0, x \in \mathbb{R}} |m(t, x, \delta) \cdot \delta^{1/2} - 2 \cdot (2/\pi)^{-1/2} l(t, x)| = 0.$$

Эта характеристика является одновременно внутренней (т. е. зависит только от множества  $\{s \mid b(s) = x\}$ ) и глобальной (т. е. она справедлива для всех  $x$  одновременно). Ранее аналогичный результат был известен для каждого  $x$  в отдельности.

За доказательствами и дальнейшим обсуждением мы отсылаем читателя к работам Perkins [1], [2], [8]. К рассмотрению локального времени мы вернемся в гл. 6 и 7 в связи со стохастическими потенциалами, которые задаются функционалами локального времени. Сейчас мы лишь отметим, что конструкция Перкинса нашла множество применений как в стандартном, так и в нестандартном контекстах (Ferkins [1]—[5], [8]; Green-

<sup>1)</sup> Здесь термин «внутренний» (intrinsic) не совпадает с привычным нам термином «внутренний» (internal) в нестандартном анализе. Смысл его поясняется ниже в тексте. — Прим. перев.

wood, Perkins [1], [2]). Кроме конструкции Андерсона, существуют и другие гиперконечные конструкции броуновского движения; одну из них можно найти в статье Oikkonen [1].

### 3.4. Опускание мер Лёба

В предыдущих параграфах были развиты основы теории мер Лёба, и эта теория была использована для простого построения мер Лебега и Винера. Наша стратегия в обоих случаях была одинаковой: мы начинали с построения естественной внутренней меры на  $\ast$ -версии  $\ast X$  исходного пространства  $X$ ; беря затем меру Лёба, мы получали счетно аддитивную меру на  $\ast X$ ; наконец, переводя эту меру обратно на  $X$  с помощью обращения отображения стандартной части, мы получали желаемую меру на  $X$ . Этот метод полезен и в других ситуациях; пусть, например,  $X$  — достаточно хорошее топологическое пространство и  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$  — слабо сходящаяся сеть мер на  $X$ . Как построить предельную меру? Рассмотрим  $\ast((\mu_\alpha)_{\alpha \in I})$ ; это нестандартная сеть  $(\tilde{\mu}_\alpha)_{\alpha \in \ast I}$  внутренних мер на  $\ast X$ ; выберем  $\tilde{\mu}_\omega$  для некоторого бесконечно большого  $\omega \in \ast I$ . Беря меру Лёба  $L(\tilde{\mu}_\omega)$  и опуская ее на  $X$ , мы получим предельную меру; детали см. в работах Anderson, Rashid [1] и Loeb [4].

Имея в виду эти примеры, будем изучать внутренние вероятностные пространства  $(\ast X, \mathcal{A}, P)$ , где  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство, и постараемся узнать, когда мера  $\mu = \text{st}(L(P))$  (т. е.  $\mu(A) = L(P)(\text{st}^{-1}(A))$ ) для всех измеримых  $A$ ) является разумной вероятностной мерой на  $X$ . Наше изложение может показаться излишне техничным, но мы постараемся в следующем параграфе убедить читателя, что развиваемая здесь техника является в высшей степени эффективным средством построения предельных мер и продолжений мер. Прежде чем начать, упомянем, что первым использованием этой техники, по-видимому, явилось ее применение к теории потенциала в работе Loeb [3]; первое систематическое исследование проделано Андерсоном (Anderson [2], [3]), который использовал эту технику для получения гиперконечных представлений пространств Радона, и Лёбом (Loeb [4]).

Сначала условимся, какую вероятностную меру на  $X$  следует считать «разумной».

**3.4.1. Определение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство,  $\mathcal{C}$  — семейство подмножеств пространства  $X$ . Функция  $\nu: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется *регулярной*, если для всех  $C \in \mathcal{C}$

$$(1) \quad \begin{aligned} \nu(C) &= \sup \{ \nu(F) \mid F \subset C, F \in \mathcal{C}, F \text{ замкнуто} \} = \\ &= \inf \{ \nu(O) \mid O \supset C, O \in \mathcal{C}, O \text{ открыто} \}. \end{aligned}$$

Мера  $\nu$  на  $X$  называется *радоновской мерой*, если она является пополнением борелевской меры и для всех  $\nu$ -измеримых множеств  $C$

$$(2) \quad \begin{aligned} \nu(C) &= \sup \{ \nu(K) \mid K \subset C, K \text{ компактно} \} = \\ &= \inf \{ \nu(O) \mid O \supset C, O \text{ открыто} \}. \end{aligned}$$

Если мера  $\nu$  конечна, условие аппроксимации открытыми множествами в определении радоновской меры, очевидно, излишне.

Мы будем в основном интересоваться радоновскими мерами, но наш первый результат относится к регулярным мерам.

**3.4.2. Предложение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство, и  $(*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$ , причем  $st^{-1}(F) \in L(\mathcal{A})$  для всех замкнутых  $F$ . Предположим, что  $L(P)(Ns(*X)) = 1$ . Тогда  $st(L(P))$  — регулярная пополненная борелевская вероятностная мера на  $X$ .

*Доказательство.* Поскольку  $st^{-1}(F)$  измеримо для всех замкнутых  $F$ , ясно, что мера  $st(L(P))$  должна быть определена на  $\sigma$ -алгебре, включающей борелевскую  $\sigma$ -алгебру; из полноты меры  $L(P)$  вытекает полнота меры  $\mu = st(L(P))$ . Предложение будет доказано, если мы установим для  $\mu$  первое из равенств в (1).

Пусть  $C$  —  $\mu$ -измеримое множество и  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $st^{-1}(C) \in L(\mathcal{A})$ , должно найтись такое  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset st^{-1}(C)$ , что

$$L(P)(A) > L(P)(st^{-1}(C)) - \varepsilon = \mu(C) - \varepsilon.$$

Поскольку множество  $A$  внутреннее, то множество  $st(A)$ , согласно 2.1.8, является замкнутым подмножеством множества  $C$ . Но поскольку  $st^{-1}(st(A)) \supset A \cap Ns(*X)$ , мы получаем

$$\mu(st(A)) = L(P)(st^{-1}(st(A))) \geq L(P)(A) \geq \mu(C) - \varepsilon,$$

и предложение доказано.  $\square$

Приведенное доказательство в точности повторяет доказательство предложения 3.2.5; Андерсон (см. работы Anderson [2], [3]) приписывает его Е. Фишеру (E. Fisher). Нас будет в большей степени интересовать такое следствие:

**3.4.3. Следствие.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство, и  $(*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$ , причем  $st^{-1}(K) \in L(\mathcal{A})$  для всех компактных  $K$ . Предположим, что для любого положительного  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  найдется такой компакт  $K_\varepsilon$ , что  $L(P)(st^{-1}(K_\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$ . Тогда  $st(L(P))$  — радоновская мера на  $X$ .

*Доказательство.* Утверждение будет следовать из предыдущего предложения, если мы докажем, что  $st^{-1}(F) \in L(\mathcal{A})$  для

всех замкнутых  $F$ . Но

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap K_{1/n}) \cup \left( F - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{1/n} \right),$$

следовательно,  $\text{st}^{-1}(F)$  является счетным объединением измеримых множеств.  $\square$

Чтобы использовать последний результат, мы должны знать, что  $\text{st}^{-1}(K) \in L(\mathcal{A})$  для всех компактных множеств  $K$ . Во многих приложениях это далеко не очевидно, так что наша следующая цель — свести задачу к более легкой. Начнем с топологической леммы.

**3.4.4. Лемма.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство, и  $\tau$  — база его топологии, замкнутая относительно конечных объединений. Если  $K$  компактно, то

$$\text{st}^{-1}(K) = \bigcap \{ *O \mid K \subset O, O \in \tau \}.$$

*Доказательство.* По определению стандартной части

$$\text{st}^{-1}(K) \subset \bigcap \{ *O \mid K \subset O, O \in \tau \}.$$

Чтобы доказать обратное включение, предположим, что  $y \notin \text{st}^{-1}(K)$ . Тогда для каждого  $x \in K$  найдется такое  $G_x \in \tau$ , что  $x \in G_x$  и  $y \notin *G_x$ . Очевидно,  $K \subset \bigcup_{x \in K} G_x$  и в силу компактности  $K$  можно найти конечное подпокрытие

$$K \subset G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n},$$

так что

$$*K \subset *(G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n}).$$

Поскольку  $\tau$  замкнуто относительно конечных объединений, мы получаем  $G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n} \in \tau$ ; теперь утверждение леммы следует из того, что  $y \notin *(G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n})$ .  $\square$

**3.4.5. Предложение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство и  $\tau$  — база его топологии, замкнутая относительно конечных объединений. Пусть  $(*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$  причем  $*O \in L(\mathcal{A})$  для всех  $O \in \tau$ . Тогда  $\text{st}^{-1}(K) \in L(\mathcal{A})$  для всех компактных множеств  $K$  и

$$L(P)(\text{st}^{-1}(K)) = \inf \{ L(P)(*O) \mid O \in \tau, K \subset O \}.$$

*Доказательство.* Пусть  $K$  компактно; положим

$$\alpha_K = \inf \{ L(P)(*O) \mid O \in \tau, K \subset O \}.$$

Пусть  $\alpha_K > 0$  (при  $\alpha_K = 0$  все утверждения предложения очевидны). Если множества  $O_1, \dots, O_n \in \tau$  таковы, что  $K \subset \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ , и  $m \in \mathbb{N}$ , то положим

$$A_{O_1, \dots, O_n, m} = \{B \in \mathcal{A} \mid B \subset {}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n, P(B) > \alpha_K - 1/m\}.$$

Каждое множество  $A_{O_1, \dots, O_n, m}$  непусто, так как множество  ${}^*O_1 \cap \dots \cap {}^*O_n$  измеримо по Лёбу и имеет меру  $\geq \alpha_K$ . Применяя к семейству множеств  $\{A_{O_1, \dots, O_n, m}\}$  принцип насыщения, мы находим такое внутреннее множество  $B \in \mathcal{A}$ , что  ${}^\circ P(B) \geq \alpha_K$  и  $B \subset {}^*O$  для всех  $O \in \tau$ ,  $O \supset K$ . По лемме  $B \subset \text{st}^{-1}(K)$ ; теперь предложение следует из полноты меры Лёба.  $\square$

Комбинируя следствие 3.4.3. и предложение 3.4.5, мы получаем основной результат этого параграфа.

**3.4.6. Теорема.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство и  $\tau$  — база его топологии, замкнутая относительно конечных объединений. Пусть  $({}^*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$ , причем  ${}^*O \in \in L(\mathcal{A})$  для всех  $O \in \tau$ . Предположим, что для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  существует такой компакт  $K_\varepsilon$ , что

$$\alpha_{K_\varepsilon} = \inf \{L(P)({}^*O) \mid K \subset O, O \in \tau\} > 1 - \varepsilon.$$

Тогда мера  $\mu = \text{st}(L(P))$  является радоновской вероятностной мерой на  $X$ , и  $\mu(K) = \alpha_K$  для всех компактов  $K$ .

Теорема 3.4.6 имеет три важных преимущества по сравнению со следствием 3.4.3. Во-первых, нам не нужно больше проверять, принадлежит ли  $\sigma$ -алгебре  $L(\mathcal{A})$  внешнее множество  $\text{st}^{-1}(K)$ , такая проверка требуется лишь для внутренних множеств  ${}^*O$ ; в большинстве приложений эти множества будут лежать даже в  $\mathcal{A}$ , так что проверка тривиальна. Во-вторых, требуется проверять измеримость множеств только из базы топологии; это — важное преимущество для тех пространств, в которых открытые множества не порождаются счетными операциями из элементов базы. Наконец, в-третьих, не нужно доказывать, что существуют компакты с мерой, сколь угодно близкой к единице; достаточно получить компакты, которые содержатся лишь в элементах базы с мерой, близкой к 1. Когда в следующем параграфе мы перейдем к приложениям, мы будем систематически использовать все три отмеченных обстоятельства.

Принятое в следствии 3.4.3 предположение  $L(P)(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  и соответствующее ему предположение  $\alpha_{K_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$  в теореме 3.4.6 служат двум целям. Первая — гарантировать, что множество  $Ns({}^*X)$  измеримо по Лёбу и имеет меру 1; это необходимо для того, чтобы  $L(P) \circ \text{st}^{-1}$  было корректно определенной вероят-

ностной мерой; вторая — гарантировать существование компактов с мерой, сколь угодно близкой к 1; это необходимо для того, чтобы мера  $L(P) \circ st^{-1}$  была радоновской (а также для того, чтобы работало доказательство следствия 3.4.3). Сейчас мы покажем, что если  $X$  — локально компактное пространство или полное метрическое пространство, то в случае, если  $Ns(*X)$  имеет внешнюю меру 1, эти предположения выполняются.

**3.4.7. Предложение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство и  $(*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$ , причем  $O \in \mathcal{A}$  для всех  $*$ -открытых множеств  $O$ . Тогда, если выполнено любое из условий:

(а)  $X$  локально компактно;

(б)  $X$  — полное метрическое пространство,  
то множество  $Ns(*X)$  будет  $L(P)$ -измеримым, и

$$L(P)(Ns(*X)) = \sup \{L(P)(st^{-1}(K)) \mid K \text{ компактно}\}.$$

*Доказательство.* (а) Определим

$$\alpha = \sup \{L(P)(st^{-1}(K)) \mid K \text{ компактно}\}.$$

Для компактов  $K_1, \dots, K_n$  и числа  $m \in \mathbb{N}$  положим

$$A_{K_1, \dots, K_n, m} = \{B \in \mathcal{A} \mid B \supset *K_1 \cup \dots \cup *K_n, P(B) < \alpha + 1/m\}.$$

В силу 2.1.6 (iv) для всех компактов  $K$  имеет место вложение  $*K \subseteq st^{-1}(K)$ , так что множество  $A_{K_1, \dots, K_n, m}$  не пусто. Используя принцип насыщения для семейства множеств  $\{A_{K_1, \dots, K_n, m}\}$ , находим такое множество  $B \in \mathcal{A}$ , что  ${}^oP(B) \leq \alpha$  и  $*K \subset B$  для всех компактов  $K$ . Поскольку  $X$  локально компактно, каждый элемент множества  $Ns(*X)$  лежит в некотором  $*K$ , и, значит,  $Ns(*X) \subset B$ . Отсюда следует, что множество  $Ns(*X)$  измеримо по Лёбу, и  $L(P)(Ns(*X)) = \alpha$ .

(б) Пусть  $\overline{L(P)}$  — внешняя мера, порожденная мерой  $L(P)$ . Положим

$$\gamma = \overline{L(P)}(Ns(*X)).$$

Достаточно показать, что  $\gamma \leq \alpha$ , где число  $\alpha$  определено в п. (а). Основная идея содержится в следующем утверждении.

**Утверждение.** Пусть  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ . Тогда для каждого  $m \in \mathbb{N}$  существует такая последовательность  $\{C_i^{(m)}\}_{i \leq n(m)}$  подмножеств множества  $X$ , что каждое  $C_i^{(m)}$  — это замкнутый шар радиуса  $3/m$ , и

$$\overline{L(P)}\left(Ns(*X) \cap \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n(m)} *C_i^{(m)}\right) > \gamma - \varepsilon.$$

Сначала выведем из этого утверждения предложение 3.4.7(b). Определим

$$K_\varepsilon = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n(m)} C_i^{(m)};$$

поскольку множество  $K_\varepsilon$  замкнуто и вполне ограничено (т. е. имеет  $\varepsilon$ -сеть для любого  $\varepsilon > 0$ ), то оно компактно. Из замкнутости множеств  $C_i^{(m)}$  следует, что

$$\text{st}^{-1}(K_\varepsilon) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n(m)} \text{st}^{-1}(C_i^{(m)}) \supset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n(m)} {}^*C_i^{(m)} \cap \text{Ns}({}^*X).$$

Поэтому согласно утверждению

$$L(P)(\text{st}^{-1}(K_\varepsilon)) > \gamma - \varepsilon,$$

откуда следует предложение 3.4.7(b).

Теперь докажем утверждение. Для любых  $x \in {}^*X$  и  $r \in {}^*\mathbb{R}_+$  положим

$$B(x, r) = \{y \in {}^*X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Если заданы  $\delta \in \mathbb{R}_+$  и  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , определим

$$\beta_{n, \delta} = \sup \left\{ L(P) \left( \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta) \right) \mid x_1, \dots, x_n \in {}^*X \right\},$$

а также  $\beta_\delta = \sup \{\beta_{n, \delta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Заметим, что множество

$$\left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall x_1, \dots, x_n \in {}^*X \ P \left( \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta) \right) < \beta_\delta + 1/n \right\}$$

внутреннее и содержит всё  $\mathbb{N}$ . Значит, найдется такое  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $\beta_{\eta, \delta} = \beta_\delta$  для всех  $\delta \in \mathbb{R}_+$ .

Пусть  $\varepsilon$  — положительное действительное число из доказанного выше утверждения. Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  существует такая конечная последовательность точек  $x_1^{(m)}, \dots, x_{n(m)}^{(m)}$  что

$$L(P) \left( \bigcup_{i=1}^{n(m)} B(x_i^{(m)}, 1/m) \right) > \beta_{1/m} - \varepsilon/2^m.$$

Требуется получить оценку

$$\overline{L(P)} \left( \text{Ns}({}^*X) - \bigcup_{i=1}^{n(m)} B(x_i^{(m)}, 1/m) \right) < \varepsilon/2^m.$$

Она доказывается так: продолжим последовательность  $x_1^{(m)}, \dots, x_{n(m)}^{(m)}$ , до внутренней последовательности  $x_1^{(m)}, \dots, x_\eta^{(m)}$  содержащей все стандартные точки; это возможно по принципу

насыщения. По определению числа  $\eta$  множество

$$B_m = \bigcup_{i=1}^{\eta} B(x_i^{(m)}, 1/m) - \bigcup_{i=1}^{n(m)} B(x_i^{(m)}, 1/m)$$

имеет меру меньше, чем  $\varepsilon/2^m$ , а так как последовательность  $x_1^{(m)}, \dots, x_{\eta}^{(m)}$  содержит все стандартные точки, то

$$\text{Ns}(*X) - \bigcup_{i=1}^{n(m)} B(x_i^{(m)}, 1/m) \subset B_m.$$

Теперь заменим последовательность  $\{B(x_i^{(m)}, 1/m)\}_{i \leq n(m)}$  на последовательность стандартных множеств  $\{C_i^{(m)}\}_{i \leq n(m)}$ , удовлетворяющую утверждению. Если  $B(x_i^{(m)}, 1/m) \cap \text{Ns}(*X) = \emptyset$ , положим  $C_i^{(m)} = \emptyset$ . Если же пересечение не пусто, можно найти такой стандартный элемент  $y_i^{(m)} \in X$ , что

$$B(x_i^{(m)}, 1/m) \subset C_i^{(m)},$$

где

$$C_i^{(m)} = \{x \in X \mid d(x, y_i^{(m)}) \leq 3/m\}.$$

Следовательно,

$$\overline{L(P)} \left( \text{Ns}(*X) - \bigcup_{i=1}^{n(m)} *C_i^{(m)} \right) < \varepsilon/2^m,$$

откуда

$$\overline{L(P)} \left( \text{Ns}(*X) \cap \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n(m)} *C_i^{(m)} \right) > \gamma - \varepsilon.$$

Выбрасывая пустые  $C_i^{(m)}$ , мы доказываем утверждение, а с ним и предложение 3.4.7.  $\square$

**Замечание.** Доказательство пункта (а) по существу принадлежит Лёбу (Loeb [9]), в то время как идея доказательства (b) основывается на хорошо известных рассуждениях, показывающих, что все вероятностные меры на польских пространствах *плотны* (см. Billingsley [1]). Следует отметить, что доказательство пункта (b) можно существенно упростить, если предположить, что пространство  $X$  сепарабельно; однако предложение 3.4.7 будет играть столь важную роль в гл. 5, что мы решили изложить общий случай. Заметим, что (а) остается верным, если ослабить условие измеримости \*-открытых множеств  $O$ ; то же самое верно относительно (b), если  $X$  сепарабельно.

Во многих ситуациях гораздо легче показать, что множество околостандартных точек имеет внешнюю меру 1, чем доказать



существование компактов с мерой, близкой к 1. Предложение 3.4.7 как раз и утверждает, что для некоторых пространств этого достаточно для возможности использовать теорему 3.4.6. Фактически в этих пространствах теорема 3.4.6 может быть использована даже и в том случае, когда множество  $Ns(*X)$  не имеет внешней меры 1, но тогда мера  $L(P) \circ st^{-1}$  не будет вероятностной.

При использовании теоремы 3.4.6 для построения мер часто желательно сравнить результат с некоторой заданной функцией множеств; например, если мы продолжаем меру на более широкую алгебру, то хотелось бы, чтобы новая мера совпадала со старой на тех множествах, на которых старая мера определена. Следующий результат является эффективным средством для такой проверки; он восходит к работам Андерсона (Anderson [2], [3]).

**3.4.8. Предложение.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство и  $(*X, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство с конечно аддитивной мерой  $P$ , причем  $L(P)(Ns(*X)) = 1$ . Пусть  $\mathcal{C}$  — семейство подмножеств пространства  $X$ , и  $v: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  — такая регулярная функция множеств, что

$$(3) \quad v(C) = L(P)(*C) \text{ для всех } C \in \mathcal{C}.$$

Тогда мера  $\mu = st(L(P))$  является продолжением меры  $v$ .

*Доказательство.* Пусть даны  $C \in \mathcal{C}$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ; выберем такие замкнутое и открытое множества  $F, O \in \mathcal{C}$ , что  $F \subset C \subset O$  и

$$(4) \quad v(O) - v(F) < \varepsilon;$$

это возможно в силу регулярности меры  $v$ . Очевидно,  $*F \subset *C \subset *O$ , и в соответствии с нестандартной характеристикой замкнутых и открытых множеств (см. 2.1.6)

$$*F \cap Ns(*X) \subset st^{-1}(F) \subset st^{-1}(C) \subset st^{-1}(O) \subset *O.$$

Комбинируя (4) с формулой (3), примененной к множествам  $O$  и  $F$ , и вспоминая, что  $L(P)(Ns(*X)) = 1$ , получаем

$$L(P)(*O) - L(P)(*F \cap Ns(*X)) < \varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon$  произвольно, а множества  $*C \cap Ns(*X)$  и  $st^{-1}(C)$  оба «втиснуты» между множествами  $*F \cap Ns(*X)$  и  $*O$ , должно выполняться равенство

$$(5) \quad L(P)(st^{-1}(C) \Delta *C) = 0,$$

и, следовательно,

$$\mu(C) = L(P)(st^{-1}(C)) = L(P)(*C) = v(C);$$

предложение доказано.  $\square$

В качестве следствия последнего предложения мы получим принадлежащую Андерсону нестандартную версию теоремы Лузина (см. Anderson [2], [3]). Результат интересен сам по себе, а также полезен для построения поднятий.

**3.4.9. Следствие.** Пусть  $(X, \mathcal{C}, \nu)$  — радоновское вероятностное пространство, и  $f: X \rightarrow Y$  — измеримое отображение в хаусдорфово пространство  $Y$  со счетной базой. Тогда  ${}^\circ(*f(x)) = f({}^\circ x)$  для  $L(*\nu)$ -почти всех точек  $x \in {}^*X$ .

*Доказательство.* Из предложений 3.4.7 и 3.4.8 легко следует, что  $L(*\nu)(Ns({}^*X)) = 1$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением околостандартных точек  $x$ . Пусть  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — счетная база открытых множеств в пространстве  $Y$ , причем  $U_1 = Y$ . Неравенство  ${}^\circ(*f(x)) \neq f({}^\circ x)$  (или несуществование стандартной части  $y = {}^*f(x)$ ) равносильно существованию такого  $n \in \mathbb{N}$ , что  $f({}^\circ x) \in U_n$ ,  $*f(x) \notin {}^*U_n$ , т. е. включению

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(f \circ \text{st})^{-1}(U_n) - {}^*f^{-1}({}^*U_n)\}.$$

Поскольку  $A - B \subset A \Delta B$  для любых множеств  $A$  и  $B$ , то достаточно доказать, что  $L(*\nu) \{ (f \circ \text{st})^{-1}(U_n) \Delta {}^*f^{-1}({}^*U_n) \} = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Но

$$(f \circ \text{st})^{-1}(U_n) \Delta {}^*f^{-1}({}^*U_n) = \text{st}^{-1}(f^{-1}(U_n)) \Delta ({}^*f^{-1}({}^*U_n));$$

применяя формулу (5) к мере  $P = *\nu$  и множеству  $S = f^{-1}(U_n)$ , мы получаем, что множество в правой части имеет меру нуль.  $\square$

Андерсоновская теорема Лузина утверждает, что  $*f$  является поднятием функции  $f$  по отношению ко всем стандартным мерам  $*\nu$ . Второе, не менее полезное следствие предложения 3.4.8 — это следующая теорема о представлении, также принадлежащая Андерсону (см. Anderson [2], [3]).

**3.4.10. Следствие.** Пусть  $\mu$  — радоновская вероятностная мера на хаусдорфовом пространстве  $X$ . Тогда существуют такие гиперконечное подмножество  $Y$  множества  $*X$  и внутренняя мера  $P$  на  $Y$ , что  $\mu = \text{st}(L(P))$ .

*Доказательство.* Для заданного конечного семейства  $O_1, O_2, \dots, O_n$  открытых подмножеств пространства  $X$  обозначим через  $\xi_{O_1, O_2, \dots, O_n}$  множество всех таких гиперконечных разбиений множества  $*X$  на  $*\mu$ -измеримые подмножества, что каждое из множеств  $*O_i$  является объединением элементов разбиения. Семейство  $\{\xi_{O_1, O_2, \dots, O_n}\}$  замкнуто относительно конечных пересечений; поэтому существует такое гиперконечное разбиение множества  $*X$  на  $*\mu$ -измеримые подмножества, что  $*$ -версия лю-

бого открытого множества является объединением элементов разбиения. Фиксируем такое разбиение  $E$ ; пусть  $Y$  содержит по одной точке из каждого элемента разбиения  $E$ ; для  $y \in Y$  соответствующий (содержащий  $y$ ) элемент разбиения обозначим  $[y]$ . Положим

$$P\{y\} = {}^*\mu([y]).$$

Поскольку любое открытое множество есть объединение элементов разбиения, ясно, что

$$\mu(O) = {}^*\mu(*O) = P(*O) = L(P)(*O)$$

для всех открытых множеств  $O$ . Согласно предложению 3.4.8, меры  $\mu$  и  $\text{st}(L(P))$  совпадают на открытых множествах, а поскольку обе эти меры радоновские, они равны.  $\square$

В следствии 3.4.10 сформулирован один из основополагающих фактов нестандартной теории меры; в дальнейшем он будет неоднократно использоваться, часто без явных ссылок.

### 3.5. Применение к предельным мерам и продолжению мер

Сейчас мы будем применять развитый в предыдущем параграфе аппарат в стандартной теории меры и теории вероятностей. Наша цель — показать, что этот аппарат представляет собой сильное и гибкое орудие для построения разных типов мер. Естественный первый шаг — посмотреть, что получится, если мы применим теорему 3.4.6 к  $*$ -версии стандартного пространства.

**3.5.1. Теорема.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство и  $\tau$  — база топологии в  $X$ , замкнутая относительно конечных объединений. Пусть  $\nu$  — регулярная конечно аддитивная вероятностная мера, определенная на алгебре  $\mathcal{C}$ , включающей  $\tau$ . Предположим, что для каждого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется компакт  $K_\varepsilon$ , для которого

$$(1) \quad \beta_{K_\varepsilon} = \inf \{ \nu(O) \mid O \in \tau, O \supset K_\varepsilon \} > 1 - \varepsilon.$$

Тогда мера  $\nu$  имеет единственное продолжение до радоновской меры  $\mu$  на  $X$ , причем  $\mu(K) = \beta_K$  для всех компактов  $K$ .

*Доказательство.* Для построения меры  $\mu$  просто применим теорему 3.4.6 к пространству  $(*X, *\mathcal{C}, *\nu)$  и положим  $\mu = \text{st}(L(*\nu))$ . Из предложения 3.4.8 немедленно следует, что мера  $\mu$  является продолжением меры  $\nu$ .

Что касается единственности, допустим, что  $\bar{\mu}$  — другое радоновское продолжение меры  $\nu$ . Поскольку  $\mu(K) = \beta_K$ , для всех компактов  $K$  должно быть  $\mu(K) \geq \bar{\mu}(K)$ . Так как  $\bar{\mu} \neq \mu$ , должно найтись такое множество  $B$ , что  $\mu(B) < \bar{\mu}(B)$ , а поскольку мера  $\bar{\mu}$  радоновская, найдется такой компакт  $K \subset B$ , что  $\bar{\mu}(K) > \mu(B)$ . Но  $\mu(B) \geq \mu(K)$ , и, следовательно,  $\bar{\mu}(K) > \mu(K)$ : противоречие.

Чтобы проиллюстрировать силу этой теоремы, мы используем ее для получения двух знаменитых результатов теории вероятностей. Первый связан с проективными пределами мер и составляет то, что Шварц (см. Schwartz [1]) называет теоремой Прохорова; следует предупредить читателя, что указанная теорема отличается от той, которую обычно называют этим именем (фактически она, судя по всему, принадлежит Кисиньскому<sup>1)</sup> (Kisynski [1]). Эта теорема играет фундаментальную роль в теории цилиндрических мер и обобщенных случайных процессов, но по поводу этих применений мы можем лишь отослать читателя к упомянутой книге Шварца. Наш второй результат состоит в другом доказательстве существования броуновского движения, из которого непосредственно получается модуль непрерывности Леви.

Прежде чем сформулировать теорему Прохорова, приведем некоторые определения. *Проективной системой* топологических пространств называется направленное семейство  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$  хаусдорфовых топологических пространств вместе с семейством  $\{\pi_{ij}\}_{i < j}$  непрерывных отображений  $\pi_{ij}: X_j \rightarrow X_i$ , удовлетворяющих условию  $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$  при  $i < j < k$ ,  $i, j, k \in I$ . *Проективным пределом* семейства  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$  называется пространство  $(X, \tau)$ , где

$$X = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i < j \ (x_i = \pi_{ij}(x_j))\},$$

а  $\tau$  — самая слабая топология, в которой все отображения  $\pi_j: X \rightarrow X_j$ , задаваемые формулами  $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ , непрерывны; пространство  $(X, \tau)$ , очевидно, хаусдорфово.

Семейство  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  радоновских мер на пространствах  $X_i$  называется *проективной системой мер*, если  $\mu_i = \pi_{ij}(\mu_j)$  при  $i < j$ . Возникает вопрос: когда проективная система мер порождает предельную радоновскую меру  $\mu$  на  $X$ , для которой  $\mu_i = \pi_i(\mu)$  для всех  $i \in I$ ?

**3.5.2. Теорема Прохорова.** Пусть  $(X_i, \tau_i, \mu_i)_{i \in I}$  — проективная система хаусдорфовых пространств и радоновских вероятностных мер. Следующее условие является необходимым и достаточным для существования такой радоновской вероятностной меры  $\mu$  на проективном пределе  $X$ , что  $\mu_i = \pi_i(\mu)$  для всех  $i \in I$ :

Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой компакт  $K_\varepsilon \subset X$ , что

$$(2) \quad \mu_i(\pi_i(K_\varepsilon)) > 1 - \varepsilon \text{ для всех } i \in I.$$

Если предельная мера существует, то она единственна.

<sup>1)</sup> Опубликованная в 1956 г. работа Прохорова [1\*] по существу содержит эту теорему в иной формулировке. — Прим. ред.

*Доказательство.* Необходимость почти тривиальна: поскольку мера  $\mu$  радонова, существует такой компакт  $K_\varepsilon$ , что  $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ , и, следовательно,

$$\mu_i(\pi_i(K_\varepsilon)) = \mu(\pi_i^{-1}(\pi_i(K_\varepsilon))) \geq \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Для доказательства достаточности пусть  $\tau'$  — база топологии в  $X$ , задаваемая множествами  $\pi_i^{-1}(O)$  для всех открытых множеств  $O \in \tau_i$  и всех  $i \in I$ . Пусть  $\nu$  — конечно аддитивная мера, определенная на алгебре  $\mathcal{C}$ , порожденной этой базой, и задаваемая формулой  $\nu(\pi_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ . Поскольку каждая мера  $\mu_i$  радонова и прообраз компактного множества замкнут, мера  $\nu$  регулярна. Условие (1) теоремы 3.5.1 непосредственно следует из (2), и, значит, теорема 3.5.1 влечет за собой существование и единственность радоновского продолжения меры  $\nu$ . Теорема Прохорова доказана.  $\square$

Заметим, что условие (2) позволяет вычислять меру только для элементов базы, содержащих множества  $K_\varepsilon$ ; таким образом, это преимущество теоремы 3.4.6 оказалось в этом применении решающим.

Перейдем к следующему примеру — другой конструкции броуновского движения. Сейчас мы увидим, как используется равенство  $\beta_K = \mu(K)$  из теоремы 3.5.1. Напомним, что мы хотим доказать. Пусть  $C[0, 1]$  — пространство непрерывных действительных функций на отрезке  $[0, 1]$  и  $\pi$  — равномерная топология на  $C[0, 1]$ . Цилиндрическое множество  $C$  — это подмножество пространства  $C[0, 1]$ , имеющее вид

$$C = \{\omega \in C[0, 1] \mid \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_n) \in A_n\},$$

где  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  — точки отрезка  $[0, 1]$ , а  $A_1, \dots, A_n$  — борелевские множества в  $\mathbb{R}$ . Пусть  $\nu$  — конечно аддитивная мера, определенная на цилиндрических множествах формулой

$$\nu(C) = \int_{A_n} \dots \int_{A_1} \prod_{i=1}^n \frac{\exp[-(y_i - y_{i-1})^2/2(t_i - t_{i-1})]}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} dy_i,$$

где  $t_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Докажем следующую теорему.

**3.5.3. Теорема.** *Конечно аддитивная мера  $\nu$  продолжается единственным образом до борелевской меры  $W$  на  $(C[0, 1], \pi)$ . Более того,*

$$(3) \quad W\left\{\omega \in C[0, 1] \mid \lim_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t = t_1 - t_2 \searrow 0}} \frac{|\omega(t_2) - \omega(t_1)|}{(2t \ln(1/t))^{1/2}} = 1\right\} = 1.$$

*Доказательство.* Пусть  $\sigma$  — топология поточечной сходимости в  $C[0, 1]$ . Если  $\tau$  состоит из всех конечных объединений цилинд-

рических множеств  $C$  с открытыми сечениями  $A_1, \dots, A_n$ , то  $\tau$  — база топологии  $\sigma$ , замкнутая относительно конечных объединений. Мы хотим применить теорему 3.5.1 к пространству  $(C[0, 1], \sigma)$ . Регулярность меры  $\nu$  очевидна, так что требуется доказать только формулу (1). Рассмотрим следующие множества:

$$K_n^D = \left\{ \omega \mid \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \left( 0 < t_2 - t_1 \leq \frac{1}{n} \rightarrow \right. \right. \\ \left. \left. \rightarrow \frac{|\omega(t_2) - \omega(t_1)|}{(2D(t_2 - t_1) \ln[1/(t_2 - t_1)])^{1/2}} \leq 1 \right) \right\},$$

где  $D \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Стандартная часть любого элемента из множества  $*K_n^D$  — как в  $\sigma$ -, так и в  $\pi$ -топологии, — очевидно, лежит в множестве  $K_n^D$ , так что  $K_n^D$  компактно в обеих топологиях. Читателю не составит труда убедиться в том, что

$$\beta_{K_n^D} = \inf \left\{ \prod_{i=0}^{m-1} \left( \int_{-(2D \Delta t_i \ln(1/\Delta t_i))^{1/2}}^{(2D \Delta t_i \ln(1/\Delta t_i))^{1/2}} \frac{\exp(-x^2/2 \Delta t_i)}{\sqrt{2\pi \Delta t_i}} dx \right) \right\},$$

где  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , и нижняя грань берется по всем таким разбиениям  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ , что  $\max_{i < m} \Delta t_i \leq 1/n$ .

Сделав в  $i$ -м интеграле замену переменных  $y = x/\sqrt{\Delta t_i}$ , мы получаем

$$(4) \quad \beta_{K_n^D} = \inf \left\{ \prod_{i=0}^m \left( \int_{-(2D \ln(1/\Delta t_i))^{1/2}}^{(2D \ln(1/\Delta t_i))^{1/2}} \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \right\}.$$

Рассмотрим сначала случай  $D > 1$ . Используя правило Лопи-таля, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (2/\sqrt{2\pi}) \exp(-y^2/2) dy}{\exp(-x^2/2)} = 0;$$

поэтому для достаточно больших  $n$

$$\begin{aligned} \beta_{K_n^D} &\geq \inf \prod_{i=0}^{m-1} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{2D \ln(1/\Delta t_i)}{2} \right] \right\} = \\ &= \inf \prod_{i=0}^{m-1} (1 - \Delta t_i^D) = \inf \{ \exp(\sum \ln(1 - \Delta t_i^D)) \} \geq \\ &\geq \inf \{ \exp(-2 \sum \Delta t_i^D) \} \geq \exp(-2(1/n)^{D-1}), \end{aligned}$$

где нижняя грань берется по тому же множеству разбиений, что и раньше. Это дает условие (1) теоремы 3.5.1, так что  $\nu$  имеет единственное продолжение до радоновской меры  $W$  на  $(C[0, 1], \sigma)$ . Поскольку множества  $K_n^D$  компактны также и в топологии  $\pi$ , мера  $W$  должна быть также радоновской мерой на  $(C[0, 1], \pi)$ ; а то, что  $W$  — единственное  $\pi$ -радоновское продолжение меры  $\nu$ , доказывается так же, как единственность в теореме 3.5.1. Поскольку все пополненные борелевские меры на полных сепарабельных метрических пространствах являются радоновскими, мера  $W$  единственна также и как борелевская мера на  $(C[0, 1], \pi)$ .

Осталось доказать формулу (3). Пусть

$$K^D = \left\{ \omega \in C[0, 1] \mid \lim_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t = t_2 - t_1 \downarrow 0}} \frac{|\omega(t_2) - \omega(t_1)|}{(2Dt \ln(1/t))^{1/2}} \leq 1 \right\};$$

тогда  $K^D \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n^D$  и  $K^D \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n^{D'}$  для всех  $D' > D$ . Из только что доказанного с учетом равенства  $W(K_n^D) = \beta_{K_n^D}$  следует, что  $W(K^D) = 1$  при  $D > 1$ . Ясно, что для доказательства формулы (3) достаточно показать, что  $W(K^D) = 0$  при  $D < 1$ , а это будет следовать из равенства  $\beta_{K_n^D} = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $D < 1$ .

Предположим, что  $D < 1$ , и выберем такое  $\alpha > 1$ , что  $\alpha D < 1$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-y^2/2) dy}{\exp(-\alpha x^2/2)} = \infty,$$

откуда для всех достаточно больших  $m$

$$\beta_{K_n^D} \leq \prod_{i=0}^{m-1} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2\alpha D \ln(1/m)}{2}\right) \right\} = \left(1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{\alpha D}\right)^m$$

(мы применили формулу (4) к разбиению  $t_i = i/m$ ). Поскольку  $\alpha D < 1$ , мы имеем  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - (1/m)^{\alpha D}\right)^m = 0$ , и, следовательно,  $\beta_{K_n^D} = 0$  для всех  $D < 1$ , чем и завершается доказательство теоремы.  $\square$

В равенстве (3) фигурирует знаменитый модуль непрерывности Леви для броуновских траекторий; если бы мы хотели только доказать существование меры Винера, мы могли бы облегчить себе жизнь, выбрав более простые компакты. Стоит

также обратить внимание на то, как мы использовали равенство  $W(K) = \beta_K$  из теоремы 3.5.1 для доказательства того, что  $W(K^D) = 1$  при  $D > 1$ .

Для дальнейших применений оставим в стороне теорему 3.5.1 и вернемся к технике, разработанной в § 3.4. Пусть  $H$  — вещественное гильбертово пространство,  $\mathcal{F}$  — класс конечномерных подпространств в  $H$ , и  $\mathcal{P}$  — класс конечномерных проекторов в  $H$ . Если  $E, F \in \mathcal{F}$ ,  $E \subseteq F$ , обозначим через  $P_{E, F}$  проектор пространства  $F$  на  $E$ , а через  $P_E$  — проектор пространства  $H$  на  $E$ .

Рассмотрим проективную систему  $(E, \mu_E, P_{E, F})_{E, F \in \mathcal{F}}$  радоновских мер, и пусть  $\mu$  — конечно аддитивная мера на  $H$ , определяемая формулой  $\mu(P_E^{-1}(A)) = \mu_E(A)$ . Используя теорему Прохорова, нетрудно показать, что борелевская мера  $\nu$ , продолжающая меру  $\mu$ , существует тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+} \inf_{E \in \mathcal{F}} \mu_E(B_E(r)) = 1,$$

где  $B_E(r)$  — шар радиуса  $r$  с центром в начале координат в пространстве  $E$  (детали см., например, в работе Lindström [4]).

А что произойдет, если последнее условие не выполнено? Оказывается, что хотя предельной меры на  $H$  более не существует, она может существовать на некотором более широком пространстве. С нестандартной точки зрения это как мы увидим, означает, что хотя естественная нестандартная предельная мера не уместается в множестве околостандартных точек в топологии гильбертова пространства, она может уместиться в множестве околостандартных точек в некоторой более слабой топологии. Правильный способ ослабления топологии был открыт Гроссом, см. Gross [1].

**3.5.4. Определение.** Пусть  $\mu = \{\mu_F\}_{F \in \mathcal{F}}$  — проективная система мер на  $H$ . Норма  $|\cdot|$  на  $H$  называется  $\mu$ -измеримой, если она непрерывна относительно гильбертовой нормы  $\|\cdot\|$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой проектор  $P_0 \in \mathcal{P}$ , что

$$(5) \quad \mu\{x \in H \mid |Px| > \varepsilon\} < \varepsilon \text{ для всех таких } P \in \mathcal{P}, \text{ что } P \perp P_0.$$

Теорема Гросса утверждает, что если норма  $|\cdot|$   $\mu$ -измерима, то мера  $\mu$  может быть продолжена до борелевской меры на банаховом пространстве  $B$ , полученном пополнением пространства  $H$  по норме  $|\cdot|$ . Таким образом, в интересующих нас случаях гильбертова норма не может быть измеримой. Прежде чем формулировать результат Гросса более точно, взглянем на пример.

**3.5.5. Пример.** Пусть для каждого  $F \in \mathcal{F}$  мера  $\mu_F$  — гауссовская, со средним 0 и с матрицей ковариаций  $I$ , где  $I$  — единич-



ная матрица. Легко проверить, что  $\{\mu_F\}_{F \in \mathcal{F}}$  образует проективную систему мер, и если бы предельная мера на  $H$  существовала, это была бы естественная бесконечномерная гауссовская мера. Но, как легко видеть, такой меры не существует. Теорема Гросса, однако, утверждает, что если бы мы нашли  $\mu$ -измеримую норму, мы смогли бы получить предельную меру на более широком пространстве  $B$ . Пусть  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — ортонормированный базис в  $H$ , и пусть  $T: H \rightarrow H$  — линейный оператор. Напомним, что  $T$  называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$ ; при этом сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$  не зависит от выбора ортонормированного базиса. Если  $T$  — инъективный оператор Гильберта — Шмидта, определим норму  $|\cdot|_T$  по формуле

$$|x|_T = \|Tx\|.$$

Нетрудно показать, что норма  $|\cdot|$  будет  $\mu$ -измеримой. Поэтому мера  $\mu$  может быть продолжена до борелевской меры на гильбертовом пространстве, порожденном нормой  $|\cdot|_T$ .

Этот пример представляет огромный интерес для теории вероятностей в бесконечномерных пространствах. Мы вернемся к этой проблеме в § 4.7 при обсуждении броуновского движения в гильбертовом пространстве. Поскольку гауссовские меры на «естественном» гильбертовом пространстве не существуют, броуновское движение тоже должно жить «не на том» пространстве. Более полную информацию о стандартной теории читатель найдет в лекциях Го (Кио [1]).

Прежде чем доказывать теорему Гросса, мы должны договориться о том, в каком смысле мера на  $B$  может продолжать меру  $\mu$ . Пусть  $B^*$  — пространство, сопряженное к  $B$ ; вложим естественным образом  $B^*$  в  $H$ . Если  $y_1, \dots, y_n \in B^*$ , и  $A$  — борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$ , то множество

$$\{x \in B \mid (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in A\}$$

называется *цилиндрическим множеством* в  $B$ . Определим конечно аддитивную меру  $\hat{\mu}$  на таких цилиндрических множествах формулой

$$\mu\{x \in B \mid (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in A\} = \mu\{x \in H \mid ((y_1, x), \dots, (y_n, x)) \in A\}.$$

Под утверждением, что борелевская мера на  $B$  продолжает меру  $\mu$ , мы теперь будем понимать, что она продолжает  $\hat{\mu}$ .

**3.5.6. Теорема Гросса.** Пусть  $\mu = \{\mu_F\}_{F \in \mathcal{F}}$  — проективная система мер на  $H$ ,  $|\cdot|$  —  $\mu$ -измеримая норма, и  $B$  — пополнение

пространства  $H$  по норме  $|\cdot|$ . Тогда  $\mu$  продолжается до борелевской меры на  $B$ .

Обозначим через  $\text{st}_{|\cdot|}$  отображение стандартной части в  $B$  по отношению к норме  $|\cdot|$ ; пусть  $\text{Ns}_{|\cdot|}(*B)$  — множество околостандартных элементов в  $*B$ . Семейство  $\{\mu_E\}_{E \in \mathcal{F}}$  продолжается до внутреннего семейства  $\{\tilde{\mu}_E\}_{E \in * \mathcal{F}}$  нестандартных мер. По принципу насыщения можно найти такое  $E \in \mathcal{F}$ , что  $H \subset E$ . Определим внутреннюю меру  $\tilde{\mu}$  на  $*B$  по формуле

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}_E(A \cap E).$$

Мы покажем, что  $\text{st}_{|\cdot|}(L(\tilde{\mu}))$  и есть искомая мера. Прежде всего заметим, что если множество  $O \subset B$  открыто, то в силу непрерывности нормы  $|\cdot|$  по отношению к норме  $\|\cdot\|$  множество  $*O$   $\mu$ -измеримо. Ключевым шагом является следующая лемма, позволяющая нам использовать предложение 3.4.7.

**3.5.7. Лемма.** Если норма  $|\cdot|$   $\mu$ -измерима, то

$$L(\tilde{\mu})(\text{Ns}_{|\cdot|}(*B)) = 1.$$

*Доказательство.* Определим

$$A_m = \{x \in E \mid \exists v \in H \ (|v - x| < 1/m)\};$$

в силу полноты пространства  $B$  имеем  $\text{Ns}_{|\cdot|}(*B) \cap E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ .

Следовательно, достаточно показать, что  $L(\tilde{\mu}_E)(A_m) = 1$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ . Но для каждого  $P \in \mathcal{P}$  из определения 3.5.4 и каждого  $n > m$

$$A_m \supset \{x \in E \mid *P(x) \text{ околостандартно}\} \cap \{x \in E \mid |x - *P(x)| < \frac{1}{n}\}.$$

Первое множество в правой части имеет меру Лёба 1, так как мера  $*(\mu_{P(H)})$  концентрируется на множестве околостандартных точек (она является  $*$ -версией радоновской меры на конечномерном пространстве), а второе множество в силу измеримости нормы  $|\cdot|$  имеет меру больше, чем  $1 - 1/n$ . Поскольку  $n$  сколь угодно велико,  $L(\tilde{\mu}_E)(A_m) = 1$ .  $\square$

Из леммы 3.5.7 и теоремы 3.4.6 мы теперь получаем, что  $\text{st}_{|\cdot|}(L(\tilde{\mu}))$  — радоновская мера на  $B$ ; остается только показать, что она является продолжением меры  $\hat{\mu}$ . Вычислим сначала значение меры  $\text{st}_{|\cdot|}(L(\tilde{\mu}))$  на цилиндрических множествах:

$$\begin{aligned} & \text{st}_{|\cdot|}(L(\tilde{\mu}))\{x \in B \mid (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in A\} = \\ & = L(\tilde{\mu}_E)\{x \in E \mid (y_1(\text{st}(x)), \dots, y_n(\text{st}(x))) \in A\} = \\ & = L(\tilde{\mu}_E)\{x \in E \mid (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \text{st}^{-1}(A)\} = \\ & = L(*\mu_F)\{x \in *F \mid ((y_1, x), \dots, (y_n, x)) \in \text{st}^{-1}(A)\} = \\ & = \text{st}(L(*\mu_F))\{x \in F \mid ((y_1, x), \dots, (y_n, x)) \in A\}, \end{aligned}$$

где  $F$  — конечномерное подпространство пространства  $H$ , порожденное векторами  $y_1, \dots, y_n$ . С другой стороны, по определению меры  $\mu$

$$\mu\{x \in B \mid (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in A\} = \mu_F\{x \in F \mid ((y_1, x), \dots, (y_n, x)) \in A\}.$$

Нам нужно показать, что правые части в двух последних формулах равны между собой. Для этого в предложении 3.4.8 поставим  $F$  вместо  $X$ ,  $\mu_F$  вместо  $\nu$  и  ${}^*\mu_F$  вместо  $P$  и немедленно получим требуемое равенство. Теорема Гросса доказана.

Как мы уже отмечали ранее, мы вернемся к теореме Гросса в § 4.7; сейчас заметим лишь, что все известные нам стандартные доказательства (Gross [1]; Kallianpur [1]; Кюо [1]) рассматривают только тот случай, когда цилиндрическая мера — гауссовская, так что нестандартное доказательство, возможно, является первым доказательством, проведенным в общем случае.

В нашем последнем приложении развитой теории мы вернемся к проблеме продолжения мер. Что произойдет с теоремой 3.5.1, если мы не знаем даже того, что мера  $\nu$  определена на базе топологии? Мы дадим короткое доказательство следующей теоремы, принадлежащей Анри (Henry [1]).

**3.5.8. Теорема Анри.** Пусть  $\mathcal{C}$  — алгебра подмножеств хаусдорфова топологического пространства  $X$  и пусть  $\nu$  — такая конечно-аддитивная мера на  $\mathcal{C}$ , что для всех  $C \in \mathcal{C}$

$$(6) \quad \nu(C) = \sup\{\nu(K) \mid K \in \mathcal{C}, K \subset C, K \text{ — компакт}\}.$$

Тогда мера  $\nu$  продолжается до радоновской меры на  $X$ .

*Доказательство.* Пусть

$$\mathcal{B} = \{*C \mid C \in \mathcal{C} \text{ или } C \text{ — борелевское множество}\}.$$

Пусть  $\mathcal{A}$  — гиперконечная алгебра, содержащая  $\mathcal{B}$ ; положим  $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap {}^*\mathcal{C}$ . Очевидно,  ${}^*\nu$  — внутренняя мера на  $\mathcal{D}$ . Если у нас есть две конечные алгебры и мера, определенная на меньшей из них, мы можем тривиальным образом продолжить эту меру на большую алгебру. Значит, по принципу переноса мы можем продолжать меру  ${}^*\nu \upharpoonright \mathcal{D}$  на  $\mathcal{A}$ , получив внутреннюю меру  $P$ . Применяя к  $(X, \mathcal{A}, P)$  теорему 3.4.6, получаем радоновскую меру  $\text{st}(L(P))$  на  $X$ ; согласно предложению 3.4.8 она продолжает меру  $\nu$ .  $\square$

За приложениями теоремы Анри мы вновь отсылаем читателя к книге Schwartz [1]. Мы включили доказательство этой теоремы, чтобы показать, как вложения в гиперконечные алгебры используются для продолжения мер; этот трюк восходит, по-видимому, к работе Loeb [1].

Мы надеемся, что глубина и разнообразие результатов, полученных в этом параграфе, убедят читателя в силе техники, развитой в § 3.4; мы настоятельно советуем также изучить приложения к слабой сходимости, данные в работах Anderson, Rashid [1] и Loeb [4]. Нестандартное изложение теорем 3.5.2 и 3.5.6 было впервые дано в работе Lindstrøm [4]; более общий вариант леммы 3.5.7 содержится в работе Lindstrøm [8]. Хотя мы и не смогли найти в литературе теорему 3.5.1, следует отметить, что стандартное доказательство можно получить с помощью методов работы Kisyński [1] (например, комбинируя теорему 2.1.4 и лемму 2.1.9 из книги Berg, Reus-Christensen, Ressel [1]). Что касается модуля непрерывности Леви, читатель может обратиться к работе Keisler [4], где приведено доказательство, основывающееся на андерсоновском случайном блуждании. Один естественный вопрос, который мы здесь не исследовали, состоит в следующем: как опустить меру Лёба, если пространство  $X$  не наделено никакой разумной топологической структурой? Три разных подхода к этой проблеме можно найти в работах Anderson [3], Ross [1] и Lindstrøm [8].

На этом мы заканчиваем наше введение в нестандартную теорию меры и теорию вероятностей. Читатель, который интересуется историей предмета и его развитием, может обратиться к превосходному обзору Cutland [3], который содержит почти исчерпывающий отчет о событиях, произошедших в этой области к лету 1983 года. В оставшейся части книги мы в основном сосредоточимся на тех аспектах теории, которые относятся к случайным процессам и к стохастическим явлениям в физике. Книги Stroyan, Bayod [1] и Hurd, Loeb [1] в изобилии содержат дополнительную информацию, а обзоры Cutland [2], [3], Fenstad [2], [3], Lindstrøm [6], Loeb [5], [8], Nelson [6], Osswald [4] и Perkins [7] освещают теорию с разных точек зрения.

## Часть II

# Избранные приложения

### Глава 4

### Стохастический анализ

Следуя идеям предыдущей главы, мы сейчас займемся одной из наиболее живых и активных областей нестандартных исследований — теорией случайных процессов и их применений. В этой области гиперконечные структуры играют особенно интересную и важную роль, объединяя в одной модели комбинаторные аспекты дискретной теории с аналитическими аспектами непрерывной теории. Мы уже видели пример такого взаимодействия между непрерывным и дискретным при построении броуновского движения в § 3.3, а сейчас рассмотрим его с большей широтой и более детально. Нашей центральной темой будет стохастическое интегрирование и его применения к диффузионным процессам, теории управления и многопараметрическим процессам.

#### 4.1. Гиперконечный интеграл Ито

Мы начнем с неформального введения в принадлежащую Андерсону (Anderson [1]) конструкцию стандартного интеграла Ито как гиперконечной суммы Стильтьеса. Цель этого первого параграфа — просто дать читателю почувствовать основные идеи предмета, а более технические доказательства мы пока отложим; систематическое изложение начнется в следующем параграфе. Однако для иллюстрации силы нашего метода мы приведем здесь полное, и, как нам кажется, проясняющее суть дела доказательство леммы Ито.

##### *А. Стохастическое интегрирование*

Основная проблема стохастического интегрирования состоит в том, чтобы придать смысл интегралам вида  $\int x dy$ , где  $x$  и  $y$  — случайные процессы. Первое, что приходит в голову — это обозначить через  $x_\omega$  и  $y_\omega$  функции  $x(\omega, \cdot)$  и  $y(\omega, \cdot)$  соответственно, и рассмотреть интеграл Стильтьеса

$$(1) \quad z_\omega(t) = \int_0^t x_\omega(s) dy_\omega(s).$$

Естественным кандидатом на роль стохастического интеграла теперь является процесс  $(\omega, t) \mapsto z_\omega(t)$ . Однако для того чтобы (1) имело смысл как интеграл Стильтьеса, траектория  $y(\omega, \cdot)$  должна иметь ограниченную вариацию, а для многих естественно возникающих процессов это не так; например, почти все броуновские траектории имеют неограниченную вариацию. Поэтому траекторно-стильтьесовский подход терпит провал.

Продолжая работы Винера, К. Ито (Ito [1]) открыл путь определения интегралов вида  $\int g db$ , где  $b$  — броуновское движение, а  $g$  — подходящий процесс. Ниже мы дадим набросок идей Ито, но сначала мы хотим испробовать нестандартный подход, в котором траекторно-стильтьесовское определение в самом деле работает.

Пусть  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$  — гиперконечная ось времени,  $\Delta t$  бесконечно мало. Нашим вероятностным пространством будет гиперконечное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , где для простоты мы предположим, что  $\mathcal{A}$  — это алгебра всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ . Гиперконечным случайным процессом на  $\Omega$  называется внутреннее отображение

$$X: \Omega \times T \rightarrow M,$$

где  $M$  — некоторое внутреннее множество; заметим, что поскольку мы используем алгебру всех внутренних множеств, никакие условия измеримости в этом определении не требуются. Через  $\Delta X(\omega, t)$  будем обозначать «приращение вперед» процесса  $X(\omega, \cdot)$  в точке  $t$ , т. е.

$$(2) \quad \Delta X(\omega, t) = X(\omega, t + \Delta t) - X(\omega, t)$$

будем пользоваться также следующим соглашением относительно сумм:

$$(3) \quad \sum_s^t X(\omega, r) = X(\omega, s) + \dots + X(\omega, t - \Delta t);$$

таким образом,  $X(\omega, t)$  не включается в сумму  $\sum_s^t (X(\omega, r))$ .

Нестандартный стохастический интеграл — это просто-напросто сумма Стильтьеса.

**4.1.1. Определение.** Пусть  $X, Y: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — два гиперконечных процесса. Стохастическим интегралом  $X$  по  $Y$  называется процесс  $\int X dY$ , определенный формулой

$$(4) \quad \left( \int X dY \right) (\omega, t) = \sum_0^t X(\omega, s) \Delta Y(\omega, s).$$

Случайную величину  $(\int X dY)(\cdot, t)$  мы будем записывать в виде  $\int_0^t X dY$ .

Стохастический интеграл определен для всех гиперконечных процессов  $X$  и  $Y$ , но, конечно, в такой общности он может иметь странные свойства и не иметь стандартной части. Одной из наших первых задач будет выделение таких классов процессов  $X$  и  $Y$ , для которых интеграл ведет себя прилично; этой задаче мы посвятим следующий параграф. А пока мы удовлетворимся тем, чтобы достаточно хорошо усвоить основные идеи. Чтобы лучше понять, что происходит, давайте взглянем на простой пример.

**4.1.2. Пример.** Вернемся к ситуации § 3.3:  $\Omega$  — это множество внутренних функций  $\omega: T \rightarrow \{-1, 1\}$ , а  $B: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — андерсоновское случайное блуждание:  $B(\omega, t) = \sum_0^t \omega(s) \sqrt{\Delta t}$ . Пусть  $X(\omega, s) = \omega(s)$ ; рассмотрим стохастический интеграл  $\int X dB$ . Мы имеем

$$\int_0^t X dB(\omega) = \sum_0^t \omega(s) \omega(s) \sqrt{\Delta t} = \sum_0^t \sqrt{\Delta t} = \frac{t}{\sqrt{\Delta t}};$$

полученная величина бесконечно велика для всех не бесконечно малых  $t$ . Следовательно, интеграл от конечной функции  $X$  по «броуновскому движению»  $B$  бесконечно велик.

Легко увидеть, в чем состоит основной дефект примера 4.1.2: приращения  $\pm \sqrt{\Delta t}$  броуновского движения чересчур велики — гораздо больше, чем можно ожидать от конечной функции. Что удерживает броуновскую траекторию конечной — так это тонкое равновесие между положительными и отрицательными вкладами. Подынтегральное выражение  $\omega(s)$  нарушает это равновесие, делая все приращения положительными. Вывод таков: если мы хотим, чтобы интеграл оставался конечным, мы не должны допускать такие подынтегральные выражения, которые правильно предсказывают («упреждают») поведение процесса  $B$ .

Сделаем это понятие неупреждаемости точным. Для  $\omega \in \Omega$  и  $t \in T$  положим

$$(5) \quad \omega \upharpoonright t = \langle \omega(s) \mid s < t \rangle$$

(мы по-прежнему работаем с  $\Omega$  из примера 4.1.2). Гиперконечный процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *неупреждающим*, если

из  $\omega \upharpoonright t = \omega' \upharpoonright t$  следует  $X(\omega, t) = X(\omega', t)$ . Чтобы показать, что мы движемся в правильном направлении, докажем следующий результат, в котором  $\lambda$  обозначает равномерную вероятностную меру на  $T$ :

**4.1.3. Предложение.** *Предположим, что  $X$  — неупреждающий процесс, квадратично  $S$ -интегрируемый по мере  $P \times \lambda$ . Тогда для всех  $t$  стохастический интеграл  $\int_0^t X dB$  почти наверное конечен.*

*Доказательство.* Простая алгебраическая выкладка дает

$$(6) \quad E\left(\left(\int_0^t X dB\right)^2\right) = E\left(\left(\sum_0^t X \Delta B\right)^2\right) = \\ = E\left(\sum_0^t X(s)^2 \Delta B(s)^2\right) + 2 \sum_{r < s} E(X(r) X(s) \Delta B(r) \Delta B(s)).$$

Последнее слагаемое здесь равно нулю, так как независимо от того, какие значения принимают  $X(s)$ ,  $X(r)$  и  $\Delta B(r)$ , величина  $\Delta B(s)$  равна плюс или минус  $\sqrt{\Delta t}$  с вероятностью 1/2. Поскольку  $\Delta B(s)^2 = \Delta t$ , мы получаем

$$(7) \quad E\left(\left(\int_0^t X dB\right)^2\right) = E\left(\sum_0^t X(s)^2 \Delta t\right) = \int_{\Omega \times [0, t]} X^2 d(P \times \lambda) < \infty,$$

чем и завершается доказательство.  $\square$

Этот результат является первым указанием на то, что мы можем получить разумную теорию, если ограничим класс подынтегральных выражений неупреждающими процессами. Не углубляясь здесь в этот вопрос, отметим лишь, что в следующем параграфе мы докажем  $S$ -непрерывность (почти наверное) определенного выше интеграла  $\int X dB$ , что означает, что он порождает достаточно хороший стандартный процесс.

Прежде чем обратиться к стандартной теории стохастического интегрирования, мы дадим альтернативное определение неупреждающих процессов, которое интуитивно менее ясно, но зато его легче обобщать. Для каждого  $t \in T$  пусть  $\mathcal{A}_t$  — внутренняя алгебра подмножеств множества  $\Omega$ , порожденная множествами вида

$$[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega \mid \omega' \upharpoonright t = \omega \upharpoonright t\}.$$

Легко видеть, что процесс  $X$  неупреждающий тогда и только тогда, когда случайная величина  $X(\cdot, t)$   $\mathcal{A}_t$ -измерима при каж-



дом  $t$ . Мы будем называть тройку  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$  *внутренней фильтрацией*.

Теперь перейдем к стандартной теории стохастического интегрирования по процессу  $b$ , являющемуся стандартной частью процесса  $B$ . Стандартное понятие неупреждаемости основывается на фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, L(P))$ , которая порождена определенной выше фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$ . Пусть  $\mathcal{N}$  — класс множеств нулевой меры относительно  $L(P)$ ; для каждого  $t \in [0, 1]$  определим

$$(8) \quad \mathcal{B}_t = \sigma \left( \bigcup_{s \approx t} L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N} \right),$$

где  $\sigma$  означает, что мы берем  $\sigma$ -алгебру, порожденную множествами из  $\bigcup_{s \approx t} L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}$ . В основном  $\mathcal{B}_t$  содержит события, которые зависят только от того, что случится вплоть до момента  $t$ , включая также монаду  $t$ ; нулевые множества  $\mathcal{N}$  добавляются только из соображений технического удобства.

Напомним, что стандартный процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *измеримым*, если он измерим относительно пополненного произведения меры Лёба на  $\Omega$  и меры Лебега на  $[0, 1]$ . Мы говорим, что  $x$  *согласован* с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$ , если он измерим, и при каждом  $t \in [0, 1]$  случайная величина  $x(\cdot, t)$  является  $\mathcal{B}_t$ -измеримой. Ясно, что согласованность — это стандартный двойник нестандартного понятия неупреждаемости. В тех случаях, когда будет ясно, какая фильтрация  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$  имеется в виду, мы будем опускать ее явное указание, просто называя процесс  $x$  согласованным.

В силу предложения 4.1.3 естественно предположить, что стандартный стохастический интеграл  $\int x db$  будет определен для всех согласованных процессов  $x$ , которые квадратично интегрируемы по мере  $L(P) \times m$  (где  $m$  — мера Лебега). Мы сначала определим интеграл для того случая, когда  $x$  — согласованная ступенчатая функция, т. е. существует такое разбиение  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , что  $x(\omega, s) = x(\omega, t_i)$  для  $s \in [t_i, t_{i+1})$ , причем случайная величина  $x(\cdot, t_i)$  ограничена и  $\mathcal{B}_{t_i}$ -измерима для каждого  $t_i$ . Положим

$$\int_0^1 x(\omega, s) db(\omega, s) = \sum_{j=0}^{k-1} x(\omega, t_j) (b(\omega, t_{j+1}) - b(\omega, t_j)).$$

Наблюдение Ито состояло в том, что отображение  $x \mapsto \int_0^1 x db$ , рассматриваемое как отображение из  $L^2(L(P) \times m)$  в  $L^2(L(P))$ ,

сохраняет норму: это следует из выкладки

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^1 x(\omega, s) db(\omega, s)\right)^2\right) &= E\left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} x(t_j) \Delta b(t_j)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{k-1} x(t_j)^2 \Delta b(t_j)^2\right) + 2 \sum_{j < l} E(x(t_j) x(t_l) \Delta b(t_j) \Delta b(t_l)) = \\ &= E\left(\int_0^1 x(t)^2 dt\right), \end{aligned}$$

где  $\Delta b(t_j) = b(t_{j+1}) - b(t_j)$ . Поскольку согласованные ступенчатые функции плотны в множестве всех согласованных процессов из  $L^2(L(P) \times m)$ , мы можем продолжить отображение

$x \mapsto \int_0^1 x db$  до изометрии, которую мы будем обозначать также

$\int_0^1 x db$ . *Стохастическим интегралом* называется процесс

$$(9) \quad \left(\int x db\right)(\omega, t) = \int_0^1 I_{[0, t]} \cdot x db,$$

где  $I_{[0, t]}$  — индикаторная функция отрезка  $[0, t]$ . Заметим, что поскольку величина  $\int_0^1 g db$  определена как элемент  $L^2(L(P))$ , стохастический интеграл определен только с точностью до эквивалентности.

### В. Поднятия

Мы описали два стохастических интеграла — гиперконечную стильтесовскую сумму Андерсона (4) и классический интеграл Ито (9). Так же, как и в § 3.2, связующим звеном между стандартной и нестандартной теориями является понятие поднятия. Напомним, что  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ .

**4.1.4. Определение.** Пусть  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ; гиперконечный процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *поднятием* процесса  $x$  (по отношению к мере  $P \times \lambda$ ), если

$$(10) \quad {}^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t)$$

почти всюду по мере  $L(P \times \lambda)$ .

Обратите внимание на то, как в этом определении соединяются две части определения 3.2.3.

Будем называть процесс  $x$  *почти наверное согласованным*, если существует такой согласованный процесс  $y$ , что  $x(\omega, s) = y(\omega, s)$  для почти всех  $(\omega, s)$ . В следующей теореме Андерсон (Anderson [1]) доказал часть, связанную с необходимостью, а Кейслер (Keisler [2]) — с достаточностью.

**4.1.5. Теорема.** *Случайный процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  почти наверное согласован тогда и только тогда, когда он имеет неупреждающее поднятие.*

Этот результат является следствием теоремы 3.2.4 о поднятии случайных величин; все, что требуется проверить — это что классы почти наверное согласованных и неупреждающих процессов соответствуют друг другу так, как нужно. Доказательство несколько технично, а сам результат не столь уж удивителен; мы отложим доказательство до более систематического изучения поднятий в § 4.3. Из теоремы 4.1.5 легко следует, что если процесс  $x$  квадратично интегрируем по мере  $L(P) \times m$ , то его поднятие может быть выбрано квадратично  $S$ -интегрируемым по мере  $P \times \lambda$ .

Следующая теорема устанавливает соотношение между интегрированием по Ито и внутренним интегрированием по Стильтесу (Anderson [1]).

**4.1.6. Теорема.** *Пусть  $x$  — квадратично интегрируемый согласованный процесс, а  $X$  — его неупреждающее квадратично  $S$ -интегрируемое поднятие. Тогда для всех  $t \in T$*

$$(11) \quad \int_0^t x(\omega, s) db(\omega, s) = \int_0^t X(\omega, s) dB(\omega, s) \quad \text{для } L(P)\text{-п. в. } \omega.$$

Доказательство этой теоремы тоже очень простое: мы сначала установим (11) для согласованных ступенчатых  $x$ , а затем рассмотрим общий случай, переходя к пределу и используя определение интеграла Ито. Детали будут приведены в § 4.4.

В качестве следствия из теоремы 4.1.6 получаем, что если  $X_1$  и  $X_2$  — два квадратично  $S$ -интегрируемых поднятия  $x$ , то  $\int X_1 dB \approx \int X_2 dB$  почти наверное. Чтобы читатель чуть больше почувствовал аромат теории, мы докажем последний факт тотчас же. Пусть  $X = X_1 - X_2$ ; тогда  $\int X dB = \int X_1 dB - \int X_2 dB$ , по-

этому согласно (7)

$$E\left(\left(\int_0^t X dB\right)^2\right) = \int_{\Omega \times [0, t]} X^2 d(P \times \lambda) \leq \int (X_1 - X_2)^2 d(P \times \lambda) \approx 0.$$

Следовательно,  $\int_0^t X_1 dB = \int_0^t X_2 dB$  п. н.  $\square$

### С. Лемма Ито

Этот результат является одним из важнейших в стохастическом анализе. Мы дадим его нестандартное доказательство, которое весьма просто превращает обычные эвристические рассуждения в строгие.

Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем использовать знаки  $\nabla$  и  $\Delta$  для градиента и лапласиана по пространственным переменным и  $\partial_t$  для производной по времени  $t \in [0, 1]$ . Если  $b$  —  $n$ -мерное броуновское движение (т. е.  $b(\omega, t)$  есть вектор  $(b_1(\omega, t), \dots, b_n(\omega, t))$ , где  $b_1, \dots, b_n$  — независимые одномерные броуновские движения), то лемма Ито в дифференциальной форме утверждает, что

$$(12) \quad d\varphi(b(t), t) = \nabla\varphi(b(t), t) db + \left(\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi\right)(b(t), t) dt;$$

это надо понимать как удобное сокращение для равенства

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi(b(t), t) - \varphi(b(0), 0) = \\ = \int_0^t \nabla\varphi(b(s), s) db(s) + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi\right)(b(s), s) ds. \end{aligned}$$

Лемма Ито играет фундаментальную роль в стохастическом анализе. Она особенно полезна для вычислений с функциями  $\varphi$ , удовлетворяющими уравнению  $\partial_t\varphi = -\frac{1}{2}\Delta\varphi$ ; см., например, Simon [2], где с помощью этой техники дается доказательство формулы Фейнмана — Каца.

Формула (13) может быть обобщена; мы отсылаем читателя к работам Anderson [1], Lindström [1], а также к § 4.4 для более полного нестандартного рассмотрения. Для простоты рассмотрим одномерный случай. Предположим, что  $\varphi: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет две непрерывные производные: достаточно показать, что

$$(14) \quad \begin{aligned} \varphi(B_t, t) - \varphi(B_0, 0) \approx \\ \approx \int_0^t \nabla\varphi(B_s, s) dB + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta\varphi(B_s, s) ds + \int_0^t \partial_t\varphi(B_s, s) ds, \end{aligned}$$

поскольку процесс  $\nabla\varphi(B_s, s)$  является поднятием процесса  $\nabla\varphi(b_s, s)$ . Левая часть равенства (14) может быть переписана в виде гиперконечной суммы:

$$\begin{aligned}\varphi(B_t, t) - \varphi(B_0, 0) &= \sum_0^t [\varphi(B_{s+\Delta t}, s + \Delta t) - \varphi(B_s, s)] = \\ &= \sum_{s=0}^t \nabla\varphi(B_s, s) \Delta B(s) + \sum_{s=0}^t [\varphi(B_{s+\Delta t}, s) - \varphi(B_s, s) - \\ &- \nabla\varphi(B_s, s) \Delta B(s)] + \sum_{s=0}^t [\varphi(B_{s+\Delta t}, s + \Delta t) - \varphi(B_{s+\Delta t}, s)].\end{aligned}$$

Мы записали сумму в таком виде, чтобы можно было воспользоваться формулой Тейлора. По определению, первая из трех сумм представляет собой корректно определенный гиперконечный стохастический интеграл. Займемся второй суммой: заметим, что

$$\left| \varphi(x) - \varphi(y) - \nabla\varphi(y)(x - y) - \frac{1}{2} \Delta\varphi(y)(x - y)^2 \right| \leq \varepsilon(x, y) |x - y|^2,$$

где  $\varepsilon(x, y) \approx 0$  при  $x \approx y$ . Поэтому вторая сумма с точностью до бесконечно малого слагаемого может быть заменена на

$$\frac{1}{2} \sum \Delta\varphi(B_s, s) \Delta B(s)^2.$$

Но — именно на этом этапе обычное эвристическое рассуждение становится точным — имеет место равенство  $\Delta B(s)^2 = \Delta t$ . Следовательно, вторая сумма может быть заменена на интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^t \Delta\varphi(B(s), s) ds.$$

Для оценки третьей суммы воспользуемся неравенством

$$|\varphi(x, t) - \varphi(x, s) - \partial_t \varphi(x, s)(t - s)| \leq C(t - s)^2,$$

из которого следует, что с точностью до бесконечно малого слагаемого эта сумма может быть заменена на

$$\int_0^t \partial_t \varphi(B(s + \Delta t), s) ds \approx \int_0^t \partial_t \varphi(B(s), s) ds,$$

чем доказательство формулы (14) и завершается: никакой дальнейший предельный переход не требуется.  $\square$

Мы намеренно сделали наше доказательство параллельным стандартному рассуждению из книги Simon [2], чтобы читателю было легче сравнить два подхода. Два аспекта нестан-

дартного доказательства заслуживают специального упоминания: первый — это преимущества потраекторного определения стохастического интеграла; второй — точное равенство  $\Delta B(t)^2 = \Delta t$ , где  $\Delta t$  бесконечно мало.

До сих пор нашей целью было введение в наиболее важные идеи гиперконечного стохастического анализа с минимумом технических деталей. В дальнейших параграфах мы более внимательно исследуем темы, которых в этом неформальном обзоре лишь коснулись. Наш план таков. В следующем параграфе будет развита теория гиперконечных стохастических интегралов вида  $\int X dM$ , где  $X$  — неупреждающий процесс, а  $M$  — квадратично интегрируемый мартингал; мы докажем свойства регулярности траекторий таких интегралов и вкратце ознакомимся с важным критерием  $S$ -непрерывности. В § 4.3 мы обратимся к теоремам поднятия и установим не только более общий вариант теоремы 4.1.5, но также и другие результаты о поднятии, которые будут важны для дальнейших приложений. Затем мы изучим взаимоотношение между стандартным и нестандартным стохастическим интегрированием: § 4.4 содержит более общий вариант теоремы 4.1.6 и обсуждение других аспектов проблемы. Темы §§ 4.5 и 4.6 — применения к стохастическим дифференциальным уравнениям и стохастической теории управления; здесь наиболее полно эксплуатируются идеи, которые мы уже использовали при доказательстве леммы Ито. Последние два параграфа этой главы развивают теорию в двух различных направлениях: в § 4.7 мы рассматриваем стохастическое интегрирование в бесконечномерных пространствах с применением к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных, а в § 4.8 — обобщение броуновского движения на многомерное время.

## 4.2. Общая теория стохастического интегрирования

Пришло время приступить к систематическому развитию идей, перечисленных в предыдущем параграфе. Хотя гиперконечный интеграл  $\int X dY$  определен для всех  $\mathbb{R}$ -значных внутренних процессов  $X$  и  $Y$ , мы видели, что для получения приемлемой теории необходимы определенные ограничения на  $X$  и  $Y$ . Условия неупреждаемости подынтегрального процесса  $X$  уже обсуждались, но что касается процесса  $Y$ , по которому ведется интегрирование, про него мы просто предположили, что это гиперконечное случайное блуждание. В этом параграфе будет позволено интегрирование по более широкому классу процессов; в основном мы будем работать с классом процессов, называемых мартингалами.

В дополнение к тому, что  $X$  — неупреждающий процесс, а  $Y$  — мартингал, необходимо наложить на оба процесса некоторые условия интегрируемости. Здесь нам дана некоторая свобода. Исходно стандартному стохастическому интегрированию присущ сильный  $L^2$ -аромат — оба процесса  $X$  и  $Y$  предполагаются локально квадратично интегрируемыми (см., напр., Kunita, Watanabe [1]). Однако, используя более хитроумную технику и более сильные неравенства, можно распространить теорию на случай  $L^1$ , так что  $X$  и  $Y$  могут быть взяты локально интегрируемыми (см. работы Meyer [1] и Metivier, Pellaumail [1]). В нестандартном варианте  $L^2$ - и  $L^1$ -теории были развиты независимо и почти одновременно в работах Lindström [1] — [3] и Hoover, Perkins [1]. В этой книге мы решили ограничиться менее общим  $L^2$ -подходом, поскольку нам кажется, что дополнительные технические трудности, возникающие в случае  $L^1$ , затемняют очень простые идеи, лежащие в основе всей теории; кроме того, для наших применений дополнительная общность не требуется.

### А. Внутренние мартингалы

Как и в предыдущем параграфе, мы будем изучать гиперконечные случайные процессы  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , где  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство; но теперь будут допускаться множества  $T$  более общего вида. *Гиперконечной осью времени* будет называться гиперконечное множество

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_\xi\},$$

где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\xi = 1$  и  $t_{i+1} - t_i \approx 0$  для всех  $i$ . Разность  $X(\omega, t_{i+1}) - X(\omega, t_i)$  обозначается через  $\Delta X(\omega, t_i)$ ; мы используем то же соглашение о суммах, что и в формуле (4.1.3) — а именно, если  $s = t_i$ ,  $t = t_j$ , то

$$(1) \quad \sum_{r=s}^t X(\omega, r) = X(\omega, t_i) + X(\omega, t_{i+1}) + \dots + X(\omega, t_{j-1});$$

таким образом, слагаемое  $X(\omega, t)$  не включается в сумму. Если даны два внутренних процесса  $X, Y: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , стохастический интеграл для них определяется как и прежде:

$$(2) \quad \int_0^t X dY = \sum_{s=0}^t X(s) \Delta Y(s).$$

Чтобы дать определение мартингалов и неупреждающих процессов, нужно ввести сначала понятие фильтрации.

**4.2.1. Определение.** Пусть  $T$  — гиперконечная ось времени и  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство. *Внутренней фильтрацией на  $\Omega$* , параметризованной множеством  $T$ , называется набор  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ , где  $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$  — возрастающая внутренняя последовательность внутренних алгебр в  $\Omega$ .

Поскольку мы всегда предполагаем, что  $\mathcal{A}$  состоит из всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$ , алгебры  $\mathcal{A}_t$  автоматически оказываются подалгебрами алгебры  $\mathcal{A}$ . Естественный пример внутренней фильтрации был приведен в § 4.1; из него становится ясно, почему алгебра  $\mathcal{A}_t$  рассматривается какместилище информации о стохастической системе к моменту  $t$ .

**4.2.2. Определение.** Внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *неупреждающим* относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ , если отображение  $\omega \mapsto X(\omega, t)$  является  $\mathcal{A}_t$ -измеримым при всех  $t \in T$ .

Есть и другой путь описания неупреждающих процессов; он более нагляден и более близок к определению, данному в предыдущем параграфе для специального случая. Для каждого  $t \in T$  введем отношение эквивалентности  $\sim_t$  на  $\Omega$ :

$$(3) \quad \omega \sim_t \omega' \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}_t \quad (\omega \in A \leftrightarrow \omega' \in A).$$

Легко видеть, что процесс  $X$  является неупреждающим тогда и только тогда, когда из  $\Delta \sim_t \omega'$  следует  $X(\omega, t) = X(\omega', t)$ .

**4.2.3. Определение.** Внутренний процесс  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *мартингалом* относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ , если он неупреждающий и для всех  $s, t \in T, s < t$  и всех  $A < \mathcal{A}_s$

$$(4) \quad E(I_A(M_t - M_s)) = 0.$$

Если заменить равенство (4) неравенством  $E(I_A(M_t - M_s)) \geq 0$ , процесс  $M$  будет называться *субмартингалом*, а если заменить (4) противоположным неравенством  $E(I_A(M_t - M_s)) \leq 0$ , процесс будет называться *супермартингалом*. Терминологические вопросы здесь, будучи довольно запутанными, активно обсуждались; за окончательным решением мы отсылаем читателя к книге Doob [2] (стр. 808).

Самый простой способ разобраться, что же реально утверждает определение 4.2.3 — это использовать отношение эквивалентности (3). Если  $[\omega]_t$  — класс эквивалентности элементов  $\omega$ , то неупреждающий процесс  $M$  будет мартингалом тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad \sum_{\tilde{\omega} \in [\omega]_t} \Delta M(\tilde{\omega}, t) P\{\tilde{\omega}\} = 0$$



для всех  $\omega$  и  $t$ . С помощью этой характеристики тривиально устанавливается, что если  $X$  — неупреждающий процесс, а  $M$  — мартингал, то  $\int X dM$  — тоже мартингал.

Траектории мартингала обычно очень сильно осциллируют; вспомните хотя бы о наиболее изученном из всех мартингалов — броуновском движении: его траектории не только имеют неограниченную вариацию, но даже нигде не дифференцируемы. Чтобы укротить такое нерегулярное поведение, вводится отвечающий мартингалу возрастающий процесс, называемой его квадратической вариацией.

**4.2.4. Определение.** *Квадратической вариацией* процесса  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется процесс  $[X]: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , определяемый формулой

$$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^t \Delta X(\omega, s)^2.$$

Яркий пример того, насколько проще устроена квадратическая вариация, чем сам процесс, дает андерсоновское случайное блуждание:

$$(6) \quad [B](t) = \sum_{s=0}^t \Delta B(s)^2 = \sum_{s=0}^t \Delta t = t.$$

В теории мартингалов простота квадратической вариации систематически используется для того, чтобы переформулировать задачи о мартингалах в гораздо более простые задачи об их квадратических вариациях. Несколько примеров этой стратегии мы встретим в дальнейших параграфах. В некоторых из них важным средством является следующее простое тождество.

**4.2.5. Лемма.** *Для любого гиперконечного процесса  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$*

$$[X](t) = X(t)^2 - X(0)^2 - 2 \int_0^t X dX.$$

*Доказательство.* Элементарная выкладка дает

$$\begin{aligned} \Delta[X](t) &= (X(t_{i+1}) - X(t_i))^2 = X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2X(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) = \\ &= X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} X dX. \end{aligned}$$

Суммируя по всем  $t_i < t$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

Применив только что доказанную формулу к мартингалу  $M$ , мы получим

$$(7) \quad E(M_t^2) = E(M_0^2 + [M](t)),$$

так как процесс  $\int M dM$  является мартингалом с начальным значением 0 и потому имеет нулевое математическое ожидание. Формула (7), связывая математические ожидания процессов  $M^2$  и  $[M]$ , в существенной мере объясняет, почему теория квадратично интегрируемых мартингалов в особенности хороша.

**4.2.6. Определение.** Гиперконечный мартингал  $M$  называется  $\lambda^2$ -мартингалом, если  $E(M_t^2) < \infty$  для всех  $t \in T$ .

Заметим, что поскольку  $[M](t)$  — возрастающий процесс, из формулы (7) следует, что  $E(M_t^2)$  тоже возрастает. Поэтому, чтобы показать, что мартингал  $M$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, достаточно проверить, что число  $E(M_1^2)$  конечно.

Определение 4.2.6 накладывает условие на величину процесса  $M$ . Часто мы можем превратить мартингал в  $\lambda^2$ -мартингал, остановив его, прежде чем он станет слишком большим. *Внутренний марковский момент остановки* (или просто *марковский момент*), согласованный с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$  — это такое внутреннее отображение  $\tau: \Omega \rightarrow T$ , что  $\{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$  для всех  $t \in T$ . В терминах отношения эквивалентности  $\sim_t$ , введенного в формуле (3), это означает, что если  $\tau(\omega) = t$ , то  $\tau(\omega') = t$  для всех  $\omega' \sim_t \omega$ . Важное наблюдение состоит в том, что если  $\tau$  — марковский момент, а  $M$  — мартингал, то *остановленный процесс*  $M_\tau$ , определяемый формулой

$$M_\tau(\omega, t) = M(\omega, t \wedge \tau(\omega)),^1$$

тоже является мартингалом.

**4.2.7. Определение.** Внутренний мартингал  $M$  называется *локальным  $\lambda^2$ -мартингалом*, если существует такая возрастающая последовательность  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  внутренних марковских моментов, что все процессы  $M_{\tau_n}$  являются  $\lambda^2$ -мартингалами, причем для почти всех  $\omega$  справедливо  $\tau_n(\omega) = 1$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ . Последовательность  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется *локализирующей последовательностью* для  $M$ .

Локальные  $\lambda^2$ -мартингалы образуют тот класс процессов, по которым мы будем интегрировать в стохастических интегралах. Разница между  $\lambda^2$ - и локальной  $\lambda^2$ -теориями не особенно важна, поскольку большинство результатов второй теории непосредственно следуют из соответствующих результатов первой; однако

<sup>1)</sup> Здесь и далее используется обозначение  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ,  $a \vee b = \max\{a, b\}$ . = Прим. перев.

дополнительная свобода, даваемая локализацией, удобна в приложениях.

Прежде чем перейти к стохастическому интегрированию, мы хотели бы показать, что локальные  $\lambda^2$ -мартингалы имеют хорошую стандартную часть. Одно понятно: если фиксировать  $t \in T$ , то случайная величина  $M_t$  с вероятностью 1 конечна. Проблема, однако, состоит в том, что исключительное множество может быть разным для разных  $t$ , так что вполне мыслима ситуация, при которой нет таких  $\omega$ , для которых  $M(\omega, t)$  конечно при всех  $t$ . Надо было бы доказать, что величина  $\max_{t \in T} M(\omega, t)$  конечна

для почти всех  $\omega$ . Для установления таких «равномерных» результатов служит чрезвычайно полезное неравенство, принадлежащее Дубу (Doob [1]).

**4.2.8. Неравенство Дуба.** Если  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — неотрицательный субмартингал, то для всех  $p > 1$  и  $t \in T$

$$\left\| \sup_{s \leq t} X_s \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_t\|_p,$$

где через  $\|\cdot\|_p$  обозначена  $L^p$ -норма.

Отложим доказательство этого неравенства до тех пор, пока не завершён анализ траекторий процесса  $M$ .

Чтобы применить неравенство Дуба к нашей задаче, заметим, что процесс  $|M|$  является неотрицательным субмартингалом. Полагая  $p = 2$ , получаем

$$(8) \quad E\left(\sup_{s \leq t} M_s^2\right) \leq 4E(M_t^2).$$

Если  $M$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, то математическое ожидание в правой части формулы (8) конечно, и, следовательно, существует множество меры 1, на котором  $M_s$  конечно для всех  $s$ . Используя локализующую последовательность, получаем конечность с вероятностью 1 и для локальных мартингалов.

Но тот факт, что  $M$  конечно, ещё не гарантирует наличия у процесса  $M$  хорошей стандартной части: его траектории могут бесконечно часто прыгать между различными конечными значениями. Хотелось бы, чтобы траектории процесса  $M$  имели односторонние пределы в следующем смысле:

**4.2.9. Определение.** Пусть  $f: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция. Будем говорить, что число  $r \in \mathbb{R}$  является  $S$ -пределом справа функции  $f$  в точке  $t \in [0, 1]$ , если для любого стандартного  $\varepsilon > 0$  найдётся такое стандартное  $\delta > 0$ , что если  $s \in T$  и  $t < {}^\circ s < t + \delta$ , то  $|f(s) - r| < \varepsilon$ . В этом случае мы пишем

$r = S\text{-}\lim_{s \downarrow t} f(s)$ . Аналогично определяется  $S$ -предел слева; он обозначается  $S\text{-}\lim_{s \uparrow t} f(s)$ .

Заметим, что между  $t$  и  $t + \delta$  должна лежать именно стандартная часть числа  $s$ , а не само  $s$ ; следовательно, мы не интересуемся поведением функции  $f$  в верхней половине монады числа  $t$ .

Чтобы показать, что траектории локальных  $\lambda^2$ -мартингалов почти наверное имеют  $S$ -пределы справа и слева, нужно узнать чуть больше о марковских моментах. Алгебры  $\mathcal{A}_t$  в нашей фильтрации состоят из событий, происходящих до фиксированного момента времени  $t$ ; обобщая это понятие, введем алгебры  $\mathcal{A}_\tau$ , состоящие из событий, которые происходят до случайного марковского момента  $\tau$ . Прежде всего, расширим введенный в формуле (3) класс отношений эквивалентности  $\sim_t$ , положив

$$(9) \quad \omega \sim_\tau \omega' \Leftrightarrow \omega \sim_{\tau(\omega)} \omega',$$

где  $\tau$  — марковский момент. Заметим, что если  $\omega \sim_{\tau(\omega)} \omega'$ , то  $\tau(\omega') = \tau(\omega)$ , и следовательно  $\sim_\tau$  в самом деле является отношением эквивалентности. Будем обозначать через  $\mathcal{A}_\tau$  внутреннюю алгебру, порожденную классами эквивалентности отношения  $\sim_\tau$ .

Пусть теперь задана возрастающая последовательность  $\{\tau_n\}_{n \leq \gamma}$  внутренних марковских моментов, и пусть  $M_n$  обозначает случайную величину  $M_n(\omega) = M(\omega, \tau_n(\omega))$ . Тривиально проверяется, что процесс  $(\omega, n) \mapsto M_n(\omega)$  является мартингалом относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_{\tau_n}\}, P)$ ; поэтому так же, как и в формуле (7), получаем

$$(10) \quad E(M_\gamma^2) = E\left(M_0^2 + \sum_{n=0}^{\gamma-1} (M_{n+1} - M_n)^2\right),$$

где  $\tau_0 \equiv 0$ .

**4.2.10. Предложение.** Если  $M$  — локальный  $\lambda^2$ -мартингал, то почти все его траектории имеют  $S$ -пределы слева и справа при каждом  $t \in [0, 1]$ .

*Доказательство.* Без потери общности можно предположить, что  $M$  является  $\lambda^2$ -мартингалом. Поскольку мы уже знаем, что траектории процесса  $M$  почти наверное конечны, наше утверждение может оказаться неверным лишь в случае, если процесс  $M$  слишком сильно колеблется, т. е. если множество

$$\bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \{\omega \mid \text{траектория } M(\omega, \cdot) \text{ пересекает отрезок } [a, b] \text{ бесконечно много раз}\}$$

имеет положительную вероятность. Поскольку множество пар рациональных чисел счетно, должна найтись такая конкретная пара  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a < b$ , что именно для нее процесс  $M$  с положительной вероятностью пересекает отрезок  $[a, b]$  бесконечно много раз. Определим последовательность  $\{\tau_n\}$  марковских моментов следующим образом. Пусть  $\tau_0 = 0$ ; для нечетных  $k$  положим

$$\tau_k(\omega) = \inf \{t \in T, t > \tau_{k-1}(\omega) \mid M(\omega, t) \leq a\} \wedge 1.$$

Аналогично, для четных  $k$ ,  $k \neq 0$  положим

$$\tau_k(\omega) = \inf \{t \in T, t > \tau_{k-1}(\omega) \mid M(\omega, t) \geq b\} \wedge 1.$$

Поскольку последовательность  $\{\tau_n\}$  строго возрастает до тех пор, пока ее элементы не станут равными единице, мы видим, что если  $\gamma$  есть число элементов в множестве  $T$ , то  $\tau_\gamma \equiv 1$ . Согласно формуле (10) получаем

$$E(M(1)^2) = E(M_{\tau_\gamma}^2) = E\left(M_0^2 + \sum_{n=0}^{\gamma-1} (M_{\tau_{n+1}} - M_{\tau_n})^2\right).$$

Левая часть этого равенства конечна по предположению, в то время как сумма справа должна быть бесконечной на множестве положительной меры. Полученное противоречие доказывает наше предположение.  $\square$

Гиперконечные процессы, имеющие односторонние  $S$ -пределы, могут быть превращены в стандартные процессы следующим образом.

**4.2.11. Определение.** Пусть  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — гиперконечный процесс, имеющий почти наверное  $S$ -пределы справа и слева. Стандартный процесс  ${}^\circ X^+: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , определенный формулой

$${}^\circ X^+(\omega, t) = S\text{-}\lim_{s \downarrow t} X(\omega, s),$$

называется *правой стандартной частью* процесса  $X$ . Аналогично, процесс

$${}^\circ X^-(\omega, t) = S\text{-}\lim_{s \uparrow t} X(\omega, s)$$

называется *левой стандартной частью* процесса  $X$ .

Из этих двух процессов — стандартных частей процесс  ${}^\circ X^+$  гораздо более важен, и мы часто будем называть его просто стандартной частью процесса  $X$ . В самом деле, как отмечено в работах Hoover, Perkins [1] и Stroyan, Bayod [1], процесс  ${}^\circ X^+$  можно рассматривать как стандартную часть процесса  $X$  в топологии Скорохода в пространстве  $D$  функций, непрерыв-

ных справа и имеющих пределы слева (о топологии Скорохода см., напр., Billingsley [1]). По этой причине многие авторы обозначают  ${}^\circ X^+$  просто  ${}^\circ X$ ; однако при наших обозначениях тогда оказалось бы невозможно отличить друг от друга  ${}^\circ X(t)$  (стандартную часть величины  $X$  в внутренний момент времени  $t$ ) и  ${}^\circ X^+(t)$  (значение процесса  ${}^\circ X^+$  в стандартный момент времени  $t$ ).

Показав, что траектории локальных  $\lambda^2$ -мартингалов имеют разумные свойства, мы готовы обсуждать стохастическое интегрирование. Однако, все еще остается не доказанным неравенство Дуба; пожалуй, сейчас удобный момент сделать это. Сначала — лемма:

**4.2.12. Лемма.** Пусть  $U$  и  $V$  — два внутренних неотрицательных отображения из  $\Omega$  в  ${}^*\mathbb{R}$ . Предположим, что  $p, \alpha \in {}^*\mathbb{R}$  таковы, что  $p > \alpha$ ,  $p > 1$ ,  $\alpha > 0$ , и для всех неотрицательных  $\xi \in {}^*\mathbb{R}$

$$(11) \quad \xi^\alpha P\{U \geq \xi\} \leq \int_{\{U \geq \xi\}} V^\alpha dP.$$

Тогда

$$(12) \quad E(U^p) \leq \left(\frac{p}{p-\alpha}\right)^{p/\alpha} E(V^p).$$

*Доказательство.* Пусть  $\mu$  — распределение значений функции  $U$  на  ${}^*\mathbb{R}$  (т. е.  $\mu(A) = P\{U \in A\}$ ). Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} E(U^p) &= \int_0^\infty y^p d\mu(y) = \int_0^\infty \left( \int_0^y p\xi^{p-1} d\xi \right) d\mu(y) = \\ &= \int_0^\infty \left( \int_\xi^\infty p\xi^{p-1} d\mu(y) \right) d\xi = \int_0^\infty p\xi^{p-1} \mu\{y \geq \xi\} d\xi = \\ &= \int_0^\infty p\xi^{p-1} P\{U \geq \xi\} d\xi \leq \int_0^\infty p\xi^{p-1-\alpha} \left( \int_{\{U \geq \xi\}} V^\alpha dP \right) d\xi; \end{aligned}$$

здесь на последнем шаге использовалось неравенство (11). Продолжая наши вычисления, получаем

$$\begin{aligned} E(U^p) &\leq \int_0^\infty p\xi^{p-1-\alpha} \left( \int_{\{U \geq \xi\}} V^\alpha dP \right) d\xi = \int \left( \int_0^U p\xi^{p-1-\alpha} d\xi \right) V^\alpha dP = \\ &= \int \frac{p}{p-\alpha} U^{p-\alpha} V^\alpha dP \leq \frac{p}{p-\alpha} E(U^p)^{1-\alpha/p} E(V^p)^{\alpha/p} \end{aligned}$$

— последнее получено из неравенства Гельдера. Поделив обе части неравенства на  $E(U^p)^{1-\alpha/p}$  и возведя их после этого в степень  $p/\alpha$ , получим утверждение леммы.  $\square$

Чтобы доказать неравенство Дуба, применим лемму к  $U = \sup_{s \leq t} X_s$ ,  $V = X_t$ ,  $\alpha = 1$ . Единственное что требуется — это проверить справедливость формулы (11).

Пусть  $\xi \geq 0$ ; определим марковский момент  $\tau$  формулой

$$\tau(\omega) = \inf \{s \in T \mid X(\omega, s) \geq \xi\},$$

а если множество таких  $s \in T$  пусто, будем считать, что  $\tau(\omega)$  не определено. Тогда множество  $\{\sup_{s \leq t} X_s \geq \xi\}$  совпадает с множеством

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \text{ определено, и } \tau(\omega) \leq t\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \xi \cdot P \{\sup_{s \leq t} X_s \geq \xi\} &= \xi \cdot P(A) \leq \int_A X_\tau dP = \\ &= \int (X_{\tau \wedge t} - X_t) dP + \int_A X_t dP \leq \int_A X_t dP; \end{aligned}$$

здесь на последнем шаге используется тот факт, что  $X$  — субмартингал. Значит,

$$\xi \cdot P \{\sup_{s \leq t} X_s \geq \xi\} \leq \int_{\{\sup_{s \leq t} X_s \geq \xi\}} X_t dP,$$

откуда и следует неравенство Дуба.  $\square$

Наши формулировки и доказательства, разумеется, представляют собой нестандартную версию результата Дуба. Но мы без всяких колебаний будем использовать и исходную, стандартную версию, если это покажется нам удобным.

### В. Интегрирование по мартингалам

В первом параграфе этой главы было показано, что если  $B$  — андерсоновское случайное блуждание и  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ , то интеграл  $\int X dB$  хорошо себя ведет в случае, если процесс  $X$  является неупреждающим и квадратично  $S$ -интегрируемым по мере  $P \times \lambda$ . Сейчас, когда мы переходим к интегрированию по  $\lambda^2$ -мартингалам, условие интегрируемости процесса  $X$  будет предполагать не меру  $P \times \lambda$ , а меру, построенную на основе того мартингала, по которому проводится интегрирование. Для  $\lambda^2$ -мартингала  $M$  обозначим через  $\nu_M$  внутреннюю меру на  $\Omega \times T$ , определяемую по формуле

$$\nu_M\{(\omega, t)\} = \Delta M(\omega, t)^2 P\{\omega\}.$$

Заметим, что величина  $\nu_M(\Omega \times T) = E([M](1))$  конечна, и для андерсоновского процесса  $B$  имеем  $\nu_B = P \times \lambda$ .

Определяются два естественных класса интегрируемых процессов.

**4.2.13. Определение.** Пусть  $M$  —  $\lambda^2$ -мартингал. Гиперконечный процесс  $X$  принадлежит классу  $SL^2(M)$ , если он является неупреждающим и квадратично  $S$ -интегрируемым относительно меры  $\nu_M$ .

Пусть  $M$  — локальный  $\lambda^2$ -мартингал; тогда процесс  $X$  принадлежит классу  $SL(M)$ , если он неупреждающий и принадлежит  $SL^2(M_{\tau_n})$  для всех  $\tau_n$  из локализирующей последовательности для  $M$ . Из доказательства следующего предложения должно стать ясным, почему  $\nu_M$  — как раз подходящая мера для приведенного определения.

**4.2.14. Предложение.** Если  $M$  —  $\lambda^2$ -мартингал и  $X \in SL^2(M)$ , то  $\int X dM$  — тоже  $\lambda^2$ -мартингал. Если  $M$  — локальный  $\lambda^2$ -мартингал и  $X \in SL(M)$ , то  $\int X dM$  — тоже локальный  $\lambda^2$ -мартингал.

*Доказательство.* Вторая часть предложения — непосредственное следствие первой. Итак, пусть  $M$  —  $\lambda^2$ -мартингал и  $X \in SL^2(M)$ . Применяя к мартингалу  $\int X dM$  формулу (7), получаем

$$E\left(\left(\int_0^1 X dM\right)^2\right) = E\left(\left[\int_0^1 X dM\right]\right) = E\left(\sum_0^1 X^2 \Delta M^2\right) = \int X^2 d\nu_M;$$

последняя величина конечна по предположению.  $\square$

Мы уже знаем, что локальные  $\lambda^2$ -мартингалы околостандартны; поэтому смысл последнего предложения состоит в том, что мы получили разумную теорию интегрирования. Перейдем к более глубоким аспектам теории; сначала напомним, что функция  $f: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$   $S$ -непрерывна, если  $f(s) \approx f(t)$  при  $s \approx t$ , и каждое значение  $f(t)$  околостандартно. Процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется  $S$ -непрерывным, если почти все его траектории  $S$ -непрерывны. Наша цель — получить следующий результат:

**4.2.15. Теорема.** Если  $M$  —  $S$ -непрерывный локальный  $\lambda^2$ -мартингал и  $X \in SL(M)$ , то процесс  $\int X dM$  также  $S$ -непрерывен.

Чтобы это доказать, используем следующую характеристику  $S$ -непрерывных мартингалов:



**4.2.16. Теорема.** *Локальный  $\lambda^2$ -мартингал  $S$ -непрерывен тогда и только тогда, когда его квадратическая вариация  $S$ -непрерывна.*

Эта теорема — быть может наиболее важный пример взаимодействия между мартингалом и его квадратической вариацией. В качестве первой иллюстрации ее полезности применим ее к гиперконечному случайному блужданию  $B$ : поскольку функция  $[B](t) = t$ , очевидно,  $S$ -непрерывна, теорема утверждает, что процесс  $B$  тоже  $S$ -непрерывен! Второй иллюстрацией служит следующее доказательство теоремы 4.2.15:

*Доказательство теоремы 4.2.15.* Достаточно доказать теорему для случая, когда  $M$  является  $\lambda^2$ -мартингалом и  $X \in SL^2(M)$ . Предположим, сначала, что процесс  $X$  ограничен по абсолютной величине действительным числом  $n$ . Из  $S$ -непрерывности процесса  $M$  согласно теореме 4.2.16 следует  $S$ -непрерывность его квадратической вариации  $[M]$ . Тогда из выкладки

$$\begin{aligned} \left[ \int X dM \right](t) - \left[ \int X dM \right](s) &= \sum_s^t X^2 \Delta M^2 \leq n^2 \sum_s^t \Delta M^2 = \\ &= n^2 ([M](t) - [M](s)) \end{aligned}$$

следует  $S$ -непрерывность процесса  $\left[ \int X dM \right]$ . Применяя второй раз теорему 4.2.16, получаем  $S$ -непрерывность процесса  $\int X dM$ .

Такова идея доказательства; обобщение же полученного результата на общий случай  $X \in SL^2(M)$  есть просто упражнение по теории меры. В самом деле, в силу  $S$ -интегрируемости процесса  $X$  существует такая последовательность  $\{X_n\}$  ограниченных  $S$ -непрерывных процессов, что  $\int (X - X_n)^2 d\nu_M \rightarrow 0$ . Тогда, согласно неравенству Дуба,

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \left( \max_{s \leq 1} \left( \int_0^s X dM - \int_0^s X_n dM \right)^2 \right) \leq 4 \cdot E \left( \left( \int_0^1 (X - X_n) dM \right)^2 \right) = \\ &= 4 \int (X - X_n)^2 d\nu_M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из обычной теории меры мы знаем, что найдется такая подпоследовательность  $\{X_{n_k}\}$ , для которой  $\max_{s \leq 1} \left( \int_0^s X dM - \int_0^s X_{n_k} dM \right)$  сходится к нулю почти наверное. Поскольку каждый из процессов  $\int X_{n_k} dM$   $S$ -непрерывен, их равномерный предел  $\int X dM$

тоже обязан быть  $S$ -непрерывным, чем доказательство и заканчивается.  $\square$

Обратите внимание на важность в этом доказательстве условия  $S$ -интегрируемости процесса  $X^2$ ; одного лишь предположения конечности величины  $\int X^2 dv_M$  недостаточно, поскольку нам нужно аппроксимировать функцию  $X$   $S$ -ограниченными функциями  $X_n$ <sup>1)</sup>. В самом деле, почти тривиально строится пример, показывающий, что теорема 4.2.15 при более слабых условиях неверна. Это довольно типично для нашей теории и является основной причиной того, почему мы везде требуем квадратичной  $S$ -интегрируемости подынтегральных процессов, несмотря даже на то, что некоторые более простые результаты (такие, как предложение 4.2.14) требуют только конечности величины  $\int X^2 dv_M$ .

Поскольку почти все наши приложения будут связаны с непрерывными процессами, теоремы 4.2.15 и 4.2.16 являются для нас в высшей степени важными. Каждый раз, построив некоторый процесс, мы должны проверить его непрерывность, и теоремы 4.2.15 и 4.2.16 являются превосходным средством для выполнения этой задачи.

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена доказательству теоремы 4.2.16. Чтобы получить необходимые оценки, нам потребуются следующие неравенства.

**4.2.17. Лемма.** *Существуют такие константы  $C, K \in \mathbb{R}_+$ , что для любого гиперконечного мартингала  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , такого, что  $M(0) = 0$ , справедливы неравенства*

$$(14) \quad C \cdot E(\max_{s \leq t} M(s)^4) \leq E([M](t)^2) \leq K \cdot E(\max_{s \leq t} M(s)^4).$$

*Доказательство.* Используя неравенство Дуба и простые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} E(\max_{s \leq t} M(s)^4) &\leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 E(M(t)^4) = \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\sum_{s=0}^t \{(M(s) + \Delta M(s))^4 - M(s)^4\}\right) = \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\sum_{s=0}^t \{4M(s)^3 \Delta M(s) + 6M(s)^2 \Delta M(s)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4M(s) \Delta M(s)^3 + \Delta M(s)^4\}\right). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. предложение 3.2.10. — Прим. перев.

Отсюда, используя то, что  $E(M(s)^3 \Delta M(s)) = 0$  и

$|\Delta M(s)| \leq 2 \max_{r \leq t} |M(r)|$ , получаем

$$\begin{aligned} E(\max_{s \leq t} M(s)^4) &\leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 E(6 \max_{s \leq t} M(s)^2 \cdot [M](t) + 8 \max_{s \leq t} M(s)^2 \cdot [M](t) + \\ &+ 4 \max_{s \leq t} M(s)^2 \cdot [M](t)) = 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 E(\max_{s \leq t} M(s)^2 \cdot [M](t)) \leq \\ &\leq 18 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 E(\max_{s \leq t} M(s)^4)^{1/2} \cdot E([M](t)^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из неравенства Коши. Деля обе части полученного неравенства на  $E(\max_{s \leq t} M(s)^4)^{1/2}$  и возводя в квадрат, получаем первое неравенство леммы.

Чтобы доказать второе неравенство, используем лемму 4.2.5 и неравенство Коши:

$$\begin{aligned} (15) \quad E([M](t)^2) &= E\left(\left(M_t^2 - 2 \int_0^t M dM\right)^2\right) = \\ &= E\left(M_t^4 - 4M_t^2 \int_0^t M dM + 4\left(\int_0^t M dM\right)^2\right) \leq \\ &\leq E(\max_{s \leq t} M_s^4) + 4E(\max_{s \leq t} M_s^4)^{1/2} \cdot E\left(\left(\int_0^t M dM\right)^2\right)^{1/2} + 4E\left(\left(\int_0^t M dM\right)^2\right); \end{aligned}$$

здесь мы в двух слагаемых заменили  $M_t^4$  на большую величину  $\max_{s \leq t} M_s^4$ . Поскольку  $\int M dM$  — мартингал, имеем

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^t M dM\right)^2\right) &= E\left(\left[\int_0^t M dM\right](t)\right) = E\left(\sum_0^t M^2 \Delta M^2\right) \leq \\ &\leq E(\max_{s \leq t} M(s)^2 [M](t)) \leq E(\max_{s \leq t} M(s)^4)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя то, что получилось, в формулу (15), находим

$$\begin{aligned} (16) \quad E([M](t)^2) &\leq E(\max_{s \leq t} M_s^4) + 4E(\max_{s \leq t} M(s)^4)^{3/4} E([M](t)^2)^{1/4} + \\ &+ 4E(\max_{s \leq t} M(s)^4)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Согласно уже доказанной части леммы,  $E(\max_{s \leq t} M_s^4) \leq (1/C) \times \times E([M](t)^2)$ . Используя этот факт, преобразуем формулу (16)

к виду

$$\begin{aligned}
 (17) \quad E([M](t)^2) &\leq \frac{1}{C^{1/2}} E\left(\max_{s \leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} + \\
 &+ \frac{4}{C^{1/4}} E\left(\max_{s \leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} + 4E\left(\max_{s \leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} = \\
 &= \left(\frac{1}{C^{1/2}} + \frac{4}{C^{1/4}} + 4\right) E\left(\max_{s \leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Теперь, деля обе части неравенства на  $E([M](t)^2)^{1/2}$  и возводя в квадрат, получаем второе неравенство леммы.  $\square$

Неравенства (14) суть очень простые частные случаи знаменитых неравенств Буркхольдера — Дэвиса — Ганди (Burkholder — Davis — Gundy). Последние появлялись в литературе в разных формах. Довольно общий случай охватывается следующими двумя неравенствами:

$$(18) \quad \left\| \sqrt{M_0^2 + [M](t)} \right\|_p \leq 10p \left\| \max_{s \leq t} M_s \right\|_p,$$

$$(19) \quad \left\| \max_{s \leq t} M_s \right\|_p \leq p \sqrt{12} \left\| \sqrt{M_0^2 + [M](t)} \right\|_p$$

для всех  $p \in (1, \infty)$ . Но чтобы их доказать, нужна гораздо более изощренная техника, чем та, что использовалась нами в доказательстве леммы 4.2.17: см., например, Neveu [1].

Прежде чем использовать полученные неравенства в доказательстве теоремы 4.2.16, мы должны решить еще одну проблему. Допустим, мы хотим остановить мартингал прежде чем он станет слишком большим. Естественный подход к этому — использовать марковский момент

$$\tau_K = \min \{t \in T \mid |M(t)| \geq K\}$$

для некоторого  $K \in \mathbb{R}_+$ . Однако последнее приращение процесса перед моментом  $\tau_K$  может быть чересчур большим, и тогда остановка все равно произойдет слишком поздно. Будем говорить, что процесс  $M$  имеет *бесконечно малые приращения*, если  $\Delta M(\omega, t) \approx 0$  для всех  $\omega$  и  $t$ . В этом случае, очевидно,  $|M_{\tau_K}| \leq K$ . Следующая лемма утверждает, что если хотя бы один из процессов  $M$ ,  $[M]$  является  $S$ -непрерывным, то существует мартингал с бесконечно малыми приращениями, почти совпадающий с  $M$ .

**4.2.18. Лемма.** Пусть  $M$  — такой  $\lambda^2$ -мартингал, что множество

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in T (\Delta M(\omega, t) \neq 0)\}$$

имеет нулевую меру Лёба. Тогда существует такой  $\lambda^2$ -мартингал  $\bar{M}$  с бесконечно малыми приращениями, что на множестве с мерой Лёба, равной 1,

$$\bar{M}(t) \approx M(t) \text{ и } [M](t) \approx [M](t)$$

для всех  $t$ .

*Доказательство.* Для каждого  $n \in {}^*\mathbb{N}$  положим  $\Omega_n = \{\omega \mid \exists t (|\Delta M(t)| \geq 1/n)\}$ . Поскольку внутреннее множество  $A = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid P(\Omega_n) \leq 1/n\}$  содержит все  $\mathbb{N}$ , оно обязано содержать бесконечно большой элемент  $\eta$ . Для  $\omega \in \Omega_\eta$  положим  $t_\omega$  равным первому такому  $t$ , для которого  $|\Delta M(\omega, t)| \geq 1/\eta$ , а для  $\omega \notin \Omega_\eta$  положим  $t_\omega = 1$ .

Обозначим через  $[\omega]_t$  класс эквивалентности отношения  $\sim_t$ , введенного в (3). Определим

$$[\omega]_t^+ = \{\tilde{\omega} \in [\omega]_t \mid t_{\tilde{\omega}} \leq t\};$$

заметим, что если  $t_{\tilde{\omega}} < t$  для некоторого  $\tilde{\omega} \in [\omega]_t$ , то  $[\omega]_t^+ = [\omega]_t$ .

Сначала модифицируем процесс  $M$ , обрезав все приращения, большие чем  $1/\eta$ : пусть  $K$  — такой внутренний процесс, что  $K(0) = M(0)$ , и

$$\Delta K(\omega, t) = \begin{cases} \Delta M(\omega, t) & \text{для } t < t_\omega, \\ 0 & \text{для } t \geq t_\omega. \end{cases}$$

Процесс  $K$  обычно не является мартингалом, но если мы добавим к нему такой процесс  $N$ , что  $N(0) = 0$ , и

$$\Delta N(\omega, t) P([\omega]_t) = \int_{[\omega]_t^+} \Delta M(t) dP,$$

то получившийся процесс  $\bar{M} = K + N$  будет мартингалом.

Решающее наблюдение состоит в том, что сумма  $\sum_{t=0}^1 |\Delta N(\omega, t)|$  почти наверное бесконечно мала. Чтобы это доказать, введем множество  $\Gamma \subset \Omega \times \Omega \times T$ , состоящее из таких троек  $(\omega, \tilde{\omega}, t)$ , для которых  $t = t_{\tilde{\omega}} < 1$  и  $\omega \sim_t \tilde{\omega}$ ; сделаем выкладку

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{t=0}^1 |\Delta N(\omega, t)|\right) &= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t=0}^1 \left| \sum_{\tilde{\omega} \in [\omega]_t^+} \frac{\Delta M(\tilde{\omega}, t) P\{\tilde{\omega}\}}{P([\omega]_t)} \right| P\{\omega\} \leq \\ &\leq \sum_{(\omega, \tilde{\omega}, t) \in \Gamma} \frac{|\Delta M(\tilde{\omega}, t)| P\{\tilde{\omega}\}}{P([\omega]_t)} P\{\omega\} = \sum_{\tilde{\omega} \in \Omega_\eta} \sum_{\omega \in [\tilde{\omega}]_{t_{\tilde{\omega}}}} \frac{|\Delta M(\tilde{\omega}, t_{\tilde{\omega}})| P\{\tilde{\omega}\}}{P([\omega]_{t_{\tilde{\omega}}})} P\{\omega\} = \\ &= \int_{\Omega_\eta} |\Delta M(\tilde{\omega}, t_{\tilde{\omega}})| dP \leq 2 \int_{\Omega} \max_{s \leq 1} |M(s)| dP. \end{aligned}$$

Последняя величина бесконечно мала, поскольку  $P(\Omega_\eta) \approx 0$ , а величина  $\max_{s \leq 1} |M(s)|$   $S$ -интегрируема.

На множестве  $\Omega - \Omega_\eta$ , где  $\sum |\Delta N(s)| \approx 0$ , мы, очевидно, имеем  $\bar{M}(t) \approx M(t)$  для всех  $t$ . Более того, на  $\Omega - \Omega_\eta$  разность

$$[\bar{M}](t) - [M](t) = \sum_{s=0}^t (2M(s) + \Delta N(s)) \Delta N(s)$$

должна быть бесконечно мала для всех  $t$  и почти всех  $\omega$ . Поскольку процесс  $\bar{M}$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, он выглядит обещающим кандидатом на роль  $\bar{M}$ .

Есть, однако, одна маленькая трудность: процесс  $\bar{M}$  может иметь не бесконечно малые приращения, поскольку  $\Delta N$  может быть не бесконечно малым. Используем простое средство: пусть  $\gamma$  — бесконечно большой элемент множества

$$\left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \mid P \left\{ \omega \mid \sum_{s=0}^1 |\Delta N(\omega, s)| > \frac{1}{n} \right\} < \frac{1}{n} \right\}.$$

Определим  $\tau: \Omega \rightarrow T$  формулой

$$\tau(\omega) = \min \left\{ t \in T \mid |\Delta N(\omega, t)| > \frac{1}{\gamma} \right\} \wedge 1.$$

Поскольку  $\Delta N(\omega, t)$  зависит только от класса эквивалентности  $[\omega]_t$ ,  $\tau$  — марковский момент. Используя тот факт, что  $\tau = 1$  почти наверное, легко проверить, что процесс  $\bar{M} = \bar{M}_\tau$  удовлетворяет всем требованиям леммы.  $\square$

Сделав все эти приготовления, мы теперь легко можем доказать основную теорему.

**Доказательство теоремы 4.2.16.** Мы можем без потери общности ограничиться случаем  $\lambda^2$ -мартингала  $M$ . Согласно лемме 4.2.18 достаточно рассмотреть процесс  $M$  с бесконечно малыми приращениями; а используя марковский момент

$$\tau_n(\omega) = \min \{ t \in T \mid |M(\omega, t)| \geq n \text{ или } [M](\omega, t) \geq n \},$$

мы можем свести вопрос к случаю конечных процессов  $M$  и  $[M]$ .

(i) Предположим, что процесс  $[M]$  является  $S$ -непрерывным. Для каждой пары  $(m, n) \in {}^*\mathbb{N}$  определим подмножество  $A_{m, n} \subset \Omega$  следующим образом:

$$A_{m, n} = \{ \omega \in \Omega \mid \exists i \in {}^*\mathbb{N} [ \sup_{i/n \leq s \leq (i+1)/n} (M(s) - M(i/n))^4 \geq 1/m ] \}.$$

Здесь  $\bar{r}$  обозначает наименьший элемент множества  $T$ , больший или равный  $r$ . Чтобы доказать  $S$ -непрерывность процесса  $M$ , мы должны показать, что множество  $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}$  имеет меру Лёба 0, а для этого достаточно показать, что  $P(A_{m,\gamma}) \approx 0$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Но

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(A_{m,\gamma}) \leq \sum_{i < \gamma} P\left\{\omega \mid \sup_{i/\gamma \leq s \leq (i+1)/\gamma} (M(s) - M(i/\gamma))^4 \geq \frac{1}{m}\right\} \leq \\ &\leq m \sum_{i < \gamma} E\left(\sup_{i/\gamma \leq s \leq (i+1)/\gamma} (M(s) - M(i/\gamma))^4\right) \leq \\ &\leq \frac{m}{C} \sum_{i < \gamma} E([M]((i+1)/\gamma) - [M](i/\gamma))^2, \end{aligned}$$

где на последнем шаге лемма 4.2.17 применена к мартингалу  $M(s) - M(i/\gamma)$  на отрезке времени  $T \cap [i/\gamma, 1]$ . В силу  $S$ -непрерывности и конечности квадратической вариации  $[M]$  последнее математическое ожидание бесконечно мало<sup>1)</sup>, а, значит, и  $P(A_{m,\gamma}) \approx 0$ .

(ii) Теперь предположим, что процесс  $M$   $S$ -непрерывен, и определим

$$B_{m,n} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists i \in {}^*\mathbb{N} \left[ ([M]((i+1)/n) - [M](i/n))^2 \geq \frac{1}{m} \right] \right\}.$$

Как и раньше, достаточно показать, что  $P(B_{m,\gamma}) \approx 0$  для всех  $m \in \mathbb{N}$  и  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

Фиксируем  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ; пусть  $N$  обозначает ограничение мартингала  $M$  на ось времени  $S = \{(i/\gamma) \mid i \leq \gamma\}$ . Останавливая, если это необходимо, мартингал  $M$  прежде чем процесс  $[N]$  станет слишком большим, мы можем добиться того, чтобы  $[N]$  был  $S$ -ограниченным (при этом используется тот факт, что  $M$  имеет бесконечно малые приращения). Используя лемму 4.2.17

<sup>1)</sup> Напомним, что процесс  $[M]$  — неубывающий; поэтому обозначив  $\alpha_i = [M]((i+1)/\gamma) - [M](i/\gamma)$ , получаем  $\sum_{i < \gamma} \alpha_i^2 \leq \max_{i < \gamma} \alpha_i \cdot \sum_{i < \gamma} \alpha_i = \max_{i < \gamma} \alpha_i \times [M](1) \leq n \cdot \max_{i < \gamma} \alpha_i$ , где  $n$  — верхняя грань для  $[M]$ . Поскольку  $\max_{i < \gamma} \alpha_i \approx 0$  для каждого  $\omega$ , то и  $E(\max_{i < \gamma} \alpha_i) \approx 0$ . — Прим. перев.

и неравенство Дуба, получаем

$$\begin{aligned}
 0 \leq P(B_{m, \gamma}) &\leq \sum_{i < \gamma} P \left\{ \omega \mid ([M]((i+1)/\gamma) - [M](i/\gamma))^2 > \frac{1}{m} \right\} \leq \\
 &\leq m \sum_{i < \gamma} E([M]((i+1)/\gamma) - [M](i/\gamma))^2 \leq \\
 &\leq mK \sum_{i < \gamma} E \left( \max_{i/\gamma \leq s \leq (i+1)/\gamma} (M(s) - M(i/\gamma))^4 \right) \leq \\
 &\leq mK \left( \frac{4}{3} \right)^4 \sum_{i < \gamma} E((M((i+1)/\gamma) - M(i/\gamma))^4) \leq \\
 &\leq mK \left( \frac{4}{3} \right)^4 E \{ \max_{i < \gamma} ((M((i+1)/\gamma) - M(i/\gamma))^2) \cdot [N](1) \}.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение бесконечно мало в силу  $S$ -ограниченности процесса  $[N]$  и  $S$ -непрерывности процесса  $M$ . Теорема доказана.  $\square$

Представленная здесь теория развита независимо в работах Hoover, Perkins [1], и Lindström [1]. Наше изложение в основном следует второй из них. Подход Гувера — Перкинса основан на систематическом использовании неравенств Буркхольдера — Дэвиса — Ганди и ведет к чуть более сильным результатам, чем те, что получены нами. Как правило, они нуждаются лишь в локальной  $S$ -интегрируемости там, где мы требуем локальной квадратичной  $S$ -интегрируемости. Гувер и Перкинс дают также иную формулировку теоремы 4.2.16; в некоторых применениях она оказывается более удобной. У теоремы 4.2.15 о непрерывности стохастических интегралов имеется несколько предшественников (а также родственных результатов) в литературе. Так, в работе Anderson [1] эта теорема доказана для случая, когда  $M$  — гиперконечное случайное блуждание, а  $X$  — поднятие; в работе Keisler [4] снято условие на процесс  $X$ , что он является поднятием, и к тому же оценивается модуль непрерывности стохастического интеграла. Фактически в работах Андерсона и Кейслера дана полная теория стохастического интегрирования по андерсоновскому случайному блужданию, так что начало этого параграфа в большей части является непосредственным обобщением их работ на мартингальный случай (см. также диссертацию Panetta [1], содержащую первые результаты об интегрировании по  $S$ -непрерывным мартингалам). Конечно, наше обобщение было бы гораздо менее «непосредственным», если бы стандартная теория стохастического интегрирования не указывала бы нам, что искать, и не снабжала бы нас необходимыми неравенствами. Есть несколько хороших



вводных курсов в стандартную теорию стохастического интегрирования — например, классический «курс стохастических интегралов» Мейера (Meyer [1]), книги Metivier, Pellaumail [1], Chung, Williams [1] и Ikeda, Watanabe [1]. Что касается нестандартной теории, то книга Stroyan, Bayod [1] дает обзор подхода Гувера — Перкинса, а также сообщает много новых результатов в этой области, в то время как записи лекций Оссвальда (Osswald [4]) представляют собой тщательное и детальное изложение того подхода, которого придерживаемся мы в этой книге.

Теория мартингалов не исчерпывается стохастическим интегрированием; нестандартный вклад в другие аспекты этой теории можно найти в работах Helms, Loeb [3], Hoover [3], Hoover, Keisler [1], Perkins [6] (развитие результатов работы Barlow [1]).

### 4.3. Теоремы о поднятии

Теоремы о поднятии дают внутреннюю аппроксимацию внешних объектов и потому являются важным техническим средством при практическом использовании нестандартных методов. Они также предоставляют простую характеристику разных классов случайных процессов и потому не менее важны для нестандартной теории. Мы рассмотрим обе темы.

#### *А. Неупреждающие поднятия*

Напомним, что, согласно теореме 3.2.4, функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лёбу тогда и только тогда, когда она имеет поднятие  $F: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , а функция  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда она имеет поднятие  $F: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , где  $T$  — гиперконечная ось времени.

Случайный процесс — это функция двух переменных

$$x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

поэтому, чтобы заявить о существовании некоего подходящего гиперконечного процесса

$$X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R},$$

нам придется объединить две разные теоремы о поднятии в один результат. Мы начали обсуждать эти вопросы в § 4.1, а сейчас продолжим. Сделаем одно предварительное замечание: теорема 4.1.6 потеряла бы значительную часть своей силы, если бы не теорема 4.1.5, утверждающая существование «достаточного количества» поднятий нужного вида.

Прежде чем перейти к доказательству теорем о поднятиях, необходимо ввести основные понятия стохастического анализа.

*Стохастическая фильтрация* — это набор  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, Q)$ , где  $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}$  — возрастающее семейство  $\sigma$ -алгебр на  $\Omega$ , а  $Q$  — вероятностная мера на  $\mathcal{B}_1$ . Пусть  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$  — внутренняя фильтрация (она определена в п. 4.2.1). Тогда *стохастическая фильтрация, порожденная внутренней фильтрацией*  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ , состоит из множества  $\Omega$ , мера Лёба  $L(P)$  и семейства  $\sigma$ -алгебр

$$(1) \quad \mathcal{B}_t = \sigma\left(\bigcup_{s \approx t} L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}\right),$$

где  $\mathcal{N}$  состоит из принадлежащих  $L(\mathcal{A}_1)$  множеств нулевой  $L(P)$ -меры.

Говорят, что стохастическая фильтрация  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, Q)$  удовлетворяет *обычным условиям*, если каждое  $\mathcal{B}_t$  содержит все множества нулевой меры из  $\mathcal{B}_1$ , и для всех  $t \in [0, 1]$

$$(2) \quad \mathcal{B}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{B}_s.$$

Следующая лемма утверждает, что все внутренне порожденные фильтрации удовлетворяют этим условиям.

**4.3.1. Лемма.** Пусть  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, L(P))$  — стохастическая фильтрация, порожденная внутренней фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ . Тогда для всех  $t \in [0, 1]$

$$(3) \quad \mathcal{B}_t = \bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}).$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}) \subset \mathcal{B}_t \subset \sigma\left(\bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N})\right),$$

так что достаточно доказать, что  $\bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N})$  является  $\sigma$ -алгеброй.

Пусть  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — счетное семейство множеств из  $\bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N})$ ; предположим, что  $A_n \in \sigma(L(\mathcal{A}_{s_n}) \cup \mathcal{N})$ . Семейство множеств  $S_n = [s_n, s_n + 1/n] \cap T$  счетно и замкнуто относительно конечных пересечений, поэтому по принципу насыщения  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset$ . Если  $\tilde{s} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ , то  $\tilde{s} \approx t$  и  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(L(\mathcal{A}_{\tilde{s}}) \cup \mathcal{N}) \subset \bigcup_{s \approx t} \sigma(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N})$ . Тем самым мы показали, что наше семейство замкнуто относительно счетных объединений; поскольку оно,

очевидно, обладает остальными свойствами  $\sigma$ -алгебры, лемма доказана.  $\square$

Из формул (3) и (1) непосредственно получаем

**4.3.2. Следствие.** *Стохастическая фильтрация, порожденная внутренней фильтрацией, удовлетворяет обычным условиям.*

Существует несколько стандартных попыток осознать понятие «неупреждаемости» процесса. К сожалению, естественный кандидат на эту роль, по-видимому, отсутствует: разные формулировки приводят к разным понятиям, и не все пригодны для одних и тех же целей. Мы остановимся на двух таких понятиях — на понятии согласованного процесса и предсказуемого процесса.

Сначала напомним, что *измеримым прямоугольником* называется подмножество множества  $\Omega \times [0, 1]$ , имеющее вид  $B \times [s, t]$ , где множество  $B$  измеримо по Лёбу. Множество называется *измеримым*, если оно принадлежит  $\sigma$ -алгебре, порожденной измеримыми прямоугольниками. Пусть  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, Q)$  — стохастическая фильтрация.

**4.3.3. Определение.** Множество  $A \subset \Omega \times [0, 1]$  называется *согласованным* (с семейством  $\{\mathcal{B}_t\}$ ), если оно измеримо и каждое его сечение  $A_t = \{\omega \mid (\omega, t) \in A\}$   $\mathcal{B}_t$ -измеримо.

**4.3.4. Определение.** *Предсказуемый* (относительно семейства  $\{\mathcal{B}_t\}$ ) *прямоугольник* — это множество вида  $B_s \times (s, t]$ , где  $B_s \in \mathcal{B}_s$ , или вида  $B_0 \times [0, 1]$ , где  $B_0 \in \mathcal{B}_0$ . Множество называется *предсказуемым*, если оно принадлежит  $\sigma$ -алгебре, порожденной предсказуемыми прямоугольниками.

Процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *согласованным*, если он измерим относительно  $\sigma$ -алгебры согласованных множеств. Пусть  $\mu$  — мера на  $\Omega \times [0, 1]$ , определенная на  $\sigma$ -алгебре измеримых множеств. Множество  $A$  называется *почти наверное согласованным* относительно меры  $\mu$ , если существует такое согласованное множество  $B$ , что  $\mu(A \Delta B) = 0$ ; случайный процесс называется *почти наверное согласованным*, если он почти везде совпадает с некоторым согласованным процессом. Аналогичную терминологию мы используем для измеримых и предсказуемых множеств и процессов.

Очевидно, что все почти наверное предсказуемые процессы почти наверное согласованы. Обратное, вообще говоря, неверно.

Мы в основном будем интересоваться случаем, когда мера  $\mu$  порождена внутренней мерой  $\nu$  на  $\Omega \times T$ :

$$\mu = L(\nu) \circ (\text{id} \times \text{st})^{-1}$$

(здесь  $\text{id}$  обозначает тождественное отображение на  $\Omega$ ). Понимается, что  $\nu = \nu_M$ , где  $\nu_M$  — мера, полученная из мартингала  $M$  по формуле (4.2.13). Частный случай этой ситуации — мера  $\nu = P \times \lambda$ , где  $\lambda$  — равномерная мера на  $T$  (т. е.  $\lambda(\{t_i\}) = t_{i+1} - t_i$ ); тогда  $\mu$  — пополненное произведение меры  $L(P)$  на меру Лебега. Этот случай обсуждался в § 4.1.

Для удобства введем обозначение

$$(5) \quad \text{St} = \text{id} \times \text{st}: \Omega \times T \rightarrow \Omega \times [0, 1].$$

Начиная с этого момента  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$  будет внутренней фильтрацией, порождающей фильтрацию  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, L(P))$ ;  $\nu$  будет внутренней мерой, определенной на всех внутренних подмножествах множества  $\Omega \times T$ ; наконец,  $\mu = L(\nu) \circ \text{St}^{-1}$ . Мы будем предполагать, что мера  $\nu(\Omega \times T)$  конечна.

Будем говорить, что мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$ , если из  $L(P)(C) = 0$  следует, что  $L(\nu)(C \times T) = 0$ , и, кроме того,  $\mu(\Omega \times \{0\}) = 0$ .

**4.3.5. Лемма.** Пусть мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$ . Если множество  $B \subset \Omega \times [0, 1]$  почти наверное предсказуемо, то существует такое неупреждающее множество  $A \subset \Omega \times T$ , что  $L(\nu)(A \Delta \text{St}^{-1}(B)) = 0$ .

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда  $B$  — предсказуемый прямоугольник. Пусть сначала  $B$  имеет вид  $B_s \times (s, t]$ . По лемме 4.3.1 найдется такое  $\tilde{s} \in T$ ,  $\tilde{s} \approx s$ , и такое  $A_{\tilde{s}} \in \mathcal{A}_{\tilde{s}}$ , что  $L(P)(B_s \Delta A_{\tilde{s}}) = 0$ . Из абсолютной непрерывности меры  $\nu$  относительно меры  $P$  получаем

$$\mu(B_s \times (s, t]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} L(\nu)(A_{\tilde{s}} \times (s + 1/n, t + 1/m]).$$

Поэтому можно найти такие  $m, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $s + 1/n \geq \tilde{s}$  и

$$\mu(B_s \times (s, t]) = {}^0\nu(A_{\tilde{s}} \times (s + 1/n, t + 1/m]).$$

Тогда в качестве множества  $A$  можно взять  $A = A_{\tilde{s}} \times (s + 1/n, t + 1/m]$ .

Чтобы рассмотреть предсказуемые прямоугольники второго вида,  $B = B_0 \times [0, t]$ , следует использовать второе утверждение в определении абсолютной непрерывности. Детали мы оставляем читателю.  $\square$

Следующая лемма ведет в противоположную сторону.

**4.3.6. Лемма.** Пусть  $B \subset \Omega \times [0, 1]$ ; предположим, что существует такое неупреждающее множество  $A \subset \Omega \times T$ , что  $L(\nu)(A \Delta \text{St}^{-1}(B)) = 0$ . Тогда множество  $B$  почти наверное согласовано.

*Доказательство.* Пусть  $\nu_A$  — внутренняя мера, заданная формулой

$$\nu_A(C) = \nu(A \cap C);$$

положим  $\mu_A = L(\nu_A) \circ \text{St}^{-1}$ . Пусть  $g$  — производная Радона — Никодима,

$$g = \partial\mu_A/\partial\mu;$$

положим  $C = \{(\omega, t) \mid g(\omega, t) = 1\}$ . Поскольку  $L(\nu)(A \Delta \text{St}^{-1}(B)) = 0$ , должны выполняться равенства  $g = 1$  почти наверное на  $B$ ,  $g = 0$  почти наверное на дополнении к  $B$ . Следовательно,  $\mu(B \Delta C) = 0$ ; всё, что осталось сделать — это найти согласованную версию функции  $g$ .

Определим внутренние функции  $F, F_A: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  формулами

$$F(\omega, t) = \sum \{\nu(\omega, s) \mid s \leq t\}, \quad F_A(\omega, t) = \sum \{\nu_A(\omega, s) \mid s \leq t\}.$$

Правые стандартные части  $f = {}^\circ F^+$  и  $f_A = {}^\circ F_A^+$  измеримы, поскольку они являются возрастающими непрерывными справа процессами; очевидно также, что они  $\{\mathcal{B}_t\}$ -согласованы. Но

$$g(\omega, t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f_A(\omega, t) - f_A(\omega, t-h)}{f(\omega, t) - f(\omega, t-h)},$$

что и доказывает лемму.  $\square$

Приведенное доказательство имеет непосредственное следствие.

**4.3.7. Лемма.** Пусть мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$ . Множество  $B \subset \Omega \times [0, 1]$  является почти наверное измеримым<sup>1)</sup> тогда и только тогда, когда существует такое внутреннее подмножество  $A \subset \Omega \times T$ , что  $L(\nu) \times \times A \Delta \text{St}^{-1}(B) = 0$ .

*Доказательство.* То, что почти наверное измеримое множество имеет поднятие, доказывается обычными прямыми рассуждениями; мы оставляем их читателю.

Доказательство утверждения, направленного в противоположную сторону, копирует доказательство леммы 4.3.6; нужно только удалить все связанное с неупреждаемостью.  $\square$

Утверждения 4.3.5—4.3.7 можно выразить в терминах множеств, а процессов. Следующее важное определение обобщает определение 4.1.4.

<sup>1)</sup> То есть существует такое измеримое множество  $B \subset \Omega \times [0, 1]$ , что  $\mu(B \Delta \tilde{B}) = 0$ .

**4.3.8. Определение.** Пусть  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — случайный процесс. *Поднятием* процесса  $x$  (относительно меры  $\nu$ ) называется такой внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , что

$${}^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t) \quad L(\nu)\text{-п. н.}$$

Разумеется, понятие поднятия обобщается на процессы, принимающие значения в произвольных хаусдорфовых пространствах.

Согласно теореме 3.2.4, полученные выше результаты можно переформулировать в виде следующего предложения.

**4.3.9. Предложение.** Пусть мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$  и  $x: \Omega \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  — случайный процесс.

(i) Если процесс  $x$  почти наверное предсказуем, то он имеет неупреждающее поднятие.

(ii) Если процесс  $x$  имеет неупреждающее поднятие, то он почти наверное согласован.

(iii) Процесс  $x$  почти наверное измерим, если он имеет поднятие.

Теоремой о поднятии в терминологии Кейслера (см. Keisler [4]) называется такой результат, который характеризует некоторый класс стандартных процессов в терминах того, какие у этих процессов есть поднятия. Предложение 4.3.9(iii) есть как раз такая характеристика класса почти наверное измеримых процессов. Две первые части того же предложения не дотягивают до уровня теоремы о поднятии, поскольку мы не определили, какое же в точности стандартное понятие соответствует нестандартному понятию неупреждающего процесса: то ли это понятие предсказуемости, то ли согласованности, то ли что-то промежуточное. Однако в том случае, когда эти классы совпадают, мы получаем из утверждений 4.3.9(i) и (ii) полноценную теорему о поднятии. На одном из таких случаев мы вкратце остановимся.

**4.3.10. Лемма.** Пусть  $t$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ ,  $P$  — вероятностная мера на  $\Omega$ , и  $\mu = P \times t$ . Процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  почти наверное предсказуем относительно меры  $\mu$  тогда и только тогда, когда он почти наверное согласован.

*Доказательство.* Достаточно показать, что если процесс  $x$  согласован и ограничен, то он почти наверное предсказуем. Прежде всего заметим, что если процесс согласован и непрерывен, то он почти наверное предсказуем. Поэтому, взяв

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} -(6/\varepsilon^3)t(t-\varepsilon) & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

в качестве приближения и  $\delta$ -функции и записав

$$x_\varepsilon(t) = (x * \delta_\varepsilon)(t) = \int_0^1 x(t-s) \delta_\varepsilon(s) ds,$$

мы получим, что процесс  $x_\varepsilon(t)$  почти наверное предсказуем. Поскольку  $x_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходится к  $x$  по норме пространства  $L^1(\Omega \times [0, 1], \mu)$ , исходный процесс  $x$  тоже должен быть почти наверное предсказуемым.  $\square$

**4.3.11. Следствие.** Если  $P$  — внутренняя вероятностная мера на  $\Omega$ ,  $\lambda$  — равномерная мера на  $T$ , и  $\nu = P \times \lambda$ , то процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  почти наверное согласован относительно меры  $\mu = L(\nu) \circ St^{-1}$  тогда и только тогда, когда он имеет неупреждающее поднятие.

Читатель заметит, что следствие 4.3.11 совпадает с теоремой 4.1.5.

Полученные выше результаты достаточны для наших нужд в этой книге. Читатель, заинтересовавшийся более глубокими аспектами теории, должен обратиться к работе Strojan [1] (см. также Strojan, Bayod [1]), где содержится детальная информация о вопросах, поднятых в предложении 4.3.9.

### В. Равномерные поднятия

Теперь мы сосредоточим наше внимание на непрерывных процессах. Подходящая версия поднятия введена в работе Keisler [4].

**4.3.12. Определение.** Пусть  $E$  и  $F$  — хаусдорфовы топологические пространства, и  $x: \Omega \times E \rightarrow F$  — случайный процесс. Внутренний процесс  $X: \Omega \times {}^*E \rightarrow {}^*F$  называется *равномерным поднятием* процесса  $x$ , если существует такое множество  $\Omega'$  меры 1, что

$${}^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t)$$

для всех  $\omega \in \Omega'$  и всех околостандартных  $t \in E$ .

Напомним, что слова « $x: \Omega \times E \rightarrow F$  — случайный процесс» означают просто, что  $x(\cdot, t)$  измеримо при каждом  $t \in E$ . В большинстве приложений  $E = [0, 1]$  и  $F = \mathbb{R}^n$ ; однако в теории стохастических дифференциальных уравнений и в теории стохастического управления есть такие примеры, ради которых удобно рассмотреть заранее более общую ситуацию.

Кейслер доказал следующий результат для случая  $E = [0, 1]$  и  $F = \mathbb{R}^n$ .

**4.3.13. Предложение.** Пусть  $E$  и  $F$  — сепарабельные метрические пространства. Случайный процесс  $x: \Omega \times E \rightarrow F$

непрерывен тогда и только тогда, когда он имеет равномерное поднятие.

**Доказательство.** Сначала проделаем более легкую часть. Предположим, что  $X$  — равномерное поднятие процесса  $x$ , и зафиксируем  $m \in E$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и  $\omega \in \Omega'$  (где  $\Omega'$  — то самое множество меры 1, где процессы  $x$  и  $X$  согласуются как в определении 4.3.12). Если  $y = x(\omega, m)$ , то внутреннее множество

$$\{\delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \mid d(y, X(\omega, m')) < \varepsilon, \text{ если } d(m, m') < \delta\}$$

содержит все бесконечно малые числа; значит, оно содержит некоторое не бесконечно малое  $\delta_0 > 0$ . Тогда из  $d(m, m') < \delta_0$  следует  $d(x(\omega, m), x(\omega, m')) < \varepsilon$ , т. е. траектория  $x(\omega, \cdot)$  непрерывна в точке  $m$ .

Идея доказательства обратного утверждения состоит в следующем. Пусть  $C(E, F)$  — пространство непрерывных функций из  $E$  в  $F$ ; определим  $\hat{x}: \Omega \rightarrow C(E, F)$ , положив  $\hat{x}(\omega) = x(\omega, \cdot)$ . Используя принадлежащую Андерсону теорему 3.2.4 о поднятии случайных величин, выбираем поднятие  $\hat{X}$  функции  $\hat{x}$  и определяем процесс  $X: \Omega \times {}^*E \rightarrow {}^*F$  с помощью равенства  $X(\omega, m) = \hat{X}(\omega)(m)$ . Тогда  $X$  будет равномерным поднятием процесса  $x$ .

Чтобы осуществить этот план, нам нужна какая-то топология в  $C(E, F)$ , а для того, чтобы работала теорема Андерсона, эта топология должна удовлетворять второй аксиоме счетности. В случае  $E = [0, 1]$ ,  $F = \mathbb{R}^d$  Кейслер смог воспользоваться компактно-открытой топологией; но в общем случае эта топология не годится, так как для не локально компактных  $E$  она может не удовлетворять второй аксиоме счетности. Вместо этого мы используем топологию, наиболее удобное описание которой состоит в следующем.

Зафиксируем счетное плотное подмножество  $E_0 \subset E$ ; обозначим через  $\mathcal{B}(E)$  семейство

$$\mathcal{B}(E) = \{B(e, 1/n) \mid e \in E_0, n \in \mathbb{N}\},$$

состоящее из замкнутых шаров  $B(e, 1/n) = \{m \in E \mid d(e, m) \leq 1/n\}$ . Пусть  $\mathcal{B}(F)$  — аналогичным образом определенное семейство в  $F$ . Для  $B_1 \in \mathcal{B}(E)$  и  $B_2 \in \mathcal{B}(F)$  положим

$$O_{B_1, B_2} = \{f \in C(E, F) \mid f(B_1) \subset B_2\}.$$

Определим топологию  $\tau$  в  $C(E, F)$ , взяв в качестве открытых множеств произвольные объединения конечных пересечений вида

$$(6) \quad O_{B_1^{(1)}, B_2^{(1)}} \cap \dots \cap O_{B_1^{(k)}, B_2^{(k)}}.$$

Поскольку множеств вида (6) счетное число, эта топология удовлетворяет второй аксиоме счетности; очевидно также, что она хаусдорфова.



Как было сказано выше, определим  $\hat{x}: \Omega \rightarrow C(E, F)$ , положив  $\hat{x}(\omega) = x(\omega, \cdot)$ . Чтобы «поднять»  $\hat{x}$ , нужно сначала показать, что это отображение измеримо относительно  $\sigma$ -алгебры, порожденной топологией  $\tau$ . Поскольку база топологии содержит лишь счетное число множеств вида (6), достаточно показать, что каждое множество  $\hat{x}^{-1}(O_{B_1, B_2})$  измеримо. Пусть  $\tilde{Q}$  — счетное замкнутое подмножество шара  $B_1$ ; поскольку шар  $B_2$  замкнут, имеем

$$\begin{aligned}\hat{x}^{-1}(O_{B_1, B_2}) &= \{\omega \mid \hat{x}(\omega)(q) \in B_2 \text{ для всех } q \in \tilde{Q}\} = \\ &= \bigcap_{q \in \tilde{Q}} \{\omega \mid x(\omega, q) \in B_2\};\end{aligned}$$

это множество измеримо, так как  $x$  — случайный процесс.

Теперь мы можем взять поднятие  $\hat{X}$  отображения  $\hat{x}$  и определить  $\hat{X}$ , положив  $\hat{X}(\omega, m) = \hat{x}(\omega)(m)$ . Пусть  $\Omega'$  — такое множество меры 1, для которого  $\hat{x}(\omega) = {}^\circ\hat{x}(\omega)$  при всех  $\omega \in \Omega'$ . Осталось только показать, что если  $\omega \in \Omega'$ , то  $x(\omega, {}^\circ m) = {}^\circ x(\omega, m)$  для всех околостандартных  $m$ . Предположим обратное; тогда число  $d(x(\omega, {}^\circ m), {}^\circ x(\omega, m))$  не бесконечно мало, так что существует такое  $B_2 \in \mathcal{B}(F)$ , что  $x(\omega, {}^\circ m)$  принадлежит внутренности шара  $B_2$ , но  $\hat{x}(\omega, m) \notin {}^*B_2$ . В силу непрерывности функции  $x(\omega, \cdot)$  найдется такое  $B_1 \in \mathcal{B}(E)$ , что  $m$  принадлежит внутренности  $B_1$  и  $x(\omega, m') \in B_2$  для всех  $m' \in B_1$ . Значит,  $\hat{x}(\omega) \in O_{B_1, B_2}$ , в то время как  $\hat{x}(\omega) \notin {}^*O_{B_1, B_2}$ , что противоречит предположению о том, что  ${}^\circ\hat{x}(\omega) = \hat{x}(\omega)$ . Предложение доказано.  $\square$

Частный случай доказанного предложения состоит в том, что процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен тогда и только тогда, когда у него есть равномерное поднятие  $\hat{X}: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Другая ситуация, в которой этот результат оказывается полезным — это когда мы рассматриваем функцию

$$(7) \quad f: [0, 1] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

измеримую по первой координате и непрерывную по второй. Если  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ , то предложение 4.3.13 утверждает существование равномерного поднятия<sup>1)</sup>  $F: T \times {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m$ . Заметим, что в последнем случае пространство  $C(E, F) = C(C([0, 1], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^m)$  в компактно-открытой топологии не удовлетворяет второй аксиоме счетности, и поэтому специальный выбор топологии в доказательстве теоремы 4.3.13 был необходим. Функции указанного типа мы встретим в параграфе, посвященном стохастической теории управления:

<sup>1)</sup> Здесь равномерное поднятие понимается в несколько модифицированном смысле по сравнению с определением 4.3.12. — *Прим. ред.*

там нас будут интересовать выражения вида  $f(t, x(\omega, \cdot))$ , где  $x$  — управляемый процесс.

Возникает естественный вопрос: можно ли скомбинировать два уже полученных результата о поднятии, чтобы получить из них новый результат? Например, было бы соблазнительно заключить, что случайный процесс является непрерывным и согласованным тогда и только тогда, когда он имеет неупреждающее равномерное поднятие. В большинстве случаев выводы такого рода в самом деле справедливы, однако к формулировкам надо подходить с осторожностью, а доказательства часто далеко не тривиальны. В качестве иллюстрации мы докажем только что высказанное утверждение — но в модифицированном виде.

Внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *существенно равномерным поднятием* процесса  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , если найдется такое бесконечно малое  $\delta \in T$ , что множество

$$\{\omega \mid \forall t > \delta, t \in T (^{\circ}X(\omega, t) = x(\omega, {}^{\circ}t))\}$$

имеет меру Лёба 1. Это означает, что равномерность поднятия может нарушаться на бесконечно малом начальном отрезке. Из теоремы 4.3.13 следует, что процесс  $x$  имеет существенно равномерное поднятие тогда и только тогда, когда он непрерывен.

**4.3.14. Теорема.** *Случайный процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен и согласован тогда и только тогда, когда он имеет существенно равномерное неупреждающее поднятие.*

**Замечание.** Кейслер первоначально доказал этот результат в несколько менее общем контексте (см. Keisler [4]); используемая нами версия заимствована из работы Osswald [4]. В литературе более обычной является другая формулировка той же теоремы, утверждающая, что поднятие является равномерным, но неупреждающим только после бесконечно малого времени  $\delta$ . Если убрать из формулировки теоремы слово «существенно», утверждение станет неверным, как показывает следующий ниже пример 4.3.15; следовательно, высказанное выше предположение (что процесс непрерывен и согласован тогда и только тогда, когда у него есть неупреждающее равномерное поднятие) фактически ложно! Ложно также и утверждение, получаемое заменой «согласованных» процессов на «почти наверное согласованные», что на первый взгляд несколько удивительно в свете предложения 4.3.9.

**4.3.15. Пример.** Чтобы построить непрерывный согласованный процесс, не имеющий равномерного неупреждающего поднятия, вернемся к ситуации § 4.1. Тогда  $\Omega$  — это множество

всех внутренних функций  $\omega: T \rightarrow \{-1, 1\}$ , а  $\mathcal{A}_t$  — внутренняя алгебра, порожденная отношением эквивалентности  $\omega \sim_t \omega' \Leftrightarrow \omega(s) = \omega'(s)$  для всех  $s < t$ . Определим процесс  $x$  следующим образом:  $x(\omega, t) = \omega(0)$  для всех  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [0, 1]$ . Очевидно, процесс  $x$  непрерывен и  $\mathcal{B}_t$ -согласован. Но, поскольку  $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $x$  не имеет равномерного неупреждающего поднятия. Заметим, что процесс

$$X(\omega, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0 \\ \omega(0) & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

дает неупреждающее существенно равномерное поднятие процесса  $x$ .

При доказательстве теоремы 4.3.14 будет более удобно работать со стандартной фильтрацией  $\{\mathcal{C}_t\}$ , немного более грубой, чем  $\{\mathcal{B}_t\}$ . Чтобы определить ее, напомним как выглядит внутреннее отношение эквивалентности  $\sim_s$  на  $\Omega$ , где  $s \in T$ :

$$(8) \quad \omega \sim_s \omega' \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}_s \quad (\omega \in A \leftrightarrow \omega' \in A).$$

(см. (4.2.3)). Для  $t \in [0, 1]$  пусть  $\equiv_t$  — (внешнее) отношение эквивалентности, задаваемое формулой

$$\omega \equiv_t \omega' \Leftrightarrow \omega \sim_s \omega' \text{ для всех таких } s, \text{ что } {}^\circ s \leq t.$$

Тогда  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{C}_t$  состоит из всех таких измеримых по Лёбу множеств  $C$ , что каждый элемент входит в это множество вместе со всеми эквивалентными ему относительно отношения  $\equiv_t$ . Из утверждений 4.3.1 и 4.3.2 легко увидеть, что  $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{B}_t$ , но при этом для любого  $B \in \mathcal{B}_t$  найдется такое  $C \in \mathcal{C}_t$ , что множество  $B \Delta C$  имеет меру Лёба — нуль. Отсюда следует, что для любого непрерывного  $\mathcal{B}_t$ -согласованного процесса  $x$  существует такой непрерывный  $\mathcal{C}_t$ -согласованный процесс  $y$ , что  $x(\omega, \cdot) = y(\omega, \cdot)$  для почти всех  $\omega$ . Именно фильтрация  $\{\mathcal{C}_t\}$  использовалась в работе Keisler [4].

**Доказательство теоремы 4.3.14.** Предположим, что процесс  $x$  имеет существенно равномерное неупреждающее поднятие  $X$ . Из существования существенно равномерного поднятия следует непрерывность процесса  $x$ . Чтобы показать, что он также и согласован, выберем такие  $t \in [0, 1]$  и  $\bar{t} \in T$ , что  $t = {}^\circ \bar{t}$ . Тогда  ${}^\circ X(\bar{t}) = x(t)$  почти наверное, и в силу  $\mathcal{A}_{\bar{t}}$ -измеримости величины  $X(\bar{t})$  величина  $x(t)$  должна быть  $\mathcal{B}_t$ -измеримой.

Для доказательства обратного предположим, что процесс  $x$  непрерывен и согласован. Пусть  $y$  — такой непрерывный  $\mathcal{C}_t$ -согласованный процесс, что  $y(\omega, \cdot) = x(\omega, \cdot)$  почти наверное, и пусть  $Y$  — равномерное поднятие процесса  $y$ . Мы модифицируем  $Y$  таким образом, что он станет неупреждающим существенно

равномерным поднятием процесса  $y$  (и, следовательно, процесса  $x$ ).

Пусть  $\Omega'$  — то множество меры 1, на котором  $Y$  служит поднятием для  $y$ ; выберем такую возрастающую внутреннюю последовательность  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что  $\Omega_n \subset \Omega'$  и  $P(\Omega_n) > 1 - 1/n$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ . Для каждого класса эк-

вивалентности  $\mathcal{P}$  отношения  $\sim_s$ , определенного в (8), выберем представитель  $\omega_s \in \mathcal{P}$ . Выберем  $\omega_s$  таким образом, чтобы он принадлежал наименьшему  $\Omega_n$ , пересекающему  $\mathcal{P}$ ; заметим, что такой выбор можно произвести строго внутренним образом. Таким образом, каждому элементу  $\omega \in \Omega$  и каждому  $s \in T$  мы сопоставляем представитель  $\omega_s$  (т. е. представитель того класса эквивалентности относительно  $\sim_s$ , которому принадлежит  $\omega$ ).

Заметим, что, поскольку мы выбираем  $\omega_s$  из наименьшего возможного  $\Omega_n$ , то  $\omega_s \in \tilde{\Omega}$  всегда, когда  $\omega \in \tilde{\Omega}$ . Отсюда следует, что

$$(9) \quad {}^\circ Y(\omega, s) = y(\omega, {}^\circ s) \text{ и } {}^\circ Y(\omega_s, s) = y(\omega_s, {}^\circ s)$$

для  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , поскольку  $Y$  есть поднятие  $y$  на  $\tilde{\Omega}$ .

Определим процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  с помощью формулы

$$X(\omega, s) = Y(\omega_s, s).$$

Очевидно, процесс  $X$  является неупреждающим; поэтому достаточно показать, что он служит существенно равномерным поднятием процесса  $y$ . Предположим, что  $\omega \in \tilde{\Omega}$ ,  $s \in T$  и  ${}^\circ s > 0$ . По построению,  $\omega \sim_s \omega_s$  и, следовательно,  $\omega \equiv_r \omega_s$  для всех  $r \in [0, 1]$ ,  $r < {}^\circ s$ . Процесс  $y$  является  $\mathcal{E}_t$  — согласованным, поэтому  $y(\omega, r) = y(\omega_s, r)$ . Беря предел при  $r \uparrow {}^\circ s$ , получаем

$$(10) \quad y(\omega, {}^\circ s) = y(\omega_s, {}^\circ s).$$

Соединяя вместе (9) и (10), мы видим, что для всех не бесконечно малых  $s \in T$  и всех  $\omega \in \tilde{\Omega}$

$$(11) \quad {}^\circ X(\omega, s) = {}^\circ Y(\omega_s, s) = y(\omega_s, {}^\circ s) = y(\omega, {}^\circ s),$$

что означает, что процесс  $X$  является равномерным поднятием процесса  $y$  на сегменте  $(0, 1]$ . Осталось продолжить формулу (11) на достаточно большие бесконечно малые  $s$ . Это делается с помощью следующего трюка: из формулы (11) следует, что внутреннее множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \forall \omega \in \Omega_n \quad \forall t \geq 1/n \quad |X(\omega, t) - Y(\omega, t)| < 1/n\}$$

содержит всё  $\mathbb{N}$  и, значит, содержит некоторое бесконечно большое  $\gamma$ . Поскольку  $Y$  — равномерное поднятие процесса  $y$ , то  $X$  должен быть равномерным поднятием процесса  $y$  на

$T \cap [1/\gamma, 1]$ , т. е. существенно равномерным поднятием процесса  $y$  на  $T$ .  $\square$

Основная идея приведенного выше доказательства состояла в том, чтобы сделать из обычного поднятия неупреждающее, выбирая по одному элементу из каждого класса эквивалентности. В последнем результате этого параграфа та же идея будет применена в значительно более простой ситуации. Функция  $f: [0, 1] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  (такая, как в формуле (7)) называется *неупреждающей*, если  $f(t, y) = f(t, y')$  для таких  $y, y'$ , что  $y(s) = y'(s)$  при  $s \leq t$ . Тот же термин мы будем применять и к внутренним функциям  $F: T \times {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m$ .

**4.3.16. Предложение.** Пусть неупреждающая функция

$$f: [0, 1] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

измерима по первой координате и непрерывна по второй (относительно равномерной топологии в  $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ ). Тогда  $f$  имеет неупреждающее поднятие  $F$ , равномерное по второй координате, т. е. существует такое множество  $T' \subset T$  меры Лёба 1, что  ${}^\circ F(t, y) = f({}^\circ t, {}^\circ y)$  для всех околостандартных  $y$  и для всех  $t \in T'$ .

*Доказательство.* Пусть  $G: T \times {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m$  — поднятие функции  $f$ , равномерное по второй координате. Для каждого  $y \in {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  и каждого  $t \in T$  определим  $y_t \in {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  по формуле

$$y_t(s) = \begin{cases} y(s) & \text{при } s \leq t, \\ y(t) & \text{при } s > t; \end{cases}$$

заметим, что если функция  $y$  околостандартна, то  $({}^\circ y)(r) = ({}^\circ y_t)(r)$  для всех  $r \in [0, 1]$ ,  $r \leq {}^\circ t$ . Поэтому

$$(12) \quad f({}^\circ t, {}^\circ y) = f({}^\circ t, {}^\circ y_t).$$

Определим неупреждающую функцию  $F: T \times {}^*C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m$  равенством

$$(13) \quad F(t, y) = G(t, y_t).$$

Тогда, если  $T'$  — множество, на котором  $G$  служит поднятием функции  $f$ , и  $t \in T'$ , то, согласно (12) и (13),

$${}^\circ F(t, y) = {}^\circ G(t, y_t) = f({}^\circ t, {}^\circ y_t) = f({}^\circ t, {}^\circ y),$$

так что  $F$  является равномерным неупреждающим поднятием функции  $f$ .  $\square$

На этом мы заканчиваем наш обзор теорем о поднятиях. Хотя мы иногда использовали иной подход или работали

в более общей ситуации, все основные результаты этого параграфа принадлежат главным образом Кейслеру. Мы призываем читателя обратиться к его монографии Keisler [4] за дальнейшей информацией — например, о характеристизации с помощью поднятий различных классов марковских процессов. В работах Hoover, Perkins [1] и Stroyan, Bayod [1] содержится детальный анализ поднятий непрерывных справа и имеющих пределы слева процессов, а в работах Rodenhausen [1], [2] получен интересный критерий того, когда внутренний процесс является поднятием.

#### 4.4. Теоремы о представлении

Сейчас мы обсудим более детально взаимоотношения между стандартными и гиперконечными стохастическими интегралами. У этих взаимоотношений есть два аспекта. Первый — является ли гиперконечная теория достаточно сильной, т. е. всегда ли стандартные интегралы могут в каком-то смысле быть сведены к гиперконечным интегралам? Второй аспект: дает ли нам гиперконечная теория что-то существенно новое, чего не может дать стандартная теория, т. е. существует ли «осмысленное» использование гиперконечных интегралов, которое не может быть сведено (по крайней мере простым образом) к стандартной теории интегрирования?

Теоремы 4.1.4 и 4.1.6 дают положительный ответ на первый вопрос применительно к броуновскому движению. Нестандартный интеграл по гиперконечному случайному блужданию через посредство поднятия и стандартной части дает классическую теорию интеграла Ито. В первой части настоящего параграфа мы приведем доказательства, пропущенные в § 4.1, и одновременно расширим рамки наших рассуждений, включив в них теорию § 4.2. Во второй части параграфа мы обсудим некоторые результаты, относящиеся ко второму вопросу.

##### *А. Квадратично $S$ -интегрируемые мартингалы*

Начнем с краткого наброска стандартной теории.  $L^2$ -мартингал относительно стохастической фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, 1]}, P)$  — это просто такой мартингал  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $E(N_t^2) < \infty$  для всех  $t \in [0, 1]$ . Предположим также, что  $N$  непрерывен справа и имеет пределы слева. Большинство результатов, которые мы докажем для  $L^2$ -мартингалов, тривиально обобщаются на более широкий класс локальных  $L^2$ -мартингалов. Мы только дадим определение этого класса, а все обобщения оставим заинтересованному читателю. Процесс  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *локальным  $L^2$ -мартингалом*, если существует такая неубывающая последовательность марковских моментов  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что каждый

остановленный процесс  $N_{\tau_n}$  является  $L^2$ -мартингалом, и для почти всех  $\omega \in \Omega$  справедливо  $\tau_n(\omega) = 1$  при достаточно больших  $n \in \mathbb{N}^1$ ).

Если задан  $L^2$ -мартингал  $N$ , определим меру  $\nu_N$  на  $\sigma$ -алгебре предсказуемых множеств, положив

$$(1) \quad \nu_N(A \times (s, t]) = E(I_A(N(t) - N(s))^2)$$

для всех предсказуемых прямоугольников, а также

$$(2) \quad \nu_N(A \times \{0\}) = 0.$$

Мера  $\nu_N$  часто называется мерой Долеан, связанной с мартингалом  $N$  (см. Doléans-Dade [1], Meyer [1]).

Стохастический интеграл вида  $\int_0^1 X dN$  определяется следующим образом. Сначала, если  $X$  — простая функция вида

$$(3) \quad X = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i \times (s_i, t_i]},$$

где  $A_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ , то интеграл дается формулой

$$(4) \quad \left( \int_0^1 X_- dN \right)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}(\omega) (N(\omega, t_i) - N(\omega, s_i)).$$

Замечая, что отображение  $X \mapsto \int_0^1 X dN$  является изометрией из  $L^2(\nu_N)$  в  $L^2(P)$ , и что простые функции типа (3) плотны в  $L^2(\nu_N)$ , продолжаем отображение  $X \mapsto \int_0^1 X dN$  до изометрии всего пространства  $L^2(\nu_N)$  в  $L^2(P)$ . Это продолжение будет обозначаться так же:  $\int_0^1 X dN$ . Стохастический интеграл как процесс определяется для  $X \in L^2(\nu_N)$  и  $t \in [0, 1]$  по формуле

$$(5) \quad \left( \int X dN \right)(\omega, t) = \int_0^t X dN \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_0^1 (I_{[0, t]} X) dN \right)(\omega).$$

<sup>1)</sup> Напомним определение стандартного марковского момента: случайная величина  $\tau: \Omega \rightarrow [0, 1]$  (в других случаях  $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ) называется *марковским моментом*, если  $\{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  для всех  $t \in [0, 1]$  (соответственно,  $t \in [0, \infty]$ ). *Остановленный процесс* — это процесс  $N_\tau(\omega, t) = N(\omega, \tau \wedge t)$ . — Прим. перев.

Отметим, что поскольку отображение  $X \mapsto \int_0^1 X dN$  определяется как  $L^2$ -предел, то стохастический интеграл определен только с точностью до эквивалентности. Заметим также, что приведенное определение обобщает определение интеграла Ито, данное в § 4.1: мы заменили меру  $L(P) \times m$  на меру  $\nu_N$  и сузили класс подынтегральных выражений, взяв вместо согласованных процессов предсказуемые (вспомним, однако, лемму 4.3.10).

Теперь мы можем сформулировать тему первой части этого параграфа более отчетливо. Пусть  $M$  —  $\lambda^2$ -мартингал относительно внутренней фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}, P)$ . Легко проверить, что его правая стандартная часть  ${}^\circ M^+$  является  $L^2$ -мартингалом относительно порожденной стохастической фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}, L(P))$ . (Здесь уместно сделать предупреждение: вообще говоря, не верно, что стандартная часть локального  $\lambda^2$ -мартингала всегда будет локальным  $L^2$ -мартингалом, так как у нас могут возникнуть трудности с марковскими моментами; см. пример в работе Lindström [2].) Если дан процесс  $X \in L^2(\nu_{M^+})$ , мы хотим показать, что стохастический интеграл  $\int X d({}^\circ M^+)$  может быть получен через гиперконечный интеграл по мартингалу  $M$ , т. е. что  $\int X d({}^\circ M^+) = {}^\circ \left( \int Y dM \right)^+$  для подходящего  $Y \in SL^2(M)$ . Идея конструкции проста: с помощью предложения 4.3.9(i) выберем такое  $Y \in SL^2(M)$ , что  $Y$  является поднятием процесса  $X$  относительно меры  $\nu_M$ , а затем проверяем, что  $Y$  как раз обладает всеми нужными свойствами. Имеется, однако, одно техническое препятствие; в предложении 4.3.9 требуется, чтобы мера  $\nu$  была абсолютно непрерывна относительно  $P$ , а для меры  $\nu_M$ , отвечающей произвольному  $\lambda^2$ -мартингалу  $M$ , это, вообще говоря, не так. Мы обойдем это препятствие, слегка сузив класс рассматриваемых мартингалов.

**4.4.1. Определение.** Внутренний мартингал  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется  $SL^2$ -мартингалом, если  $M_t \in SL^2(\Omega, \mathcal{A}_1, P)$  для всех  $t \in T$ .

Имеется и соответствующее понятие *локального  $SL^2$ -мартингала*. Нам нужно также следующее определение.

**4.4.2. Определение.** Внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется *S-непрерывным справа в нуле*, если  ${}^\circ X(0) = {}^\circ X^+(0)$   $L(P)$ -почти наверное.

Заметим, что если процесс  $M$  является *S-непрерывным справа в нуле  $SL^2$ -мартингалом*, то мера  $\nu_M$  абсолютно непрерывна относительно меры  $P$ .



Мы сейчас прервем ненадолго построение теории интегрирования и докажем две теоремы о  $SL^2$ -мартингалах. Эти результаты включены в текст не только чтобы сделать его замкнутым, но также и потому, что они дают еще одну иллюстрацию нашей стратегии сведения вопросов о мартингалах к вопросам об их квадратических вариациях. Читатель, интересующийся главным образом кратким введением в стохастическое интегрирование, может опустить доказательства.

**4.4.3. Предложение.** *Внутренний мартингал  $M$  является  $SL^2$ -мартингалом тогда и только тогда, когда случайная величина  $M_0^2 + [M]_1$   $S$ -интегрируема.*

*Доказательство.* Поскольку в обоих случаях процесс  $M$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, достаточно доказать результат для таких процессов.

Напомним (см. гл. 3), что если внутренняя функция  $f: \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  неотрицательна, то  $\int f dP \geq \int f dL(P)$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция  $f$   $S$ -интегрируема. В следующих ниже рассуждениях мы несколько раз пользуемся этим фактом.

Согласно формуле (4.2.7)

$$(6) \quad E(M_0^2 + [M]_t) = E(M_t^2)$$

докажем аналогичный результат для стандартной части процесса  $M$ . Определим последовательность  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  внутренних марковских моментов:

$$\tau_n(\omega) = \min \{s \in T \mid |M(\omega, s)| \geq n\}.$$

Поскольку

$$E \left( \left( \int_0^t M_{\tau_n} dM_{\tau_n} \right)^2 \right) \leq n^2 E([M]_t) < \infty,$$

процесс  $\int M_{\tau_n} dM_{\tau_n}$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, так что величина  $\int_0^t M_{\tau_n} dM_{\tau_n}$   $S$ -интегрируема для всех  $t$ .

В силу приведенной выше характеристики  $S$ -интегрируемости

$$E \left( \int_0^t M_{\tau_n} dM_{\tau_n} \right) = {}^\circ E \left( \int_0^t M_{\tau_n} dM_{\tau_n} \right) = 0.$$

Теперь из равенства

$${}^\circ M_{\tau_n}(0)^2 + {}^\circ [M_{\tau_n}](t) = {}^\circ M_{\tau_n}(t)^2 - 2 \int_0^t M_{\tau_n} dM_{\tau_n} \text{ п. н.}$$

получаем

$$(7) \quad E({}^\circ M_{\tau_n}(0)^2 + {}^\circ[M_{\tau_n}](t)) = E({}^\circ M_{\tau_n}(t)^2).$$

Очевидно,  ${}^\circ[M_{\tau_n}](t) \rightarrow {}^\circ[M](t)$  и  ${}^\circ M_{\tau_n}(t) \rightarrow {}^\circ M(t)$  с вероятностью 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{{}^\circ[M_{\tau_n}](t)\}$  мажорируется сверху величиной  ${}^\circ[M](t)$ , которая интегрируема, поскольку

$$E({}^\circ[M](t)) \leq {}^\circ E([M](t)) < \infty.$$

Кроме того,  ${}^\circ(M_{\tau_n}(t)^2) \leq \max_{s \leq t} {}^\circ M_s^2$ , и в силу неравенства Дуба

$$E(\max_{s \leq t} {}^\circ M_s^2) \leq {}^\circ E(\max_{s \leq t} M_s^2) \leq 4 {}^\circ E(M_t^2) < \infty$$

случайная величина  $\max_{s \leq t} {}^\circ M_s^2$  интегрируема. Применяя теперь теорему Лебега о мажорируемой сходимости к обеим частям равенства (7), получаем

$$(8) \quad E({}^\circ M(0)^2 + {}^\circ[M](t)) = E({}^\circ M(t)^2).$$

Объединяя формулы (6) и (8), мы видим, что

$${}^\circ E(M_0^2 + [M]_t) = E({}^\circ M_0^2 + {}^\circ[M]_t)$$

тогда и только тогда, когда  ${}^\circ E(M_t^2) = E({}^\circ M_t^2)$ . Результат предложения теперь следует из упомянутой в начале доказательства характеристики  $S$ -интегрируемости.  $\square$

Упомянем без доказательства еще один результат того же типа (доказательство см. в работе Hoover, Perkins [1]): если  $M$  —  $SL^2$ -мартингал, то  $\max_{s \leq 1} {}^\circ M_s^2$   $S$ -интегрируем. Следующее предложение показывает, что класс  $SL^2$ -мартингалов замкнут относительно стохастического интегрирования.

**4.4.4. Предложение.** Если  $M$  —  $SL^2$ -мартингал и  $X \in SL^2(M)$ , то процесс  $\int X dM$  — тоже  $SL^2$ -мартингал.

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай, когда процесс  $X$   $S$ -ограничен, т. е.  $|X| \leq n$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$0 < \left[ \int X dM \right](1) = \sum_0^1 X^2 \Delta M^2 \leq n^2 [M](1),$$

и из предложения 4.4.3 следует, что процесс  $\int X dM$  является  $SL^2$ -мартингалом.

Теперь рассмотрим общий случай  $X \in SL^2(M)$ . Существует такая последовательность  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $S$ -ограниченных элементов

пространства  $SL^2(M)$ , что  $\int_{\Omega \times T} |X^2 - X_n^2| d\nu_M \rightarrow 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq {}^{\circ}E\left(\left[\int X dM\right](1) - \left[\int X_n dM\right](1)\right) = \\ &= {}^{\circ}E\left(\sum_0^1 X^2 \Delta M^2 - \sum_0^1 X_n^2 \Delta M^2\right) = \int_{\Omega \times T} (X^2 - X_n^2) d\nu_M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку каждая из случайных величин  $\left[\int X_n dM\right](1)$  является  $S$ -интегрируемой,  $S$ -интегрируема также и величина  $\left[\int X dM\right](1)$ , и наше утверждение следует из предложения 4.4.3.  $\square$

### *В. Нестандартные представления стандартных стохастических интегралов*

Познакомившись немного ближе с  $SL^2$ -мартингалами, вернемся к теории интегрирования. Напомним обозначение:

$$St = id \times st: \Omega \times T \rightarrow \Omega \times [0, 1].$$

**4.4.5. Лемма.** Пусть  $M$  —  $S$ -непрерывный справа в нуле  $SL^2$ -мартингал, и  ${}^{\circ}M^+$  — его (правая) стандартная часть. Тогда  $\nu_{\bullet M^+}$  есть ограничение меры  $L(\nu_M) \circ St^{-1}$  на предсказуемые множества.

*Доказательство.* Достаточно убедиться в том, что меры  $\nu_{\bullet M^+}$  и  $L(\nu_M) \circ St^{-1}$  совпадают на предсказуемых прямоугольниках. Пусть  $B \in \mathcal{B}_s$ ; тогда

$$\nu_{\bullet M^+}(B \times (s, t]) = E(I_B \cdot ({}^{\circ}M^+(t) - {}^{\circ}M^+(s))^2).$$

Пусть  $A$  — такое внутреннее множество, что  $L(P)(A \Delta B) = 0$  и  $A \in \mathcal{A}_{\tilde{s}}$  для некоторого  $\tilde{s} \approx s$ ; такое  $A$  существует согласно лемме 4.3.1. Тогда

$$\begin{aligned} L(\nu_M) \circ St^{-1}(B \times (s, t]) &= L(\nu_M) \circ St^{-1}(A \times (s, t]) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^{\circ}\nu_M(A \times (s + 1/n, t + 1/m]) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^{\circ}E(I_A([M](t + 1/m) - [M](s + 1/n))) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^{\circ}E(I_A(M(t + 1/m) - M(s + 1/n))^2) = \\ &= E(I_B({}^{\circ}M^+(t) - {}^{\circ}M^+(s))^2); \end{aligned}$$

мы воспользовались  $S$ -интегрируемостью процесса  $[M]$ , когда заменяли  $A$  на  $B$  и обратно, и  $S$ -интегрируемостью процесса

$M^2$ , когда вносили стандартную часть под знак математического ожидания. Внесение пределов под знак математического ожидания, как и в доказательстве предложения 4.4.3, законно в силу неравенства Дуба и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Осталось заметить, что процесс  $M$   $S$ -непрерывен справа в нуле, и поэтому

$$L(v_M) \circ \text{St}^{-1}(B \times \{0\}) = 0.$$

Лемма доказана.  $\square$

Нам понадобится следующий вариант понятия поднятия.

**4.4.6. Определение.** Пусть  $M$  —  $SL^2$ -мартингал, и  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — предсказуемый процесс, принадлежащий  $L^2(v_{\circ M+})$ . Тогда 2-поднятием процесса  $x$  (относительно мартингала  $M$ ) называется такой неупреждающий внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , что  $X \in SL^2(M)$  и  ${}^\circ X(\omega, t) = x(\omega, {}^\circ t)$  для  $L(v_M)$ -почти всех  $(\omega, t)$ .

Вспомним, что мы ввели класс  $SL^2$ -мартингалов, которые  $S$ -непрерывны справа в нуле, для того, чтобы удовлетворить условиям предложения 4.3.9; поэтому не удивителен следующий результат.

**4.4.7. Лемма.** Пусть  $M$  —  $S$ -непрерывный справа в нуле  $SL^2$ -мартингал. Если  $x \in L^2(v_{\circ M+})$ , то существует 2-поднятие процесса  $x$  относительно мартингала  $M$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 4.3.9 процесс  $x$  имеет неупреждающее поднятие  $X$ ; нужно показать, что можно выбрать  $X \in SL^2(M)$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  пусть  $x_n$  — это срезка процесса  $x$ , задаваемая формулой  $x_n = (x \wedge n) \vee (-n)$ . Если  $X_n$  — соответствующая срезка процесса  $X$ , то, как легко видеть,  $X_n$  есть неупреждающее поднятие процесса  $x_n$ . Из леммы 4.4.5 получаем

$${}^\circ \int X_n^2 dv_M = \int {}^\circ X_n^2 dL(v_M) = \int x_n^2 dv_{\circ M+}.$$

Поскольку  $\int x_n^2 dv_{\circ M+} \rightarrow \int x^2 dv_{\circ M+}$ , найдется такое  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что

$${}^\circ \int X_\eta^2 dv_M = \int x^2 dv_{\circ M+}.$$

Согласно предложению 3.2.10 отсюда следует, что  $X_\eta \in SL^2(M)$ , и, следовательно,  $X_\eta$  является 2-поднятием процесса  $x$ .  $\square$

Следующий результат показывает, что конкретный выбор 2-поднятия для стохастического интегрирования безразличен.

**4.4.8. Лемма.** Пусть  $M$  —  $SL^2$ -мартингал, и  $x \in L^2(\nu_{\cdot M^+})$ . Если  $X$  и  $Y$  — два различных 2-поднятия процесса  $x$ , то существует такое множество  $\Omega' \subset \Omega$  меры Лёба 1, что для всех  $\omega \in \Omega'$  и всех  $t \in T$

$${}^\circ\left(\int X dM\right)(\omega, t) = {}^\circ\left(\int Y dM\right)(\omega, t).$$

*Доказательство.* Из неравенства Дуба получаем

$$\begin{aligned} E\left(\max_{t \in T} \left(\int_0^t X dM - \int_0^t Y dM\right)^2\right) &\leq 4E\left(\left(\int_0^1 (X - Y) dM\right)^2\right) = \\ &= 4E\left(\left[\int (X - Y) dM\right](1)\right) = 4 \int_{\Omega \times T} (X - Y)^2 d\nu_M \approx 0; \end{aligned}$$

последнее соотношение следует из того, что процесс  $X - Y \in SL^2(M)$  с вероятностью 1 бесконечно мал. Лемма доказана.  $\square$

Теперь мы можем доказать теорему о представлении.

**4.4.9. Теорема.** Пусть  $M$  —  $S$ -непрерывный справа в нуле  $SL^2$ -мартингал, и  $x \in L^2(\nu_{\cdot M^+})$ . Тогда процесс  $x$  имеет 2-поднятие  $X$ , и

$$(9) \quad \int x d({}^\circ M^+) = {}^\circ\left(\int X dM\right)^+.$$

*Доказательство.* Все что осталось сделать — это доказать равенство. Сначала рассмотрим случай, когда  $x$  — простой процесс вида

$$x = \sum_{i=1}^n a_i I_{B_i \times (s_i, t_i]},$$

где  $B_i \in \mathcal{B}_{s_i}$ . Для каждого  $i$  выберем такое  $\hat{s}_i \approx s_i$ , что  ${}^\circ M(\hat{s}_i) = {}^\circ M^+(s_i)$  с вероятностью 1 и существует такое  $A_i \in \mathcal{A}_{\hat{s}_i}$ , что  $L(P)(A_i \Delta B_i) = 0$ . Выберем такое  $\hat{t}_i \approx t_i$ , что  ${}^\circ M(\hat{t}_i) = {}^\circ M^+(t_i)$  с вероятностью 1. Положим

$$X = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i \times (\hat{s}_i, \hat{t}_i]}.$$

Тогда  $X$  является 2-поднятием процесса  $x$ , и формула (9), очевидно, справедлива.

Чтобы дать доказательство для общего случая, нужно только показать, что отображение  $x \mapsto {}^\circ\left(\int X dM\right)(1)$  является изометрией из  $L^2(\Omega \times [0, 1], \nu_{\cdot M^+})$  в  $L^2(\Omega, L(P))$ . Но мы уже отмечали,

что, согласно лемме 4.4.5,

$$\int x^2 dv_{M^+} = \int X^2 dv_M = E \left( \left( \int X dM \right)^2 (1) \right) = E \left( \left( \int X dM \right)^2 (1) \right);$$

здесь на последнем шаге мы использовали предложение 4.4.4. Тем самым теорема доказана.  $\square$

Непосредственным следствием полученной теоремы и леммы 4.3.10 является теорема 4.1.6.

Несмотря на результат, полученный в теореме 4.4.9, между стандартным и нестандартным определениями стохастического интеграла все же имеется разница, которую стоит отметить. Стандартное определение задает интеграл при каждом  $t$  лишь с точностью до множества меры 0. Поэтому вопросы о свойствах траекторий стохастического интеграла фактически не имеют смысла: мы не можем спрашивать, является ли сам интеграл непрерывным, или имеет ли он пределы справа и слева — а можем лишь спрашивать, существует ли представитель этого интеграла с такими свойствами. С другой стороны, нестандартное определение, согласно лемме 4.4.8, задает интеграл с точностью до «неразличимости». Это значит, что если  $\left( \int X dM \right)^+$  и  $\left( \int Y dM \right)^+$  — две версии интеграла, то существует такое множество нулевой меры, вне которого эти две версии совпадают при всех  $t$ . Поэтому в данном случае вопросы о свойствах траекторий имеют смысл, и приятно отметить, что представители, выделяемые нестандартным определением, кажется, всегда имеют наилучшие возможные свойства (см., например, предложение 4.2.15).

### С. Квадратическая вариация и лемма Ито

Поскольку квадратическая вариация внутреннего мартингала оказалась таким полезным инструментом, возможно, интересно взглянуть на соответствующее стандартное понятие. Пусть процесс  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  является  $L^2$ -мартингалом. Если  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1\}$  — разбиение отрезка  $[0, 1]$  обозначим через  $\delta(\pi) = \max_{0 \leq i < n} (t_{i+1} - t_i)$  его размер. Если дана последовательность разбиений  $\{\pi_m\} = \{0 = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{n_m}^m = 1\}$ , причем  $\delta(\pi_m) \rightarrow 0$ , то естественно определить *квадратическую вариацию*  $[N]$  мартингала  $N$  с помощью формулы

$$(10) \quad [N](t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_m-1} (N(t_{i+1}^m \wedge t) - N(t_i^m \wedge t))^2,$$

где предел рассматривается в смысле  $L^1$ . Возникают два вопроса: первый — существует ли предел, не зависящий от последовательности  $\{\pi_m\}$ ; второй — верно ли, что

$$(11) \quad [^\circ M^+] = {}^\circ [M]^+$$

для любого внутреннего  $SL^2$ -мартингала  $M$ . В стандартной теории вероятностей дан положительный ответ на первый вопрос: квадратическая вариация существует и может быть определена формулой (10) (см., например, Metivier, Pellaumail [1], Meyer [1]). Второй вопрос в том виде, в каком мы его задали, имеет отрицательный ответ: существуют такие  $SL^2$ -мартингалы, для которых формула (11) неверна; пример приведен в работе Hoover, Perkins [1]. Мы, однако, выделим такой класс  $SL^2$ -мартингалов, для которых формула (11) верна.

**4.4.10. Определение.** Назовем внутренней функцию  $f: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  *спокойной*, если для любого  $t \in [0, 1]$  найдется такое  $\tilde{t} \in T$ ,  $\tilde{t} \approx t$ , что для всех  $s \in T$ ,  $s \approx \tilde{t}$ ,  $s \leq \tilde{t}$  справедливо

$$f(s) \approx f(\tilde{t}),$$

а для всех  $s \in T$ ,  $s \approx \tilde{t}$ ,  $s > \tilde{t}$  справедливо

$$f(s) \approx f(\tilde{t}^+),$$

где  $\tilde{t}^+$  — следующий за  $\tilde{t}$  элемент множества  $T$ . Процесс называется *спокойным*, если почти все его траектории спокойны.

**Замечание.** Спокойный процесс — это просто процесс, который не делает более одного скачка за бесконечно малое время. Неудобоваримый термин «спокойный»<sup>1)</sup> был введен Линдстрёмом в работе Lindström [1], поскольку он не смог придумать ничего лучшего. К сожалению, терминология работы Hoover, Perkins [1] вряд ли является усовершенствованием: спокойный процесс называется у них SDJ-процессом (хотя в их ситуации такое обозначение имеет некоторый смысл). Мы будем продолжать пользоваться худшей из возможностей — термином «спокойный» — в надежде, что сама его неуклюжесть заставит кого-нибудь придумать лучшее наименование.

Чтобы доказать, что  $[^\circ M^+] = {}^\circ [M]^+$  для всех спокойных  $SL^2$ -мартингалов, нам понадобится следующая лемма.

**4.4.11. Лемма.** Пусть  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — спокойный  $SL^2$ -мартингал. Если  $S$  — гиперконечная подось оси  $T$  и  $M^S$  — ограничение

<sup>1)</sup> В оригинале — «well-behaved», т. е. «хорошо себя ведущий». — Прим. перев.

мартингала  $M$  на ось  $S$ , то

$$(12) \quad [M](s) \approx [M^S](s) \text{ п. н.}$$

для всех  $s \in S$ .

*Доказательство.* Пусть  $\tau_n(\omega) = \inf\{t \in T \mid |M(\omega, t)| \geq n\}$ . Поскольку  $M_{\tau_n} \in SL^2(M_{\tau_n})$  и для почти всех  $\omega$  мы имеем  $\tau_n(\omega) = 1$  при достаточно большом  $n \in \mathbb{N}$ , достаточно доказать лемму для  $M \in SL^2(M)$ .

Согласно лемме 4.2.5,

$$(13) \quad [M](t) = M(t)^2 - M(0)^2 - 2 \int_0^t M dM$$

и

$$(14) \quad [M^S](t) = M^S(t)^2 - M(0)^2 - 2 \int_0^t M^S dM^S.$$

Заметим, что  $\int_0^t M^S dM^S = \int_0^t \tilde{M}^S dM$ , где мартингал  $\tilde{M}^S: \Omega \times \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  определяется так:  $\tilde{M}^S(\omega, t) = M^S(\omega, s)$  для наибольшего  $s \in T$ , меньшего, чем  $t$ . Поскольку мартингал  $M$  спокойный, то и  $M^S$ , и  $\tilde{M}^S$  оба являются 2-поднятиями левой стандартной части  ${}^\circ M^-$  мартингала  $M$ , и поэтому

$$(15) \quad \int_0^t M dM \approx \int_0^t \tilde{M}^S dM = \int_0^t M^S dM^S \text{ п. н.}$$

в соответствии с леммой 4.4.8. Подставляя соотношения (15) в формулы (13) и (14), получаем утверждение леммы.  $\square$

Читатель может удивиться тому, что приведенное доказательство является настолько окольным. Почему мы пользуемся леммой 4.2.5, чтобы свести задачу к некоему вопросу о стохастических интегралах, а не пытаемся решить ее напрямую — через определение квадратической вариации? Ответ прост — мы не знаем более прямого доказательства. И использованный выше трюк применяется в обеих работах: Hoover, Perkins [1] и Lindström [2].

**4.4.12. Предложение.** Если  $M$  — спокойный  $S$ -непрерывный в нуле  $SL^2$ -мартингал, то квадратическая вариация  $[{}^\circ M^+]$  существует и равна  ${}^\circ[M]^+$ . Более того,

$$(16) \quad [{}^\circ M^+](t) = {}^\circ M^+(t)^2 - {}^\circ M^+(0)^2 - 2 \int_0^t {}^\circ M^- d({}^\circ M^+).$$



Прежде чем давать доказательство, поясним, как интерпретировать стохастический интеграл в формуле (16). Трудность в том, что процесс  ${}^{\circ}M^-$  может не принадлежать классу  $L^2(\mathfrak{v}_{\circ}M^+)$ , и потому этот интеграл не подпадает под определение, данное в начале этого параграфа. Решение, однако, просто: положим  $\int {}^{\circ}M^- d({}^{\circ}M^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int {}^{\circ}M_{\sigma_n}^- d({}^{\circ}M^+)$ , где  $\{\sigma_n\}$  — такая возрастающая стремящаяся к 1 последовательность марковских моментов, что  ${}^{\circ}M_{\sigma_n}^- \in L^2(\mathfrak{v}_{\circ}M^+)$  при каждом  $n$ .

Чтобы доказать рассматриваемое предложение, зафиксируем  $t \in [0, 1]$  и выберем  $\tilde{t} \in T$ ,  $\tilde{t} \approx t$  столь большим, чтобы с вероятностью 1 выполнялось равенство  ${}^{\circ}M(\tilde{t}) = {}^{\circ}M^+(t)$ . Имея последовательность  $\{\pi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  разбиений отрезка  $[0, 1]$  с максимальным шагом разбиения, стремящимся к нулю, построим последовательность  $\{\tilde{\pi}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  внутренних разбиений множества  $T$ , выбрав для каждого  $t_i^m \in \pi_m$  такое  $\tilde{t}_i^m \in T$ ,  $\tilde{t}_i^m \approx t_i^m$ , что  ${}^{\circ}M(\tilde{t}_i^m) = {}^{\circ}M^+(t_i^m)$ . Продолжим последовательность  $\{\tilde{\pi}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  до внутренней последовательности  $\{\tilde{\pi}_m\}_{m \in {}^*\mathbb{N}}$ . Тогда для каждого  $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , согласно лемме 4.4.11, мы получим

$$E \left( \left| [M](\tilde{t}) - \sum_{i=0}^{n_m-1} (M(\tilde{t}_{i+1}^m \wedge \tilde{t}) - M(\tilde{t}_i^m \wedge \tilde{t}))^2 \right| \right) \approx 0,$$

откуда следует первая часть предложения.

Чтобы доказать формулу (16), положим  $\tau_n(\omega) = \min \{t \in T \mid |M(\omega, t)| \geq n\}$  и  $\sigma_n = {}^{\circ}\tau_n$ . Тогда процесс  $M_{\tau_n} \in SL^2(M_{\tau_n})$  является 2-поднятием процесса  ${}^{\circ}M_{\sigma_n}^-$ , так что

$$\int {}^{\circ}M_{\sigma_n}^- d({}^{\circ}M^+) = {}^{\circ} \left( \int M_{\tau_n} dM_{\tau_n} \right)^+.$$

Отсюда, а также из равенства

$$[M_{\tau_n}](\tilde{t}) = M_{\tau_n}^2(\tilde{t}) - M_{\tau_n}^2(0) - 2 \int_0^{\tilde{t}} M_{\tau_n} dM_{\tau_n},$$

если устремить  $n$  к бесконечности, следует формула (16).  $\square$

Нетрудно догадаться, почему предложение 4.4.12 неверно для произвольных  $SL^2$ -мартингалов: если мартингал  $M$  — неспокойный, у него будут такие прыжки в течение бесконечно малого времени, которые будут «подсчитываться» процессом  $[M]$ , но будут пропускаться процессом  $[{}^{\circ}M^+]$ . Но несмотря на это ограничение, предложение все равно полезно, как видно из следующего факта: если  $X$  — внутренний процесс, имеющий

левые и правые  $S$ -пределы, то существует такая подось  $S \subset T$ , что ограничение  $X^S$  процесса  $X$  на ось  $S$  спокойно. Таким образом, мы всегда можем предполагать наш процесс спокойным, ограничив его, если это необходимо, на более грубую ось времени. Мы не будем доказывать упомянутый факт, поскольку доказательства легко найти в работах Hoover, Perkins [1], Stroyan, Bayod [1] Lindström [2]. Однако нам хотелось бы отметить следующее наблюдение, впервые сделанное Гувером и Перкинсом: если  $N$  — правая стандартная часть некоего  $SL^2$ -мартингала  $M$ , то  $N$  всегда можно выбрать спокойным, так что предложение 4.4.12 устанавливает существование квадратической вариации  $[N]$  и справедливость формулы (16) для всех таких процессов. В качестве применения предложения 4.4.12 докажем следующее обобщение леммы Ито.

**4.4.13. Предложение.** Пусть  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — правая стандартная часть некоторого  $S$ -непрерывного  $SL^2$ -мартингала  $M$ . Если функция  $\varphi: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  дважды непрерывно дифференцируема по первой переменной и один раз по второй, то

$$(17) \quad \varphi(N_t, t) - \varphi(N_0, 0) = \\ = \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(N_s, s) ds + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(N_s, s) dN_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(N_s, s) d[N]_s.$$

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} & \varphi(M_t, t) - \varphi(M_0, 0) = \\ &= \sum_{s=0}^t \{ \varphi(M_{s+\Delta t}, s + \Delta t) - \varphi(M_{s+\Delta t}, s) + \varphi(M_{s+\Delta t}, s) - \varphi(M_s, s) \} \approx \\ &\approx \sum_{s=0}^t \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(M_{s+\Delta t}, s) \Delta t + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_s, s) \Delta M_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(M_s, s) \Delta M_s^2 \right\} \approx \\ &\approx \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(M_s, s) ds + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_s, s) dM + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(M_s, s) d[M]. \end{aligned}$$

Каждое из трех получившихся слагаемых бесконечно близко к соответствующему слагаемому в правой части формулы (17); для последнего слагаемого это следует из того, что  $[N] = [M^+]$ .  $\square$

Имеется также и вариант леммы Ито для разрывных мартингалов, но она в этом случае выглядит более громоздко, так как приходится прибавлять отдельно каждое слагаемое, отве-

чающее скачку (см. нестандартное изложение в работе Lindstrøm [1]). Непрерывный случай достаточен для наших целей в этой книге.

Закончим наше обсуждение спокойных мартингалов на «осторожной ноте»: класс «спокойных» мартингалов не замкнут относительно стохастического интегрирования. Если  $M$  — спокойный мартингал, а  $X$  — поднятие, то мартингал  $\int X dM$  спокоен; но для произвольного  $X \in SL^2(M)$  это, вообще говоря, неверно (см. Lindstrøm [2]). Однако, в работе Hoover, Perkins [1] показано, что всегда найдется такая подось  $S \subset T$ , что ограничение на нее как самого мартингала, так и всех интегралов по нему спокойно.

#### *Д. Дальнейшие замечания о нестандартных представлениях*

Мы показали, что стандартная теория стохастического интегрирования по правой стандартной части  ${}^{\circ}M^+$  внутреннего мартингала  $M$  может быть сведена к нестандартной теории стохастического интегрирования по самому мартингалу  $M$ . Но утверждать на этом основании, что вообще вся стандартная теория стохастического интегрирования сводится к нестандартной теории, было бы пока преждевременно. А как обстоят дела с мартингалами, которые не являются стандартными частями внутренних мартингалов? Вот, например, предложение 4.4.13: действительно ли необходима такая неуклюжая формулировка « $N$  является правой стандартной частью  $S$ -непрерывного мартингала», или достаточно предположить, что сам процесс  $N$  является непрерывным мартингалом? В этом разделе мы вкратце остановимся на этом вопросе и некоторых с ним связанных. Читатель, которого не волнуют такие тонкости и который считает, что лучшей проверкой пудинга является вкус, а не тщательное изучение рецепта, может пропустить это обсуждение и дать возможность тем применениям, которые изложены в следующих параграфах, убедить его, что нестандартная теория достаточно богата, чтобы быть пригодной для любых практических целей.

С помощью аргументов, основанных на принципе насыщения, легко показать, что если  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — внутреннее вероятностное пространство, и  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — мартингал относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{E}_t\}, L(P))$ , то  $N$  является стандартной частью некоторого внутреннего мартингала в следующем смысле. Существует такая внутренняя фильтрация  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$  и такой согласованный с ней внутренний мартингал  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , что  $N = {}^{\circ}M^+$ . Более того,  $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{B}_t$ , где  $\mathcal{B}_t$  — стандартная фильтрация, порожденная фильтрацией  $\{\mathcal{A}_t\}$ . Тем самым получен ответ относительно предложения 4.4.13: достаточно предположить что  $N$  — непрерывный мартингал.

Но не все процессы живут на пространстве Лёба; если  $N: \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — мартингал относительно какой-то фильтрации  $(\Sigma, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$ , что делать тогда? Оказывается, что мартингал  $N$  может быть представлен с помощью мартингала  $N^\Theta$ , согласованного с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{G}_t\}, L(P))$  на пространстве Лёба, через посредство сохраняющего меру булевского  $\sigma$ -гомоморфизма  $\Theta$ , отображающего измеримые по Лёбу множества в  $Q$ -измеримые множества. Как уже указывалось,  $N^\Theta$  является правой стандартной частью некоторого внутреннего мартингала  $M$ , и с помощью отображения  $\Theta$  все стохастические интегралы по мартингалу  $N$  могут быть интерпретированы как нестандартные интегралы по мартингалу  $M$  (подробности см. в работе Lindström [3]). Хотя эта процедура и завершает сведение стандартной теории к нестандартной, она не представляется особенно важной. Причина в том, что специалисты в теории вероятностей обычно не заботятся о том, на каком вероятностном пространстве они работают — лишь бы оно было достаточно «богатым», чтобы на нем могли быть построены все изучаемые явления. В работах Keisler [4], [5] и Hoover, Keisler [1] показано, что в этом отношении пространство Лёба чрезвычайно богато; что происходит на каком-либо вероятностном пространстве, происходит также и на пространстве Лёба. Из этого свойства универсальности следует, что мы можем не заботиться о других пространствах; всегда можно считать, что мы работаем на пространстве Лёба. Для получения своих результатов Гувер и Кейслер используют понятие элементарной эквивалентности, заимствованное из вероятностной логики; оно дает гораздо более тонкую классификацию процессов, чем привычные классификации в теории вероятностей. Для читателя, имеющего некоторую подготовку в логике, упомянем, что пространства Лёба играют в теории вероятностей роль, во многом схожую с ролью насыщенных моделей в теории моделей первого порядка. Дополнительную информацию о вероятностной логике можно найти в работах Keisler [2], [5], Hoover [1], [2], [5], Rodenhausen [1], Fajardo [1], [2], Ross [3].

#### *Е. Стандартные представления нестандартных стохастических интегралов*

Если стандартные стохастические интегралы можно получить из гиперконечных, то естественно спросить, верно ли обратное: если  $X \in SL^2(M)$ , можно ли найти стандартный процесс  $N$ , как-то связанный с  $M$ , и такой процесс  $x \in L^2(v_N)$ , что  $\int x dN = {}^\circ(\int X dM)^+$ ? В оставшейся части этого параграфа мы обсудим различные формулировки этой задачи. Следующий пример

показывает, что если мы настаиваем на соотношении  $N = {}^\circ M^+$ , то ответ отрицателен.

**4.4.14. Пример.** Мы находимся в ситуации § 4.1:  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$ , и  $B: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — андерсоновское случайное блуждание. Пусть процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  задан формулой

$$X(\omega, k\Delta t) = (-1)^k;$$

очевидно,  $X \in SL^2(B)$ . Мы покажем, что если  $b = {}^\circ B^+$  и  $x \in L^2(\nu_b)$ , то  $\int x dB \neq {}^\circ \left( \int X dB \right)^+$ .

Пусть  $Y$  — это 2-поднятие процесса  $x$ ; можно предположить, что  $Y(\omega, 2k \cdot \Delta t) = Y(\omega, (2k+1)\Delta t)$  для всех  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} E \left( \left( {}^\circ \left( \int X dB \right)^+ - \int x dB \right)^2 \right) &= {}^\circ E \left( \left( \int_0^1 X dB - \int_0^1 Y dB \right)^2 \right) = \\ &= E \left( \sum_0^1 (X - Y)^2 \Delta t \right). \end{aligned}$$

Последняя величина принимает наименьшее значение, когда  $Y \equiv 0$ ; поэтому

$$E \left( \left( {}^\circ \left( \int X dB \right)^+ - \int x dB \right)^2 \right) \geq 1$$

для всех процессов  $x \in L^2(\nu_b)$ .

Роденхаузен заметил, что с помощью того же вычисления можно доказать следующее предложение:

**4.4.15. Предложение.** Пусть  $M$  —  $S$ -непрерывный справа в нуле  $SL^2$ -мартингал и  $X \in SL^2(M)$ . Если процесс  $x \in L^2(\nu_{M^+})$  таков, что  $\int x d({}^\circ M^+) = {}^\circ \left( \int X dM \right)^+$ , то  $X$  является 2-поднятием процесса  $x$ .

*Доказательство.* Пусть  $Y$  — 2-поднятие процесса  $x$ ; тогда  $\int_0^1 X dM = \int_0^1 Y dM$  почти наверное. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times T} (X - Y)^2 d\nu_M &= E \left( \sum_0^1 (X - Y)^2 \Delta M^2 \right) = E \left( \left[ \int (X - Y) dM \right] (1) \right) = \\ &= E \left( \left( \left( \int X dM \right) (1) - \left( \int Y dM \right) (1) \right)^2 \right) \approx 0. \end{aligned}$$

Значит, не только  $Y$ , но и  $X$  является 2-поднятием процесса  $x$ ; предложение доказано.  $\square$

Приведенный пример, а также предложение показывают, что класс гиперконечных стохастических интегралов по внутреннему

мартингалу  $M$  гораздо шире, чем класс стандартных стохастических интегралов по мартингалу  ${}^{\circ}M^{+}$ . Прежде чем продолжить исследование этого дополнительного «богатства», прислушаемся к голосу осторожности и сформулируем следующее предложение.

**4.4.16. Предложение.** Пусть  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  —  $S$ -непрерывный справа в нуле  $SL^2$ -мартингал, и пусть  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — такой  $L^2$ -мартингал, что для любой гиперконечной подоси времени  $S \subset T$  найдется такой процесс  $X^S \in SL^2(M^S)$ , что  $N = {}^{\circ}(\int X^S dM^S)^{+}$ . Тогда существует такой процесс  $x \in L^2({}^{\circ}v_{M^{+}})$ , что  $N = \int x d({}^{\circ}M^{+})$ .

Доказательство несложно, и мы оставляем его читателю. Предложение 4.4.16 можно проинтерпретировать следующим образом: если мы используем процесс  $M$  только лишь как одно из возможных представлений своей стандартной части, дополнительные возможности гиперконечного стохастического интегрирования могут оказаться не очень полезными, поскольку они зависят только от представления, но не от исходного процесса. Однако правильность подобной интерпретации не вполне очевидна, поскольку для гиперконечного представления мы получаем гораздо более богатый класс стохастических интегралов, когда допускаем в качестве подынтегральных процессов не только поднятия; может быть, как раз это дополнительное богатство, а не представление некоторых конкретных процессов в виде стохастических интегралов, и является наиболее важным.

Возвращаясь к исходному вопросу, мы видим, что если  $N = {}^{\circ}M^{+}$ , то нет шансов всегда найти такой процесс  $x$ , что  $\int x dN = {}^{\circ}(\int X dM)^{+}$ . Тогда зададим другой вопрос: что получится, если мы ослабим условия на связь между  $N$  и  $M$ ? Мы ответим на этот вопрос для случая броуновского движения. С этого момента мы работаем в обстановке § 4.1, так что  $\Omega, P, \{\mathcal{A}_t\}, \{\mathcal{B}_t\}$  и  $B$  — такие же, как в § 4.1. Наша цель — доказать следующую теорему.

**4.4.17. Теорема.** Пусть  $B$  — андерсоновское случайное блуждание, и  $X \in SL^2(B)$ . Тогда существуют такое броуновское движение  $\beta$  и такой согласованный процесс  $x \in L^2(\Omega \times [0, 1])$ , что

$$\int x d\beta = {}^{\circ}(\int X dB)^{+}.$$

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем несколько замечаний. Если процесс  $X$  не является поднятием, то из предложения 4.4.15 следует, что  $\beta \neq {}^{\circ}B^{+}$ . Естественным обобщением теоремы 4.4.17 было бы утверждение, что если заданы  $SL^2$ -мар-

тингал  $M$  и процесс  $X \in SL^2(M)$ , то всегда существуют такой  $L^2$ -мартингал  $N$ , имеющий те же конечномерные распределения, что и  ${}^\circ M^+$ , и такой процесс  $x \in L^2(v_N)$ , что

$$\int x dN = \left( \int X dM \right)^+.$$

Оказывается, однако, что это утверждение ложно, даже если предположить, что мартингал  $M$   $S$ -непрерывен (см. пример в работе Lindström [7]). С другой стороны, обобщение теоремы 4.4.17 на  $n$ -мерное броуновское движение оказывается справедливым, причем доказательство в своей основе то же самое, что и приведенное ниже доказательство для одномерного случая (см. Lindström [7]).

Условимся под броуновским движением  $\beta$ , согласованным с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ , понимать такой непрерывный мартингал относительно этой фильтрации, что для всех  $t > s$  случайная величина  $\beta(t) - \beta(s)$  независима от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_s$  и имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $t - s$ .

Для доказательства теоремы 4.4.17 нам потребуется результат, помогающий распознавать броуновские движения. Следующее предложение — это стандартный результат (Lévy [1]) в нестандартном обличье.

**4.4.18. Предложение.** Пусть  $M: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — такой  $S$ -непрерывный  $SL^2$ -мартингал, что  $E({}^\circ[M]^+(t) - {}^\circ[M]^+(s) | \mathcal{B}_s) = t - s$  при всех  $t > s$ . Тогда процесс  ${}^\circ M^+$  есть броуновское движение, согласованное с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{B}_s\}, L(P))$ .

*Доказательство.* Применяя лемму Ито к мартингалу  $M$  и функции  $\varphi(x) = e^{iyx}$ , получаем

$$\begin{aligned} \exp(iy(M_t - M_s)) &\approx 1 + iy \int_s^t \exp(iy(M_r - M_s)) dM_r - \\ &- \frac{y^2}{2} \int_s^t \exp(iy(M_r - M_s)) d[M]_r. \end{aligned}$$

Пусть  $A \in \mathcal{B}_s$ . Возьмем от обеих частей полученного равенства стандартную часть, домножим на случайную величину  $I_A$  и возьмем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} &\int_A \exp(iy({}^\circ M_t^+ - {}^\circ M_s^+)) dL(P) = \\ &= L(P)(A) - \frac{y^2}{2} \int_s^t \int_A \exp(iy({}^\circ M_r^+ - {}^\circ M_s^+)) dL(P) dr. \end{aligned}$$

Мы получим интегральное уравнение вида

$$f(t) = L(P)(A) - \frac{y^2}{2} \int_s^t f(r) dr.$$

Известно, что его единственным решением является функция  $f(t) = L(P)(A) \cdot \exp\left\{-L(P)(A) \cdot (t-s) \cdot \frac{y^2}{2}\right\}$ , т. е. умноженная на  $L(P)(A)$  характеристическая функция гауссовской случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $L(P)(A)(t-s)$ ; значит, именно такое распределение будет у ограничения на множество  $A \subset \Omega$  случайной величины  ${}^\circ M^+(t) - {}^\circ M^+(s)$ . Предложение доказано.  $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 4.4.17. Пусть

$$M = \int X dB.$$

Заметим, что, поскольку  $[M] = \int X^2 dt$ , стандартная часть  ${}^\circ[M]^+$  не убывает и абсолютно непрерывна. Следовательно, производная

$$\dot{f}(\omega, t) = \frac{d}{dt} {}^\circ[M]^+(t) = \lim_{h \searrow 0} \frac{{}^\circ[M]^+(t) - {}^\circ[M]^+(t-h)}{h}$$

существует, неотрицательна и согласована, причем

$$(18) \quad {}^\circ[M]^+(\omega, t) = \int_0^t \dot{f}(\omega, s) ds \text{ п. н.}$$

Определим новый согласованный процесс  $g$  по формуле

$$g(\omega, t) = \begin{cases} (f(\omega, t))^{-1/2}, & \text{если } f(\omega, t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

обозначим  $I_g$  характеристическую функцию множества  $\{(\omega, t) \mid g(\omega, t) = 0\}$ . Согласно формуле (18)

$$E \left( \int_0^1 g(\omega, s)^2 d^\circ[M]^+ \right) = E \left( \int_0^1 g(\omega, s)^2 \dot{f}(\omega, s) ds \right) \leq 1,$$

так что  $g \in L^2(v_{[M]^+})$ . Пусть  $G \in SL^2(M)$  — 2-поднятие процесса  $g$ , а  $I_G$  — поднятие функции  $I_g$ . Можно считать, что  $G \cdot I_G = 0$ . Определим

$$(19) \quad \beta(\omega, t) = \left( \int_0^t G(\omega, s) dM(\omega, s) + \int_0^t I_G(\omega, s) dB(\omega, s) \right)^+.$$



Поскольку функции  $G$  и  $I_G$  имеют непересекающиеся носители, имеем

$$\begin{aligned} [\beta](\omega, t) &= \left[ \int G dM \right]^+(\omega, t) + \left[ \int I_G dB \right]^+(\omega, t) = \\ &= \left( \int G^2 d[M] \right)^+(\omega, t) + \left[ \int I_G dB \right]^+(\omega, t) = \\ &= \int_0^t g^2 f ds + \int_0^t I_g^2 ds = \int_0^t 1 ds = t, \end{aligned}$$

так что, согласно предложению 4.4.18,  $\beta$  является броуновским движением, согласованным с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{B}_s\}, L(P))$ .

Формула (18) показывает в частности, что  $f^{1/2} \in L^2(\nu_\beta)$ , причем

$$\int f^{1/2} d\beta = \int f^{1/2} g d({}^\circ M^+) + \int f^{1/2} I_g d({}^\circ B^+) = \int f^{1/2} g d({}^\circ M^+),$$

поскольку  $f^{1/2} \cdot I_g = 0$ . Осталось только доказать, что  ${}^\circ M^+ = \int f^{1/2} g d({}^\circ M^+)$ . Тогда, положив  $x = f^{1/2}$ , мы получим утверждение теоремы 4.4.17. Пользуясь неравенством Дуба, получаем

$$\begin{aligned} E \left( \sup_{q \leq 1} \left( {}^\circ M^+(q) - \int_0^q f^{1/2} g d({}^\circ M^+) \right)^2 \right) &\leq \\ &\leq 4E \left( \left( {}^\circ M^+(1) - \int_0^1 f^{1/2} g d({}^\circ M^+) \right)^2 \right) = \\ &= 4E \left( \int_0^1 (1 - f^{1/2} g)^2 d({}^\circ M^+) \right) = 4E \left( \int_0^1 (1 - f^{1/2} g)^2 f dt \right) = 0, \end{aligned}$$

так как  $f^{1/2} g = 1$  при  $f \neq 0$ . Теорема доказана.  $\square$

Доказательство не ново; такая техника установления того, что процессы являются интегралами по броуновскому движению, восходит к Дубу. Один из путей использования теоремы 4.4.17 состоит в следующем. Пусть мы знаем, что некоторое свойство справедливо для всех стандартных интегралов по броуновскому движению. Априори нет никаких оснований полагать, что это свойство будет также справедливо и для всех гиперконечных интегралов; но по теореме 4.4.17 все такие интегралы сводятся к стандартным, что позволяет установить это свойство и для них.

Однако теорема 4.4.17 не дает настоящей стандартной характеристики нестандартных интегралов, так как она ничего не говорит нам о том, какие броуновские движения  $\beta$  являются

допустимыми. Ответ на этот вопрос дается в работе Lindström [9]; мы вкратце изложим основной результат.

*Абсолютной взаимной вариацией* двух внутренних процессов  $M_1$  и  $M_2$  называется величина

$$(20) \quad \llbracket M_1, M_2 \rrbracket(\omega, t) = \sum_{s=0}^t \varepsilon(\omega, s) \Delta M_1(\omega, s) \Delta M_2(\omega, s),$$

где  $\varepsilon(\omega, s) = \operatorname{sgn} E(\Delta M_1(s) \Delta M_2(s) | \mathcal{A}_s)(\omega)$ . Будем говорить, что  $M_1$  и  $M_2$  *абсолютно ортогональны*, если  $\llbracket M_1, M_2 \rrbracket(1) \approx 0$  почти наверное. Если процесс  $M_2$  абсолютно ортогонален всем  $\mathcal{S}$ -непрерывным  $SL^2$ -мартингалам, ортогональным к  $M_1$ , будем говорить, что  $M_2$  лежит в *абсолютной оболочке* процесса  $M_1$ .

**4.4.19. Предложение.** Пусть  $N$  —  $\mathcal{S}$ -непрерывный  $SL^2$ -мартингал, и  $N(0) = 0$ . Представление  $N = \int X dB$  для некоторого  $X \in SL^2(B)$  существует тогда и только тогда, когда  $N$  лежит в абсолютной оболочке процесса  $B$ .

Нестандартный результат имеет свой стандартный аналог, который обобщает формулу (10). Если  $M, N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — два непрерывных  $L^2$ -мартингала, и  $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$  — разбиение отрезка  $[0, 1]$ , положим

$$(21) \quad \llbracket M, N \rrbracket_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_\pi(\omega, t_i) (M(t_{i+1}) - M(t_i)) (N(t_{i+1}) - N(t_i)),$$

где

$$\varepsilon_\pi(\omega, t_i) = \operatorname{sgn} E((M(t_{i+1}) - M(t_i)) (N(t_{i+1}) - N(t_i)) | \mathcal{F}_{t_i})(\omega).$$

Определяем абсолютную взаимную вариацию процессов  $M$  и  $N$  по формуле

$$(22) \quad \llbracket M, N \rrbracket = \lim_{n \rightarrow \infty} \llbracket M, N \rrbracket_{\pi_n},$$

где  $\{\pi_n\}$  — такая последовательность разбиений, что  $\delta(\pi_n) \rightarrow 0$ . Здесь нужна лемма, утверждающая, что величина  $\llbracket M, N \rrbracket$  корректно определена по крайней мере для всех непрерывных  $L^2$ -мартингалов относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, L(P))$ . Имеется также и соответствующее стандартное понятие *абсолютной оболочки*.

**4.4.20. Теорема.** Пусть  $B: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — андерсоновское случайное блуждание. Процесс  $N: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид  $N = {}^\circ \left( \int X dB \right)^+$  для некоторого  $X \in SL^2(B)$  тогда и только тогда, когда существует такое броуновское движение  $\beta$  в абсолютной

оболочке процесса  ${}^\circ B^+$ , и такой согласованный процесс  $x \in \in L^2(\Omega \times [0, 1])$ , что  $N = \int x d\beta$ .

Результаты первой половины этого параграфа заимствованы (в измененной форме) из работ Lindstrøm [2] и Hoover, Perkins [1], а характер изложения очень похож на то, что делается в работах Anderson [1] и Keisler [4] для броуновского движения. Теорема 4.4.17 заимствована из работы Lindstrøm [7], а два последних результата — из работы Lindstrøm [9].

#### 4.5. Стохастические дифференциальные уравнения

Мы закончили обзор основных понятий гиперконечной теории стохастического интегрирования и ее связей со стандартной теорией. В оставшихся параграфах этой главы мы рассмотрим различные применения и обобщения нашей теории, пытаясь продемонстрировать на примерах то, что мы пока только заявляли — а именно, силу и гибкость нестандартного подхода.

##### А. Уравнения Ито с непрерывными коэффициентами

В этом параграфе мы обсудим вопросы существования решений стохастических дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad x(\omega, t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db(\omega, s),$$

где  $b$  —  $n$ -мерное броуновское движение, определенное на подходящем пространстве Лёба, а  $f$  и  $g$  — функции

$$(2) \quad f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,$$

где  $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  — пространство действительных  $n \times n$ -матриц.

Прежде всего мы должны объяснить, что все это значит. До сих пор мы ограничили наше обсуждение действительнзначными процессами, так как многомерная теория стохастического интегрирования является тривиальным обобщением одномерной теории. Однако для стохастических дифференциальных уравнений ситуация совершенно иная; здесь многомерная теория гораздо сложнее, и одномерная техника часто не обобщается на общий случай. Чтобы показать силу и применимость нашего подхода, мы должны работать в многомерной ситуации.

Пусть  $T = \{0, 1/\eta, 2/\eta, \dots, 1\}$  — гиперконечная ось времени. Нашим пространством элементарных событий будет множество  $\Omega = \{-1, 1\}^{T \times \{1, 2, \dots, H\}}$ , т. е. множество всех внутренних функций из  $T \times \{1, 2, \dots, H\}$  в  $\{-1, 1\}$ , где  $H \in {}^*\mathbb{N}$ ,  $H \geq n$ . Для  $\omega \in \Omega$  мы часто будем писать  $\omega_i(t)$  вместо  $\omega(t, i)$ .

Пусть  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  — естественный базис в  $\mathbb{R}^n$ ; определим  $n$ -мерный андерсоновский процесс по формуле

$$(3) \quad B(\omega, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^t \frac{\omega_i(s)}{\sqrt{\eta}} e_i.$$

Заметим, что  $B$  состоит из  $n$  независимых случайных блужданий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , движущихся в ортогональных направлениях. Стандартная часть процесса  $B$  является  $n$ -мерным броуновским движением относительно меры Лёба  $L(P)$ , отвечающей нормированной считающей мере  $P$ .

Так же как в § 4.1, внутренняя фильтрация  $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$  определяется в терминах классов эквивалентности

$$[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega \mid \forall s < t \quad \forall i \leq H \quad (\omega_i(s) = \omega'_i(s))\};$$

стандартная фильтрация  $\{\mathcal{B}_t\}_{t \in [0, 1]}$  порождается фильтрацией  $\{\mathcal{A}_t\}$  обычным образом.

Для  $i, j \leq n$  пусть  $X_{ij}$  — неупреждающий процесс, квадратично  $S$ -интегрируемый по мере  $P \times \lambda$  (где  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ ). В этом случае будем говорить, что процесс  $X(\omega, t) = (X_{ij}(\omega, t))_{i, j \leq n}$  со значениями в  ${}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$  принадлежит классу  $SL^2(B)$ , и определен *стохастический интеграл*

$$(4) \quad \int X dB(\omega, t) = \sum_{s=0}^t X(\omega, s) \cdot \Delta B(\omega, s),$$

где точка  $\cdot$  обозначает умножение матрицы на вектор.

Заметим, что процесс  $\int X dB$  принимает значения в  ${}^*\mathbb{R}^n$ ; его  $i$ -я компонента задается формулой

$$(5) \quad \left( \int X dB \right)_i(\omega, t) = \sum_{j=1}^n \left( \int X_{ij} dB_j \right)(\omega, t).$$

Последняя формула дает определение процесса  $\int X dB$  в терминах одномерных стохастических интегралов; аналогичная формула используется и для определения стандартных стохастических интегралов для многомерных процессов. Благодаря этому сведению все нужные нам теоремы о поднятиях и о представлениях переносятся с одномерного случая на многомерный.

Объяснив, что означает каждая часть формулы (1), определим теперь, что такое решение.

**4.5.1. Определение.** Пусть  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, 1]}, P)$  — фильтрация, и  $b$  — согласованное с ней броуновское движение. *Решением*  $x$

уравнения (1), отвечающим набору  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$ , называется такой согласованный процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $f(s, x(\omega, s))$  принадлежит классу  $L^1(\Omega \times [0, 1])$ ,  $g(s, x(\omega, s))$  принадлежит  $L^2(\Omega \times [0, 1])$  и для всех  $t \in [0, 1]$  равенство (1) выполняется с вероятностью 1.

Теоремы существования решений обычно утверждают, что для всех функций  $f$  из некоторого класса  $F$  и для всех функций  $g$  из некоторого класса  $G$  уравнение (1) имеет решение. Вероятностный жаргон делит такие теоремы на «слабые», «сильные» и «строгие» в соответствии с тем, как зависит набор  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$  от функций  $f$  и  $g$ . Мы будем использовать следующий вариант терминологии (см. Barlow [2], Cutland [1], Keisler [4]).

*Слабые решения.* Для всех  $f \in F$ ,  $g \in G$  существует такой набор  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$  и такой процесс  $x$ , что  $x$  является решением уравнения (1), отвечающим набору  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$ .

*Сильные решения.* Существует такой набор  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$ , что для всех  $f \in F$ ,  $g \in G$  уравнение (1) имеет решение, отвечающее набору  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)$ .

*Строгие решения.* Пусть  $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ ,  $P$  — мера Винера на  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}_t$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная пространством  $C([0, t], \mathbb{R}^n)$ . Пусть  $b(\omega, t) = \omega(t)$ . Для всех  $f \in F$ ,  $g \in G$  уравнение (1) имеет решение, отвечающее набору  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P, b)^1$ .

Заметим, что если уравнение имеет строгое решение, то оно имеет также и решение, отвечающее любому другому броуновскому движению.

То, что мы получаем нестандартными методами — это сильные решения, живущие на гиперконечных пространствах Лёба. Это уже само по себе ценно, поскольку большинство методов в тех случаях, когда условия на  $f$  и  $g$  становятся достаточно общими, дают только слабые решения. Кроме того, гиперконечные пространства Лёба обладают следующим свойством однородности (в оставшейся части этого параграфа, если не оговорено обратное,  $(\Omega, \{\mathcal{A}_s\}, P)$  будет гиперконечным вероятностным пространством того вида, который был описан ранее).

#### 4.5.2. Предложение. Пусть

$$f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

— измеримые функции. Предположим, что существует такое броуновское движение  $b$ , согласованное с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, L(P))$ , что для любого  $\mathcal{F}_0$ -измеримого начального условия  $x_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  уравнение

$$x(\omega, t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db(\omega, s)$$

<sup>1)</sup> Другую терминологию см. в работе Звонкин, Крылов [1\*].—Прим. перев.

имеет решение. Тогда это уравнение имеет решение для любого согласованного с  $\{\mathcal{B}_t\}$  броуновского движения и любого  $\mathcal{B}_0$ -измеримого начального условия.

Этот результат принадлежит Кейслеру (Keisler [4]). Хотя мы не будем его доказывать, он будет использован ниже для того, чтобы распространить результаты с одного броуновского движения на все.

Предложение 4.5.2 показывает, что пространства Лёба вида  $\Omega = \{-1, 1\}^{T \times \{1, \dots, N\}}$  в высшей степени регулярны: если мы можем получить на таком пространстве слабое решение, то автоматически получаем также и сильное решение.

Чтобы продемонстрировать гиперконечный подход к стохастическим дифференциальным уравнениям, взглянем сначала на весьма простое, но типичное доказательство из работы Keisler [4].

**4.5.3. Предложение.** Пусть  $b$  —  $n$ -мерное броуновское движение, согласованное с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{B}_s\}, L(P))$ , и

$$f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

— ограниченные измеримые функции, непрерывные по второй переменной. Пусть  $x_0$  —  $\mathcal{B}_0$ -измеримое начальное условие. Тогда уравнение

$$(6) \quad x(\omega, t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db(\omega, s)$$

имеет решение.

*Доказательство.* Выберем такое  $\theta \approx 0$ ,  $\theta \in T$ , чтобы случайная величина  $x_0$  имела  $\mathcal{A}_0$ -измеримое поднятие  $X$ . Согласно предложению 4.3.13 можно найти такие поднятия  $F: T \times {}^*\mathbb{R}^n \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  и  $G: T \times {}^*\mathbb{R}^n \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$  функций  $f$  и  $g$ , что  $S$ -ограничены и равномерны по второй переменной. Тогда существует такое множество  $T' \subset T$  меры Лёба, что  ${}^\circ F(t, y) = f({}^\circ t, {}^\circ y)$  и  ${}^\circ G(t, y) = g({}^\circ t, {}^\circ y)$  для всех  $t \in T'$  и всех околостандартных  $y$ .

Рассмотрим гиперконечное разностное уравнение

$$(7) \quad X(\omega, t) = X_0(\omega) + \sum_{s=0}^t F(s, X(\omega, s)) \Delta t + \sum_{s=0}^t G(s, X(\omega, s)) \Delta B(\omega, s),$$

где  $B$  — андерсоновское случайное блуждание. Это уравнение, очевидно, имеет единственное неупреждающее решение  $X$ , определяемое индуктивно для всех  $t \geq 0$  (напомним, что по нашему соглашению (4.1.3) сумма  $\sum_{s=0}^t$  фактически является суммой

$\sum_{s=\theta}^{t-\Delta t}$ ). Продолжим процесс  $X$  на все множество  $T$ , полагая  $X(\omega, t) = 0$  при  $t < \theta$ .

Пусть  $x = {}^\circ X^+$ ; покажем, что  $x$  является решением исходного уравнения (6) для броуновского движения  $b = {}^\circ B^+$ ; общее утверждение тогда следует из предложения 4.5.2. Достаточно показать, что процессы  $F(s, X(\omega, s))$  и  $G(s, X(\omega, s))$  служат поднятиями для процессов  $f(s, x(\omega, s))$  и  $g(s, x(\omega, s))$  соответственно, так как в этом случае мы будем иметь

$$\begin{aligned} x({}^\circ t) \approx X(t) &= X_0 + \sum_{s=\theta}^t F(s, X_s) \Delta t + \sum_{s=\theta}^t G(s, X_s) \Delta B_s \approx \\ &\approx x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds + \int_0^t g(s, x_s) db, \end{aligned}$$

и теорема для случая  $b = {}^\circ B^+$  будет доказана.

Чтобы доказать, что  $F(s, X(s, \omega))$  и  $G(s, X(s, \omega))$  — поднятия процессов  $f(s, x(s, \omega))$  и  $g(s, x(s, \omega))$ , заметим, что функции  $F$  и  $G$   $S$ -ограничены; поэтому найдется такое множество  $\Omega' \subset \Omega$  меры Лёба 1, что  $X(\omega, s)$  околостандартно для всех  $s \in T$  и всех  $\omega \in \Omega'$ . Тогда, если  $(\omega, s) \in \Omega' \times T'$ , то

$$(8) \quad {}^\circ F(s, X(\omega, s)) = f({}^\circ s, x(\omega, {}^\circ s)), \quad {}^\circ G(s, X(\omega, s)) = g({}^\circ s, x(\omega, {}^\circ s)),$$

что и требовалось доказать, поскольку множество  $\Omega' \times T'$  имеет, очевидно, меру 1.  $\square$

Более тонкое применение представляет собой теорема 5.14 из работы Keisler [4], к которой мы отсылаем читателя. Доказательство представляет собой чуть более технический вариант только что изложенного, а результатом является новая теорема существования сильных решений. Даже предложение 4.5.3 не столь невинно, как это может показаться из доказательства; Барлоу показал (см. Barlow [2]), что уравнение (6) может не иметь *строгого* решения даже в одномерном случае! (Предупреждение: терминология этой работы слегка отличается от нашей.) Это показатель того, что пространство Лёба более удобно для построения решений стохастических дифференциальных уравнений, чем стандартное пространство траекторий  $C[0, 1]$ .

### В. Уравнения Ито с измеримыми коэффициентами

Приведенные выше рассуждения достаточно типичны. Выбирая подходящие поднятия  $F$  и  $G$  функций  $f$  и  $g$ , мы превращаем уравнение (1) в гиперконечное разностное уравнение (7),

а решение уравнения (1) получается как стандартная часть решения уравнения (7). При этом возникают две технические проблемы: первая — найти подходящие поднятия  $F$  и  $G$ , и вторая — показать, что при этом процессы  $F(s, X(\omega, s))$  и  $G(s, X(\omega, s))$  являются поднятиями процессов  $f(s, x(\omega, s))$  и  $g(s, x(\omega, s))$  соответственно. В доказанной выше теореме обе эти проблемы решались относительно легко, поскольку функции  $f$  и  $g$  были непрерывны по пространственной переменной. Если это не так, обе проблемы становятся гораздо сложнее. Причина в том, что хотя мы и можем выбрать  $F$  и  $G$  такими, чтобы они отличались от  $f$  и  $g$  только на множестве нулевой меры в  $T \times \Omega$ , но процесс может тем не менее находиться в точках этого множества с положительной вероятностью, и это разрушает свойства поднятия. Следуя работе Keisler [4], мы сейчас увидим, как эта трудность может быть разрешена с помощью дополнительного предположения, что матрица  $g$  не вырождается.

Нам потребуется следующее неравенство, принадлежащее Крылову (Крылов [2], [3]):

**4.5.4. Теорема.** Пусть  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — случайный процесс вида

$$x(\omega, t) = x_0 + \int_0^t f(\omega, s) ds + \int_0^t g(\omega, s) db(\omega, s),$$

где  $b$  — броуновское движение, согласованное с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , и

$$f: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

— ограниченные согласованные случайные процессы. Для  $d \in \mathbb{R}_+$  положим

$$\tau_d(\omega) = \inf\{t \in [0, 1] \mid |x(\omega, t)| \geq d\} \wedge 1.$$

Тогда, если даны  $d, K \in \mathbb{R}_+$ , то существует такая константа  $N = N(d, n, K)$ , зависящая только от  $d, K$  и размерности  $n$ , что для всех согласованных процессов  $f$  и  $g$ , ограниченных по модулю константой  $K$ , и для всех функций  $h \in L^{n+1}([0, 1] \times \mathbb{R}^n)$  справедливо неравенство

$$E \left( \int_0^{\tau_d} (\det g(\omega, t))^{2/(n+1)} |h(t, x(\omega, t))| dt \right) \leq N \|h\|_{n+1}.$$

Неравенство Крылова — очень глубокий результат: мы его здесь не доказываем, в частности, потому, что у нас нет на этот счет никакой новой нестандартной идеи. Вместо этого мы от-



сылаем читателя к книге Крылов [3]; наше утверждение является частным случаем его теоремы 2.2.2.

Нам потребуется гиперконечная версия теоремы 4.5.4. Если  $J \in {}^*\mathbb{R}^+$ , функция  $h: {}^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m$  называется  $J$ -липшицевой, если она внутренняя, ограниченная по модулю числом  $J$  и удовлетворяет условию

$$\|h(t, x) - h(s, y)\| \leq J \|(t, x) - (s, y)\|$$

для всех  $(t, x), (s, y) \in {}^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n)$ .

Если  $B$  — андерсоновское случайное блуждание в  ${}^*\mathbb{R}^n$  и  $U: \Omega \times T \rightarrow {}^*(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$  — такой неупреждающий процесс, что  $U(\omega, t)$  — ортогональная матрица при всех  $(\omega, t)$ , то стандартная часть процесса

$$B' = \int U dB$$

тоже будет броуновским движением. Класс всех таких процессов  $B'$  мы обозначим через  $\mathcal{U}(B)$ .

**4.5.5. Предложение.** Пусть  $B: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  — андерсоновское случайное блуждание. Для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $D, K \in \mathbb{R}_+$  существуют такие константы  $N = N(n, D, K) \in \mathbb{R}_+$  и  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что если процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  имеет вид

$$(9) \quad X(\omega, t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s, \omega)) ds + \int_0^t G(s, X(\omega, s)) dB'(\omega, s),$$

где  $X_0 \in {}^*\mathbb{R}^n$ ,  $B' \in \mathcal{U}(B)$  и функции

$$F: {}^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n, \quad G: {}^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$$

$J$ -липшицевы и ограничены по модулю константой  $K$ , то неравенство

$$(10)^\circ \quad E \left( \int_0^{\sigma_D} (\det G(s, X(\omega, s)))^{2/(n+1)} |H(s, X(\omega, s))| ds \right) \leq N^\circ \|H\|_{n+1},$$

где  $\sigma_D = \inf\{t \in T \mid |X(\omega, t)| \geq D\} \wedge 1$ , справедливо для всех  $J$ -липшицевых функций  $H: {}^*([0, 1] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ .

Прежде чем доказывать это предложение заметим, что  $J$  можно выбрать независимо от  $(n, D, K) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . Если можно найти подходящее  $J = J(n, D, K)$  для любой тройки  $(n, D, K)$ , то по принципу насыщения найдется такое  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , которое меньше их всех, и это  $J$  будет пригодно при любом выборе чисел  $n, D$  и  $K$ .

Чтобы доказать наше предложение, сначала рассмотрим случай  $J \in \mathbb{N}$ . Тогда функции  $F$  и  $G$   $S$ -непрерывны, и можно

определить функции  $f$  и  $g$  равенствами

$$f({}^\circ t, {}^\circ x) = {}^\circ F(t, x), \quad g({}^\circ t, {}^\circ x) = {}^\circ G(t, x).$$

Если  $x$  — стандартная часть процесса  $X$ , то

$$(11) \quad x(\omega, t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db'(\omega, s),$$

где  $x_0 = {}^\circ X_0$ , а  $b' = {}^\circ(B')^+$  (если  $X_0$  не является околостандартным, то  $\sigma_D = 0$ , и доказывать нечего).

Применяя теорему 4.5.4 к процессу  $x$  при  $d = D + 1$ , получаем

$$(12) \quad E \left( \int_0^{\tau_d} (\det g(s, x(\omega, s)))^{2/(n+1)} |h(s, x(\omega, s))| ds \right) \leq \\ \leq N(n, d, K) \|h\|_{n+1}.$$

Поскольку при  $J \in \mathbb{N}$  все  $J$ -липшицевы функции  $S$ -непрерывны и  $S$ -ограничены, из формулы (12) следует, что для всех  $J$ -липшицевых функций  $H$

$$(13) \quad E \left( \int_0^{\sigma_D} (\det G(s, X(s, \omega)))^{2/(n+1)} |H(s, X(\omega, s))| ds \right) \leq \\ \leq N(n, D + 1, K) \|H\|_{n+1} + 1/J;$$

слагаемое  $1/J$  мы добавили на тот случай, если в формуле (12) достигается точное равенство.

Рассмотрим теперь внутреннее множество  $A = \{J \in {}^*\mathbb{N} \mid \text{формула (13) справедлива для всех } J\text{-липшицевых функций } F, G, H, \text{ и всех } X_0 \in {}^*\mathbb{R}^d, B' \in \mathcal{U}(B)\}$ . Мы только что показали, что  $A \supset \mathbb{N}$ ; значит, оно содержит бесконечно большое  $J$ , и предложение доказано.  $\square$

Чтобы использовать предложение 4.5.5, нужно знать, как получать  $J$ -липшицевы функции. Пусть  $h: {}^*\mathbb{R}^n \rightarrow {}^*\mathbb{R}^k$  — внутренняя  $S$ -ограниченная функция. Для  $x \in {}^*\mathbb{R}^n$  обозначим через  $[x]^J$  куб с центром в точке  $x$  и со сторонами длины  $1/\sqrt{J}$ . Если  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , простое вычисление показывает, что функция  $h^J$ , определенная по формуле

$$h^J(x) = m([x]^J)^{-1} \int_{[x]^J} h(x) dm(x),$$

является  $J$ -липшицевой (здесь  $m$  — мера Лебега).

Другой важный аспект предложения 4.5.5 — необходимость следить за точками, в которых  $\det(G(s, X(\omega, s))) = 0$ , поскольку оценка ничего не говорит об этих точках. Ключевым наблюдением является следующая лемма.

**4.5.6. Лемма.** Пусть  $a: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  — ограниченная измеримая функция, значения которой неотрицательно определенные симметрические матрицы. Продолжим  $a$  до функции на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , положив  $a(t, x) = a(0, x)$  при  $t < 0$  и  $a(t, x) = a(1, x)$  при  $t > 1$ . Тогда функция  $a^J$  является  $J$ -липшицевым поднятием функции  $a$ , также принимающим неотрицательно определенные симметрические значения. Более того, для любого  $M \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $m \in \mathbb{R}_+$ , что из неравенства  $\det^* a(s, y) \geq M$  для всех  $(s, y) \in [(t, x)]^J$  следует неравенство  $\det a^J(t, x) \geq m$ .

*Доказательство.* Из теоремы Лузина — Андерсона 3.4.9 мы знаем, что  $*a$  является поднятием функции  $a$ , и, значит,  $a^J = *a^J$  является  $J$ -липшицевым поднятием функции  $a$ .

Чтобы доказать последнюю часть леммы, для всех неотрицательно определенных симметрических  $n \times n$ -матриц  $A$  определим величину  $l(A) = \inf \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}$ ; заметим, что

$$(14) \quad l(A_1 + A_2) \geq l(A_1) + l(A_2).$$

Поскольку  $\det A$  есть произведение собственных значений матрицы  $A$ , а  $l(A)$  — это наименьшее собственное значение, справедливо неравенство

$$(15) \quad l(A)^n \leq \det A \leq \|A\|^{n-1} l(A).$$

Возвращаясь к функции  $a$ , из неравенства (15) получаем, что если  $\det^* a(s, y) \geq M$  для всех  $(s, y) \in [(t, x)]^J$ , то для тех же  $(s, y)$  справедливо неравенство  $l(*a(s, y)) \geq M/\|a\|^{n-1}$ . Из свойства супераддитивности (14) следует, что  $l(a^J(t, x)) \geq M/\|a\|^{n-1}$ ; снова используя (15), получаем

$$\det(a^J(t, x)) \geq (M/\|a\|^{n-1})^n,$$

так что мы можем выбрать  $m = (M/\|a\|^{n-1})^n$ .  $\square$

Теперь мы достигли той стадии, на которой можем доказать существование решений уравнения (1) в случае, когда  $f$  и  $g$  не являются непрерывными по пространственной переменной, если только детерминант функции  $g$  отграничен от нуля. «Слабое» решение такого типа впервые получено Крыловым (Крылов [2]); приведенный здесь результат о «сильном» решении принадлежит Кейслеру (Keisler [4]).

**4.5.7. Теорема.** Пусть функции

$$f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

ограничены и измеримы, и пусть существует такое  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , что  $|\det g(t, y)| > \varepsilon$  для всех  $(t, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ . Тогда для любой  $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величины  $x_0$  и для любого броуновского движения  $b$ , согласованного с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, L(P))$ , уравнение

$$(16) \quad x(\omega, t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db(\omega, s)$$

имеет решение.

*Доказательство.* Мы рассмотрим только случай, когда  $x_0$  — константа, а  $b$  — конкретное броуновское движение. Простая задача склеивания этих процессов для получения решения при произвольном  $x_0$  (а также заключительная отсылка к предложению 4.5.2) предоставляется читателю.

Начнем с того, что упростим задачу. Для каждого  $(t, x)$  обозначим через  $|g|(t, x)$  «абсолютную величину» матрицы  $g(t, x)$ , т. е. такую (единственную) симметрическую неотрицательную матрицу  $|g|$ , что  $|g|^2 = g \cdot g^t$ , где  $g^t$  — матрица, получаемая из матрицы  $g$  транспонированием. Пусть  $u(t, x)$  — такая ортогональная матрица, что  $|g| = g \cdot u$ . Утверждается, что достаточно установить существование решения у уравнения

$$(17) \quad x(\omega, t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t |g|(s, x(\omega, s)) db,$$

где по сравнению с (16)  $g$  заменено на  $|g|$ . Причина состоит попросту в том, что если  $u(t, x)$  — ортогональная матрица, то процесс  $b' = \int u db$  является броуновским движением. Поэтому  $\int |g| db = \int g db'$ , так что решение уравнения (17) является также и решением уравнения (16), хотя и относительно другого броуновского движения.

Чтобы найти решение уравнения (17), выберем  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , удовлетворяющее условиям предложения 4.5.5, и пусть  $J_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  бесконечно мало по сравнению с  $J$  (т. е.  $J_0/J \approx 0$ ); причина, по которой потребовалась вторая константа, станет ясна ниже. Пусть  $F = f^{J_0}$ ,  $|G| = |g|^{J_0}$ ; заметим, что, по лемме 4.5.6, число  ${}^\circ \det |G|$  отграничено от нуля.

Пусть  $X$  — решение гиперконечного разностного уравнения

$$(18) \quad X(\omega, t) = x_0 + \sum_{s=0}^t F(s, X(\omega, s)) \Delta t + \sum_{s=0}^t |G|(s, X(\omega, s)) \Delta B(\omega, s).$$

Покажем, что процесс  $x = {}^\circ X^+$  является решением уравнения (17) при  $b = {}^\circ B^+$ . Все, что нужно, — это доказать, что

${}^\circ F(s, X(\omega, s)) = f({}^\circ s, x(\omega, {}^\circ s))$  и  ${}^\circ |G|(s, X(\omega, s)) = |g|({}^\circ s, x(\omega, {}^\circ s))$  почти наверное на  $\Omega \times T$ . Для этого положим  $D_K = \{(t, x) \in T \times {}^*\mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq K\}$  и определим множество  $A_K = \{(t, x) \in B_K \mid {}^\circ F(t, x) \neq f({}^\circ t, {}^\circ x) \text{ или } {}^\circ |G|(t, x) \neq |g|({}^\circ t, {}^\circ x)\}$ .

Мы покажем, что существует такая  $J$ -липшицева функция  $H_\varepsilon$ , равная 1 на  $A_K$ , что  ${}^\circ \|H_\varepsilon\|_{n+1} \leq \varepsilon$ . Тогда, применяя к процессу  $X$  и функции  $H_\varepsilon$  предложение 4.5.5, мы получим оценку

$$E\left(\int_0^{\sigma_K} \det |G|(s, X(\omega, s))^{2/(n+1)} |H_\varepsilon(s, X(\omega, s))| ds\right) \leq N\varepsilon.$$

Поскольку величина  $\det |G|$  отграничена от нуля, из полученной оценки следует, что для всех  $K \in \mathbb{R}_+$

$$L(P \times \lambda) \{( \omega, t) \mid (t, X(\omega, t)) \in A_K\} = 0,$$

и, значит,  $x = {}^\circ X^+$  есть решение уравнения (17).

Для построения функции  $H_\varepsilon$  заметим, что, поскольку функции  $F$  и  $G$  являются  $J_0$ -липшицевыми для  $J_0$ , бесконечно малого по сравнению с  $J$ , множество  $A_K$  обладает следующим свойством «открытости»: если  $x \in A_K$  и  $|x - y| \leq 1/J$ , то  $y \in A_K$ . Поэтому если  $C$  — внутреннее подмножество дополнения к  $A_K$ , то функция  $H_\varepsilon(y) = J \cdot d(y, C) \wedge 1$ , где  $d(y, C)$  — расстояние от точки  $y$  до множества  $C$ , равна 1 на множестве  $A_K$  и равна 0 на множестве  $C$ . Если мы к тому же выберем множество  $C$  таким, чтобы мера его дополнения была меньше  $\varepsilon$ , то получим  $\|H_\varepsilon\|_{n+1} < \varepsilon$ . Функция  $H_\varepsilon$ , очевидно,  $J$ -липшицева, и теорема доказана.  $\square$

Заметим, что приведенное нами доказательство дает только слабое решение уравнения (16); обо всем остальном «позаботится» предложение 4.5.2. Мы, однако, объявили, что одной из наиболее привлекательных особенностей нестандартного анализа является возможность построения сильных решений, а сами не стали доказывать предложение 4.5.2; читатель может обвинить нас в нечестной игре. Но, лишь слегка изменив доказательство теоремы 4.5.7, мы можем получить сильное решение непосредственно. Идея состоит в том, чтобы заменить уравнение (17) на уравнение

$$(19) \quad X(\omega, t) = x_0 + \sum_0^t F(s, X(\omega, s)) \Delta t + \\ + \sum_0^t |G|(s, X(\omega, s)) \Delta \left( \int V(s, X(\omega, s)) dB \right),$$

где  $V$  — подходящее поднятие функции  $u^{-1}$ . Доказательство следует по тому же пути, что и выше, но становится несколько более техничным, поскольку приходится заботиться также и о взаимоотношении между  $u$  и  $V$ .

В определенном смысле результат Кейслера — это лучшее, чего можно ожидать, если предполагать функции  $f$  и  $g$  только лишь измеримыми. Если мы позволим матрице  $g$  вырождаться, то все потенциальные решения уравнения (16) могут принимать значения в множестве нулевой меры в  $\mathbb{R}^n$ ; а если  $f$  и  $g$  — всего лишь измеримые функции, их значения на множестве нулевой меры могут быть произвольными — уравнение вообще теряет смысл. Если, однако, предположить, что функции  $f$  и  $g$  непрерывны на том множестве, где  $g$  вырождается, то получается следующее обобщение (Kosićuk [1], [2]):

**4.5.8. Теорема.** Пусть  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $g: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  — ограниченные измеримые функции. Определим множество  $N \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^n$  с помощью условия  $N = \{(t, x) \mid \text{существует такая последовательность } (t_n, x_n) \rightarrow (t, x), \text{ что } \det g(t_n, x_n) \rightarrow 0\}$ . Предположим, что ограничения функций  $f$  и  $g$  на множество  $N$  непрерывны и что если  $f$  или  $g$  разрывно в точке  $(t, x) \in N$ , то  $\det g$  ограничен от нуля на множестве  $V - N$ , где  $V$  — некоторая окрестность точки  $(t, x)$ . Тогда уравнение

$$(20) \quad x(\omega, t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(\omega, s)) ds + \int_0^t g(s, x(\omega, s)) db(s)$$

имеет решение для любого броуновского движения  $b$ , согласованного с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, L(P))$ , и любого  $\mathcal{F}_0$ -измеримого начального условия  $x_0$ .

**Доказательство.** Так же как в доказательстве теоремы 4.5.7, мы можем предположить, что матрица  $g$  симметрична и неотрицательно определена (перейдя, если это необходимо, к матрице  $|g|$ ). Мы можем также предположить, что  $x_0$  — константа, а  $b$  — правая стандартная часть андерсоновского случайного блуждания  $B$ .

Выберем  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , удовлетворяющее условиям предложения 4.5.5, и положим  $F = f^{J_0}$ ,  $G = g^{J_0}$  для числа  $J_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , бесконечно малого по сравнению с  $J$ . Мы докажем, что стандартная часть  $x$  процесса

$$(21) \quad X(\omega, t) = x_0 + \sum_{s=0}^t F(s, X(\omega, s)) \Delta t + \sum_{s=0}^t G(s, X(\omega, s)) dB(\omega, s)$$

служит решением уравнения (20). Как обычно, достаточно показать, что

$$(22) \quad L(P \times \lambda) \{(\omega, t) \mid (t, X(\omega, t)) \in A_K\} = 0$$

для всех  $K \in \mathbb{N}$ , где

$$(23) \quad A_K = \{(t, x) \mid \|x\| \leq K \text{ и } ({}^\circ F(t, x) \neq f({}^\circ t, {}^\circ x) \text{ или } {}^\circ G(t, x) \neq g({}^\circ t, {}^\circ x))\}.$$

Покажем сначала, что если  $\det G(t, x) \approx 0$ , то  $(t, x) \notin A_K$ . Из условий, наложенных на функцию  $g$ , и из леммы 4.5.6 ясно, что  $\det G(t, x)$  может быть бесконечно малым только при  $(t, x) \in \text{st}^{-1}(N)$ . Пусть  $N_C \subset N$  — множество таких точек в  $N$ , где функции  $f$  и  $g$  непрерывны, и  $N_P = N - N_C$ . Если  $(t, x) \in \text{st}^{-1}(N_C)$ , то  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $({}^\circ t, {}^\circ x)$ , так что  $(t, x)$  не может принадлежать множеству  $A_K$ . Если, с другой стороны,  $(t, x) \in \text{st}^{-1}(N_P)$ , то  $\det G(t, x)$  может быть бесконечно мал лишь при условии

$$(24) \quad \frac{m([ (t, x) ]^{J_0} \cap {}^*N)}{m([ (t, x) ]^{J_0})} \approx 1,$$

поскольку  $\det g$  на множестве  $V - N$  ограничен от нуля. Поскольку, однако,  $f$  и  $g$  непрерывны на  $N$ , из формулы (24) следует, что  $(t, x) \notin A_K$ . Таким образом, мы показали, что если  $\det G(t, x) \approx 0$ , то  $(t, x) \notin A_K$ .

Пусть теперь для  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  функция  $H_\varepsilon$  — такая же, как в доказательстве теоремы 4.5.7, т. е.  $J$ -липшицева, равная 1 на  $A_K$ , и  $\|H_\varepsilon\|_{n+1} \leq \varepsilon$ . Тогда согласно предложению 4.5.5

$$E \left( \int_0^{\sigma_D} \det G(s, X(\omega, s))^{2/(n+1)} |H_\varepsilon(s, X(\omega, s))| ds \right) \leq N\varepsilon.$$

Поскольку  $\det G \not\approx 0$  на  $A_K$ , а  $\varepsilon$ ,  $K$  и  $D$  — произвольные числа из  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}$  соответственно, из полученной оценки следует равенство (22). Теорема доказана.  $\square$

Следует отметить, что мы немного переформулировали результат Кошуяка: в работах Kosciuk [1], [2] автор рассматривает не стохастическое дифференциальное уравнение (20), а отвечающую ему «мартингальную задачу», решение которой строит без использования стохастического интегрирования (информацию о мартингальных задачах см. в книге Stroock, Varadhan [1]). Приведенное здесь доказательство короче и лучше соответствует нашему изложению.

Как указал Косцюк в первой из цитирувавшихся статей, теорема 4.5.8 может иметь интересные применения в биофизике

и биохимии, а именно, в исследовании реакций между регуляторными белками и молекулами ДНК. Вот что, судя по всему, происходит в этой реакции (см. Richter, Eigen [1]): белок диффундирует в растворе до тех пор, пока не натолкнется на молекулу ДНК (неспецифическое связывание); с этого момента процесс резко меняет характер, превращаясь в диффузию вдоль поверхности молекулы ДНК; этот процесс продолжается до тех пор, пока не произойдет одно из двух: либо белок отделится (диссоциируется) от ДНК, либо окажется в таком месте на молекуле, что будет захвачен ею (специфическое связывание). Предположение о диффузии меньшей размерности вдоль цепи ДНК необходимо для того, чтобы объяснить высокий уровень ассоциации, обнаруженный в экспериментах; если использовать модель только с трехмерной диффузией, уровень ассоциации получается значительно ниже.

В работах Берга и Бломберга (Berg, Blomberg [1], [2]) была предложена математическая модель указанного явления, использующая склеивание трехмерного и одномерного диффузионных процессов. Их теория, однако, имеет некоторые неудовлетворительные черты; например, диссоциация белка от ДНК может происходить только путем скачка на конечное расстояние обратно в раствор. Теорема 4.5.8 дает гибкое средство для построения моделей диффузии с резкой сменой характера движения и с вырождениями коэффициентов; кажется правдоподобным, что, применяя ее к белкам и молекулам ДНК, мы могли бы прийти к лучшей математической модели. Следует, однако, отметить, что Берг и Бломберг с помощью своей модели сумели получить связь между коэффициентами диффузионного процесса и физическими свойствами молекулы ДНК, а ни одной попытки анализа явления на том же уровне с помощью теоремы 4.5.8 проделано не было — это остается интересной задачей на будущее.

### *С. Уравнения с коэффициентами, зависящими от прошлого*

В качестве заключительного примера гиперконечного подхода к стохастическим дифференциальным уравнениям кратко упомянем уравнения, коэффициенты которых зависят от всей прошлой истории процесса, а не только от его текущего состояния. На эту тему имеется несколько статей, но мы ограничимся работой Hoover, Ferkins [1] об уравнениях с интегрированием по семимартингалам, и даже для этого случая изложим лишь основные идеи — за описанием техники мы отсылаем читателя к указанной работе либо к обзору Perkins [7].

*Семимартингал* — это процесс вида  $z = a + m$ , где процесс  $a$  имеет траектории с ограниченной вариацией, а процесс  $m$  —



локальный мартингал. Гувер и Перкинс исследовали уравнения вида

$$(25) \quad y(\omega, t) = h(\omega, t) + \int_0^t f(\omega, s, y(\omega, \cdot)) dz(\omega, s),$$

где  $z$  — это  $d$ -мерный семимартингал, процесс  $h: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывен справа и имеет пределы слева, а функция  $f(\omega, s, y(\omega, \cdot)) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$  зависит только от значений  $y(\omega, \cdot)$  вплоть до момента времени  $s$ . Стратегия та же, что и раньше: мы находим спокойное (в смысле § 4.4) поднятие  $H$  функции  $h$  и такой гиперконечный процесс  $Z$ , что  ${}^\circ Z^+ = z$  и как сам процесс  $Z$ , так и все стохастические интегралы по нему спокойны. В том случае, если удастся построить подходящее поднятие  $F$  функции  $f$ , мы можем решить гиперконечное разностное уравнение

$$(26) \quad Y(\omega, t) = H(\omega, t) + \sum_{s=0}^t F(\omega, s, Y(\omega, \cdot)) \Delta Z(\omega, s),$$

и, поскольку все процессы в формуле (26) спокойны, нетрудно увидеть, что при разумных условиях правая стандартная часть  $y$  процесса  $Y$  служит решением уравнения (25).

Но как построить  $F$ ? Если  $J_1$  — топология Скорохода на пространстве  $D$  процессов, непрерывных справа и имеющих пределы слева, и функция  $f(\omega, s, \cdot)$   $J_1$ -непрерывна при каждом  $\omega$  и  $s$ , можно использовать предложение 4.3.13 и выбрать равномерное поднятие  $F$  функции  $f$ , равномерно непрерывное по третьей переменной. Гувер и Перкинс, однако, предполагают функцию  $f$  лишь непрерывной в равномерной топологии, а это делает задачу намного более трудной, так как пространство  $D$  в этой топологии не сепарабельно. Но нам нужно «поднять»  $f$  не только на таких функциях  $y$ , которые могли бы быть решениями уравнения (25); поэтому можно показать, что нас интересует только такое подпространство пространства  $D$ , на котором обе топологии совпадают (основная причина в том, что решение уравнения (25) может иметь скачок только тогда, когда  $h$  или  $z$  имеет скачок). За точными утверждениями мы вновь отсылаем читателя к работам Hoover и Perkins [1] и Perkins [7].

До работы Гувера и Перкинса существование решений у уравнения (25) было известно только для функций  $f$ , удовлетворяющих условию Липшица по пространственной переменной (см. Doléans-Dade [2], Protter [1], [2]), но некий вариант общего результата был получен независимо и почти одновременно в работе Jacod, Memin [1]. Другие нестандартные исследования стохастических дифференциальных уравнений с зависимостью

от прошлого включают работы Cutland [1], Osswald [2]. С идеями Катлэнда мы познакомимся поближе, когда перейдем в следующем параграфе к стохастической теории управления; сейчас отметим только интересную особенность его последних статей, в которых он работает вместо гиперконечного случайного блуждания с внутренним броуновским движением. Этот \*-непрерывный подход судя по всему упрощает множество технических проблем, связанных с поднятием и с переносом стандартных результатов; в качестве показательного примера см. доказательство теоремы Кейслера 4.5.7 в работе Cutland [7].

В этом параграфе мы сосредоточили внимание на теоремах существования, хотя нестандартные методы с успехом применялись и для получения результатов другого типа о стохастических дифференциальных уравнениях; особенно это касается принципов инвариантности (см. Keisler [4], Kosciuk [1]) и марковского свойства (Keisler [4]). Что касается вопросов единственности, то здесь никакого прогресса достигнуто не было. Интересное приложение к экономике имеется в работе Keisler [3].

#### 4.6. Стохастическое оптимальное управление

Стохастические дифференциальные уравнения

$$(1) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x) ds + \int_0^t g(s, x) db(s),$$

рассмотренные в предыдущем параграфе, используются для моделирования самых разнообразных явлений в естественных науках, технике, экономике. Общим для многих из этих явлений является механизм обратной связи, изменяющий будущее поведение процесса на основе наблюдения за его прошлым. Цель такого изменения обычно состоит в оптимизации некоторого результата этого процесса. Математически ситуация описывается следующим образом: мы рассматриваем процесс

$$(2) \quad x^u(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x^u, u(s, x^u)) ds + \int_0^t g(s, x^u, u(s, x^u)) db,$$

где  $f$  и  $g$  — заданные функции, а стратегия  $u$  может меняться. Если результат этого процесса «измеряется» функцией  $h$ , определим цену процесса  $x^u$  формулой

$$(3) \quad j(u) = E \left( \int_0^1 h(x^u(t)) dt \right).$$

Цель состоит в том, чтобы найти стратегию  $u$ , минимизирующую цену  $j(u)$ .

Очевидно, что решение этой задачи зависит от того, каков класс допустимых функций  $u$ . Некоторые ограничения необходимы; например, формула (2) не имеет смысла, если не потребовать, чтобы функция  $u$  была неупреждающей, в том смысле, что  $u(s, x)$  зависит только от значений процесса  $x$  до момента времени  $s$ . С другой стороны, не в любой задаче стратегии  $u$  позволено зависеть от всего прошлого процесса  $x$ ; механизм обратной связи может быть основан на неполной информации о системе, и это приведет к более узкому выбору стратегий  $u$ . Так мы приходим к теме данного параграфа — оптимальному управлению частично наблюдаемыми стохастическими системами.

Излагаемый здесь нестандартный подход был развит Катлэндом в серии статей Cutland [3]—[6], [8]. Мы слегка изменили некоторые детали, приспособив их к нашему изложению, но все основные идеи принадлежат ему. Наша цель — доказать существование оптимальной стратегии при очень общих условиях. Сначала рассмотрим случай, когда функции  $f(s, x, a)$ ,  $g(s, x, a)$  и  $u(s, x)$  зависят от значения процесса  $x$  только в момент времени  $s$ . В этой ситуации можно использовать неравенство Крылова и технику предыдущего параграфа. Когда функциям  $f$ ,  $g$ ,  $u$  позволяется зависеть от прошлых значений процесса  $x$ , задача становится более трудной; нам удастся решить ее только при дополнительных предположениях. Основным инструментом в этом случае будет служить формула Гирсанова, для которой мы дадим подробный вывод.

### *А. Оптимальное управление: марковский случай*

Первый тип управляемых систем, который мы рассмотрим — это система вида

$$(4) \quad x(t) = \int_0^t f(x(s), s, u(x, s)) ds + \int_0^t g(x(s), s, u(x, s)) db(s),$$

где функции  $f: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $g: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  непрерывны по третьей переменной, а  $K$  — компактное метрическое пространство (т. е. топологическое пространство, допускающее полную сепарабельную метрику). Поскольку функции  $f$  и  $g$  не зависят от прошлых значений процесса  $x$ , мы будем (довольно неаккуратно) именовать этот случай «марковским»; строго говоря, такая терминология неправильна, так как некоторая зависимость от прошлого вносится стратегией  $u$ .

Механизм обратной связи работает следующим образом. В фиксированные моменты времени  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p < 1$  производятся *наблюдения*, и результат каждого *наблюдения* в момент  $t_i$  запоминается в виде значения  $y_i(x(t_i))$ , где  $y_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}$  — измеримая функция в счетное пространство *наблюдений*  $\mathcal{Y}$ . Для траектории  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  обозначим через

$$y(x) = (y_1(x(t_1)), \dots, y_p(x(t_p)))$$

последовательность сделанных на этой траектории *наблюдений*.

**4.4.6.1. Определение.** *Допустимая стратегия* — это измеримая функция  $u: \mathcal{Y}^p \times [0, 1] \rightarrow K$ , которая является неупреждающей в следующем смысле: если  $t_i \leq t < t_{i+1}$ , то  $u(y, t)$  зависит только от  $i$  первых компонент вектора  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ .

Задача состоит в том, чтобы для данной ограниченной измеримой *функции потерь*  $h: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  найти такую допустимую стратегию  $u$ , которая минимизирует *цену*

$$(5) \quad j(u) = E \left( \int_0^1 h(x^u(t)) dt \right),$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} x^u(t) = & \int_0^t f(x^u(s), s, u(y(x^u), s)) ds + \\ & + \int_0^t g(x^u(s), s, u(y(x^u), s)) db(s). \end{aligned}$$

Чтобы задача имела смысл, решение уравнения (6) должно быть единственным по распределению; для этого достаточно, например, потребовать, чтобы функция  $g$  удовлетворяла условию Липшица по первой переменной, а функция  $g^{-1}$  была ограничена на компактах. Но даже если решение уравнения (6) единственно, оптимальной допустимой стратегии может не существовать. Проблема в том, что множество стратегий обладает довольно слабыми свойствами замкнутости, и нижняя грань

$$(7) \quad \inf \{j(u) \mid u \text{ — допустимая стратегия}\}$$

может просто не достигаться. Один из путей разрешения — или обхода — этой трудности состоит в допущении стратегий со значениями в мерах. Пусть  $\mathcal{M}(K)$  — множество борелевских вероятностных мер на  $K$  с топологией слабой сходимости.

**4.6.2. Определение.** Допустимая распределенная стратегия — это измеримая функция  $u: \mathcal{U}^p \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}(K)$ , неупреждающая в смысле определения 4.6.1<sup>1)</sup>.

Распределенные стратегии впервые были введены в стандартном контексте (см. Филиппов [1], McShane [1], Warga (1), [2]); мы, однако, увидим, что они естественно возникают в нестандартной теории, а именно, как стандартные части внутренних стратегий.

Следует объяснить, как понимать уравнение (6), если значениями функции  $u$  являются меры. Слагаемое, отвечающее сносу, не представляет проблемы: положим

$$(8) \quad \int_r^t f(x^u(s), s, u(y(x^u), s)) ds = \\ = \int_r^t \int_K f(x^u(s), s, a) du(y(x^u), s)(a) ds.$$

Несколько более неожиданна интерпретация мартингального члена: положим

$$(9) \quad \int_r^t g(x^u(s), s, u(y(x^u), s)) db = \\ = \int_r^t \left( \int_K g(x^u(s), s, a)^2 du(y(x^u), s)(a) \right)^{1/2} db.$$

Почему подходит именно такое определение, станет ясно ниже; пока достаточно сказать, что оно связано с тем фактом, что именно так выглядит ковариация диффузии, определяющей динамическую систему.

Прежде чем сформулировать результат, к которому мы стремимся, наложим условия на функции  $f$ ,  $g$  и  $h$ . Эти условия будут несколько сильнее, чем это, строго говоря, необходимо, но они позволяют строить теорию, не заботясь чрезмерно о технических деталях.

**4.6.3. Условие.** Будем предполагать, что  $f: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  и  $h: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) функции  $f$  и  $g$  непрерывны по третьей переменной;

<sup>1)</sup> Распределенные стратегии не следует путать со смешанными стратегиями, тоже принимающими значения в мерах. Разница между ними состоит в том, какой смысл придается уравнению (6), если  $u(y(x^u), s)$  — мера (см. ниже формулы (8) и (9)). — Прим. перев.

(ii) функция  $g$  равномерно липшицева по первой переменной, т. е. существует такая константа  $C$ , что  $\|g(x, t, a) - g(y, t, a)\| \leq C\|x - y\|$  для всех  $x, y, t, a$ ;

(iii) значения функции  $g$  — симметрические положительно определенные матрицы, детерминант которых ограничен от нуля, т. е. существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $|\det g(x, t, a)| > \varepsilon$  для всех  $x, t, a$ .

Заметим, что условия (i), (ii) гарантируют совместную непрерывность функции  $g$  по первой и третьей переменным.

**4.6.4. Теорема.** Пусть функции  $f, g, h$  удовлетворяют условиям 4.6.3. Тогда существует допустимая распределенная стратегия  $u$ , минимизирующая цену

$$(10) \quad j(u) = E \left( \int_0^1 h(x^u(t), t) dt \right);$$

это значит, это  $j(u) \leq j(\tilde{u})$  для всех допустимых распределенных стратегий  $\tilde{u}$ .

Такая стратегия  $u$  называется *оптимальной распределенной стратегией* для системы, определяемой функциями  $f, g$  и  $h$ .

Мы получим доказательство теоремы 4.6.4, осуществив следующую программу. Сначала перенесем задачу в гиперконечную обстановку, используя андерсоновское случайное блуждание и подходящие поднятия функций  $f, g, h$ . Для нестандартной задачи существование оптимальной стратегии оказывается очевидным. Беря стандартную часть внутренней оптимальной стратегии, мы получаем оптимальную распределенную стратегию для исходной системы.

Чтобы провести в жизнь эту программу, нужно изучить внутренние стратегии и их взаимоотношения с допустимыми распределенными стратегиями. Пусть

$$(11) \quad T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$$

— внутренняя ось времени, и

$$(12) \quad 0 \leq \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_p < 1$$

— конечная последовательность элементов множества  $T$ , для которых  $\circ \tilde{t}_i = t_i, i = 1, \dots, p$ .

**4.6.5. Определение.** Внутренняя стратегия — это внутренняя функция  $U: {}^*\mathcal{Y}^p \times T \rightarrow {}^*K$ , неупреждающая в следующем смысле: если  $\tilde{t}_i \leq t < \tilde{t}_{i+1}$ , то  $U(Y, t)$  зависит только от  $i$  первых компонент вектора  $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ .

Сейчас мы определим стандартную часть внутренней стратегии таким образом, что она окажется допустимой распределенной стратегией. Интуитивная идея, лежащая в основе этой кон-

струкции, такова. Зафиксируем  $t \in [0, 1]$  и  $y \in \mathcal{Y}^p$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  пусть  $\nu_n(y, t)$  — это внутренняя мера на  $*K$ , определяемая формулой

$$(13) \quad \nu_n(y, t)(A) = \frac{|\{s \in T \mid t - 1/n \leq s \leq t + 1/n, U(y, s) \in A\}|}{|\{s \in T \mid t - 1/n \leq s \leq t + 1/n\}|}.$$

Если  $u_n(y, t) = L(\nu_n(y, t)) \circ st^{-1}$ , будем считать стандартной частью стратегии  $U$  предел мер  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Иными словами, мера  $u(y, t)$  — это распределение значений функции  $U(y, s)$ , когда  $s$  пробегает монаду числа  $t$ . В следующей лемме дается иная конструкция функции  $u$ , возможно, менее прозрачная, но технически более удобная.

**4.6.6. Лемма.** Для любой внутренней стратегии  $U$  существует допустимая распределенная стратегия  $u$ , обладающая следующим свойством: если  $z: [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная измеримая функция, непрерывная по второй переменной, и  $Z: T \times \times *K \rightarrow * \mathbb{R}$  — такое  $S$ -ограниченное поднятие функции  $z$ , что для всех  $a \in *K$  и для почти всех (по мере Лёба)  $t \in T$  справедливо равенство  ${}^{\circ}Z(t, a) = z({}^{\circ}t, {}^{\circ}a)$ , то для всех  $a, b, y$

$$(14) \quad \int_{{}^{\circ}a}^{{}^{\circ}b} z(t, u(y, t)) dt = \left( \sum_a^b Z(t, U(y, t)) \Delta t \right).$$

*Доказательство.* Фиксируем управляющий параметр  $y$ ; пусть  $\nu_y$  — внутренняя мера на  $T \times *K$ , определяемая формулой

$$\nu_y(A) = |\{t \in T \mid (t, U(y, t)) \in A\}| \cdot \Delta t.$$

Положим  $\mu_y = L(\nu_y) \circ st^{-1}$ .

Заметим, что для любого борелевского множества  $B \subset K$  мера  $\mu_{y, B}$  на отрезке  $[0, 1]$ , задаваемая формулой

$$\mu_{y, B}(C) = \mu_y(C \times B),$$

абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры. Определим  $u(y, t)(B)$  как производную Радона — Никодима:

$$(15) \quad \mu_y(C \times B) = \mu_{y, B}(C) = \int_C u(y, t)(B) dt.$$

Работая отдельно на каждом из интервалов  $[t_i, t_{i+1}]$ , легко убедиться в том, что функция  $u$  может быть выбрана неупреждающей. Интуитивно столь же очевидно, что для каждой пары  $(y, t)$  функцию  $u(y, t)(\cdot)$  можно считать мерой, хотя фактически это нетривиальное утверждение (см. Stroock, Varadhan [1], теорема 1.1.6).

Осталось доказать, что справедлива формула (14). Поскольку  $Z$  — поднятие функции  $z$  относительно меры  $\nu_y$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{a^0}^{a^b} z(t, u(y, t)) dt &= \int_{a^0}^{a^b} \left( \int z(t, a) du(y, t)(a) \right) dt = \\ &= \int_{[a^0, a^b] \times K} z(t, a) d\mu_y(t, a) = \int_{(T \cap [a, b]) \times *K} Z(t, a) d\nu_y(t, a), \end{aligned}$$

и лемма доказана.  $\square$

Распределенная стратегия  $u$ , построенная в предыдущей лемме, называется *стандартной частью* стратегии  $U$ .

**4.6.7. Лемма.** *Все допустимые распределенные стратегии являются стандартными частями внутренних стратегий.*

*Доказательство.* Мы дадим только набросок этой простой конструкции. Зафиксируем допустимую распределенную стратегию  $u$  и управляющий параметр  $y \in \mathcal{U}^p$ . Выберем такое  $N \in {}^*N - N$ , что число  $1/N$  бесконечно велико по сравнению с  $\Delta t$ , и рассмотрим внутреннюю меру  $u_k$  на  $*K$ , определяемую формулой

$$(16) \quad u_k(A) = \int_{k/N}^{(k+1)/N} {}^*u(t, y)(A) dt.$$

Чисто внутренними методами можно найти такую неупреждающую внутреннюю функцию  $U_y: T \rightarrow *K$ , что для любого внутреннего множества  $A \subset *K$

$$u_k(A) \approx N \cdot |\{t \in T | k/N \leq t < (k+1)/N, U_y(t) \in A\}|.$$

Легко проверить, что стратегия  $u$  является стандартной частью стратегии  $U$ .  $\square$

**4.6.8. Замечание.** Два последних результата являются фундаментальными для теории, излагаемой в данном параграфе. Они были открыты Катлэндом, который применил их сначала к детерминированной (Cutland [3]), а затем к стохастической теории управления (Cutland [4]—[6], [8]). Недавно аналогичная связь между внутренними решениями и «слабыми» стандартными решениями возникла в работах Аркериды о дифференциальных уравнениях в частных производных, хотя в его ситуации эта связь, видимо, более сложна, особенно в нелинейном случае. Интерес Аркериды к этим вопросам возник в связи с его работами об уравнении Больцмана (мы излагаем их в § 6.5), но в двух недавних работах (Arkeryd [8], Arkeryd, Bergh [1]) излагается общая теория для соболевских пространств.



Теперь возьмем внутренние функции:

$$\begin{aligned} F: {}^*\mathbb{R}^n \times T \times {}^*K &\rightarrow {}^*\mathbb{R}^n, \\ G: {}^*\mathbb{R}^n \times T \times {}^*K &\rightarrow {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n \\ H: {}^*\mathbb{R}^n \times T &\rightarrow {}^*\mathbb{R}, \\ Y_i: {}^*\mathbb{R}^n &\rightarrow {}^*\mathcal{Y}, \quad i \leq p, \end{aligned}$$

и рассмотрим внутренний управляемый процесс

$$\begin{aligned} X^U(t) = & \int_0^t F(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) ds + \\ & + \int_0^t G(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) dB, \end{aligned}$$

где  $B: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$  — андерсоновское случайное блуждание,  $U$  — внутренняя стратегия, и

$$Y(X^U) = (Y_1(X^U(\tilde{t}_1)), \dots, Y_p(X^U(\tilde{t}_p))).$$

Цена для процесса  $X^U$  определяется формулой

$$(17) \quad J(U) = E \left( \int_0^1 H(X^U(t), t) dt \right).$$

Мы будем считать, что функции  $F$ ,  $G$  и  $H$   $S$ -ограничены.

Следующая лемма сводит доказательство теоремы 4.6.4. к вопросу о построении правильного вида поднятий для функций  $\tilde{f}$ ,  $g$  и  $h$ . Она также объясняет, почему мы выбрали формулу (9) в качестве интерпретации величины  $\int g(x^u, s, u(y(x^u), s)) db$  в том случае, когда функция  $u$  принимает значения в мерах.

**4.4.9. Лемма.** Пусть существует такое множество  $N \subset \Omega \times T$  нулевой меры Лёба, что для  $(\omega, s) \notin N$  и для всех  $a \in {}^*K$

$$\begin{aligned} {}^\circ F(X^U(\omega, s), s, a) &= \tilde{f}({}^\circ X^U(\omega, s), {}^\circ s, {}^\circ a), \\ {}^\circ G(X^U(\omega, s), s, a) &= g({}^\circ X^U(\omega, s), {}^\circ s, {}^\circ a), \\ {}^\circ H(X^U(\omega, s), s) &= h({}^\circ X^U(\omega, s), {}^\circ s). \end{aligned}$$

Пусть, более того,  $Y(X^U(\omega)) = y({}^\circ X^U(\omega))$  для  $L(P)$ -почти всех  $\omega$ , а функции  $\tilde{f}$ ,  $g$ ,  $h$  удовлетворяют условиям 4.6.3. Тогда, если  $u$  — стандартная часть стратегии  $U$ , то

$$j(u) = {}^\circ J(U).$$

*Доказательство.* Пусть  $x$  — правая стандартная часть процесса  $X^U$ . Покажем, что процесс  $x$  является решением уравнения

$$x(t) = \int_0^t f(x(s), s, u(y(x), s)) ds + \int_0^t g(x(s), s, u(y(x), s)) db(s)$$

для подходящим образом выбранного броуновского движения  $b$ . Поскольку условия 4.6.3 гарантируют, что решение этого уравнения единственно по распределению, сформулированное выше утверждение является достаточным для доказательства леммы.

Прежде всего заметим, что, согласно лемме 4.6.6 и условиям, наложенным на функции  $F$  и  $Y$ ,

$$\int_a^b f(x(s), s, u(y(x), s)) ds = \left( \sum_a^b F(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) \Delta t \right)$$

для почти всех  $\omega$ .

Переходя к мартингальной части нашего процесса, сначала предположим для простоты, что рассматриваемый процесс одномерен. Его квадратическая вариация дается формулой

$$\left[ \int G(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) dB \right] (t) = \int_0^t G^2(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) ds.$$

В силу леммы 4.6.6 и условий, наложенных на  $G$  и  $Y$ , стандартная часть стоящего справа интеграла равна

$$\int_0^t g^2(x(s), s, u(y(x), s)) ds.$$

Поэтому, согласно формуле (9),

$$\frac{d^\circ}{dt} \left[ \int G(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) dB \right] (t) = \int_K g^2(x(t), t, a) du(y(x), t)(a).$$

Как видно из доказательства теоремы 4.4.17, существует такое броуновское движение  $b$ , что

$$\begin{aligned} & \int G(X^U(s), s, U(Y(X^U), s)) dB = \\ &= \int \left( \int g^2(x(t), t, a) du(y(x), t)(a) \right)^{1/2} db. \end{aligned}$$

Вновь вспоминая формулу (9), получаем

$$x(t) = \int_0^t f(x(s), s, u(y(x), s)) ds + \int_0^t g(x(s), s, u(y(x), s)) db,$$

чем завершается доказательство леммы в одномерном случае.

Доказательство для больших размерностей аналогично, и мы оставляем его читателю, сделав следующие комментарии. Если  $M$  — мартингал со значениями в  ${}^*\mathbb{R}^n$ , то его квадратическая вариация — это процесс со значениями в  ${}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$ , и его  $(i, j)$ -я компонента задается формулой

$$[M]_{ij}(t) = \sum_0^t \Delta M_i(s) \Delta M_j(s),$$

где  $M_i, M_j$  — соответственно  $i$ -я и  $j$ -я компоненты процесса  $M$ . Доказательство теоремы 4.4.17 легко обобщается на  $n$ -мерный случай (см. Lindström [7], притом что мы интересуемся только невырожденным случаем), и из этого доказательства лемма следует так же, как и в одномерном случае.  $\square$

В приведенном доказательстве мы не использовали в полную силу условия 4.6.3; по существу, все что нужно — это непрерывность функций  $f(x(s), s, \cdot)$  и  $g(x(s), s, \cdot)$  и единственность по распределению решений стохастического дифференциального уравнения

$$x(t) = \int_0^t f(x(s), s, u(y(x), s)) ds + \int_0^t g(x(s), s, u(y(x), s)) db(s).$$

Однако не очень ясно, как можно было бы построить поднятия  $F, G, H$  и  $Y$  и одновременно гарантировать единственность, если не выполнено нечто весьма близкое к условиям 4.6.3. Обратите внимание, как эти условия используются в доказательстве основной теоремы.

*Доказательство теоремы 4.6.4.* Предположим, что мы сумели найти такие поднятия  $F, G, H, Y$  функций  $f, g, h, y$ , что условия леммы 4.6.9 справедливы для всех внутренних стратегий  $U$ . Тогда в силу лемм 4.6.6, 4.6.7 и 4.6.9 имеем

$$\inf \{j(u) \mid u \text{ — допустимая распределенная стратегия}\} = \\ = \inf \{^{\circ}J(U) \mid U \text{ — внутренняя стратегия}\}.$$

Обозначим этот общий инфимум через  $\alpha$ ; тогда множество  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \text{существует такая внутренняя стратегия } U, \text{ что } J(U) \leq \alpha + \frac{1}{n}\}$  — внутреннее и содержит все  $\mathbb{N}$ , следовательно, оно содержит бесконечно большой элемент  $\gamma$ . Если  $U$  — такая внутренняя стратегия, что  $J(U) \leq \alpha + 1/\gamma$ , то стандартная часть  $u$  стратегии  $U$  является оптимальной распределенной стратегией, так как

$$j(u) = {}^{\circ}J(U) = \alpha.$$

Чтобы завершить доказательства, осталось только построить поднятия  $F$ ,  $G$ ,  $H$  и  $Y$ . Пусть  $J \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  — константа, появляющаяся в нестандартном варианте неравенства Крылова (предложение 4.5.5). Выберем в качестве  $F$ ,  $G$  и  $H$   $J$ -липшицевы поднятия функций  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , а также добьемся того, чтобы для почти всех околостандартных  $(x, t)$  функции  $F(x, t, \cdot)$  и  $G(x, t, \cdot)$  были  $S$ -непрерывны. Мы потребуем также, чтобы  ${}^\circ(\det G)$  был ограничен от нуля; поскольку функция  $g$  предполагалась положительно определенной и симметрической, это требование не мешает функции  $G$  быть  $J$ -липшицевой (вспомним лемму 4.5.6).

Если  $y \in \mathcal{Y}^p$  и для некоторой внутренней стратегии  $U$

$$X(t) = \int_0^t F(X(s), s, U(y, s)) ds + \int_0^t G(X(s), s, U(y, s)) dB,$$

то из неравенства Крылова следует, что для всех  $a \in {}^*K$  и почти всех  $(\omega, s)$

$${}^\circ F(X(\omega, s), s, a) = f({}^\circ X(\omega, s), {}^\circ s, {}^\circ a),$$

$${}^\circ G(X(\omega, s), s, a) = g({}^\circ X(\omega, s), {}^\circ s, {}^\circ a),$$

$${}^\circ H(X(\omega, s), s) = h({}^\circ X(\omega, s), {}^\circ s),$$

как это требуется в лемме 4.6.9. Если бы мы только смогли доказать, что существует такое  $Y$ , что для всех  $U$  и почти всех  $\omega$

$$Y(X(\omega)) = y({}^\circ X(\omega)),$$

доказательство было бы завершено.

Поскольку  $y = (y_1, \dots, y_p)$ , нужно только объяснить, как «поднять» каждую из компонент  $y_i$ :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ . Трудность в том, что при меняющемся  $t$  величина  $y_i$  зависит только от значения  $x(t_i)$  в момент времени  $t_i$ , а не от совместного распределения пары  $(x(t), t)$ . Поэтому невозможно применить к функции  $y_i$  неравенство Крылова точно так же, как к функциям  $f$ ,  $g$  и  $h$ . Существует, однако, похожее неравенство, которое справедливо при фиксированных значениях  $t$ , а именно, при всех  $t > 0$

$$(18) \quad L(P) \{ \omega | x(\omega, t) \in A \} \leq C m(A)^{1/2},$$

где  $C$  — константа, зависящая только от  $t$ , от констант, ограничивающих функции  $f$ ,  $g$  и  $\det g$ , и от константы Липшица для функции  $g$ . Мы пропустим доказательство этой оценки, так как оно длинно, скучно и не очень информативно.

Чтобы сделать из формулы (18) внутреннее неравенство, поступим следующим образом: для  $H \in {}^*\mathbb{N}$  назовем  $H$ -элементом куб в  ${}^*\mathbb{R}^n$  вида

$$(19) \quad \left\{ x \in {}^*\mathbb{R}^n \mid \forall i \leq n \quad \frac{k_i}{H} \leq x_i \leq \frac{k_i + 1}{H} \right\},$$

где  $(k_1, \dots, k_n) \in {}^*\mathbb{Z}^n$ . Назовем  $H$ -множеством внутреннее объединение  $H$ -элементов. Для конечного  $H$  из формулы (18) следует, что для любого  $H$ -множества  $A$

$$(20) \quad P\{\omega | X(\omega, t) \in A\} \leq 3^{n/2} C \cdot {}^*m(A)^{1/2} + 1/H.$$

Множитель  $3^{n/2}$  связан с тем, что если  $X(\omega, t)$  принадлежит какому-то  $H$ -элементу, то  $x$  может принадлежать любому из  $3^n$   $H$ -элементов — а именно тому же самому  $H$ -элементу или любому из его соседей; дополнительное слагаемое  $1/H$  призвано компенсировать тот факт, что  $P\{X(\omega, t) \in A\}$  может быть больше, чем  $L(P)\{X(\omega, t) \in A\}$ , на бесконечно малую величину.

Поскольку оценка (20) справедлива для всех конечных  $H$ , найдется бесконечно большое  $H_0$ , для которого она тоже справедлива. Возьмем в качестве поднятия  $Y_i$  функции  $y_i$  (относительно  $*$ -версии меры Лебега) такое поднятие, которое постоянно на всех  $H_0$ -элементах. Тогда из формулы (20) следует, что

$$Y_i(X(\omega)) = y_i({}^\circ X(\omega))$$

с вероятностью 1, что и требовалось доказать.  $\square$

Хотя стохастические системы, которые мы обсуждали, заслуживают гораздо большего, мы ограничимся несколькими короткими замечаниями. Прежде всего хотелось бы отметить, что теорема 4.6.4 — это упрощенная версия результата Катлэнда (Cutland [6], [8]); оригинальное изложение покрывает более сложную и общую ситуацию, которая фактически соединяет в себе постановку задачи, обсуждавшуюся выше, с той, которая будет обсуждаться в конце этого параграфа. Далее, следует признать, что выбор используемого здесь механизма обратной связи частично вызван техническими причинами. В качестве примера трудностей, на которые мы наталкиваемся в более общей ситуации, отметим, что если пространств наблюдений  $\mathcal{Y}$  не дискретно, то далеко не ясно, имеет ли внутренняя стратегия стандартную часть, удовлетворяющую чему-либо похожему на лемму 4.6.6 — по той причине, что  $U(y, t)$  и  $U(y', t)$  могут быть совершенно различными при бесконечно близких  $y$  и  $y'$ . На самом деле вопрос о существовании оптимальных распределенных стратегий для частично наблюдаемых стохастических систем в общем случае до сих пор широко открыт.

Однако стохастическая теория управления не сводится к существованию оптимальных стратегий; это нечто большее. Взглянем коротко на еще один ее аспект, так как он еще раз демонстрирует силу нестандартного подхода.

Если  $H \in {}^*\mathbb{N}$ , назовем  $H$ -стратегией такую внутреннюю стратегию  $U$ , которая постоянна на отрезках  $[k/H, (k+1)/H) \cap T$ ,  $k \in {}^*\mathbb{Z}$  для всех  $y \in {}^*\mathcal{Y}$ . Вспоминая доказательство леммы 4.6.7, мы видим, что если  $u$  — допустимая распределенная стратегия

и  $H$  бесконечно велико, то  $u$  является стандартной частью некоторой  $H$ -стратегии. Если  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и  $\alpha$  — минимальная цена, то множество

$$\{H \in {}^*\mathbb{N} \mid \text{существует такая } H\text{-стратегия } U, \text{ что } J(U) < \alpha + \varepsilon\}$$

является внутренним и содержит все бесконечно большие  $H$ ; поэтому оно содержит некоторое конечное число  $H_\varepsilon$ . Стандартная часть любой  $H_\varepsilon$ -стратегии — это обычная (не со значениями в мерах) допустимая стратегия, постоянная на отрезках длины  $1/H_\varepsilon$ . Таким образом, мы показали, что оптимальная распределенная стратегия может быть сколь угодно точно аппроксимирована очень простыми обычными стратегиями. Это рассуждение можно развить, допустив не бесконечно малые значения  $\Delta t$ , и тогда всю систему можно описать как предел дискретных систем, причем броуновское движение заменяется случайным блужданием. Результаты такого рода интересны в приложениях; см. обсуждение в работе Christopheit [1].

Мы до сих пор не затронули один естественный вопрос: а когда существует обычная (не распределенная) оптимальная стратегия? Отложим ответ до конца параграфа.

### В. Формула Гирсанова

В изучавшихся выше стохастических системах коэффициент сноса  $f$ , коэффициент диффузии  $g$  и наблюдения  $y_i$  зависели только от текущего значения процесса. Для многих приложений такая постановка очень ограничительна. Будем рассматривать  $f$ ,  $g$  и  $y_i$  зависящими также от прошлого: они будут непреждающими функциями

$$f: C[0, 1] \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$g: C[0, 1] \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,$$

$$y_i: C[0, 1] \rightarrow \mathcal{Y},$$

где  $C[0, 1]$  — краткое обозначение для  $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ . Ясно, что поднятия функций  $f$ ,  $g$  и  $y_i$  будут функциями

$$F: {}^*C[0, 1] \times T \times K \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n,$$

$$G: {}^*C[0, 1] \times T \times K \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n,$$

$$Y_i: {}^*C[0, 1] \rightarrow {}^*\mathcal{Y};$$

но большой вопрос — относительно какой меры в  ${}^*C[0, 1]$  они будут поднятиями? Нам, конечно, нужно было бы, чтобы  $F$ ,  $G$  и  $Y_i$  были поднятиями относительно всех мер, индуцированных на  ${}^*C[0, 1]$  управляемыми процессами

$$X^U = \int F(X^U, s, U(Y(X^U), s)) ds + \int G(X^U, s, U(Y(X^U), s)) dB.$$

Но определить таким способом  $F$ ,  $G$  и  $Y_i$  невозможно, поскольку множество таких мер несчетно, и в большинстве своем они взаимно сингулярны. В рассмотренном выше более простом случае, когда вместо  $C[0, 1]$  стояло  $\mathbb{R}^n$ , поднятия выбирались относительно меры Лебега, а неравенство Крылова использовалось для доказательства того факта, что все они являются также поднятиями относительно мер, индуцированных процессами  $X^U$ . Сейчас мы тоже можем воспользоваться сходной идеей, но цена, которую придется за это заплатить, состоит в том, что коэффициенту диффузии  $g$  не будет больше позволено зависеть от стратегии  $u$ ; таким образом,  $g$  будет функцией

$$g: C[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n.$$

Суть в том, что если  $G$  — поднятие функции  $g$ , и

$$(21) \quad Z = \int G(Z, s) dB,$$

то (при разумных условиях) все меры, индуцированные процессами  $X^U$ , абсолютно непрерывны относительно меры, индуцированной процессом  $Z$ . Поэтому мы можем определить наши поднятия относительно этой последней меры, а об остальном позаботится абсолютная непрерывность.

Результат, который мы имеем в виду, — это нестандартная версия формулы Гирсанова. Чтобы его доказать, мы взглянем на стохастические дифференциальные уравнения с точки зрения, несколько отличающейся от той, что была использована в последнем параграфе. Это изменение точки зрения, строго говоря, не является необходимым (см. Cutland [1]); но мы полагаем, что альтернативный подход интересен не только как удобный способ доказательства формулы Гирсанова, но и сам по себе. Основная идея состоит в том, чтобы смотреть на коэффициент сноса как на нечто, меняющееся не траектории процесса, а исходную вероятностную меру.

Как обычно, мы работаем с гиперконечной осью времени  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$ , пространством элементарных событий  $\Omega = \{-1, 1\}^{T \times \{1, \dots, n\}}$  и нормированной считающей мерой  $P$ . Пусть  $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$  — естественная фильтрация на  $\Omega$ , и

$$B(\omega, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^t \omega_i(s) \sqrt{\Delta t} e_i$$

—  $n$ -мерное андерсоновское случайное блуждание. Обозначим через  $\Sigma$  множество всех внутренних отображений  $\sigma: T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ , равных нулю в точке  $t=0$ . Если дана неупреждающая функция  $H: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ , обозначим через  $P_{H,1}$  вероятностную меру

на  $\Omega$ , полученную нормировкой меры

$$(22) \quad \prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} H_i(B(\omega), s) \cdot \Delta B_i(\omega, s) \right),$$

где  $H_i$  и  $B_i$  суть  $i$ -е компоненты функций  $H$  и  $B$  соответственно. Эта мера отвечает случайному блужданию, полученному путем подбрасывания «несправедливой» монеты, а  $H$  — мера несправедливости. Заметим, что плотность меры  $P_{H, I}$  по мере  $P$  равна

$$(23) \quad \frac{P_{H, I}}{P}(\omega) = \prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n (1 + H_i(B(\omega), s) \cdot \Delta B_i(\omega, s)).$$

Если через  $E_{H, I}$  обозначить математическое ожидание по мере  $P_{H, I}$ , то простая выкладка дает

$$E_{H, I}(\Delta B(t) | \mathcal{A}_t)(\omega) = H(B(\omega), t) \Delta t.$$

Следовательно, процесс

$$(24) \quad W_{H, I}(\omega, t) = B(\omega, t) - \sum_0^t H(B(\omega), s) \Delta s$$

является мартингалом относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P_{H, I})$ . На самом деле это не просто мартингал.

**4.6.10. Лемма.** Пусть  $\|H(\sigma, t)\|^2 \Delta t \approx 0$  для всех  $\sigma$  и  $t$ . Тогда стандартная часть процесса  $W_{H, I}$  является броуновским движением относительно меры Лёба  $L(P_{H, I})$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Delta W_{H, I}(t)_i$  —  $i$ -я компонента приращения  $\Delta W_{H, I}(t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} E_{H, I}(\Delta W_{H, I}(t)_i^2 | \mathcal{A}_t)(\omega) &= \\ &= (\sqrt{\Delta t} - H_i(B(\omega), t) \Delta t)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} H_i(B(\omega), t) \sqrt{\Delta t} \right) + \\ &+ (-\sqrt{\Delta t} - H_i(B(\omega), t) \Delta t)^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} H_i(B(\omega), t) \sqrt{\Delta t} \right) = \\ &= \Delta t - H_i(B(\omega), t)^2 \Delta t^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $\|H(B(\omega), t)\|^2 \Delta t \approx 0$ , из предложения 4.4.18 следует, что компонента  $({}^\circ W_{H, I}^+)_i$  является броуновским движением относительно меры  $L(P_{H, I})$ . Теперь лемма следует из независимости компонент процесса  ${}^\circ W_{H, I}^+$ , которую можно доказать, проверив их некоррелированность и совместную гауссовость.  $\square$



Переписывая формулу (24) в виде

$$(25) \quad B(\omega, t) = \sum_0^t H(B(\omega), s) \Delta t + W_{H,I}(\omega, t),$$

мы видим, что если  $H$  является подходящим поднятием стандартной функции  $h$ , то  ${}^\circ B^+$  служит решением стохастического дифференциального уравнения

$$(26) \quad x(t) = \int_0^t h(x, s) ds + b(t)$$

на  $(\Omega, L(P_{H,I}))$ . В терминологии предыдущего параграфа это — слабое решение с броуновским движением  $b = {}^\circ W_{H,I}^+$ , зависящим от коэффициента  $h$ .

Взглянем еще раз на то, что мы делаем. Отправляясь от броуновского движения  ${}^\circ B^+$  на  $(\Omega, L(P))$ , мы строим такую новую меру  $L(P_{H,I})$ , что на пространстве  $(\Omega, L(P_{H,I}))$  «тот же самый» процесс служит решением уравнения (26). Связь между мерами  $L(P)$  и  $L(P_{H,I})$  дается формулой (23). Сейчас мы объясним, как обобщить этот метод на стохастические дифференциальные уравнения вида

$$(27) \quad x(t) = \int_0^t f(x, s) ds + \int_0^t g(x, s) db(s).$$

Идея та же, что и раньше: имея решение более простого уравнения

$$(28) \quad x(t) = \int_0^t g(x, s) db(s),$$

мы превратим его в решение уравнения (27), заменив исходную меру.

Пусть даны неупреждающие функции

$$F: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n, \quad G: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n,$$

причем матрица  $G(\sigma, t)$  при всех  $\sigma, t$  обратима. Для каждого  $\sigma \in \Sigma$  определим функцию

$$\sigma_G(t) = \sum_0^t G(\sigma_G, s) \Delta \sigma(s);$$

точно так же пусть  $X_G: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  — процесс, определяемый формулой

$$(29) \quad X_G(t) = \sum_0^t G(X_G, s) \Delta B(s).$$

Заметим, что формула (29) является нестандартной версией уравнения (28).

Определим неупреждающую функцию  $H: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  по формуле

$$(30) \quad H(\sigma, t) = G^{-1}F(\sigma_G, t).$$

Комбинируя формулы (29), (30) и (25), получаем

$$\begin{aligned} (31) \quad X_G(t) &= \sum_0^t G(X_G, s) \Delta B(s) = \\ &= \sum_0^t G(X_G, s) (H(B, s) \Delta t + \Delta W_{H, I}(s)) = \\ &= \sum_0^t F(X_G, s) \Delta t + \sum_0^t G(X_G, s) \Delta W_{H, I}(s), \end{aligned}$$

что является нестандартным аналогом формулы (27).

Давайте введем следующие обозначения. Будем писать  $P_{F, G}$  и  $W_{F, G}$  вместо  $P_{H, I}$  и  $W_{H, I}$  соответственно, подразумевая функцию  $H$ , определенную формулой (30). Когда  $X_G$  рассматривается как случайный процесс на  $(\Omega, P_{F, G})$ , мы будем обозначать его  $X_{F, G}$ ; если же он рассматривается как процесс на  $(\Omega, P)$ , мы будем сохранять старое обозначение  $X_G$ . Таким образом мы избежим необходимости каждый раз, упоминая какой-либо процесс, ссылаться явным образом на имеющуюся в виду меру.

Из леммы 4.6.10 и формулы (31) следует

**4.6.11. Лемма.** Пусть  $\|G^{-1}F(\sigma, t)\|^2 \Delta t \approx 0$  для всех  $\sigma$  и  $t$ , и пусть множества

$$(32) \quad \{(\omega, t) \mid {}^\circ F(X_{F, G}, t) \neq f({}^\circ X_{F, G}^+, {}^\circ t)\},$$

$$(33) \quad \{(\omega, t) \mid {}^\circ G(X_{F, G}, t) \neq g({}^\circ X_{F, G}^+, {}^\circ t)\}$$

имеют  $L(P_{F, G} \times \lambda)$ -меру нуль, где  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ . Тогда процесс  ${}^\circ X_{F, G}^+$  является решением уравнения

$$(34) \quad x(t) = \int_0^t f(x, s) ds + \int_0^t g(x, s) db(s)$$

на пространстве  $(\Omega, L(P_{F, G}))$ .

Напомним, что мы интересуемся не самим по себе решением уравнения (34), а плотностью отвечающей ему меры относи-

тельно меры, отвечающей решению уравнения

$$(35) \quad x(t) = \int_0^t g(x, s) db(s).$$

Поскольку процессы  $X_G$  и  $X_{F, G}$  имеют одни и те же траектории, такую плотность легко вычислить; в самом деле, формула (23) утверждает, что

$$(36) \quad \frac{P_{F, G}}{P} \{\omega\} = \prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n (1 + H_i(B(\omega), s) \Delta B_i(\omega, s)).$$

Чтобы исследовать выражение, стоящее в правой части, введем процесс

$$M: \Omega \times S \rightarrow {}^*\mathbb{R}$$

следующим образом:  $S$  — это ось времени, полученная из  $T$  вставкой  $(n-1)$  новых точек между  $t$  и  $t + \Delta t$ ,  $t \in T$ , т. е.

$$S = \{0, \Delta s, 2\Delta s, \dots, 1\},$$

где  $\Delta s = \Delta t/n$ . Таким образом, каждая точка из  $S$  имеет вид  $s = t + i\Delta s$ , где  $t \in T$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Определим процесс  $M$ , положив

$$(37) \quad M(0) = 1,$$

$$(38) \quad M(t + (i+1)\Delta s) = M(t + i\Delta s) (1 + H_i(B, t) \Delta B_i(t)).$$

Ясно, что  $M$  — мартингал относительно меры  $P$ , и

$$(39) \quad (P_{F, G}/P)(\omega) = M(\omega, 1).$$

**4.6.12. Лемма.** Если  $\|H(\sigma, t)\|^2 \leq K$  для всех  $\sigma$  и  $t$ , то

$$(40) \quad E(M(s)^2) \leq \exp(nK^2s)$$

для всех  $s \in S$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что если  $s = t + i\Delta s$ , то

$$\begin{aligned} E(M(s + \Delta s)^2) &= E(M(s)^2 (1 + H_i(B, t) \Delta B_i(t))^2) = \\ &= E(M(s)^2 (1 + H_i(B, t)^2 \Delta t)) \leq E(M(s)^2 (1 + nK^2 \Delta s)). \end{aligned}$$

По индукции легко видеть, что если  $f: S \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — такая внутренняя функция, что  $f(0) = 1$  и  $f(s + \Delta s) \leq (1 + nK^2 \Delta s)f(s)$ , то

$$f(s) \leq (1 + nK^2 \Delta s)^{s/\Delta s} \leq \exp(nK^2 s).$$

Беря  $f(s) = E(M(s)^2)$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

Если множество  $A \subset \Omega$  имеет бесконечно малую  $P$ -меру, то из формулы (39), неравенства Коши — Буняковского и последней леммы следует

$$P_{F,G}(A) = \int_A M(\omega, 1) dP \leq P(A)^{1/2} \left( \int M(\omega, 1)^2 dP \right)^{1/2} \approx 0.$$

Значит, мера  $L(P_{F,G})$  абсолютно непрерывна относительно меры  $L(P)$ . Следующая лемма ослабляет условие ограниченности функции  $H$ .

**4.6.13. Лемма.** Пусть  $F$  и  $G$  — неупреждающие  $S$ -ограниченные функции. Предположим, что для всех  $S$ -ограниченных  $\sigma \in \Sigma$  справедливо неравенство  $^{\circ}|G^{-1}F(\sigma, t)| < \infty$  при всех  $t \in T$ . Тогда мера  $L(P_{F,G})$  абсолютно непрерывна относительно меры  $L(P)$  и

$$(41) \quad \frac{dL(P_{F,G})}{dL(P)}(\omega) = \prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n (1 + (G^{-1}F)_i(X_G, s) \Delta B_i(s)).$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что заключение леммы справедливо, если функция  $|G^{-1}F|$  равномерно  $S$ -ограничена. Пусть для  $N \in \mathbb{N}$

$$C_N = \{\sigma \in \Sigma \mid \sup_{t \in T} |\sigma(t)| \leq N\};$$

заметим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} {}^{\circ}P_{F,G} \{\omega \mid X_{F,G}(\omega, \cdot) \in C_N\} = 1.$$

Если мера  $L(P_{F,G})$  не абсолютно непрерывна относительно меры  $L(P)$ , то должно найтись такое внутреннее множество  $A$ , содержащееся в некотором  $C_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , что  $L(P)(A) = 0$  и  $L(P_{F,G})(A) > 0$ . Определим функцию  $\tilde{F}: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  по формуле

$$\tilde{F}(\sigma, t) = \begin{cases} F(\sigma, t), & \text{если } |\sigma(s)| \leq N \text{ для всех } s \leq t, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция  $^{\circ}|G^{-1}\tilde{F}|$  равномерно  $S$ -ограничена и меры  $P_{\tilde{F},G}$  и  $P_{F,G}$  совпадают на  $C_N$ . Поэтому  $L(P_{\tilde{F},G})(A) = L(P_{F,G})(A) > 0$ , в то время как  $L(P)(A) = 0$ , что противоречит предыдущей лемме.  $\square$

Условия леммы 4.6.13 все еще далеки от оптимальных. Например,  $S$ -ограниченность функций  $F$  и  $G$  можно было бы заметить оценкой вида

$$|F(\sigma, t)|, |G(\sigma, t)| \leq K(1 + \|\sigma\|),$$

где  $\|\sigma\| = \sup_s |\sigma(s)|$ , но мы оставим все дальнейшие уточнения

читателю. Тем не менее, хотя нам это и не потребуется, мы преобразуем наше выражение для плотности  $dL(P_{F,G})/dL(P)$  к более привычному виду.

**4.6.14. Нестандартная формула Гирсанова.** Пусть  $F$  и  $G$  — неупреждающие  $S$ -ограниченные функции. Предположим, что для всех  $S$ -ограниченных  $\sigma \in \Sigma$  справедливо неравенство  $^0|G^{-1}F(\sigma, t)| < \infty$  при всех  $t \in T$ . Тогда мера  $L(P_{F,G})$  абсолютно непрерывна относительно меры  $L(P)$  и

$$(42) \quad \frac{dL(P_{F,G})}{dL(P)}(\omega) = {}^0 \prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n (1 + (G^{-1}F)_i(X_G, s) \Delta B_i(s)) = \\ = {}^0 \exp \left( \int_0^1 {}^t F A^{-1}(X_G, s) dX_G(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 (G^{-1}F)^2(X_G, s) ds \right),$$

где  $A = G \cdot {}^t G$ .

*Доказательство.* Нужно доказать только второе равенство в формуле (42). Имеем

$$\prod_{s=0}^1 \prod_{i=1}^n (1 + (G^{-1}F)_i(X_G, s) \Delta B_i(s)) = \\ = \exp \sum_{s=0}^1 \sum_{i=1}^n \ln(1 + (G^{-1}F)_i(X_G, s) \Delta B_i(s)) \approx \\ \approx \exp \sum_{s=0}^1 \sum_{i=1}^n \left\{ (G^{-1}F)_i(X_G, s) \Delta B_i(s) - \frac{1}{2} (G^{-1}F)_i^2(X_G, s) \Delta t \right\} = \\ = \exp \left\{ \int_0^1 {}^t (G^{-1}F)(X_G, s) dB - \frac{1}{2} \int_0^1 (G^{-1}F)^2(X_G, s) ds \right\},$$

где мы воспользовались разложением Тейлора  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ .

Вспоминая, что по формуле (29)  $dB = G^{-1}(X_G) dX_G$ , получаем

$$\exp \left\{ \int_0^1 {}^t (G^{-1}F)(X_G, s) dB - \frac{1}{2} \int_0^1 (G^{-1}F)^2(X_G, s) ds \right\} = \\ = \exp \left\{ \int_0^1 {}^t F A^{-1}(X_G, s) dX_G(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 (G^{-1}F)^2(X_G, s) ds \right\}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Нам для стохастической теории управления потребуется только факт абсолютной непрерывности меры  $L(P_{f,g})$  относительно меры  $L(P)$ , но не явная формула (42) для производной Радона — Никодима. Все, что нужно знать, — это что поднятия относительно меры  $P$  будут также поднятиями относительно  $P_{f,g}$ . Для других применений, однако, формула Гирсанова — факт величайшей важности; см. многочисленные примеры в книге Stroock, Varadhan [1].

### С. Оптимальное управление: зависимость от прошлого

Теперь мы рассмотрим задачу стохастического управления, в которой коэффициенты  $f, g$  и наблюдения  $y_i$  могут зависеть от прошлых значений процесса. Это означает, что  $f$  и  $g$  будут функциями

$$f: C[0, 1] \times [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: C[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n,$$

а  $y_i$  при каждом  $i$  будет функцией

$$y_i: C[0, 1] \rightarrow \mathcal{Y},$$

где  $\mathcal{Y}$ , как и прежде, счетное пространство наблюдений. Мы будем предполагать, что функции  $f$  и  $g$  — *неупреждающие* в том смысле, что для всех  $x, t$ , а значения  $f(x, t, a)$  и  $g(x, t)$  зависят только от значений  $\{x_s\}_{s \leq t}$  функции  $x$  до момента времени  $t$ . Аналогично, если

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p < 1$$

— моменты времени, когда производятся наблюдения, то  $i$ -е наблюдение  $y_i(x)$  зависит только от значений функции  $x$  до момента времени  $t_i$ . Последовательность наблюдений  $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)) \in \mathcal{Y}^p$  будет обозначаться через  $y(x)$ .

Пусть  $u$  — допустимая распределенная стратегия

$$u: \mathcal{Y}^p \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}(K),$$

как и в определении 4.6.2; нас интересует процесс

$$(43) \quad x^u = \int f(x^u, s, u(y(x^u), s)) ds + \int g(x^u, s) db(s).$$

Для данной функции потерь  $h: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  мы желаем минимизировать цену

$$j(u) = E(h(x^u)).$$

Наложим на функции  $f, g, h$  следующие условия.

#### 4.6.15. Условия. Пусть

- (i) функция  $h$  измерима и ограничена;
- (ii)  $f$  и  $g$  — ограниченные измеримые неупреждающие функции; функция  $f$  непрерывна по третьей переменной;

(iii) функция  $g$  равномерно липшицева по первой переменной, т. е. существует такое  $L \in \mathbb{R}$ , что  $|g(x, t) - g(y, t)| \leq L\|x - y\|$  для всех  $x, y, t$ , где  $\|\cdot\|$  — норма в  $C[0, 1]$ ;

(iv) для каждого  $n$  функция  $g^{-1}f(x, t, a)$  ограничена на множестве

$$A_n = \{(x, t, a) \in C[0, 1] \times [0, 1] \times K \mid \|x\| \leq n\}.$$

Следующий основной результат принадлежит Катлэнду (Cutland [6]).

**4.6.16. Теорема.** Если справедливы условия 4.6.15, то существует оптимальная распределенная стратегия.

*Доказательство.* Построим сначала нестандартные аналоги функций  $f, g, h$  и  $y$ . Пусть  $\lambda$  — нормированная считающая мера на  $T$ . Поскольку функция  $g$  непрерывна по первой переменной, найдется такое неупреждающее поднятие  $G: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$ , что для всех  $t$  кроме множества  $L(\lambda)$ -меры нуль и для всех околостандартных  $\sigma$

$$(44) \quad {}^\circ G(\sigma, t) = g({}^\circ \sigma^+, {}^\circ t)$$

(см. предложение 4.3.16).

Пусть

$$(45) \quad X_G(t) = \sum_{s=0}^t G(X_G, s) dB(s)$$

— процесс, определенный формулой (29). Поскольку функция  $f$  непрерывна по третьей переменной, она имеет такое неупреждающее поднятие  $F: \Sigma \times T \times {}^*K \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$ , что для  $L(P \times \lambda)$ -почти всех  $(\omega, t)$  и для всех  $a \in {}^*K$

$$(46) \quad {}^\circ F(X_G(\omega), t, a) = f({}^\circ X_G^+(\omega), {}^\circ t, {}^\circ a).$$

Пусть  $H$  — такое поднятие функции  $h$ , что

$$(47) \quad {}^\circ H(X_G(\omega)) = h({}^\circ X_G^+(\omega))$$

для  $L(P)$ -почти всех  $\omega$ .

Очевидно, функции  $F, G$  и  $H$  можно выбрать  $S$ -ограниченными. Заметим, что если брать только  $S$ -ограниченные  $\sigma$ , то функции  $F$  и  $G$  могут быть выбраны так, что функция  $|G^{-1}F(\sigma, t, a)|$  тоже будет  $S$ -ограниченной.

Для каждого  $i$  выберем  $\tilde{t}_i \in T$ , бесконечно близкое к моменту наблюдения  $t_i$ ; пусть

$$(48) \quad Y_i: \Sigma \rightarrow {}^*\mathcal{Y}$$

— такое поднятие функции  $y_i$ , что  $L(P)$ -почти наверное

$$(49) \quad {}^\circ Y_i(X_G(\omega)) = y_i({}^\circ X_G^+(\omega)),$$

причем  $Y_i$  зависит только от значений функции  $X_G(\omega)$  до момента времени  $\tilde{t}_i$ .

Теперь все готово для того, чтобы определить внутренние аналоги процессов  $x^u$ . Если задана внутренняя стратегия  $U: {}^*\mathcal{U}^p \times T \rightarrow {}^*K$ , определим функцию  $F^U: \Sigma \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}^n$  по формуле

$$(50) \quad F^U(\sigma, t) = F(\sigma, t, U(Y(\sigma), t)).$$

Тогда процесс  $X_{F^U, G}$  (т. е. процесс  $X_G$ , рассматриваемый на вероятностном пространстве  $(\Omega, P_{F^U, G})$ ) является гиперконечным аналогом процесса  $x^u$ , поскольку, согласно (31),

$$\begin{aligned} X_{F^U, G}(t) = & \sum_0^t F(X_{F^U, G}, s, U(Y(X_{F^U, G}), s)) \Delta t + \\ & + \sum_0^t G(X_{F^U, G}, s) \Delta W_{F^U, G}, \end{aligned}$$

где  ${}^\circ W_{F^U, G}^+$  — броуновское движение на  $(\Omega, L(P_{F^U, G}))$ .

Пусть распределенная стратегия  $u$  — это стандартная часть внутренней стратегии  $U$ . Покажем, что процесс  ${}^\circ X_{F^U, G}^+$  является решением уравнения (43). Пусть  $\Omega_0$  — множество всех таких  $\omega \in \Omega$ , что равенство (49) выполняется для всех  $i$  и равенство (46) — для всех  $a$  и почти всех  $t$ . Согласно лемме 4.6.6, если  $\omega \in \Omega_0$ , то

$$\begin{aligned} & {}^\circ \sum_0^t F(X_G(\omega), s, U(Y(X_G(\omega)), s)) \Delta t = \\ & = \int_0^{*t} f({}^\circ X_G^+(\omega), s, u(y({}^\circ X_G^+(\omega)), s)) ds. \end{aligned}$$

Поскольку  $\Omega_0$  имеет  $L(P)$ -меру 1, и мера  $L(P_{F^U, G})$  абсолютно непрерывна относительно меры  $L(P)$ , последнее равенство справедливо  $L(P_{F^U, G})$ -почти наверное. Аналогичные рассуждения показывают, что

$${}^\circ \sum_0^t G(X_G(\omega), s) \Delta W_{F^U, G} = \int_0^{*t} g({}^\circ X_G^+(\omega), s) d{}^\circ W_{F^U, G}^+$$

$L(P_{F^U, G})$ -почти наверное. Поскольку процессы  $X_G$  и  $X_{F^U, G}$  имеют одни и те же траектории, мы получаем, что процесс  ${}^\circ X_{F^U, G}^+$  является решением уравнения (43). Более того, по-



скольку функция  $H$  является поднятием функции  $h$  относительно меры  $P_{F^U, G}$ , мы получаем

$$j(u) = {}^\circ J(U),$$

где

$$J(U) = E_{F^U, G}(H(X_{F^U, G}(\omega)))$$

(здесь мы неявно предполагаем, что решение уравнения (43) единственно по распределению; такая единственность следует из условий Липшица на функцию  $g$ ).

Таким образом,

$$\inf\{j(u) \mid u \text{ — допустимая распределенная стратегия}\} = \\ = \inf\{{}^\circ J(U) \mid U \text{ — внутренняя стратегия}\}.$$

Поскольку второй инфимум достигается, первый тоже. Теорема доказана.  $\square$

Катлэнд в работе Cutland [6] обобщает доказанный выше результат таким образом, что в него включается рассмотренный нами ранее марковский случай. Это достигается рассмотрением систем, состоящих из двух взаимодействующих частей — «наблюдающей» и «действующей»; обе части моделируются стохастическими дифференциальными уравнениями. Общим частям позволяет зависеть от прошлого, но управлять шумом можно только в «наблюдающей» части. Схема наблюдения тоже слегка отличается от нашей. Не углубляясь далее в этот предмет, заметим только, что методы Катлэнда в основном похожи на наши; основное отличие состоит в том, что он использует \*-непрерывный подход, и, в частности, \*-броуновское движение вместо гиперконечного случайного блуждания (см. комментарий в конце § 4.5).

Хотелось бы отметить, что теорема Гирсанова использовалась в доказательстве теоремы 4.6.16 только для того, чтобы показать, что функции  $F$ ,  $G$ ,  $H$  и  $Y$  служат поднятиями функций  $f$ ,  $g$ ,  $h$  и  $y$  относительно всех мер  $P_{F^U, G}$ , а не только относительно меры  $P$ . Возникает естественный вопрос: является ли абсолютная непрерывность «наилучшим» условием существования одновременных поднятий такого типа или можно найти более слабое условие? Заметим, что, согласно андерсоновской теореме Лузина 3.4.9, функция  $*f$  служит поднятием функции  $f$  относительно всех стандартных мер  $*\mu$ , и, следовательно, абсолютная непрерывность требуется не всегда. Однако, поскольку внутренние меры, которые мы строим в нестандартной теории вероятностей, редко бывают стандартными, от теоремы Лузина часто бывает мало пользы; то, что нужно, — это обобщение, применимое к более широкому классу внутренних мер. Пока такие

результаты, по-видимому, неизвестны, и мы здесь тоже не делаем попытки доказать такой результат; ограничимся лишь довольно загадочным замечанием, что работа Андерсона о стандартно распределенных мерах (Anderson [3]), по-видимому, содержит ценные идеи для осуществления этого проекта.

Мы обещали сказать несколько слов о существовании обычных (не распределенных) оптимальных стратегий. В условиях теоремы 4.6.16 имеется общий метод превращения оптимальных распределенных стратегий в обычные оптимальные стратегии, который работает при подходящих условиях выпуклости на множество значений функции  $f$ . Идея состоит в том, что если множество значений функции  $f$  выпукло и замкнуто, то для любых  $x, t$  и для любой меры  $u \in \mathcal{M}(K)$  существует такое  $a(x, t, u) \in K$ , что

$$f(x, t, a(x, t, u)) = \int f(x, t, c) du(c).$$

Если задана распределенная стратегия  $u$ , то, согласно этой идее, надо было бы выбрать обычную стратегию  $\tilde{u}$  по формуле

$$\tilde{u}(y(x), t) = a(x, t, u(y(x), t)).$$

Однако  $y$  содержит лишь частичную информацию об  $x$ , и поэтому такое определение может не иметь смысла, так как мы можем получить  $y(x) = y(x')$ , но  $a(x, t, u(y(x), t)) \neq a(x', t, u(y(x'), t))$ . Чтобы обойти эту трудность, приходится предположить, что функция  $f$  имеет вид  $f(x, t, a) = f_1(x, t) \cdot f_2(t, a)$ . Как только сделано такое предположение, трудности исчезают, и наше рассуждение можно провести до конца (см. работу Elliott, Kohlmann [1]).

Если мартингалльный член тоже является управляемым, как в теореме 4.6.4, ситуация становится более сложной. Нам не только требуется условие выпуклости на область значений функции  $g^2$ , которое бы гарантировало существование такого элемента  $b(t, x, u) \in K$ , что

$$g^2(x, t, b(x, t, u)) = \int g^2(x, t, c) du(c),$$

но мы еще должны иметь возможность выбрать  $a(t, x, u) = b(t, x, u)$ . Возможно, простейший путь добиться этого — потребовать, чтобы функции  $f$  и  $g$  имели вид

$$f(x, t, a) = f_1(x, t) \cdot h(t, a), \quad g(x, t, a) = g_1(x, t) h^{1/2}(t, a)$$

для некоторой функции  $h$ . Получение оптимальной обычной стратегии в этом случае мы предоставили читателю.

Теория оптимального стохастического управления — замечательная область сама по себе; к тому же она является превос-

ходным испытательным полигоном для техники нестандартной теории вероятностей. Для тех, кто хочет познакомиться с нею поближе, рекомендуются следующие книги: Крылов [3], Elliott [1]; Davis M. H. A. [1].

#### 4.7. Стохастическое интегрирование в бесконечномерных пространствах

В последних двух параграфах этой главы мы обобщим теорию броуновского движения и стохастического интегрирования в двух направлениях: сначала мы рассмотрим процессы, принимающие значения в бесконечномерных пространствах, а затем — в следующем параграфе — обратимся к процессам с «многомерным временем».

Бесконечномерные броуновские движения важны для изучения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Возьмем в качестве примера одну задачу из гидродинамики. Напомним, что скорость жидкости в точке  $x$  в момент времени  $t$  задается функцией  $u(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению Навье — Стокса

$$(1) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \nu \Delta u + f(x, t),$$

(здесь  $p$  — давление,  $\nu$  — вязкость,  $f$  — внешняя сила) и уравнению несжимаемости

$$(2) \quad \nabla u = 0.$$

В каждом конкретном случае к уравнениям (1) и (2) нужно добавлять соответствующие граничные условия.

Приведенная здесь математическая формулировка наиболее часто встречается в литературе, но с точки зрения интегральных уравнений имеется другая, более удобная формулировка. С помощью условия несжимаемости  $\nabla u = 0$  можно исключить давление  $p$  из уравнения (1), так что система (1), (2) сводится к уравнению

$$(3) \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u + Kf,$$

где  $K$  — некоторый оператор проектирования. Конкретная форма оператора  $K$  сейчас для нас не важна, так что мы отсылаем заинтересованных читателей к работам Chow [1], Вишик и др. [1]. Уравнение (3) можно рассматривать как бесконечномерное эволюционное уравнение: для каждого  $t$  решение есть функция  $u_t(\cdot)$  из подходящего функционального пространства.

Предположение о том, что внешняя сила  $f$  полностью известна, не очень реалистично; во многих ситуациях было бы разумно добавить к ней стохастический член. Естественным кан-

дидатом является белый шум, и это приводит нас к стохастическому уравнению

$$(4) \quad du = v\Delta u dt - (u \cdot \nabla) u dt + h dt + g d\omega,$$

где  $h$  — детерминированная составляющая внешней силы, а  $\omega$  — «броуновское движение».

Каким может быть броуновское движение  $\omega$ ? Поскольку  $u$  принимает значения в бесконечномерном пространстве, таким же должно быть и  $\omega$ . Чтобы придать смысл уравнению (4), нужно изучить бесконечномерные броуновские движения и связанные с ними стохастические интегралы. Фактически это все, что будет сделано в данном параграфе; к самому уравнению (4) мы вернемся лишь совсем ненадолго.

### А. Броуновские движения на гильбертовых пространствах

Броуновские движения определяются в терминах гауссовских мер, инвариантных относительно поворотов. В § 3.5 (см. теорему Гросса) мы узнали, что в бесконечномерном случае такие меры существуют в довольно необычном смысле — не как меры на исходном гильбертовом пространстве, а как меры на более широком банаховом пространстве. Мы также обнаружили простой путь построения таких мер — путем опускания гиперконечномерной гауссовской меры с помощью топологии банахова пространства. Та же идея будет использована и для построения броуновских движений на гильбертовом пространстве: мы начнем с гиперконечномерного случайного блуждания и будем брать его стандартную часть относительно измеримой нормы.

Начнем с того, что напомним (и обобщим) некоторые результаты из § 2.2. Пусть  $(E, |\cdot|)$  — внутреннее нормированное линейное пространство; *стандартное порождающее множество* для  $E$  — это множество  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  элементов из  $E$ , для которых  $0 < {}^\circ|v_n| < \infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Элемент  $u \in E$  называется  *$|\cdot|$ -предоколостандартным* относительно множества  $\{v_n\}$ , если для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $v = \sum_{n=1}^k a_n v_n$ , где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , что  $|u - v| < \varepsilon$ . Множество всех предоколостандартных точек будем обозначать  $Pns(E, |\cdot|)$ . Пусть  $\sim_{|\cdot|}$  — отношение эквивалентности на  $Pns(E, |\cdot|)$ , определяемое следующим образом:  $u \sim_{|\cdot|} v$  тогда и только тогда, когда  $|u - v| \approx 0$ . Обозначим через  ${}^\circ u$  класс эквивалентности элемента  $u$  и определим норму  ${}^\circ|\cdot|$  на пространстве  ${}^\circ E_{|\cdot|} = Pns(E, |\cdot|)/\sim_{|\cdot|}$  с помощью равенства  ${}^\circ|u| = st|u|$ . Следующая лемма — это всего лишь слегка переформулированное предложение 2.2.2.

**4.7.1. Лемма.**  $({}^\circ E_{|\cdot|}, {}^\circ |\cdot|)$  — банахово пространство, и множество конечных линейных комбинаций  $\sum_{n=1}^k a_n {}^\circ v_n$  плотно в  ${}^\circ E_{|\cdot|}$ .

Отображение  $\text{st}_{|\cdot|}: \text{Pns}(E, |\cdot|) \rightarrow {}^\circ E_{|\cdot|}$ , определяемое равенством  $\text{st}_{|\cdot|}(x) = {}^\circ x$ , будем называть *отображением стандартной части*. Такое неправильное употребление терминологии оправдывается тем, что отображение  $\text{st}_{|\cdot|}$  имеет те же свойства, что и обычная стандартная часть. Например, подражая доказательству теоремы 3.2.4(1), получаем

**4.7.2. Предложение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — гиперконечное вероятностное пространство и  $Y: \Omega \rightarrow {}^\circ E_{|\cdot|} \in L(\mathcal{A})$  — измеримая случайная величина. Тогда существует такая внутренняя  $\mathcal{A}$ -измеримая случайная величина  $X: \Omega \rightarrow E$ , что  $\text{st}_{|\cdot|}(X(\omega)) = {}^\circ X(\omega) = Y(\omega)$  для  $L(P)$ -почти всех  $\omega$ .

Величина  $X$  называется *поднятием* случайной величины  $Y$ . Используя предложение 4.7.2, можно получить естественные аналоги результатов § 4.3 о поднятиях.

Пусть  $(E, (\cdot, \cdot))$  — гиперконечномерное пространство со скалярным произведением; соответствующая норма обозначается  $\|\cdot\|$ . Выберем ортонормированное порождающее множество  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ , и пусть  $\{e_n\}_{n \leq \gamma}$ ,  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  — продолжение множества  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  до базиса в  $E$ . Мы построим гиперконечномерное случайное блуждание на  $E$ .

Пусть  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$  — гиперконечная ось времени, и пусть  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $N \geq \gamma = \dim(E)$ . Пространство элементарных событий  $\Omega$  состоит из всех внутренних отображений  $\omega: \{1, 2, \dots, N\} \times T \rightarrow \{-1, 1\}$ , а  $P$  — нормированная считающая мера на  $\Omega$ . Вместо  $\omega(i, s)$  будем писать  $\omega_i(s)$ . Процесс  $B: \Omega \times T \rightarrow E$  определяется аналогично тому, как в § 4.5 определялось  $n$ -мерное случайное блуждание:

$$(5) \quad B(\omega, t) = \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{s=0}^t \sqrt{\Delta t} \omega_j(s) e_j.$$

Пусть  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$  — естественная фильтрация на  $\Omega$ , т. е. алгебра  $\mathcal{A}_t$  порождена отношением эквивалентности  $\omega \sim_t \omega' \Leftrightarrow \omega_i(s) = \omega'_i(s)$  для всех  $s < t$  и всех  $i$ .

Легко показать, что  $E(\|B_t\|^2) = \gamma \cdot t$ , так что  $B_t$  не является околостандартным в  $(E, \|\cdot\|)$ . Но конечномерные свойства этого процесса вполне правильны:

**4.7.3. Предложение.** Пусть  $Q: E \rightarrow E_0$  — проекция на конечномерное подпространство  $E_0$ . Тогда  ${}^\circ(QB_t)$  — броуновское движение на  $({}^\circ E_0, \|\cdot\|, {}^\circ \|\cdot\|)$ .

*Доказательство.* Нетрудно увидеть, что процесс  $QB$  является  $S$ -непрерывным; фактически это частный случай приведенной ниже теоремы 4.7.6, так что доказательство этого утверждения мы отложим. Чтобы доказать, что  $QB$  — броуновское движение, мы сначала рассмотрим распределения одномерных проекций. Пусть  $Q_1$  — проекция на единичный вектор  $e \in E_0$ , и пусть  $q_k(e) = (e, e_k)$  — соответствующие коэффициенты Фурье. Квадратическая вариация процесса  $Q_1 B$  равна

$$\begin{aligned} E([Q_1 B](t) - [Q_1 B](s) | \mathcal{A}_s) &= E\left(\sum_{r=s}^t \left(\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{\Delta t} \omega_i(r) q_i(e)\right)^2 \middle| \mathcal{A}_s\right) = \\ &= \sum_{r=s}^t \Delta t \sum_{i=1}^{\nu} q_i(e)^2 = t - s; \end{aligned}$$

мы здесь воспользовались независимостью случайных величин  $\omega_i(r)$  и  $\omega_j(r)$  при  $i \neq j$ . Значит, согласно предложению 4.4.18, процесс  ${}^{\circ}Q_1 B$  — броуновское движение.

Чтобы доказать, что процесс  ${}^{\circ}QB$  — броуновское движение, осталось показать, что одномерные проекции  ${}^{\circ}Q_1 B$  и  ${}^{\circ}\tilde{Q}_1 B$  на ортогональные оси  $e$  и  $\tilde{e}$  независимы. Используя независимость случайных величин  $\omega_i(s)$  и  $\omega_j(r)$  при  $(i, s) \neq (j, r)$ , получаем

$$\begin{aligned} E\left(\left(\sum_{s=0}^t \sum_{i=1}^{\nu} \omega_i(s) \sqrt{\Delta t} q_i(e)\right) \left(\sum_{r=0}^t \sum_{j=1}^{\nu} \omega_j(r) \sqrt{\Delta t} q_j(\tilde{e})\right)\right) &= \\ &= \sum_{s=0}^t \Delta t \sum_{i=1}^{\nu} q_i(e) q_i(\tilde{e}) = t \cdot (e, \tilde{e}) = 0; \end{aligned}$$

значит, процессы  ${}^{\circ}Q_1 B$  и  ${}^{\circ}\tilde{Q}_1 B$  некоррелированы и, следовательно, независимы.  $\square$

Пусть  $(H, \|\cdot\|)$  — гильбертово пространство  $({}^{\circ}E_{\|\cdot\|}, {}^{\circ}\|\cdot\|)$ . Мы только что видели, что гиперконечное случайное блуждание  $B$  в некотором смысле является броуновским движением на  $H$ . Но как превратить  $B$  в стандартный процесс? Мы уже убедились в том, что  $B$  не имеет стандартной части в  $H$ ; поэтому единственная надежда состоит в том, чтобы брать стандартную часть относительно более слабой топологии. Это в точности та же ситуация, с которой мы столкнулись в связи с теоремой Гросса в § 3.5. В самом деле, если для каждого конечномерного пространства  $F \subset H$  и каждого  $t \in [0, 1]$  мы обозначим через  $\mu_F^t$  меру на  $F$ , индуцированную проекцией  ${}^{\circ}Q_F B$  процесса  $B$  на  $F$ , то семейство  $\{\mu_F^t\}_{F \in \mathcal{F}}$  при каждом  $t$  образует проективную систему мер на  $H$ . Теорема Гросса утверждает, что если  $|\cdot|$  — норма на  $H$ , измеримая относительно проективной системы мер и  $G$  — пополнение пространства  $H$  по норме  $|\cdot|$ , то

семейство  $\{\mu_F^t\}$  порождает между  $\mu'$  на  $G$ . Доказательство теоремы Гросса и в особенности леммы 3.5.7 дает нам дополнительную информацию: величина  $B_t$  почти наверное околостандартна по норме  $|\cdot|$  (заметим, что, поскольку мы можем рассматривать  $E$  как подпространство пространства  ${}^*H$ , норма  $|\cdot|$  естественным образом продолжается на  $E$ ). Поскольку  $G = {}^{\circ}E_{|\cdot|}$ , стандартная часть  $b$  процесса  $B$  представляет собой процесс со значениями в  $G$ , а мера  $\mu^t$  есть не что иное, как мера, индуцируемая процессом  $b$  на  $G$ .

Пусть  $i: H \rightarrow G$  — отображение вложения; тройку  $(i, H, G)$  часто называют *абстрактным винеровским пространством*, а процесс  $b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow G$  — *броуновским движением* на  $(i, H, G)$ . Итак, из гиперконечномерного случайного блуждания  $B$  мы получили стандартное броуновское движение  $b$ , ассоциированное с пространством  $H$ , просто взяв стандартную часть относительно измеримой нормы. Более полную информацию о броуновских движениях в абстрактных винеровских пространствах можно найти, например, в книге Кюо [1].

С нестандартной точки зрения последние два абзаца можно рассматривать как излишне кружной путь; случайное блуждание  $B$  — это вполне законный математический объект, а существование его стандартной части  $b$  не будет играть в нашей теории стохастического интегрирования никакой роли.

### *В. Бесконечномерные стохастические интегралы*

Наша первая задача — выделить подходящий класс подынтегральных выражений для стохастических интегралов по гиперконечномерному случайному блужданию. Напомним, что в § 4.5, когда  $B$  было  $n$ -мерным случайным блужданием, подынтегральные выражения были матричнозначными процессами. В бесконечномерном случае можно ожидать, что подынтегральные выражения будут операторнозначными; поэтому, прежде чем переходить к стохастическому интегрированию, полезно кратко взглянуть на операторы, действующие в гиперконечномерных пространствах.

Пусть  $E$  и  $F$  — гиперконечномерные пространства со скалярным произведением, и пусть  $(\cdot, \cdot)$  и  $\|\cdot\|$  обозначают соответственно скалярное произведение и норму в  $E$  и  $F$ . Фиксируем два ортонормированных порождающих множества  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  в  $E$  и  $F$  соответственно. Линейное отображение  $A: E \rightarrow F$  называется *S-ограниченным*, если норма  $\|A\|$  конечна; оно называется *околостандартным*, если  $A(e_n) \in \text{Pns}(F, \|\cdot\|)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, если отображение  $A$  околостандартно и *S-ограничено*, оно отображает предоколостандартные точки в предоколостандартные.

Пусть  $\{e_n\}_{n \leq \eta}$  и  $\{f_n\}_{n \leq \eta}$  — продолжения множеств  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  до внутренних ортонормированных базисов в  $E$  и  $F$ . Линейное отображение  $A: E \rightarrow F$  называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}^{\circ}\|A^*f_n\|^2 = {}^{\circ}\sum_{n=1}^{\eta} \|A^*f_n\|^2 < \infty,$$

где  $A^*$  — оператор, сопряженный к  $A$ . Сумма  $\sum_{n=1}^{\eta} \|A^*f_n\|^2$  не зависит от выбора базиса  $\{f_n\}_{n \leq \eta}$ . Более того,

$$\|A^*f_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\eta} (e_m, A^*f_n)^2 = \sum_{m=1}^{\eta} (Ae_m, f_n)^2,$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\eta} \|A^*f_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\eta} \sum_{n=1}^{\eta} (Ae_m, f_n)^2 = \sum_{m=1}^{\eta} \|Ae_m\|^2,$$

откуда видно, что сумма  $\sum_{n=1}^{\eta} \|A^*f_n\|^2$  равна квадрату обычной нормы Гильберта — Шмидта оператора  $A$ . Эту норму мы обозначим

$$(6) \quad \|A\|_{(2)} = \left( \sum_{n=1}^{\eta} \|A^*f_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

Все операторы Гильберта — Шмидта, очевидно,  $S$ -ограничены; они также околостандартны:

$${}^{\circ}\sum_{m=k}^{\eta} (Ae_m, f_m)^2 = {}^{\circ}\sum_{m=k}^{\eta} (e_m, A^*f_m)^2 \leq {}^{\circ}\sum_{m=k}^{\eta} \|A^*f_m\|^2 \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $\mathcal{L}(E, F)$  пространство внутренних линейных операторов из  $E$  в  $F$ ; теперь множество подынтегральных выражений для стохастических интегралов, с которыми мы будем дальше работать, можно определить следующим образом.

**4.7.4. Определение.** Будем говорить, что процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  принадлежит классу  $SL^2(E, F)$ , если он — неупреждающий (относительно фильтрации  $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$ ), и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^1 \sum_{m=1}^k \|(X(\omega, s))^*(f_m)\|^2 ds \right\} = {}^{\circ}E \left\{ \int_0^1 \|X(\omega, s)\|_{(2)}^2 ds \right\} < \infty,$$



где звездочка означает сопряженный оператор, а  $\|\cdot\|_{(2)}$  — норма Гильберта — Шмидта.

Обратите внимание на положение знака стандартной части в определении 4.7.4: в левой части он стоит внутри обоих интегралов ( $E$  и  $\int$ ), а в правой части — снаружи от обоих интегралов. Такое равенство гарантирует, что  $X(\omega, s)$  — оператор Гильберта — Шмидта для почти всех  $(\omega, s)$  и что величина  $\|X(\omega, s)\|_{(2)}^2$  является  $S$ -интегрируемой относительно произведения мер на  $\Omega \times T$ .

**4.7.5. Определение.** Пусть  $B: \Omega \times T \rightarrow E$  — случайное блуждание, определенное формулой (5), и  $X \in SL^2(E, F)$ . Тогда *стохастический интеграл*  $\int X dB$  — это случайный процесс со значениями в пространстве  $F$ , определяемый равенством

$$(7) \quad \left( \int X dB \right) (\omega, t) = \sum_{s=0}^t X(\omega, s) (\Delta B(\omega, s)).$$

Данное определение — естественное обобщение определения 4.1.1, а также определения, данного в формуле (4.5.5). Покажем, что, ограничив подынтегральные выражения классом  $SL^2(E, F)$ , мы получаем интеграл с хорошими свойствами.

**4.7.6. Теорема.** Пусть  $X \in SL^2(E, F)$ . Тогда процесс  $\int X dB$  почти наверное  $S$ -непрерывен и предоклостандартен.

*Доказательство.* Пусть  $Y_k$  —  $k$ -я компонента процесса  $Y = \int X dB$ . Сделаем предварительное вычисление:

$$\begin{aligned} E(Y_k(t)^2) &= E\left(\left(\sum_{s=0}^t (X_s(\Delta B(s)), f_k)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\left(\sum_{s=0}^t \sum_{j=1}^v \omega_j(s) \sqrt{\Delta t} (X_s(e_j), f_k)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\sum_{s=0}^t \sum_{j=0}^v \Delta t (X_s(e_j), f_k)^2\right) = \\ &= E\left(\int_0^t \sum_{j=1}^v (e_j, X_s^*(f_k))^2 ds\right) = \\ &= E\left(\int_0^t \|X_s^*(f_k)\|^2 ds\right). \end{aligned}$$

Согласно неравенству Дуба 4.2.8, получаем

$$0 \leq E \left( \sup_{t \leq 1} \sum_{k=m}^{\eta} Y_k(t)^2 \right) \leq 4E \left( \int_0^t \sum_{k=m}^{\eta} \|X(\omega, s)^*(f_k)\|^2 ds \right).$$

Поскольку  $X \in SL^2(E, F)$ , правая часть стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , и, следовательно, процесс  $\int X dB$  почти наверное околостандартен.

Чтобы доказать  $S$ -непрерывность процесса  $Y$ , покажем сначала  $S$ -непрерывность каждой его компоненты  $Y_k$ . Напомним читателю, что, согласно теореме 4.2.16, квадратично интегрируемый мартингал непрерывен тогда и только тогда, когда его квадратическая вариация непрерывна. Чтобы применить этот результат к настоящей ситуации, воспользуемся следующим трюком: построим новую ось времени  $T'$ , поделив каждый промежуток  $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$  из  $T$  на  $\gamma$  частей (напомним, что  $\gamma$  — это размерность пространства  $E$ ). Введем новый мартингал  $\tilde{Y}_k: \Omega \times T' \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , который делает скачки  $\omega_j(t) \sqrt{\Delta t} \cdot (X_t(e_j), f_k)$  в моменты времени  $t + ((j-1)/\gamma)\Delta t$ . Очевидно,  $T \subset T'$  и  $Y_k$  есть ограничение процесса  $\tilde{Y}_k$  на  $T$ .

Смысл этого трюка в том, что квадратическая вариация процесса  $\tilde{Y}_k$  равна

$$[\tilde{Y}_k](t) = \sum_{s=0}^t \sum_{j=1}^{\gamma} (X_s(e_j), f_k)^2 \Delta t = \int_0^t \|X_s^*(f_k)\|^2 ds.$$

Поскольку  $\|X(\omega, s)^*(f_k)\|^2 \leq \|X(\omega, s)\|_{(2)}^2$ , а отображение  $(\omega, s) \mapsto \|X(\omega, s)\|_{(2)}^2$  является  $S$ -интегрируемым, то отображение  $s \mapsto \|X_s^*(f_k)\|^2$  тоже  $S$ -интегрируемо для почти всех  $\omega$ . Значит, процесс  $[\tilde{Y}_k]$  почти наверное  $S$ -непрерывен, и по теореме 4.2.16  $S$ -непрерывен процесс  $\tilde{Y}_k$ , а с ним и  $Y_k$ .

Но  $S$ -непрерывность процесса  $Y$  еще нуждается в доказательстве. Пусть  $\Omega' \subset \Omega$  — такое множество единичной меры, что для всех  $\omega \in \Omega'$  величина  $Y(\omega, t)$  предоколостандартна при каждом  $t$ , и функция  $Y_k(\omega, \cdot)$  является  $S$ -непрерывной при всех  $k \in \mathbb{N}$ . Возьмем  $\omega \in \Omega'$ ; пусть точки  $s, t \in T$  бесконечно близки. Из непрерывности функций  $Y_k$  следует, что

$$(8) \quad \sum_{k=1}^n (Y_k(\omega, t) - Y_k(\omega, s))^2 < 1/n$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Значит, неравенство (8) справедливо и для некоторого  $n = n_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Поскольку  $Y(\omega, t)$  и  $Y(\omega, s)$  околостандартны, то

стандартны, имеем

$$(9) \quad \sum_{k=n_0+1}^{\eta} (Y_k(\omega, t) - Y_k(\omega, s))^2 \approx 0.$$

Соединяя формулы (8) и (9), получаем  $\|Y(t) - Y(s)\|^2 \approx 0$ , что означает  $S$ -непрерывность функции  $Y(\omega, \cdot)$  при  $\omega \in \Omega'$ .  $\square$

Теперь покажем, как можно использовать гиперконечные интегралы  $\int X dB$  для определения стандартных интегралов  $\int x db$ , где  $b = st_1 \downarrow B$ . Пусть  $\mathcal{B}_{(2)}(H, K)$  — множество всех операторов Гильберта — Шмидта из  $H$  в  $K$ ; наделенное нормой  $\|\cdot\|_{(2)}$ , оно превращается в сепарабельное гильбертово пространство. Как обычно,  $(\Omega, \{\mathcal{B}_s\}, L(P))$  — внешняя фильтрация, порожденная фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{A}_s\}, P)$ . Класс  $b$ -интегрируемых процессов определяется следующим образом.

**4.7.7. Определение.** Будем говорить, что процесс  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}_{(2)}(H, K)$  принадлежит классу  $L^2(H, K)$ , если он согласован с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$ , и

$$E \left( \int_0^1 \|x(t)\|_{(2)}^2 dt \right) < \infty.$$

Как обычно, процесс  $\int x db$  будет определяться как стандартная часть процесса  $\int X dB$  для подходящего поднятия  $X$  процесса  $x$ ; но на этот раз понятие поднятия будет несколько более сложным. Напомним, что  $\mathcal{L}(E, F)$  — это множество всех внутренних линейных операторов из  $E$  в  $F$ . Если  $T \in \mathcal{B}_{(2)}(H, K)$ , определим оператор  $\tilde{T}: E \rightarrow F$  равенством

$$\tilde{T} = Q_F * T \upharpoonright E,$$

где  $Q_F: {}^*K \rightarrow F$  — ортогональная проекция. Заметим, что  $\tilde{T}$  — внутренний оператор Гильберта — Шмидта. Выберем ортонормированный базис  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  в пространстве  $\mathcal{B}_{(2)}(H, K)$ , и пусть  $\{\tilde{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — стандартное порождающее множество в  $\{\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{(2)}\}$ . Отображение  $h: \mathcal{B}_{(2)}(H, K) \rightarrow ({}^\circ\mathcal{L}(E, F))_{\|\cdot\|_{(2)}}$ ,  ${}^\circ\|\cdot\|_{(2)}$ , определяемое равенством  $h(T) = {}^\circ(\tilde{T})$ , является изоморфизмом, поэтому мы отождествим пространства  $\mathcal{B}_{(2)}(H, K)$  и  $({}^\circ\mathcal{L}(E, F))_{\|\cdot\|_{(2)}}$ .

**4.7.8. Определение.** Внутренний процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  называется *2-поднятием* процесса  $x: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}_{(2)}(H, K)$ , если

$X \in SL^2(E, F)$  и  $\text{st}_{\|\cdot\|_{(2)}}(X(\omega, t)) = x(\omega, \circ t)$  почти наверное на  $\Omega \times T$ .

**4.7.9. Лемма.** У любого процесса  $x \in L^2(H, K)$  имеется 2-поднятие.

*Доказательство.* Согласно предложениям 4.7.2 и 4.3.11, существует такой неупреждающий процесс  $Y: \Omega \times T \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ , что  $\text{st}_{\|\cdot\|_{(2)}}(Y(\omega, t)) = x(\omega, \circ t)$  почти наверное. Нам нужно модифицировать  $Y$  таким образом, чтобы получить процесс класса  $SL^2(E, F)$ . Определим для любого  $m \in {}^*\mathbb{N}$  процесс  $Y_m$  по формуле

$$Y_m(\omega, t) = \begin{cases} Y(\omega, t), & \text{если } \|Y(\omega, t)\|_{(2)} \leq m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку  $Y$  служит поднятием процесса  $x$ , то для  $m \in \mathbb{N}$  имеем

$$\begin{aligned} {}^\circ E \left( \int_0^1 \|Y_m(\omega, t)\|_{(2)}^2 dt \right) &= E \left( \int_0^1 {}^\circ \|Y_m(\omega, t)\|_{(2)}^2 dt \right) \leq \\ &\leq E \left( \int_0^1 \|x(\omega, t)\|_{(2)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

Значит, существует такое  $m_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что

$${}^\circ E \left( \int_0^1 \|Y_{m_0}(\omega, t)\|_{(2)}^2 dt \right) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \in \mathbb{N}}} {}^\circ E \left( \int_0^1 \|Y_m(\omega, t)\|_{(2)}^2 dt \right),$$

откуда следует  $S$ -интегрируемость функции  $\|Y_{m_0}(\omega, t)\|_{(2)}^2$ . Поскольку  $Y_{m_0}$  является поднятием процесса  $x$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left( \int_0^1 \sum_{n=1}^k \|Y_{m_0}(\omega, s)^*(f_n)\|^2 ds \right) &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left( \int_0^1 \sum_{n=1}^k \|x(\omega, s)^*(f_n)\|^2 ds \right) = E \left( \int_0^1 \|x(\omega, s)\|_{(2)}^2 ds \right) = \\ &= E \left( \int_0^1 {}^\circ \|Y_{m_0}(\omega, s)\|_{(2)}^2 ds \right) = {}^\circ E \left( \int_0^1 \|Y_{m_0}(\omega, s)\|_{(2)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

что и доказывает, что процесс  $Y_{m_0}$  является 2-поднятием процесса  $x$ .  $\square$

Мы оставляем читателю проверку того факта, что если  $X$  и  $Y$  — два 2-поднятия процесса  $x$ , то  $\int X dB \approx \int Y dB$  почти на-

верное. Имея в виду оба этих утверждения, мы можем дать следующее определение.

**4.7.10. Определение.** Пусть  $x \in L^2(H, K)$ . Тогда *стохастический интеграл*  $\int x db$  — это стандартная часть процесса  $\int X dB$ , где  $X$  — некоторое 2-поднятие процесса  $x$ .

Заметим, что стохастический интеграл не зависит от того, какая измеримая норма используется в построении процесса  $b$ ; фактически само  $b$  входит в теорию только как средство записи выражения  $\int x db$ .

Теперь можно было бы доказать, что стохастический интеграл, определенный в 4.7.10, совпадает с интегралом, определяемым стандартными методами — например, в книге Кюо [1]. Это делается во многом так же, как в одномерной теории § 4.4; но мы не будем проводить этих рассуждений здесь. Заинтересованный читатель может обратиться к работе Lindström [5].

Нестандартный подход к бесконечномерным стохастическим интегралам имеет два преимущества. Во-первых, интеграл имеет простое, интуитивно ясное определение как интеграл Стильтьеса по траекториям; во-вторых, броуновское движение естественно строится как случайное блуждание на гиперконечномерном линейном пространстве. При этом не возникает необходимости ни в измеримых нормах, ни в теореме Гросса. Заметим также, что, хотя броуновское движение  $b$  принимает значения в пространстве  $G$ , подынтегральное выражение  $x$  принимает значения в  $\mathcal{B}_{(2)}(H, K)$ . При стандартном подходе (см., например, Кюо [1]) это требует довольно громоздкого исследования взаимоотношений между  $H$  и  $G$ , а также между отображениями на эти два пространства. Нестандартная теория не нуждается в пространстве  $G$ , и, таким образом, упомянутое исследование не требуется.

### *С. Замечание о стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных*

Вернемся, наконец, к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных. Сначала мы рассмотрим упрощенную, линеаризованную версию уравнения (4):

$$(10) \quad du = (v\Delta u - (v\nabla) \cdot u + h)dt + gdw.$$

Здесь  $v$  — постоянное равновесное решение детерминированного уравнения Навье — Стокса, а  $u(x, t)$  — скорость, флуктуирующая вокруг этого равновесия из-за случайных возмущений  $gdw$ . В качестве модели физической реальности уравнение (10) имеет весьма ограниченный интерес, но зато оно точно решается.

Заметим, что уравнение (10) имеет вид

$$(11) \quad dx(t) = Ax(t)dt + \xi(x(t))db(t),$$

где  $A$  — неограниченный линейный оператор на гильбертовом пространстве  $K$  (в уравнении (10)  $K = L^2(D)$ , где  $D$  — рассматриваемая область), а  $b$  — это бесконечномерное броуновское движение. Имеет место следующий общий результат.

**4.7.11. Теорема.** Пусть  $A: K \rightarrow K$  — инфинитезимальный генератор строго непрерывной полугруппы  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , имеющий всюду плотную область определения, а функция  $\xi: [0, 1] \times K \rightarrow \mathcal{B}_{(2)}(H, K)$  измерима. Предположим, что существует такое  $L \in \mathbb{N}$ , что  $\|\xi(t, u) - \xi(t, v)\|_{(2)} \leq L \cdot \|u - v\|$  для всех  $t, u, v$ .

Предположим также, что  $\int_0^1 \|\xi(t, 0)\|_{(2)}^2 dt < \infty$ . Наконец, пусть

$x_0$  —  $\mathcal{B}_0$ -измеримое квадратично интегрируемое начальное условие. Тогда уравнение

$$(12) \quad dx(t) = Ax(t)dt + \xi(t, x(t))db(t), \quad x(0) = x_0$$

имеет непрерывное ослабленное решение, а также мягкое интегральное решение.

Есть несколько способов определения того, что такое «решение» уравнения (12); мы остановились на следующих двух определениях.

Процесс  $x$  называется *ослабленным решением*, если

$$(13) \quad x(t) = x_0 + A \int_0^t x(s) ds + \int_0^t \xi(s, x(s)) db(s);$$

он называется *мягким интегральным решением*, если

$$(14) \quad x(t) = T_t x_0 + \int_0^t T_{t-s} \xi(s, x(s)) db(s),$$

где  $\{T_t\}$  — полугруппа, порождаемая оператором  $A$ .

Результаты типа теоремы 4.7.11 хорошо известны в стандартной литературе, и общий результат (см. Chołpowska-Michalik [1]) утверждает, что процесс является ослабленным решением тогда и только тогда, когда он является мягким интегральным решением. Мы ограничимся очерком стратегии построения решений последнего типа.

Вложим обычным образом пространства  $H$  и  $K$  в гиперконечномерные пространства  $E$  и  $F$ ; пусть  $B$  — случайное блуждание на  $E$ . Полугруппу  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  будем обозначать  $\{^*T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ;

пусть  $\tilde{T}_{\Delta t}: F \rightarrow F$  — оператор, определенный формулой

$$\tilde{T}_{\Delta t} = Q_F^* T_{\Delta t} \upharpoonright F,$$

где  $Q_F: {}^*K \rightarrow F$  — проекция. Определим внутреннюю полугруппу  $\{\tilde{T}_t\}_{t \in T}$ , положив  $\tilde{T}_{k\Delta t} = (\tilde{T}_{\Delta t})^k$ , и пусть

$$\tilde{A} = (I - \tilde{T}_{\Delta t}) / \Delta t.$$

Пусть  $\Xi: T \times F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  — равномерное поднятие функции  $\xi$  относительно нормированной считающей меры  $\lambda$  на  $T$  (это означает, что найдется такое множество  $T' \subset T$  меры Лёба 1, что для всех  $t \in T'$  и всех околостандартных  $v \in K$  справедливо равенство  $\text{st}_{\|\cdot\|_{(2)}}(\Xi(t, v)) = \xi({}^\circ t, {}^\circ v)$ . Функцию  $\Xi$  мы выберем  $S$ -липшицевой по второй переменной (т. е.  $|\Xi(t, v_1) - \Xi(t, v_2)| \leq C|v_1 - v_2|$  для конечного  $C$ . — *Перев.*) и такой, что функция  $\|\Xi(t, 0)\|_{(2)}^2$  является  $S$ -интегрируемой функцией на  $T$ . Наконец, пусть  $X_0$  — это  $\mathcal{A}_\delta$ -измеримое 2-поднятие случайной величины  $x_0$  при некотором  $\delta \approx 0$ . Теперь уравнению (14) соответствует гиперконечное разностное уравнение

$$(15) \quad X_t = \tilde{T}_t X_0 + \sum_{s=\delta}^t T_{t-\Delta t-s} \Xi(s, X_s) \Delta B(s).$$

Это уравнение, конечно же, имеет решение; но, чтобы убедиться в  $S$ -непрерывности этого решения, требуется честная работа по установлению необходимых оценок (см. Lindström [5]).

Поверим, что процесс  $X$  околостандартен и  $S$ -непрерывен; тогда, очевидно,  $\tilde{T}_{t-\Delta t-s} \Xi(s, X(s))$  является 2-поднятием функции  $T_{t-s} \xi(s, {}^\circ X(s))$  на множестве меры 1. Поскольку  $T_{tx_0} = \tilde{T}_t X_0$ , мы, полагая  $x({}^\circ t) = {}^\circ X(t)$ , из уравнения (15) получаем уравнение

$$(16) \quad x(t) = T_t x_0 + \int_0^t T_{t-s} \xi(s, x(s)) db(s),$$

т. е.  $x$  является мягким интегральным решением уравнения (12). По индукции легко видеть, что уравнение (15) эквивалентно уравнению

$$(17) \quad X_t = X_0 + \sum_{s=\delta}^t \tilde{A}(X(s)) \Delta t + \sum_{s=\delta}^t \Xi(s, X(s)) dB(s),$$

откуда можно получить прямое нестандартное доказательство того факта, что  $x$  является также и ослабленным решением уравнения (12) (см. Lindström [5]).

Мы завершим наше обсуждение несколькими замечаниями о полном уравнении Навье — Стокса (4). Нас интересуют пространственно-временные статистические решения как самого

уравнения Навье—Стокса, так и стохастической версии этого уравнения в ограниченной области. На эту тему имеется обширная литература; мы упомянем, в частности, работу Bensoussan, Temam [2], а также вклад школы Вишика; обзор и более полные ссылки см. в работе Вишик и др. [1]. Мы укажем, как рассматривается эта задача с нестандартной точки зрения.

Метод состоит в том, чтобы заменить «бесконечномерную» систему Навье—Стокса ее «конечномерными» галеркиными приближениями. В конечномерной ситуации не так уж трудно построить пространственно-временные статистические решения. А если мы к тому же можем доказать необходимые равномерные оценки, то можно использовать теорему Прохорова и получить решение бесконечномерной системы.

При нестандартном подходе мы можем заменить данную бесконечномерную систему гиперконечномерной системой; в стохастическом случае конечномерные аппроксимации будут стохастическими уравнениями Ито—мы изучали их в § 4.5. Раз так, мы можем использовать теорию из § 3.4 и 3.5 и перейти от конечномерных аппроксимаций к бесконечномерной системе—при условии (и это, конечно, является решающим моментом в рассуждении), что мы установим необходимые равномерные (т. е. не зависящие от размерности) оценки для конечномерных аппроксимаций.

Мы приглашаем читателя взглянуть на эту теорию в предлагаемой нестандартной перспективе; мы полагаем, что она дает ясные концептуальные рамки для такого рода задач. Сходные вопросы об уравнении Эйлера тоже можно интерпретировать на этом языке: см. Albeverio, Høegh-Krohn [10], Albeverio, de Faria и др. [1], Albeverio, Høegh-Krohn, Merlini [1]. Другие интересные применения бесконечномерных стохастических дифференциальных уравнений см. в работах Faris, Jona-Lasinio [1], Jona-Lasinio, Mitter [1], Loges [1].

#### 4.8. Белый шум и броуновское движение Леви

Пусть  $(E, \mathcal{E}, m)$ —пространство с мерой, а  $\mathcal{E}_m$ —семейство всех множеств из  $\mathcal{E}$ , имеющих конечную меру. Зафиксируем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Назовем  $n$ -мерным *белым шумом* на  $(E, \mathcal{E}, m)$  относительно пространства  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  такое семейство случайных векторов

$$(1) \quad X = \{X(A)\}_{A \in \mathcal{E}_m}, \quad X(A): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

для которого справедливы условия:

- (i) вектор  $X(A)$  имеет гауссовское распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций  $m(A) \cdot I$ , где  $I$ —единичная матрица;



- (ii) если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $X(A)$  и  $X(B)$  независимы, и  $X(A) + X(B) = X(A \cup B)$   $P$ -почти наверное.

**4.8.1. Пример.** Пусть  $(E, \mathcal{E}, m)$  — единичный интервал, снабженный борелевской  $\sigma$ -алгеброй и лебеговской мерой. Пусть  $b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное броуновское движение. Определим семейство  $X = \{X(A)\}$  по формуле

$$X(A) = \int_0^1 I_A db,$$

где  $I_A$  — индикаторная функция множества  $A \subset E$ . Тогда  $X$  — белый шум на  $(E, \mathcal{E}, m)$ .

Пример 4.8.1, подчеркивая тесную связь между белым шумом на  $[0, 1]$  и броуновским движением, вводит нас в тему данного параграфа. Следуя работам Столла (Stoll [1], [2]), мы покажем, что можно легко обобщить андерсоновскую конструкцию броуновского движения и построить с ее помощью белый шум. А имея белый шум на  $\mathbb{R}^d$ , мы можем обратить процедуру примера 4.8.1 и получить броуновское движение Леви, зависящее от  $d$  «временных» параметров, в виде стохастического интеграла по белому шуму. Наконец, мы приведем один вариант теоремы Столла, показывающей, как это представление в виде стохастического интеграла можно использовать для получения одного нового принципа инвариантности для броуновского движения Леви.

### А. Построение белого шума

Сначала построим нестандартный аналог белого шума. Пусть  $(Y, \mathcal{D}, \mu)$  — неатомарное гиперконечное пространство с мерой, т. е.  $\mathcal{D}$  — семейство всех внутренних подмножеств множества  $Y$ , и  $\mu(\{x\}) \approx 0$  для любого одноэлементного подмножества  $\{x\}$ . Возьмем в качестве  $\Omega$  множество всех внутренних отображений из  $Y$  в  $\{-1, 1\}$ , и пусть  $\mathcal{A}$  — семейство всех внутренних подмножеств множества  $\Omega$  и  $P$  — равномерная вероятностная мера на  $\Omega$ . Для каждого  $A \in \mathcal{D}$  положим

$$(2) \quad \chi(A) = \sum_{a \in A} \omega(a) \sqrt{\mu(a)};$$

отображение  $A \mapsto \chi(A)$  называется  $S$ -белым шумом на  $Y$ . Равенство (2) является очевидным обобщением андерсоновского случайного блуждания (см. § 3.3).

Прежде чем определить стандартную часть отображения  $\chi$ , сделаем одно предварительное вычисление. Пусть  $A, B \in \mathcal{D}$ ; определим функцию  $\varepsilon: A \Delta B \rightarrow \{-1, 1\}$ , положив ее равной 1 на

$A - B$  и  $-1$  на  $B - A$ . Тогда

$$\begin{aligned} (3) \quad E((\chi(A) - \chi(B))^2) &= E\left(\left(\sum_{a \in A \Delta B} \varepsilon(a) \omega(a) \sqrt{\mu(a)}\right)^2\right) = \\ &= E\left(\sum_{a, b \in A \Delta B} \varepsilon(a) \varepsilon(b) \omega(a) \omega(b) \sqrt{\mu(a) \mu(b)}\right) = \\ &= \sum_{a \in A \Delta B} \mu(a) = \mu(A \Delta B). \end{aligned}$$

Здесь предпоследний шаг использует независимость  $\omega(a)$  и  $\omega(b)$  при  $a \neq b$ . Таким образом, если множества  $A$  и  $B$   $L(\mu)$ -почти наверное совпадают, то случайные величины  $\chi(A)$  и  $\chi(B)$   $L(P)$ -почти наверное равны.

Для каждого измеримого по Лёбу множества  $A$  с  $Y$  выберем такое  $A' \in \mathcal{D}$ , что  $L(P)(A \Delta A') = 0$ . Определим стандартную часть отображения  $\chi$  как семейство

$$\{X(A)\}_{A \in L(\mathcal{D})_{L(\mu)}},$$

где  $L(\mathcal{D})$  —  $\sigma$ -алгебра  $L(\mu)$ -измеримых множеств, и

$$(4) \quad X(A)(\omega) = {}^\circ\chi(A')(\omega).$$

Нетрудно проверить, что  $\{X(A)\}$  — одномерный белый шум на пространстве Лёба  $(Y, L(\mathcal{D}), L(\mu))$ : часть (ii) определения следует из формулы (3), а часть (i) доказывается с помощью вычисления преобразования Фурье аналогично второму доказательству теоремы 3.3.5(ii).

Пусть  $E$  — хаусдорфово пространство и  $m$  —  $\sigma$ -конечная радоновская мера на  $E$ . Предположим, что если  $x$  — изолированная точка пространства  $E$ , то  $m\{x\} = 0$ . Зафиксируем некоторое достаточно богатое гиперконечное подмножество  $Y \subset {}^*E$  (в данном случае *богатое* означает, что  $\text{st}(Y) = E$ ) и такую неатомарную внутреннюю меру  $\mu$  на  $Y$ , что  $m = L(\mu) \circ \text{st}^{-1}$  (см. следствие 3.4.10). Если  $X$  — белый шум на  $(Y, L(\mathcal{D}), L(\mu))$ , то равенство

$$(5) \quad \tilde{X}(A) = X(\text{st}^{-1}(A))$$

индуцирует белый шум  $\tilde{X}$  на  $(E, \varepsilon, m)$ . Таким образом, на любом пространстве с  $\sigma$ -конечной радоновской мерой (такой, что мера изолированных точек равна нулю) существует белый шум, индуцированный некоторым  $S$ -белым шумом.

Заметим, что условие, сформулированное в предыдущем абзаце, сильнее, чем это, строго говоря, необходимо. Но поскольку мы в основном будем заниматься белым шумом на  $\mathbb{R}^d$ , это условие более чем достаточно для наших целей.

Мы рассмотрели выше только одномерный белый шум; но обобщение конструкции на  $n$  измерений тривиально: можно взять просто  $n$  независимых одномерных процессов, бегущих по ортогональным осям.

### В. Стохастические интегралы и теорема непрерывности

Перейдем к стохастическому интегрированию. Без фильтраций и понятия неупреждаемости нельзя ожидать большего, чем интегрирование детерминированных функций, но оказывается, что в этом параграфе нам только это и потребуется. Пусть  $\chi$  —  $S$ -белый шум, определенный формулой (2), и  $F: Y \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция. *Стохастический интеграл* функции  $F$  по белому шуму  $\chi$  определяется следующим образом:

$$(6) \quad \left( \int F d\chi \right) (\omega) = \sum_{a \in Y} F(a) \chi(a) (\omega) = \sum_{a \in Y} F(a) \omega(a) \sqrt{\mu(a)}.$$

Простое вычисление, аналогичное выкладке (3), показывает, что

$$(7) \quad E \left( \left( \int F d\chi \right)^2 \right) = \int F(a)^2 d\mu(a),$$

так что разумным классом интегрируемых функций является класс  $SL^2(\mu)$ .

Заметим, что если мера  $\mu$  неатомарна и  $F \in SL^2(\mu)$ , то мера  $\mu_F(A) = \int_A F^2 d\mu$  тоже неатомарна и отображение  $A \mapsto \int_A F d\chi$  является белым шумом на  $(Y, \mathcal{D}, \mu_F)$ . В частности, случайная величина  $\int I_A F d\chi$  имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией  $\int_A F^2 d\mu$ .

Если  $\tilde{X}$  — белый шум на радоновском пространстве  $(E, \mathcal{E}, m)$ , индуцированный шумом  $\chi$ , можно для любого  $f \in L^2(m)$  определить стохастический интеграл

$$(8) \quad \int f d\tilde{X} = \int f d\chi,$$

где  $F \in SL^2(\mu)$  — поднятие функции  $f$ . Из равенства (7) следует, что этот интеграл не зависит от выбора поднятия. Мы оставляем читателю проверку того, что наше определение приводит к тому же результату, что и стандартное. (Стандартное определение следует обычной процедуре: интеграл определяется очевидным образом для ступенчатых функций, а затем продолжается по непрерывности с использованием  $L^2$ -изометрии (7).)

Обобщение на большие размерности непосредственно: если  $\chi$  —  $n$ -мерный  $S$ -белый шум и  $F: Y \rightarrow {}^*\mathbb{R}^m \otimes {}^*\mathbb{R}^n$  — внутренняя функция (напомним, что  ${}^*\mathbb{R}^m \otimes {}^*\mathbb{R}^n$  — это пространство  $\mathbb{R}^*$ -значных  $(m \times n)$ -матриц), то определение (6) обобщается на интегралы вида  $\int F d\chi$  так же, как и раньше:

$$\int F d\chi = \sum_{a \in Y} F(a) \cdot \chi(a),$$

где точка  $\cdot$  означает умножение матрицы на вектор.

Стохастические интегралы, которые мы определили в этом параграфе, — это просто случайные величины; в отличие от интегралов по мартингалам они не зависят ни от какого дополнительного параметра. Частично можно возместить эту потерю, рассматривая интеграл  $\left(\int I_A F(x) d\chi\right)_{A \in \mathcal{D}}$  как  $S$ -белый шум на  $(Y, \mathcal{D}, \mu_F)$ ; но часто еще интереснее интегрировать зависящее от двух переменных ядро  $F(x, y)$  и изучать получающийся интеграл  $\int F(x, y) d\chi(y)$  как случайный процесс, параметризованный элементами  $x \in Y$ . Столл построил броуновское движение Леви в терминах как раз таких интегралов. В качестве первой иллюстрации посмотрим, что получается в одномерном случае.

**4.8.2. Пример.** Пусть  $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1\}$  — гиперконечная ось времени и  $\mu$  — нормированная считающая мера на  $T$ . Если  $\Omega$  — множество всех внутренних отображений из  $T$  в  $\{-1, 1\}$  и  $P$  — равномерная вероятностная мера на  $\Omega$ , то

$$\chi(A) = \sum_{a \in A} \omega(a) \sqrt{\mu(a)} \approx \sum_{a \in A} \omega(a) \sqrt{\Delta t}, \quad \omega \in \Omega,$$

— это  $S$ -белый шум на  $T$ . Положим

$$(9) \quad F(t, a) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - a) + \frac{1}{2};$$

тогда процесс

$$(10) \quad B(t) = \int_T F(t, a) d\chi(a)$$

— это андерсоновское случайное блуждание. Таким образом, мы обратили пример 4.8.1 и получили броуновское движение в виде стохастического интеграла по белому шуму на отрезке  $[0, 1]$ . Для дальнейших ссылок отметим, что

$$(11) \quad B(t) - B(s) = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sgn}(t - a) - \operatorname{sgn}(s - a)) d\chi(a).$$

Наш план состоит в том, чтобы построить броуновское движение Леви на  $\mathbb{R}^d$  в духе последнего примера; но прежде чем

перейти к этому построению, нужно более детально описать нестандартную теорию белого шума на евклидовом пространстве.

Внутреннее подмножество  $\Gamma \subset {}^*\mathbb{R}^d$  называется *гиперконечной решеткой*, если оно имеет вид

$$\Gamma = \{(k_1 \Delta t, \dots, k_d \Delta t) \mid (k_1, \dots, k_d) \in {}^*\mathbb{Z}^d, \max_{1 \leq i \leq d} |k_i| \leq N\},$$

где  $\Delta t \approx 0$ , а  $N \in {}^*\mathbb{N}$  таково, что  $N \cdot \Delta t$  бесконечно велико. Равномерная внутренняя мера  $\mu$  на  $\Gamma$ , определяемая равенством

$$\mu(\{(k_1 \Delta t, \dots, k_d \Delta t)\}) = (\Delta t)^d,$$

индуцирует меру Лебега на  $\mathbb{R}^d$ . Как обычно,  $\Omega$  — это множество всех внутренних функций из  $\Gamma$  в  $\{-1, 1\}$ ,  $P$  — равномерная вероятностная мера на  $\Omega$  и

$$\chi(A) = \sum_{a \in A} \omega(a) \sqrt{\mu(a)} = \sum \omega(a) (\Delta t)^{d/2}$$

—  $S$ -белый шум на  $\Gamma$ .

Нас интересуют внутренние процессы  $I: \Omega \times \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , которые можно получить в виде стохастического интеграла  $I(x) = \int F(x, y) d\chi(y)$ . Для того чтобы у этих процессов были стандартные части, они сами должны быть достаточно регулярны. Мы будем пользоваться следующим понятием  $S$ -непрерывности.

**4.8.3. Определение.** Внутренний процесс  $Z: \Omega \times \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  называется  *$S$ -непрерывным*, если для почти всех  $\omega$  справедливо  $Z(\omega, x) \approx Z(\omega, y)$  при условии, что  $x$  и  $y$  околостандартны и  $x \approx y$ .

Отметим, что нас интересует  $S$ -непрерывность только в околостандартных точках.

Следующая теорема полезна при доказательстве  $S$ -непрерывности различных стохастических интегралов.

**4.8.4. Теорема.** Пусть  $\Gamma$  — гиперконечная решетка в  $\mathbb{R}^d$  и  $F: \Gamma \times \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция. Предположим, что существуют такие положительные действительные числа  $\alpha$  и  $C$ , что

$$(12) \quad \int |F(x, a) - F(y, a)|^2 d\mu(a) \leq C \|x - y\|^\alpha$$

для всех  $x, y \in \Gamma$ . Тогда статистический интеграл  $x \mapsto \int F(x, a) d\chi(a)$  является  $S$ -непрерывным.

Основной вероятностный ингредиент, требуемый в доказательстве этой теоремы, — это гиперконечная версия теоремы Колмогорова о непрерывности.

**4.8.5. Предложение.** Пусть  $\Gamma$  — гиперконечная решетка в  ${}^*\mathbb{R}^d$  и  $Z: \Omega \times \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренний случайный процесс. Если существуют такие положительные действительные числа  $p, r, K$ , что

$$(13) \quad E(|Z(x) - Z(y)|^p) \leq K \|x - y\|^{d+r}$$

для всех  $x, y \in \Gamma$ , то процесс  $Z$  является  $S$ -непрерывным.

Сначала покажем, как предложение 4.8.5 используется в доказательстве теоремы 4.8.4.

*Доказательство теоремы 4.8.4.* Пусть число  $m \in \mathbb{N}$  столь велико, что  $m\alpha > d$ ; например,  $m\alpha = d + r$ . Если  $I(x) = \int F(x, a) d\chi(a)$ , то, согласно предложению 4.8.5, достаточно показать, что найдется такое  $K \in \mathbb{R}$ , для которого

$$(14) \quad E((I(x) - I(y))^{2m}) \leq K \|x - y\|^{m\alpha}$$

при всех  $x, y \in \Gamma$ . Для начала заметим, что

$$(15) \quad E((I(x) - I(y))^{2m}) = E\left(\left(\sum_{a \in \Gamma} (F(x, a) - F(y, a)) d\chi(a)\right)^{2m}\right) = \\ = \sum_{(a_1, \dots, a_{2m}) \in \Gamma^{2m}} E\left(\prod_{i=1}^{2m} (F(x, a_i) - F(y, a_i)) \omega(a_i) \sqrt{\mu(a_i)}\right).$$

Далее, можно заметить, что в силу независимости случайных величин  $\omega(a_i)$  и  $\omega(a_j)$  при  $i \neq j$  большинство слагаемых в последней сумме равно нулю; например, если все  $a_i$  различны, то

$E\left(\prod_{i=1}^{2m} \omega(a_i)\right) = 0$ . Более того: если хотя бы для одного  $i$  множество  $\{j \leq 2m \mid a_j = a_i\}$  имеет нечетное число элементов, то

$E\left(\prod_{i=1}^{2m} \omega(a_i)\right) = 0$ . Чтобы сделать это утверждение более четким,

введем отношение эквивалентности  $\sim$  на  $\Gamma^{2m}$ , положив  $(a_1, \dots, a_{2m}) \sim (b_1, \dots, b_{2m})$ , если  $a_i = a_j$  тогда и только тогда, когда  $b_i = b_j$ . Обозначим через  $\Delta$  множество классов эквивалентности отношения  $\sim$ . Класс  $\delta \in \Delta$  назовем *четным*, если для любого  $(a_1, \dots, a_{2m}) \in \delta$  все множества  $A_i = \{j \mid a_j = a_i\}$  имеют четное число элементов. Множество  $\Delta$  разбивается на две части: на множество  $\Delta_{\text{even}}$  четных классов и множество  $\Delta_{\text{odd}}$  всех остальных (или *нечетных*) классов. Мы видели, что множество  $\Delta_{\text{odd}}$  не дает вклада в сумму (15), и, следовательно,

$$E((I(x) - I(y))^{2m}) = \\ = \sum_{\delta \in \Delta_{\text{even}}} \sum_{(a_1, \dots, a_{2m}) \in \delta} E\left(\prod_{i=1}^{2m} (F(x, a_i) - F(y, a_i)) \omega(a_i) \sqrt{\mu(a_i)}\right).$$

Чтобы доказать формулу (14), достаточно показать, что если  $\delta \in \Delta_{\text{even}}$ , то

$$(16) \quad \sum_{(a_1, \dots, a_{2m}) \in \delta} E \left( \prod_{i=1}^{2m} (F(x, a_i) - F(y, a_i)) \omega(a_i) \sqrt{\mu(a_i)} \right) \leqslant \\ \leqslant K_\delta \|x - y\|^{m\alpha}$$

для некоторого  $K_\delta \in \mathbb{R}$ .

Зафиксируем  $\delta \in \Delta_{\text{even}}$ ; пусть  $2p_1, \dots, 2p_q$  — количества элементов в различных классах разбиения  $A_i = \{j | a_j = a_i\}$  (очевидно,  $p_1 + \dots + p_q = m$ ). Поскольку  $\omega(a_i)^2 = 1$ , имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{(a_1, \dots, a_{2m}) \in \delta} E \left( \prod_{i=1}^{2m} (F(x, a_i) - F(y, a_i)) \omega(a_i) \sqrt{\mu(a_i)} \right) = \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_q) \in \Gamma^q} \prod_{i=1}^q (F(x, b_i) - F(y, b_i))^{2p_i} \mu(b_i)^{p_i} = \\ &= \prod_{i=1}^q \left( \int \mu(b)^{p_i-1} (F(x, b) - F(y, b))^{2p_i} d\mu(b) \right). \end{aligned}$$

Так как  $p_1 + p_2 + \dots + p_q = m$ , мы получим оценку (16), если сможем доказать, что

$$(17) \quad \int \mu(b)^{p_i-1} (F(x, b) - F(y, b))^{2p_i} d\mu(b) \leqslant K' \|x - y\|^{p_i\alpha}$$

при некотором  $K' \in \mathbb{R}$ .

Заметим, что

$$|F(x, b) - F(y, b)|^2 \mu(b) \leqslant \int |F(x, a) - F(y, a)|^2 d\mu(a) \leqslant C \|x - y\|^\alpha$$

по условию теоремы, откуда

$$\frac{|F(x, b) - F(y, b)| \mu(b)^{1/2}}{\|x - y\|^{\alpha/2}} \leqslant C^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \int \mu(b)^{p_i-1} (F(x, b) - F(y, b))^{2p_i} d\mu(b) = \\ &= \|x - y\|^{\alpha(p_i-1)} \int \left( \frac{|F(x, b) - F(y, b)|}{\|x - y\|^{\alpha/2}} \mu(b)^{1/2} \right)^{2p_i-2} \times \\ & \quad \times |F(x, b) - F(y, b)|^2 d\mu(b) \leqslant \\ & \leqslant \|x - y\|^{\alpha(p_i-1)} C^{p_i-1} \int |F(x, b) - F(y, b)|^2 d\mu(b) \leqslant \\ & \leqslant C^{p_i} \|x - y\|^{p_i\alpha}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (17) при  $K' = C^p t$ . Теорема доказана.  $\square$

Для удобства читателей приведем доказательство предложения 4.8.5, хотя оно почти идентично стандартному доказательству — см., например, Симон [2]. Для упрощения обозначений положим  $\Delta t = 2^{-\eta}$  для некоторого  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

*Доказательство предложения 4.8.5.* Без потери общности докажем непрерывность только в точках  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$  для всех  $i$ .

Зафиксируем действительное число  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < r/p$ ; тогда

$$\begin{aligned} P\{\omega \mid |Z(\omega, x) - Z(\omega, y)| \geq \|x - y\|^\alpha\} &\leq \\ &\leq \|x - y\|^{-\alpha p} E(|Z(x) - Z(y)|^p) \leq K \|x - y\|^{d+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = r - \alpha p$ .

Для  $k = (k_1, \dots, k_d) \in {}^*\mathbb{Z}^d$  положим  $k^{(i)} = (k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_d)$ . Тогда для всех  $n \leq \eta$  и всех  $k \in {}^*\mathbb{Z}^d$  имеем

$$P\left\{\omega \mid \left|Z\left(\omega, \frac{k^{(i)}}{2^n}\right) - Z\left(\omega, \frac{k}{2^n}\right)\right| \geq 2^{-na}\right\} \leq K \cdot 2^{-nd} \cdot 2^{-n\varepsilon}.$$

Для  $n \in {}^*\mathbb{N}$  обозначим

$$H_n = \{(k_1, \dots, k_d) \in {}^*\mathbb{Z}^d \mid 0 \leq k_i < 2^n \text{ при всех } i\}.$$

При  $N \leq \eta$  имеем

$$\sum_{n=N}^{\eta} \sum_{k \in H_n} \sum_{i=1}^d P\left(\left|Z\left(\frac{k^{(i)}}{2^n}\right) - Z\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \geq 2^{-na}\right) \leq K \cdot d \cdot \frac{e^{-N\varepsilon}}{1 - 2^{-\varepsilon}}.$$

Значит, для почти любого  $\omega$  найдется такое  $v(\omega) \in \mathbb{N}$ , что

$$\left|Z\left(\omega, \frac{k^{(i)}}{2^n}\right) - Z\left(\omega, \frac{k}{2^n}\right)\right| \leq 2^{-nd}$$

при  $n \geq v(\omega)$ .

Рассмотрим две точки из  $\Gamma$ :  $k/2^n = (k_1/2^n, \dots, k_d/2^n)$  и  $t = (k_1/2^n, \dots, t_i, \dots, k_d/2^n)$ ; предположим, что  $k_i/2^n \leq t_i \leq (k_i + 1)/2^n$ . Тогда для некоторой последовательности  $\{\gamma_j\}$  нулей и единиц

$$t_i - \frac{k_i}{2^n} = \sum_{j=0}^{\eta-n} \gamma_j 2^{-(n+j)}.$$

Таким образом, при  $n \geq v(\omega)$  мы получаем

$$\left|Z\left(\omega, \frac{k}{2^n}\right) - Z(\omega, t)\right| \leq \sum_{j=0}^{\eta-n} \gamma_j 2^{-\alpha(n+j)} \leq \frac{2^{-\alpha n}}{1 - 2^{-\alpha}}.$$



Аналогично,

$$\left| Z\left(\omega, \frac{k^{(t)}}{2^n}\right) - Z(\omega, t) \right| \leq \frac{2^{-\alpha n}}{1 - 2^{-\alpha}}.$$

Отсюда следует, что если число  $\nu(\omega)$  конечно, то функция  $Z(\omega, t)$  будет  $S$ -непрерывной вдоль прямых, параллельных осям координат, и, значит,  $S$ -непрерывной.

**Замечание.** Оценки, проведенные нами в конце доказательства, были довольно-таки грубыми. Проявив несколько больше терпения, можно было бы доказать, что процесс  $Z$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\alpha$ .

### С. Броуновское движение Леви

Обратимся, наконец, к броуновскому движению Леви. Сначала объясним, что это такое (см. Lévy [1]).

**4.8.6. Определение.** Броуновское движение Леви на  $\mathbb{R}^d$  — это случайный процесс  $L: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- (i)  $L(0) = 0$  п. н.;
- (ii) для  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  случайный вектор  $(L_{x_1}, \dots, L_{x_n})$  имеет гауссовское распределение с нулевым средним;
- (iii)  $E((L_x - L_y)^2) = \|x - y\|$  для всех  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ;
- (iv) функция  $x \mapsto L(\omega, x)$  непрерывна при почти всех  $\omega$ .

Заметим, что с помощью формул (i) — (iii) можно вычислить ковариацию

$$E(L_x L_y) = \frac{1}{2} \{ \|x\| + \|y\| - \|x - y\| \};$$

таким образом, броуновское движение Леви однозначно определяет меру на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ .

Напомним, что в примере 4.8.2 одномерное броуновское движение было получено в виде стохастического интеграла

$$B(t) - B(s) = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sgn}(t - a) - \operatorname{sgn}(s - a)) d\chi(a),$$

или, что эквивалентно,

$$(18) \quad B(t) - B(s) = \frac{1}{2} \int \left( \frac{t - a}{|t - a|} - \frac{s - a}{|s - a|} \right) d\chi(a).$$

Идея Столла состояла в том, чтобы обобщить формулу (18) на размерность  $d$ , положив

$$(19) \quad B(x) - B(y) = C_d \int \left( \frac{x - a}{\|x - a\|^{(d+1)/2}} - \frac{y - a}{\|y - a\|^{(d+1)/2}} \right) d\chi(a).$$

Как показано в его работе, при подходящем выборе константы  $C_d$  процесс  $B$  порождает броуновское движение Леви в  $\mathbb{R}^d$ . Мы используем несколько отличающееся представление при  $d > 1$  (оно тоже упоминается в работе Столла); а именно, мы исследуем процесс  $\lambda$ , определяемый равенством

$$(20) \quad \lambda(x) - \lambda(y) = k_d \int \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|y - a\|^{(d-1)/2}} \right) d\chi(a),$$

и докажем, что при подходящем выборе константы  $k_d$  стандартная часть процесса  $\lambda$  будет броуновским движением Леви.

Между подходами, основывающимися на формулах (19) и (20), нет никакой существенной разницы; все рассуждения, применимые к одному процессу, почти автоматически переносятся на другой. Первоначальное представление Столла (19) имеет то преимущество, что работает также и в одномерном случае; с другой стороны, оно требует построения  $\mathbb{R}^d$ -значного белого шума.

В оставшейся части этого параграфа мы полагаем  $d > 1$ , а также пользуемся соглашением  $1/0 = 0$ .

Пусть процесс  $\lambda$  удовлетворяет равенству (20); вычислим

$$(21) \quad E((\lambda(x) - \lambda(y))^2) = k_d^2 \int \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|y - a\|^{(d-1)/2}} \right)^2 d\mu(a).$$

Для  $x, y \in \Gamma$  определим новую решетку

$$\Gamma_{x,y} = \left\{ \frac{a - x}{\|x - y\|} \mid a \in \Gamma \right\},$$

и пусть  $\mu_{x,y}$  — равномерная мера на  $\Gamma_{x,y}$ , задаваемая формулой

$$\mu_{x,y}(\{b\}) = \left( \frac{\Delta t}{\|x - y\|} \right)^d$$

для всех  $b \in \Gamma_{x,y}$ . Заметим, что если  $\Delta t / \|x - y\| \approx 0$ , то мера  $\mu_{x,y}$  индуцирует меру Лебега на  $\mathbb{R}^d$ . Сделав замену переменных

$$v = \frac{a - x}{\|x - y\|},$$

мы можем переписать формулу (21) в виде

$$\begin{aligned} (22) \quad & E((\lambda(x) - \lambda(y))^2) = \\ & = k_d^2 \int \left( \frac{1}{\|v\|^{(d-1)/2} \|x - y\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|w + v\|^{(d-1)/2} \|x - y\|^{(d-1)/2}} \right)^2 \times \\ & \quad \times \|x - y\|^d d\mu_{x,y}(v) = \\ & = \|x - y\| k_d^2 \int \left( \frac{1}{\|v\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|w + v\|^{(d-1)/2}} \right)^2 d\mu_{x,y}(v), \end{aligned}$$

где  $w = (x - y) / \|x - y\|$  — единичный вектор.

Воспользуемся следующей леммой.

**4.8.7. Лемма.** Для всех  $x, y \in \Gamma$  функция

$$J(v) = \frac{1}{\|v\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|w+v\|^{(d-1)/2}}$$

принадлежит классу  $SL^2(\mu_{x,y})$ , причем существует такое  $K \in \mathbb{R}$ , что  $\int J(v) d\mu_{x,y}(v) < K$  для всех  $x, y \in \Gamma$ . Более того, если точки  $x$  и  $y$  конечны и не бесконечно близки, то

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{1}{\|v\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|w+v\|^{(d-1)/2}} \right)^2 d\mu_{x,y}(v) = \\ & = \int \left( \frac{1}{\|z\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|e+z\|^{(d-1)/2}} \right)^2 dm(z), \end{aligned}$$

где  $m$  — мера Лебега на  $\mathbb{R}^d$ , и  $e$  — единичный вектор.

Доказательство не сложно, но требует большой кропотливости; мы оставляем его читателю. Уместно сделать лишь одно предостережение: оба интеграла

$$\int \frac{1}{\|v\|^{d-1}} d\mu_{x,y}(v) \quad \text{и} \quad \int \frac{1}{\|w+v\|^{d-1}} d\mu_{x,y}(v)$$

расходятся на бесконечности, и требуется некоторая аккуратность, чтобы показать, что интеграл

$$\int \left( \frac{1}{\|v\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|w+v\|^{(d-1)/2}} \right)^2 d\mu_{x,y}(v)$$

сходится.

Одно из следствий формулы (22) и леммы 4.8.7 состоит в том, что если процесс  $\lambda$  удовлетворяет равенству (20), то для всех  $x, y \in \Gamma$

$$E((\lambda(x) - \lambda(y))^2) \leq k_d^2 K \|x - y\|,$$

и, значит, согласно теореме 4.8.4, процесс  $\lambda$  является  $S$ -непрерывным. Теперь мы можем определить процесс  $\lambda$ , удовлетворяющий равенству (20), и его стандартную часть  $L$ : положим

$$(23) \quad \lambda(x) = k_d \int \left( \frac{1}{\|x-a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|a\|^{(d-1)/2}} \right) d\chi(a),$$

где

$$(24) \quad k_d = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{\|z\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|e+z\|^{(d-1)/2}} \right)^2 dm(z) \right)^{-1/2},$$

и пусть процесс  $L: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  определяется равенством

$$(25) \quad L(\omega, \circ x) = \circ \lambda(\omega, x)$$

для всех околостандартных  $x \in \Gamma$ .

**4.8.8. Теорема.** *Процесс  $L$  — это броуновское движение Леви на  $\mathbb{R}^d$ .*

*Доказательство.* Доказывать осталось не так уж много: 4.8.6(i) следует непосредственно из формулы (23); 4.8.6(ii) следует из общей теории стохастического интегрирования по белому шуму; 4.8.6(iii) есть следствие выбора константы  $k_d$  (вспомним формулы (22), (24) и лемму 4.8.7); наконец, в силу  $S$ -непрерывности процесса  $\lambda$  условие 4.8.6(iv) тоже выполнено.  $\square$

Заметим, что если  $\tilde{X}$  — это стандартный белый шум на  $\mathbb{R}^d$ , построенный из белого шума  $\chi$ , то формула

$$(26) \quad L(x) = k_d \int \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|a\|^{(d-1)/2}} \right) d\tilde{X}(a)$$

дает стандартное представление процесса  $L$  в виде стохастического интеграла по белому шуму.

**Замечание.** Принадлежащее Столлу представление броуновского движения Леви в виде стохастического интеграла не является первым. Ченцов [1] получил представление в терминах белого шума на проективном пространстве (см. также Gangolli [1], McKeap [1], Takenaka [1]), а Картье (Cartier [1]) нашел представление в терминах двумерного белого шума на  $\mathbb{R}^d$ , используя при этом несколько более сложное ядро, чем то, что фигурирует в формуле (26). Столл указал, что его представление обладает одним свойством инвариантности относительно переносов, которым представление Картье не обладает. А именно, если  $\tilde{X}$  — белый шум из формулы (26),  $T$  — параллельный перенос, а  $\tilde{X}^T$  — белый шум, определяемый равенством  $\tilde{X}^T(C) = \tilde{X}(T^{-1}(C))$ , то  $L_x - L_y = L^T_{T(x)} - L^T_{T(y)}$  почти наверное, где  $L^T$  — броуновское движение Леви, полученное из белого шума  $\tilde{X}^T$ . Более важный результат — принцип инвариантности донсковского типа для броуновского движения Леви.

#### Д. Принцип инвариантности

Построим сначала конечные приближения к процессу  $\lambda$ . Зафиксируем  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , и для каждого  $n \leq \eta$ , где  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , рассмотрим решетку

$$\Gamma_n = \left\{ \left( \frac{k_1}{2^n}, \dots, \frac{k_d}{2^n} \right) \mid (k_1, \dots, k_d) \in {}^*\mathbb{Z}^d, \max_{1 \leq i \leq d} k_i \leq N \cdot 2^n \right\}.$$

Пусть  $\Omega$  — множество всех внутренних функций из  $\Gamma_n$  в  $\{-1, 1\}$ , и  $P$  — равномерная вероятностная мера на  $\Omega$ . Мера  $\mu_n$  на  $\Gamma_n$  также равномерна,  $\mu_n(\{a\}) = (1/2^n)^d$  для каждого  $a \in \Gamma_n$ . По аналогии с формулой (23) определим процесс  $\lambda_n: \Omega \times \Gamma_n \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  по формуле

$$(27) \quad \lambda_n(\omega, x) = k_d \sum_{a \in \Gamma_n} \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|a\|^{(d-1)/2}} \right) \omega(a) \sqrt{\mu_n(a)}.$$

Наша цель — показать, что меры на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , индуцированные процессами  $\lambda_n$ , слабо сходятся к мере, индуцированной броуновским движением Леви. Сначала поясним, как из процесса  $\lambda_n$  получить меру на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Для  $x \in {}^*\mathbb{R}^d$  пусть  $[x]_n$  — полуоткрытый куб с центром в точке  $x$  и со сторонами длины  $2^{-n}$ , т. е.

$$[x]_n = \{(y_1, \dots, y_d) \in {}^*\mathbb{R}^d \mid x_i - 2^{-(n+1)} \leq y_i < x_i + 2^{-(n+1)}\}$$

для всех  $i$ .

Продолжим внутреннюю функцию  $F: \Gamma_n \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  до функции  $\bar{F}: \{y \in {}^*\mathbb{R}^d \mid \|y\| \leq N\} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , положив

$$\bar{F}(y) = F(x)$$

при  $x \in \Gamma_n$  и  $y \in [x]_n$ . Функция  $\bar{F}$  не является  $S$ -непрерывной, но ее можно превратить в  $S$ -непрерывную функцию  $\tilde{F}$ , положив

$$(28) \quad \tilde{F}(x) = {}^*m([x]_n)^{-1} \int_{[x]_n} \bar{F}(y) d({}^*m(y)),$$

где  $m$  — мера Лебега на  $\mathbb{R}^d$ . Заметим, что  $\tilde{F}$  совпадает с  $F$  на  $\Gamma_n$ .

Для  $n \in \mathbb{N}$  пусть  $L_n: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — это стандартная часть процесса  $\tilde{\lambda}_n$ . Определим меру  $\nu_n$  на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , положив

$$\nu_n(B) = L(P) \{\omega \mid L_n(\omega, \cdot) \in B\}$$

для всех борелевских множеств  $B$ . Если  $\tilde{\nu}_n$  — внутренняя мера на  ${}^*C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , заданная равенством

$$\tilde{\nu}_n(A) = P \{\omega \mid \tilde{\lambda}_n(\omega, \cdot) \in A\},$$

то

$$(29) \quad \nu_n = L(\tilde{\nu}_n) \circ st^{-1}.$$

С другой стороны, если  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , то, согласно теореме 4.8.8,  $L(\tilde{\nu}_n) \circ st^{-1}$  — это мера, индуцированная на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  броуновским движением Леви. Если мы обозначим эту последнюю меру через  $\nu$ , то получим, что для всех  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и всех ограниченных

непрерывных функций  $f: C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int f d\nu = \int^{\circ} f d\tilde{\nu}_n.$$

Значит, для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$

$$\left| \int f d\nu - \int f d\tilde{\nu}_n \right| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность мер  $(\nu_n)$  слабо сходится к мере  $\nu$ .

Прежде чем формулировать полученный результат в виде теоремы, определим заново процесс  $L_n$  и меру  $\nu_n$  в полностью стандартных терминах. Пусть  $\hat{\Gamma}_n$  — стандартная решетка, состоящая из конечных точек решетки  $\Gamma_n$ , и пусть процесс  $l_n: \Omega \times \hat{\Gamma}_n \rightarrow \mathbb{R}$  определяется формулой

$$l_n(\omega, x) = k_d \sum_{a \in \hat{\Gamma}_n} \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|a\|^{(d-1)/2}} \right) \omega(a) \cdot 2^{-nd/2}.$$

Очевидно,  $l_n(\omega, x) = {}^{\circ}l_n(\omega, x)$  для почти всех  $\omega$ , и, следовательно, процесс  $L_n$  совпадает с продолжением  $\tilde{l}_n$  процесса  $l_n$  (заметим, что  $\tilde{l}_n$  получается из  $l_n$  в стандартных терминах: ведь куб  $[x]_n$  теперь является стандартным кубом со сторонами длины  $2^{-n}$ ). Мера  $\nu_n$  строится из процесса  $L_n$  так же, как и раньше.

**4.8.9. Теорема.** Пусть  $\hat{\Gamma}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — решетка

$$\hat{\Gamma}_n = \{(k_1/2^n, \dots, k_d/2^n) \mid (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d\};$$

для  $x \in \tilde{\Gamma}_n$  положим

$$l_n(\omega, x) = k_d \sum_{a \in \hat{\Gamma}_n} \left( \frac{1}{\|x - a\|^{(d-1)/2}} - \frac{1}{\|a\|^{(d-1)/2}} \right) \omega(a) \cdot 2^{-nd/2},$$

где  $\omega(a)$  — независимые случайные величины, принимающие значения  $\pm 1$  с вероятностью  $1/2$ . Пусть  $L_n: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — определенное выше непрерывное продолжение процесса  $l_n$ , и  $\nu_n$  — мера на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , порожденная процессом  $L_n$ . Тогда меры  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  слабо сходятся к мере, порожденной броуновским движением Леви.

Этот результат является нашей версией принадлежащего Столлу принципа инвариантности (см. Stoll [1], [2]); исходный результат формулируется более сложно и в нем используются более общие методы интерполяции, чтобы сделать процесс  $l_n$  непрерывным. Условия, которые мы наложили на случайные величины  $\omega(a)$ , очевидно, гораздо сильнее, чем необходимо; все, что нужно — это чтобы они в пределе порождали белый шум.

**Замечание.** Нестандартная техника для доказательства принципов инвариантности была впервые использована Мюллером (Müller [1]) еще до изобретения меры Лёба. Андерсон (см. Anderson [1]) соединил идеи Мюллера с конструкцией Лёба и своей собственной конструкцией гиперконечного случайного блуждания и дал почти тривиальное доказательство принципа инвариантности Донскера (Donsker) для броуновского движения. Позже в работах Keisler [4] и Kosciuk [1] аналогичные результаты были доказаны для решений стохастических дифференциальных уравнений.

Броуновское движение Леви — не единственный процесс, который можно получить с помощью стохастического интеграла по белому шуму. Чтобы подчеркнуть этот факт, мы завершим этот параграф построением процесса Йеха — Винера.

**4.8.10. Определение.** Процесс Йеха — Винера на  $\mathbb{R}^d$  — это такой случайный процесс  $W: \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , что

- (i) для всех  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$  случайный вектор  $(W_{z_1}, \dots, W_{z_n})$  имеет гауссовское распределение с нулевым средним;
- (ii) если  $x = (x_1, \dots, x_d)$  и  $y = (y_1, \dots, y_d)$  — две точки в  $\mathbb{R}^d$ , то  $E(W_x W_y) = \prod_{i=1}^d |x_i| \wedge |y_i|$ ;

(iii) для почти всех  $\omega$  траектория  $x \mapsto W(\omega, x)$  непрерывна.

Пусть  $\Gamma$  — гиперконечная решетка в  ${}^*\mathbb{R}^d$ ; определим  $F: \Gamma \times \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  следующим образом:

$$F(x, a) = \begin{cases} 2^{-d/2}, & \text{если } |a_i| < |x_i| \text{ для всех } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_d)$ . Пусть  $\chi$  — это  $S$ -белый шум на  $\Gamma$ ; определим процесс  $Y$  по формуле

$$Y(x) = \int F(x, a) d\chi(a).$$

Для точек  $x = (x_1, \dots, x_d)$  и  $y = (y_1, \dots, y_d)$  из  $\Gamma$  получаем

$$\begin{aligned} E(Y(x)Y(y)) &= E\left(\sum_{a, b \in \Gamma} F(x, a)F(y, b)\omega(a)\omega(b)\sqrt{\mu(a)\mu(b)}\right) = \\ &= \sum_{a \in \Gamma} F(x, a)F(y, a)\mu(a) \approx \prod_{i=1}^d |x_i| \wedge |y_i|, \end{aligned}$$

откуда видно, что процесс  $Y$  имеет нужную ковариацию. Кроме того,

$$\int (F(x, a) - F(y, a))^2 d\mu(a) \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} ||y_i| - |x_i|| (\|x\| + \|y\|)^{d-1}.$$

и, следовательно, для любого  $K \in \mathbb{N}$  найдется такая константа  $C_K$ , что для всех  $x, y \in \Gamma$ ,  $\|x\|, \|y\| \leq K$  имеем

$$\int (F(x, a) - F(y, a))^2 d\mu(a) \leq C_K \|x - y\|.$$

Поэтому, изменив, если это необходимо, функцию  $F$  вне множества  $\Gamma_K = \{x \in \Gamma \mid \|x\| \leq K\}$ , мы можем воспользоваться теоремой 4.8.4 и заключить, что процесс  $Y$  будет  $S$ -непрерывным на каждом  $\Gamma_K$ , и, значит,  $S$ -непрерывным на  $\Gamma$ .

Стандартная часть  $W$  процесса  $Y$ , очевидно, является процессом Йеха — Винера. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 4.8.9, можно получить простое доказательство принципа инвариантности для этого процесса (он впервые получен в работах Kuelbs [1], [2] и Wichura [1]; см. детали в работе Stoll [1]).

**Замечание.** Все основные результаты этого параграфа заимствованы из работы Stoll [1], однако наше изложение несколько отличается от авторского. Столл вначале доказал стандартными методами представление (26), а затем использовал этот результат для доказательства теоремы 4.8.8. Мы же, введя теорему непрерывности 4.8.4, получили метод доказательства  $S$ -непрерывности процесса  $\lambda$ , что дало возможность обратить конструкцию Столла. Знание того, что процесс  $\lambda$  непрерывен, помогает также в доказательстве теоремы 4.8.9. Столловское рассмотрение процесса Йеха — Винера очень похоже на наше, хотя он использует другие рассуждения при доказательстве  $S$ -непрерывности процесса  $Y$ . В более позднем и более кратком изложении работы (Stoll [2]) подход Столла оказывается более близким к нашему.

### Замечания

Даже в главе такого объема, как эта, невозможно дать полный обзор нестандартной теории случайных процессов; за дальнейшей информацией и ссылками читатель должен обратиться к книге Stroyan, Vayod [1] и к обзору Cutland [9]. Наиболее серьезные из наших упущений — это, возможно, принадлежащая Перкинсу теория локального времени (вспомним замечания и ссылки в конце § 3.3), принадлежащее Кейслеру исследование марковских процессов (см. Keisler [4]), а также хорошо разработанная к настоящему времени область вероятностной логики (см. ссылки в § 4.4.D). На самом деле, у нас еще будет повод многое сказать о марковских процессах (гл. 5) и о локальном времени (§§ 6.4; 7.5), но с совершенно иной точки зрения, нежели в работах Кейслера и Перкинса. Вероятностная логика



лежит дальше от нашей темы, и мы отсылаем читателя к работе Keisler [5] (по-видимому, наилучший старт для логика) и к работе Hoover, Keisler [1] (наиболее естественная отправная точка для вероятностника). Наконец, упомянем важные и хорошо известные работы Лолера (Lawler [1]—[3]) о несамопересекающемся случайном блуждании; их краткий обзор будет дан в § 6.4. Полностью стандартное, но в высшей степени стимулирующее обсуждение различных областей стохастического анализа и их взаимосвязей читатель найдет в работе Föllmer [3].

## Глава 5

### Гиперконечные формы Дирихле и марковские процессы

Взаимодействие методов функционального анализа и теории случайных процессов — одна из наиболее важных и увлекательных сторон сегодняшней математической физики. Десятилетия исследований в обеих областях заложили основы для сложной и высокоразвитой техники, используемой в этой теории. Цель этой главы — развить более элементарный подход, при котором гиперконечная линейная алгебра и марковские цепи заменяют функциональный анализ и марковские процессы с непрерывным временем. В первых двух параграфах излагается общая теория неотрицательных квадратичных форм на гиперконечномерных пространствах; начиная с § 5.3, мы ограничиваем рассмотрение только марковскими формами и приступаем к анализу отвечающих им марковских процессов. В то время как § 5.3 посвящен самим гиперконечным процессам и содержит, в частности, формулу Бёрлинга — Дени, теорему Фукусима о разложении и формулу Фейнмана — Каца, в §§ 5.4, 5.5 содержится исследование стандартных частей таких процессов. Теория § 5.5 довольно сложна и, по-видимому, еще не достигла своей окончательной формы; читатель, возможно, найдет более заманчивым сначала взглянуть на приложения в § 5.6.

Если не оговорено обратное, все линейные пространства в этой главе — над действительными или гипердействительными числами.

#### 5.1. Гиперконечные квадратичные формы и их области определения

Мы будем здесь развивать гиперконечную теорию неотрицательных симметрических квадратичных форм на бесконечномерных пространствах. Хорошо известно, что в случае гильбертова пространства теория замкнутых форм такого типа эквивалентна теории неотрицательных самосопряженных операторов<sup>1)</sup>; в самом деле, имеется естественное соответствие между формами  $E$  и операторами  $A$ , задаваемое формулой  $E(u, v) = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v \rangle$ .

---

<sup>1)</sup> См., например, Reed, Simon [1], гл. VIII. — *Прим. ред.*

Мы избрали способ изложения, основывающийся на формах, а не на операторах, по двум причинам: отчасти потому, что формы действительнозначны, что облегчает взятие стандартной части, но также еще и потому, что в большинстве рассмотренных нами приложений именно форма оказывается естественно заданным объектом.

### А. Область определения

Начнем с того, что вспомним некоторые результаты из § 2.2. Пусть  $H$  — внутреннее гиперконечномерное линейное пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , порождающим норму  $\|\cdot\|$ , и пусть  $\text{Fin}(H)$  — это множество элементов пространства  $H$ , имеющих конечную норму. Положим  $x \approx y$ , если  $\|x - y\| \approx 0$ . Предложение 2.2.1 утверждает, что пространство

$$(1) \quad {}^\circ H = \text{Fin}(H) / \approx$$

является гильбертовым относительно скалярного произведения  $({}^\circ x, {}^\circ y) = \text{st}\langle x, y \rangle$ , где  ${}^\circ x$  обозначает класс эквивалентности элемента  $x$ . Мы называем пространство  $({}^\circ H, (\cdot, \cdot))$  (*нестандартной оболочкой* пространства  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ).<sup>1)</sup>

Пусть дана неотрицательная симметрическая билинейная форма

$$\mathcal{E} : H \times H \rightarrow {}^*\mathbb{R};$$

мы хотим определить ее стандартную часть  $E$  как билинейную форму на  ${}^\circ H$ . Если форма  $\mathcal{E}$  является  $S$ -ограниченной, т. е. существует такое  $K \in \mathbb{R}$ , что

$$|\mathcal{E}(u, v)| \leq K \|u\| \|v\|$$

для всех  $u, v \in H$ , мы можем просто положить

$$E({}^\circ u, {}^\circ v) = {}^\circ \mathcal{E}(u, v).$$

Если же форма  $\mathcal{E}$  не  $S$ -ограничена, мы наталкиваемся на две трудности. Во-первых, если  $u \approx \tilde{u}$  и  $v \approx \tilde{v}$ , то, вообще говоря, неверно, что  $\mathcal{E}(u, v) \approx \mathcal{E}(\tilde{u}, \tilde{v})$ ; во-вторых, могут найтись такие  $v \in \text{Fin}(H)$ , что  $\mathcal{E}(\tilde{v}, \tilde{v})$  бесконечно велико для всех  $\tilde{v} \approx v$ . Последняя трудность не должна нас удивлять: она является непосредственным следствием того факта, что неограниченные формы на гильбертовых пространствах не могут быть всюду определены. Мы разрешим ее, просто считая  $E({}^\circ v, {}^\circ v)$  не определен-

<sup>1)</sup> В § 2.2 обозначения были несколько иными. Во избежание недоразумений укажем, что в рассматриваемой здесь ситуации нет выделенных стандартных элементов и элемент  $x \in H$ , имеющий конечную норму, не обязан быть околостандартным в каком-либо смысле, так что элемент  ${}^\circ x \in {}^\circ H$  не является «стандартной частью элемента  $x$ » в привычном нам понимании. — *Прим. перев.*

ным, если  $\mathcal{E}(\tilde{v}, \tilde{v})$  бесконечно велико для всех  $\tilde{v} \in {}^\circ v$ . Наиболее естественный путь преодоления первой трудности мог бы состоять в том, чтобы определить

$$(2) \quad E({}^\circ u, {}^\circ u) = \inf \{ {}^\circ \mathcal{E}(v, v) \mid v \in {}^\circ u \}^1,$$

а затем продолжить  $E$  до билинейной формы с помощью обычного трюка

$$E({}^\circ u, {}^\circ v) = \frac{1}{2} \{ E({}^\circ u + {}^\circ v, {}^\circ u + {}^\circ v) - E({}^\circ u, {}^\circ u) - E({}^\circ v, {}^\circ v) \}.$$

Недостаток этого подхода в том, что при таком определении очень трудно понять поведение нижней грани в формуле (2). Чтобы было проще разобраться в свойствах регулярности форм  $\mathcal{E}$  и  $E$ , мы предпочтем более косвенный подход. Наш план — определить некое подмножество  $\mathcal{D}[\mathcal{E}] \subset \text{Fin}(H)$ , называемое *областью определения* формы  $\mathcal{E}$  и удовлетворяющее следующим условиям:

(3) если  ${}^\circ \mathcal{E}(u, u) < \infty$ , то найдется такое  $v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , что  $v \approx u$ ;

(4) если  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  и  $u \approx v$ , то  ${}^\circ \mathcal{E}(u, u) = {}^\circ \mathcal{E}(v, v) < \infty$ .

После этого мы определяем форму  $E$  с помощью равенства

$$(5) \quad E({}^\circ u, {}^\circ u) = {}^\circ \mathcal{E}(v, v)$$

при  $v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \cap {}^\circ u$ . В дальнейшем мы увидим, что определения (2) и (5) совпадают (см. предложение 5.1.14).

Прежде чем дать точное определение множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , введем несколько полезных понятий.

Поскольку нас часто будут интересовать взаимоотношения между формой  $\mathcal{E}$  и скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в  $H$ , удобно работать с формами, включающими в себя обе величины: для  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  положим

$$(6) \quad \mathcal{E}_\alpha(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \alpha \langle u, v \rangle.$$

Каждая из этих форм порождает норму (при  $\alpha = 0$ , возможно, полунорму):

$$(7) \quad |u|_\alpha = (\mathcal{E}_\alpha(u, u))^{1/2}.$$

Напомним, что исходная гильбертова норма на  $H$  обозначается через  $\|\cdot\|$ .

Поскольку  $\mathcal{E}$  — симметрическая неотрицательная форма на гиперконечномерном пространстве  $H$ , то, как известно из элементарной линейной алгебры, существует такой (однозначно

<sup>1)</sup> Читателя может смутить тот факт, что здесь берется точная нижняя грань по *внешнему* множеству  $\{v \mid v \in {}^\circ u\}$ . Заметим, однако, что все значения  ${}^\circ \mathcal{E}(v, v)$  стандартны, так что множество  $\{{}^\circ \mathcal{E}(v, v) \mid v \in {}^\circ u\}$ , у которого мы ищем точную нижнюю грань, *стандартно*. — *Прим. перев.*

определенный) симметрический неотрицательно-определенный оператор  $A: H \rightarrow H$ , что

$$(8) \quad \mathcal{E}(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

для всех  $u, v \in H$ .

Пусть  $\|A\|$  — норма оператора  $A$ ; зафиксируем такое бесконечно малое  $\Delta t$ , что

$$(9) \quad 0 < \Delta t \leq \frac{1}{\|A\|},$$

и определим оператор  $Q^{\Delta t}$  равенством

$$(10) \quad Q^{\Delta t} = I - \Delta t \cdot A.$$

Заметим, что, согласно (9), оператор  $Q^{\Delta t}$  неотрицателен, а в силу неотрицательности оператора  $A$  норма оператора  $Q^{\Delta t}$  не превосходит 1.

Введем нестандартную ось времени

$$(11) \quad T = \{k \cdot \Delta t \mid k \in {}^*\mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

и для каждого  $t = k \cdot \Delta t \in T$  определим оператор

$$(12) \quad Q^t = (Q^{\Delta t})^k.$$

Семейство операторов  $\{Q^t\}_{t \in T}$ , очевидно, образует полугруппу; мы будем называть ее *полугруппой, ассоциированной с формой  $\mathcal{E}$  и с  $\Delta t$* . В оставшейся части этого параграфа всегда, когда мы будем писать  $\mathcal{E}$ ,  $A$ ,  $T$  и  $Q^t$ , мы будем предполагать, что они связаны соотношениями (8)–(12). В приложениях исходным объектом часто будет полугруппа  $(Q^t)$ ; оператор  $A$  (и форму  $\mathcal{E}$ ) можно определить в ее терминах:

$$(13) \quad A = (1/\Delta t) \cdot (I - Q^{\Delta t}).$$

Оператор  $A$  называется *инфинитезимальным генератором* или *производящим оператором* или просто *генератором* полугруппы  $\sim \{Q^t\}$ .

Поскольку операторы  $A$  и  $Q^t$  неотрицательны, у них есть (однозначно определенные) квадратные корни; мы будем обозначать их  $A^{1/2}$  и  $Q^{1/2}$  соответственно.

Для каждого  $t \in T$  можно определить приближение  $A^{(t)}$  к оператору  $A$ :

$$(14) \quad A^{(t)} = \frac{1}{t} (I - Q^t),$$

а из  $A^{(t)}$  получить форму

$$(15) \quad \mathcal{E}^{(t)}(u, v) = \langle A^{(t)}u, v \rangle.$$

(Не следует путать форму  $\mathcal{E}^{(t)}$  с формой  $\mathcal{E}_\alpha$ , определенной в формуле (6).)

Заметим, что даже если форма  $\mathcal{E}$  не была  $S$ -ограниченной, форма  $\mathcal{E}^{(t)}$  будет  $S$ -ограниченной для всех не бесконечно малых  $t$ . Один из мотивов, приводящих к нашему определению множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , состоит как раз в желании выделить такие элементы  $u \in H$ , для которых форма  $\mathcal{E}$  в самом деле приближается ограниченными формами  $\mathcal{E}^{(t)}$ ,  $t \not\approx 0$ , т. е. такие  $u \in H$ , для которых

$$(16) \quad {}^\circ\mathcal{E}(u, u) = \lim_{t \downarrow 0, t \not\approx 0} {}^\circ\mathcal{E}^{(t)}(u, u).$$

Мы могли бы взять это утверждение в качестве определения множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Но по техническим причинам (связанным также с удобством изложения) мы выбрали другое определение, которое, как мы вскоре покажем (см. предложение 5.1.5), эквивалентно формуле (16).

**5.1.1. Определение.** Пусть  $\mathcal{E}$  — неотрицательная симметрическая квадратичная форма на гиперконечномерном линейном пространстве  $H$  со скалярным произведением. Область определения  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  формы  $\mathcal{E}$  — это множество таких  $u \in H$ , для которых:

- (i)  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) \approx \mathcal{E}(u, u)$  для всех  $t \approx 0$ .

Попробуем описать тот интуитивный образ, который лежит в основе этого определения. Будем мыслить себе  $A$  как дифференциальный оператор; тогда элементы множества  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  — это «гладкие» функции, а  $Q^t$  — «сглаживающий» оператор, часто заданный интегральным ядром. Если элемент  $u$  уже гладок, тогда бесконечно малое сглаживание  $Q^t$ ,  $t \approx 0$  не должно изменить его заметным образом, и, следовательно,  $\mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) \approx \mathcal{E}(u, u)$ . Частичное оправдание этому грубому образу мы дадим дальше, когда покажем, что если  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , то все «сглаженные» элементы  $Q^t u$ ,  $t \not\approx 0$  лежат в  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  (лемма 5.1.7; см. также следствие 5.1.9).

Наша первая задача — произвести список альтернативных определений множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , в который попало бы также определение (16). Начнем со следующего простого тождества, устанавливающего соотношение между формами  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^{(t)}$ .

**5.1.2. Лемма.** Для всех  $u \in H$  и  $t \in T$

$$\mathcal{E}^{(t)}(u, u) = \frac{\Delta t}{t} \sum_{s \in T, s < t} \mathcal{E}(Q^s u, u) = \frac{\Delta t}{t} \sum_{s \in T, s < t} \mathcal{E}(Q^{s/2} u, Q^{s/2} u).$$

*Доказательство* состоит в простом вычислении:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(t)}(u, u) &= \frac{1}{t} \langle (I - Q^t) u, u \rangle = \frac{1}{t} \sum_{s \in T, s < t} \langle (Q^s - Q^{s+\Delta t}) u, u \rangle = \\ &= \frac{\Delta t}{t} \sum_{s \in T, s < t} \mathcal{E}(Q^s u, u) = \frac{\Delta t}{t} \sum_{s \in T, s < t} \mathcal{E}(Q^{s/2} u, Q^{s/2} u). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 5.1.2 среди прочего показывает, что форма  $\mathcal{E}^{(t)}$  неотрицательна.

**5.1.3. Лемма.** Пусть  $B, C: H \rightarrow H$  — неотрицательные симметрические операторы, коммутирующие между собой и с оператором  $A$ . Тогда функции

$$t \mapsto \langle Q^t B u, C u \rangle \text{ и } t \mapsto \mathcal{E}^{(s)}(Q^t B u, C u)$$

являются неотрицательными и невозрастающими при всех  $u \in H$ ,  $s \in T$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что утверждение, связанное с формой  $\mathcal{E}^{(s)}$ , следует из другого утверждения леммы, поскольку

$$\mathcal{E}^{(s)}(Q^t B u, C u) = (1/s) \langle Q^t (I - Q^s) B u, C u \rangle,$$

а оператор  $B' = (I - Q^{(s)})B$  неотрицателен и коммутирует с операторами  $A$  и  $C$ .

Далее, если  $t > r$ , то

$$\begin{aligned} \langle Q^r B u, C u \rangle - \langle Q^t B u, C u \rangle &= \langle (I - Q^{t-r}) Q^r B u, C u \rangle = \\ &= (t - r) \mathcal{E}^{(t-r)}(Q^{r/2} B^{1/2} C^{1/2} u, Q^{r/2} B^{1/2} C^{1/2} u) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку форма  $\mathcal{E}^{(t-r)}$  неотрицательна; следовательно, функция  $t \mapsto \langle Q^t B u, C u \rangle$  — невозрастающая. Что касается ее неотрицательности, заметим, что

$$\langle Q^t B u, C u \rangle = \langle Q^{t/2} B^{1/2} C^{1/2} u, Q^{t/2} B^{1/2} C^{1/2} u \rangle \geq 0. \quad \square$$

Теперь мы можем получить из леммы 5.1.3 наши основные неравенства.

**5.1.4. Предложение.** Для всех  $u \in H$ ,  $t \in T$

- (i)  $0 \leq \mathcal{E}(u, u - Q^t u) \leq \mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) \leq 2\mathcal{E}(u, u - Q^t u)$ ;
- (ii)  $0 \leq \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u, Q^{\Delta t} u) - \mathcal{E}(Q^{2\Delta t} u, Q^{2\Delta t} u) \leq \mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u, Q^{\Delta t} u)$ .

*Доказательство.* С помощью тривиальных вычислений получаем

$$\mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) = \mathcal{E}(u, u - Q^t u) + \mathcal{E}(Q^t u, u - Q^t u).$$

Теперь, применяя лемму 5.1.3 к операторам  $B = I$ ,  $C = I - Q^t$ , получаем

$$0 \leq \mathcal{E}(Q^t u, u - Q^t u) \leq \mathcal{E}(u, u - Q^t u),$$

откуда следует утверждение (i).

В утверждении (ii) неотрицательность следует непосредственно из (i); далее, так же, как и выше,

$$\mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u, Q^{\Delta t} u) = \mathcal{E}(u, u - Q^{\Delta t} u) + \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u, u - Q^{\Delta t} u).$$

Применяя лемму 5.1.3 к каждому из слагаемых в правой части (взяв  $B = I$ ,  $C = I - Q^{\Delta t}$  в первом случае и  $B = Q^{\Delta t}$ ,  $C =$

$= I - Q^{\Delta t}$  во втором), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^{\Delta t}u, Q^{\Delta t}u) &\geq \mathcal{E}(Q^{2\Delta t}u, u - Q^{\Delta t}u) + \\ &+ \mathcal{E}(Q^{3\Delta t}u, u - Q^{\Delta t}u) = \\ &= \mathcal{E}(Q^{2\Delta t}u, u) - \mathcal{E}(Q^{2\Delta t}u, Q^{\Delta t}u) + \mathcal{E}(Q^{3\Delta t}u, u) - \mathcal{E}(Q^{3\Delta t}u, Q^{\Delta t}u) = \\ &= \mathcal{E}(Q^{\Delta t}u, Q^{\Delta t}u) - \mathcal{E}(Q^{2\Delta t}, Q^{2\Delta t}u). \end{aligned}$$

Предложение доказано.  $\square$

Полученные выше неравенства нужны для того, чтобы построить разумную теорию множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Сначала приведем обещанный список альтернативных определений области определения формы  $\mathcal{E}$ .

**5.1.5. Предложение.** Следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $u$  принадлежит области определения формы  $\mathcal{E}$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , и для всех  $t \approx 0$  справедливо  $\mathcal{E}(u, u - Q^t u) \approx 0$ ;
- (iii)  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , и для всех  $t \approx 0$  справедливо  $\mathcal{E}(u - Q^t u, u - Q^t u) \approx 0$ ;
- (iv)  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , и для всех  $t \approx 0$  справедливо  $\mathcal{E}^t(u, u) \approx \mathcal{E}(u, u)$ .

*Доказательство.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Следует непосредственно из утверждения 5.1.4 (i).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Имеем

$$0 \leq \mathcal{E}(u - Q^t u, u - Q^t u) = \mathcal{E}(u, u - Q^t u) - \mathcal{E}(Q^t u, u - Q^t u),$$

и, согласно лемме 5.1.3, слагаемое  $\mathcal{E}(Q^t u, u - Q^t u)$  неотрицательно.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Вспомним, что  $|u|_0 = \mathcal{E}(u, u)^{1/2}$  — это полунорма. Согласно лемме 5.1.3 и неравенству треугольника

$$0 \leq |u|_0 - |Q^t u|_0 \leq |u - Q^t u|_0.$$

Умножая обе части неравенства на  $|u|_0 + |Q^t u|_0$ , получаем

$$0 \leq |u|_0^2 - |Q^t u|_0^2 \leq |u - Q^t u|_0 (|u|_0 + |Q^t u|_0) \leq 2|u|_0 \cdot |u - Q^t u|_0.$$

Следовательно, если  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$  и  $\mathcal{E}(u - Q^t u, u - Q^t u) \approx 0$ , то  $\mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) \approx 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iv). Сразу следует из леммы 5.1.2.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). Следует из леммы 5.1.2 и из того, что функция  $s \mapsto \mathcal{E}(Q^s u, u)$  — неубывающая.  $\square$

Различные характеристики множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  полезны для разных целей. В качестве иллюстрации используем утверждение 5.1.5(iii) для доказательства того факта, что область определения имеет правильную линейную структуру.



**5.1.6. Следствие.** Пусть  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , и пусть число  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$  околостандартно. Тогда векторы  $\alpha u$  и  $u + v$  принадлежат множеству  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .

*Доказательство.* Утверждение про  $\alpha u$  тривиально. Что касается вектора  $u + v$ , воспользуемся утверждением 5.1.5(iii) и неравенством треугольника:

$$\begin{aligned} |(u + v) - Q^t(u + v)|_0 &= |u - Q^t u + v - Q^t v|_0 \leq \\ &\leq |u - Q^t u|_0 + |v - Q^t v|_0, \end{aligned}$$

причем два последних слагаемых при  $t \approx 0$  бесконечно малы.  $\square$

Вторая часть предложения 5.1.4 показывает, что у вектора  $Q^t u$  больше шансов оказаться в множестве  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ , чем у вектора  $u$ . Следующая лемма делает это утверждение более точным.

**5.1.7. Лемма.** Пусть  ${}^\circ \mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ . Тогда для всех не бесконечно малых  $t$  имеем  $Q^t u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 5.1.3

$${}^\circ \mathcal{E}_1(Q^t u, Q^t u) \leq {}^\circ \mathcal{E}_1(u, u) < \infty.$$

Чтобы доказать, что вектор  $Q^t u$  удовлетворяет условию 5.1.1(ii), заметим, что, согласно 5.1.4(ii), функция

$$t \mapsto \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u)$$

является неубывающей и выпуклой, так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} (\mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) - \mathcal{E}(Q^{t+s} u, Q^{t+s} u)) &\leq \\ &\leq \frac{1}{t} (\mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u)) \end{aligned}$$

для всех  $s > 0$ . Умножая обе части на  $s$ , получаем

$$\begin{aligned} (17) \quad 0 &\leq \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) - \mathcal{E}(Q^{t+s} u, Q^{t+s} u) \leq \\ &\leq (s/t) (\mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(Q^t u, Q^t u)). \end{aligned}$$

При  $s \approx 0$  и  $t \not\approx 0$  выражение в правой части бесконечно мало, откуда и следует утверждение леммы.  $\square$

Сейчас мы усилим утверждение последней леммы и, в частности, покажем, что если  $\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , то существует такое бесконечно малое  $t$ , что  $Q^t u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Сначала немного терминологии: подмножество  $\mathcal{F} \subset H$  называется  $\mathcal{E}$ -замкнутым, если для любой последовательности  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов множества  $\mathcal{F}$ , удовлетворяющей условию  ${}^\circ \|u_n - u_m\|_1 \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ , существует такое  $u \in \mathcal{F}$ , что  ${}^\circ \|u_n - u\|_1 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**5.1.8. Предложение.** Множество  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  является  $\mathcal{E}$ -замкнутым. Более того, если  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — лежащая в  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$   $|\cdot|_1$ -фундаментальная последовательность,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  — ее внутреннее продолжение, то найдется такое  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $n_\eta \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  при всех  $\eta \leq \gamma$ .

*Доказательство.* Пусть  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  —  $|\cdot|_1$ -фундаментальная последовательность из  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , и пусть  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  — ее внутреннее продолжение. Тогда существует такое  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $|u_n - u_m|_1 \approx 0$  при всех бесконечно больших  $n, m \leq \gamma$ . Пусть  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $\eta \leq \gamma$ . Согласно выбору числа  $\gamma$  имеем  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u_\eta, u_\eta) < \infty$ , и  ${}^\circ|u_n - u_\eta| \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$  в  $\mathbb{N}$ . Осталось доказать, что  $u_\eta \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .

Предположим обратное. Тогда, согласно 5.1.5(iii), найдутся такие  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и  $t \approx 0$ , что

$$|u_\eta - Q^t u_\eta|_0 > \varepsilon.$$

Выберем столь большое  $m \in \mathbb{N}$ , что

$$|u_\eta - u_m|_0 < \varepsilon/4;$$

тогда, согласно лемме 5.1.3,

$$|Q^t u_\eta - Q^t u_m|_0 < \varepsilon/4.$$

Объединяя три полученных неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &< |u_\eta - Q^t u_\eta|_0 \leq |u_\eta - u_m|_0 + |u_m - Q^t u_m|_0 + |Q^t u_m - Q^t u_\eta|_0 \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + |u_m - Q^t u_m|_0. \end{aligned}$$

Но, поскольку  $u_m \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , последнее слагаемое бесконечно мало (см. 5.1.5(iii)), что и приводит к желаемому противоречию.  $\square$

**5.1.9. Следствие.** Если  $\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , то найдется такое  $t_0 \approx 0$ , что  $Q^t u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  при всех  $t \geq t_0$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что если  $Q^{t_0} u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , то и  $Q^t u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  при всех  $t > t_0$ . Положим  $u_n = Q^{1/n} u$ . Тогда последовательность  $(|u_n|_1)_{n \in \mathbb{N}}$  не убывает и ограничена сверху числом  $|u|_1$ , так что к последовательности  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  применимо предыдущее предложение. Утверждение доказано.  $\square$

**Замечание.** Предложение 5.1.8 является весьма удивительным, поскольку существуют стандартные формы, не являющиеся замкнутыми. Более того, во многих приложениях основная трудность как раз и состоит в том, чтобы показать, что построенная форма замкнута или хотя бы может быть продолжена до зам-

кнутой (см., например, Albeverio Høegh-Krohn [3]—[5], [10]—[13]; Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1], [2]; Albeverio, Fukushima, Karwowski, Streit [1]; Albeverio, Kusuoka, Streit [1]; Carmona [1]; Fukushima [3], [4]; Reed, Simon [1]; Röckner, Wielens [1]; Wielens [1]). Но если известно, что стандартная форма получена из гиперконечной формы, ее замкнутость следует непосредственно из предложения 5.1.8. В гл. 6 мы увидим различные примеры того, насколько полезно это наблюдение. Пока же ограничимся лишь замечанием, что, как будет вскоре показано (см. теорему 5.2.1), все стандартные замкнутые формы получаются из гиперконечных форм, так что метод является достаточно общим.

Заметим, что если бы мы могли показать, что из неравенства  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$  следует  $\|u - Q^t u\| \approx 0$  при всех  $t \approx 0$ , то следствие 5.1.9 дало бы нам первую часть нашей программы — а именно, формулу (3).

**5.1.10. Лемма.** Если  ${}^\circ\mathcal{E}(u, u) < \infty$ , то при всех  $t \approx 0$

$$\|u - Q^t u\| \approx 0.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\|u - Q^t u\|^2 &= \langle u - Q^t u, u - Q^t u \rangle = t \cdot \mathcal{E}^{(t)}(u, u - Q^t u) = \\ &= t \cdot (\mathcal{E}^{(t)}(u, u) - \mathcal{E}^{(t)}(u, Q^t u)) \leq t \cdot \mathcal{E}(u, u) \approx 0\end{aligned}$$

при  $t \approx 0$ .  $\square$

Теперь сосредоточим внимание на нашей второй цели — формуле (4).

**5.1.11. Лемма.** Если  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  и  $u \approx v$ , то

$$\mathcal{E}(u, u) \approx \mathcal{E}(v, v).$$

*Доказательство.* Очевидно, достаточно показать, что если  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  и  $u \approx 0$ , то  $\mathcal{E}(u, u) \approx 0$ . Но для  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  мы знаем из 5.1.5(iv), что

$$(18) \quad {}^\circ\mathcal{E}(u, u) = \lim_{t \downarrow 0, t \not\approx 0} {}^\circ\mathcal{E}^{(t)}(u, u).$$

К тому же

$$\mathcal{E}^t(u, u) = (1/t) \langle (I - Q^t)u, u \rangle = (1/t) (\langle u, u \rangle - \langle Q^t u, u \rangle) \leq (1/t) \|u\|,$$

что бесконечно мало при  $t \not\approx 0$ . Объединяя последнее неравенство с формулой (18), получаем утверждение леммы.  $\square$

Суммируем все результаты о множестве  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  в виде одной теоремы.

**5.1.12. Теорема.** Пусть  $\mathcal{E}$  — симметрическая неотрицательная квадратичная форма на гиперконечномерном линейном пространстве  $H$  со скалярным произведением. Тогда

- (i) если  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  и число  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$  конечно, то векторы  $\alpha u, u + v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ;  
 (ii) множество  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  является  $\mathcal{E}$ -замкнутым;  
 (iii) если  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , то существует такое  $v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , что  $\|u - v\| \approx 0$ ; более того,

$${}^\circ\mathcal{E}(v, v) = \lim_{t \downarrow 0, t \not\approx 0} {}^\circ\mathcal{E}(Q^t u, Q^t u) = \lim_{t \downarrow 0, t \not\approx 0} {}^\circ\mathcal{E}^{(t)}(u, u);$$

- (iv) если  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  и  $u \approx v$ , то  $\mathcal{E}(u, u) \approx \mathcal{E}(v, v)$ .

После сказанного выше имеет смысл следующее определение.

**5.1.13. Определение.** Стандартная часть формы  $\mathcal{E}$  — это квадратичная форма  $E$  на пространстве  ${}^\circ H$ , определяемая следующими условиями:

(i) область определения  $\mathcal{D}[E]$  формы  $E$  — это множество всех таких классов эквивалентности  ${}^\circ u \in {}^\circ H$ , для которых найдется  $v \in {}^\circ u$ ,  $\mathcal{E}_1(v, v) < \infty$ ;

(ii) если  $x, y \in {}^\circ H$  принадлежат области определения формы  $E$ , положим  $E(x, y) = {}^\circ\mathcal{E}(u, v)$ , где  $u \in x, v \in y$  и  $u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .

Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов множества  $\mathcal{D}[E]$  назовем  $E_1$ -фундаментальной, если  $E_1(u_n - u_m, u_n - u_m) \rightarrow 0$  при  $n, m \rightarrow \infty$ . Будем называть форму  $E$  замкнутой, если в  $\mathcal{D}[E]$  все  $E_1$ -фундаментальные последовательности сходятся по  $E_1$ -норме к элементу множества  $\mathcal{D}[E]$ . Следующее предложение непосредственно следует из теоремы 5.1.12 и из определения формы  $E$ .

**5.1.14. Предложение.** Пусть  $E$  — стандартная часть формы  $\mathcal{E}$ . Тогда форма  $E$  замкнута, и для всех  $x \in {}^\circ H$

$$(19) \quad E(x, x) = \inf \{ {}^\circ\mathcal{E}(u, u) \mid u \in x \},$$

где значение  $\infty$  в правой части означает, что выражение в левой части не определено.

Заметим, что формула (19) совпадает с формулой (2) — нашим первоначальным предложением определения стандартной части формы  $\mathcal{E}$ .

### В. Резольвента

До сих пор нас интересовали только взаимоотношения между формой  $\mathcal{E}$  и отвечающей ей полугруппой  $\{Q^t\}$ . В оставшейся части параграфа мы сосредоточим внимание на резольвенте  $\{G_\alpha\}$  формы  $\mathcal{E}$ . Наша цель — дать описание формы  $\mathcal{E}$  и множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  в терминах  $\{G_\alpha\}$ , аналогично тому, как мы это делали с помощью полугруппы. Основной результат (теорема 5.1.19) позволит восстанавливать форму из ее резольвенты, что будет играть существенную роль в изучении сингулярных возмущений операторов в гл. 6.

Оператор  $G_\alpha$  определяется как  $(A - \alpha)^{-1}$ , если последний существует<sup>1)</sup>; формальная выкладка

$$\begin{aligned} (20) \quad (A - \alpha)^{-1} &= (I - (I - \Delta t (A - \alpha)))^{-1} \Delta t = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (I - \Delta t (A - \alpha))^k \Delta t = \sum_{k=0}^{\infty} (Q^{\Delta t} + \alpha \Delta t)^k \Delta t^2 \end{aligned}$$

показывает, что  $G_\alpha$  существует, если ряд в правой части (20) сходится. Поскольку оператор  $Q^{\Delta t}$  неотрицателен, симметричен и имеет норму, не превосходящую единицы, все его собственные значения должны лежать между нулем и единицей. Выбирая  $\alpha$  таким, что  $|\alpha| \Delta t \leq 1/2$ , получаем, что абсолютные величины собственных значений оператора  $Q^{\Delta t} + \alpha \Delta t$  должны быть меньше, чем  $1 + \alpha \Delta t$ . Значит, если  $\alpha < 0$  и  $|\alpha| \Delta t \leq 1/2$ , ряд (20) сходится, и мы получаем следующее предложение.

**5.1.15. Предложение.** Пусть  $\mathcal{E}$  — неотрицательная симметрическая квадратичная форма, и число  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ ,  $-1/(2\Delta t) \leq \alpha < 0$ . Тогда оператор  $G_\alpha$  существует, и

$$(21) \quad G_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (Q^{\Delta t} + \alpha \Delta t)^k \Delta t.$$

Более того,  $\|G_\alpha\| \leq 1/|\alpha|$ .

В стандартной теории формуле (21) соответствует равенство

$$G_\alpha = \int_0^\infty e^{-t(A-\alpha)} dt = \int_0^\infty e^{-tA} e^{\alpha t} dt,$$

задающее оператор  $G_\alpha$  в виде взвешенной суммы элементов  $e^{-tA}$  в полугруппе. Поскольку  $\int_0^\infty (-\alpha e^{\alpha t}) dt = 1$ , удобно умножить обе части предыдущего равенства на  $-\alpha$ , получив

$$(22) \quad -\alpha G_\alpha = \int_0^\infty e^{-tA} (-\alpha e^{\alpha t}) dt.$$

Перенесение этого результата на гиперконечную теорию не столь уж очевидно, поскольку равенство  $(Q^{\Delta t} + \alpha \Delta t)^k = Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k$  (соответствующее стандартному равенству  $e^{-t(A-\alpha)} = e^{-tA} e^{\alpha t}$ ) не верно. Однако следующий результат показывает, что два интересующих нас оператора достаточно близки.

<sup>1)</sup> Запись  $A - \alpha$  означает оператор  $A - \alpha \cdot I$ ; в следующих далее формулах оператор  $I$  часто опускается, а оставляется лишь числовой множитель при нем. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Здесь и далее, если членами ряда являются внутренние величины, сумму  $\sum_{k=0}^{\infty}$  следует понимать как сумму  $\sum_{k \in {}^*\mathbb{N} \cup \{0\}}$ . — *Прим. перев.*

**5.1.16. Лемма.** Для  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ ,  $-1/\sqrt{\Delta t} \leq \alpha < 0$  и для всех таких  $u \in H$ , что  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , справедливо

$$(23) \quad \left| \alpha G_\alpha u - \left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right) u \right|_1 \approx 0.$$

*Доказательство.* Пусть  $(e_i)_{i \leq N}$  — ортонормированный базис в  $H$ , состоящий из собственных векторов оператора  $A$ , и пусть  $a_i$  —  $i$ -е собственное значение. Полагая  $b_i = a_i + 1$ , замечаем, что если  $u = \sum_{i=1}^N u_i e_i$ , то

$$(24) \quad \mathcal{E}_1(u, u) = \sum_{i=1}^N b_i u_i^2.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, видим, что

$$\alpha G_\alpha(e_i) = \left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a_i \Delta t + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right) e_i = \frac{\alpha}{a_i - \alpha} e_i,$$

и, аналогично,

$$\left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right) e_i = \frac{\alpha}{a_i - \alpha + a_i \sigma \Delta t} e_i,$$

что приводит к равенству

$$\begin{aligned} \alpha G_\alpha(u) - \left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right) u &= \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{a_i \Delta t u_i e_i}{(1 - (a_i/\alpha))(1 - (a_i/\alpha) - a_i \Delta t)}. \end{aligned}$$

Взяв  $|\cdot|_1$ -норму от обеих частей последнего равенства и воспользовавшись формулой (24), получим

$$\begin{aligned} &\left| \alpha G_\alpha u - \left( \alpha \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right) u \right|_1^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N b_i u_i^2 \frac{a_i^2 \Delta t^2}{(1 - (a_i/\alpha))^2 (1 - (a_i/\alpha) - a_i \Delta t)^2} \leq \eta \mathcal{E}_1(u, u), \end{aligned}$$

где

$$\eta = \max_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{a_i^2 \Delta t^2}{(1 - (a_i/\alpha))^2 (1 - (a_i/\alpha) - a_i \Delta t)^2} \right).$$

Осталось показать, что  $\eta$  бесконечно мало. Прежде всего заметим, что в силу неравенства  $\|A\|\Delta t \leq 1$  (см. (9))  $a_i\Delta t \leq 1$  при всех  $i$ . Отсюда с помощью несложных выкладок получаем

$$\eta \leq \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{a_i^2 \Delta t^2}{(1 - (a_i/\alpha))^2 (a_i/\alpha)^2} \right\} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{\alpha^4 \Delta t^2}{(\alpha - a_i)^2} \right\}.$$

Так как  $-1/\sqrt{\Delta t} \leq \alpha < 0$ , последнее выражение всегда бесконечно мало (если  $\alpha$  конечно, то числитель бесконечно мал, если же  $\alpha$  бесконечно велико, то знаменатель бесконечно велик), что и требовалось доказать.  $\square$

Равенство (23) служит нестандартным аналогом равенства (22). Заметим, что

$$(25) \quad \sum_{k=0}^{\infty} -\alpha (1 + \alpha \Delta t)^k = 1,$$

причем если  $\alpha$  бесконечно велико, то найдется такое  $t_\alpha \approx 0$ , что

$$(26) \quad \sum_{0 \leq k \leq t_\alpha/\Delta t} -\alpha (1 + \alpha \Delta t)^k \approx 1.$$

С другой стороны, если  $\alpha$  конечно, то для всех  $t \approx 0$

$$(27) \quad \sum_{k \geq t/\Delta t} -\alpha (1 + \alpha \Delta t)^k \approx 1.$$

Теперь мы можем приступить к описанию формы  $\mathcal{J}$  и множества  $\mathcal{D}[\mathcal{J}]$  в терминах операторов  $G_\alpha$ .

**5.1.17. Лемма.** Пусть  $-1/\sqrt{\Delta t} \leq \alpha < 0$  и  ${}^\circ \mathcal{J}(u, u) < \infty$ . Тогда

- (i) если  $\alpha$  бесконечно велико, то  $\|-\alpha G_\alpha u - u\| \approx 0$ ;
- (ii) если  $\alpha$  конечно, то  $-\alpha G_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{J}]$ ;
- (iii) существует такое бесконечно большое  $\alpha$ , что  $-\alpha G_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{J}]$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 5.1.16 достаточно доказать все утверждения, заменив в них  $G_\alpha$  на

$$\hat{G}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{k \Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t.$$

(i) Пусть  $t_\alpha \approx 0$  таково, как в формуле (26). Тогда

$$\begin{aligned} \|-\alpha \hat{G}_\alpha u - u\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (Q^{k \Delta t} u - u) (-\alpha) (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right\| \approx \\ &\approx \left\| \sum_{0 \leq k \leq t_\alpha/\Delta t} (Q^{k \Delta t} u - u) (-\alpha) (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right\| \approx 0; \end{aligned}$$

здесь на последнем шаге мы воспользовались леммой 5.1.10.

(ii) Выберем такое  $t \approx 0$ , что  $Q^t u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Пусть  $(e_i)_{i \leq N}$  — ортонормированный базис в  $H$ , состоящий из собственных векторов оператора  $A$ , и  $a_i$  — его  $i$ -е собственное значение. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < t/\Delta t} Q^{k\Delta t} (1 + \alpha \Delta t)^k e_i &= \sum_{0 \leq k < t/\Delta t} (1 - a_i \Delta t)^k (1 + \alpha \Delta t)^k e_i = \\ &= \frac{1 - (1 + \alpha \Delta t)^{t/\Delta t} (1 - a_i \Delta t)^{t/\Delta t}}{a_i - \alpha + a_i \alpha \Delta t} e_i. \end{aligned}$$

Если  $u = \sum_{i=1}^N u_i e_i$ , мы получаем

$$\left\| \sum_{0 \leq k < t/\Delta t} Q^{k\Delta t} u (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right\|_1^2 = \sum_{i=1}^N b_i u_i^2 \left( \frac{1 - (1 + \alpha \Delta t)^{t/\Delta t} (1 - a_i \Delta t)^{t/\Delta t}}{a_i - \alpha + a_i \alpha \Delta t} \right),$$

где  $b_i = a_i + 1$ . Поскольку  $\alpha$  конечно, легко проверить, что

$$\frac{1 - (1 + \alpha \Delta t)^{t/\Delta t} (1 - a_i \Delta t)^{t/\Delta t}}{a_i - \alpha + a_i \alpha \Delta t} \approx 0$$

для всех  $i$ , и, следовательно,

$$(28) \quad \left\| \sum_{0 \leq k < t/\Delta t} Q^{k\Delta t} u (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right\|_1 \approx 0.$$

Заметим, что  $Q^{k\Delta t} u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  для всех таких  $k$ , что  $k \geq t/\Delta t$ , и поэтому должно выполняться включение

$$\sum_{k \geq t/\Delta t} Q^{k\Delta t} u (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \in \mathcal{D}[\mathcal{E}].$$

Но, согласно (28),  $\left| \hat{G}_\alpha u - \sum_{k \geq t/\Delta t} Q^{k\Delta t} u (1 + \alpha \Delta t)^k \Delta t \right|_1 \approx 0$ , откуда следует, что  $\hat{G}_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .

(iii) Заметим, что величина

$$(29) \quad \mathcal{E}_1(-\alpha G_\alpha u, -\alpha G_\alpha u) = \sum_{i=1}^N b_i u_i^2 \frac{\alpha^2}{(a_i - \alpha)^2} = \sum_{i=1}^N b_i u_i^2 \frac{1}{(a_i/\alpha - 1)^2}$$

возрастает при  $\alpha \rightarrow -\infty$  и ограничена числом  $\mathcal{E}_1(u, u)$ . Применяя предложение 5.1.8 к последовательности  $u_n = n G_{-n} u$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

Следующее предложение добавляет к списку 5.1.5 еще две характеристики множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .



**5.1.18. Предложение.** Следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ;
- (ii)  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ ,  $u \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ\mathcal{E}_1(u + \alpha G_\alpha u, u + \alpha G_\alpha u) = 0$ ;
- (iii)  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ\mathcal{E}_1(-\alpha G_\alpha u, -\alpha G_\alpha u) < \infty$ .

*Доказательство.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Выберем такое бесконечно большое  $\alpha$ , что  $-\alpha G_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Тогда  $u + \alpha G_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ,  $u + \alpha G_\alpha u \approx 0$ , и, значит,  $\mathcal{E}_1(u + \alpha G_\alpha u, u + \alpha G_\alpha u) \approx 0$ , откуда следует (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Из формулы (29) и неравенства треугольника следует, что  $0 \leq |u|_1 - |-\alpha G_\alpha u|_1 \leq |u + \alpha G_\alpha u|_1$ . Умножая это неравенство на неравенство  $|u|_1 + |-\alpha G_\alpha u|_1 \leq 2\mathcal{E}_1(u, u)$ , получаем  $0 \leq |u|_1^2 - |-\alpha G_\alpha u|_1^2 \leq 2\mathcal{E}_1(u, u) \cdot |u + \alpha G_\alpha u|_1$  из чего видно, что (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Выберем такое бесконечно большое  $\alpha$ , что  $-\alpha G_\alpha u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Тогда  $\|u + \alpha G_\alpha u\| \approx 0$  и  $\mathcal{E}_1(u, u) \approx \mathcal{E}_1(-\alpha G_\alpha u, -\alpha G_\alpha u)$ , откуда  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .  $\square$

Вот мы и добрались до заключительной теоремы данного параграфа. Как уже отмечалось выше, этот результат позволяет восстанавливать форму по ее резольвенте. Когда в гл. 6 мы займемся исследованием сингулярных возмущений, мы обнаружим, что контролировать резольвенту возмущенной формы гораздо легче, чем собственно форму. Но, разобравшись с резольвентой, мы с помощью теоремы 5.1.19 получим форму.

Будем писать  $a = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} f(\alpha)$ , имея в виду, что  $a \approx f(\alpha)$  при  $\alpha$  отрицательных, бесконечно больших, но при этом достаточно малых по абсолютной величине.

**5.1.19. Теорема.** Пусть  $\mathcal{E}$  — симметрическая неотрицательная гиперконечная форма на  $H$ , и  $E$  — ее стандартная часть. Тогда для всех  $x \in {}^\circ H$  и всех  $v \in x$

$$(30) \quad E(x, x) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} ({}^\circ(\alpha^2 \langle G_\alpha v, v \rangle + \alpha \langle v, v \rangle).$$

*Доказательство.* Заметим, что, поскольку все операторы  $G_\alpha$  ограничены, не имеет значения, какое  $v \in x$  мы используем. Разобьем доказательство на два случая.

(i) Вектор  $x$  не принадлежит области определения формы  $E$ . Пусть  $(e_i)_{i \leq N}$  — ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $A$ ; предположим, что соответствующие собственные значения  $(a_i)_{i \leq N}$  идут в порядке убывания. Выберем

$v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \in x$ . Простая выкладка показывает, что

$$-(\langle \alpha^2 G_\alpha v, v \rangle + \alpha \langle v, v \rangle) = \sum_{i=1}^N a_i v_i^2 \frac{-\alpha}{a_i - \alpha}.$$

Предположим (от противного), что предел в формуле (30) конечен. Тогда существует такое бесконечно большое  $\alpha$ , для которого

$$(31) \quad \sum_{i=1}^N a_i v_i^2 \frac{-\alpha}{a_i - \alpha} < \infty.$$

Пусть  $K$  — наибольшее целое число, для которого  $a_K > |\alpha|$ ; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a_i v_i^2 \frac{-\alpha}{a_i - \alpha} &= \sum_{i=1}^K a_i v_i^2 \frac{-\alpha}{a_i - \alpha} + \sum_{i=K+1}^N a_i v_i^2 \frac{-\alpha}{a_i - \alpha} = \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^K v_i^2 \frac{1}{1 - \alpha/a_i} + \sum_{i=K+1}^N a_i v_i^2 \frac{1}{1 - \alpha/a_i} \geq -\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^K v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=K+1}^N a_i v_i^2, \end{aligned}$$

так что, согласно (31), оба слагаемых в правой части конечны.

Но если сумма  $-(\alpha/2) \sum_{i=1}^K v_i^2$  конечна, то

$$v \approx v' = \sum_{i=K+1}^N v_i e_i,$$

а если к тому же сумма  $\frac{1}{2} \sum_{i=K+1}^N a_i v_i^2$  конечна, то  ${}^\circ \mathcal{E}_1(v', v') < \infty$ .

Это противоречит предположению  $x \notin \mathcal{D}[E]$ .

(ii) Вектор  $x$  принадлежит области определения формы  $E$ . Пусть  $v \in x$  таково, что

$$(32) \quad {}^\circ \mathcal{E}_1(v, v) < \infty.$$

Поскольку  $\mathcal{E}_{-\alpha}(G_\alpha u, w) = \langle u, w \rangle$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(-\alpha G_\alpha v, -\alpha G_\alpha v) &= \mathcal{E}_{-\alpha}(\alpha G_\alpha v, \alpha G_\alpha v) + \alpha \langle \alpha G_\alpha v, \alpha G_\alpha v \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle G_\alpha v, v \rangle + \alpha^3 \langle G_\alpha v, G_\alpha v \rangle. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы будет следовать из предложения 5.1.18(iii), если мы сможем доказать, что для всех  $v$ , удовлетворяющих условию (32), справедливо равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} ({}^\circ \alpha^2 \langle G_\alpha v, v \rangle + \alpha^3 \langle G_\alpha v, G_\alpha v \rangle + \alpha^2 \langle G_\alpha v, v \rangle + \alpha \langle v, v \rangle) = 0$$

Последнее равенство легко переписывается в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ(\alpha \| \alpha G_\alpha v + v \|^2) = 0.$$

Внесем  $\alpha$  под знак нормы; если переформулировать задачу в нестандартных терминах, то все, что требуется доказать, — это что

$$(33) \quad \| |\alpha|^{3/2} G_\alpha v - |\alpha|^{1/2} v \|^2 \approx 0$$

для всех отрицательных бесконечно больших, но достаточно малых по абсолютной величине значений  $\alpha$ .

Если  $v = \sum_{i=1}^N v_i e_i$  — разложение вектора  $v$  по собственным векторам, то

$$(34) \quad \begin{aligned} \| |\alpha|^{3/2} G_\alpha v - |\alpha|^{1/2} v \|^2 &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{|\alpha|^{3/2}}{a_i - \alpha} - |\alpha|^{1/2} \right)^2 v_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{-\alpha a_i^2}{(a_i - \alpha)^2} v_i^2 = \sum_{i=1}^N a_i v_i^2 \left( \frac{1}{\beta_i + \beta_i^{-1} + 2} \right), \end{aligned}$$

где  $\beta_i = -\alpha/a_i$ .

Заметим, что если  $a_i$  бесконечно мало по сравнению с  $\alpha$ , или, наоборот,  $\alpha$  бесконечно мало по сравнению с  $a_i$ , то величина  $1/(\beta_i + \beta_i^{-1} + 2)$  бесконечно мала. Чтобы сделать сумму в правой части формулы (34) бесконечно малой, нужно лишь выбрать такое  $\alpha$ , чтобы вклад всех остальных членов был бесконечно малым.

Предположим, что собственные значения  $(a_i)$  идут в порядке убывания. Обозначим

$$\gamma = \sup \left\{ {}^\circ \sum_{i=1}^k a_i v_i^2 \mid a_k \text{ бесконечно велико} \right\}.$$

Поскольку сумма  ${}^\circ \sum_{i=1}^k a_i v_i^2 \leq \mathcal{O}(v, v)$  конечна в силу условия (32),  $\gamma$  — это действительное число.

Применяя принцип насыщения к семейству множеств

$$A_n = \left\{ j \in {}^*\mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^j a_i v_i^2 > \gamma - \frac{1}{n}, \quad a_j > n \right\},$$

найдем такое бесконечно большое натуральное число  $K$ , что  $a_K$  бесконечно велико и

$$\sum_{i=1}^K a_i v_i^2 \approx \gamma.$$

Выберем  $|\alpha|$  бесконечно большим, но бесконечно малым по сравнению с  $a_K$ .

Для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  положим

$$M_\varepsilon = \inf \left\{ k \mid \sum_{i=1}^k a_i v_i^2 \geq \gamma + \varepsilon \right\}.$$

В силу выбора числа  $\gamma$  собственное значение  $a_{M_\varepsilon}$  должно быть конечным. Но

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a_i v_i^2 \frac{1}{\beta_i + \beta_i^{-1} + 2} &\leq \sum_{i=1}^K a_i v_i^2 \frac{1}{\beta_i + \beta_i^{-1} + 2} + \sum_{i=K+1}^{M_\varepsilon-1} a_i v_i^2 + \\ &+ \sum_{i=M_\varepsilon}^N a_i v_i^2 \frac{1}{\beta_i + \beta_i^{-1} + 2}. \end{aligned}$$

В полученной сумме первое слагаемое бесконечно мало в силу условия (32) и того, что все  $\beta_i$  бесконечно малы; второе слагаемое не превосходит  $2\varepsilon$  в силу выбора числа  $M_\varepsilon$ ; наконец, третье слагаемое бесконечно мало в силу условия (32) и того, что все  $\beta_i$  бесконечно велики. Так как  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  произвольно, сумма в левой части должна быть бесконечно малой. Тем самым доказана формула (33), а с ней и теорема.  $\square$

**Замечание.** Гиперконечная часть теории, развитой в этом параграфе, является новой, но большинство результатов соответствуют хорошо известным стандартным теоремам (см., например, Fukushima [3]; Reed, Simon [1]).

## 5.2. Связи со стандартной теорией

Первым ненадолго изложение гиперконечной теории и свяжем уже полученные результаты со стандартной теорией. В предыдущем параграфе мы установили, что квадратичная форма на гиперконечномерном пространстве  $H$  индуцирует замкнутую форму на оболочке  ${}^\circ H$  пространства  $H$ . Для большинства приложений пространство  ${}^\circ H$  чересчур велико; на самом деле нам нужна форма на заданном заранее гильбертовом пространстве  $K$ . Если  $K$  удастся отождествить с подпространством пространства  ${}^\circ H$ , мы получаем нужную нам форму, просто ограничивая построенную форму с  ${}^\circ H$  на  $K$ ; заметим, что поскольку  $K$  — замкнутое подпространство пространства  ${}^\circ H$ , ограничение на  $K$  дает замкнутую форму. Доказанный в этом параграфе результат утверждает, что любая замкнутая симметрическая неотрицательная форма на любом гильбертовом пространстве  $K$  может быть получена таким образом из гиперконечной формы. Такая теорема

о представлении нужна по двум причинам. Первая и наиболее важная причина — это потребность в установлении «правильных» взаимоотношений между уже известной стандартной теорией, с одной стороны, и новой гиперконечной теорией — с другой. Вторая (тесно связанная с первой) причина — желание показать, что работа с нестандартной теорией не ведет к потере общности.

Пусть  $K$  — стандартное гильбертово пространство. Гиперконечномерное подпространство  $H \subset {}^*K$  называется  $S$ -плотным в  ${}^*K$ , если для любого  $x \in K$  найдется такое  $y \in H$ , что  $\|x - y\| \approx 0$ . Напомним, что знаком  $\approx$  обозначается также отношение эквивалентности на  $H$ , задаваемое условием  $u \approx v \iff \iff \|u - v\| \approx 0$ ; класс эквивалентности элемента  $u$  при этом отношении обозначается  ${}^\circ u$ . Если  $H$   $S$ -плотно в  ${}^*K$ , можно отождествить  $K$  с подпространством пространства  ${}^\circ H$ , отождествив  $x \in K$  и  ${}^\circ u \in {}^\circ H$  в том случае, когда  $\|x - u\| \approx 0$ .

Пусть  $\mathcal{E}$  — симметрическая неотрицательная квадратичная форма на  $H$ . Обозначим через  $E$  стандартную часть формы  $\mathcal{E}$  (определенную в 5.1.13) и через  $E_K$  — ограничение формы  $E$  на  $K$ . Как указывалось выше, наша цель — показать, что все замкнутые формы на  $K$  могут быть получены таким образом; но прежде чем доказывать это утверждение, напомним кое-какие результаты из стандартной теории квадратичных форм (удобная ссылка здесь — Fukushima [3], § 1.3).

Каждой замкнутой симметрической неотрицательной плотно определенной форме  $F$  на  $K$  соответствует единственная строго непрерывная полугруппа  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  сжимающих операторов. Форма восстанавливается по полугруппе с помощью формул

$$(1) \quad F(x, x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle (I - T_t)x, x \rangle,$$

$$(2) \quad \mathcal{D}[F] = \left\{ x \in K \mid \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle (I - T_t)x, x \rangle < \infty \right\};$$

при этом функция  $t \mapsto \langle (I - T_t)x, x \rangle$  — неотрицательная и невозрастающая. Равенства (1) и (2) суть стандартные аналоги формул из теоремы 5.1.12(iii).

Пусть  $\text{st}_K$  — отображение стандартной части из  ${}^*K$  в  $K$ .

**5.2.1. Предложение.** Пусть  $F$  — замкнутая плотно определенная неотрицательная симметрическая форма на гильбертовом пространстве  $K$ . Пусть  $\{T_t\}$  — полугруппа, порожденная формой  $F$ , и  $H$  —  $S$ -плотное гиперконечномерное подпространство пространства  ${}^*K$ . Тогда существует такая неотрицательная симметрическая форма  $\mathcal{E}$  на  $H$  (соответствующая некоторой внутрен-

ней оси времени), что

$$(3) \quad F = E_K.$$

Более того, если  $\{Q^s\}_{s \in T}$  — полугруппа, порожденная формой  $\mathcal{E}$  и осью  $T$ , то для всех таких  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $s \in T$ ,  $u \in K$ ,  $v \in H$ , что  $t = {}^\circ s$ ,  $u = st_K(v)$ , справедливо равенство

$$(4) \quad st_K Q^s v = T_t u.$$

**Доказательство.** Пусть  $P$  — проекция пространства  ${}^*K$  на  $H$ ; будем обозначать через  $\{T_t\}_{t \in {}^*\mathbb{R}_+}$  полугруппу  ${}^*(\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ . Наш план состоит в том, чтобы сначала определить внутреннюю полугруппу, положив  $Q\Delta t = P^*T_{\Delta t}$  для тщательно выбранного бесконечно малого  $\Delta t$ , а затем положить

$$\mathcal{E}(u, v) = (1/\Delta t) \langle (I - Q\Delta t)u, v \rangle.$$

Заметим, что если  $u \in H$ , то

$$\langle Q\Delta t u, u \rangle = \langle P^*T_{\Delta t} u, u \rangle = \langle {}^*T_{\Delta t} u, u \rangle \geq 0,$$

т. е. оператор  $Q\Delta t$  неотрицателен на  $H$ . К тому же, поскольку норма оператора  ${}^*T_{\Delta t}$  не превосходит единицы, тому же условию удовлетворяет и оператор  $Q\Delta t$ , так что условия (5.1.8) — (5.1.12) выполнены.

Теперь будем искажать такое  $\Delta t$ , чтобы выполнялись условия (3) и (4). Пусть  $u$  околостандартно и  ${}^\circ t < \infty$ ; тогда

$$\|P^*T_t u - {}^*T_t u\| \approx 0,$$

так как оператор  ${}^*T_t$  переводит околостандартные элементы в околостандартные, и  $H$  является  $S$ -плотным в  ${}^*K$ . По индукции получаем

$$(5) \quad \|(P^*T_t)^n u - {}^*T_{t \cdot n} u\| \approx 0$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для каждого  $u \in K$  положим  $v_u = Pu$ . Тогда  $v_u \in H$  и  $\|u - v_u\| \approx 0$ . Рассмотрим множества

$$A_u = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall k \leq 2^{2n} (\|P^*T_{2^{-n}}^k v_u - {}^*T_{k \cdot 2^{-n}} v_u\| \leq 1/n)\}.$$

Согласно (5), каждое из этих множеств включает всё  $\mathbb{N}$  и, будучи внутренним, должно включать бесконечно большой внутренний отрезок  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq n_u\}$ . Воспользовавшись принципом насыщения, найдем такое бесконечно большое  $n$ , которое меньше, чем все  $n_u$ .

Далее, рассмотрим множества

$$B_u = \left\{ m \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall k \leq 2^{2m} (|(2^m/k) \langle (I - (P^*T_{2^{-m}})^k) v_u, v_u \rangle - (2^m/k) \langle (I - {}^*T_{k \cdot 2^{-m}}) v_u, v_u \rangle| \leq \frac{1}{m}) \right\}.$$

Для каждого  $u \in K$  множество  $B_u$  включает все  $\mathbb{N}$  и, следовательно, включает бесконечно большой отрезок  $\{m \in {}^*N \mid m \leq m_u\}$ . Вновь воспользовавшись насыщением, найдем бесконечно большое  $m$ , меньшее чем все  $m_u$ ,  $u \in K$ .

Выберем в качестве  $\Delta t$  большее из двух бесконечно малых чисел  $2^{-n}$  и  $2^{-m}$ . Тогда равенство (4) следует непосредственно из определения множества  $A_u$  и выбора числа  $n$ . Кроме того, из определения множества  $B_u$  и выбора числа  $m$  видно, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \langle (I - T_t)u, u \rangle = \lim_{t \downarrow 0, t \neq 0} {}^\circ \mathcal{E}^{(t)}(v_u, v_u).$$

Теперь доказываемое утверждение следует из (1), (2) и теоремы 5.1.12(iii).  $\square$

**Замечание.** Сделаем несколько комментариев по поводу предложения 5.2.1. Предположение о плотной определенности формы  $F$  делается только ради удобства; если оно не выполнено, мы просто применяем предложение к замыканию множества  $\mathcal{D}[F]$ . Если форма  $F$  не замкнута, мы, очевидно, не можем получить  $F$  в виде  $E_K$  для какой бы то ни было гиперконечной формы  $\mathcal{E}$ , поскольку, как это видно из предложения 5.1.14, форма  $E_K$  всегда замкнута. Однако, если форма  $F$  замыкаема (т. е. существует замкнутая форма, являющаяся продолжением формы  $F$ ), то все замкнутые продолжения формы  $F$  представимы в виде стандартных частей гиперконечных форм. Естественным представлением для замыкаемой формы  $F$  было бы представление ее наименьшего замкнутого продолжения — а именно, продолжения Фридрихса. Если форма  $F$  не замыкаема, никакое ее гиперконечное представление (в нашем смысле) невозможно; какое бы представление мы ни взяли, оно изменит некоторые значения формы  $F$ , сузит множество  $\mathcal{D}[F]$  в одних направлениях и расширит в других — все для того, чтобы сделать форму  $F$  замкнутой. Как мы уже отмечали в § 5.1, то, что незамыкаемые формы не имеют гиперконечных представлений, является скорее благословением, чем проклятием; в стандартной теории огромные усилия тратятся на то, чтобы показать, что построенная форма замыкаема; в гиперконечной теории это является непосредственным следствием конструкции.

В заключение отметим, что имеется аналогичное равенству (4) уравнение, связывающее резольвенты форм  $F$  и  $\mathcal{E}$ ; точную формулировку и доказательство мы оставляем читателю.

В предложении 5.2.1 пространство  $H$  — это произвольное  $S$ -плотное гиперконечномерное подпространство пространства  ${}^*K$ . Однако в приложениях часто желательно иметь подпространства специального вида, подходящие для определенного рода

задач. Рассмотрим случай  $K = L^2(X, m)$ , где  $X$  — некоторое хаусдорфово пространство.

Сделаем следующие предположения о пространстве с мерой  $(X, \mathcal{B}, m)$ : мера  $m$  — это пополненная борелевская мера;  $m(K) < \infty$  для всех компактов  $K$ ; мера  $m$  — *радоновская*, т. е. для всех  $B \in \mathcal{B}$

$$(6) \quad m(B) = \sup \{m(K) \mid K \subset B, K \text{ компактно}\},$$

и для всех  $B \in \mathcal{B}$ ,  $m(B) < \infty$

$$(7) \quad m(B) = \inf \{m(O) \mid B \subset O, O \text{ открыто}\}.$$

Назовем подмножество  $Y \subset {}^*X$  *богатым*, если оно гиперконечно и  $\text{st}(Y) = X$ . Если множество  $Y$  богато, легко построить такую гиперконечную меру  $\mu$  на  $Y$ , что  $m = L(\mu) \circ \text{st}^{-1}$ . Пусть  $H$  — гиперконечномерное пространство всех внутренних функций  $f: Y \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Мы хотим показать, что все замкнутые формы на пространстве  $K = L^2(X, \mathcal{B}, m)$  могут быть представлены с помощью гиперконечных форм на  $H$ .

Один из способов построения богатого подмножества  $Y \subset {}^*X$  и меры  $\mu$  на  $Y$ , представляющей меру  $m$ , состоит в следующем (см. доказательство следствия 3.4.10). Если  $O_1, \dots, O_n$  — открытые подмножества в  $X$ , обозначим через  $\mathcal{P}_{O_1}, \dots, \mathcal{P}_{O_n}$  набор всех таких гиперконечных разбиений  $\mathcal{P}$  пространства  ${}^*X$ , что если  $P$  — какой-то из классов разбиения  $\mathcal{P}$ , то множество  $P$  является  $*$ -борелевским, и для всех  $i \leq n$  либо  $P \subset {}^*O_i$ , либо  $P \cap {}^*O_i = \emptyset$ . Применяя к семейству  $\{\mathcal{P}_{O_1}, \dots, \mathcal{P}_{O_n}\}$  принцип насыщения, находим разбиение  $P$ , принадлежащее всем наборам  $\mathcal{P}_{O_1}, \dots, \mathcal{P}_{O_n}$ . Пусть  $Y$  — внутреннее множество, содержащее по одной точке из каждого класса разбиения  $\mathcal{P}$ . По построению разбиения  $\mathcal{P}$  множество  $Y$  должно быть богатым в  ${}^*X$ . Для каждого  $y \in Y$  пусть  $P_y$  — соответствующий класс в  $\mathcal{P}$ ; легко видеть, что если точка  $y$  околостандартна, то  $P_y$  целиком содержится в ее монаде. Определим внутреннюю меру  $\mu$  на  $Y$ , положив

$$\mu(\{y\}) = {}^*m(P_y);$$

теперь равенство  $m = L(\mu) \circ \text{st}^{-1}$  следует из формул (6) и (7) и предложения 3.4.8.

Пусть подпространство  $\tilde{H} \subset {}^*K$  состоит из всех функций, постоянных на каждом классе  $P_y \in \mathcal{P}$ . Поскольку пространства  $H$  и  $\tilde{H}$ , очевидно, изоморфны, предложение 5.2.1 даст нам представление замкнутых форм на  $K$  в терминах внутренних форм на  $H$ ,



если только мы сможем доказать  $S$ -плотность пространства  $\dot{H}$  в  ${}^*K$ .

Из § 3.2 мы знаем, что каждая функция  $f$  из  $K$  имеет такое  $S$ -квадратично интегрируемое поднятие  $\tilde{f} \in \dot{H}$ , что  ${}^\circ\tilde{f}(x) = f({}^\circ x)$  для почти всех околостандартных  $x$ . Если нам удастся показать, что  $\|{}^*f - \tilde{f}\| \approx 0$ , плотность  $\dot{H}$  в  ${}^*K$  будет доказана. Согласно условию (6), достаточно установить этот факт для ограниченных функций  $f$  с компактным носителем; а для таких функций это утверждение является непосредственным следствием андерсоновской нестандартной версии теоремы Лузина (следствие 3.4.9). Мы доказали следующее утверждение.

**5.2.2. Следствие.** Пусть  $X$  — хаусдорфово пространство,  $m$  — радоновская мера на  $X$ , и  $F$  — плотно определенная замкнутая неотрицательная симметрическая форма на  $L^2(X, m)$ . Тогда существует гиперконечное богатое подмножество  $Y \subset {}^*X$ , внутренняя мера  $\mu$  на  $Y$  и неотрицательная симметрическая форма  $\mathcal{E}$  на  $L^2(Y, \mu)$ , представляющая форму  $F$  в следующем смысле:  $m = \mu \circ st^{-1}$  и для всех  $u \in L^2(X, m)$

$$F(u, u) = \inf \{ \mathcal{E}(v, v) \mid v \text{ есть 2-поднятие функции } u \}.$$

Более того, если  $\{T_t\}$  и  $\{Q^s\}$  — полугруппы, порожденные формами  $F$  и  $\mathcal{E}$  соответственно,  $u$  есть 2-поднятие функции  $u$  и  $u \approx t$ , то  $Q^s u$  есть 2-поднятие функции  $T_t u$ .

В оставшейся части этой главы мы в основном будем интересоваться квадратичными формами, порождающими марковские процессы. Ограниченный оператор  $S$  на  $L^2(X, m)$  называется *марковским оператором*, если он отображает неотрицательные функции в неотрицательные, и

$$\|S(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

для всех ограниченных функций  $f$ . Квадратичная форма  $F$  на  $L^2(X, m)$  называется *формой Дирихле*, если она замкнута, плотно определена, симметрична, неотрицательна и порождает полугруппу  $\{T_t\}$  марковских операторов. Гиперконечные формы Дирихле определяются аналогично. В следующем параграфе мы увидим, что формы Дирихле суть в точности формы, порождающие марковские процессы; пока же сделаем лишь одно простое наблюдение.

**5.2.3. Следствие.** Если форма  $F$  в следствии 5.2.2 является формой Дирихле, то  $\mathcal{E}$  тоже может быть выбрана формой Дирихле.

*Доказательство.* Покажем, что если  $F$  — форма Дирихле, то форма  $\mathcal{E}$ , полученная в доказательствах утверждений 5.2.1 и 5.2.2, является тоже формой Дирихле. Достаточно показать, что

оператор  $Q^{\Delta t}$  марковский. В доказательстве предложения 5.2.1 мы определили  $Q^{\Delta t}$  как  $P^*T_{\Delta t}$  для подходящего бесконечно малого  $\Delta t$ , где  $P$  — ортогональная проекция пространства  $*K$  на  $H$ . При том выборе пространства  $H$ , который был сделан в доказательстве следствия 5.2.2, эта проекция совпадает с условным математическим ожиданием относительно алгебры, порожденной разбиением  $\mathcal{P}$ . Условное математическое ожидание сохраняет неотрицательность и не увеличивает норму  $\|\cdot\|_\infty$ ; следствие доказано.  $\square$

Когда стандартные формы, порожденные двумя гиперконечными формами, окажутся различными? Последний результат этого параграфа показывает, что для ответа на этот вопрос достаточно проверить, имеют ли указанные формы одинаковые резольвенты. Напомним, что теорема 5.1.19 дает способ восстановления формы по ее резольвенте. Это представление будет использовано позже при изучении сингулярных возмущений операторов. А лемма 5.2.4 окажется при этом полезной для проверки того, что определенные возмущения являются нетривиальными, т. е. что возмущенные формы отличаются от исходных.

**5.2.4. Лемма.** Пусть  $K$  — гильбертово пространство, и  $H$  — гиперконечномерное  $S$ -плотное подпространство пространства  $*K$ . Пусть  $\mathcal{E}$  и  $\hat{\mathcal{E}}$  — две неотрицательные симметрические формы на  $H$ , индуцирующие соответственно формы  $E_K$  и  $\hat{E}_K$  на  $K$ . Пусть  $\{G_\alpha\}$  и  $\{\hat{G}_\alpha\}$  — резольвенты форм  $\mathcal{E}$  и  $\hat{\mathcal{E}}$ . Предположим, что для некоторого конечного, не бесконечно малого  $\alpha \in {}^*R$ ,  $\alpha < 0$ , найдется такой вектор  $u \in H$ , что  ${}^\circ\mathcal{E}_1(u, u) < \infty$ , оба вектора  $v = G_\alpha u$ ,  $\tilde{w} = \hat{G}_\alpha u$  околостандартны, но  ${}^\circ\|v - \tilde{w}\| \neq 0$ . Тогда  $E_K \neq \hat{E}_K$ .

*Доказательство.* Предположим обратное, т. е. что  $E_K = \hat{E}_K$ . Выберем такие  $\tilde{v} \approx v$ ,  $\tilde{w} \approx w$ , что  $\tilde{v} \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ,  $\tilde{w} \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ; заметим, что, согласно лемме 5.1.17,  $v \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ ,  $\tilde{w} \in \mathcal{D}[\hat{\mathcal{E}}]$ . Имеем

$$(9) \quad \langle u, v - w \rangle \approx \langle u, v - \tilde{w} \rangle = \mathcal{E}_{-\alpha}(v, v - \tilde{w}),$$

и, поскольку  $v$  и  $w$  околостандартны и  $E_K = \hat{E}_K$ ,

$$(10) \quad {}^\circ\mathcal{E}_{-\alpha}(v, v - \tilde{w}) = {}^\circ\hat{\mathcal{E}}_{-\alpha}(\tilde{v}, \tilde{v} - w).$$

С другой стороны,

$$(11) \quad \langle u, v - w \rangle \approx \langle u, \tilde{v} - w \rangle = \hat{\mathcal{E}}_{-\alpha}(w, \tilde{v} - w).$$

Соединяя вместе результаты формул (9), (10) и (11), получаем

$$0 = {}^\circ\hat{\mathcal{E}}_{-\alpha}(\tilde{v} - w, \tilde{v} - w) \geqslant {}^\circ|\alpha| \cdot {}^\circ\|v - w\|^2 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.  $\square$

**Замечание.** Теоремы о представлении, полученные в этом параграфе, нужны только для общетеоретических целей. Если же перед нами конкретная задача, связанная с конкретным оператором, часто бывает более удобно работать с гиперконечной формой, полученной непосредственно из интуитивного представления о задаче, нежели с формой, полученной с помощью предложения 5.2.1. Пусть, к примеру, мы интересуемся формой  $F$ , порожденной оператором  $-\Delta$  (где  $\Delta$  — оператор Лапласа) в  $\mathbb{R}^d$ , т. е. замыканием формы

$$F(f, g) = - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f \cdot g \, dx.$$

Простое гиперконечное представление этой формы может быть построено следующим образом. Пусть

$$\Gamma = \left\{ (n_1 \varepsilon, \dots, n_d \varepsilon) \mid (n_1, \dots, n_d) \in {}^*\mathbb{Z}^d, \max_{1 \leq i \leq d} |n_i| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \right\},$$

где  $\varepsilon \approx 0$ , — гиперконечная решетка в  ${}^*\mathbb{R}^d$ . Для всех внутренних функций  $f: \Gamma \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  определим оператор

$$Af(x) = \sum_{\{y \in \Gamma \mid |y-x| = \varepsilon\}} \frac{f(y) - f(x)}{\varepsilon^2}.$$

Форма

$$\mathcal{E}(f, g) = - \sum_{x \in \Gamma} Af(x) g(x) \varepsilon^d$$

является более простым и интуитивно ясным представлением формы  $F$ , чем представление, полученное в следствии 5.2.2. Гиперконечные представления такого типа будут важны в §§ 5.6 и 7.5.

### 5.3. Гиперконечные формы Дирихле

В оставшейся части главы мы сосредоточим внимание на гиперконечных формах, порожденных марковскими процессами, т.е. на формах Дирихле. Наша цель — дать достаточно детальное описание взаимоотношений между свойствами этих форм и поведением соответствующих процессов.

Рассмотрим частицу, которая может находиться в  $N+1$  различных состояниях  $s_0, s_1, \dots, s_N$ . Предположим, что если частица в момент времени  $t$  находится в состоянии  $s_i$ , то, независимо от истории ее предшествующих состояний, вероятность того, что в следующий момент времени  $t + \Delta t$  она окажется в состоянии  $s_j$  равна данному фиксированному числу  $q_{ij}$ . Это — знакомая ситуация в теории стационарных марковских цепей с конечным пространством состояний: см., например, Chung [1], Дынкин,

Юшкевич [1]. Нас будет интересовать случай, когда множество  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$  гиперконечно,  $T = \{k\Delta t | k \in {}^*\mathbb{N} \cap \{0\}\}$  — гипердискретная ось времени,  $\Delta t \approx 0$  (по техническим причинам в этой главе нам будет удобно работать с \*-бесконечной осью времени). Идея состоит в том, чтобы на основе гиперконечного подхода свести технически крайне сложную теорию марковских процессов с непрерывным временем, принимающих значения в топологических пространствах (см. Fukushima [3], Silverstein [1], [2]) к гораздо более простой теории конечных марковских цепей. По этой причине подразумеваться будет ситуация, когда  $S$  является богатым подмножеством множества  ${}^*Y$  для некоторого хаусдорфова пространства  $Y$  и когда стандартный марковский процесс будет определяться как стандартная часть гиперконечной марковской цепи.

### *А. Гиперконечные марковские процессы и определение форм Дирихле*

Сформулируем наши предположения немного точнее. Пусть  $Q = (q_{ij})$  — это  $(N+1) \times (N+1)$ -матрица с неотрицательными элементами, причем

$$(1) \quad \sum_{j=0}^N q_{ij} = 1$$

для всех  $i$ . Пусть  $m$  — гиперконечная мера на множестве  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ . Мы будем писать  $m_i$  вместо  $m(\{s_i\})$ , и, когда это будет удобно,  $q_{s_i s_j}$  вместо  $q_{ij}$ . Пусть  $(\Omega, P)$  — внутреннее пространство с мерой, и  $X: \Omega \times T \rightarrow S$  — внутренний процесс; обозначим

$$(2) \quad [\omega]_t^X = \{\omega' \in \Omega | X(\omega', s) = X(\omega, s) \text{ для всех } s \leq t\}.$$

Если для любого  $\omega$

$$(3) \quad P([\omega]_0^X) = m\{X(\omega, 0)\}$$

и, в том случае, когда  $X(\omega, t) = s_i$ , справедливо равенство

$$(4) \quad P\{\omega' \in [\omega]_t^X | X(\omega', t + \Delta t) = s_j\} = q_{ij} P([\omega]_t^X),$$

то мы называем процесс  $X$  *марковским процессом с начальным распределением  $m$  и с матрицей перехода  $Q$* . Обратите внимание на то, что мы не предполагаем меры  $m$  и  $P$  вероятностными:  $P(\Omega)$  вполне может быть бесконечно большим числом.

Если  $Q$  и  $m$  даны, легко построить соответствующий марковский процесс  $X$ : достаточно в качестве  $\Omega$  взять множество всех внутренних функций  $\omega: T \rightarrow S$ , в качестве  $X$  — координатную

функцию  $X(\omega, t) = \omega(t)$ , и взять меру  $P$ , порожденную равенствами

$$(5) \quad P([\omega]_{k\Delta t}^X) = m(\{\omega(0)\}) \cdot \prod_{n=0}^{k-1} q_{\omega(n\Delta t), \omega((n+1)\Delta t)}.$$

Особый случай представляет ситуация, когда начальное распределение сосредоточено в одной точке  $s_i$ , причем ее мера равна 1, т. е.  $m_j = \delta_{ij}$  (где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера); тогда равенства

$$(6) \quad P_i([\omega]_{k\Delta t}^X) = \delta_{i\omega(0)} \prod_{n=0}^{k-1} q_{\omega(n\Delta t), \omega((n+1)\Delta t)}$$

определяют вероятностную меру.

Теперь введем несколько условий регулярности. Состояние  $s_0$  будет *ловушкой*, т. е.

$$(7) \quad q_{0i} = 0 \text{ для всех } i \neq 0.$$

Начальная мера  $m$  и матрица перехода  $Q$  удовлетворяют условиям симметрии

$$(8) \quad m_i q_{ij} = m_j q_{ji} \text{ для всех } i \neq 0, j \neq 0.$$

Наконец, мы будем предполагать, что

$$(9) \quad m_i \neq 0 \text{ хотя бы для одного } i \neq 0.$$

Легко найти примеры таких матриц перехода  $Q$ , для которых не существует мер  $m$ , удовлетворяющих условиям (8) и (9), так что эти формулы можно рассматривать как условия на матрицу  $Q$ .

Заметим, что для большинства  $i$  вероятность перехода  $q_{i0}$  должна иметь порядок не более чем  $\Delta t$ , иначе процесс «умрет» (т. е. попадет в ловушку) за бесконечно малое время.

Процесс  $X$ , удовлетворяющий условиям (3), (4), (7), (8), (9), называется *симметричным марковским процессом, ассоциированным с  $m$  и  $Q$* . Именно этот класс процессов мы подвергнем более или менее детальному изучению. Основным инструментом будет теория квадратичных форм и полугрупп, развитая в § 5.1. Сначала получим формулу из процесса.

Обозначим

$$(10) \quad S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

пространство состояний  $S$  без ловушки  $s_0$ ; пусть  $H$  — линейное пространство всех внутренних функций  $u: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  со скалярным произведением

$$(11) \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^N u(s_i) v(s_i) m(s_i).$$

Так же как мы обычно пишем  $m_i$  вместо  $m(s_i)$ , будем писать  $u(i)$  или  $u^i$  вместо  $u(s_i)$ . Время от времени мы будем отождествлять пространство  $H$  с множеством всех внутренних функций  $u: S \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  с условием  $u(s_0) = 0$ .

Наше соглашение о том, что именно нулевой элемент  $s_0$  означает ловушку, удобно с точки зрения обозначений, но таит в себе некоторые опасности для беспечного читателя; так, например, смешение сумм вида  $\sum_{i=0}^N$  и  $\sum_{i=1}^N$  может создать определенные проблемы.

Для  $t \in T$  и  $u \in H$  определим новую функцию  $Q^t u \in H$ , положив

$$(12) \quad Q^t u(i) = E_i(u(X(t))),$$

где  $E_i$  — математическое ожидание по мере  $P_i$ , определенной в (6). Интуитивно  $Q^t u(i)$  есть ожидание величины  $u(X(t))$  для частицы, выходящей из состояния  $s_i$ . Заметим, что

$$(13) \quad Q^{\Delta t} u = Q \cdot u,$$

где точкой обозначено матричное умножение, а поскольку  $q_{ij}^{(t+s)} = \sum_k q_{ik}^{(t)} q_{kj}^{(s)}$ , должно выполняться равенство

$$(14) \quad Q^{t+s} = Q^t \cdot Q^s$$

(здесь через  $q_{ij}^{(t)}$  обозначены переходные вероятности, задаваемые матрицей  $Q^t$ ). Следовательно, семейство  $\{Q^t\}_{t \in T}$  образует полугруппу операторов на  $H$ , и

$$(15) \quad Q^{\Delta t} u(i) = \sum_{j=1}^N q_{ij} u(j).$$

Инфинитезимальный генератор этой полугруппы задается равенством

$$(16) \quad Au(i) = \frac{1}{\Delta t} \left( u(i) - \sum_{j=1}^N q_{ij} u(j) \right),$$

а форма Дирихле, ассоциированная с  $Q$  и  $m$ , определяется равенством

$$(17) \quad \mathcal{E}(u, v) = \langle Au, v \rangle = \sum_{i=1}^N Au(i) v(i) m_i.$$

Объединяя формулы (16) и (17), получаем

$$(18) \quad \mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \left[ u(i) v(i) m_i - \sum_{j=1}^N u(j) v(i) q_{ij} m_i \right].$$

В § 5.2 мы дали другое определение формы Дирихле; в предложении 5.3.3 мы докажем, что если некоторая форма является формой Дирихле относительно какой-то пары  $m, Q$ , то она является и формой Дирихле в смысле § 5.2, и наоборот. До тех пор пока эта эквивалентность не установлена, будет использоваться только что приведенное определение.

### В. Альтернативные описания форм Дирихле

Первый результат дает альтернативный способ выражения формы Дирихле в терминах величин  $m_i$  и  $q_{ij}$ ; он является нестандартной версией формулы Бёрлинга — Дени (см. Beurling, Deny [2]) и часто более полезен, чем формула (18).

**5.3.1. Лемма.** Пусть  $\mathcal{E}$  — форма Дирихле, ассоциированная с  $Q$  и  $m$ . Тогда

$$(19) \quad \mathcal{E}(u, v) = \\ = \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq N} (u(i) - u(j))(v(i) - v(j)) q_{ij} m_i + \sum_{i=1}^N u(i) v(i) q_{i0} m_i \right].$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=1}^N u(i) v(i) m_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u(j) v(i) q_{ij} m_i \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N u(i) v(i) q_{ij} m_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u(j) v(i) q_{ij} m_i \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq N} (u(i) - u(j)) v(i) q_{ij} m_i + \sum_{i=1}^N u(i) v(i) q_{i0} m_i \right]. \end{aligned}$$

Здесь первая строка — это тривиальная модификация формулы (18); вторая строка следует из первой в силу равенства  $\sum_{j=0}^N q_{ij} = 1$ ; наконец, третья строка получена из второй приведением подобных членов.

Зафиксируем пару  $(i, j)$  и рассмотрим слагаемые, входящие в последнее выражение и содержащие оба индекса  $i$  и  $j$ . Если  $i = j$ , такое слагаемое только одно, и оно равно нулю. Если же  $i \neq j$ , имеются два слагаемых

$$(u(i) - u(j)) v(i) q_{ij} m_i \text{ и } (u(j) - u(i)) v(j) q_{ji} m_j;$$

в силу условия  $q_{ij}m_i = q_{ji}m_j$  их сумма равна

$$(u(i) - u(j))(v(i) - v(j))q_{ij}m_i.$$

Суммируя по всем парам  $(i, j)$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

Из леммы непосредственно вытекает следствие.

**5.3.2. Следствие.** *Любая форма Дирихле симметрична и неотрицательна.*

Следующий результат дает три способа определения того, является ли заданная форма формой Дирихле, без фактического построения марковского процесса. Но сначала несколько определений.

Пусть  $u \in H$ ; функция  $\tilde{u} = (0 \vee u) \wedge 1$  называется *единичным обрезанием* функции  $u$ . Будем говорить, что квадратичная форма  $\mathcal{E}$  обладает *марковским свойством*, если для всех  $u$

$$\mathcal{E}(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq \mathcal{E}(u, u).$$

Напомним, что *марковский оператор*  $T: H \rightarrow H$  — это такой оператор, который переводит неотрицательные функции в неотрицательные и не увеличивает супремум-нормы, т. е.

$$\|Tu\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

для всех  $u \in H$ .

**5.3.3. Предложение.** *Пусть*

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i, j=1}^N b_{ij}u(i)v(j)$$

— ненулевая симметрическая форма на  $H$ , и  $\{Q^t\}$  — соответствующая полугруппа. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $\mathcal{E}$  — форма Дирихле для некоторой пары  $Q, t$ ;
- (ii)  $Q^{\Delta t}$  — марковский оператор;
- (iii) форма  $\mathcal{E}$  обладает марковским свойством;
- (iv) при  $i \neq j$  имеем  $b_{ij} \leq 0$ ; но при этом

$$b_{ii} \geq - \sum_{j \neq i} b_{ij} \text{ для всех } i.$$

*Доказательство.* Мы докажем две цепочки следствий:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i) \quad \text{и} \quad (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv).$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Следует непосредственно из формулы (15).

(ii)  $\Rightarrow$  (iv). Заметим, что

$$Q^{\Delta t}u(i) = u(i) - \Delta t \sum_{j=1}^N b_{ij}u(j).$$



Для каждого  $j \in S_0$  возьмем функцию  $u_j$ , равную  $u_j(i) = \delta_{ij}$ . Поскольку  $Q^{\Delta t}$  — марковский оператор, для  $i \neq j$  имеем

$$0 \leq Q^{\Delta t} u_j(i) = -\Delta t \cdot b_{ij},$$

откуда  $b_{ij} \leq 0$ .

С другой стороны, применяя оператор  $Q^{\Delta t}$  к функции, тождественно равной 1, и используя то, что  $Q^{\Delta t}$  не увеличивает супремум-норму, получаем

$$1 \geq Q^{\Delta t} 1(i) = 1 - \Delta t \sum_{j=1}^N b_{ij}.$$

Отсюда следует, что  $b_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} b_{ij}$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i). Прежде всего заметим, что в силу симметричности формы  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq N} b_{ij} (u(i) - u(j))^2 &= - \sum_{i \neq j} b_{ij} u(i) u(j) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} b_{ij} u(i)^2 + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq N} b_{ij} u(j)^2 = -\mathcal{E}(u, u) + \sum_{i, j=1}^N b_{ij} u(i)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$(20) \quad \mathcal{E}(u, u) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} b_{ij} (u(i) - u(j))^2 + \sum_{i, j=1}^N b_{ij} u(i)^2.$$

Наш план состоит в том, чтобы построить  $Q$  и  $m$ , сопоставляя слагаемое за слагаемым в выражениях (19) и (20). Так, оказывается, что есть одна степень свободы для каждого  $i$ : мы можем выбрать произвольно

$$(21) \quad 0 \leq q_{ii} < 1.$$

Сравнивая (19) и (20), замечаем, что должны соблюдаться условия

$$(22) \quad (1/\Delta t) m_i q_{ij} = -b_{ij} \text{ при } j \neq 0, i$$

и

$$(23) \quad (1/\Delta t) m_i q_{i0} = \sum_{j=1}^N b_{ij}.$$

Для того чтобы выполнялось условие  $\sum_{j=0}^N q_{ij} = 1$ , должно быть справедливо равенство

$$m_i = \sum_{j=0}^N m_i q_{ij} = m_i q_{ii} - \Delta t \sum_{j \neq i} b_{ij} + \Delta t \sum_{j=1}^N b_{ij} = m_i q_{ii} + b_{ii} \Delta t,$$

откуда

$$(24) \quad m_i = b_{ii}\Delta t / (1 - q_{ii}).$$

Сопоставляя это с формулой (22), получаем

$$(25) \quad q_{ij} = -b_{ij}(1 - q_{ii})/b_{ii} \text{ при } j \neq 0, i,$$

а из (23) получаем

$$(26) \quad q_{i0} = \left( \sum_{j=1}^N b_{ij}(1 - q_{ii}) \right) / b_{ii}.$$

Эта конструкция терпит неудачу при  $b_{ii} = 0$ ; однако в этом случае  $b_{ij} = 0$  для всех  $j$ , откуда  $m_i = 0$ , так что величины  $q_{ij}$  можно выбирать произвольно.

Наконец, заметим, что в силу симметричности формы  $\mathcal{E}$  из (22) следует (8), а нетривиальность  $\mathcal{E}$  влечет за собой (9).

(i)  $\Rightarrow$  (iii). Следует непосредственно из леммы 5.3.1.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Зафиксируем  $k, l \in S_0, k \neq l, \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+$ , и определим функцию  $u$  следующим образом:

$$u(i) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{при } i = k, \\ 1 & \text{при } i = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если  $\tilde{u}$  — единичное обрезание функции  $u$ , то из формулы (20) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{E}(u, u) - \mathcal{E}(\tilde{u}, \tilde{u}) = \\ &= \left( -\sum_{i \neq k, l} b_{il} l^2 - \sum_{i \neq k, l} b_{ik} \varepsilon^2 - b_{kl}(1 + \varepsilon)^2 + \sum_{j=1}^N b_{jk} \varepsilon^2 + \sum_{j=1}^N b_{jl} l^2 \right) - \\ &\quad - \left( -\sum_{i \neq k, l} b_{il} l^2 - b_{kl} l^2 + \sum_{j=1}^N b_{jl} l^2 \right) = \\ &= -\varepsilon^2 \sum_{i \neq k, l} b_{ik} - 2\varepsilon b_{kl} - b_{kl} \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N b_{jk}. \end{aligned}$$

Если выбрать  $\varepsilon$  достаточно малым, слагаемое  $-2\varepsilon l_{kk}$  будет доминировать все остальные, откуда следует, что  $l_{kk} \leq 0$ .

Чтобы получить вторую часть утверждения (iv), зафиксируем  $k \in S_0$  и рассмотрим функцию

$$v(i) = \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{при } i = k, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если  $\tilde{v}$  — единичное обрезание функции  $v$ , то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{E}(v, v) - \mathcal{E}(\tilde{v}, \tilde{v}) = \\ &= \left( - \sum_{i \neq k} b_{ik} \varepsilon^2 + \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^N b_{ij} 1^2 + \sum_{j=1}^N b_{kj} (1 + \varepsilon)^2 \right) - \sum_{i, j=1}^N b_{ij} 1^2 = \\ &= -\varepsilon^2 \sum_{i \neq k} b_{ik} + 2\varepsilon \sum_{j=1}^N b_{kj} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N b_{kj}. \end{aligned}$$

Выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым, убеждаемся в том, что сумма  $\sum_{j=1}^N b_{kj}$  должна быть неотрицательной. Предложение доказано.  $\square$

Заметим, что 5.3.3(ii) совпадает с определением формы Дирихле, данным в § 5.2.

Проиллюстрируем излагаемую теорию одним простым примером.

**5.3.4. Пример.** (Броуновское движение на окружности.) Пусть  $N = (\Delta t)^{-1/2}$  — четное бесконечно большое число, и точки множества  $S_0 = \{s_1, \dots, s_n\}$  распределены равномерно на окружности длины 1. Для  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  пусть вероятность перехода  $q_{ij}$  равна  $1/2$ , если точки  $s_i$  и  $s_j$  — соседние, и равна 0 в противном случае. Полугруппа  $\{Q^t\}$  задается оператором

$$Q^{\Delta t} u(i) = \frac{1}{2} u(i+1) + \frac{1}{2} u(i-1),$$

где сложение под знаком функции  $u$  происходит по модулю  $N$ . Инфинитезимальный генератор этой полугруппы равен

$$(27) \quad Au(i) = - \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1)}{2\Delta t};$$

при этом  $m_i = 1/N$  для всех  $i$ , и соответствующая форма Дирихле  $\mathcal{E}$  равна

$$\mathcal{E}(u, v) = - \frac{N}{2} \sum_{i=1}^N [u(i+1) - 2u(i) + u(i-1)] v(i),$$

или, в формулировке Бёрлинга — Дени,

$$(28) \quad \mathcal{E}(u, v) = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^N [u(i+1) - u(i)] [v(i+1) - v(i)].$$

Обратим внимание на то, что, согласно формуле (27), инфинитезимальный генератор  $A$  является нестандартным аналогом опе-

ратора

$$\tilde{A}f = -\frac{1}{2}f'',$$

а, согласно формуле (28), форма  $\mathcal{E}$  — это нестандартное представление формы

$$E(f, g) = \frac{1}{2} \int_C f' g' dm,$$

где  $m$  — мера Лебега на окружности  $C$ , и производные также берутся вдоль этой окружности. Переход от исходного представления формы  $\mathcal{E}$  к представлению Бёрлинга — Дени соответствует интегрированию по частям.

### С. Равновесные потенциалы

Перейдем к более глубокому изучению взаимоотношений между формой Дирихле  $\mathcal{E}$  и соответствующим ей процессом  $X$ . Напомним, что для  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}_+$  форма  $\mathcal{E}_\alpha$  определяется равенством

$$\mathcal{E}_\alpha(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \alpha \int uv dm.$$

Первая задача, которую мы рассмотрим, состоит в следующем. Пусть  $f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция, определенная на внутреннем подмножестве  $D_f \subset S_0$ . Мы хотим продолжить ее до функции  $e_\alpha(f)$ , совпадающей с  $f$  на  $D_f$  и минимизирующей значение  $\mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), e_\alpha(f))$ .

Прежде всего заметим, что достаточно найти такое продолжение  $e_\alpha(f)$  функции  $f$ , что

$$(29) \quad \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), u) = 0$$

для всех функций  $u$ , равных нулю на  $D_f$ . Чтобы в этом убедиться, возьмем  $w$  — другое продолжение функции  $f$ ; тогда функция  $u = w - e_\alpha(f)$  равна нулю на  $D_f$ , и, согласно (29),

$$\begin{aligned} (30) \quad \mathcal{E}_\alpha(w, w) &= \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f) + u, e_\alpha(f) + u) = \\ &= \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), e_\alpha(f)) + 2\mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), u) + \mathcal{E}_\alpha(u, u) = \\ &= \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), e_\alpha(f)) + \mathcal{E}_\alpha(u, u). \end{aligned}$$

Остается найти функцию  $e_\alpha(f)$ , удовлетворяющую условию (29). Пусть  $\sigma_f$  — марковский момент остановки

$$(31) \quad \sigma_f(\omega) = \min\{t \in T \mid X(\omega, t) \in D_f\};$$

определим

$$(32) \quad e_\alpha(f)(i) = E_i((1 + \alpha \Delta t)^{-\sigma_f/\Delta t} f(X(\sigma_f))),$$

где  $E_i$  — математическое ожидание по мере  $P_i$ . При этом, если  $X(\omega, \cdot)$  никогда не окажется в множестве  $D_f$ , будем считать

$$(1 + \alpha \Delta t)^{-\sigma_f / \Delta t} = 0.$$

Заметим, что если  $i \notin D_f$ , то

$$(33) \quad (1 + \alpha \Delta t) e_\alpha(f)(i) = \sum_{j=1}^N e_\alpha(f)(j) q_{ij}.$$

Если функция  $u$  равна нулю на  $D_f$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(f), u) &= \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \left[ e_\alpha(f)(i) - \sum_{j=1}^N e_\alpha(f)(j) q_{ij} \right] u(i) m_i + \alpha \sum_{i=1}^N e_\alpha(f)(i) u(i) m_i = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N \left[ (1 + \alpha \Delta t) e_\alpha(f)(i) - \sum_{j=1}^N e_\alpha(f)(j) q_{ij} \right] u(i) m_i = 0, \end{aligned}$$

так как выражение в квадратных скобках равно нулю при  $i \notin D_f$ , и  $u(i) = 0$  при  $i \in D_f$ . Мы доказали следующее утверждение.

**5.3.5. Предложение.** Пусть  $\mathcal{E}$  — гиперконечная форма Дирихле,  $u_f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция, определенная на подмножестве множества  $S_0$ . Тогда продолжение функции  $f$ , на котором форма  $\mathcal{E}_\alpha$  принимает наименьшее значение, задается формулой

$$e_\alpha(f)(i) = E_i((1 + \alpha \Delta t)^{-\sigma_f / \Delta t} f(X(\sigma_f))).$$

Если функция  $f$  тождественно равна 1 на  $A = D_f$ , вместо  $e_\alpha(f)$  мы будем писать  $e_\alpha(A)$ . Заметим, что, согласно (29),

$$\mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(A), e_\alpha(A)) = \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(A), 1),$$

а, применяя к выражению  $\mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(A), 1)$  формулу (19), получаем

$$(35) \quad \mathcal{E}_\alpha(e_\alpha(A), e_\alpha(A)) = \alpha \sum_{i=1}^N e_\alpha(A)(i) m_i + \sum_{i=1}^N e_\alpha(A)(i) \frac{q_{i0}}{\Delta t} m_i.$$

Функции  $e_\alpha(f)$  называются *равновесными потенциалами*. Они будут служить основным плацдармом нашей кампании за объединение аналитической теории форм Дирихле и вероятностной теории марковских процессов. Ключевым наблюдением, демонстрирующим важность этого понятия, является то, что оно естественным образом интерпретируется как в аналитических, так и в вероятностных терминах: с одной стороны, потенциалы ми-

нимизируют формы  $\mathcal{E}_\alpha$  при подходящих краевых условиях; с другой стороны, они описывают то, как процесс  $X$  впервые попадает в разные подмножества множества  $S_0$ . Для более полного понимания вероятностного описания заметим, что для конечных  $\alpha$

$${}^\circ e_\alpha(A)(i) = E_i({}^\circ e^{-\alpha\sigma_A})$$

и функция  $\alpha \rightarrow E_i({}^\circ e^{-\alpha\sigma_A})$  есть преобразование Лапласа случайной величины  $\sigma_A$ . Таким образом, распределение величины  $\sigma_A$  может быть полностью восстановлено через функции  $e_\alpha(A)$ . Этот факт будет в высшей степени важным в § 5.5.

Часто бывает безразлично, с каким конкретно значением  $\alpha$  мы работаем; в этом случае мы будем выбирать  $\alpha = 1$ . Чтобы упростить обозначения, будем писать  $e_A$  и  $e_f$  вместо  $e_1(A)$  и  $e_1(f)$  соответственно.

В качестве первого примера использования равновесных потенциалов докажем следующее предложение.

**5.3.6. Предложение.** Пусть  $X$  — гиперконечный марковский процесс, и  $\mathcal{E}$  — отвечающая ему форма Дирихле. Тогда для всех  $u \in H$  и  $t \in T$

$$(36) \quad P\{\omega | \exists s \leq t (|u(X(\omega, s))| \geq \epsilon)\} \leq \frac{2(1 + \Delta t)^{t/\Delta t}}{\epsilon^2} \mathcal{E}_1(u, u)$$

*Доказательство.* Пусть  $A = \{i \in S_0 | u(i) \geq \epsilon\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} P\{\omega | \exists s \leq t (u(X(\omega, s)) \geq \epsilon)\} &= \int P_i\{\omega | \exists s \leq t (u(X(\omega, s)) \geq \epsilon)\} dm(i) = \\ &= \int P_i\{\omega | (1 + \Delta t)^{-\sigma_A/\Delta t} \geq (1 + \Delta t)^{-t/\Delta t}\} dm(i) \leq \\ &\leq \int E_i\left(\frac{(1 + \Delta t)^{-\sigma_A/\Delta t}}{(1 + \Delta t)^{-t/\Delta t}}\right) dm(i) = \\ &= (1 + \Delta t)^{t/\Delta t} \int e_A(i) dm(i) \leq (1 + \Delta t)^{t/\Delta t} \mathcal{E}_1(e_A, e_A); \end{aligned}$$

здесь на последнем шаге использована формула (35). Поскольку форма  $\mathcal{E}$  обладает марковским свойством, из предложения 5.3.5 следует, что

$$\mathcal{E}_1(e_A, e_A) \leq \mathcal{E}_1\left(\frac{u}{\epsilon}, \frac{u}{\epsilon}\right),$$

откуда

$$P\{\omega | \exists s \leq t (u(X(\omega, s)) \geq \epsilon)\} \leq \frac{(1 + \Delta t)^{t/\Delta t}}{\epsilon^2} \mathcal{E}_1(u, u).$$

Применяя те же рассуждения к функции  $-u$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**5.3.7. Следствие.** Пусть  $u, u_n (n \in \mathbb{N})$  — элементы пространства  $H$ . Предположим, что  $\mathcal{E}_1(u - u_n, u - u_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда существует такая подпоследовательность  $(u_{n_k})$  последовательности  $(u_n)$ , что для почти всех  $\omega$  функции  $u_{n_k}(X)$  сходятся к  $u(X)$  равномерно на каждом  $S$ -ограниченном подмножестве множества  $T$  (т. е. на каждом подмножестве, ограниченном сверху конечным числом).

Доказательство следует из предложения 5.3.6 и элементарной теории меры.

#### D. Теорема Фукусимы о разложении

До сих пор мы не использовали развитый в § 5.1 аппарат областей определения, но в следующей теореме он потребуется. Условие (5.1.9), требующее, чтобы выполнялось неравенство

$$(37) \quad \|A\|\Delta t \leq 1,$$

или, что эквивалентно, чтобы оператор  $Q^{\Delta t}$  был неотрицательным, играло в § 5.1 немаловажную техническую роль; выбрав  $\Delta t$  достаточно малым, мы всегда можем предположить, что это условие выполнено.

**5.3.8. Определение.** Форма Дирихле  $\mathcal{E}$  называется *нормальной* (относительно  $\Delta t$ ), если для всех  $u \in H$

$$(38) \quad \langle Q^{\Delta t} u, u \rangle \geq 0.$$

Имея в виду это определение, мы можем использовать технику § 5.1 в работе с нормальными формами Дирихле. В качестве первого примера силы развиваемой теории докажем гиперконечную версию теоремы Фукусимы о разложении (см. Fukushima [2], [3]). Для каждого  $t \in T$  пусть  $\mathcal{A}_t$  — это внутренняя алгебра, порожденная множествами  $[\omega]_t^X$ , определенными в формуле (2). Мы попросим читателя вспомнить определение квадратической вариации (определение 4.2.4) и  $\lambda^2$ -мартингала (определение 4.2.6).

**5.3.9. Теорема.** Пусть  $\mathcal{E}$  — нормальная гиперконечная форма Дирихле, отвечающая марковскому процессу  $X: \Omega \times T \rightarrow S$ . Тогда для каждого  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  найдутся такие два процесса  $N^u, M^u: \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , что

- (i)  $u(X(\omega, t)) = N^u(\omega, t) + M^u(\omega, t)$  для всех  $\omega, t$ ;
- (ii) процесс  $M^u$  является  $\lambda^2$ -мартингалом относительно фильтрации  $(\Omega, \{A_t\}, P)$ ;
- (iii) процесс  $N^u$   $S$ -непрерывен, и  $E([N^u](t)) \approx 0$  для всех конечных  $t \in T$ .

*Доказательство.* Определим процесс  $N^u$  следующим образом:

$$(39) \quad N^u(\omega, 0) = u(X(\omega, 0));$$

$$(40) \quad \Delta N^u(\omega, t) = Q^{\Delta t} u(X(\omega, t)) - u(X(\omega, t)).$$

По определению оператора  $Q^{\Delta t}$  процесс

$$(41) \quad M^u = u(X) - N^u$$

является  $\{\mathcal{A}_t\}$ -мартингалом. Чтобы доказать, что  $M^u$  является  $\lambda^2$ -мартингалом, заметим, что если  $X(\omega, t) = s_i$  и  $X(\omega, t + \Delta t) = s_j$ , то

$$(42) \quad \Delta M^u(\omega, t) = u(j) - Q^{\Delta t} u(i).$$

Поскольку  $P\{\omega | X(\omega, t) = s_i\} \leq m_i$ , из равенства (42) получаем

$$(43) \quad E([M^u]_t)^{1/2} \leq \left( \sum_0^t \sum_{i,j} (u(j) - Q^{\Delta t} u(i))^2 q_{ij} m_i \right)^{1/2} \leq \\ \leq \left( \sum_0^t \sum_{i,j} (u(j) - u(i))^2 q_{ij} m_i \right)^{1/2} + \left( \sum_0^t \sum_{i,j} (u(i) - Q^{\Delta t} u(i))^2 q_{ij} m_i \right)^{1/2} \leq \\ \leq (2t\mathcal{E}(u, u))^{1/2} + (t\mathcal{E}(u, u - Q^{\Delta t} u))^{1/2} < \infty,$$

откуда следует, что процесс  $M^u$  —  $\lambda^2$ -мартингал.

Остается доказать утверждение (iii). Часть, связанная с квадратической вариацией проста:

$$\frac{1}{\Delta t} E(\Delta N^u(t)^2) \leq \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N (u(i) - Q^{\Delta t} u(i))^2 m_i \leq \mathcal{E}(u, u - Q^{\Delta t} u),$$

причем правая часть бесконечно мала в силу предложения 5.1.5(ii). Отсюда  $E([N^u](t)) \leq t \cdot \mathcal{E}(u, u - Q^{\Delta t} u) \approx 0$  для всех конечных  $t$ .

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $u_n = Q^{1/n} u$ . Наш план таков: сначала показать  $S$ -непрерывность процесса  $N^{u_n}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ , а затем воспользоваться следствием 5.3.7 для доказательства  $S$ -непрерывности процесса  $N^u$ .

Сначала напомним, что, согласно (5.1.17),

$$\mathcal{E}(u_n, u_n) - \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u_n, Q^{\Delta t} u_n) \leq n \mathcal{E}(u, u) \Delta t,$$

а так как согласно предложению 5.1.4(i)

$$0 \leq \mathcal{E}(u_n, u_n - Q^{\Delta t} u_n) \leq \mathcal{E}(u_n, u_n) - \mathcal{E}(Q^{\Delta t} u_n, Q^{\Delta t} u_n),$$

мы получаем

$$\frac{1}{\Delta t} E(\Delta N^{u_n}(t)^2) \leq \mathcal{E}(u_n, u_n - Q^{\Delta t} u_n) \leq n \mathcal{E}(u, u) \Delta t.$$



Следовательно, для всех  $t, s \in T$

$$E((N^{u_n}(t) - N^{u_n}(s))^2) \leq n\mathcal{E}(u, u)(t - s)^2.$$

Теперь  $S$ -непрерывность процесса  $N^{u_n}$  следует из теоремы Колмогорова о непрерывности (см. предложение 4.8.5 при  $d = 1$ ; доказательство этой теоремы можно читать независимо от остального содержания § 4.8).

Если мы найдем такую подпоследовательность  $(u_{n_k})$  последовательности  $(u_n)$ , что  $N^{u_{n_k}}$  сходится к  $N^u$  на компактах,  $S$ -непрерывность процесса  $N^u$  будет доказана. Согласно следствию 5.3.7, существует такая подпоследовательность, что  $u_{n_k}(X) \rightarrow u(X)$  равномерно на компактах, а поскольку

$$N^u = u(X) - M^u,$$

достаточно доказать соответствующую сходимость для подпоследовательности  $M^{u_{n_k}}$ . Пусть  $v_n = u - u_n$ ; из оценки (43) и неравенства Дуба получаем

$$\begin{aligned} E(\max_{s \leq t} (M^u(s) - M^{u_n}(s))^2)^{1/2} &\leq 2E((M^u(t) - M^{u_n}(t))^2)^{1/2} \leq \\ &\leq 2(2t\mathcal{E}(v_n, v_n))^{1/2} + 2(t\mathcal{E}(v_n, v_n - Q^{\Delta t}v_n))^{1/2}, \end{aligned}$$

что и дает требуемую сходимость. Теорема доказана.  $\square$

Из гл. 4 мы знаем, что  $\lambda^2$ -мартингалы имеют пределы слева и справа. Теорема Фукусимы о разложении утверждает то же самое про процесс  $u(X)$ , причем разрывы процесса  $u(X)$  совпадают с разрывами мартингала  $M^u$ . Если пространство состояний  $S_0$  вложено в  ${}^*Y$  для некоторого топологического пространства  $Y$ , и область определения  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  содержит достаточно много  $S$ -непрерывных функций, то и сам процесс  $X$  будет иметь пределы слева и справа. В следующем параграфе мы используем информацию об  $u(X)$  и  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  для проведения детального анализа процесса  $X$ . Еще одно применение теоремы 5.3.9 — к стохастическим дифференциальным уравнениям с сингулярным коэффициентом сноса — см. в § 5.6.

Наконец, упомянем альтернативный способ доказательства теоремы 5.3.9: вместо аппроксимирующей последовательности функций  $u_n = Q^{1/n}u$  можно было использовать последовательность

$$u_n = nG_{-n}u,$$

где  $\{G_\alpha\}$  — резольвента формы  $\mathcal{E}$ . Этот подход позволяет избежать использования теоремы Колмогорова, но зато использует

теорию резольвент из § 5.1. Мы предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно (воспользовавшись при необходимости теоремой 5.2.2 из книги Fukushima [3]).

### Е. Гиперконечная формула Фейнмана — Каца

Последний результат, который мы докажем в этом параграфе — это гиперконечный вариант формулы Фейнмана — Каца, формулы, служащей краеугольным камнем подхода к квантовой физике, основывающегося на функциональных интегралах. Если заданы инфинитезимальный генератор  $A$  марковского процесса  $X$  и функция  $V$  на пространстве состояний, формула Фейнмана — Каца дает описание полугруппы  $e^{-t(A+V)}$  в терминах  $V$  и  $X$ . Важность этой формулы в квантовой механике проистекает из того факта, что гамильтониан  $H_0$  свободной частицы совпадает с инфинитезимальным генератором  $-(\hbar^2/2m)\Delta$  броуновского движения, а гамильтониан частицы, движущейся в поле с потенциалом  $V$ , задается равенством  $H = H_0 + V$ . Таким образом, формула Фейнмана — Каца дает нам вероятностный метод изучения операторов Шредингера  $H = H_0 + V$ . Систематическое изложение замечательных успехов этого подхода читатель найдет в книгах Simon [2] и Glimm, Jaffe [1]; в настоящей работе мы воспользуемся этим подходом лишь дважды — при обсуждении полимерных мер в § 6.4 и при объяснении связи между полимерными моделями и квантовыми полями в § 7.5.

В нестандартной ситуации оператор  $A$  будет гиперконечным марковским оператором, а функция  $V$  — внутренней функцией на пространстве состояний. Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что полугруппа  $\{T^t\}_{t \in T}$ , порожденная оператором  $A + V$ , бесконечно близка к полугруппе  $\{S^t\}_{t \in T}$ , заданной равенством

$$(44) \quad S^{\Delta t} = (1 - V\Delta t)(1 - A\Delta t).$$

Установив этот факт, мы с помощью следующей простой леммы получим вероятностную интерпретацию операторов  $T^t$ .

**5.3.10. Лемма.** Пусть  $A$  — гиперконечный марковский оператор, и  $X: \Omega \times T \rightarrow S$  — отвечающий ему марковский процесс. Если  $V: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция, и  $\{S^t\}$  — полугруппа, заданная формулой (44), то

$$S^t u(i) = e^{-t\eta(t)} E_i \left\{ u(X(t)) \exp \left( - \int_0^t V(X(s)) ds \right) \right\},$$

где  $0 \leq \eta(t) \leq \frac{1}{2} \|V\|_\infty^2 \Delta t$ .

*Доказательство.* Если  $\{Q^t\}$  — полугруппа, порожденная оператором  $A$ , то

$$S^t = (1 - V \Delta t) Q^{\Delta t} (1 - V \Delta t) \dots Q^{\Delta t} (1 - V \Delta t) Q^{\Delta t}.$$

Многократно используя вероятностную интерпретацию оператора  $Q^{\Delta t}$ , видим, что

$$S^t u(i) = E_i \left[ u(X(t)) \prod_{0 \leq s < t} (1 - V(X(s)) \Delta t) \right].$$

Но

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq s < t} (1 - V(X(\omega, s)) \Delta t) &= \exp \left( \sum_0^t \ln(1 - V(X(\omega, s)) \Delta t) \right) = \\ &= \exp \left( - \sum_0^t V(X(\omega, s)) \Delta t - \frac{1}{2} \sum_0^t \theta(\omega, s)^2 \Delta t^2 \right), \end{aligned}$$

где величина  $\theta((\omega, s))$  лежит между 0 и  $V(X(\omega, s))$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \exp \left( - \left[ (t/2) \|V\|_\infty^2 \Delta t \right) \cdot \exp \left( - \int_0^t V(X(s)) ds \right) &\leq \\ &\leq \prod_0^t (1 - V(X(s)) \Delta t) \leq \exp \left( - \int_0^t V(X(s)) ds \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Заметим, что если  $\|V\|_\infty^2 \Delta t \approx 0$ , то лемма утверждает, что величины  $S^t u$  и  $E_{(\cdot)} \left( u(X(t)) \exp \left( - \int_0^t V(X(s)) ds \right) \right)$  бесконечно близки в любом разумном смысле.

Теперь мы готовы доказать гиперконечный вариант формулы Фейнмана — Каца.

**5.3.11. Теорема.** Пусть  $A$  — гиперконечный марковский оператор и  $X: \Omega \times T \rightarrow S$  — соответствующий процесс. Пусть  $V: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — такая внутренняя функция, что

(а) найдется такое  $\beta \in \mathbb{R}$ , что  $\langle (A + V)u, u \rangle \geq \beta \|u\|^2$  для всех  $u$ ;

(б)  $\|V\|_\infty / \ln(\Delta t) \approx 0$ .

Пусть  $\{T^t\}$  — полугруппа, порожденная оператором  $A + V$ . Тогда для всех конечных  $t$  и всех функций  $u$  с конечной нормой

$$\left\| T^t u - E_{(\cdot)} \left( u(X(t)) \cdot \exp \left[ - \int_0^t V(X(s)) ds \right] \right) \right\| \approx 0.$$

*Доказательство.* Согласно лемме, достаточно доказать, что  $T^t u \approx S^t u$ . Для начала заметим, что

$$\begin{aligned} S^t &= S^{t-\Delta t} (1 - (A + V) \Delta t + V A \Delta t^2) = S^{t-\Delta t} T^{\Delta t} + S^{t-\Delta t} V A \Delta t^2 = \\ &= S^{t-2\Delta t} (1 - (A + V) \Delta t + V A \Delta t^2) T^{\Delta t} + S^{t-\Delta t} V A \Delta t^2 = \\ &= S^{t-2\Delta t} T^{2\Delta t} + S^{t-2\Delta t} V A T^{\Delta t} \Delta t^2 + S^{t-\Delta t} V A \Delta t^2. \end{aligned}$$

Продолжая таким же образом, мы в конце концов получим

$$S^t = T^t + \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V A T^s \Delta t^2.$$

Чтобы показать, что сумма  $\sum S^{t-s-\Delta t} V A T^s \Delta t^2$  бесконечно мала, перепишем ее в виде

$$(45) \quad \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V (A + V) T^s \Delta t^2 - \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V^2 T^s \Delta t^2.$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое. Из оценок

$$\|S^{t-s-\Delta t}\| \leq e^{\|V\|_{\infty} \cdot (t-s)} \leq e^{\|V\|_{\infty} t} \quad \text{и} \quad \|T^s\| \leq e^{|\beta| s} \leq e^{|\beta| t}$$

следует, что

$$\left\| \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V^2 T^s \Delta t^2 \right\| \leq e^{\|V\|_{\infty} t} \cdot \|V\|_{\infty} \cdot e^{|\beta| t} \Delta t,$$

а величина справа бесконечно мала по условию (b).

Обратившись к первому слагаемому в формуле (45), замечаем, что

$$\left\| \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V (A + V) T^s \Delta t^2 \right\| \leq e^{\|V\|_{\infty} \cdot t} \|V\|_{\infty} \sum_{s=0}^t \|(A + V) T^s\| \Delta t^2.$$

Несколькими строками ниже мы докажем, что

$$(46) \quad \|(A + V) T^s\| \leq \frac{M}{s + \Delta t}$$

для некоторой конечной константы  $M$ ; а сейчас покажем, что этой оценки достаточно, чтобы завершить доказательство. Поскольку

$$\sum_{s=0}^t \frac{\Delta t}{s + \Delta t} \leq 2 \ln \left( \frac{1}{\Delta t} \right),$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{s=0}^t S^{t-s-\Delta t} V (A + V) T^s \Delta t^2 \right\| &\leq M e^{\|V\|_{\infty} \cdot t} \cdot \|V\|_{\infty} \cdot \sum_{s=0}^t \frac{\Delta t}{s + \Delta t} \cdot \Delta t \leq \\ &\leq 2M \cdot e^{\|V\|_{\infty} \cdot t} \cdot \|V\|_{\infty} \cdot \ln \left( \frac{1}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

и последняя величина бесконечно мала для всех конечных  $t$  в силу условия (b).

Осталось доказать оценку (46). Очевидно, норма  $\|(A + V)T^s\|$  равна наибольшему из значений  $|\lambda(1 - \lambda\Delta t)^{s/\Delta t}|$ , где  $\lambda$  пробегает все собственные значения оператора  $A + V$ . Если  $\lambda$  отрицательно, оно в силу условия (a) ограничено снизу числом  $\beta$ , так что  $|\lambda(1 - \lambda\Delta t)^{s/\Delta t}| \leq |\beta| \cdot e^{|\beta|t}$ . Если  $\lambda$  положительно, норма  $\|(A + V)T^s\|$  не может превзойти максимального значения функции  $\lambda \mapsto \lambda(1 - \lambda\Delta t)^{s/\Delta t}$ , а именно, числа

$$\frac{1}{s + \Delta t} \left(1 - \frac{\Delta t}{s + \Delta t}\right)^{s/\Delta t}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{s + \Delta t} \left(1 - \frac{\Delta t}{s + \Delta t}\right)^{s/\Delta t} \leq \frac{1}{s + \Delta t}.$$

ясно, что в качестве  $M$  можно выбрать большее из чисел  $|\beta|te^{|\beta|t}$  и 1.  $\square$

**Замечание.** Приведенное выше доказательство выглядит довольно-таки громоздким. Причина в том, что условия теоремы достаточно слабые. Так, например, условие ограниченности (b) требует только, чтобы функция  $V$  была ограничена сверху некоторым бесконечно большим числом. Это дает возможность применять теорему к потенциалам слишком сингулярным, чтобы их можно было описать стандартными функциями — факт, который окажется важным в § 6.4.

Следующий интегральный вариант формулы Фейнмана — Каца потребуется в § 7.5.

**5.3.12. Следствие.** Пусть оператор  $A$  и функция  $V$  такие же, как в теореме 5.3.11, и пусть существует такое положительное число  $c$ , что  $V(s) \geq c$  при всех  $s \in S_0$ . Тогда для всех функций  $u$  с конечной нормой

$$\left\| \int_{\Delta t}^{\infty} \frac{1}{t} \left( T^t u - E_{(\cdot)} \left( u(X(t)) \exp \left[ - \int_0^t V(X(s)) ds \right] \right) \right) dt \right\| \approx 0.$$

Чтобы доказать это следствие, надо преодолеть две трудности; одна связана с поведением подынтегрального выражения в нуле, другая — на бесконечности. Поскольку подынтегральное выражение убывает при больших  $t$  как  $e^{-ct}/t$ , поведение на бесконечности фактически не создает проблем. В нуле мы сталкиваемся с особенностью порядка  $\ln(1/\Delta t)$ ; однако поскольку оценки ошибок в доказательстве теоремы 5.3.11 допускают

дополнительный множитель  $\ln(1/\Delta t)$ , доказательство проходит и здесь. Детали мы оставляем читателю.

**Замечание.** Систематическая теория форм Дирихле была начата в работах Бёрлинга и Дени (Beurling, Deny [1], [2]) и в дальнейшем развивалась многими авторами; за дальнейшими ссылками читатель может обратиться к книгам Silverstein [1], [2], Fukushima [3]. Интересно отметить, что в своих первых работах (за исключением разве что работы Deny [1]) Бёрлинг и Дени рассматривали только конечные марковские цепи; в определенном смысле развиваемая здесь гиперконечная теория — это возвращение к истокам. Формула Фейнмана — Каца выросла из попытки Каца (М. Кас) дать математическое основание идеям Фейнмана. По поводу вероятностной интерпретации этой формулы см. Williams [1].

#### 5.4. Стандартные части и марковские процессы

В этом параграфе мы займемся изучением стандартных частей гиперконечных марковских процессов. Чтобы можно было брать стандартные части, нужна топология; будем предполагать, что за исключением ловушки  $s_0$  пространство  $S$  вложено в  ${}^*Y$ , где  $Y$  — некоторое хаусдорфово топологическое пространство. Мы хотим найти условия на  $S$ -значный гиперконечный марковский процесс  $X$ , гарантирующие, что его стандартная часть существует и является  $Y$ -значным марковским процессом. Для этого, оказывается, нужно преодолеть две трудности. Первая: траектории процесса  $X$  могут быть столь иррегулярны, что у них не будет никакой естественной стандартной части. Вторая трудность: если даже стандартная часть существует, нет никаких причин, почему она должна автоматически оказаться марковским процессом; взятие стандартной части может склеить друг с другом такие состояния, которые следовало бы сохранять отдельными. Мы увидим, что теория правых стандартных частей, развитая в гл. 4, достаточна для решения первой проблемы. Таким образом, основной труд в этом параграфе будет направлен на вторую проблему. Прежде чем погрузиться в технические подробности, обсудим эту проблему неформально, хотя и довольно детально.

Предположим, что  $x: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$  — стандартная часть процесса  $X$ , и мы хотим доказать, что процесс  $x$  — марковский относительно порождаемой им фильтрации. Если задано  $x(t) = y$ , то, вообще говоря, может быть много таких состояний  $s \in S_0$ , что  $y = st(s)$ , и процесс  $X$  может находиться в любом из них. С нестандартной точки зрения эти состояния никак не связаны между собой, так что как прошлое, так и будущее процесса для них могут сильно различаться. Наблюдение за прошлым могло

бы указать, какие из этих состояний более вероятны, и тем самым повлиять на предсказание будущего. Эти рассуждения объясняют, почему процесс  $x$  в общем случае не будет марковским.

Заметим, однако, что если процессы, выходящие из точек  $s_i$  и  $s_j$  при  $s_i \approx s_j$  имеют «одно и то же» будущее, то приведенное выше рассуждение оказывается несостоятельным, и вполне резонно ожидать от процесса  $x$ , чтобы он был марковским. Одна из возможных формулировок такого условия состоит в требовании

$$(1) \quad L(P_i) \{ \omega | x(\omega, t) \in B \} = L(P_j) \{ \omega | x(\omega, t) \in B \}$$

для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и всех борелевских множеств  $B$ . К сожалению, условие (1) в таком виде для предполагаемых применений оказывается чрезмерно ограничительным. Вместо того, чтобы требовать равенства (1) для *всех* бесконечно близких  $s_i, s_j$ , мы потребуем, чтобы оно выполнялось для всех таких  $s_i, s_j$  вне некоторого *исключительного* множества (т. е. множества, в которое процесс попадает с вероятностью нуль). На первый взгляд может показаться, что от того, что мы позволим условию нарушаться на исключительном множестве, мало прока. Но на самом деле получаемые за этот счет дополнительные свобода и гибкость оказываются очень полезными. Ситуация напоминает теорию меры; согласно андерсоновской теореме Лузина 3.4.9 измеримая функция — это такая функция, которая теряет  $S$ -непрерывность на множестве меры 0 (условие, похожее на нашу ослабленную версию условия (1)).

Этот параграф естественным образом разбивается на две части. В первой части развита необходимая теория исключительных множеств. Во второй части показано, что если выполнено условие (1) плюс некоторые дополнительные условия, то стандартная часть является марковским процессом. В следующем параграфе мы переведем эти вероятностные условия на язык форм Дирихле и найдем условия на формы, гарантирующие, что стандартные части отвечающих им процессов будут марковскими.

### А. Исключительные множества

Под *гиперконечным марковским процессом* в этом параграфе мы будем понимать стационарную гиперконечную марковскую цепь, определенную в § 5.3; однако условие симметрии (5.3.8) (т. е. что  $m_i q_{ij} = m_j q_{ji}$  при всех  $i, j \neq 0$ ) нам здесь не потребуются. Зато мы будем предполагать, что для каждого  $i \in S_0$  функция

$$(2) \quad t \mapsto P \{ \omega | X(\omega, t) = s_i \}$$

является невозрастающей.

Мы далее будем предполагать, что  $S_0 \subset *Y$  для некоторого топологического пространства  $Y$ , но при этом ловушка  $s_0$  не является элементом множества  $*Y$ . Чтобы свести к минимуму теоретико-мерные трудности, наложим на множество  $Y$  следующие ограничения.

**5.4.1. Определение.** Хаусдорфово пространство  $Y$  называется *почти  $\sigma$ -компактным*, если для любой гиперконечной вероятностной меры  $P$  на подмножестве  $S_0 \subset *Y$  множество  $\bar{S}_0 = S_0 \cap \bigcap Ns(*Y)$  измеримо по Лёбу, и

$$L(P)(S_0) = \sup \{L(P)(S_0 \cap st^{-1}(K)) \mid K \text{ компактно}\}.$$

Заметим, что если пространство  $Y$  почти  $\sigma$ -компактно, то, согласно теореме 3.4.6, любая внутренняя вероятностная мера  $P$  на  $S_0$  имеет стандартную часть  $L(P) \circ st^{-1}$ ; эта мера будет радоновской, но не обязательно вероятностной. В новой терминологии предложение 3.4.7 можно переформулировать следующим образом.

**5.4.2. Предложение.** Все локально компактные пространства и все полные метрические пространства почти  $\sigma$ -компактны.

На протяжении всего данного параграфа пространство  $Y$  будет предполагаться почти  $\sigma$ -компактным.

Мы уже ввели обозначение

$$(3) \quad \bar{S}_0 = S_0 \cap Ns(*Y);$$

обозначим также

$$(4) \quad \bar{\Omega} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, 0) \in \bar{S}_0\}.$$

Предполагая, что множества  $\bar{S}_0$  и  $\bar{\Omega}$  являются соответственно  $L(m)$ - и  $L(P)$ -измеримыми, введем новые меры

$$(5) \quad \bar{m}(A) = L(m)(A \cap \bar{S}_0),$$

$$(6) \quad \bar{P}(B) = L(P)(B \cap \bar{\Omega}).$$

Для  $\delta \in T$  обозначим через  $T_\delta$  подмножество  $T_\delta \subset T$ :

$$T_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\},$$

и положим

$$T_\delta^r = \{t \in T_\delta \mid t \leq r\}, \quad T_\delta^{\text{fin}} = \{t \in T_\delta \mid t \text{ конечно}\}.$$

Будем обозначать через  $X^{(\delta)}$  ограничение  $X \upharpoonright T_\delta$ .

**5.4.3. Определение.** Подмножество  $A \subset S_0$  называется  *$\delta$ -исключительным*, если для каждого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое внутреннее множество  $B \supset A$ , что

$$(7) \quad \bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^1(X(\omega, t) \in B)\} < \varepsilon.$$



Множество называется *исключительным*, если оно является  $\delta$ -исключительным для некоторого бесконечно малого  $\delta$ .

Заметим, что если множество  $A$  является  $\delta$ -исключительным, то, согласно условию (2),

$$(8) \quad \bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_{\delta}^{\text{fin}}(X(\omega, t) \in A)\} = 0.$$

Чем больше  $\delta$ , тем больше будет  $\delta$ -исключительных множеств. Поэтому удобно иметь возможность ограничивать процессы на более грубую ось времени, причем если мы интересуемся только правой стандартной частью процесса  $X$ , это не ведет к потере общности.

Наша первая лемма содержит два очень простых, но очень полезных наблюдения. Доказательство мы оставляем читателю.

**5.4.4. Лемма.** (i) *Все внутренние множества  $B \subset S_0$ , для которых  $m(B) \approx 0$ , исключительны.*

(ii) *Семейства исключительных и  $\delta$ -исключительных множеств замкнуты относительно счетных объединений.*

Почему для определения исключительных множеств мы использовали условие (7), а не (8)? — Просто потому, что в случае, когда множество  $A$  весьма сложно, у нас нет оснований утверждать, что множество, стоящее в формуле (8), измеримо. Оно, очевидно, измеримо, когда множество  $A$  — внутреннее; но, хотя для всех последовательностей  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  подмножеств множества  $S$

$$(9) \quad \begin{aligned} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta}^r \left( X(\omega, t) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right\} = \\ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta}^r (X(\omega, t) \in A_n) \right\}, \end{aligned}$$

аналогичная формула для пересечений, вообще говоря, не верна. Она окажется верной, если последовательность состоит из внутренних множеств и является убывающей: это наблюдение лежит в основе следующей леммы.

**5.4.5. Лемма.** *Пусть  $A \subset S$ ; предположим, что существует такое семейство  $(B_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  внутренних множеств, что*

$$(10) \quad A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n},$$

*причем для каждого  $m$  последовательность  $(B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  является невозрастающей. Тогда*

$$(11) \quad \begin{aligned} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta}^r (X(\omega, t) \in A) \right\} = \\ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta}^r (X(\omega, t) \in B_{m,n}) \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что для всех  $m$

$$(12) \quad \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^r \left( X(\omega, t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n} \right) \right\} = \\ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^r (X(\omega, t) \in B_{m,n}) \right\},$$

поскольку тогда (11) будет следовать из (9). Очевидно, что левая часть равенства (12) содержится в правой. Чтобы доказать обратное включение, выберем

$$\omega_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^r (X(\omega, t) \in B_{m,n}) \right\}$$

и рассмотрим множество

$$\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \exists t \in T_\delta^r (X(\omega_0, t) \in \tilde{B}_{m,n})\},$$

где  $(\tilde{B}_{m,n})_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  — внутренняя невозрастающая последовательность множеств, служащая продолжением последовательности  $(B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ . В силу выбора элемента  $\omega_0$  это множество включает все  $\mathbb{N}$ , а так как оно внутреннее, оно должно содержать бесконечно большое число  $\eta$ . Следовательно,

$$\omega_0 \in \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^r (X(\omega, t) \in \tilde{B}_{m,\eta}) \right\} \subset \\ \subset \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^r \left( X(\omega, t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n} \right) \right\},$$

и лемма доказана.  $\square$

Исключительное множество  $A$  задевается траекториями процесса с  $L(\bar{P})$ -вероятностью 0; но, тем не менее, могут существовать такие состояния  $s_i \notin A$ , что выходящая из них частица натывается на множество  $A$  с положительной  $L(P_i)$ -вероятностью.

**5.4.6. Определение.**  $\delta$ -исключительное подмножество  $A \subset S_0$  называется *собственно  $\delta$ -исключительным*, если найдется такое семейство внутренних множеств  $(B_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ , что

$$(13) \quad A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n},$$

и для всех  $s_i \notin A$

$$(14) \quad L(P_i) \left\{ \omega \mid \exists t \in T_\delta^{\text{fin}} (X(\omega, t) \in A) \right\} = 0.$$

Множество называется *собственно исключительным*, если оно является собственно  $\delta$ -исключительным для некоторого  $\delta \approx 0$ .

Согласно доказанной выше лемме, множество, стоящее в формуле (14), измеримо. Отметим также, что классы собственно  $\delta$ -исключительных и собственно исключительных множеств замкнуты относительно счетных объединений.

Собственно исключительные множества являются «хорошими» исключительными множествами в двух смыслах: в них нельзя попасть, находясь снаружи, и они строятся из внутренних множеств простым и унифицированным способом. Следующая лемма показывает, что класс таких множеств достаточно широк.

**5.4.7. Лемма.** Для любого  $\delta$ -исключительного множества  $A \subset S_0$  найдется собственно  $\delta$ -исключительное множество  $B \supset A$ .

*Доказательство.* Поскольку множество  $A$   $\delta$ -исключительно, для любой пары  $(m, n)$  натуральных чисел найдется такое внутреннее множество  $B_{m, n}$ , включающее  $A$ , для которого

$$\bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^{m+1}(X(\omega, t) \in B_{m, n})\} \leq 1/n^2 m.$$

Положим

$$C_{m, n} = \{i \in S \mid P_i\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^m(X(\omega, t) \in B_{m, n})\} \geq 1/nm\}$$

и

$$\bar{A} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m, n}.$$

Прежде всего установим  $\delta$ -исключительность множества  $\bar{A}$ . По определению множеств  $C_{m, n}$

$$\begin{aligned} \bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^1(X(\omega, t) \in C_{m, n})\} \cdot (1/nm) &\leq \\ &\leq \bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^{m+1}(X(\omega, t) \in B_{m, n})\} \leq 1/n^2 m, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{P}\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^1(X(\omega, t) \in C_{m, n})\} \leq 1/n.$$

Отсюда ясно, что для каждого  $m$  множество  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m, n}$  будет  $\delta$ -исключительным, а поскольку класс  $\delta$ -исключительных множеств замкнут относительно счетных объединений, множество  $\bar{A}$  также будет  $\delta$ -исключительным.

Из определения семейства множеств  $(C_{m, n})$  видно, что для  $s_i \notin \bar{A}$

$$(15) \quad L(P_i)\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^{\text{fin}}(X(\omega, t) \in A)\} = 0.$$

Теперь повторим эту конструкцию счетное число раз, получив такую неубывающую последовательность

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

$\delta$ -исключительных множеств, что  $A_0 = A$  и  $A_{i+1} = \bar{A}_i$  для всех  $i$ . Пусть

$$B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i;$$

тогда  $B$  —  $\delta$ -исключительное множество, имеющее вид

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{m,n}^{(i)},$$

причем все множества  $C_{m,n}^{(i)}$  — внутренние, и из формулы (15) следует, что если  $s_i \notin B$ , то

$$L(P_i) \{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta}^{\text{fin}} (X(\omega, t) \in B) \} = 0.$$

Лемма доказана.  $\square$

Большинство исключительных множеств, которые мы встречаем в теории марковских процессов, суть множества, которые мы хотели бы, чтобы процессы избегали.

На стандартном языке мы говорим, что точка  $y \in Y$  «должна избегаться», если все ее нестандартные представления  $s_i \in \text{st}^{-1}(y) \cap S_0$  лежат в исключительном множестве. Чтобы изучить эту связь более глубоко, введем *внутреннюю стандартную часть*  $A^\circ$  подмножества  $A \subset S$ , положив

$$(16) \quad A^\circ = \{y \in Y \mid \text{st}^{-1}(y) \cap S_0 \subset A\}.$$

Ранее мы определяли *стандартную часть*  $A^\circ$  множества  $A$ :

$$(17) \quad {}^\circ A = \text{st}(A) = \{y \in Y \mid \exists s \in A (\text{st}(s) = y)\}.$$

Внутреннюю стандартную часть можно также определить в терминах обычной стандартной части:

$$(18) \quad A^\circ = Y - \text{st}(S_0 - A).$$

Тривиально проверяется, что операция взятия стандартной части коммутует с произвольными объединениями. С помощью равенства (18) убеждаемся, что внутренняя стандартная часть коммутует с произвольными пересечениями. Симметричные утверждения не столь красивы: вообще говоря, стандартная часть не коммутует с пересечением, а внутренняя стандартная часть — с объединением. Все, что можно об этом сказать, — это следующие два утверждения.

**5.4.8. Лемма.** Если  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — невозрастающая последовательность внутренних множеств, то

$$(19) \quad {}^\circ \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ A_n.$$

Если  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — неубывающая последовательность внутренних множеств, то

$$(20) \quad \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)^\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^\circ.$$

*Доказательство.* То, что левая часть равенства (19) содержится в правой, очевидно. Для доказательства обратного пусть

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ A_n.$$

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  выберем такое  $y_n \in A_n$ , что  $x = \text{st}(y_n)$ . Продолжим последовательность  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  до внутренней невозрастающей последовательности  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ , а последовательность  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — до такой внутренней последовательности  $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ , что  $y_n \in A_n$  для всех  $n \in {}^*\mathbb{N}$ .

Для произвольной окрестности  $O$  точки  $x$  рассмотрим множество

$$N_O = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid y_n \in {}^*O\}.$$

Все такие множества — внутренние и содержат  $\mathbb{N}$ , следовательно, можно найти бесконечно большое  $\eta \in {}^*\mathbb{N}$ , принадлежащее всем множествам  $N_O$ . Но тогда

$$x = \text{st}(y_\eta),$$

а поскольку последовательность  $(A_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  — невозрастающая,  $y_\eta \in A_\eta \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Равенство (19) доказано.

Равенство (20) мы получим из равенства (19) с помощью определения (18):

$$\begin{aligned} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)^\circ &= Y - \text{st} \left( S_0 - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = Y - \text{st} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (S_0 - B_n) \right) = \\ &= Y - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{st}(S_0 - B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( Y - \text{st}(S_0 - B_n) \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^\circ. \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку, вообще говоря,

$$\left( \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n} \right)^\circ \neq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n}^\circ,$$

у нас нет причин считать, что внутренняя стандартная часть собственно исключительного множества всегда будет борелевским множеством. Мы тем не менее докажем, что она будет по крайней мере абсолютно измеримой.

**5.4.9. Лемма.** Пусть  $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n}$ , где  $(B_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  — последовательность внутренних множеств. Тогда для любой полной борелевской меры  $\mu$  на  $Y$  множество  $A^\circ$  будет  $\mu$ -измеримым; существует такая последовательность  $(D_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  внутренних множеств, что

$$(21) \quad A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_{m,n}$$

и

$$(22) \quad \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_{m,n}^\circ - A^\circ \right) = 0.$$

*Доказательство.* Можно считать, что последовательность  $(B_{m,n})$  является неубывающей по  $m$  и невозрастающей по  $n$ . Заметим, что

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{m,n} = \bigcap_{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{m, f(m)}.$$

Обозначим через  $\bar{f}(m)$  конечную последовательность  $(f(1), f(2), \dots, f(m))$  и положим

$$C_{\bar{f}(m)} = \bigcup_{k \leq m} B_{k, f(k)}.$$

Для любой функции  $f$  последовательность  $(C_{\bar{f}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  является неубывающей. Следовательно, в силу леммы 5.4.8, а также в силу того, что внутренняя стандартная часть коммутирует с любыми пересечениями, имеем

$$(23) \quad A^\circ = \bigcap_{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{\bar{f}(m)}^\circ.$$

Поскольку множество  $Y - C_{\bar{f}(m)}^\circ = \text{st}(S_0 - C_{\bar{f}(m)})$  замкнуто (см. предложение 2.1.8), множество

$$Y - A^\circ = \bigcup_{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (Y - C_{\bar{f}(m)}^\circ)$$

получено из замкнутых множеств с помощью операции Суслина. Значит, множество  $A^\circ$  измеримо относительно любой пополненной борелевской меры (простое доказательство этого факта см. в книге Saks [1]).

Осталось найти последовательность  $(D_{m,n})$ . Из формулы (23) с помощью некоторых рутинных рассуждений следует, что для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такая функция  $f_\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что

$$\mu \left( \bigcap_{g \leq f_\varepsilon} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{\bar{g}(m)}^\circ - A^\circ \right) < \varepsilon,$$

где  $g \leq f_\varepsilon$  означает, что  $g(n) \leq f_\varepsilon(n)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку исходная последовательность  $(B_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  является невозрастающей, имеем

$$\bigcap_{g \leq f_\varepsilon} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{\bar{g}(m)}^\circ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{\bar{f}_\varepsilon(m)}^\circ.$$

Беря  $D_{m,n} = C_{\bar{f}_{1/n}(m)}$ , получаем утверждение леммы.  $\square$

**Замечание.** Приведенные рассуждения показывают, что подмножество хаусдорфова пространства может быть получено из

замкнутых множеств с помощью операции Суслина тогда и только тогда, когда оно является стандартной частью множества, полученного с помощью той же операции из внутренних множеств. Этот результат, а также и приведенное здесь доказательство, принадлежат Хенсону (Henson [1]).

Прежде чем мы сможем вернуться к марковским процессам, нам потребуется еще одна последняя лемма. С ее помощью мы сможем выбирать гиперконечные представления мер, избегая собственно исключительных множеств.

**5.4.10. Лемма.** Пусть  $D$  — подмножество множества  $S_0$ , имеющее вид  $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_{m,n}$ , где  $D_{m,n}$  — внутренние множества. Если  $\mu$  — радоновская вероятностная мера на  $Y$ , и  $\mu(D^\circ) = 0$ , то существует такая внутренняя вероятностная мера  $\nu$  на  $S_0$ , что  $\mu = L(\nu) \circ st^{-1}$  и  $L(\nu)(D) = 0$ .

*Доказательство.* Мы, очевидно, можем предположить, что последовательность  $(D_{m,n})$  является неубывающей по  $m$  и невозрастающей по  $n$ . Определяя новые меры  $\mu_{m,n}$  равенством

$$(24) \quad \mu_{m,n}(B) = \mu(B - D_{m,n}^\circ),$$

получаем

$$(25) \quad \mu(B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu_{m,n}(B).$$

Множество  $S_0 - D_{m,n}$  является богатым подмножеством в  $Y - D_{m,n}^\circ$ , и, следовательно, существует внутренняя мера  $\nu_{m,n}$ , сосредоточенная на  $S_0 - D_{m,n}$ , для которой

$$(26) \quad \mu_{m,n} = L(\nu_{m,n}) \circ st^{-1}.$$

Последовательность мер  $(\nu_{m,n})$  можно выбрать невозрастающей по  $m$  и неубывающей по  $n$ . Продолжив ее до внутренней последовательности  $(\nu_{m,n})_{m,n \in {}^*\mathbb{N}}$ , выберем такое  $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$

$${}^\circ \nu_{\gamma,n}(S_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ \nu_{m,n}(S_0),$$

а затем такое  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что

$${}^\circ \nu_{\gamma,\eta}(S_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ \nu_{\gamma,n}(S_0).$$

Из равенств (25), (26), а также из определений чисел  $\gamma$  и  $\eta$  следует, что  $L(\nu_{\gamma,\eta})(D) = 0$  и  $\mu = L(\nu_{\gamma,\eta}) \circ st^{-1}$ . Мера  $\nu_{\gamma,\eta}$  обладает всеми нужными свойствами, кроме одного: она не обязана быть вероятностной мерой. Однако легко видеть, что  $\nu_{\gamma,\eta}(S_0) =$

$= 1 + \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon \approx 0$ , так что, положив  $v = (1 + \varepsilon)^{-1}v_\eta$ , мы получаем требуемую меру.  $\square$

Объединяя леммы 5.4.9 и 5.4.10, получаем

**5.4.11. Следствие.** Пусть  $A \subset S_0$  — собственно исключительное множество, и  $\mu$  — такая пополненная борелевская вероятностная мера на  $Y$ , что  $\mu(A^\circ) = 0$ . Тогда существует такая внутренняя вероятностная мера  $\nu$  на  $S_0$ , что  $\mu = L(\nu) \circ st^{-1}$  и  $L(\nu)(A) = 0$ .

### В. Строго марковские процессы и модифицированные стандартные части

Закончив изучение исключительных множеств, мы переходим к основному сюжету данного параграфа — к исследованию стандартных частей гиперконечных марковских процессов. Сначала опишем, какого типа процессы мы хотели бы получить в качестве стандартных частей.

Если дано топологическое пространство  $Y$ , обозначим через  $Y_\Delta$  множество  $Y \cup \{\Delta\}$ , полученное из  $Y$  добавлением нового элемента  $\Delta$ , и через  $\mathcal{B}_\Delta$  —  $\sigma$ -алгебру подмножеств множества  $Y_\Delta$ , порожденную борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{B}$  в  $Y$  и одноэлементным множеством  $\{\Delta\}$ . Наши стандартные процессы будут  $Y_\Delta$ -значными, причем новый элемент  $\Delta$  будет служить ловушкой.

Напомним, что фильтрация  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  называется непрерывной справа, если  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$  для всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ; отображение  $\sigma: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  называется марковским моментом (остановки) относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_t\}$ , если

$$\{\omega \mid \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

для всех  $t$ . Каждый марковский момент  $\sigma$  порождает следующую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_\sigma$ :

$$(27) \quad \mathcal{F}_\sigma = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid \forall t (A \cap \{\omega \mid \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t)\},$$

где  $\mathcal{F}_\infty$  — это  $\sigma$ -алгебра, порожденная объединением всех  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ .

Пусть  $\mathcal{M}(Y)$  — множество всех радоновских мер на  $Y$ , имеющих конечную массу. Множество или функция называются абсолютно измеримыми, если они измеримы относительно любой меры  $\mu \in \mathcal{M}(Y)$ . Если для каждого  $y \in Y$  нам дана вероятностная мера  $\bar{P}_y$  на  $\Omega$ , определим для каждого  $\mu \in \mathcal{M}(Y)$  меру  $\bar{P}_\mu$ , положив

$$(28) \quad \bar{P}_\mu(A) = \int \bar{P}_y(A) d\mu(y)$$



(разумеется, если эта операция имеет смысл, т. е. если функция  $y \mapsto \bar{P}_y(A)$  является  $\mu$ -измеримой).

Наконец, если  $x — Y_\Delta$ -значный процесс, назовем его *временем жизни* марковский момент

$$\zeta(\omega) = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ | x(\omega, t) = \Delta\}.$$

**5.4.12. Определение.** *Строго марковским процессом* называется четверка  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, \{\bar{P}_y\}_{y \in Y_\Delta}, x)$ , где  $\{\mathcal{F}_t\}$  — непрерывная справа фильтрация на  $\Omega$ ,  $\bar{P}_y$  — вероятностная мера на  $\mathcal{F}_\infty$ , и  $x: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow Y_\Delta$  — случайный процесс (который для каждого  $y$  можно считать заданным на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \bar{P}_y)$ ), причем выполнены следующие условия:

- (i) для любого  $t \geq 0$  и любого измеримого подмножества  $E \subset Y_\Delta$  функция  $y \mapsto \bar{P}_y\{\omega | x_t(\omega) \in E\}$  абсолютно измерима;
- (ii) для всех  $t > \zeta(\omega)$  имеем  $x(\omega, t) = \Delta$ ;
- (iii) для каждого  $y \in Y_\Delta$  процесс  $x$  согласован с фильтрацией  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \bar{P}_y)$  и при всех  $t < \zeta(\omega)$  непрерывен справа и имеет пределы слева  $\bar{P}_y$ -почти наверное;
- (iv) для любого марковского момента  $\sigma$  относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_t\}$ , любого измеримого множества  $E \subset Y_\Delta$ , любой меры  $\mu \in \mathcal{M}(Y)$  и любого  $s \in \mathbb{R}_+$  справедливо равенство

$$\bar{P}_\mu\{x_{\sigma+s} \in E | \mathcal{F}_\sigma\} = \bar{P}_{x_\sigma}\{x_s \in E\} \bar{P}_\mu\text{-почти наверное.}$$

Чтобы доказать, что для некоторого класса гиперконечных марковских цепей стандартные части окажутся строго марковскими процессами, надо преодолеть две основные трудности: первая связана с построением семейства мер  $\{\bar{P}_y\}$ , вторая — с доказательством строго марковского свойства 5.4.12(iv). Но сначала введем необходимые условия регулярности для нестандартных процессов.

Напомним обозначения:  $\bar{S}_0 = S_0 \cap N_s(*Y)$  и  $X^{(\delta)} = X \upharpoonright T^\delta$ . *Время жизни*  $\zeta_\delta$  для процесса  $X^{(\delta)}$  определяется так:

$$\zeta_\delta(\omega) = \inf \{^\circ t | X^{(\delta)}(\omega, t) \notin \bar{S}_0\},$$

а *правую стандартную часть*  $^\circ X^{(\delta)+}$  мы определим следующим образом: для  $t < \zeta_\delta(\omega)$  положим

$$^\circ X^{(\delta)+}(\omega, t) = S\text{-}\lim_{s \downarrow t} X^{(\delta)}(\omega, s),$$

если этот предел существует, и

$$^\circ X^{(\delta)+}(\omega, t) = \Delta$$

в противном случае. Для  $t \geq \zeta_\delta(\omega)$  всегда полагаем  $^\circ X^{(\delta)+}(\omega, t) = \Delta$ .

**5.4.13. Определение.** Подмножество  $A \subset S_0$  называется *множеством дефектов*<sup>1)</sup> процесса  $X$ , если существует такое положительное бесконечно малое  $\delta_0$ , что для всех  $\delta \approx 0$ ,  $\delta \geq \delta_0$  справедливы условия:

- (i) для всех  $s_i \in \bar{S}_0 - A$  траектория  $X^{(\delta)}(\omega, \cdot)$  при всех  $t < \zeta_\delta(\omega)$  имеет  $S$ -пределы слева и справа  $L(P_i)$ -почти наверное;
- (ii) для всех  $s_i \in \bar{S}_0 - A$  множество

$$\{\omega \mid \exists t \in T_\delta^{\text{fin}} (t > \zeta_\delta(\omega) \wedge X(\omega, t) \in \bar{S}_0)\}$$

имеет  $L(P_i)$ -меру нуль;

- (iii) для всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$ , всех конечных  $t \in T_\delta$  и всех борелевских множеств  $B$

$$L(P_i) \{ {}^\circ X^{(\delta)+}(\omega, t) \in B \} = L(P_j) \{ {}^\circ X^{(\delta)+}(\omega, t) \in B \}.$$

Будем говорить, что процесс  $X$  имеет *исключительные дефекты*, если множество его дефектов — исключительное.

Полагая  $\text{st}(s_i) = \Delta$ , если  $s_i \in S - \bar{S}_0$ , мы получаем следующее определение модифицированной стандартной части.

**5.4.14. Определение.** Предположим, что процесс  $X$  имеет исключительные дефекты, и пусть  $A$  — собственно  $\delta_0$ -исключительное множество его дефектов (где  $\delta_0$  — из определения 5.4.13). Пусть процесс  $x: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow Y_\Delta$  определяется следующим образом:

- (i) если  $X(\omega, 0) \notin A$ , то  $x(\omega) = {}^\circ X^{(\delta)+}(\omega)$ ;
- (ii) если  $X(\omega, 0) \in A$ , то  $x(\omega, t) = \text{st}(X(\omega, 0))$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Тогда процесс  $x$  называется *модифицированной стандартной частью* процесса  $X$ .

Наша цель — доказать, что если процесс  $X$  имеет исключительные дефекты, то при подходящем определении семейства мер  $\{\bar{P}_y\}$  все модифицированные стандартные части процесса  $X$  суть строго марковские процессы. Первым шагом на пути к определению семейства  $\{\bar{P}_y\}$  служит следующая лемма — «размазанный» вариант условия 5.4.13(iii).

Если  $\nu$  — внутренняя вероятностная мера на  $S$ , обозначим через  $P_\nu$  меру на  $\Omega$ , определенную по аналогии с формулой (28):

$$(28') \quad P_\nu(C) = \int P_i(C) d\nu(s_i).$$

Напомним, что пространство  $Y$  предполагается почти  $\sigma$ -компактным (определение 5.4.1).

**5.4.15. Лемма.** Пусть  $A$  — собственно исключительное множество дефектов процесса  $X$ , и  $x$  — соответствующая модифицированная стандартная часть процесса  $X$ . Пусть  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — две такие внутренние меры на  $S_0$ , что  $L(\nu_1)(A) = L(\nu_2)(A) = 0$  и

<sup>1)</sup> В оригинале «irregularities». — Прим. ред.

$L(v_1) \circ st^{-1} = L(v_2) \circ st^{-1}$ . Тогда для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  и всех борелевских множеств  $B$

$$L(P_{v_1})\{x(\omega, t) \in B\} = L(P_{v_2})\{x(\omega, t) \in B\}.$$

*Доказательство.* Обозначим  $\mu = L(v_1) \circ st^{-1} = L(v_2) \circ st^{-1}$ . Выберем  $\tilde{t} \approx t$  столь большим, что

$${}^\circ X(\omega, \tilde{t}) = x(\omega, t) \quad L(P_{v_1})\text{- и } L(P_{v_2})\text{-почти наверное;}$$

выберем такое внутреннее множество  $\tilde{B}$ , что для  $i = 1, 2$

$$L(P_{v_i})((\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\} \Delta \{{}^\circ X(\omega, \tilde{t}) \in B\}) = 0.$$

Определим функцию  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом: если  $y \notin A^\circ$ , положим  $f(y) = L(P_i)\{x(\omega, t) \in B\}$  для какого-либо  $s_i \in st^{-1}(y) \cap S_0 - A$  (а, значит, и для всех таких  $s_i$ ); если же  $y \in A^\circ$ , определим  $f(y)$  произвольно. Функция  $s_i \mapsto P_i\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\}$  служит поднятием функции  $f$  одновременно относительно меры  $v_1$  и меры  $v_2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} L(P_{v_1})\{x(\omega, \tilde{t}) \in B\} &= {}^\circ P_{v_1}\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\} = \\ &= {}^\circ \int P_i\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\} dv_1(s_i) = \int f(y) d\mu(y) = \\ &= {}^\circ \int P_i\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\} dv_2(s_i) = {}^\circ P_{v_2}\{X(\omega, \tilde{t}) \in \tilde{B}\} = \\ &= L(P_{v_2})\{x(\omega, t) \in B\}, \end{aligned}$$

и лемма доказана.  $\square$

**5.4.16. Лемма.** Пусть процесс  $X$  имеет собственно исключительное множество дефектов  $A$ , и пусть  $x$  — соответствующая модифицированная стандартная часть процесса  $X$ . Тогда для всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in S_0 - A$ , для всех конечных последовательностей  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  из  $\mathbb{R}_+$  и всех борелевских множеств  $B_1, B_2, \dots, B_n$  имеем

$$\begin{aligned} L(P_i)\{x(\omega, t_1) \in B_1, x(\omega, t_2) \in B_2, \dots, x(\omega, t_n) \in B_n\} = \\ = L(P_j)\{x(\omega, t_1) \in B_1, x(\omega, t_2) \in B_2, \dots, x(\omega, t_n) \in B_n\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Мы докажем утверждение леммы индукцией по длине  $n$  последовательностей  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  и  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Случай  $n = 1$  является частью определения 5.4.13. Предположим, что утверждение справедливо для всех последовательностей длины  $n - 1$ . Выберем такие  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ , что  $\tilde{t}_1 \approx t_1, \dots, \tilde{t}_n \approx t_n$  и

$${}^\circ X(\omega, \tilde{t}_i) = x(\omega, t_i) \quad L(P_k)\text{-почти наверное}$$

для  $l = 1, 2, \dots, n$  и  $k = i, j$ . Выберем также такие внутренние множества  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n$ , что

$$L(P_k)(\{X(\omega, \tilde{t}_l) \in \tilde{B}_l\} \Delta \{X(\omega, \tilde{t}_l) \in B_l\}) = 0$$

для  $l = 1, 2, \dots, n$  и  $k = i, j$ .

Определим две меры  $\nu_i$  и  $\nu_j$  на  $S$ , положив для всех  $s \in S$  и  $k = i, j$

$$\nu_k(s) = P_k\{\omega \mid X(\omega, \tilde{t}_{n-1}) = s \text{ и } X(\omega, \tilde{t}_l) \in \tilde{B}_l \text{ для всех } l < n-1\}.$$

По предположению индукции

$$L(\nu_i) \circ \text{st}^{-1} = L(\nu_j) \circ \text{st}^{-1},$$

а поскольку множество  $A$  — собственно исключительное,  $L(\nu_i)(A) = L(\nu_j)(A) = 0$ . Применяя лемму 5.4.15 к  $t = t_n - t_{n-1}$ , получаем

$$L(P_{\nu_i})\{x(t_n - t_{n-1}) \in B_n\} = L(P_{\nu_j})\{x(t_n - t_{n-1}) \in B_n\}.$$

Так как процесс  $X$  — марковский и однородный по времени, получаем утверждение леммы.  $\square$

Теперь у нас есть все необходимое для определения недостающих ингредиентов  $\{\mathcal{F}_t\}$  и  $\{\bar{P}_y\}$  нашего марковского процесса. Для каждого  $t \in \mathbb{R}_+$  пусть  $\mathcal{F}_t^\circ$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная всеми множествами вида

$$\{\omega \mid x(\omega, t_1) \in B_1, \dots, x(\omega, t_n) \in B_n\},$$

где  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$ , а  $B_1, \dots, B_n$  — борелевские подмножества пространства  $Y$ . Определим

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^\circ;$$

фильтрация  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , очевидно, непрерывна справа. Определим  $\mathcal{F}_\infty$  как  $\sigma$ -алгебру, порожденную объединением всех  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Из леммы 5.4.16 следует, что для всех  $C \in \mathcal{F}_\infty$  и всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$

$$(29) \quad L(P_i)(C) = L(P_j)(C).$$

Это наблюдение делает возможным следующее определение семейства  $\{\bar{P}_y\}_{y \in Y_\Delta}$  мер на  $\mathcal{F}_\infty$ .

Если  $y \notin A^\circ$ , для всех  $C \in \mathcal{F}_\infty$  положим

$$(30) \quad \bar{P}_y(C) = L(P_i)(C) \text{ для всех } s_i \in \text{st}^{-1}(y) - A.$$

Если же  $y \in A^\circ \cup \{\Delta\}$ , пусть

$$(31) \quad \bar{P}_y(C) = \begin{cases} 1, & \text{если } C \text{ содержит постоянную траекторию } x(t) = y; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что поскольку множество  $C \in \mathcal{F}_\infty$  либо содержит все постоянные траектории  $x(\omega, t) = y$ , либо ни одной, функция множества  $\bar{P}_y$  является мерой.

Вот мы и достигли цели.

**5.4.17. Теорема.** Пусть  $S_0$  — гиперконечное подмножество пространства  ${}^*Y$  для некоторого почти  $\sigma$ -компактного пространства  $Y$ , и пусть  $X: \Omega \times T \rightarrow S$  — гиперконечный марковский процесс с исключительными дефектами. Если  $x$  — модифицированная стандартная часть процесса  $X$ , то четверка  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, \{\bar{P}_y\}_{y \in Y_\Delta}, x)$  образует строго марковский процесс.

*Доказательство.* Мы уже знаем, что фильтрация  $\{\mathcal{F}_t\}$  непрерывна справа; поэтому все, что нужно — это проверить условия 5.4.12 (i) — (iv). Второе и третье условия следуют непосредственно из конструкции, так что мы можем сосредоточить внимание на условиях (i) и (iv).

Для заданной радоновской вероятностной меры  $\mu$  на  $Y$  определим две новые меры на  $Y$  —  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , положив

$$(32) \quad \mu_0(B) = \mu(B - A^\circ),$$

$$(33) \quad \mu_1(B) = \mu(B \cap A^\circ),$$

где  $A$  — собственно исключительное множество дефектов, использованное при построении процесса  $x$ . Согласно следствию 5.4.11, найдется такая внутренняя мера  $\nu$  на  $S_0$ , для которой

$$(34) \quad \mu_0 = L(\nu) \circ st^{-1}$$

$$(35) \quad L(\nu)(A) = 0.$$

Докажем сначала утверждение 5.4.12(i).

(i) Пусть даны  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  и борелевское множество  $E$ ; требуется доказать, что множество

$$\{y \in Y \mid \bar{P}_y\{x(t) \in E\} > \alpha\}$$

$\mu$ -измеримо для любой вероятностной радоновской меры  $\mu$ . Поскольку согласно лемме 5.4.9 множество

$$\{y \in A^\circ \mid \bar{P}_y\{x(t) \in E\} > \alpha\} = A^\circ \cap E$$

абсолютно измеримо, достаточно доказать, что множество

$$(36) \quad \{y \notin A^\circ \mid \bar{P}_y\{x(t) \in E\} > \alpha\}$$

$\mu$ -измеримо. На самом деле по определению меры  $\mu_0$  нужно показать только, что это множество  $\mu_0$ -измеримо.

Поскольку процесс  $X$  имеет правые  $S$ -пределы почти наверное по вероятностной мере  $P_v$ , построенной по определенной в (34) мере  $v$  с помощью формулы (28'), найдется такое  $\bar{t} \approx t$ , что

$$L(P_v) (\{x(t) \in E\} \Delta \{X(\bar{t}) \in E\}) = 0.$$

Значит, должно существовать такое внутреннее множество  $\bar{E}$ , для которого

$$L(P_v) \{X(\bar{t}) \in (\text{st}^{-1}(E) \Delta \bar{E})\} = 0,$$

и, следовательно,

$$L(P_i) \{x(t) \in E\} = {}^\circ P_i \{X(\bar{t}) \in \bar{E}\}$$

для  $L(v)$ -почти всех  $s_i$ .

Комбинируя это утверждение с определением мер  $\bar{P}_y$ , мы видим, что функция  $s_i \mapsto P_i \{X(\bar{t}) \in \bar{E}\}$  является  $v$ -поднятием функции  $y \mapsto \bar{P}_y \{x(t) \in E\}$ , и, значит, последняя функция  $\mu_0$ -измерима. Тем самым доказано, что множество (36)  $\mu_0$ -измеримо, откуда следует 5.4.12(i).

(iv) Нужно показать, что для любого  $\{\mathcal{F}_t\}$ -марковского момента  $\sigma$ , для любого множества  $B \in \mathcal{F}_\sigma$  любого  $s \in \mathbb{R}_+$ , любой радоновской вероятностной меры  $\mu$  на  $Y$  и любого борелевского множества  $E$  справедливо равенство

$$(37) \quad \bar{P}_\mu \{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} = \int_B \bar{P}_{x_\sigma} \{x_s \in E\} d\bar{P}_\mu.$$

Прежде всего заметим, что с  $\bar{P}_{\mu_1}$ -вероятностью 1 траектории процесса  $x$  постоянны, так что

$$\bar{P}_{\mu_1} \{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} = \int_B \bar{P}_{x_\sigma} \{x_s \in E\} d\bar{P}_{\mu_1},$$

поэтому достаточно доказать, что

$$(38) \quad \bar{P}_{\mu_0} \{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} = \int_B \bar{P}_{x_\sigma} \{x_s \in E\} d\bar{P}_{\mu_0}.$$

Если  $v$  — нестандартное представление меры  $\mu_0$ , определяемое формулами (34), (35), то нестандартным аналогом равенства (38) будет равенство

$$(39) \quad P_v \{\omega \in C \mid X_{\tau+s} \in F\} = \int_C P_{X_\tau} \{X_s \in F\} dP_v,$$

где  $C$  и  $F$  — внутренние множества, причем  $C$  принадлежит  $*$ -алгебре, связанной с внутренним марковским моментом  $\tau$ . Поскольку процесс  $X$  является марковским и однородным по вре-

мени, формула (39) справедлива. Наш план — свести формулу (38) к некоторому варианту формулы (39).

Прежде всего выберем такой марковский момент  $\tau$ , что  $L(P_v)$ -почти наверное  ${}^\circ\tau = \sigma$ ; далее, пусть  $C$  — такое  $\tau$ -измеримое<sup>1)</sup> множество, для которого

$$(40) \quad L(P_v)(B \Delta C) = 0.$$

Если  $P^\tau$  — внутренняя мера на  $\Omega$ , заданная равенством

$$P^\tau(D) = \int P_{x_\tau}(D) dP_v,$$

то в силу собственной исключительности множества  $A$

$$(41) \quad L(P^\tau)\{X_t \in A\} = 0$$

для всех  $t \in T_{\delta_0}^{\text{fin}}$  (здесь  $\delta_0$  — бесконечно малое число, используемое в построении процесса  $x$  — см. определение 5.4.14). Значит, можно выбрать такое  $\tilde{s} \in T_{\delta_0}^{\text{fin}}$ ,  $\tilde{s} \approx s$ , что

$$(42) \quad {}^\circ X_{\tilde{s}} = x_s \quad L(P^\tau)\text{-почти наверное;}$$

$$(43) \quad {}^\circ X_{\tau+\tilde{s}} = x_{\sigma+s} \quad L(P_v)\text{-почти наверное.}$$

Наконец, выберем такое внутреннее множество  $F$ , для которого

$$(44) \quad L(P_v)\{X_{\tau+\tilde{s}} \in \text{st}^{-1}(E) \Delta F\} = 0,$$

$$(45) \quad L(P^\tau)\{X_{\tilde{s}} \in \text{st}^{-1}(E) \Delta F\} = 0.$$

В результате мы получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (46) \quad & \bar{P}_{\mu_0}\{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} = (\text{по определению } \bar{P}_{\mu_0}) \\ & = \int \bar{P}_y\{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} d\mu_0(y) = (\text{по определению } \bar{P}_y) \\ & = \int L(P_i)\{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} dL(v)(s_i) = (\text{по определению } P_v) \\ & = L(P_v)\{\omega \in B \mid x_{\sigma+s} \in E\} = (\text{согласно (40), (43), (44)}) \\ & = {}^\circ P_v\{\omega \in C \mid X_{\tau+\tilde{s}} \in F\} = (\text{согласно (39)}) \\ & = \int_C P_{x_\tau}\{X_{\tilde{s}} \in F\} dP_v = (\text{согласно (40), (42), (45)}) \\ & = \int_B L(P_{x_\tau})\{x_s \in E\} dL(P_v) = (\text{по определению } v, \tau \text{ и } \{\bar{P}_y\}) \\ & = \int_B \bar{P}_{x_\sigma}\{x_s \in E\} d\bar{P}_{\mu_0}. \end{aligned}$$

Тем самым доказано равенство (38), а с ним и теорема.  $\square$

<sup>1)</sup> Т.е. измеримое относительно внутренней алгебры, связанной с марковским моментом  $\tau$  и определяемой аналогично равенству (27). — Прим. перев.

Проиллюстрируем использование теоремы 5.4.17 следующим — довольно-таки тривиальным — примером. Более достойные применения будут приведены в § 5.6.

**5.4.18. Пример.** Пусть  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ; положим

$$S_0 = \left\{ \frac{k}{\sqrt{\eta}} \mid k \in {}^*\mathbb{Z}, |k| \leq \eta \right\}.$$

Определим переходные вероятности  $q_{s,s'}$  для  $s, s' \in S_0$ , положив

$$q_{s,s'} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } |s - s'| = 1/\sqrt{\eta}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а для ловушки

$$q_{s,s_0} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } s = \pm \sqrt{\eta}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $m$  — внутренняя мера на  $S_0$ , равная

$$m(s) = 1/2\sqrt{\eta}$$

для всех  $s \in S_0$ , и ось времени есть

$$T = \left\{ \frac{k}{\eta} \mid k \in {}^*\mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Тогда полученный процесс  $X$  — это андерсоновское случайное блуждание с равномерным начальным распределением, отвечающим мере Лебега. Чтобы доказать, что стандартная часть процесса  $X$  является строго марковским процессом, покажем, что в качестве множества дефектов процесса  $X$  можно взять пустое множество. В самом деле, поскольку для всех околостандартных  $s_i \in S_0$  процесс  $X$  с  $L(P_i)$ -вероятностью единица  $S$ -непрерывен, два первых условия определения 5.4.13, очевидно, выполнены. Далее, если  $s_i \approx s_j$ , то траектории, выходящие из  $s_i$ , получаются из траекторий, выходящих из  $s_j$ , с помощью бесконечно малого параллельного переноса. Значит, они порождают одни и те же стандартные части, откуда следует 5.4.13 (iii).

Мы сосредоточили все внимание на стандартном понятии строго марковского процесса, хотя в этом выборе нет ничего канонического. На самом деле с точки зрения стандартной теории марковских процессов (как она изложена, например, в книгах Blumenthal, Gettoor [1], Fukushima [3]) было бы более естественным наложить на процесс  $X$  такие условия, которые гарантировали бы, что его модифицированная стандартная часть  $x$  есть процесс Ханта. Однако строго марковский процесс, чтобы быть процессом Ханта, должен удовлетворять нескольким до-



полнительным техническим требованиям; а поскольку мы чувствовали, что этот параграф уже получил свою — и довольно изрядную — порцию техники, мы решили оставить дальнейшее развитие предмета читателю.

Материал этого параграфа новый, хотя развитая здесь гиперконечная теория исключительных множеств следует стандартной теории (Blumenthal, Gettoor [1]; Fukushima [3]). Кейслер в работе Keisler [4] подошел к нестандартной теории марковских процессов с несколько иной точки зрения: он характеризует различные классы стандартных марковских процессов в терминах того, какие они допускают поднятия; он также применяет эту теорию к стохастическим дифференциальным уравнениям. Процессы, рассматриваемые Кейслером, могут быть неоднородны по времени, а условия, соответствующие нашему условию (5.4.1), накладываются на  $\Omega$ , а не на  $S_0$ .

### 5.5. Регулярные формы и марковские процессы

Теперь, собрав вместе результаты двух предыдущих параграфов, мы получим условия на гиперконечные формы Дирихле, гарантирующие, что все модифицированные стандартные части соответствующих марковских цепей будут строго марковскими процессами. Метод прост: мы просто используем взаимоотношения между формами и процессами, полученные в пп. 5.3.5—5.3.9, и переведем условия теоремы 5.4.17 на язык форм Дирихле.

В этом параграфе нам потребуются несколько более жесткие предположения, чем в предыдущем. Прежде всего мы вернемся к условию симметрии  $m_{ij}q_{ji} = m_{ji}q_{ij}$  (при  $i, j \neq 0$ ), сформулированному в формуле (5.3.8), которое в § 5.4 было временно заменено более слабым предположением (5.3.2). Таким образом, мы вновь оказываемся в ситуации § 5.3. Далее, нам нужны более жесткие топологические требования. Напомним, что хаусдорфово пространство называется *регулярным* — или, если угодно, пространством типа  $T_3$  — если для любого замкнутого множества  $F$  и для любого  $x \notin F$  найдутся такие непересекающиеся открытые множества  $O_1, O_2$ , что  $x \in O_1, F \subset O_2$ . Говорят, что пространство удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если его топология имеет счетную базу. В этом параграфе мы будем предполагать, что пространство состояний  $Y$  удовлетворяет второй аксиоме счетности, регулярно и почти  $\sigma$ -компактно. Пространства, которыми мы больше всего интересуемся — а именно, локально компактные пространства со счетной базой, а также полные сепарабельные метрические пространства — удовлетворяют всем этим условиям. Так же как и в § 5.4, мы предполагаем, что гиперконечное пространство состояний  $S_0$  является подмножеством множества  $*Y$ .

### А. Разделение компактов

Одно за другим мы переформулируем условия определения 5.4.13 в терминах форм Дирихле. Следующее предположение потребуется для 5.4.13(i).

**5.5.1. Определение.** Будем говорить, что форма Дирихле  $\mathcal{E}$  *разделяет компакты*, если существует такое счетное семейство  $\pi$  открытых множеств, что для любых двух непересекающихся компактов  $K_1, K_2$  найдутся множества  $O_1, O_2 \in \pi$  и внутренняя функция  $u: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , удовлетворяющие следующим условиям:  $K_1 \subset O_1, K_2 \subset O_2, u \upharpoonright (S_0 \cap {}^*O_1) = 1, u \upharpoonright (S_0 \cap {}^*O_2) = 0$ , и

$${}^\circ \mathcal{E}_1(u, u) < \infty.$$

Заметим, что поскольку имеется всего счетное количество пар  $O_1, O_2$ , мы можем выбирать функции  $u$  также из счетного семейства. В самом деле, пусть  $e({}^*O_1, {}^*O_2)$  — функция, на которой форма  $\mathcal{E}_1$  принимает наименьшее значение среди всех функций, равных единице на  $S_0 \cap {}^*O_1$  и нулю на  $S_0 \cap {}^*O_2$ . Тогда функцию  $u$  всегда можно выбрать из семейства

$$\{e({}^*O_1, {}^*O_2) \mid O_1, O_2 \in \pi, O_1 \cap O_2 = \emptyset\}.$$

Такой набор функций  $u$  называется *разделяющим семейством* для  $\mathcal{E}$  и  $\pi$ . Заметим, что согласно предложению 5.3.5 каждая функция  $e({}^*O_1, {}^*O_2)$  принимает значения только между нулем и единицей.

Пусть  $\xi = \xi_{\Delta t}$  — время жизни процесса  $X$ , т. е.

$$\xi(\omega) = \inf \{ {}^\circ t \mid X(\omega, t) \notin \bar{S}_0 \},$$

где  $\bar{S}_0 = S_0 \cap Ns({}^*Y)$ .

**5.5.2. Лемма.** Пусть форма  $\mathcal{E}$  разделяет компакты, и пусть  $\mathcal{F}$  — разделяющее семейство функций. Если у траектории  $X(\omega, \cdot)$  при некотором  $t < \xi(\omega)$  не существует правого или левого  $S$ -предела, то же самое справедливо и для  $u(X(\omega, \cdot))$  при некотором  $u \in \mathcal{F}$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $\omega \in \Omega$  и  $t \in \mathbb{R}_+, t < \xi(\omega)$ . Пусть дана такая последовательность  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  точек из  $T$ , что стандартные части  ${}^\circ t_n$ , строго возрастаая, стремятся к  $t$ . Прежде всего покажем, что последовательность

$$\{ {}^\circ X(\omega, t_n) \}_{n \in \mathbb{N}}$$

имеет предельную точку.

Пусть это не так; тогда для любого  $y \in Y$  найдется такая окрестность  $O_y$  и такое число  $n_y \in \mathbb{N}$ , что

$${}^\circ X(\omega, t_n) \notin O_y$$

при  $n \geq n_y$ . Поскольку пространство  $Y$  регулярно, существует окрестность  $G_y$  точки  $y$ , замыкание  $\bar{G}_y$  которой содержится в  $O_y$ , и, следовательно,

$$X(\omega, t_n) \notin {}^*G_y$$

при  $n \geq n_y$ . Продолжим последовательность  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  до внутренней последовательности  $(t_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$  элементов множества  $T$ , строго меньших, чем  $t$ , и рассмотрим множество

$$A_y = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \leq n_y \text{ или } X(\omega, t_n) \notin {}^*G_y\}.$$

Это множество внутреннее и содержит всё  $\mathbb{N}$ ; значит, найдется такое  $\eta_y \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что все  $n \leq \eta_y$  принадлежат множеству  $A_y$ . По принципу насыщения найдется бесконечно большое  $\eta$ , меньшее, чем все  $\eta_y$ ,  $y \in Y$ . Но тогда

$$X(\omega, t_\eta) \notin {}^*G_y$$

для всех  $y \in Y$ . Это означает, что точка  $X(\omega, t_\eta)$  не является околостандартной — в противоречие с предположением  $t < \zeta(\omega)$ .

Пусть  $x$  — предельная точка последовательности  $\{X(\omega, t_n)\}$ . Если  $x$  не является левым  $S$ -пределом траектории  $X(\omega, \cdot)$  в точке  $t$ , то должна существовать другая последовательность  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , для которой  ${}^\circ s_n$ , строго возрастаая, стремятся к  $t$ , и  $x$  не является предельной точкой для  $\{X(\omega, s_n)\}$ . Повторяя приведенные выше рассуждения, мы видим, что последовательность  $\{X(\omega, s_n)\}$  должна иметь предельную точку  $y$ . Выберем функцию  $u \in \mathcal{F}$ , равную 1 в окрестности точки  $x$  и равную 0 в окрестности точки  $y$ . Очевидно, траектория  $u(X(\omega, \cdot))$  не имеет левого  $S$ -предела в точке  $t$ . Тем самым доказано утверждение леммы для левых  $S$ -пределов; доказательство для правых  $S$ -пределов аналогично.  $\square$

Воспользуемся леммой 5.5.2, а также теоремой Фукусимы о разложении (теорема 5.3.9), и покажем, что если форма  $\mathcal{E}$  разделяет компакты, то соответствующий ей марковский процесс  $X$  удовлетворяет условию 5.4.13(i). Напомним, что для  $\delta \in T$  подось  $T_\delta$  определяется как

$$T_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\};$$

процесс  $X^{(\delta)}$  есть ограничение  $X \upharpoonright T_\delta$ ; время жизни  $\zeta_\delta$  процесса  $X^{(\delta)}$  — это

$$\zeta_\delta(\omega) = \inf \{ {}^\circ t \mid X^{(\delta)}(\omega, t) \notin \bar{S}_0 \}.$$

**5.5.3. Предложение.** Пусть  $\mathcal{E}$  — нормальная форма Дирихле, разделяющая компакты. Тогда существует такое  $\delta_0 \approx 0$  и такое исключительное множество  $A_0$ , что для всех  $s_i \in \bar{S}_0 - A_0$  и всех бесконечно малых  $\delta \geq \delta_0$  процесс  $X^{(\delta)}$  имеет левые и правые  $S$ -пределы при всех  $t < \zeta_\delta$  с  $L(P_i)$ -вероятностью 1.

*Доказательство.* Чтобы найти  $\delta_0$ , зафиксируем разделяющее семейство  $\mathcal{F}$  для формы  $\mathcal{E}$ . Поскольку для всех  $u \in \mathcal{F}$

$$^{\circ}\mathcal{E}(u, u) < \infty,$$

мы можем найти такое  $\delta_u \approx 0$ , что  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\delta)}]$  при всех бесконечно малых  $\delta \geq \delta_u$ . По принципу насыщения найдется  $\delta_0 \approx 0$ , большее, чем все  $\delta_u$ ,  $u \in \mathcal{F}$ .

Переходя к множеству  $A_0$ , заметим, что в силу леммы 5.5.2 и счетности семейства  $\mathcal{F}$  достаточно показать, что для любого  $u \in \mathcal{F}$  найдется такое исключительное множество  $A$ , что для всех  $s_i \in S_0 - A$  процесс  $u(X^{(\delta_0)})$  имеет левые и правые  $S$ -пределы  $L(P_i)$ -почти наверное. Мы тогда могли бы взять в качестве  $A_0$  объединение всех множеств  $A$ . Поскольку процесс  $u(X^{(\delta_0)})$  принимает значения между нулем и единицей, отсутствие односторонних  $S$ -пределов может объясняться только одной причиной — слишком частыми колебаниями. Чтобы следить за колебаниями, используем марковские моменты.

Для двух рациональных чисел  $p, q$ ,  $0 \leq p < q \leq 1$ , определим последовательность  $(\tau_{(p,q)}^n)$  марковских моментов следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_{(p,q)}^0 &= \min \{t \in T_{\delta_0} \mid u(X^{(\delta_0)}(\omega, t)) \leq p\}, \\ \tau_{(p,q)}^{2n} &= \min \{t \in T_{\delta_0} \mid t > \tau_{(p,q)}^{2n-1}(\omega) \wedge u(X^{(\delta_0)}(\omega, t)) \leq p\}, \\ \tau_{(p,q)}^{2n+1} &= \min \{t \in T_{\delta_0} \mid t < \tau_{(p,q)}^{2n}(\omega) \wedge u(X^{(\delta_0)}(\omega, t)) \geq q\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим следующее подмножество  $A \subset S_0$ :

$$A = \bigcup_{(p,q)} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{s_i \mid P_i \{\tau_{(p,q)}^n \leq m\} \geq 1/k\}.$$

Если процесс  $X^{(\delta_0)}$  не имеет левых или правых  $S$ -пределов с положительной  $L(P_i)$ -вероятностью, то элемент  $s_i$  обязан принадлежать множеству  $A$ . Мы должны показать, что множество  $A$  исключительное.

Согласно лемме 5.4.5

$$\begin{aligned}& \{\omega \mid \exists t \in T_{\delta_0}^1 (X(\omega, t) \in A)\} = \\ &= \bigcup_{(p,q)} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta_0}^1 (P_{X^{(\delta_0)}(\omega, t)} \{\tau_{(p,q)}^n \leq m\} \geq \frac{1}{k}) \right\}.\end{aligned}$$

Если множество  $A$  не является  $\delta_0$ -исключительным, должна найтись такая пара  $(p, q)$  рациональных чисел, такие целые числа  $m, k \in \mathbb{N}$  и такое бесконечно большое  $\eta \in {}^*\mathbb{N}$ , что

$$L(P) \left\{ \omega \mid \exists t \in T_{\delta_0}^1 (P_{X^{(\delta_0)}(\omega, t)} \{\tau_{(p,q)}^{\eta} \leq m\} \geq \frac{1}{k}) \right\} > 0;$$

это означает, что с положительной  $L(P)$ -вероятностью процесс  $u(X^{(\delta_0)})$  сделает до момента времени  $t+1$  не менее чем  $\eta$  прыжков от  $p$  к  $q$  и обратно.

Поскольку  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\delta_0)}]$ , теорема Фукусимы о разложении утверждает, что

$$u(X^{(\delta_0)}) = N + M$$

где  $N$  —  $L(P)$ -почти наверное  $S$ -непрерывный процесс, а  $M$  —  $\lambda^2$ -мартингал. Если процесс  $u(X^{(\delta_0)})$  прыгает  $\eta$  раз между  $p$  и  $q$  до момента времени  $t = m+1$ , должен найтись такой бесконечно малый интервал, на котором он делает бесконечно большое число прыжков. Процесс  $N$ , будучи  $S$ -непрерывным, почти постоянен на бесконечно малом отрезке; значит, прыжки должен совершать процесс  $M$ . Но тогда с положительной вероятностью процесс  $M$  должен иметь бесконечно большую квадратическую вариацию, что противоречит тому, что он является  $\lambda^2$ -мартингалом.

Мы заключаем, что множество  $A$  является  $\delta_0$ -исключительным, что и доказывает наше предложение.  $\square$

### В. Формы с околостандартными носителями

Пусть  $A$  и  $B$  — два непересекающихся внутренних подмножества пространства  $S_0$ , и  $f: A \cup B \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — функция, равная единице на  $A$  и нулю на  $B$ . Мы будем обозначать

$$(1) \quad e(A, B) = e_1(f)$$

равновесный потенциал, определенный в формуле (5.3.32). Обозначение  $e_A$  для  $e(A, \emptyset)$  уже вводилось в § 5.3. Напомним, что  $|\cdot|_1$  обозначает норму, порожденную формой  $\mathcal{E}_1$ , т. е.

$$|u|_1 = \mathcal{E}_1(u, u)^{1/2}.$$

Следующие условия на  $\mathcal{E}$  влекут за собой 5.4.13(ii).

**5.5.4. Определение.** Будем говорить, что форма Дирихле  $\mathcal{E}$  имеет околостандартный носитель<sup>1)</sup>, если существует счетное семейство  $\mathcal{C}$ , а также неубывающая последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , состоящие из внутренних подмножеств множества  $S_0$ , для которых

(i) множества  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n - \bar{S}_0$  и  $\bar{S}_0 - \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$  оба исключительны;

(ii) для любого  $C \in \mathcal{C}$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} |e(C \cap B_n, S_0 - B_m) - e_C|_1 = 0.$$

<sup>1)</sup> В оригинале «nearstandardly concentrated». — Прим. ред.

**Замечание.** Первое из условий утверждает что-то вроде того, что

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bar{S}_0 \subset \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\},$$

однако по техническим причинам более удобно слегка ослабить это условие и привести его в том виде, как в нашем определении. Условие 5.5.4(ii) часто бывает трудно проверить; поэтому ниже в этом параграфе мы приведем такие его модификации, с которыми легче иметь дело.

**5.5.5. Лемма.** Пусть  $X$  — марковский процесс, соответствующий форме Дирихле  $\mathcal{E}$  с околостандартным носителем, и пусть  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Тогда множество

$$D = \{s_i \in S_0 - B \mid \overline{L(P_i)} \{\exists t \in T^{\text{fin}} (X(t) \in \bar{S}_0)\} > 0\}$$

является исключительным.

*Доказательство.* Черта над мерой  $L(P_i)$  обозначает связанную с ней внешнюю меру; мы используем в определении множества  $D$  внешнюю меру потому, что нет очевидных причин, почему бы множество

$$\{\exists t \in T^{\text{fin}} (X(t) \in \bar{S}_0)\}$$

оказалось  $L(P_i)$ -измеримым. Однако, поскольку множество  $\bar{S}_0 - \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$  исключительно, достаточно показать, что для любого  $C \in \mathcal{C}$  множество

$$D^C = \{s_i \in S_0 - B \mid L(P_i) \{\exists t \in T^{\text{fin}} (X(t) \in C)\} > 0\}$$

исключительно.

Выберем две такие возрастающие последовательности  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , чтобы

$$\delta_k \equiv |e(B_{n_k} \cap C, S_0 - B_{m_k}) - e_C| < 2^{-k},$$

и положим

$$D_k^C = \{s_i \in S_0 - B_{m_k} \mid e_C(s_i) \geq \sqrt{\delta_k}\}.$$

Заметим, что если  $s_i \in D_k^C$ , то

$$e_C(s_i) - e(B_{n_k} \cap C, S_0 - B_{m_k})(s_i) \geq \sqrt{\delta_k},$$

и, следовательно, согласно предложению 5.3.6,

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & P\{\omega | \exists t \leq 1 (X(\omega, t) \in D_k^C)\} \leq \\
 & \leq P\{\omega | \exists t \leq 1 (|e_C(X(\omega, t)) - e(B_{n_k} \cap C, S_0 - \\
 & \quad - B_{m_k})(X(\omega, t))| \geq \sqrt{\delta_k})\} \leq \\
 & \leq \frac{2(1 + \Delta t)^{1/\Delta t}}{\delta_k} \mathcal{J}_1(e_C - e(B_{n_k} \cap C, S_0 - B_{m_k}), \\
 & \quad e_C - e(B_{n_k} \cap C, S_0 - B_{m_k})) = \\
 & = 2(1 + \Delta t)^{1/\Delta t} \delta_k \approx 2e \cdot \delta_k.
 \end{aligned}$$

Для каждого  $K \in \mathbb{N}$  имеет место включение  $D^C \subset \bigcup_{k=K}^{\infty} D_k^C$ . Согласно оценке (2) отсюда следует, что для всех  $K \in \mathbb{N}$

$$P\{\omega | \exists t \leq 1 (X(\omega, t) \in D^C)\} \leq 2e \sum_{k=K}^{\infty} \delta_k \leq e \cdot 2^{-K+2}$$

(так как  $\delta_k < 2^{-k}$ ), и, значит, множество  $D^C$  исключительно.  $\square$

**5.5.6. Предложение.** Если форма  $\mathcal{J}$  имеет околостандартный носитель, то существует такое исключительное множество  $A_1$ , что для всех  $s_i \in \bar{S}_0 - A_1$

$$L(P_i)\{\omega | \exists t \in T^{\text{fin}} ({}^\circ t > \zeta(\omega) \wedge X(\omega, t) \in \bar{S}_0)\} = 0.$$

*Доказательство.* Пусть  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность из определения 5.5.4, и  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Возьмем в качестве  $A_1$  произвольное собственно исключительное множество, включающее множество  $B - S_0$  и множество  $D$  из леммы 5.5.5.

Возьмем внутреннюю неубывающую последовательность  $(B_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ , продолжающую последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , и определим

$$\sigma_n(\omega) = \min\{t \in T | X(\omega, t) \notin B_n\}.$$

Если

$$\sigma(\omega) = \inf\{{}^\circ t | X(\omega, t) \notin B\},$$

то, как нетрудно проверить,

$$\sigma(\omega) = \sup\{{}^\circ \sigma_n(\omega) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Для каждого  $s_i \in \bar{S}_0 - A_1$  найдется такое  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что

$$(3) \quad \sigma(\omega) = {}^\circ \sigma_\eta(\omega) \quad L(P_i)\text{-почти наверное.}$$

Из леммы 5.5.5 следует, что  $\bar{S}_0 - B \subset D \subset A_1$ , а по определению множества  $A_1$  имеем  $B - \bar{S}_0 \subset A_1$ . Так как  $A_1$  — собственно

исключительное, и  $s_i \notin A_1$ , имеем

$$(4) \quad \sigma(\omega) = \zeta(\omega) \quad L(P_i)\text{-почти наверное.}$$

Объединяя формулы (3) и (4), получаем

$$(5) \quad {}^\circ\sigma_\eta(\omega) = \zeta(\omega) \quad L(P_i)\text{-почти наверное.}$$

Поскольку  $s_i \notin A_1$ ,  $A_1$  содержит  $D$  и является собственным исключительным, справедливо равенство

$$L(P_i) \{X(\omega, \sigma_\eta(\omega)) \in D\} = 0,$$

и, следовательно, по определению множества  $D$ ,

$$L(P_i) \{\exists t \in T^{\text{fin}} (t > \sigma_\eta(\omega) \wedge X(\omega, t) \in \bar{S}_0)\} = 0.$$

Теперь предложение следует из формулы (5).  $\square$

### С. Квазинепрерывные продолжения

Изучение условия 5.4.13(iii) мы начнем с введения понятия квазинепрерывности. Внутренняя функция  $f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , определенная на подмножестве  $D_f \subset S_0$ , называется *квазинепрерывной*, если существует такое исключительное множество  $A_1$ , что для всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 \cap D_f \cap (S_0 - A_1)$  справедливо  $f(s_i) \approx f(s_j)$ .

**Замечание.** Напомним, что для внутренней функции  $f: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  следующие два определения непрерывности в точке  $x \in Y$  совпадают:

(i) Для всех  $y, z \in S_0$ ,  $y \approx x, z \approx x$  имеем  $f(y) \approx f(z)$ .

(ii) Для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такая окрестность  $O$  точки  $x$ , что  $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$  для всех  $y, z \in {}^*O$ .

Если же, как это сделано выше, мы сужаем область непрерывности до внешнего множества  $\bar{S}_0 - A_1$ , указанная эквивалентность теряется. Ясно, что из определения (ii) по-прежнему следует определение (i), но, как легко показать с помощью примеров, обратное не верно.

Для внутреннего подмножества  $A \subset S_0$  и  $\delta \in T$  обозначим

$$\sigma_A^\delta(\omega) = \min \{t \in T_\delta \mid X^{(\delta)}(\omega, t) \in A\}.$$

Через  $e_a^{(\delta)}(f)$  будем обозначать равновесный потенциал функции  $f$  относительно формы  $\mathcal{E}_a^{(\delta)}$ , т. е.

$$e_a^{(\delta)}(f)(s_i) = E_i \left( (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_{D_f}^\delta/\delta} \cdot f(X^{(\delta)}(\sigma_{D_f}^\delta)) \right).$$

Напомним, что если  $\delta = \Delta t$ , мы вместо  $e_a^{(\delta)}(f)$  сокращенно пишем  $e_a(f)$ . Будем говорить, что внутренняя функция  $f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  имеет *конечную энергию*, если

$$(6) \quad {}^\circ\mathcal{E}_1(e_1(f), e_1(f)) < \infty.$$



Заметим, что если условие (6) выполнено, то

$$^{\circ}\mathcal{E}_{\alpha}^{(\delta)}(e_{\alpha}^{(\delta)}(f), e_{\alpha}^{(\delta)}(f)) < \infty$$

для всех конечных положительных  $\alpha$  и  $\delta$ . Внутреннее множество  $A \subset S_0$  имеет *конечную энергию*, если

$$^{\circ}\mathcal{E}_1(e_1(A), e_1(A)) < \infty.$$

**5.5.7. Определение.** Говорят, что форма Дирихле  $\mathcal{E}$  порождает квазинепрерывные продолжения, если существует такое  $\delta_1 \approx 0$ , что для всех бесконечно малых  $\delta \geq \delta_1$  и всех квазинепрерывных  $S$ -ограниченных внутренних функций  $f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  с конечной энергией потенциал  $e_{\alpha}^{(\delta)}(f)$  квазинепрерывен при любом неотрицательном действительном  $\alpha$ .

Мы уже отмечали в § 5.3, что поскольку

$$e_{\alpha}(A)(s_i) = E_i((1 + \alpha \Delta t)^{-\sigma_A/\Delta t}),$$

функция

$$\alpha \mapsto {}^{\circ}e_{\alpha}(A)(s_i)$$

служит преобразованием Лапласа меры  $\lambda_i$  на  $\mathbb{R}$ , определяемой равенством

$$\lambda_i(C) = L(P_i) \{ \omega | {}^{\circ}\sigma_A(\omega) \in C \}.$$

Если функции  $s_i \mapsto e_{\alpha}(A)(s_i)$  квазинепрерывны, то для всех бесконечно близких  $s_i, s_j$  вне исключительного множества распределение времени первого попадания в множество  $A$  для частиц, выходящих из  $s_i$ , будет таким же, как для частиц, выходящих из  $s_j$ . Следовательно, квазинепрерывность равновесных потенциалов влечет за собой определенную равномерность в будущем поведении процесса. Но, чтобы доказать условие 5.4.13(iii), нужно расширить рамки этого наблюдения и принять во внимание также и то, что происходит после первого попадания процесса  $X$  в множество  $A$ .

Если дана конечная последовательность  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  внутренних множеств и число  $j \leq n$ , обозначим

$$A_{\leq j} = (A_1, A_2, \dots, A_j),$$

$$A_{\geq j} = (A_j, A_{j+1}, \dots, A_n).$$

Определим внутренний марковский момент  $\sigma_A$  индукцией по длине  $n$  последовательности  $A$ : если  $A = (A_1)$  имеет длину 1, то  $\sigma_A$  — это просто момент  $\sigma_{A_1}$  первого достижения множества  $A_1$ , т. е.

$$\sigma_A(\omega) = \min \{ t \in T | X(\omega, t) \in A_1 \}.$$

Если  $\sigma_B$  уже определено для всех последовательностей длины, меньшей, чем  $n$ , то

$$\sigma_A(\omega) = \min \{t \in T \mid t \geq \sigma_{A \leq n-1}(\omega) \wedge X(\omega, t) \in A_n\}.$$

Если мы применяем это определение к ограничению  $X^{(\delta)}$  процесса  $X$ , получающийся марковский момент остановки будем обозначать  $\sigma_A^{(\delta)}$ .

Для любой конечной последовательности  $A$  внутренних множеств определим «обобщенный равновесный потенциал»  $e_\alpha^{(\delta)}(A)$ , положив

$$(7) \quad e_\alpha^{(\delta)}(A)(s_i) = E_i((1 + \alpha\delta)^{-\sigma_A^{(\delta)}/\delta}).$$

**5.5.8. Лемма.** Для любой конечной последовательности  $A$  внутренних подмножеств пространства  $S_0$ , любых положительных  $\alpha$  и  $\delta$  и любого  $j$ , меньшего, чем длина последовательности  $A$ , имеем

$$(8) \quad e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j}) = e_\alpha^{(\delta)}(e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j+1}) \upharpoonright A_j)$$

т. е.  $e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j})$  — это равновесный потенциал (относительно формы  $\mathcal{E}_\alpha^{(\delta)}$ ), ограничения на  $A_j$  функции  $e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j+1})$ . В частности, функция

$$(9) \quad j \mapsto \mathcal{E}_\alpha^{(\delta)}(e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j}), e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j}))$$

неубывающая.

*Доказательство.* То, что функция (9) — неубывающая, следует из (8) и из предложения 5.3.5. Чтобы доказать равенство (8), заметим, что в силу марковости процесса  $X$

$$\begin{aligned} e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j})(s_i) &= E_i[(1 + \alpha\delta)^{-\sigma_{A_{\geq j}}^{(\delta)}}] = \\ &= E_i[(1 + \alpha\delta)^{-\sigma_{A_j}^{(\delta)}/\delta} (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_{A_{\geq j}}^{(\delta)} - \sigma_{A_j}^{(\delta)}}] = \\ &= E_i[(1 + \alpha\delta)^{-\sigma_{A_j}^{(\delta)}/\delta} \cdot e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j+1})(X(\sigma_{A_j}^{(\delta)}))] = \\ &= e_\alpha^{(\delta)}(e_\alpha^{(\delta)}(A_{\geq j+1}) \upharpoonright A_j)(s_i). \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**5.5.9. Следствие.** Предположим, что форма  $\mathcal{E}$  порождает квазинепрерывные продолжения и  $A = (A_1, \dots, A_n)$  — конечная последовательность внутренних подмножеств пространства  $S_0$ , причем  $A_n$  имеет конечную энергию. Тогда для всех конечных положительных  $\alpha$  и  $\delta$  функция  $e_\alpha^{(\delta)}(A)$  квазинепрерывна и имеет конечную энергию.

*Доказательство.* Используя индукцию по  $k$  и лемму 5.5.8, доказываем это утверждение для всех  $A_{\geq n-k}$ ,  $0 \leq k < n$ .  $\square$

Теперь все готово к получению условия 5.4.13(iii).

**5.5.10. Предложение.** Пусть  $\mathcal{E}$  — нормальная форма Дирихле с окоlostандартным носителем, разделяющая компакты и порождающая квазинепрерывные продолжения. Тогда существует такое собственно исключительное множество  $A$  дефектов процесса  $X$ , что если  $x$  — модифицированная стандартная часть процесса  $X$  относительно множества  $A$ , то для всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$ , любого  $t \in \mathbb{R}_+$  и любого борелевского подмножества  $B \subset Y$

$$L(P_i) \{ \omega \mid x(\omega, t) \in B \} = L(P_j) \{ \omega \mid x(\omega, t) \in B \}.$$

*Доказательство.* Прежде всего построим исключительное множество  $A$ . Пусть множества  $A_0$  и  $A_1$  — такие, как в предложениях 5.5.3 и 5.5.6 соответственно. Пусть  $\pi$  — счетное семейство открытых множеств из определения 5.5.1; заметим, что все множества  $O \in \pi$  (точнее, множества  $*O \cap S_0$ ) имеют конечную энергию. Пусть  $\Sigma$  — множество всех конечных последовательностей вида

$$\mathcal{P} = (*O_1 \cap S_0, *O_2 \cap S_0, *O_1 \cap S_0, *O_2 \cap S_0, \dots, *O_1 \cap S_0, *O_2 \cap S_0),$$

где  $O_1, O_2 \in \pi$ . Зафиксируем бесконечно малое  $\delta$ , большее, чем  $\delta_0$  из предложения 5.5.3 и  $\delta_1$  из определения 5.5.7. Пусть

$$\mathcal{F} = \{ e_q^{(\delta)}(\mathcal{P}) \mid q \in \mathbb{Q}_+, \mathcal{P} \in \Sigma \}.$$

Семейство  $\mathcal{F}$  счетно; поэтому, согласно следствию 5.5.9, существует такое исключительное множество  $A_2$ , что все функции из  $\mathcal{F}$   $S$ -непрерывны вне  $A_2$ . Возьмем в качестве  $A$  собственно исключительное множество, содержащее  $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ .

Функции  $\alpha \mapsto e_\alpha^{(\delta)}(\mathcal{P})$ , очевидно,  $S$ -непрерывны, поэтому

$$(10) \quad {}^\circ E_i \left( (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_\mathcal{P}^\delta/\delta} \right) = {}^\circ E_j \left( (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_\mathcal{P}^\delta/\delta} \right)$$

для всех бесконечно близких  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$ . Поскольку

$${}^\circ E_i \left( (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_\mathcal{P}^\delta/\delta} \right) = \int e^{-\alpha \cdot \sigma_\mathcal{P}^\delta} dL(P_i)$$

для всех  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , функция

$$\alpha \mapsto {}^\circ E_i \left( (1 + \alpha\delta)^{-\sigma_\mathcal{P}^\delta/\delta} \right)$$

служит преобразованием Лапласа распределения случайной величины  ${}^\circ \sigma_\mathcal{P}^\delta$  относительно меры  $L(P_i)$ . Поэтому из равенства

(10) следует, что для всех  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$ ,  $s_i \approx s_j$  равенство

$$(11) \quad \begin{aligned} L(P_i) \{ \omega | {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq m}^\delta(\omega) \leq t < {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq m+1}^\delta(\omega) \} = \\ = L(P_j) \{ \omega | {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq m}^\delta(\omega) \leq t < {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq m+1}^\delta(\omega) \} \end{aligned}$$

справедливо для всех  $t \in \mathbb{R}_+$ , всех  $\mathcal{P} \in \Sigma$  и  $m$ , меньших, чем длина последовательности  $\mathcal{P}$ .

Предположим, что наше утверждение не верно. Это значит, что найдутся такие  $s_i, s_j \in \bar{S}_0 - A$ ,  $s_i \approx s_j$ , такое  $t \in \mathbb{R}_+$  и такое борелевское множество  $B$ , что

$$(12) \quad L(P_i) \{ \omega | x(\omega, t) \in B \} - L(P_j) \{ \omega | x(\omega, t) \in B \} = \varepsilon > 0.$$

Выберем столь большое  $\tilde{t} \approx t$ , чтобы  $L(P_i)$ - и  $L(P_j)$ -почти на-верное выполнялось равенство  ${}^\circ X(\omega, \tilde{t}) = x(\omega, t)$ ; это возможно, так как  $A_0, A_1 \subset A$ . Меры  $\mu_i$  и  $\mu_j$ , определяемые равенствами

$$\mu_i(C) = L(P_i) \{ \omega | {}^\circ X(\omega, \tilde{t}) \in C \}, \quad \mu_j(C) = L(P_j) \{ \omega | {}^\circ X(\omega, \tilde{t}) \in C \},$$

являются радоновскими мерами на  $Y$ , и, следовательно, существует такой компакт  $K \subset B$ , что

$$(13) \quad \mu_i(K) > \mu_j(K) + 3\varepsilon/4.$$

Можно найти также такой компакт  $K' \subset Y - K$ , что

$$\mu_i((Y - K) - K') < \varepsilon/4, \quad \mu_j((Y - K) - K') < \varepsilon/4.$$

Поскольку форма  $\mathcal{E}$  разделяет компакты, найдутся два непересекающихся открытых множества  $O, O' \in \pi$ ,  $K \subset O$ ,  $K' \subset O'$ . Пусть число  $m$  столь велико, что обе вероятности  $L(P_i)$  и  $L(P_j)$  того, что до момента времени  $t+1$  траектория  $m$  раз прыгнет из множества  $*O$  в множество  $*O'$  и обратно, меньше, чем  $\varepsilon/4$ . Пусть последовательность

$$\mathcal{P} = (*O \cap S_0, *O' \cap S_0, *O \cap S_0, \dots, *O \cap S_0, *O' \cap S_0)$$

имеет длину  $2m$ . Тогда

$$\begin{aligned} & L(P_j) \{ \omega | x(\omega, t) \in K \} > \\ & > L(P_j) \left( \bigcup_{n < m} \{ \omega | {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq 2n+1}^\delta(\omega) \leq t < {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq 2n+2}^\delta(\omega) \} \right) - \frac{2\varepsilon}{4} = \\ & = L(P_i) \left( \bigcup_{n < m} \{ \omega | {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq 2n+1}^\delta(\omega) \leq t < {}^\circ\sigma_{\mathcal{P} \leq 2n+2}^\delta(\omega) \} \right) - \frac{2\varepsilon}{4} > \\ & > L(P_i) \{ \omega | x(\omega, t) \in K \} - \frac{3\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (13). Предложение доказано.  $\square$

**Замечание.** Чтобы доказать предложение 5.5.10, вовсе не обязательно, чтобы форма  $\mathcal{E}$  порождала квазинепрерывные продолжения; все, что требуется — это чтобы функции  $e_q^{(d)}(\mathcal{P})$  были квазинепрерывны.

Теперь можно объединить результаты этого параграфа и теоремы 5.4.17.

**5.5.11. Теорема.** *Предположим, что  $S_0$  — гиперконечное подмножество множества  $*Y$  для некоторого регулярного почти  $\sigma$ -компактного пространства  $Y$ , удовлетворяющего второй аксиоме счетности. Пусть  $\mathcal{E}$  — нормальная форма Дирихле на  $S_0$ , разделяющая компакты, имеющая околостандартный носитель и порождающая квазинепрерывные продолжения. Тогда соответствующий гиперконечный марковский процесс имеет модифицированную стандартную часть, которая является строго марковским процессом.*

**Доказательство.** Согласно предложениям 5.5.3, 5.5.6 и 5.5.10, гиперконечный марковский процесс имеет исключительное множество дефектов, так что утверждение следует из теоремы 5.4.17.  $\square$

#### *D. Регулярные формы*

Условия теоремы 5.5.11 ни в малейшей степени не являются каноническими; существуют и другие столь же разумные возможности. До сих пор мы старались выбирать такие предположения, которые бы скорее упрощали теорию, чем были особенно удобны для приложений. Сейчас мы переформулируем наши предположения таким образом, чтобы их было легче проверять.

Сначала — небольшое наблюдение, доказательство которого мы предоставляем читателю. Говорят, что форма  $\mathcal{E}$  разделяет точки, если справедливо определение 5.5.1, примененное только к одноточечным подмножествам  $K_1 = \{x\}$  и  $K_2 = \{y\}$ . Оказывается, если форма  $\mathcal{E}$  разделяет точки, она разделяет также и компакты. Следовательно, достаточно проверять, что рассматриваемые формы разделяют точки.

Как мы уже отмечали, не всегда легко проверить, что форма имеет околостандартный носитель; проблема в том, чтобы доказать, что

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \|e(C \cap B_n, S_0 - B_m) - e_C\|_1 = 0.$$

Это условие нужно для того, чтобы показать, что процесс не возвращается из «бесконечности». Мы укажем, как можно обойти эти трудности, превратив большее число неколостандартных точек в ловушки.

Пусть  $\tilde{S}_0 \subset S_0$  — внутреннее подмножество, и  $\tau$  — момент его первого достижения:

$$\tau(\omega) = \min\{t \in T \mid X(\omega, t) \in \tilde{S}_0\}.$$

Определим процесс  $X$ , принимающий значения в множестве  $\tilde{S} = \tilde{S}_0 \cup \{s_0\}$ :

$$(15) \quad \tilde{X}(\omega, t) = \begin{cases} X(\omega, t) & \text{при } t < \tau(\omega), \\ s_0 & \text{при } t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Согласно формуле Бёрлинга — Дени (лемма 5.3.1) соответствующая форма Дирихле  $\tilde{\mathcal{E}}$  задается равенством

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(u, u) = & \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{\substack{s_i, s_j \in \tilde{S}_0 \\ i < j}} (u(i) - u(j))^2 q_{ij} m_i + \right. \\ & \left. + \sum_{s_i \in \tilde{S}_0} u(i)^2 m_i \sum_{s_j \in S - \tilde{S}_0} q_{ij} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\sim$  скалярное произведение на  $(\tilde{S}_0, m)$ , т. е.

$$\langle u, v \rangle^\sim = \sum_{s_i \in \tilde{S}_0} u(i) v(i) m(i),$$

и пусть

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u, v) = \tilde{\mathcal{E}}(u, v) + \alpha \cdot \langle u, \tilde{v} \rangle.$$

Если  $f: D_f \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренняя функция, определенная на подмножестве  $D_f \subset \tilde{S}_0$ , пусть  $\tilde{f}: D_f \cup (S_0 - \tilde{S}_0) \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  обозначает внутреннюю функцию, равную

$$\tilde{f}(s_i) = \begin{cases} f(s_i) & \text{при } s_i \in D_f, \\ 0 & \text{при } s_i \in S_0 - \tilde{S}_0. \end{cases}$$

Заметим, что если  $\tilde{e}_\alpha(f)$  обозначает равновесный потенциал функции  $f$  относительно формы  $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha$ , то

$$(16) \quad \overline{\tilde{e}_\alpha(f)} = e_\alpha(\tilde{f}).$$

Для любой внутренней функции  $u: \tilde{S}_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$

$$(17) \quad \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(u, u) = \mathcal{E}_\alpha(\tilde{u}, \tilde{u}).$$

Следующая лемма — это небольшая вариация определения форм с околостандартным носителем.

**5.5.12. Лемма.** Пусть  $\mathcal{E}$  — гиперконечная форма Дирихле. Предположим, что существует такое счетное семейство  $\mathcal{C}$  и та-

кая неубывающая последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , состоящие из внутренних подмножеств множества  $S_0$ , что множества  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n - \bar{S}_0$  и  $\bar{S}_0 - \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$  являются исключительными, и для любого  $C \in \mathcal{C}$  выполнены два условия:

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ |e_{C \cap B_n}|_1 = {}^\circ |e_C|_1 < \infty,$$

$$(19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1 = {}^\circ |e_{C \cap B_n}|_1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда форма  $\mathcal{E}$  имеет околостандартный носитель.

*Доказательство.* Напомним, что если функция  $\omega: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  совпадает с функцией  $f$  на  $D_f$ , то согласно (5.3.30)

$$\mathcal{E}_1(e_1(f) - \omega, e_1(f) - \omega) = \mathcal{E}_1(\omega, \omega) - \mathcal{E}_1(e_1(f), e_1(f)).$$

Используя это равенство дважды, получаем

$$\begin{aligned} & |e(C \cap B_n, S_0 - B_m) - e_C|_1 \leq \\ & \leq |e(C \cap B_n, S_0 - B_m) - e_{C \cap B_n}|_1 + |e_{C \cap B_n} - e_C|_1 = \\ & = (|e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1^2 - |e_{C \cap B_n}|_1^2)^{1/2} + (|e_C|_1^2 - |e_{C \cap B_n}|_1^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие 5.5.4(ii) следует из (18) и (19).  $\square$

Последовательности  $(|e_{C \cap B_n}|_1)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(|e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1)_{m \in \mathbb{N}}$  монотонны, поэтому пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ |e_{C \cap B_n}|_1 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1$$

всегда существуют. Проблема в том, что они могут быть бесконечными, либо, будучи конечными, не удовлетворять условиям (18), (19). Мы покажем, как при условии конечности этих пределов вторая проблема может быть решена с помощью ограничения формы на подходящее подмножество  $\bar{S}_0 \subset S_0$ , как это делалось выше.

**5.5.13. Определение.** Форма Дирихле  $\mathcal{E}$  называется *локально конечной*, если существует такое счетное семейство  $\mathcal{C}$  и такая неубывающая последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , состоящие из внутренних подмножеств множества  $S_0$ , что

(i) множества  $\bar{S}_0 \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  и  $\bar{S}_0 - \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$  являются исключительными;

(ii) для каждого  $C \in \mathcal{C}$  справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1 < \infty.$$

**5.5.14. Лемма.** Если  $\mathcal{E}$  — локально конечная форма Дирихле, то найдется такое внутреннее подмножество  $\tilde{S}_0 \subset S_0$ , что множество  $\tilde{S}_0 - \tilde{S}_0$  исключительно, и форма  $\tilde{\mathcal{E}}$  имеет околостандартный носитель.

*Доказательство.* Продолжим последовательность  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  до внутренней неубывающей последовательности  $(B_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ . Найдется такое бесконечно большое  $\mu \in {}^*\mathbb{N}$ , что для всех  $n \in \mathbb{N}$

$$(20) \quad {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_\mu)|_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1.$$

Более того, найдется такое  $\nu \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что

$$(21) \quad {}^\circ |e(C \cap B_\nu, S_0 - B_\mu)|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_\mu)|_1 = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1.$$

Возьмем в качестве  $\tilde{S}_0$  множество  $\tilde{S}_0 = B_\mu$ ; покажем, что форма  $\tilde{\mathcal{E}}$  имеет околостандартный носитель относительно семейств  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\mathcal{E}' = \{C \cap B_\nu \mid C \in \mathcal{E}\}$ . Заметим, что, поскольку множество  $\tilde{S}_0 \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  исключительно, достаточно для формы  $\tilde{\mathcal{E}}$  доказать аналоги условий (18) и (19). Пусть  $|\cdot|_{\tilde{\mathcal{E}}}$  — норма, порожденная формой  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Используя формулы (16), (17), (20) и (21), для произвольного  $C \cap B_\nu \in \mathcal{E}'$  получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ |\tilde{e}(C \cap B_\nu) \cap B_n|_{\tilde{\mathcal{E}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_\mu)|_1 = \\ = {}^\circ |e(C \cap B_\nu, S_0 - B_\mu)|_1 = {}^\circ |\tilde{e}_{C \cap B_\nu}|_{\tilde{\mathcal{E}}} < \infty,$$

и, далее,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |\tilde{e}((C \cap B_\nu) \cap B_n, S_0 - B_m)|_{\tilde{\mathcal{E}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1 = \\ = {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_\mu)|_1 = {}^\circ |\tilde{e}_{(C \cap B_\nu) \cap B_n}|_{\tilde{\mathcal{E}}},$$

что соответствует условиям (18) и (19).  $\square$

Поскольку множество  $\tilde{S}_0 - \tilde{S}_0$  исключительно, модифицированная стандартная часть процесса  $\tilde{X}$ , порожденного формой  $\tilde{\mathcal{E}}$  из леммы 5.5.14, является совершенно адекватной версией стандартной части процесса  $X$ .

В связи с определением 5.5.13 все еще остаются некоторые трудности. В том случае, когда семейства  $(B_n)$  и  $\mathcal{E}$  выбраны,



проверка условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} {}^\circ |e(C \cap B_n, S_0 - B_m)|_1 < \infty$$

не должна составить особого труда. При этом, однако, доказательство исключительности множеств

$$\bar{S}_0 \Delta \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \quad \text{и} \quad \bar{S}_0 - \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$$

может оказаться более проблематичным. Тем не менее, если пространство  $Y$  локально компактно, обычно удастся выбрать семейства  $(B_n)$  и  $\mathcal{C}$  так, чтобы оба множества были пустыми.

**5.5.15. Предложение.** Пусть  $Y$  — локально компактное хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и пусть  $\mathcal{E}$  — гиперконечная форма Дирихле, определенная на подмножестве  $S_0 \subset {}^*Y$ . Предположим, что существует такое покрытие  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  пространства  $Y$  открытыми множествами с компактными замыканиями, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется такое  $m \in \mathbb{N}$ , что

$$\left| {}^\circ e \left( {}^*O_n \cap S_0, S_0 - \bigcup_{i=1}^m ({}^*O_i \cap S_0) \right) \right|_1 < \infty.$$

Тогда существует такое внутреннее множество  $\bar{S}_0$ , что  $\bar{S}_0 \subset \bar{S}_0 \subset S_0$  и форма  $\mathcal{E}$  имеет околостандартный носитель.

*Доказательство.* Положим  $B_n = \bigcup_{i=1}^n ({}^*O_i \cap S_0)$  и  $\mathcal{C} = \{{}^*O_n \cap S_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Поскольку

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bar{S}_0 = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\},$$

предложение следует из леммы 5.5.14.  $\square$

Наконец, рассмотрим квазинепрерывные продолжения.

**5.5.16. Лемма.** Предположим, что для любой  $S$ -ограниченной функции  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  найдется такая последовательность  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  квазинепрерывных функций, что  ${}^\circ |u - u_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда все  $S$ -ограниченные функции  $v$ , для которых  ${}^\circ \mathcal{E}_1(v, v) < \infty$ , квазинепрерывны, и форма  $\mathcal{E}$  порождает квазинепрерывные продолжения.

*Доказательство.* Если для  $S$ -ограниченной функции  $v$  справедлива оценка  ${}^\circ \mathcal{E}_1(v, v) < \infty$ , то существует такая  $S$ -ограниченная функция  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , что  $\|u - v\| \approx 0$ . Для любого  $k \in \mathbb{N}$

$$m \left\{ s_i \mid |u(s_i) - v(s_i)| > \frac{1}{k} \right\} < \frac{1}{k},$$

и, значит, это неравенство выполняется также для некоторого бесконечно большого  $k$ . Отсюда следует, что множество

$$D = \{s_i \mid u(s_i) \not\approx v(s_i)\}$$

заключено в некотором внутреннем множестве бесконечно малой меры. Согласно лемме 5.4.4(i) множество  $D$  исключительно; поэтому функция  $v$  квазинепрерывна тогда и только тогда, когда  $u$  квазинепрерывна.

Чтобы доказать квазинепрерывность функции  $u$ , прежде всего заметим, что, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$(22) \quad \mathcal{J}_1(u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - u_k) < 2^{-4k}.$$

Продолжим последовательность  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  до такой внутренней последовательности  $(u_n)_{n \leq \eta}$ ,  $\eta \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что условие (22) справедливо для всех  $k \leq \eta$ . Определим множества

$$G_k = \{s_i \in S_0 \mid |u_{k+1}(s_i) - u_k(s_i)| > 2^{-k}\}$$

и заметим, что

$$\mathcal{J}_1(e_{G_k}, e_{G_k}) \leq 2^{2k} \mathcal{J}_1(u_{k+1} - u_k, u_{k+1} - u_k) \leq 2^{-2k}.$$

Пусть

$$F_k = \bigcup_{k \leq l \leq \eta} G_l.$$

Поскольку  $|e_{F_k}|_1 \leq \left| \sum_{k \leq l \leq \eta} e_{G_l} \right|_1 \leq \sum_{k \leq l \leq \eta} |e_{G_l}|_1 \leq 2^{-k+1}$ , имеем

$$\mathcal{J}(e_{F_k}, e_{F_k}) \leq 2^{-2k+2}.$$

Согласно предложению 5.3.6

$$\begin{aligned} P\{\omega \mid \exists t \leq 1 (X(\omega, t) \in F_k)\} &= P\{\omega \mid \exists t \leq 1 (e_{F_k}(X(\omega, t)) \geq 1)\} \leq \\ &\leq (1 + \Delta t)^{1/\Delta t} \mathcal{J}_1(e_{F_k}, e_{F_k}) \leq e \cdot 2^{-2k+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, множество

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$$

исключительно.

Пусть  $A$  — такое исключительное множество, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  функция  $u_n$  является  $S$ -непрерывной на  $S_0 - A$ . Поскольку  $\|u - u_\eta\| \approx 0$ , мы достигнем цели, если докажем, что функция  $u_\eta$   $S$ -непрерывна на дополнении к множеству  $F \cup A$ . Предположим обратное; выберем  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и  $s_i, s_j \in S_0 - (F \cup A)$ , для которых  $s_i \approx s_j$ , но

$$(23) \quad |u_\eta(s_i) - u_\eta(s_j)| \geq \varepsilon.$$

Выберем  $k$  столь большим, что  $s_i, s_j \notin F_k$  и  $2^{-k+2} < \varepsilon$ . Так как  $s_i, s_j \notin F_k$ , имеем

$$|u_k(s_i) - u_\eta(s_i)| \leq 2^{-k+1}, \quad |u_k(s_j) - u_\eta(s_j)| \leq 2^{-k+1}$$

и в силу  $S$ -непрерывности функции  $u_k$  на  $S_0 - A$

$$|u_k(s_i) - u_k(s_j)| \approx 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |u_\eta(s_i) - u_\eta(s_j)| &\leq |u_\eta(s_i) - u_k(s_i)| + |u_k(s_i) - u_k(s_j)| + \\ &+ |u_k(s_j) - u_\eta(s_j)| \leq 2^{-k+1} + |u_k(s_i) - u_k(s_j)| + 2^{-k+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (23). Лемма доказана.  $\square$

Будем говорить, что внутренняя функция  $f: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  имеет *компактный носитель*, если существует такой компакт  $K \subset Y$ , что  $f(s_i) \approx 0$  для всех  $s_i \in S_0 - {}^*K$ .

**5.5.17. Определение.** Гиперконечная форма Дирихле  $\mathcal{E}$  называется *регулярной*, если она нормальна и выполнены следующие два условия:

(i) для любой  $S$ -непрерывной функции  $u$  с компактным носителем существует такая последовательность  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  внутренних функций с конечной энергией, что  $\sup \{|u(s_i) - u_n(s_i)| \mid s_i \in S_0\} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

(ii) для любой  $S$ -ограниченной функции  $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  найдется такая последовательность  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  квазинепрерывных функций, что  $|u - u_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последний результат, который мы докажем в этом параграфе — это нестандартный аналог теоремы Фукусимы, утверждающей, что все регулярные (в соответствующем стандартном смысле) формы Дирихле на локально компактных пространствах, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, порождают процессы Ханта (Fukushima [1], [3], Silverstein [1]).

**5.5.18. Теорема.** Пусть  $S_0$  — гиперконечное подмножество множества  ${}^*Y$  для некоторого локально компактного хаусдорфова пространства  $Y$ , удовлетворяющего второй аксиоме счетности. Если  $\mathcal{E}$  — регулярная форма Дирихле на  $S_0$ , то найдется такое внутреннее множество  $\tilde{S}_0, \bar{S}_0 \subset \tilde{S}_0 \subset S_0$ , что модифицированная стандартная часть соответствующего процесса  $X$  является строго марковским процессом.

*Доказательство.* Из условия 5.5.17(i) легко следует, что форма  $\mathcal{E}$  разделяет компакты и удовлетворяет условиям предложения 5.5.15. Из условия 5.5.17(ii) и леммы 5.5.16 следует,

что форма  $\mathcal{E}$  порождает квазинепрерывные продолжения. Теперь утверждение следует из теоремы 5.5.11.  $\square$

**Замечание.** Теория, развитая в этой главе, является новой, однако несколько основополагающих идей заимствованы из стандартной теории, изложенной в работах Fukushima [3], Silverstein [1], [2]. В частности, наше доказательство предложения 5.5.10 очень близко к предложенному Сильверстейном доказательству стандартного аналога теоремы 5.5.18 (см. Silverstein [1], Fukushima [3]). Имеющаяся стандартная теория строится благополучно для локально компактных пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, но становится более громоздкой, когда пространство не предполагается локально компактным (см. Albeverio, Høegh-Krohn [3], [4], [5], Kusuoka [1], Paclet [1], [2], Takeda [1]). Одним из преимуществ гиперконечного подхода является то, что он предоставляет унифицированный подход к локально компактным пространствам и к большинству других интересных пространств (например, к сепарабельным гильбертовым и банаховым пространствам). Нельзя, однако, отрицать, что и в локально компактном случае использование нестандартной теории оказывается более легким (ср., например, предложение 5.5.15).

В следующем параграфе мы рассмотрим некоторые типичные применения теории, развитой в двух предыдущих параграфах.

### 5.6. Применения к квантовой механике и к стохастическим дифференциальным уравнениям

Заканчивая эту главу, мы бросим краткий взгляд на некоторые области, в которых применяется теория форм Дирихле. Результаты, которые мы здесь представим, не новы (большинство из них заимствовано из работы Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1]), но они показывают, как естественно формы Дирихле объединяют различные идеи из анализа, теории вероятностей и математической физики. Имеются также серьезные причины верить в то, что в комбинации с теорией, развитой в предыдущих параграфах, эти примеры могут послужить отправной точкой для важных обобщений, особенно в бесконечномерном случае. Поскольку этот параграф носит в основном обзорный характер, мы не будем гоняться за максимальной общностью; а также в тех случаях, когда это оказывается затруднительным, не накладываем на себя обязательств приводить полные доказательства.

#### *А. Гамильтонианы и формы энергии*

Начнем с объяснения взаимосвязей между формами Дирихле и квантовой механикой. Напомним, что в квантовой механике частица, движущаяся в поле с потенциалом  $V$ , управляется

своим гамильтонианом

$$(1) \quad H = -\Delta + V,$$

где  $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial^2 / \partial x_i^2$  —  $d$ -мерный оператор Лапласа. Хорошо известно, что если  $0 = \inf \text{spec}(H)$  — простое собственное значение, отвечающее строго положительной собственной функции  $\varphi$ , то при разумных дополнительных условиях на  $V$  гамильтониан  $H$  является инфинитезимальным генератором симметрической марковской полугруппы  $e^{-tH}$  (см., например, Simon [2]). Однако взаимодействия, которыми мы будем здесь интересоваться, для такого подхода слишком сингулярны, так что мы будем изучать взаимоотношения между марковскими процессами и квантовой физикой с несколько иной точки зрения.

Напомним, что оператор  $H$  для того, чтобы укладываться в общие рамки квантовой физики, должен интерпретироваться как самосопряженный оператор в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ , где  $dx$  обозначает меру Лебега. Другая формулировка того же самого состоит в том, что форма  $F$ , определенная на каком-либо разумном классе функций (например, на  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ) равенством

$$(2) \quad F(f, g) = \int (-\Delta f + Vf) g \, dx,$$

является замыкаемой. Сейчас, проделав кое-какие формальные вычисления, мы найдем такую функцию  $\varphi > 0$  и такую форму Дирихле  $E$ , что

$$(3) \quad E(f, g) = F(\varphi f, \varphi g).$$

Наши операции будут формальными в том смысле, что мы никак не будем обосновывать их законность. Ниже в этом параграфе мы дадим несколько примеров, показывающих важность формулы (3). Прежде чем приступить к вычислениям, отметим, что читателю, совершенно незнакомому с квантовой механикой, может оказаться полезным вначале просмотреть введение к § 6.2.

Нам придется предположить, что существует такая положительная функция  $\varphi$ , что

$$(4) \quad (-\Delta + V)\varphi = 0.$$

Это предположение довольно безобидно: если  $\varphi$  — положительная обобщенная (в том смысле, что не обязательно принадлежащая  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ ) собственная функция оператора  $-\Delta + V$ , отвечающая собственному значению  $E_0$ , то

$$(5) \quad (-\Delta + \tilde{V})\varphi = 0,$$

где  $\tilde{V} = V - E_0$ . Поскольку потенциалы определяются только с точностью до аддитивной константы,  $V$  и  $\tilde{V}$  описывают одну и

ту же физическую ситуацию, и мы вполне можем работать с  $\bar{V}$  вместо  $V$ .

Предположив (4), можно переписать (1) в виде

$$(6) \quad H = -\Delta + (\Delta\varphi/\varphi).$$

Применяя оператор  $H$  к функции вида  $\varphi f$ , получаем

$$(7) \quad \begin{aligned} H(\varphi f) &= -\Delta(\varphi f) + (\Delta\varphi)f = -(\Delta\varphi)f - 2\nabla\varphi\nabla f - \\ &\quad - \varphi\Delta f + (\Delta\varphi)f = \varphi(-\Delta f - 2(\nabla\varphi/\varphi)\nabla f), \end{aligned}$$

так что если  $A$  — оператор

$$(8) \quad Af = -\Delta f - 2(\nabla\varphi/\varphi)\nabla f,$$

то равенство (7) переписывается в виде

$$(9) \quad H\varphi = \varphi A.$$

В терминах формы  $F$  получаем

$$(10) \quad F(\varphi f, \varphi g) = \int H(\varphi f) \varphi g \, dx = \int (Af) g \varphi^2 \, dx.$$

Вводя меру  $\mu$ ,

$$d\mu = \varphi^2 dx,$$

определяем следующую форму на  $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu)$ :

$$(11) \quad E(f, g) = \int (Af) g \, d\mu = \int (Af) g \varphi^2 \, dx = F(\varphi f, \varphi g).$$

Сравнивая формулы (11) и (3), видим, что форма  $E$  — естественный кандидат на роль формы Дирихле, соответствующей форме  $F$ .

Чтобы представить форму  $E$  в более простом виде, запишем

$$E(f, g) = \int (-\Delta f) g \varphi^2 \, dx - 2 \int \nabla\varphi\nabla f \cdot g \varphi \, dx$$

и проинтегрируем первое слагаемое по частям. Предполагая, что функции  $f$  и  $g$  и их частные производные обращаются в нуль на бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} E(f, g) &= \int \nabla f \nabla (g \varphi^2) \, dx - 2 \int \nabla\varphi\nabla f \cdot g \varphi \, dx = \\ &= \int \nabla f \cdot \nabla g \cdot \varphi^2 \, dx + \int \nabla f \nabla \varphi^2 \cdot g \, dx - 2 \int \nabla\varphi\nabla f \cdot g \varphi \, dx = \\ &= \int \nabla f \nabla g \, d\mu. \end{aligned}$$

Мы будем называть форму  $E$  *формой энергии меры*  $\mu$ .

Подведем итоги. Мы показали, что

$$(12) \quad E(f, g) = F(\varphi f, \varphi g),$$

где

$$(13) \quad E(f, g) = \int \nabla f \nabla g \, d\mu$$

и

$$(14) \quad F(f, g) = \int (-\Delta f + V f) g \, dx.$$

Связь между  $\mu$  и  $V$  задается равенствами  $V = \Delta\varphi/\varphi$  и  $d\mu = \varphi^2 dx$ .

Имеется несколько причин для перехода от формы  $F$  к форме  $E$ . Первая причина связана с важным техническим вопросом о замыкаемости: напомним, что для того, чтобы быть принятой в качестве гамильтоновой формы, форма  $F$  должна иметь замкнутое продолжение. Как мы сейчас увидим, замкнутость формы  $E$  влечет замкнутость формы  $F$ ; позже будет показано, что совсем не трудно найти условия, гарантирующие замкнутость формы  $E$ .

Если  $\mathcal{D}_0$  — область определения формы  $E$ , и форма  $F$  на своей области определения

$$\varphi \mathcal{D}_0 = \{\varphi f \mid f \in \mathcal{D}_0\}$$

задана равенством

$$F(\varphi f, \varphi g) = E(f, g),$$

то форма  $F$  замыкаема в  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  в том случае, если форма  $E$  замыкаема в  $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu)$ . Причина в том, что если  $E_1$  и  $F_1$  суть формы

$$(15) \quad E_1(f, g) = E(f, g) + \int f g \, d\mu,$$

$$(16) \quad F_1(f, g) = F(f, g) + \int f g \, dx,$$

то

$$(17) \quad F_1(\varphi f, \varphi g) = E_1(f, g).$$

Это означает, что если  $(\varphi f_n)$  — фундаментальная последовательность относительно  $F_1$ -нормы, то  $(f_n)$  — фундаментальная последовательность относительно  $E_1$ -нормы, откуда непосредственно следует наше утверждение.

Вторая причина для перехода от  $F$  к  $E$ , возможно, более волнующая. Встречаются взаимодействия слишком иррегулярные, чтобы удобно было моделировать операторами вида

$$(18) \quad H = -\Delta + V;$$

Например, потенциал может быть чересчур сингулярен и не представим в виде функции  $V$ . Однако с помощью приведенных выше эвристических вычислений часто можно так переформулировать задачу в терминах форм энергии, что она будет иметь вполне разумный смысл. Причины в том, что мера  $d\mu = \varphi^2 dx$  обычно является гораздо менее сингулярным объектом, нежели функция  $V = \Delta\varphi/\varphi$ . Примером этого явления служит теория точечных взаимодействий, которую мы рассмотрим в этой главе (пример 5.6.4), а также в следующей.

Есть и третья причина для изучения форм энергии, которая должна привлечь как вероятностников, так и физиков. Мы видели, что квадратичная форма  $E$  на  $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$  порождается оператором

$$(19) \quad A = -\Delta - 2(\nabla\varphi/\varphi)\nabla,$$

который служит инфинитезимальным генератором марковского процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения

$$(20) \quad dx(t) = f(x(t))dt + 2db(t),$$

где  $f = 2(\nabla\varphi/\varphi)$ , а  $b$  — броуновское движение. Используя теорию, развитую в предыдущем параграфе (или соответствующую стандартную теорию из работ Fukushima [3], Silverstein [1]), мы убедимся, что форма  $E$  порождает марковский процесс даже в таких ситуациях, когда коэффициент  $\nabla\varphi/\varphi$  столь сингулярен, что не является не только функцией, но даже и распределением (т. е. обобщенной функцией). Таким образом, формы энергии могут использоваться для изучения стохастических дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами сноса. (Заметим, однако, что  $f = 2(\nabla\varphi/\varphi) = \nabla(\ln \varphi^2)$ , так что мы должны предполагать, что функция  $f$  является градиентом.)

Стохастическое дифференциальное уравнение (20) само по себе является ценным объектом для изучения; но его дополнительная важность проистекает из той роли, которую оно играет в квантовой механике. Оно не только служит полезным техническим средством (см. Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1], [2], Albeverio, Fukushima, Karwowski, Streit [1]; Albeverio, Gesztesy, Karwowski, Streit [1] Albeverio, Kusuoka, Streit [1]); общепризнана его концептуальная важность в связи с попытками построения чисто вероятностных оснований квантовой механики (см., например, следующие работы: Nelson [1], [5]; Guerra [1]; Guerra, Morato [1]; Carlen [1]; Yasue [1]; Zheng, Meyer [1], а также статьи из сборника Albeverio, Casati, Merlini (eds.) [1]). Применения к другим областям математической физики можно найти в работах Albeverio, Høegh-Krohn [10], [11], [12], [13]; Albeverio, Blanchard, Høegh-Krohn [2], [3], [4]; Albeverio,



Gesztesy, Karwowski, Streit [1]; Albeverio, Kusuoka, Streit [1]; Albeverio, Blanchard, Gesztesy, Streit [1]; Albeverio, Høegh-Krohn, Holden [2]; Fukushima [4]; см. также содержащиеся в этих работах ссылки. В бесконечномерном случае формы Дирихле и отвечающие им процессы нашли применения в квантовой теории поля и в гидродинамике (см., например, Albeverio, Høegh-Krohn [10], [11], [12], [13]; Albeverio, Høegh-Krohn, Holden [2]; Takeda [1]); математические основы теории были развиты в работах Albeverio, Høegh-Krohn [4], [5]; Kusuoka [1]; Paclet [1], [2]; Takeda [1]. Хотя здесь мы этих вопросов совсем не касаемся, именно в бесконечномерном случае мы питаем особые надежды на нестандартный подход. Причина в той легкости, с которой мы обращались с бесконечномерными проблемами не только в §§ 5.4, 5.5, но также и в связи с теоремой Гросса (§ 3.5) и стохастическим интегрированием (§ 4.7). Мы ненадолго вернемся к этим идеям в конце параграфа.

### В. Стандартные и нестандартные формы энергии

Прежде чем детально разбираться в упомянутых выше применениях, нам нужно больше узнать о формах энергии. Читатель не удивится, узнав, что мы собираемся использовать нестандартный подход, исследуя гиперконечные формы  $\mathcal{E}$  на гиперконечной решетке  $S_0 \subset {}^*\mathbb{R}^d$ . Пусть

$$(21) \quad S_0 = \left\{ (k_1 \Delta x, \dots, k_d \Delta x) \mid \forall i \leq d \left( k_i \in {}^*\mathbb{Z} \text{ и } |k_i| \leq \frac{1}{\Delta x^2} \right) \right\}$$

для некоторого  $\Delta x \approx 0$ . Если  $e \in \mathbb{R}^d$  — единичный вектор вида

$$(22) \quad e = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0),$$

пусть  $\text{sgn}(e)$  обозначает знак его ненулевой компоненты. Множество всех таких единичных векторов будем обозначать через  $U$ ; заметим, что  $U$  естественно разбивается на положительную часть  $U^+$  и отрицательную часть  $U^-$ .

Если дана внутренняя функция  $f: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  и элемент  $e \in U$ , определим

$$(23) \quad D_e f(s) = \frac{f(s + e \Delta x) - f(s)}{\text{sgn}(e) \cdot \Delta x}$$

в том случае, если  $s, s + e \Delta x \in S_0$ ; если же  $s \in S_0$ , но  $s + e \Delta x \notin S_0$ , положим  $D_e f(s) = 0$ . Полученная функция  $D_e f: S_0 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — это внутренний аналог частной производной функции  $f$  в направлении  $e$ . Мы будем изучать гиперконечную форму энергии, заданную формулой

$$(24) \quad \mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) \nu(s),$$

где  $\nu(s)$  — внутренняя мера на  $S_0$ . Множитель  $1/2$  добавлен, чтобы компенсировать тот факт, что каждое направление учитывается дважды. Используя равенство  $D_{-e}f(s + e\Delta x) = D_e f(s)$ , мы можем переписать определение (24) в виде

$$(25) \quad \mathcal{E}(f, g) = \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U^+} D_e f(s) D_e g(s) \frac{\nu(s) + \nu(s + e\Delta x)}{2}.$$

Форма  $\mathcal{E}$ , очевидно, обладает марковским свойством, и, следовательно, согласно предложению 5.3.3, является формой Дирихле. Чтобы построить отвечающую  $\mathcal{E}$  матрицу перехода  $Q$  и инвариантную меру  $m$ , можно воспользоваться процедурой, предложенной в доказательстве предложения 5.3.3; но столь же просто можно сделать это непосредственно. Сначала зафиксируем ось времени

$$(26) \quad T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots\},$$

где

$$(27) \quad \Delta t = \Delta x^2 / 2d.$$

Заметим, что между пространственным и временным масштабами сохраняется обычное соотношение  $\Delta x \sim \sqrt{\Delta t}$ , а множитель  $1/2d$  добавлен для технического удобства. Если марковский процесс не имеет ловушки, то из гиперконечной формулы Бёрлинга — Дени 5.3.1 и из соотношения (27) получаем

$$(28) \quad \mathcal{E}(f, g) = \frac{d}{\Delta x^2} \sum_{s \in S_0} \sum_{s' \in S_0} (f(s) - f(s'))(g(s) - g(s')) q_{s, s'} m(s).$$

Будем предполагать, что

$$(29) \quad q_{s, s'} = 0 \text{ при } |s - s'| \neq \Delta x,$$

т. е. что процесс может прыгать только в соседнее состояние. Тогда (28) можно переписать в виде

$$(30) \quad \mathcal{E}(f, g) = d \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) q_{s, s+e\Delta x} m(s).$$

В силу условия симметрии  $q_{s, s+e\Delta x} m(s) = q_{s+e\Delta x, s} m(s + e\Delta x)$  и равенства  $D_{-e}f(s + e\Delta x) = D_e f(s)$  последнее выражение переписывается в виде

$$(31) \quad \mathcal{E}(f, g) = 2d \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U^+} D_e f(s) D_e g(s) q_{s, s+e\Delta x} m(s).$$

Сравнивая формулы (25) и (31), видим, что

$$(32) \quad 2d \cdot m(s) q_{s, s+e\Delta x} = \frac{\nu(s) + \nu(s + e\Delta x)}{2}.$$

Согласно условию (29) должно выполняться равенство  $\sum_{e \in U} q_{s, s+e\Delta x} = 1$ , поэтому

$$(33) \quad 2d \cdot m(s) = \sum_{e \in U} \frac{v(s) + v(s + e\Delta x)}{2},$$

или

$$(34) \quad m(s) = \frac{1}{2} v(s) + \frac{1}{4d} \sum_{e \in U} v(s + e\Delta x).$$

Подставляя последнее равенство в формулу (32), получаем

$$(35) \quad q_{s, s+e\Delta x} = \frac{v(s) + v(s + e\Delta x)}{4d \cdot m(s)} = \frac{v(s) + v(s + e\Delta x)}{2d \cdot v(s) + \sum_{\tilde{e} \in U} v(s + \tilde{e}\Delta x)}.$$

Последние два уравнения показывают, как получить  $m$  и  $Q$  из меры  $v$ . Заметим, что хотя мера  $m$ , вообще говоря, отличается от  $v$ , всегда справедливо равенство  $L(m) \circ st^{-1} = L(v) \circ st^{-1}$ , так что  $m$  и  $v$  индуцируют одну и ту же меру на  $\mathbb{R}^d$ .

Хотелось бы отметить, что вышеописанная процедура не всегда может быть обращена: если даны такие  $m$  и  $Q$ , что выполнено условие (29), а также условие симметрии

$$(36) \quad m_s q_{s, s'} = m_{s'} q_{s', s},$$

то отнюдь не всегда можно найти меру  $v$ , удовлетворяющую условию (32). Для этого требуется следующее усиление условия (36): если  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — замкнутая траектория в  $S_0$  (т. е.  $s_1 = s_n$ , и  $|s_i - s_{i+1}| = \Delta x$  для всех  $i$ ), то

$$(37) \quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m_{s_i} q_{s_i, s_{i+1}} = 0.$$

Равенство (36) — это частный случай условия (37): оно применено к траектории  $s, s', s$ . Условие (37) мы здесь использовать не будем; заметим лишь, что оно соответствует стандартному условию, состоящему в том, что функция в уравнении (20) обязана быть градиентом.

Среднее значение переходных вероятностей  $q_{s, s+e\Delta x}$  равно  $1/2d$ , а отклонения имеют порядок  $\Delta x$ . Поэтому удобно записывать  $q_{s, s+e\Delta x}$  в виде

$$(38) \quad q_{s, s+e\Delta x} = (1/2d) + \text{sgn}(e) \cdot \beta_e(s) \Delta x;$$

множитель  $\operatorname{sgn}(e)$  включен для того, чтобы облегчить сравнение со стандартной теорией. Переписывая выражение (35) в виде

$$\begin{aligned}
 (39) \quad q_{s, s+e \Delta x} &= \frac{v(s) + v(s + e \Delta x)}{2d \cdot v(s) + \sum_{\tilde{e} \in U} v(s + \tilde{e} \Delta x)} = \\
 &= \frac{1}{2d} + \frac{[v(s + e \Delta x) - v(s)] + \left[ v(s) - (1/2d) \sum_{\tilde{e} \in U} v(s + \tilde{e} \Delta x) \right]}{2d \cdot v(s) + \sum_{\tilde{e} \in U} v(s + \tilde{e} \Delta x)} = \\
 &= \frac{1}{2d} + \operatorname{sgn}(e) \cdot \frac{D_e v(s)}{4d \cdot m(s)} \Delta x - \frac{\tilde{\Delta} v(s)}{8d^2 m(s)} \Delta x^2,
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Delta}$  — дискретный Лапласиан

$$(40) \quad \tilde{\Delta} f(s) = \frac{1}{\Delta x^2} \left( \sum_{e \in U} f(s + e \Delta x) - 2d \cdot f(s) \right),$$

мы видим, что

$$(41) \quad \beta_e(s) = \frac{D_e v(s)}{4d \cdot m(s)} - \operatorname{sgn}(e) \frac{\tilde{\Delta} v(s)}{8d^2 m(s)} \Delta x.$$

Согласно равенству (5.3.16) инфинитезимальный генератор, связанный с формой  $\mathcal{E}$ , равен

$$(42) \quad \tilde{A} f(s) = \frac{1}{\Delta t} \left( f(s) - \sum_{e \in U} f(s + e \Delta x) q_{s, s+e \Delta x} \right).$$

Используя (27) и (38), мы можем переписать оператор  $\tilde{A}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (43) \quad \tilde{A} f(s) &= \frac{2d}{\Delta x^2} \left( f(s) - \sum_{e \in U} f(s + e \Delta x) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \frac{1}{2d} + \operatorname{sgn}(e) \beta_e(s) \Delta x \right) \right) = \\
 &= \frac{2d \cdot f(s) - \sum_{e \in U} f(s + e \Delta x)}{\Delta x^2} - 2d \sum_{e \in U} \frac{f(s + e \Delta x) - f(s)}{\operatorname{sgn}(e) \Delta x} \beta_e(s) = \\
 &= -\tilde{\Delta} f(s) - 2d \sum_{e \in U} D_e f(s) \cdot \beta_e(s),
 \end{aligned}$$

а, соединяя вместе (41) и (43), получаем

$$\begin{aligned}
 (44) \quad \tilde{A} f(s) &= -\tilde{\Delta} f(s) - \frac{1}{2m(s)} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e v(s) + \\
 &\quad + \frac{\tilde{\Delta} v(s)}{4d \cdot m(s)} \Delta x \sum_{e \in U} \operatorname{sgn}(e) D_e f(s).
 \end{aligned}$$

При любых разумных условиях на  $f$  и  $\nu$  последнее слагаемое в (44) бесконечно мало. Заметим, что формула (44) является нестандартным аналогом формулы (19).

Теперь мы можем приступить к исследованию взаимосвязей между стандартной и гиперконечной теориями форм энергии. Пусть  $\mu$  — пополненная борелевская мера на  $\mathbb{R}^d$ , причем  $\mu(K) < \infty$  для любого компакта  $K$ . Выберем гиперконечное представление  $\nu$  меры  $\mu$ , сосредоточенное на решетке  $S_0$ . Чтобы сделать последнее слагаемое в формуле (44) исчезающим, мы выберем меру  $\nu$  такой, чтобы  $(\Delta \nu(s)/m(s)) \cdot \Delta x \approx 0$ . Пусть  $E_0$  — форма, определенная на пространстве  $\mathcal{E}_0^1(\mathbb{R}^d)$  непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями и равная

$$(45) \quad E_0(f, g) = \int \nabla f \cdot \nabla g \, d\mu.$$

Соответствующая гиперконечная форма равна

$$(46) \quad \mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) \nu(s).$$

Мы знаем из §§ 5.1 и 5.2, что форма  $\mathcal{E}$  порождает стандартную замкнутую форму  $E$  на  $L^2(\mathbb{R}^d, \mu)$ . Возникает естественный вопрос: является ли форма  $E$  продолжением формы  $E_0$ ? Положительный ответ означал бы, что форма  $E_0$  замыкаема.

Для начала заметим, что если  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ , то

$$(47) \quad {}^\circ \mathcal{E}(*f, *f) = E_0(f, f).$$

Но поскольку форма  $E$  может быть определена как

$$(48) \quad E(f, f) = \inf \left\{ {}^\circ \mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f}) \mid \int |\tilde{f} - *f|^2 \, dm \approx 0 \right\},$$

единственно, что мы можем заключить из формулы (47) — это неравенство

$$(49) \quad E(f, f) \leq E_0(f, f).$$

Чтобы получить в формуле (49) равенство, требуется условие на  $\nu$ . «Естественный» вариант такого условия —

$$(50) \quad \int \sum_{e \in U} \left( \frac{D_e f(s)}{m(s)} \right)^2 dm(s) < \infty;$$

но, потрудившись чуть больше, мы сможем обойтись более слабой, «локальной» версией условия (50). Бóльшая общность будет полезна в приложениях.

**5.6.1. Лемма.** *Предположим, что существует такое замкнутое множество  $N \subset \mathbb{R}^d$ , имеющее  $\mu$ -меру нуль, что для любого откры-*

того множества  $O \supset N$  и любого компакта  $K$

$$(51) \quad \int_{(S_0 \cap *K) - *O} \sum_{e \in U} \left( \frac{D_e v(s)}{m(s)} \right)^2 dm(s) < \infty.$$

Тогда  $*f \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  для всех  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ , и, следовательно, форма  $E$  является продолжением формы  $E_0$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $*f \notin \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Тогда должна найтись такая внутренняя функция  $\tilde{f}$ , что

$$(52) \quad \int |*f - \tilde{f}|^2 dv \approx 0,$$

но при этом

$$^{\circ}\mathcal{E}(*f - \tilde{f}, *f) > 0.$$

Мы можем выбрать  $\tilde{f} = Q^t(*f)$  для подходящего бесконечно малого  $t$ . По определению

$$\mathcal{E}(*f - \tilde{f}, *f) = \int \frac{1}{2} \sum_{e \in U} D_e(*f - \tilde{f}) D_e(*f) dv(s),$$

а так как множество  $N$  имеет  $\mu$ -меру 0 и функция  $f$  имеет компактный носитель, найдется такой компакт  $K_1$  и такое открытое множество  $O_1 \supset N$ , что

$$\int_{(S_0 \cap *K_1) - *O_1} \sum_{e \in U} D_e(*f - \tilde{f}) D_e(*f) dv(s) > 0.$$

Приближая  $D_e(*f)$  дифференцируемыми функциями, мы можем найти такую функцию  $g \in C_0^2(\mathbb{R}^d - N)$  (так обозначается множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращаясь в нуль вне некоторого компактного подмножества множества  $\mathbb{R}^d - N$ ), для которой

$$\int_{(S_0 \cap *K_1) - *O_1} \sum_{e \in U} D_e(*f - \tilde{f}) D_e(*g) dv(s) > 0.$$

Если мы проявим некоторую аккуратность при построении функции  $g$  вне множества  $K_1 - O_1$ , то сможем добиться того, чтобы

$$\int_{S_0} \sum_{e \in U} D_e(*f - \tilde{f}) D_e(*g) dv(s) > 0.$$

Следовательно,

$$(53) \quad 0 < \int (*f - \tilde{f}) \tilde{A}(*g) dv \leq \left( \int |*f - \tilde{f}|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int (\tilde{A}(*g))^2 dv \right)^{1/2}.$$

Сравнивая формулы (52) и (53), мы видим, что приходим к противоречию, если сумеем показать, что

$$\int (\tilde{A}(*g))^2 dv < \infty.$$

Согласно формуле (44), выражение для  $\tilde{A}(*g)$  состоит из трех слагаемых. При этом первое слагаемое квадратично интегрируемо в силу того, что  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; второе квадратично интегрируемо в силу условия (51) и того, что функция  $g$  обращается в нуль вне некоторого компакта в  $\mathbb{R}^d - N$ ; наконец, третье слагаемое бесконечно мало в силу соглашения о том, что  $\tilde{\Delta}v(s)\Delta x/m(s) \approx 0$ . Таким образом, предположение  $*f \notin \mathcal{D}[\mathcal{E}]$  приводит к противоречию.

Теперь то, что форма  $E$  является продолжением формы  $E_0$ , следует из формулы (47).  $\square$

Чтобы перевести утверждение леммы 5.6.1 на стандартный язык, предположим, как и выше, что  $d\mu = \varphi^2 dx$ . Тогда гиперко-нечной величине  $D_{ev}(s)/m(s)$  соответствует

$$\frac{\partial \varphi^2 / \partial x_e}{\varphi^2} = \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_e},$$

и условие (51) превращается в условие

$$\int_{K-O} \left( \frac{\nabla \varphi}{\varphi} \right)^2 \varphi^2 dx = \int_{K-O} (\nabla \varphi)^2 dx < \infty.$$

Отсюда получаем такое утверждение.

**5.6.2. Следствие.** Пусть  $d\mu = \varphi^2 dx$ , и функция  $\varphi$  локально квадратично интегрируема. Предположим, что существует такое замкнутое множество  $N \subset \mathbb{R}^d$  лебеговой меры 0, что обобщенная функция  $\nabla \varphi$  принадлежит  $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d - N)$ . Тогда форма  $E_0$  замыкаемая.

Под словами «обобщенная функция  $T$  принадлежит  $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d - N)$ » мы понимаем, что для любого  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d - N)$  обобщенная функция  $f(x) \cdot T(x)$  фактически является функцией из  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Давайте взглянем на два применения последнего утверждения; оба они заимствованы из работы Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1]. Первый пример совсем прост, но он ярко иллюстрирует важность допущения «исключительного» множества  $N$ .

**5.6.3. Пример.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^d$  — открытое множество, и  $\varphi(x) = 1$  при  $x \in D$ ,  $\varphi(x) = 0$  при  $x \notin D$ . Граница  $N = \partial D$  имеет лебеговскую меру 0, и  $\nabla \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d - N)$ . Поэтому форма

$$E_0(f, g) = \int_D \nabla f \nabla g dx$$

согласно следствию 5.6.2 замыкаема, и соответствующий оператор — это оператор Лапласа с неймановскими граничными условиями.

В следующем примере используется связь между квантовой механикой и формами Дирихле, о которой говорилось в начале этого параграфа.

**5.6.4. Пример.** Пусть  $d = 3$ ; для произвольного  $m \in \mathbb{R}_+$  положим

$$\varphi_m(x) = \frac{e^{-m|x|}}{|x|}.$$

Легко проверить, что при  $x \neq 0$

$$(54) \quad \nabla \varphi_m(x) = -(x + mx|x|) \frac{e^{-m|x|}}{|x|^3}$$

и

$$(55) \quad \Delta \varphi_m(x) = m^2 \varphi_m(x).$$

Из формулы (54) сразу видно, что  $\nabla \varphi_m \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ , и, значит, форма

$$E_m(f, g) = \int \nabla f \nabla g \varphi_m^2 dx$$

может быть продолжена до замкнутой формы  $E_m$ . Пусть  $F_m$  — замкнутая форма на  $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ , определяемая равенством

$$(56) \quad F_m(f, g) = E_m(f/\varphi_m, g/\varphi_m).$$

Согласно равенству (55) и вычислениям в начале параграфа можно ожидать, что

$$(57) \quad F_m(f, g) = \int (-\Delta f + m^2 f) g dx.$$

Пройдясь еще раз по всем вычислениям и проверив каждый шаг на его законность при  $\varphi = \varphi_m$ , убеждаемся в том, что формула (57) в самом деле справедлива при условии, что  $f(0) = g(0) = 0$ . Определяя

$$(58) \quad \tilde{F}_m(f, g) = F_m(f, g) - m^2 \int fg dx,$$

мы, таким образом, получаем семейство форм, совпадающих на функциях, равных нулю в начале координат. Но поскольку при  $m > 0$

$$F_m(\varphi_m, g) = E_m(1, g/\varphi_m) = 0,$$

Функция  $\varphi_m$  является собственной функцией формы  $F_m$  с собственным значением  $-m^2$ <sup>1)</sup>. Отсюда следует, что  $F_m \neq F_k$  при

<sup>1)</sup> То есть является собственной функцией построенного по форме самосопряженного оператора. — Прим. ред.



$m \neq k$ : в противном случае  $\varphi_m$  и  $\varphi_k$  были бы двумя положительными собственными функциями, отвечающими разным собственным значениям, что, очевидно, невозможно. Пусть  $-\Delta_m$  — это оператор, порождающий форму  $F_m$ . Мы получили семейство самосопряженных операторов, совпадающих со свободным гамильтонианом  $-\Delta$  на функциях, обращающихся в нуль в начале координат.

Попытаемся коротко объяснить, почему семейство  $\{-\Delta_m\}$  представляет интерес для физиков. Предположим, что мы хотим описать силы, действующие на малом расстоянии. Если источник силы находится в начале координат, а радиус взаимодействия меньше  $\varepsilon$ , то гамильтониан имеет вид

$$(59) \quad H_\varepsilon = -\Delta + V_\varepsilon,$$

где функция  $V_\varepsilon$  обращается в нуль вне шара  $B_\varepsilon = \{x \mid |x| < \varepsilon\}$ . Другой способ сказать то же самое — это потребовать, чтобы

$$(60) \quad H_\varepsilon f = -\Delta f$$

для функций  $f$ , обращающихся в нуль вне шара  $B_\varepsilon$ .

Если радиус взаимодействия чрезвычайно мал (как это имеет место для ядерных сил), удобно положить  $\varepsilon = 0$ . В этом случае совершенно не ясно, как интерпретировать формулу (59), но что касается формулы (60), то тут нет никаких проблем: то, что нам нужно — это такой самосопряженный оператор  $H$ , что

$$(61) \quad Hf = -\Delta f$$

для всех функций  $f$ , обращающихся в нуль в начале координат. Но как раз такие операторы мы и построили выше, так что операторы  $-\Delta_m$  описывают взаимодействия с нулевым радиусом (или, как их еще называют, точечные взаимодействия).

Когда в следующей главе мы вернемся к точечным взаимодействиям для более детального их изучения, мы увидим, что формулу (59) при  $\varepsilon = 0$  можно интерпретировать как

$$(62) \quad H = -\Delta - \lambda \cdot \delta,$$

где  $\delta$  — функция Дирака, а  $\lambda$  — подходящее бесконечно малое число. Хотя из нашего изложения это может быть не вполне ясно, та же идея лежит в основе вышеприведенной конструкции. Чтобы это понять, нужно более внимательно взглянуть на введенные нами формы  $F_m$ . Сначала, используя лемму 5.6.1, мы построили форму  $E_m$  как стандартную часть формы

$$(63) \quad \mathcal{E}_m(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) \tilde{\varphi}_m^2 \Delta x^d,$$

где  $\tilde{f}_m$  — подходящая нестандартная аппроксимация функции  $f_m$ . Следовательно,  $F_m$  — стандартная часть формы

$$(64) \quad \mathcal{F}_m(f, g) = \mathcal{E}_m(f/\tilde{f}_m, g/\tilde{f}_m).$$

Проведя вычисления, помещенные в начале параграфа, мы обнаружим, что оператор, порождающий форму  $\mathcal{F}_m$ , имеет вид

$$(65) \quad -\Delta_1 + B,$$

где  $\Delta_1$  — некоторое гиперконечное приближение оператора Лапласа, а  $Bg(x) \approx m^2 g(x)$  при  $\text{st}(x) \neq 0$ . Но при  $x \approx 0$  сингулярность в функции  $\tilde{f}_m$  приводит к нарушению соотношения  $Bg(x) \approx m^2 g(x)$ ; фактически функция  $B$  сама имеет сингулярность, которая превращает оператор (65) в некоторую версию оператора (62) с бесконечно малым  $\lambda$ , зависящим от  $m$ . Вычисления получаются довольно запутанными, и мы оставляем их читателю.

Более детальную информацию о точечных взаимодействиях см. в гл. 6, а также в готовящейся монографии Albeverio, Gesztesy, Nøegh-Krohn, Holden [2].

Существуют применения форм Дирихле также и к другим типам сингулярных потенциалов, но мы их здесь не рассматриваем. Вместо этого обратимся к марковским процессам, порожденным формами энергии.

### С. Формы энергии и марковские процессы

Напомним, что согласно теореме 5.5.18 гиперконечная форма Дирихле на локально компактном пространстве порождает стандартный строго марковский процесс, если она регулярна в смысле определения 5.5.17.

**5.6.5. Предложение.** Пусть  $\nu$  — такая внутренняя мера на  $S_0$ , что  ${}^\circ \nu(*K) < \infty$  для любого компакта  $K \subset \mathbb{R}^d$  и  $0 < {}^\circ \nu(*O)$  для любого непустого открытого подмножества  $O \subset \mathbb{R}^d$ . Положим  $\varphi(s) = \nu(s)/\Delta x^d$  и предположим, что существует такое замкнутое подмножество  $N \subset \mathbb{R}^d$  лебеговой меры 0, что для любого  $x \in \mathbb{R}^d - N$  найдется открытая окрестность  $O \subset \mathbb{R}^d$  точки  $x$ , для которой  $1/\varphi \in \text{SL}^2(*O \cap S_0, \Delta x^d)$ . Тогда форма

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) \nu(s)$$

регулярна.

**Набросок доказательства.** Определение регулярности состоит из двух частей. Чтобы показать, что выполнена первая часть, нужно доказать, что все  $S$ -непрерывные функции с компактными носителями аппроксимируются (в супремум-норме) внутренними

функциями с конечной энергией. Это непосредственно следует из того, что пространство  $C_0^1$  плотно в пространстве  $C_0$ .

Чтобы доказать, что выполнено второе условие из определения регулярности, достаточно показать, что не существует такой функции  $f \in \mathcal{D}[\mathcal{E}] \cap SL^2(\nu)$ , для которой  $\mathcal{E}(f, f) \neq 0$ , но при этом  $\mathcal{E}(f, g) \approx 0$  для всех квазинепрерывных  $S$ -ограниченных функций  $g \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ . Предположим, что такая функция  $f$  существует; сначала покажем, что она не может быть околостандартной (в том смысле, что не является 2-поднятием какой-либо функции из  $L^2(\mathbb{R}^d, L(\nu) \circ st^{-1})$ ).

Если функция  $f$  околостандартна, то существует такая последовательность  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ , что  $\|f - f_n\| \rightarrow 0$  и каждая функция  $D_e f_n$  околостандартна. Так как и  $f$ , и  $f_n$  принадлежат множеству  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$ , имеем  $\mathcal{E}(f - f_n, f - f_n) \rightarrow 0$ . Значит, для каждого  $e \in U$

$$\int |D_e f - D_e f_n|^2 d\nu \rightarrow 0,$$

откуда следует, что функция  $D_e f$  околостандартна. Но если  $D_e f$  околостандартна, то не может быть, чтобы  $\mathcal{E}(f, g) \approx 0$  для всех квазинепрерывных  $S$ -ограниченных функций  $g$ , кроме случая, когда  $\mathcal{E}(f, f) \approx 0$ .

Предположим теперь, что функция  $f$  не является околостандартной. Тогда существует такое внутреннее множество  $A$  бесконечно малой меры, что число

$$\alpha = \int_A |D_e f| \Delta x^d$$

для некоторого  $e \in U$  не является бесконечно малым. (Мы оставляем эту оценку читателям. Она тривиальна при  $d = 1$ , но требует некоторой работы для больших размерностей.) Можно выбрать  $A \subset {}^*O$ , где  $O$  — одна из открытых окрестностей, упомянутых в формулировке предложения.

Согласно неравенству Коши — Шварца

$$\alpha = \int_A |D_e f| \Delta x^d = \int_A |D_e f| \varphi \cdot (1/\varphi) \Delta x^d \leq \mathcal{E}(f, f)^{1/2} \left( \int_A (1/\varphi^2) \Delta x^d \right)^{1/2}.$$

Поскольку интеграл  $\int_A (1/\varphi^2) \Delta x^d$  бесконечно мал, а  $\alpha$  — нет, значение  $\mathcal{E}(f, f)$  должно быть бесконечно большим. Но это противоречит предположению  $f \in \mathcal{D}[\mathcal{E}]$ .  $\square$

Условия предложения 5.6.5 гарантируют, что нестандартная форма энергии  $\mathcal{E}$  порождает стандартный марковский процесс; но если не выполнены также и условия леммы 5.6.1, мы не будем иметь стандартной характеристики этого процесса. Чтобы

лучше ухватить взаимоотношения между формой и процессом, давайте вернемся к примеру 5.6.4 и вычислим в этом случае инфинитезимальный генератор процесса.

**5.6.6. Пример.** Пусть, так же, как в примере 5.6.4,

$$\varphi_m(x) = \frac{e^{-m|x|}}{|x|}.$$

Легко проверить, что

$$(66) \quad \nabla(\varphi_m^2)(x) = -2\left(m + \frac{1}{|x|}\right)\varphi_m^2(x)\mathbf{u}_r,$$

где  $\mathbf{u}_r = x/|x|$  — единичный радиус-вектор. Интегрируя по частям, видим, что для  $f, g \in C_0^\infty$

$$\begin{aligned} E_m(f, g) &= \int \nabla f \nabla g \varphi_m^2 dx = \int f(-\Delta g \cdot \varphi_m^2 - \nabla g \cdot \nabla(\varphi_m^2)) dx = \\ &= \int f\left(-\Delta g + 2\left(m + \frac{1}{|x|}\right)\nabla g \cdot \mathbf{u}_r\right)\varphi_m^2 dx. \end{aligned}$$

Поскольку оператор

$$(67) \quad A = -\Delta + 2\left(m + \frac{1}{|x|}\right)\mathbf{u}_r \cdot \nabla$$

является инфинитезимальным генератором для стохастического дифференциального уравнения

$$(68) \quad dx(t) = -2\left(m + \frac{1}{|x(t)|}\right)\mathbf{u}_r dt + 2db(t),$$

марковский процесс, порождаемый формой  $E_m$ , является решением уравнения (68).

Как мы уже указывали, теория форм Дирихле способна исследовать уравнения с гораздо более серьезными сингулярностями, чем то, что встретилось нам в уравнении (68); мы отсылаем читателя к работам Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1], [2] и Oshima [1] (см. также альтернативный подход в работах Портенко [1], [2]). Вопрос о том, в каком смысле марковский процесс, порожденный формой энергии, является решением соответствующего стохастического дифференциального уравнения, изучается в работах Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [2], Albeverio, Kusuoka, Streit [1]; в них сингулярные формы и процессы аппроксимируются гладкими.

Мы обещали сказать несколько слов о бесконечномерной теории. В нестандартном варианте все происходит как прежде: мы работаем на гиперконечной решетке

$$S_0 = \left\{ (k_1 \Delta x, \dots, k_d \Delta x) \mid \forall i \leq d \left( k_i \in {}^*\mathbb{Z} \text{ и } |k_i| \leq \frac{1}{\Delta x^2} \right) \right\}$$

с внутренней мерой  $\nu$  на  $S_0$  и с формой энергии

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_0} \sum_{e \in U} D_e f(s) D_e g(s) \nu(s).$$

Единственная разница состоит в том, что  $d \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

Пусть  $H$  — стандартное гильбертово пространство, натянутое на ортонормированный базис  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , где

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \in S_0$$

с единицей, стоящей на  $i$ -м месте. При соответствующем отождествлении мы, очевидно, получаем

$$S_0 \subset {}^*H.$$

Из примеров, рассмотренных в §§ 3.5 и 4.7, мы знаем, что не следует ожидать, чтобы мера  $\nu$  была сосредоточена на около-стандартных множествах в топологии гильбертова пространства. Вместо этого введем банахово пространство  $B$ , в которое непрерывно и плотно вкладывается пространство  $H$ . Обозначая через  $\text{st}: S_0 \rightarrow H$  и  $\text{st}_B: S_0 \rightarrow B$  стандартные части относительно топологий в  $H$  и в  $B$ , предположим, что мера

$$\mu = L(\nu) \circ \text{st}_B^{-1}$$

является ненулевой радоновской мерой на  $B$ . Согласно теории § 5.1 гиперконечная форма  $\mathcal{E}$  индуцирует замкнутую форму  $E$  на  $L^2(B, \mu)$ . Вопрос в том, что можно сказать об этой форме исходя из разумных условий на  $B$  и  $\mu$ .

У нас нет цели изложить здесь нестандартную теорию в полном объеме; но, чтобы ощутить, чего можно ждать, мы вкратце упомянем некоторые результаты, полученные стандартными методами. Для простоты сосредоточимся на работе Кусуока [1]; достижения работ Alberverio, Nøegh-Krohn [4], [5] и Paclet [1], [2] имеют сходную природу.

Для достаточно гладких функций  $u \in L^2(B, \mu)$  обозначим через  $Du: B \rightarrow H$  производную Гато функции  $u$ . Кусуока определяет квадратичную форму на  $L^2(B, \mu)$  —

$$E_0(f, g) = \int_B \langle Df, Dg \rangle d\mu$$

— и показывает, что если  $\mu$  — вероятностная мера, то при разумных условиях форма  $E_0$  замыкаема. Добавляя дополнительные условия, он показывает, что форма  $E_0$  порождает строго марковский процесс на  $B$ . Эти дополнительные условия в основном сводятся к тому, чтобы вложение пространства  $H$  в  $B$  было ком-

пактным и чтобы пространство  $B^*$ , дуальное к  $B$ , было достаточно большим подпространством в  $H$ .

Основная идея доказательства состоит в следующем. Теорема существования Фукусимы (стандартная версия теоремы 5.5.18) применима только к формам на локально компактных пространствах и не охватывает случай формы  $E_0$ . Кусуока использует теорему Гельфанда о представлении и с ее помощью находит локально компактное сепарабельное метрическое пространство  $M$ , в которое пространство  $B$  непрерывно и плотно вкладывается. Далее, он интерпретирует  $E_0$  как форму на  $L^2(M, \bar{\mu})$ , где  $\bar{\mu}$  — вероятностная мера, индуцируемая вложением пространства  $B$  в  $M$ , и применяет теорему существования Фукусимы для нахождения соответствующего процесса на  $M$ . Рассуждение завершается демонстрацией того, что множество  $M-B$  имеет нулевую емкость, так что процесс фактически живет на  $B$ .

Мы надеемся, что с помощью гиперконечной теории, развитой в этой главе, можно будет уточнить и обобщить перечисленные результаты. Вместо трюка, состоящего в замене пространства  $B$  локально компактным пространством  $M$ , результаты §§ 5.4 и 5.5 должны позволить работать непосредственно с  $B$ -значными процессами. Мы не проверяли, достаточно ли сильна теория § 5.5 для доказательства теоремы, которую получил Кусуока, а также ее обобщений, или эта теория нуждается в дальнейших уточнениях; но эта область несомненно является обещающей для будущих исследований.

Прежде чем окончательно оставить бесконечномерную теорию, мы хотели бы обсудить еще один вопрос. Предположим, что  $\nu$  — равномерная мера на  $S_0$ ; тогда процесс, отвечающий форме  $\mathcal{E}$ , является гиперконечномерным случайным блужданием. Если  $B$  — пополнение пространства  $H$  по измеримой норме, то, как мы знаем из теоремы Гросса и из § 4.7, стандартная часть этого блуждания — это броуновское движение  $x$  в пространстве  $B$ . Проблема в том, что мера  $\nu$  не имеет стандартной части на  $B$  и что на самом деле не существует формы Дирихле на  $B$ , отвечающей процессу  $x$ . Возникает естественный вопрос: можно ли использовать такие гиперконечные формы, как  $\mathcal{E}$ , для изучения таких процессов, как  $x$ , т. е. процессов, которые не порождены никакими стандартными формами? Это потребовало бы обобщения теории, развитой в этой главе, так как мы всегда предполагали, что исходная мера имеет стандартную часть.

Содержание этой главы можно охарактеризовать как вероятностную теорию потенциала. Мы, однако, потратили большую часть времени на обсуждение очень общих, имеющих вероятностную природу, вопросов существования, и совсем не коснулись таких центральных вопросов теории потенциала, как

граничные задачи. Сейчас уже слишком поздно восстанавливать баланс; но мы хотели бы, чтобы читатель получил хотя бы общее представление о работах Лёба: Loeb [3], [6], [7].

Пусть  $W$  — локально компактное хаусдорфово пространство, которое связно и локально связно, но не компактно. Пусть  $\mathcal{H}$  — такое семейство гармонических функций, что  $(W, \mathcal{H})$  — пространство Брело, в котором  $1$  является супергармонической функцией. Эти условия выполнены, если  $\mathcal{H}$  состоит из решений класса  $C^2$  эллиптического дифференциального уравнения вида

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

в области пространства  $\mathbb{R}^d$ , где матрица  $(a_{ij})$  положительно определена,  $c \geq 0$  и функции  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  локально липшицевы. Другой пример дается решениями уравнения

$$\Delta u + cu = 0$$

на открытой римановой поверхности, где  $c \geq 0$  — гладкая плотность.

Работая в нестандартной модели, Лёб построил обобщенное решение Винера задачи Дирихле для произвольной компактификации гармонического пространства  $W$  и дал интегральное представление Мартина — Шоке для положительных гармонических функций. При дополнительных предположениях, что существует положительный потенциал и ограниченная ненулевая гармоническая функция на  $W$ , Лёб построил такую идеальную границу  $\Gamma$ , что точки множества  $\Gamma$  соответствуют неотрицательным гармоническим функциям. На этой границе сосредоточены максимальные (относительно упорядочения Шоке) представляющие меры для положительных ограниченных и квазиограниченных гармонических функций, причем в отличие от границы Мартина почти все точки границы  $\Gamma$  являются регулярными для задачи Дирихле. Все эти результаты содержатся в работе Loeb [3]. Модификация методов этой статьи дает также простую конструкцию максимальных представляющих мер для положительных гармонических функций на  $W$  в виде слабых\* пределов конечных сумм точечных масс на  $[0, +\infty]$ . В этом случае  $W$  может быть также пространством Бауэра: см. Loeb [6], [7].

## Вопросы теории дифференциальных операторов

Эта глава содержит смесь из разных приложений. В § 6.1 мы обсуждаем сингулярную задачу Штурма—Лиувилля. В § 6.2 развивается общая теория сингулярных возмущений неотрицательных операторов, которая в § 6.3 применяется к точечным, взаимодействиям, а в § 6.4 — к возмущениям с помощью функционалов локального времени и, в частности, к полимерным моделям. В § 6.5 мы излагаем нестандартный подход к уравнению Больцмана; среди прочих результатов здесь доказывается теорема существования в пространственно неоднородном случае. Наконец, § 6.6 содержит несколько замечаний о гиперконечной версии фейнмановского интеграла по траекториям. Объясняется, почему в этом случае не существует, вообще говоря, соответствующей меры Лёба; однако, как отмечается, *внутренняя* мера на пространстве траекторий может быть использована для решения уравнения Шредингера и для обсуждения классического предела.

Если не оговорено обратное, все линейные пространства в этой главе предполагаются над полем действительных или гипердействительных чисел. Когда физические примеры требуют комплексной ситуации, результаты легко переносятся с действительного случая на комплексный.

## 6.1. Сингулярная задача Штурма—Лиувилля

В качестве введения в нестандартное рассмотрение теории сингулярных возмущений мы обсудим сингулярную задачу Штурма—Лиувилля.

Пусть  $\mu$  — конечная неотрицательная борелевская мера на отрезке  $[0, 1]$ . Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(1) \quad -Y''(x) + \mu Y(x) = \lambda Y(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

с краевыми условиями

$$(2) \quad Y(0) = Y(1) = 0,$$

где  $\lambda$  — действительный параметр.



Уравнение (1) в том виде, как оно записано, не имеет классического смысла. Но есть несколько способов стандартной интерпретации этого уравнения.

Прежде всего, мы можем рассмотреть соответствующую квадратичную форму

$$(3) \quad A(\varphi, \varphi) = \int_0^1 (\varphi')^2 dm + \int_0^1 \varphi^2 d\mu,$$

где  $\varphi$  — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке  $[0, 1]$  удовлетворяющая краевым условиям (2), а  $dm$  обозначает меру Лебега на  $[0, 1]$ . Мы увидим, что  $A$  имеет счетное семейство «обобщенных собственных функций»  $\{Y_n\}^1$ , которые ведут себя аналогично собственным функциям классической задачи Штурма — Лиувилля.

Второй путь интерпретации уравнения (1) состоит в переходе к соответствующему интегральному уравнению

$$(4) \quad Y(x) = xY'(0) + \int_0^x (x-s)Y(s) d\mu - \lambda \int_0^x (x-s)Y(s) dm.$$

Стандартная теория утверждает, что уравнение (4) имеет непрерывное решение  $Y_\lambda$  на  $[0, 1]$  при любом  $\lambda$ . Но кажется довольно трудным получить детальную информацию, например, о том, при каких  $\lambda$  мы получим  $Y_\lambda(1) = 0$ . Мы увидим, что последовательность  $Y_n, \lambda_n$ , «решающая» задачу, поставленную в терминах формы (3), дает ответы также и на вопросы, связанные с задачей (4).

Мы получим решение поставленной задачи, совершив экскурсию на нестандартную территорию. В нашей первоначальной работе Albeverio, Fenstab, Нøegh-Krohn [1] мы превращали меру  $\mu$  в нестандартную гладкую функцию, заменяя ее на свертку  $\delta_\varepsilon * \mu$ , где  $\delta_\varepsilon$  — это «дельта-функция» из класса  $*C^\infty$  с носителем на отрезке  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , причем  $\varepsilon$  — положительное бесконечно малое число. По принципу переноса 1.2.4 к полученному нестандартному уравнению применима классическая теория Штурма — Лиувилля; таким путем может быть получена также новая информация для стандартного случая.

Но существует и более радикальный нестандартный подход к проблеме, состоящий в замене стандартного дифференциального уравнения (1) нестандартным гиперконечным разностным уравнением. Для классической задачи Штурма — Лиувилля это было сделано в работе MacDonald [1], а на более широкий контекст перенесено в статье Birkeland [1]. Мы приведем краткое изложение последней работы.

<sup>1)</sup> См. примечание на с. 358. — *Прим. перев.*

Ключевая идея состоит в замене системы (1), (2) разностным уравнением

$$(5) \quad N^2 \Delta^2 y(k) + (\lambda - q(k))y(k) = 0, \quad 0 < k < N,$$

с краевыми условиями

$$(6) \quad y(0) = y(N) = 0,$$

где  $N$  — некоторое большое — но пока конечное — число, а  $q = (q(0), \dots, q(N))$  — заданный вектор, причем  $q(k) \geq 0$  при всех  $0 \leq k \leq N$ . Разностные операторы определяются так:

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k),$$

$$\Delta^2 y(k) = \Delta(\Delta y(k-1)) = y(k+1) - 2y(k) + y(k-1).$$

Система (5), (6) есть не что иное как система из  $(N-1)$  линейных уравнений с  $(N-1)$  неизвестными  $y(1), \dots, y(N-1)$ . Существующая матрица имеет вид

$$A + \lambda I,$$

где  $I$  — единичная матрица, и

$$A_{ij} = 0 \quad \text{при } |i-j| > 1,$$

$$A_{ij} = N^2 \quad \text{при } |i-j| = 1,$$

$$A_{ii} = -2N^2 - q(i).$$

Поскольку матрица  $A$  симметрична, из элементарной линейной алгебры следует, что система (5), (6) имеет  $(N-1)$  попарно ортогональных собственных векторов  $y_1, \dots, y_{N-1}$ ; можно также показать, что соответствующие собственные значения будут простыми.

Все это стандартно и элементарно. Столь же элементарно, но далеко не тривиально получение тонких равномерных оценок для собственных векторов и собственных значений, которые позволили бы получить полезную информацию о системе (1), (2) из дискретной задачи (5), (6).

Следующий результат заимствован из работы Birkeland [1].

**6.1.1. Предложение.** Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1}$  — собственные значения задачи [5], [6] и  $y_1, \dots, y_{N-1}$  — соответствующие собственные векторы, нормированные условием  $\|y_j\|_2^2 = N$ . Определим

$$m = \|q\|_1/N, \quad b = 2(1 + 12m).$$

Тогда для  $\lambda_j \leq 3N^2$  (что верно, в частности, при  $j \leq N/2$ ) справедливы оценки

$$(7) \quad \|y_j\|_\infty \leq b,$$

$$(8) \quad N \cdot \|\Delta y_j\|_\infty \leq 2\lambda_j^{1/2} b,$$

а для  $3N^2 < \lambda_j$  справедлива оценка

$$(7') \quad \|y_j\|_\infty \leq b',$$

где  $b' = 2(1 + 12m')$  и  $m' = \|q\|_\infty - m$ .

Следует, пожалуй, добавить, что мы используем обычные векторные нормы  $\|v\|_1 = \sum |v(k)|$ ,  $\|v\|_2 = (\sum |v(k)|^2)^{1/2}$ ,  $\|v\|_\infty = \max |v(k)|$ .

Мы ограничимся краткими замечаниями по поводу доказательства; детальную информацию об используемых в нем различных вычислениях читатель может найти в исходной работе Birkeland [1].

Первый трюк состоит в использовании следующего тождества, хорошо известного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть  $y$  и  $z$  — решения разностных уравнений

$$(9) \quad N^2 \Delta^2 y(k) + (\lambda - q(k)) y(k) = 0$$

и

$$(10) \quad N^2 \Delta^2 z(k) + \lambda \cdot z(k) = 0$$

соответственно, причем  $y(0) = z(0) = 0$ . Тогда справедливо тождество

$$y(k) z(1) = y(1) z(k) + N^{-2} \sum_{i=1}^{k-1} q(i) y(i) z(k-i).$$

Чтобы доказать предложение 6.1.1, нужно получить достаточно сильные оценки последней суммы. Иными словами, нужно получить неравенство вида

$$(11) \quad \left| \sum_{i=1}^k q(i) y(i) z(k-i) \right| \leq P \cdot \|y\|_2 \cdot \|z\|_\infty \cdot N^{1/2},$$

где  $P$  — некоторое действительное число. Это неравенство в совокупности с явной информацией о собственных векторах и собственных значениях уравнения (10) позволяет получить оценку

$$(12) \quad \|y\|_\infty \leq 2(1 + 3P\lambda^{-1/2}) \|y\|_2 N^{-1/2}.$$

Осталось выбрать подходящее  $P$ . Если бы мы интересовались только классической задачей Штурма — Лиувилля, то смогли бы обойтись чем-нибудь меньшим, чем оценки (7) и (8). Фактически, можно было бы воспользоваться неравенством Коши — Шварца

$$\left| \sum_{i=1}^k q(i) y(i) z(k-i) \right| \leq \|q\|_2 \|y\|_2 \|z\|_\infty$$

и выбрать  $P = \|q\|_2 N^{-1/2}$  или, еще слабее,  $P = \|q\|_\infty$ ; такое  $P$  удовлетворяет условию (11), и с помощью (12) можно было бы

получить достаточно сильную оценку. В сингулярном случае требуются более тонкие неравенства, отсюда и более деликатный выбор константы  $P$ .

Сравнительно длинный анализ (см. цитируемую работу) показывает, что неравенство (11) справедливо при выборе  $P = 4m\lambda^{1/2}$ . Это значение  $P$ , будучи подставленным в (12), с учетом нормировки  $\|y_j\|_2^2 = N$  сразу влечет за собой (7). Оценка (8) требует некоторых дополнительных вычислений; детали см. в упомянутой работе Birkeland [1].  $\square$

Чтобы завершить нестандартную программу, нужно для разностных уравнений построить аналог классической теории Штурма — Лиувилля; эта теория элементарна, но несколько утомительна. Коснемся одного момента: нам потребуется оценка для числа нулей вектора  $(y(k))$ . А это потребует правильного определения точки, где вектор обращается в нуль; ведь может так случиться, что для некоторого  $k$  оба значения  $y(k-1)$ ,  $y(k) \neq 0$ , но при этом  $y(k-1) \cdot y(k) \leq 0$ . Тогда мы используем линейную интерполяцию: если  $y(k-1) \cdot y(k) \leq 0$  и  $y(k)$  отлично от 0, то действительное число

$$\xi = k - \frac{y(k)}{\Delta y(k-1)}$$

называется *нулевой точкой* или *узлом* вектора  $y$ . Используя это понятие, получаем следующий результат.

**6.1.2. Предложение.** Пусть  $y_j$  и  $\lambda_j$  — это  $j$ -й собственный вектор и  $j$ -е собственное значение системы (5), (6). Тогда

(i) вектор  $y_j$  имеет ровно  $j+1$  нулевых точек на замкнутом отрезке  $[0, N]$ , и между любыми двумя нулевыми точками вектора  $y_j$  лежит ровно одна нулевая точка вектора  $y_{j+1}$ ;

(ii) число  $\lambda_j$  удовлетворяет неравенствам

$$\pi^2 j^2 / 6 \leq \sigma_j \leq \lambda_j \leq (\sigma_j^{1/2} + m)^2,$$

где  $\sigma_j = 2N^2(1 - \cos(j\pi/N))$  —  $j$ -е собственное значение уравнения (10) с краевыми условиями  $z(0) = z(N) = 0$ .

Детальное доказательство приведено в цитируемой работе Биркланда. Заметим, что эта работа содержит и более явную информацию о системе (5), (6). Мы коснулись лишь того небольшого числа фактов, которые нужны для перехода от системы (5), (6) к системе (1), (2).

Пришла пора выбрать гиперконечное  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Мы хотим представить меру  $\mu$  вектором  $q \in {}^*\mathbb{R}^{N+1}$ . Проявив некоторую аккуратность, можно показать, что для любых таких  $P$ ,  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $P/N \approx 0$ , найдется такой вектор  $q$ , что для

любой непрерывной функции  $\varphi$  на отрезке  $[0, 1]$

$$\int_0^1 \varphi d\mu \approx N^{-1} \sum \varphi\left(\frac{k}{N}\right) q(k),$$

причем

$$0 \leq q(k) \leq P.$$

При выбранном  $q$  рассмотрим задачу (5), (6). По принципу переноса 1.2.4 предложения 6.1.1 и 6.1.2 по-прежнему справедливы. В частности, из оценки 6.1.2(ii) следует, что если  $j$  конечно, то  $\text{st}(\lambda_j)$  существует и удовлетворяет условиям

$$(13) \quad \pi^2 j^2 / 6 \leq \text{st}(\lambda_j) \leq (\pi j + \mu[0, 1])^2$$

(поскольку  $\mu([0, 1]) = \text{st}(N^{-1} \sum q(k)) = \text{st}(N^{-1} \cdot \|q\|_1)$ ).

Далее, из неравенств в предложении 6.1.1 получаем

$$(14) \quad |y_j(m) - y_j(l)| = \left| \sum_{k=l}^m \Delta y_j(k) \right| \leq 2\lambda_j^{1/2} b \frac{m-l}{N}.$$

Если  $j$  конечно, отсюда следует, что  $\text{st}(y_j(m)) = \text{st}(y_j(l))$ , если  $(m-l)/N$  бесконечно мало. Это означает, что функции  $Y_j(x) = \text{st}(y_j(k))$ , где  $x = \text{st}(k/N)$ , корректно определены и непрерывны, хотя не обязательно дифференцируемы. Но если все же  $Y_j''(x)$  существует, то

$$Y_j''(x) = \text{st}(N^{-2} \Delta^2 y_j(k)),$$

где  $x = \text{st}(k/N)$ . Таковы интуитивные соображения, связывающие задачу (5), (6) с задачей (1), (2). В общем случае придется удовлетвориться меньшим. С помощью подходящего двойного суммирования из уравнения (5) выводится уравнение

$$(15) \quad y_j(n) - y_j(l) = (n-l) \Delta y_j(l) + \\ + N^{-2} \sum_{k=l+1}^n (n-k) y_j(k) q(k) - \lambda N^{-2} \sum_{k=l+1}^m (n-k) y_j(k).$$

Если  $j$  конечно, можно брать стандартные части; это приводит к интегральному уравнению

$$(16) \quad Y_j(x) - Y_j(x_0) = (x - x_0) \cdot \kappa + \int_{x_0}^x (x-s) Y_j(s) d\mu - \\ - \lambda \int_{x_0}^x (x-s) Y_j(s) ds,$$

где  $x = \text{st}(n/N)$ ,  $x_0 = \text{st}(l/N)$ ,  $s = \text{st}(k/N)$ ,  $\kappa = \text{st}(N \Delta y_j(l))$ . Мы возвратились к уравнению (4).

Из соответствующих результатов для гиперконечной системы (5), (6) нетрудно извлечь также и формулу (3) и доказать следующую теорему.

**6.1.3. Теорема.** Пусть  $\mu$  — конечная борелевская мера на отрезке  $[0, 1]$ ; зададим на пространстве  $C_0^1[0, 1]$  непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi$  на  $[0, 1]$ , удовлетворяющих условию  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , квадратичную форму  $A$ , определяемую формулой

$$A(\varphi, \varphi) = \int_0^1 (\varphi')^2 dt + \int_0^1 \varphi^2 d\mu.$$

Пусть  $M = \mu([0, 1])$  и  $B = 2(1 + 12M)$ . Тогда существует такая последовательность действительных чисел  $\{\tau_j\}$  и такая последовательность функций  $\{Y_j\}$  из  $C_0^1[0, 1]$ , для которых справедливы следующие утверждения:

(a) при  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq j < \infty$

$$\pi^2 j^2 / 6 \leq \tau_j \leq (\pi j + M)^2, \quad |Y_j(x)| \leq B;$$

(b) функции  $\{Y_j\}$  образуют полную ортонормированную систему в  $L^2[0, 1]$ ;

(c) если функция  $\varphi$  дважды непрерывно дифференцируема на  $[0, 1]$  и  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то ортогональное разложение функции  $\varphi$  по последовательности  $\{Y_j\}$  равномерно сходится к  $\varphi$ ;

(d) если функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема на  $[0, 1]$ ,

причем  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} d_j Y_j$  — ее разложение, то

$$A(\varphi, \varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j d_j^2;$$

(e) функция  $Y_j$  является решением интегрального уравнения

(4) при  $\lambda = \tau_j$ ;

(f) функция  $Y_j$  имеет ровно  $(j+1)$  нулей на отрезке  $[0, 1]$ , и между любыми двумя нулями функции  $Y_j$  расположен нуль функции  $Y_{j+1}$ ;

(g) если  $\mu(\{x\}) = 0$  или  $Y_j(x) = 0$ , то в точке  $x$  существует производная  $Y'_j(x)$ , причем  $|Y'_j(x)| \leq 2B\tau_j^{1/2}$ ; если  $\mu(\{x\}) \cdot Y_j(x) \neq 0$ , то в точке  $x$  производная  $Y'_j(x)$  претерпевает скачок

размера  $\mu(\{x\}) \cdot Y_j(x)$ ; на тех интервалах  $I \subset [0, 1]$ , где мера  $\mu$  имеет вид  $d\mu = g dt$ ,  $g \in L^1(I)$ , производная  $Y'_j$  абсолютно непрерывна, и функция  $Y_j$  почти всюду удовлетворяет уравнению  $-Y'' + (g - \tau)Y = 0$ .

Часть доказательства мы уже поясняли; завершим наше обсуждение доказательством утверждений (b) и (c). Прежде

всего заметим, что свойство ортогональности собственных векторов  $y_i$  сразу же влечет за собой ортонормированность функций  $Y_j$  на отрезке  $[0, 1]$ .

Чтобы доказать часть утверждения (b), связанную с полнотой, рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $\Phi$  на  $[0, 1]$ ,  $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ . Для  $0 \leq k \leq N$  положим

$$\varphi(k) = {}^*\Phi(k/N).$$

Стандартная линейная алгебра и принцип переноса позволяют заключить, что

$$(17) \quad \varphi(k) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N-1} c_j y_j(k),$$

где

$$c_j = \langle \varphi, y_j \rangle = \sum_{k=0}^N \varphi(k) y_j(k).$$

Для конечных  $j$  получаем

$$d_j = \text{st}(c_j/N) = \text{st}\left(N^{-1} \cdot \sum \varphi(k) y_j(k)\right) = \int_0^1 \Phi Y_j dm.$$

Следовательно, для любого положительного целого  $K < \infty$

$$\text{st}\left(N^{-1} \sum_{j=1}^K c_j y_j(k)\right) = \sum_{j=1}^K d_j Y_j(\text{st}(k/N)).$$

Таким образом, для доказательства полноты достаточно проконтролировать остаточный член разложения (17); иными словами, нужно показать, что для любого стандартного  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое  $K_\varepsilon$ , что

$$(18) \quad N^{-1} \sum_{j=K_\varepsilon}^{N-1} |c_j y_j(k)| < \varepsilon, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Для  $y_j$  мы уже имеем оценки из предложения 6.6.1. Теперь нужны «хорошие» оценки для  $c_j$ . Вычисляем:

$$(19) \quad \begin{aligned} c_j &= \langle \varphi, y_j \rangle = \langle \varphi, \lambda_j^{-1} (y_j q - N^2 \Delta^2 y_j) \rangle = \\ &= \lambda_j^{-1} \left[ \sum_{k=0}^N \varphi(k) y_j(k) q(k) - N^2 \sum_{k=0}^N \varphi(k) \Delta^2 y_j(k) \right]; \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что  $y_j, \lambda_j$  образуют решение системы (5), (6). Из наших предположений о функции  $\Phi$  следует, что существует такое конечное действительное число  $p$ , для которого

$$|\varphi(k)| \leq p, \quad N^2 |\Delta^2 \varphi(k)| \leq p, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Это дает следующие оценки для членов формулы (19): во-первых

$$\left| \sum_{k=0}^N \varphi(k) y_j(k) q(k) \right| \leq p \cdot \|q\|_1 \cdot \|y_j\|_\infty;$$

во-вторых, дважды производя «суммирование по частям», получаем

$$\left| \sum_{k=0}^N \varphi(k) \Delta^2 y_j(k) \right| = \left| \sum_{k=0}^N y_j(k) \Delta^2 \varphi(k) \right| \leq p \cdot \|y_j\|_\infty / N.$$

В итоге получаем оценку для  $c_j$ :

$$|c_j| \leq \lambda_j^{-1} p \cdot \|y_j\|_\infty (\|q\|_1 + N).$$

Для суммы (18) отсюда получается такая оценка:

$$(20) \quad N^{-1} \sum_{j=K_e}^{N-1} |c_j y_j(k)| \leq p \left( 1 + \frac{\|q\|_1}{N} \right) \sum_{j=K_e}^{N-1} \lambda_j^{-1} \|y_j\|_\infty^2.$$

Из предложения 6.1.2 мы знаем, что  $\pi^2 j^2 / 6 \leq \lambda_j$  для всех  $j$ , а предложение 6.1.1 содержит оценки для  $\|y_j\|_\infty$ . Будучи примененными к формуле (20), они дают

$$(21) \quad \sum_{j=K_e}^{N-1} \lambda_j^{-1} \|y_j\|_\infty^2 \leq \sum_{j=K_e}^{N/2} \frac{6b^2}{\pi^2 j^2} + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \frac{6(b')^2}{\pi^2 j^2}.$$

Поскольку число  $b$  конечно,  $b = 2(1 + 12\mu([0, 1]))$ , первая сумма может быть сделана сколь угодно малой с помощью выбора достаточно большого  $K_e < \infty$ . Осталось показать, что вторая сумма бесконечно мала. И в самом деле, справедлива оценка

$$\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \frac{6(b')^2}{\pi^2 j^2} \leq \frac{6}{\pi^2} (b')^2 \frac{N}{2} \left( \frac{2}{N} \right)^2 = \frac{12}{\pi^2} \frac{(b')^2}{N}.$$

Из 6.1.1 легко видно, что  $b' \leq 24(\|q\|_\infty + 1)$ . Теперь можно использовать нашу свободу в выборе числа  $P \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , удовлетворяющего условиям  $P/N \approx 0$  и  $\|q\|_\infty \leq P$ , и выбрать его таким, чтобы число  $(b')^2/N$  было бесконечно малым. Фактически годится любое бесконечно большое  $P$ , меньшее, чем  $N^{1/4}$ .  $\square$

На этом мы закончим наши замечания, касающиеся доказательства теоремы 6.1.3. Мы сосредоточили внимание на тех аспектах, которые являются новыми и интересными с точки зрения нестандартной методологии. Доказательства остальных



утверждений следуют стандартным образцам: см. Birkeland [1], MacDonald [1].

**6.1.4. Замечание.** Результаты настоящего параграфа со стандартной точки зрения, т. е. в рамках теории обобщенных функций и техники аппроксимаций, рассматриваются в работах Persson [1], [2].

Можно ли извлечь из нестандартного доказательства какой-нибудь урок? Нам кажется, что да: следует заменить непрерывную задачу гиперконечной дискретной задачей; затем исследовать конечную версию задачи и доказать для нее тонкие и равномерные оценки. После этого с помощью принципа переноса и взятия стандартных частей мы получим решение непрерывной задачи. Эта тема еще неоднократно встретится нам в прикладном нестандартном анализе. И она действительно придает нестандартным методам некоторую конкретность и конструктивность.

## 6.2. Сингулярные возмущения неотрицательных операторов

Рассмотрим частицу массы  $m$ , движущуюся в поле с потенциалом  $V$ . В классической механике траектория частицы определяется уравнением Ньютона

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \nabla V(\mathbf{x})$$

и начальными условиями

$$(2) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$(3) \quad d\mathbf{x}/dt(0) = \mathbf{v}_0,$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — положение частицы в момент времени  $t$ . В квантовой механике от такой детерминистической формулировки приходится отказаться; возможной остается только формулировка в вероятностных терминах. Вероятностная информация закодирована в виде комплекснозначной функции  $\psi(\mathbf{x}, t)$  от пространственной и временной координат, называемой волновой функцией. Знание о физическом поведении частицы может быть получено с помощью определенных математических операций над волновой функцией; например, вероятность того, что в момент времени  $t$  частица находится в подмножестве  $A \subset \mathbb{R}^3$ , равна

$$\int_A |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}.$$

Хотя точное поведение частицы предсказано быть не может, эволюция описывающего это поведение вероятностного закона является детерминированной — а именно, она определяется урав-

нением Шредингера

$$(4) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi,$$

где  $\hbar$  — деленная на  $2\pi$  постоянная Планка, а  $\Delta = \sum_{i=1}^3 (\partial^2/\partial x_i^2)$  — оператор Лапласа. Это уравнение играет такую же центральную роль в квантовой механике, как уравнение (1) — в классической.

Чтобы понять уравнение Шредингера, нужно хорошо разобраться в операторах, стоящих в его правой части. Поскольку константа  $\hbar^2/2m$  для математики не важна, мы будем изучать операторы вида

$$(5) \quad H = -\Delta + V,$$

где  $V$  действует посредством умножения. Для получения разумной математической теории нужно интерпретировать  $H$  как самосопряженный оператор в  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ; хорошо известно, как это можно сделать для широкого класса функций  $V$  и какие из этого проистекают последствия (см., например, Kato [1], Simon [3]). Цель этого и двух следующих параграфов — перенести эту теорию на некоторые представляющие значительный физический интерес ситуации, в которых потенциал уже не является функцией.

Примеры, которые мы имеем в виду, обладают тем общим свойством, что потенциалы в них обращаются в нуль вне некоторого множества нулевой меры. Один из примеров — это точечное взаимодействие, когда вся сила сосредоточена в одной точке; по многим причинам это удобная и полезная модель взаимодействий, происходящих на очень малых расстояниях — например, ядерных сил (см. Albeverio, Gesztesy, Høegh-Krohn, Holden [1], [2], а также §§ 5.6 и 6.3). Решетчатые потенциалы успешно использовались для моделирования кристаллов (см. Grossman и др. [1], [2]; Høegh-Krohn и др. [1]; Albeverio, Gesztesy, Høegh-Krohn, Holden [2]). В другом примере потенциал концентрируется на броуновской траектории, моделирующей молекулу полимера; в §§ 6.4 и 7.5 мы объясним, почему четырехмерный вариант этой модели важен в квантовой теории поля. Поскольку потенциалы равны нулю вне множества нулевой меры, соответствующие операторы Шредингера не могут иметь вид  $-\Delta + V$ , где  $V$  — функция; приходится возмущать лапласиан более сингулярными объектами.

Такие возмущения проще всего описываются квадратичными формами. Напомним, что имеется взаимно однозначное соответствие между неотрицательными самосопряженными опера-

торами  $A$  и неотрицательными замкнутыми формами  $E$ , задаваемое равенством

$$(6) \quad E(f, g) = \langle A^{1/2}f, A^{1/2}g \rangle.$$

Возмущение оператора  $A$ , сосредоточенное на множестве  $C$ , порождает возмущенную форму

$$(7) \quad \tilde{E}(f, g) = \langle A^{1/2}f, A^{1/2}g \rangle + \int_C V \cdot f \cdot g \, dx.$$

Если, как было сказано выше, множество  $C$  имеет меру нуль, последний интеграл равен нулю, и никакого возмущения не будет. Однако теперь легко понять, как можно исправить положение; нужно просто заменить функцию  $V$  на меру  $\mu$ , сосредоточенную на множестве  $C$ :

$$(8) \quad \tilde{E}(f, g) = \langle A^{1/2}f, A^{1/2}g \rangle + \int_C f g \, d\mu.$$

По техническим причинам удобно разбить меру  $\mu$  на две части: вероятностную меру  $\tilde{\rho}$  на  $C$  и функцию  $-\tilde{\lambda}$ . Тогда

$$(9) \quad \tilde{E}(f, g) = \langle A^{1/2}f, A^{1/2}g \rangle - \int_C \tilde{\lambda} f g \, d\tilde{\rho}.$$

Нам хотелось бы считать самосопряженный оператор, порожденный формой  $\tilde{E}$ , искомым возмущением оператора  $A$ . Проблема, однако, в том, что  $\tilde{E}$  вовсе не обязательно порождает самосопряженный оператор. Поскольку множество  $C$  имеет меру нуль, второе слагаемое в (9) имеет смысл только для подмножества области определения оператора  $A^{1/2}$  — а именно, для тех функций, которые непрерывны в окрестности множества  $C$ . Вопрос, таким образом, состоит в том, можно ли продолжить  $\tilde{E}$  до замкнутой формы.

Вопросы такого типа о замыкаемости форм часто бывают сложными и запутанными, но в § 5.1 мы нашли общий метод обращения с ними; поскольку стандартная часть гиперконечной формы всегда замкнута, единственное, что нужно сделать — это найти гиперконечное представление формы  $\tilde{E}$ . Стратегия состоит в следующем. Мы будем рассматривать хаусдорфово пространство  $X$ , замкнутое подмножество  $C \subset X$  и радоновские меры  $m$  и  $\tilde{\rho}$  на  $X$  и  $C$  соответственно, причем  $m(C) = 0$ . Мы также предполагаем, что  $m(K) < \infty$  для всех компактов  $K$ . Для данной формы  $E$  на  $L^2(X, m)$  пусть  $\mathcal{E}$  — ее гиперконечное представление, определенное на  $L^2(Y, \mu)$ , как в следствии 5.2.2. Пусть  $B \subset Y$  — такое внутреннее подмножество, что  $C = \text{st}(B)$ , и пусть  $\rho$  — такая внутренняя вероятностная мера на  $B$ , что  $\tilde{\rho} =$

$= L(\rho) \circ st^{-1}$ . Для внутренней функции  $\lambda: B \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  нестандартным аналогом формы  $E$  будет форма

$$(10) \quad \tilde{\mathcal{E}}(f, g) = \mathcal{E}(f, g) - \int_B \lambda \cdot fg \, d\rho.$$

Если  $L$  — оператор порождающий форму  $\mathcal{E}$ , то форме  $\tilde{\mathcal{E}}$  отвечает оператор

$$(11) \quad Hf(y) = Lf(y) - \lambda(y)f(y) \frac{\rho(y)}{\mu(y)}.$$

Нужно сделать три вещи. Во-первых, нужно показать, что при подходящем выборе функции  $\lambda$  (и других разумных условиях) форма  $\tilde{\mathcal{E}}$  будет  $S$ -ограниченной снизу<sup>1)</sup> (чтобы была применима теория § 5.1); во-вторых, что стандартные части форм  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  различны; и, в-третьих, что носителем возмущения является множество  $C$ . В данном параграфе мы изучим эти задачи в указанной общей постановке, а в следующих двух параграфах посмотрим, что получается в упоминавшихся выше примерах — т. е. для потенциалов, сосредоточенных в точках и на броуновских траекториях. Наиболее удивительное открытие, которое мы сделаем, касается выбора функции  $\lambda$ ; мы обнаружим такие примеры, в которых функцию  $\lambda$  приходится выбирать бесконечно малой — и при этом стандартная часть формы  $\tilde{\mathcal{E}}$  все равно отличается от формы  $E$ . Следовательно, есть такие возмущения формы  $E$ , которые не могут быть представлены стандартным выражением вида (9), но которые, тем не менее, индуцированы гиперконечными формами вида (10). Это происходит для точечных взаимодействий в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  и для возмущений вдоль броуновских траекторий в  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^5$ .

### А. Вычисление

Теперь мы можем приступить к работе. Предположим, что оператор  $H$  задан формулой (11) и что  $L$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  и  $\mu$  неотрицательны. Нашим основным инструментом будет соотношение между формами и резольвентами, установленное в § 5.1; начнем с вычисления резольвенты оператора  $H$ . Если  $G_\alpha = (L - \alpha)^{-1}$ , то

$$(12) \quad (H - \alpha)^{-1} = G_\alpha \left( I - \frac{\lambda\rho}{\mu} G_\alpha \right)^{-1} = G_\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda\rho}{\mu} G_\alpha \right)^l,$$

разумеется, при условии, что ряд в правой части сходится. Поскольку  $\|G_\alpha\| \leq -1/\alpha$ , найдется такое  $z_1 \in {}^*\mathbb{R}_-$ , что ряд схо-

<sup>1)</sup> То есть  $\tilde{\mathcal{E}}(f, f) \geq -c\langle f, f \rangle$  с некоторой конечной константой  $c$ . — Прим. ред.

дится при  $\alpha < z_1$ . Нет никаких *априорных* причин, по которым число  $z_1$  должно быть конечным. Но это нас не остановит; мы просто предположим, что  $\alpha < z_1$  и продолжим вычисления.

Применяя оператор (12) к функции  $f$ , получаем

$$(13) \quad (H - \alpha)^{-1} f(x) = \int_Y (H - \alpha)^{-1}(x, y) f(y) d\mu(y) = \\ = \int_Y G_\alpha(x, y) f(y) d\mu(y) + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{Y^{l+1}} G_\alpha(x, x_1) \frac{\lambda(x_1) \rho(x_1)}{\mu(x_1)} \times \\ \times G_\alpha(x_1, x_2) \dots \frac{\lambda(x_{l-1}) \rho(x_{l-1})}{\mu(x_{l-1})} G_\alpha(x_{l-1}, x_l) \frac{\lambda(x_l) \rho(x_l)}{\mu(x_l)} \times \\ \times G_\alpha(x_l, y) f(y) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_l) d\mu(y),$$

где  $G_\alpha(x, y)$  и  $(H - \alpha)^{-1}(x, y)$  суть ядра (или, если угодно, матрицы) операторов  $(L - \alpha)^{-1}$  и  $(H - \alpha)^{-1}$  относительно меры  $\mu$ . Поскольку все интегралы  $\int_Y \dots d\mu(x_i)$  на самом деле суть гиперконечные суммы  $\sum_{x_i \in Y} \dots \mu(x_i)$ , и то же самое справедливо относительно интегралов по мере  $\rho$ , из формулы (13) получаем

$$(14) \quad (H - \alpha)^{-1} f(x) = \int_Y G_\alpha(x, y) f(y) d\mu(y) + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{B^l} \int_Y G_\alpha(x, x_1) \lambda(x_1) G_\alpha(x_1, x_2) \dots \lambda(x_{l-1}) \times \\ \times G_\alpha(x_{l-1}, x_l) \lambda(x_l) G_\alpha(x_l, y) f(y) d\mu(y) d\rho(x_1) \dots d\rho(x_l).$$

Чтобы придать формуле (14) более прозрачный вид, введем три новых оператора. Во-первых, пусть  $\hat{G}_\alpha$  будет внутренним оператором из  $L^2(Y, \mu)$  в  $L^2(B, \rho)$ , определяемым формулой

$$(15) \quad (\hat{G}_\alpha g)(x) = \int_Y G_\alpha(x, y) g(y) d\mu(y);$$

далее, пусть  $\hat{G}_\alpha^*$  — сопряженный к нему оператор

$$(16) \quad (\hat{G}_\alpha^* g)(x) = \int_B G_\alpha(x, y) g(y) d\rho(y);$$

наконец, пусть оператор  $G'_\alpha$  отображает  $L^2(B, \rho)$  в себя в соответствии с формулой

$$(17) \quad (G'_\alpha g)(x) = \int_B G_\alpha(x, y) g(y) d\rho(y).$$

Если мы к тому же положим

$$(18) \quad v(x) = \lambda(x)^{1/2},$$

то сможем переписать формулу (14) в виде

$$(19) \quad (H - \alpha)^{-1} f(x) = G_\alpha f(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{G}_\alpha^* v (v G'_\alpha v)^{l-1} v \hat{G}_\alpha f(x),$$

где функция  $v$  действует умножением.

Существует такое  $z_2 \in {}^*\mathbb{R}$ , что при  $\alpha < z_2$

$$(20) \quad \|v G'_\alpha v\| < 1;$$

для таких  $\alpha$

$$(21) \quad \sum_{l=1}^{\infty} (v G'_\alpha v)^{l-1} = (1 - v G'_\alpha v)^{-1}.$$

Подставляя это равенство в формулу (19), получаем, что при  $\alpha < \min(z_1, z_2)$

$$(22) \quad (H - \alpha)^{-1} f(x) = G_\alpha f(x) + \hat{G}_\alpha^* \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} \hat{G}_\alpha f(x).$$

Вот так, беззаботно вычисляя внутри нестандартного универсума, мы смогли выразить резольвенту оператора  $H$  в виде суммы резольвенты оператора  $L$  и возмущающего члена. Вычисления, приводящие к формуле (22), оправданы только при  $\alpha < \min(z_1, z_2)$ ; но поскольку все операторы, входящие в эту формулу, суть аналитические функции от  $\alpha$ , окончательный результат должен быть справедлив во всякой связной компоненте множества, где выражение справа определено. В частности, это верно в том случае, когда оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)$  строго положителен (см. предложение 5.1.15). Производя вычисления

$$(23) \quad \begin{aligned} & \langle (1/\lambda - G'_\alpha) f, f \rangle_{L^2(B, \rho)} = \\ &= \int_B \left( \frac{f(x)}{\lambda(x)} - \int_B G_\alpha(x, y) f(y) d\rho(y) \right) f(x) d\rho(x) = \\ &= \int_B f(x)^2 \left( \frac{1}{\lambda(x)} - \int_B G_\alpha(x, y) d\rho(y) \right) d\rho(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_B \int_B G_\alpha(x, y) (f(x) - f(y))^2 d\rho(x) d\rho(y), \end{aligned}$$

убеждаемся, что достаточно выбрать такое  $\lambda$ , чтобы

$$(24) \quad \frac{1}{\lambda(x)} \geq \int_B G_\alpha(x, y) d\rho(y) + \varepsilon$$

для некоторого  $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+$  и всех  $x \in B$ . Заметим также, что для любого фиксированного  $f$  выражение

$$\left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right) f, f \right\rangle_{L^2(B, \rho)} = \int_B \frac{f^2}{\lambda} d\rho - \left\langle (L - \alpha)^{-1} \frac{f\rho}{\mu}, \frac{f\rho}{\mu} \right\rangle_{L^2(Y, \mu)},$$

рассматриваемое как функция от  $\alpha$ , возрастает при убывании  $\alpha$ , так что если соотношение (24) справедливо при  $\alpha_0$ , то оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)$  положителен при всех  $\alpha < \alpha_0$ .

Из формулы (22) получаем

$$\begin{aligned} (25) \quad \langle (H - \alpha)^{-1} f, f \rangle &= \\ &= \langle (L - \alpha)^{-1} f, f \rangle + \langle (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} (\hat{G}_\alpha f), (\hat{G}_\alpha f) \rangle_{L^2(B, \rho)}. \end{aligned}$$

Значит, если оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)$  положителен, то и  $H - \alpha$  положителен. Следовательно, форма  $\tilde{\mathcal{E}}$ , порожденная оператором  $H$ , ограничена снизу, и ее стандартная часть  $\tilde{E}$  может быть определена с помощью теории, развитой в §§ 5.1, 5.2. Заметим, что из положительности функций  $\lambda$  и  $\rho$  и из ограниченности снизу формы  $\tilde{\mathcal{E}}$  следует, что если  ${}^\circ|\tilde{\mathcal{E}}_1(u, u)| = \infty$ , то  ${}^\circ|\mathcal{E}_1(u, u)| = \infty$ ; значит, область определения формы  $\tilde{E}$  не меньше, чем область определения исходной формы  $E$ . В соответствии с теоремой 5.1.19, если  $f, g \in L^2(X, m)$ , и  $\hat{f}, \hat{g}$  — поднятия функций  $f$  и  $g$ ,  $\hat{f}, \hat{g} \in SL^2(Y, \mu)$ , то

$$\begin{aligned} (26) \quad \tilde{E}(f, g) &= - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ \{ \alpha^2 \langle G_\alpha \hat{f}, \hat{g} \rangle + \alpha \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle + \\ &+ \alpha^2 \langle (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} \hat{G}_\alpha \hat{f}, \hat{G}_\alpha \hat{g} \rangle_{L^2(B, \rho)} \}. \end{aligned}$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей леммы.

**6.2.1. Лемма.** Пусть для некоторого конечного  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_-$ , некоторого положительного  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  и всех  $x \in B$  справедливо неравенство

$$(27) \quad \frac{1}{\lambda(x)} \geq \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y) + \varepsilon.$$

Тогда форма  $\tilde{\mathcal{E}}$  ограничена снизу числом  $\alpha_0$ , и ее стандартная часть  $\tilde{E}$  — это замкнутая форма, определяемая равенством (26). Более того,  $\mathcal{D}[\tilde{E}] \supset \mathcal{D}[E]$ .

### В. Нетривиальность

Приведенная выше лемма — это только отправная точка для более серьезных исследований. Хотя с ее помощью можно узнать, в каких случаях возмущенная форма  $\tilde{E}$  существует, она

оставляет открытым более важный вопрос — когда возмущение нетривиально, т. е.  $\tilde{E} \neq E$ ; к этому вопросу мы и переходим.

Напомним, что в соответствии с леммой 5.2.4 все, что нужно сделать — это найти такое  $\alpha \in {}^*\mathbb{R}_-$  и такую внутреннюю функцию  $f$ , для которых выполнены следующие условия:

$$(28) \quad -\infty < {}^\circ\alpha < {}^\circ\alpha_0;$$

$$(29) \quad {}^\circ E_1(f, f) < \infty;$$

$$(30) \text{ функции } v = (L - \alpha)^{-1}f \text{ и } w = (H - \alpha)^{-1}f \text{ околостандартны;}$$

$$(31) \quad {}^\circ\|v - w\| \neq 0.$$

Поскольку форма  $L$  строится из стандартного оператора  $A$ ,  $S$ -ограниченный оператор  $(L - \alpha)^{-1}$  отображает околостандартные элементы в околостандартные. Согласно формуле (22)

$$(32) \quad (H - \alpha)^{-1}f - (L - \alpha)^{-1}f = \hat{G}_\alpha^* (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} \hat{G}_\alpha f;$$

поэтому достаточно найти такую удовлетворяющую условию (29) околостандартную функцию  $f$ , для которой правая часть равенства (32) околостандартна и не бесконечно мала.

Мы будем вводить подходящие условия шаг за шагом. Сначала мы сформулируем их довольно абстрактно, в терминах операторов  $\hat{G}'_\alpha$  и  $\hat{G}_\alpha$ , а затем в следующем разделе дадим не столь возвышенную, но зато гораздо более полезную формулировку в терминах интегрального ядра  $G_\alpha(x, y)$  и мер  $\rho$  и  $\mu$ . Но, прежде чем начнется техническая работа, хотелось бы сделать одно замечание. В приведенных выше вычислениях мы использовали  $L^2$ -норму в пространстве внутренних функций на множестве  $B$ . Но с этого момента мы будем в основном использовать  $L^1$ -норму. Причины чисто технические: хотя оба подхода приводят к почти в точности совпадающим результатам, случай  $L^1$  требует более простых вычислений как в этом параграфе, так и в особенности в § 6.4.

Оператор  $\hat{G}_\alpha$  назовем  $\rho$ -плотным, если для любой околостандартной функции  $g \in L^1(B, \rho)$  и для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такая околостандартная функция  $u \in L^2(Y, \mu)$ , что функция  $\hat{G}_\alpha u$  будет  $S$ -ограниченной,  ${}^\circ\mathcal{E}(u, u) < \infty$  и

$$(33) \quad \|g - \hat{G}_\alpha u\|_{L^1(B, \rho)} < \varepsilon.$$

Внутренний оператор  $T: L^\infty(B, \rho) \rightarrow L^2(Y, \mu)$  называется *компактным*, если он отображает  $S$ -ограниченные функции в околостандартные (вспомните предложения 2.1.16 и 2.2.4). Если вместо этого мы рассматриваем оператор  $T$ , действующий из  $L^1(B, \rho)$  в  $L^2(Y, \mu)$ , то будем называть его  *$S$ -ограниченным вне*



множества  $B$ , если для любого компакта  $K$ , удовлетворяющего условию

$$K \cap \text{st}(B) = \emptyset,$$

оператор

$$T: L^1(B, \rho) \rightarrow L^2(Y, \mu_K)$$

$S$ -ограничен, где  $\mu_K$  — внутренняя мера

$$\mu_K(A) = \mu(A \cap {}^*K).$$

Операторная формулировка утверждения о нетривиальности состоит в следующем.

**6.2.2. Лемма.** *Предположим, что  $G_\beta(\cdot, \cdot) \geq 0$  при  $\beta \leq \alpha_0$ , и существует такое конечное  $\alpha$ ,  ${}^\circ\alpha < {}^\circ\alpha_0$ , что оператор  $\hat{C}_\alpha$  является  $\rho$ -плотным, а оператор  $\hat{G}_\alpha^*$  компактен как оператор из  $L^\infty(B, \rho)$  в  $L^2(Y, \mu)$  и  $S$ -ограничен вне множества  $B$  как оператор из  $L^1(B, \rho)$  в  $L^2(Y, \mu)$ . Предположим, далее, что существует такая  $S$ -ограниченная функция  $h$ , для которой функция*

$$(34) \quad g = (1/\lambda - G'_\alpha)h$$

околостандартна в  $L^1(B, \rho)$  и

$$(35) \quad {}^\circ\|\hat{G}_\alpha^*h\|_{L^2(Y, \mu)} \neq 0.$$

Пусть, наконец, существует такое положительное  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , что

$$(36) \quad \frac{1}{\lambda(x)} - \int G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y) \geq \varepsilon$$

для всех  $x \in B$ . Тогда стандартная форма  $\tilde{E}$  на  $L^2(X, t)$ , получаемая из формы  $\tilde{\mathcal{E}}$ , отличается от формы  $E$ .

*Доказательство.* Как мы уже отмечали выше, достаточно найти такую околостандартную функцию  $\tilde{f}$ , удовлетворяющую условию (29), для которой правая часть равенства (32) околостандартна и не бесконечно мала.

Заметим, что в силу уравнения для резольвенты

$$G_{\alpha_0} - G_\alpha = (\alpha_0 - \alpha) G_\alpha G_{\alpha_0}$$

и неотрицательности ядер  $G_\alpha(x, y)$  и  $G_{\alpha_0}(x, y)$  функция  $\alpha \mapsto G_\alpha(x, y)$  для любых  $x, y$  (нестрого) убывает при убывании  $\alpha$  к  $-\infty$ . Следовательно, условие (36) остается справедливым при замене  $\alpha_0$  на  $\alpha$ , и, значит, оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)$  обратим и равенство (34) может быть переписано в виде

$$(37) \quad h = (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} g.$$

Поскольку функция  $h$  предполагалась  $S$ -ограниченной, а оператор  $\hat{G}_\alpha^*$  — компактным, функция

$$u = \hat{G}_\alpha^* h = \hat{G}_\alpha^* (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} g$$

околостандартна и не бесконечно мала в  $L^2(Y, \mu)$ .

Хотя мы не знаем, верно ли, что  $g = \hat{G}_\alpha f$  для какого-либо околостандартного  $f \in L^2(Y, \mu)$ , однако из  $\rho$ -плотности оператора  $G_\alpha$  следует, что существует такая последовательность  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  околостандартных функций, для которой все функции  $\hat{G}_\alpha f_n$  будут  $S$ -ограниченными,  $\mathcal{O}(f_n, f_n) < \infty$  и

$$\|\hat{G}_\alpha f_n - g\|_{L^1(B, \rho)} \leq 1/n.$$

Легко проверить, что оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)^{-1}$ , рассматриваемый как оператор и в  $L^1(B, \rho)$  и в  $L^\infty(B, \rho)$ , имеет норму меньше  $1/\varepsilon$ . В самом деле, для случая  $L^\infty$  пусть

$$\varepsilon_\alpha(x) = \frac{1}{\lambda(x)} - \int_B G_\alpha(x, y) d\rho(y) \geq \varepsilon,$$

и пусть функция  $f$  достигает максимума в точке  $x$ . Тогда, учитывая неотрицательность функции  $G_\alpha(x, y)$ , имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right) f \right\|_\infty &\geq \left| \frac{f(x)}{\lambda(x)} - \int_B G_\alpha(x, y) f(y) d\rho(y) \right| = \\ &= \left| \varepsilon_\alpha(x) f(x) + \int_B G_\alpha(x, y) (f(x) - f(y)) d\rho(y) \right| \geq |\varepsilon_\alpha(x) f(x)| \geq \varepsilon \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Случай  $L^1$  мы оставляем читателю.

Применяя оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)^{-1}$  к последовательности функций  $\{\hat{G}_\alpha f_n\}$ , видим, что последовательность

$$\{(1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} \hat{G}_\alpha f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

состоит из  $S$ -ограниченных функций и сходится к  $h$  в  $L^1(B, \rho)$ . В силу условий на оператор  $\hat{G}_\alpha^*$  функции

$$u_n = \hat{G}_\alpha^* (1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} \hat{G}_\alpha f_n$$

околостандартны в  $L^2(Y, \mu)$  и сходятся к функции  $u$  во всех пространствах  $L^2(Y, \mu_k)$ . Осталось только показать, что  $\|u_n\|_{L^2(Y, \mu)} \neq 0$  для некоторого  $n$ , так как тогда в качестве искомой функции  $f$  можно было бы взять соответствующую функцию  $f_n$ .

Но это просто: мера  $m$  — радоновская, и  $m(\text{st}(B)) = 0$ , а функция  $u$  околостандартна. Значит, должен найтись такой ком-

пакт  $K$ , что  $K \cap \text{st}(B) = \emptyset$  и  ${}^\circ\|u\|_{L^2(\mu_K)} \neq 0$ . Поскольку последовательность  $\{u_n\}$  сходится к  $u$  в  $L^2(\mu_K)$ , должно найтись такое  $n$ , что  $0 < {}^\circ\|u_n\|_{L^2(\mu_K)} \leq {}^\circ\|u_n\|_{L^2(\mu)}$ .  $\square$

**Замечание.** Условие  $G_\beta(\cdot, \cdot) \geq 0$  при  $\beta \leq \alpha_0$  выполнено, например, если

$$\mathcal{E}(f, g) = \mathcal{E}_D(f, g) + \int Vfg \, d\mu,$$

где  $\mathcal{E}_D$  — форма Дирихле, а  $V$  — функция, ограниченная снизу константой  $\alpha_0$ .

### С. Основной результат

Условия леммы 6.2.2 громоздки и многочисленны, и у читателя могло сложиться впечатление, что все они были подобраны с единственной целью — чтобы сработало доказательство. Чтобы показать, что это не так, мы переведем их в простые и естественные условия на интегральные ядра  $G_\alpha(x, y)$ .

Сначала сформулируем некий набор постоянно действующих условий, которые справедливы для ядер резольвент наиболее интересных операторов (по поводу оператора Шредингера см., например, § B7 книги Simon [3]).

**6.2.3. Условие.** Для любого конечного  $\alpha < \alpha_0$  справедливы следующие утверждения:

(i) Если  $x, y, x', y' \in Y$  околостандартны, и  $x \approx x', y \approx y'$ , но  $x \not\approx y$ , то число  $G_\alpha(x, y)$  околостандартно и

$$G_\alpha(x, y) \approx G_\alpha(x', y').$$

(ii) Если  $x \in \text{Ns}(Y)$  и  $y \in Y - \text{Ns}(Y)$ , то

$$G_\alpha(x, y) \approx 0.$$

Простым, но важным следствием условий (i), (ii) является утверждение

(iii) Если  $K \subset X$  — компакт,  $B$  — внутреннее множество, и  $K \cap \text{st}(B) = \emptyset$ , то ограничение функции  $G_\alpha(x, y)$  на  $*K \times B$  является  $S$ -ограниченным.

В дополнение к условиям 6.2.3 нам потребуются условия интегрируемости. Первым примером будет следующая лемма.

**6.2.4. Лемма.** Предположим, что  $G_\alpha(\cdot, \cdot)$  удовлетворяет условиям 6.2.3 и

$$G_\alpha(x, y) \cdot G_\alpha(x, z) \in SL^1(\mu \times \rho \times \rho).$$

Тогда оператор  $\hat{G}_\alpha^*$  компактен как оператор из  $L^\infty(B, \rho)$  в  $L^2(Y, \mu)$  и  $S$ -ограничен вне  $B$  как оператор из  $L^1(B, \rho)$  в  $L^2(Y, \mu)$ .

*Доказательство.* Сначала проверим  $S$ -ограниченность. Пусть  $K$  — компакт, и  $K \cap \text{st}(B) = \emptyset$ . Согласно условию (iii)

$$|G_\alpha(x, y)| \leq N$$

для некоторого  $N \in \mathbb{N}$  и всех  $x \in {}^*K$ ,  $y \in B$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\hat{G}_\alpha^* f\|_{L^2(\mu_K)}^2 &= \int_{{}^*K} \left( \int_B G_\alpha(x, y) f(y) d\rho(y) \right)^2 d\mu_K(x) \leq \\ &\leq N^2 \int_{{}^*K} \left( \int_B f(y) d\rho(y) \right)^2 d\mu_K(x) \leq N^2 \mu({}^*K)^2 \|f\|_{L^1(\rho)}^2, \end{aligned}$$

так что из конечности меры  $\mu({}^*K)$  следует  $S$ -ограниченность вне  $B$  оператора  $\hat{G}_\alpha^*$ .

Для проверки компактности сначала заметим, что поскольку для всех внутренних  $f$  и  $A$

$$\begin{aligned} \int_A \left( \int_B G_\alpha(x, y) f(y) d\rho(y) \right)^2 d\mu(x) &\leq \\ \leq \|f\|_\infty \cdot \int_{A \times B \times B} |G_\alpha(x, y) G_\alpha(x, z)| d(\mu \times \rho^2)(x, y, z), \end{aligned}$$

функция  $\hat{G}_\alpha^* f$  принадлежит классу  $SL^2(\mu)$  для всех  $S$ -ограниченных функций  $f$ .

Далее, согласно теореме Кейслера — Фубини 3.2.14 (точнее, ее обобщения, охватывающего случай бесконечных мер), функция

$$(38) \quad (y, z) \mapsto G_\alpha(x, y) G_\alpha(x, z)$$

принадлежит классу  $SL^1(\rho^2)$  для почти всех  $x$ . Если точка  $x$  не околостандартна, то правая часть неравенства

$$\begin{aligned} |\hat{G}_\alpha^* f(x)|^2 &= \left( \int_B G_\alpha(x, y) f(y) d\rho(y) \right)^2 \leq \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \int_{B \times B} |G_\alpha(x, y) G_\alpha(x, z)| d\rho^2(y, z) \end{aligned}$$

бесконечно мала, так как  $G_\alpha(x, y) \approx 0$  для околостандартных  $y$ , и  $L(\rho)(Y - \text{Ns}(Y)) = 0$ .

Наконец, выберем две такие бесконечно близкие околостандартные точки  $x_1, x_2$ , что  $\text{st}(x_1) \notin \text{st}(B)$  и функция (38) при

$x = x_1$  и при  $x = x_2$  принадлежит классу  $SL^1(\rho^2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & |(\hat{G}_\alpha^* f(x_1))^2 - (\hat{G}_\alpha^* f(x_2))^2| \leq \\ & \leq \|f\|_\infty^2 \int_{B \times B} |G_\alpha(x_1, y) G_\alpha(x_1, z) - G_\alpha(x_2, y) G_\alpha(x_2, z)| d\rho^2(y, z), \end{aligned}$$

и величина справа бесконечно мала в силу условия 6.2.3(i).

Мы показали, что функция  $\hat{G}_\alpha^* f$  принадлежит классу  $SL^2(\mu)$ , бесконечно мала почти во всех не околостандартных точках и  $S$ -непрерывна вне множества меры нуль. Следовательно, она околостандартна в  $L^2(Y, \mu)$ , и лемма доказана.  $\square$

Доказанное утверждение касается условий леммы 6.2.2 на оператор  $\hat{G}_\alpha^*$ ; теперь нужно рассмотреть условия на оператор  $1/\lambda - G'_\alpha$ . Основная трудность состоит в том, что мы должны оперировать одновременно с двумя разными параметрами  $\alpha_0$  и  $\alpha$ ; в то время как мы можем *выбрать*  $\lambda$  таким, чтобы оператор

$$1/\lambda - G'_{\alpha_0}$$

удовлетворял условиям леммы 6.2.1, мы должны *доказать*, что оператор

$$1/\lambda - G'_\alpha$$

удовлетворяет условиям леммы 6.2.2. Поскольку

$$1/\lambda - G'_\alpha = (1/\lambda - G'_{\alpha_0}) + (G'_{\alpha_0} - G'_\alpha),$$

а уравнение для резольвенты утверждает, что

$$G_{\alpha_0} - G_\alpha = (\alpha_0 - \alpha) G_\alpha G_{\alpha_0},$$

нужно изучить оператор

$$(39) \quad (G'_{\alpha_0} - G'_\alpha) f(y) = (\alpha_0 - \alpha) \int_B \int_Y G_\alpha(x, y) G_{\alpha_0}(x, z) f(y) d\mu(x) d\rho(z).$$

**6.2.5. Лемма.** *Предположим, что  $G_\alpha$  удовлетворяет условиям 6.2.3 и*

$$(40) \quad G_\alpha(x, y) G_{\alpha_0}(x, z) \in SL^1(\mu \times \rho^2).$$

*Тогда для любой  $S$ -ограниченной внутренней функции  $h$  функция  $(G'_{\alpha_0} - G'_\alpha) h$  околостандартна в  $L^1(B, \rho)$ .*

*Доказательство.* Из формул (39), (40) и теоремы Кейслера — Фубини 3.2.14 следует, что

$$(G'_{\alpha_0} - G'_\alpha) h \in SL^1(\rho).$$

Согласно той же теореме существует такое множество  $A \subset B$ ,  $L(\rho)(A) = 1$ , что для всех  $y \in A$

$$(41) \quad (x, y) \mapsto G_\alpha(x, y) G_{\alpha_0}(x, z) \in SL^1(\mu \times \rho).$$

Пусть  $y_1, y_2$  — бесконечно близкие околостандартные элементы множества  $A$ . Тогда

$$\begin{aligned} & |(G'_{\alpha_0} - G'_\alpha)h(y_1) - (G'_{\alpha_0} - G'_\alpha)h(y_2)| \leq \\ & \leq (\alpha_0 - \alpha) \|h\|_\infty \int_B \int_Y |G_\alpha(x, y_1) - G_\alpha(x, y_2)| \cdot |G_{\alpha_0}(x, z)| d\mu(x) d\rho(z), \end{aligned}$$

и правая часть этой оценки бесконечно мала в силу условий 6.2.3 и (41). Лемма доказана.  $\square$

Теперь все готово для основной теоремы.

**6.2.6. Теорема.** *Предположим, что существуют два таких конечных числа  $\alpha_0, \alpha \in {}^*\mathbb{R}$ ,  ${}^\circ\alpha < {}^\circ\alpha_0 < 0$ , что оператор  $G_\alpha$  является  $\rho$ -плотным и удовлетворяет условиям 6.2.3, и  $G_\beta(\cdot, \cdot) \geq 0$  для всех  $\beta \leq \alpha_0$ . Предположим, далее, что*

$$(42) \quad G_{\alpha_0}(x, y) G_{\alpha_0}(x, z) \in SL^1(\mu \times \rho^2),$$

*и функция  $\lambda$  выбрана таким образом, чтобы функция*

$$(43) \quad \frac{1}{\lambda(x)} - \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y)$$

*была околостандартной в  $L^1(B, \rho)$  и ограниченной снизу положительным действительным числом. Тогда стандартная часть формы  $\tilde{\mathcal{E}}$  является нетривиальным возмущением формы  $E$ .*

*Доказательство.* Возьмем  $h = 1$  и воспользуемся леммой 6.2.2. В силу  $\rho$ -плотности и положительности оператора  $G_\alpha$  имеем  $\|\hat{G}_\alpha^* 1\|_{L^2(\mu)} \neq 0$ . Заметим также, что в силу условия  $G_\beta(\cdot, \cdot) \geq 0$  функция  $\alpha \mapsto G_\alpha(x, y)$  (нестрого) убывает вместе с  $\alpha$  при всех  $x, y$ , так что условие (42) влечет за собой условия интегрируемости в леммах 6.2.4 и 6.2.5. Согласно первой из этих лемм условия, накладываемые на оператор  $\hat{G}_\alpha^*$  леммой 6.2.2, выполнены; осталось только проверить, что функция

$$(44) \quad g = (1/\lambda - G'_\alpha)(1) = (1/\lambda - G'_{\alpha_0})(1) + (G'_{\alpha_0} - G'_\alpha)(1)$$

околостандартна в  $L^1(B, \rho)$ . Но второе слагаемое  $(G'_{\alpha_0} - G'_\alpha)(1)$  околостандартно в силу леммы 6.2.5, а первое

$$(45) \quad \left(\frac{1}{\lambda} - G'_{\alpha_0}\right)(1)(x) = \frac{1}{\lambda(x)} - \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y)$$

— в силу выбора функции  $\lambda$ . Теорема доказана.  $\square$

Во введении к этому параграфу мы отмечали как наиболее интересный случай ситуацию, когда  $\lambda$  бесконечно мало, но тем не менее возмущение нетривиально. Чтобы увидеть, как это получается, заметим, что мы вынуждены выбирать бесконечно малое  $\lambda$ , если величина

$$(46) \quad \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y)$$

бесконечно велика. Поскольку ядро  $G_{\alpha_0}$  обычно имеет сингулярность на диагонали, такое может случиться, если мера сосредоточена на «маленьком» множестве. Приведенные выше рассуждения показывают, что нетривиальность возмущения  $\tilde{\mathcal{E}}$  фактически зависит не от конечности интеграла (46), а от конечности разности

$$(47) \quad \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y) - \int_B G_{\alpha}(x, y) d\rho(y).$$

На первый взгляд может показаться маловероятным, чтобы такая разность между бесконечно большими объектами оказалась конечной. Но здесь на сцену выходит уравнение для резольвенты; оно напоминает нам, что

$$\int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y) - \int_B G_{\alpha}(x, y) d\rho(y) = (\alpha_0 - \alpha) \int_B G_{\alpha} G_{\alpha_0}(x, y) d\rho(y),$$

где

$$G_{\alpha} G_{\alpha_0}(x, y) = \int_Y G_{\alpha}(x, z) G_{\alpha_0}(x, z) d\mu(z).$$

Ключевой момент состоит в том, что благодаря интегрированию по мере  $\mu$  новое ядро  $G_{\alpha} G_{\alpha_0}(\cdot, \cdot)$  обычно гораздо менее сингулярно, чем старое  $G_{\alpha_0}(\cdot, \cdot)$ , и, следовательно, имеются реальные шансы на то, что разность (47) будет конечной даже тогда, когда интеграл (46) бесконечно велик. Именно в таких случаях мы и получаем нетривиальные возмущения с помощью бесконечно малых  $\lambda$ .

Чтобы проиллюстрировать разницу между  $G_{\alpha_0}(\cdot, \cdot)$  и  $G_{\alpha} G_{\alpha_0}(\cdot, \cdot)$ , процитируем следующие результаты о резольвенте  $R_{\alpha}$  лапласиана  $-\Delta$  в  $\mathbb{R}^d$  (лемма 6.3.1 содержит более детальную информацию): при  $d = 1$  функция  $R_{\alpha_0}(x, y)$  непрерывна и ограничена; при  $d = 2$  она имеет на диагонали сингулярность, пропорциональную  $-\ln\|x - y\|$ ; при  $d > 2$  сингулярность на диагонали пропорциональна  $\|x - y\|^{2-d}$ . С другой стороны, интегральное ядро  $R_{\alpha} R_{\alpha_0}(x, y)$  непрерывно и ограничено при  $d \leq 3$ ; имеет сингулярность типа  $-\ln\|x - y\|$  при  $d = 4$ ; имеет сингулярность типа  $\|x - y\|^{4-d}$  при  $d > 4$ . Как мы увидим на примерах в сле-

дующих двух параграфах, следствием такого поведения ядер является то, что возмущения лапласиана, индуцированные бесконечно малыми  $\lambda$ , как правило существуют в пространствах размерности на две единицы выше, чем те, что получаются из конечных  $\lambda$ .

### D. Случай стандартных $\lambda$

Давайте все же сначала посмотрим внимательнее, что получается в ситуациях, когда можно выбрать  $\lambda$  не бесконечно малым. С нестандартной точки зрения этот случай выглядит менее увлекательным, но гиперконечная теория и здесь имеет что сказать: она дает эффективный метод доказательства того, что форма

$$(48) \quad E(\tilde{f}, \tilde{g}) - \int_C \tilde{\lambda}(x) \tilde{f}(x) \tilde{g}(x) d\tilde{\rho}(x)$$

замыкаема.

Напомним, каковы основные ингредиенты нашей задачи:  $E$  — это плотно определенная замкнутая неотрицательная форма на  $L^2(X, m)$ ; вероятностная мера  $\tilde{\rho}$  сосредоточена на замкнутом множестве  $C$ ,  $m(C) = 0$ ;  $\tilde{\lambda}: C \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная борелевская функция. Пусть  $E_0$  — форма, определенная на ограниченных и непрерывных элементах множества  $\mathcal{D}[\mathcal{E}]$  равенством

$$(49) \quad E_0(\tilde{f}, \tilde{g}) = E(\tilde{f}, \tilde{g}) - \int_C \tilde{\lambda}(x) \tilde{f}(x) \tilde{g}(x) d\tilde{\rho}(x).$$

Мы хотим узнать, можно ли продолжить  $E_0$  до замкнутой формы.

По чисто техническим причинам ограничимся случаем, когда  $E$  — форма Дирихле. Тогда мы можем выбрать ее гиперконечное представление  $\mathcal{E}$ , само являющееся формой Дирихле, и тогда, если  $G_\alpha$  — резольвента формы  $\mathcal{E}$ , то ядро  $G_\alpha(x, y)$  неотрицательно для всех  $x, y, \alpha$ , и

$$(50) \quad \| -\alpha G_\alpha(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

для всех  $\alpha < 0$  и  $f$ . В замечании следующем за доказательством теоремы, мы кратко прокомментируем случай, когда  $E$  — не форма Дирихле.

**6.2.7. Теорема.** Пусть  $\mathcal{E}$  — гиперконечное представление формы Дирихле  $E$ , и  $\rho$  — гиперконечное представление меры  $\tilde{\rho}$ . Пусть  $\lambda$  —  $S$ -ограниченное поднятие функции  $\tilde{\lambda}$  относительно меры  $\rho$ . Предположим, что резольвента  $G_\alpha$  формы  $\mathcal{E}$  удовлетворяет условию

$$(51) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left\| \int_B G_\alpha(\cdot, y) d\rho(y) \right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$



и пусть любая функция  $\tilde{f} \in \mathcal{D}[E_0]$  имеет такое  $S$ -ограниченное  $L^2(\mu + \rho)$ -поднятие  $\tilde{f}$ , для которого  ${}^\circ\mathcal{E}(\tilde{f}, \tilde{f}) < \infty$  и

$$(52) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ\|f + \alpha \hat{G}_\alpha f\|_{L^2(\rho)} = 0.$$

Если существует такое  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  и такое конечное  $\alpha_0 \in {}^*\mathbb{R}_-$ , что для всех  $x$

$$(53) \quad \lambda(x) \leq \left( \int_B G_\alpha(x, y) d\rho(y) + \varepsilon \right)^{-1},$$

то стандартная часть формы  $\tilde{\mathcal{E}}(f, g) = \mathcal{E}(f, g) - \int_B \lambda f g d\rho$  является замкнутым продолжением формы  $E_0$ .

*Доказательство.* То, что стандартная часть формы  $\tilde{\mathcal{E}}$  замкнута, следует непосредственно из условия (53) и из леммы 6.2.1. Чтобы доказать, что она продолжает форму  $E_0$  возьмем  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{D}[E_0]$  и выберем их поднятия  $f, g$  в соответствии с условием (52). Согласно равенству (26) достаточно проверить, что

$$(54) \quad E_0(\tilde{f}, \tilde{g}) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ \left( \alpha^2 \langle G_\alpha f, g \rangle + \alpha \langle f, g \rangle + \right. \\ \left. + \alpha^2 \left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} \hat{G}_\alpha f, \hat{G}_\alpha g \right\rangle_{L^2(\rho)} \right),$$

а поскольку, согласно теореме 5.1.19,

$$(55) \quad E(\tilde{f}, \tilde{g}) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ (\alpha^2 \langle G_\alpha f, g \rangle + \alpha \langle f, g \rangle),$$

это сводится к тому, чтобы показать, что

$$(56) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ \left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)} = {}^\circ \int_B \lambda f g d\rho.$$

Поскольку в силу условия (52)

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ \langle \lambda (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \rangle_{L^2(\rho)} = {}^\circ \int_B \lambda f g d\rho,$$

равенство (56) будет доказано, если мы сумеем показать, что

$$(57) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} {}^\circ \left\{ \left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)} - \right. \\ \left. - \langle \lambda (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \rangle_{L^2(\rho)} \right\} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & \left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)} - \\
 & - \langle \lambda (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \rangle_{L^2(\rho)} = \\
 & = \left\langle \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)} - \\
 & - \left\langle \lambda \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right) \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)} = \\
 & = \left\langle \lambda G'_\alpha \left( \frac{1}{\lambda} - G'_\alpha \right)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f, (-\alpha \hat{G}_\alpha) g \right\rangle_{L^2(\rho)},
 \end{aligned}$$

а поскольку  $G_\alpha(x, y) \geq 0$ , оператор  $(1/\lambda - G'_\alpha)^{-1}$ , рассматриваемый как оператор в  $L^\infty(B)$ , имеет норму меньше  $1/\varepsilon$ . В силу оценки (50) функции  $(-\alpha \hat{G}_\alpha) f$  и  $(-\alpha \hat{G}_\alpha) g$  являются  $S$ -ограниченными, и, значит, из условия (51) следует, что правая часть в формуле (58) стремится к нулю.  $\square$

**Замечание.** Мы использовали предположение, что  $\mathcal{E}$  — форма Дирихле, в единственном месте — когда доказывали  $S$ -ограниченность функций  $(1/\lambda - G'_\alpha)^{-1} (-\alpha \hat{G}_\alpha) f$  и  $(-\alpha \hat{G}_\alpha) g$ . В общем случае непосредственно очевидно лишь то, что они лежат в  $L^2(B, \rho)$ . Это достаточно, если заменить условие (51) более сильным условием

$$(59) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left\| \int_B G_\alpha(x, y)^2 d\rho(y) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Однако, поскольку сингулярности функции  $G_\alpha(x, y)$  усиливаются, когда мы возводим ее в квадрат, условие (59) оказывается чрезмерно ограничительным. Поэтому удовлетворительное рассмотрение форм общего вида требует более тонких оценок, которые мы оставляем читателю.

### *Е. Перевод на стандартный язык*

Приведенные выше результаты сформулированы в терминах резольвенты  $G_\alpha$  гиперконечной формы  $\mathcal{E}$ . С нестандартной точки зрения это только естественно, но в стандартной ситуации часто более удобна формулировка, использующая резольвенту  $R_\alpha$  стандартной формы  $E$ . Поскольку перевод полученных результатов на стандартный язык далеко не так тривиален, как может показаться на первый взгляд, мы дадим краткий эскиз, по-видимому, наилучшего подхода.

Идея проста: если дана стандартная форма  $E$ , удовлетворяющая стандартным аналогам условий теорем 6.2.6 или 6.2.7, то,

как мы покажем, она является стандартной частью некоторой гиперконечной формы, удовлетворяющей условиям этих теорем. В § 5.2 для построения гиперконечных представлений мы использовали связанную с формой полугруппу, но в настоящем контексте, когда полугруппы менее важны, чем резольвенты, предпочтительна иная линия атаки.

Возвратимся к ситуации § 5.2. Пусть  $K$  — стандартное гильбертово пространство, и  $H$  — гиперконечномерное  $S$ -плотное подпространство пространства  $*K$ . Пусть  $E$  — симметрическая неотрицательная плотно определенная форма на  $K$ , и  $R_\alpha$  — ее резольвента. Зафиксируем  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_-$  и определим

$$(60) \quad G_{\alpha_0} = P(*R_{\alpha_0})P,$$

где  $P: *K \rightarrow H$  — ортогональная проекция. Ясно, что оператор  $G_{\alpha_0}$  как линейное отображение из  $H$  в  $H$  обратим, и

$$(61) \quad A = G_{\alpha_0}^{-1} + \alpha_0$$

— симметрический неотрицательный оператор на  $H$ . Форма

$$(62) \quad \mathcal{E}(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

будет тем гиперконечным представлением формы  $E$ , с которым мы будем работать.

Проверим, что форма  $E$  в самом деле является стандартной частью формы  $\mathcal{E}$ . Если  $G_\alpha$  — резольвента формы  $\mathcal{E}$  и  $f \in K$ , то две функции из  $\mathbb{R}_-$  в  $\mathbb{R}$ , заданные формулами

$$(63) \quad \alpha \mapsto \langle R_\alpha f, f \rangle, \quad \alpha \mapsto {}^\circ \langle G_\alpha * f, * f \rangle,$$

аналитичны. Из разложений в ряд

$$(64) \quad G_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n G_{\alpha_0}^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n (P * R_{\alpha_0} P)^{n+1},$$

$$(65) \quad R_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n R_{\alpha_0}^{n+1}$$

легко видеть, что они совпадают в окрестности точки  $\alpha_0$ , и, значит, равны при всех отрицательных  $\alpha$ . Если  $F$  — стандартная часть формы  $\mathcal{E}$ , то из теоремы 5.1.19 известно, что

$$(66) \quad F(f, f) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} ({}^\circ \langle G_\alpha * f, * f \rangle + \alpha \langle P * f, P * f \rangle),$$

а из соответствующего стандартного результата (см., например, Fukushima [3], лемма 1.3.4) имеем

$$(67) \quad E(f, f) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\alpha^2 \langle R_\alpha f, f \rangle + \alpha \langle f, f \rangle).$$

Поскольку эти выражения равны друг другу,  $E$  в самом деле является стандартной частью формы  $\mathcal{E}$ .

Возвращаясь к ситуации данного параграфа, будем с этого момента предполагать, что  $K = L^2(X, m)$ , где  $X$  — хаусдорфово пространство и  $m$  — радоновская мера. Следующие условия суть стандартные аналоги условий 6.2.3(i), (ii).

**6.2.8. Условие.** Резольвента  $R_\alpha$  имеет симметричное ядро  $R_\alpha(\cdot, \cdot)$  для которого:

(i) функция  $R_\alpha(\cdot, \cdot)$  непрерывна вне диагонали, т. е. во всех точках  $(x, y)$  где  $x \neq y$ ;

(ii) для любого  $x \in X$  и любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такой компакт  $K_\varepsilon$ , что  $|R_\alpha(x, y)| < \varepsilon$  для всех  $y \notin K_\varepsilon$ .

**Замечание.** Из сформулированных условий следует, что если точка  $x$  не имеет компактной окрестности, то  $R_\alpha(x, y) = 0$  для всех  $y \neq x$ . Поэтому эти условия кажутся имеющими весьма малую ценность для не локально компактных пространств. В бесконечномерном случае, однако, ситуация часто может быть спасена с помощью выбора более слабой топологии, чем исходно заданная.

Напомним, что  $C$  — это замкнутое подмножество пространства  $X$ , имеющее  $m$ -меру 0, и  $\tilde{\rho}$  — вероятностная мера, сосредоточенная на  $C$ . Будем говорить, что оператор  $R_\alpha$  является  $\tilde{\rho}$ -плотным, если для любого  $g \in L^1(C, \tilde{\rho})$  и любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такое  $u \in \mathcal{D}[E]$ , что функция

$$\int_C R_\alpha(\cdot, y) u(y) dm(y)$$

ограничена на  $C$  и отличается от функции  $g$  по  $L^1(\tilde{\rho})$ -норме не более чем на  $\varepsilon$ . Заметим, что из уравнений для резольвенты

$$R_\alpha = R_{\alpha_0}(I - (\alpha - \alpha_0)R_\alpha)$$

вытекает, что если один из операторов  $R_\alpha$  является  $\tilde{\rho}$ -плотным, то и все они  $\tilde{\rho}$ -плотны.

Следующее определение дает точную формулировку того, что мы ищем.

**6.2.9. Определение.** Симметрическая ограниченная снизу форма  $\tilde{E}$  называется возмущением формы  $E$ , сосредоточенным на множестве  $C$ , если

(i)  $\mathcal{D}[E] \subset \mathcal{D}[\tilde{E}]$ ;

(ii)  $E \neq \tilde{E}$ ;

(iii) если  $f, g \in \mathcal{D}[E]$  и существует такая окрестность множества  $C$ , на которой функция  $f$  непрерывна, а  $g$  обращается в нуль, то  $E(f, g) = \tilde{E}(f, g)$ .

Теперь мы можем перевести теорему 6.2.6 в следующую стандартную теорему.

**6.2.10. Теорема.** Пусть  $E$  — плотно определенная неотрицательная симметрическая форма на  $L^2(X, t)$ , где  $X$  — хаусдорфово пространство,  $t$  — радоновская мера на  $X$ . Пусть  $\tilde{p}$  — радоновская вероятностная мера, сосредоточенная на замкнутом множестве  $C \subset X$ ,  $t(C) = 0$ . Предположим, что ядро резольвенты  $R_\alpha(x, y)$  неотрицательно  $\tilde{p}$ -плотно и удовлетворяет условию 6.2.8. Если к тому же

$$(68) \quad \|\alpha R_\alpha f + f\|_{L^2(\tilde{p})} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow -\infty$$

для всех функций  $f \in \mathcal{D}[E]$ , непрерывных в окрестности множества  $C$ , и существует такое  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$ , что

$$(69) \quad R_{\alpha_0}(x, y) R_{\alpha_0}(x, z) \in L^1(t \times \tilde{p}^2),$$

то форма  $E$  имеет возмущение, сосредоточенное на  $C$ .

**Доказательство.** Начнем с аккуратного выбора гиперконечных представлений  $Y, B, \mu, \rho$  множеств  $X, C$  и мер  $t, \tilde{p}$  соответственно. Напомним, что, согласно доказательству следствия 3.4.10, существует такое гиперконечное разбиение множества  $*X$ , что каждый класс разбиения является  $*$ -борелевским множеством, и класс каждой околостандартной точки содержится в ее монаде. Измельчим это разбиение, введя отношение эквивалентности  $\sim$ , а именно, полагая  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  принадлежат одному классу разбиения и оба либо принадлежат, либо не принадлежат множеству  $*C$ . Для каждого класса эквивалентности  $p$  выберем элемент  $x_p \in p$ , и положим

$$Y = \{x_p \mid p \text{ — класс эквивалентности отношения } \sim\},$$

$$B = \{x_p \mid p \text{ — класс эквивалентности, } p \subset *C\}.$$

Пусть  $\mu$  — гиперконечная мера на  $Y$ , заданная равенством

$$\mu\{x_p\} = *t(p),$$

и  $\rho$  — мера на  $B$ , заданная равенством

$$\rho\{x_p\} = *\tilde{p}(p).$$

Заметим, что  $t = L(\mu) \circ st^{-1}$  и  $\tilde{p} = L(\rho) \circ st^{-1}$ .

Если  $P$  — естественная «проекция» из  $*L^2(X, t)$  на  $L^2(Y, \mu)$ , пусть

$$(70) \quad G_{\alpha_0} = P(*R_{\alpha_0})P,$$

как в формуле (60). Как уже отмечалось,  $E$  есть стандартная часть гиперконечной формы  $\mathcal{E}$ , определенной в (62). Ключевое

наблюдение состоит в том, что если  $\tilde{v} = m + \tilde{\rho}$ , то функция

$$(71) \quad G_{\alpha_0}(x_p, x_q) = {}^* \tilde{v}(p)^{-1} \cdot {}^* \tilde{v}(q)^{-1} \int_p \int_q {}^* R_{\alpha_0}(x, y) d {}^* \tilde{v}(x) d {}^* \tilde{v}(y)$$

служит ядром для  $G_{\alpha_0}$  как оператора на пространстве  $L^2(Y, \mu)$ . Используя эту формулу легко проверить, что  $\tilde{\rho}$ -плотность оператора  $R_{\alpha}$  влечет  $\rho$ -плотность оператора  $G_{\alpha}$  и что если  $R_{\alpha}$  удовлетворяет условиям 6.2.8, то  $G_{\alpha}$  удовлетворяет условиям 6.2.3.

Пусть  $v = \mu + \rho$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{Y \times B^2} G_{\alpha_0}(x, y) G_{\alpha_0}(x, z) d(\mu \times \rho^2)(x, y, z) = \\ & = \int_{Y-B} \left( \int_B G_{\alpha_0}(x, y) dv(y) \right)^2 dv(x) \leq \int_{*X-*C} \left( \int_{*C} {}^* R_{\alpha_0}(x, y) d {}^* \tilde{v}(y) \right)^2 d {}^* \tilde{v}(x) \approx \\ & \approx \int_{X \times C^2} R_{\alpha_0}(x, y) R_{\alpha_0}(x, z) d(m \times \tilde{\rho}^2)(x, y, z), \end{aligned}$$

и, значит, условие (69) влечет  $S$ -интегрируемость функции  $G_{\alpha_0}(x, y) G_{\alpha_0}(x, z)$ . Но тогда все условия теоремы 6.2.6 выполнены, так что стандартная форма  $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{E}}$  является нетривиальным возмущением формы  $E$ .

Осталось только проверить, что возмущение сосредоточено на множестве  $C$  в смысле определения 6.2.9(iii). Предположим, что существует окрестность множества  $C$ , в которой функция  $f$  непрерывна, а функция  $g$  равна нулю; пусть  $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^2(Y, v)$  суть поднятия функций  $f$  и  $g$  относительно меры  $v$ . Из условия (68) получаем, что

$$(72) \quad {}^{\circ} \|\alpha \hat{G}_{\alpha} \tilde{f} + \tilde{f}\|_{L^2(\rho)} \rightarrow 0$$

и

$$(73) \quad {}^{\circ} \|\alpha \hat{G}_{\alpha} \tilde{g}\|_{L^2(\rho)} \rightarrow 0$$

при  ${}^{\circ} \alpha \rightarrow -\infty$ . Тогда согласно формуле (26)

$$(74) \quad \tilde{E}(f, g) - E(f, g) = \lim_{{}^{\circ} \alpha \rightarrow -\infty} \langle (1/\lambda - G'_{\alpha})^{-1} (-\alpha \hat{G}_{\alpha}) \tilde{f}, (-\alpha \hat{G}_{\alpha}) \tilde{g} \rangle_{L^2(\rho)}$$

и правая часть формулы (74) равна нулю в силу формул (72), (73) и равномерной ограниченности операторов  $(1/\lambda - G'_{\alpha})^{-1}$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Форма  $E$  может, вообще говоря, иметь много разных возмущений, сосредоточенных на множестве  $C$ , поскольку

мы свободны в выборе разности

$$\frac{1}{\lambda(x)} - \int_B G_{\alpha_0}(x, y) d\bar{\rho}(y)$$

в теореме 6.2.6, а также, до некоторой степени, в выборе меры  $\bar{\rho}$  на  $C$ .

Используя те же методы, легко доказать следующий стандартный аналог теоремы 6.2.7.

**6.2.11. Теорема.** Пусть  $E$  — форма Дирихле на  $L^2(X, m)$ , где  $X$  — хаусдорфово пространство и  $m$  — радоновская мера на нем. Предположим, что ядро резольвенты  $R_\alpha(x, y)$  удовлетворяет условиям 6.2.8. Пусть задано замкнутое множество  $C \subset X$ ,  $m(C) = 0$  радоновская вероятностная мера  $\bar{\rho}$  на  $C$  и ограниченная борелевская функция  $\tilde{\lambda}: C \rightarrow \mathbb{R}$ . На непрерывных и ограниченных элементах множества  $\mathcal{D}[E]$  определим форму  $E_0$  равенством

$$(75) \quad E_0(f, g) = E(f, g) - \int_C \tilde{\lambda} f g d\bar{\rho}.$$

Предположим, что

$$(76) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{C \times C} R_\alpha(x, y) d\bar{\rho}(x) d\bar{\rho}(y) = 0,$$

что для всех  $f \in \mathcal{D}[E_0]$

$$(77) \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \|f + \alpha R_\alpha f\|_{L^2(\bar{\rho})} = 0$$

и что существуют такие  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , что для всех  $x$

$$(78) \quad \tilde{\lambda}(x) \leq \left( \int_C R_{\alpha_0}(x, y) d\bar{\rho}(y) + \varepsilon \right)^{-1}.$$

Тогда форма  $E_0$  замыкаема.

Хотя в теореме 6.2.7 не было условий непрерывности на ядро резольвенты, мы предположили, что  $R_\alpha$  удовлетворяет условиям 6.2.8. Это просто удобный способ гарантировать достаточную регулярность для того, чтобы формулы (76) — (78) имели смысл.

В наших приложениях мы будем изучать возмущения формы свободного гамильтониана в  $\mathbb{R}^d$ :

$$E(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g dx.$$

Для этой формы некоторые из предположений теорем 6.2.10 и 6.2.11 выполнены автоматически. Чтобы стало ясным, какие

в точности условия следует проверять, сформулируем следующее утверждение.

**6.2.12. Следствие.** Пусть  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $m$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $F$  — форма, определенная на  $C_0^2(\mathbb{R}^d)$  равенством

$$F(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm,$$

и пусть  $E$  — ее замыкание. Пусть  $\tilde{\rho}$  — радоновская вероятностная мера, сосредоточенная на некотором замкнутом множестве  $C \subset \mathbb{R}^d$  лебеговской меры нуль.

(а) Если для некоторого  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_-$  ядро  $R_{\alpha_0} R_{\alpha_0}(x, y)$ , определяемое равенством

$$R_{\alpha_0} R_{\alpha_0}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} R_{\alpha_0}(x, z) R_{\alpha_0}(z, y) \, dm(z),$$

удовлетворяет условию

$$(79) \quad \int_{C \times C} R_{\alpha_0} R_{\alpha_0}(x, y) \, d\tilde{\rho}(x) \, d\tilde{\rho}(y) < \infty,$$

то форма  $E$  имеет возмущение, сосредоточенное на множестве  $C$ .

(б) Если  $\tilde{\lambda}: C \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная борелевская функция, и существуют такие  $\alpha_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , что  $\tilde{\lambda}(x) \leq \left( \int_C R_{\alpha_0}(x, y) \, d\tilde{\rho}(y) + \varepsilon \right)^{-1}$  и

$$(80) \quad \int_{C \times C} R_{\alpha_0}(x, y) \, d\tilde{\rho}(x) \, d\tilde{\rho}(y) < \infty,$$

то форма  $F(f, g) = \int_C \tilde{\lambda} f g \, d\tilde{\rho}$  замыкаема.

**Доказательство.** То, что  $R_\alpha$  удовлетворяет условиям 6.2.8, хорошо известно: см., например, явные формулы в лемме 6.3.1. Если функция  $f \in \mathcal{D}[F]$  непрерывна в окрестности множества  $C$ , то  $-\alpha R_\alpha f$  сходится к  $f$  равномерно на  $C$ , откуда следует, что  $\|f + \alpha R_\alpha f\|_{L^2(\tilde{\rho})} \rightarrow 0$ . Поскольку множество  $\{R_\alpha u \mid u \in \mathcal{D}[F]\} \supset C_0^4(\mathbb{R}^d)$  плотно в  $L^1(\tilde{\rho})$ , резольвента  $R_\alpha$  является  $\tilde{\rho}$ -плотной. Наконец,  $R_\alpha(x, y)$  убывает к нулю в несингулярных точках, и поэтому условие (80) влечет (76). Значит, выполнены все условия теорем 6.2.10 и 6.2.11; следствие доказано.  $\square$



На этом мы оставляем общую теорию сингулярных возмущений; как уже было сказано, следующие два параграфа будут посвящены изучению двух важных частных случаев — точечных взаимодействий и потенциалов, сосредоточенных на броуновских траекториях. Изложенная выше теория является новой, и частично по этой причине данный параграф — один из наиболее незавершенных в книге: хотя у нас есть довольно хорошее понимание того, когда возмущения, сосредоточенные на множествах нулевой меры, существуют, мы почти ничего не знаем об их свойствах. Быть может, работа, сделанная в связи с точечными взаимодействиями (ее краткий обзор мы даем в следующем параграфе), может послужить образцом для общей теории; вопросы, которые здесь исследовались разными авторами, включают спектральные свойства, резонансы и сходимости аппроксимирующих операторов. Кажется очевидным, что должна также существовать связь между сингулярными возмущениями и хаусдорфовой мерой и размерностью; эта связь пока никак не эксплуатировалась. В заключение отметим, что в сотрудничестве с Карвовским (Karwowski) мы разработали альтернативный подход к следствию 6.2.12; он использует преобразования Фурье и ультрафиолетовые обрезания. Мы надеемся дать отчет об этих методах в работе Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn, Karwowski, Lindstrøm [2] (см. также анонс тех же авторов [1]).

### 6.3. Точечные взаимодействия

Теория точечных взаимодействий (т. е. возмущений свободного гамильтониана, сосредоточенных на дискретном множестве) имеет долгую и почтенную историю. В 1933 году Крониг и Пенни (Kronig, Penney [1]) использовали операторы вида

$$(1) \quad -\frac{d^2}{dx^2} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_i$$

для моделирования одномерных кристаллов, а несколькими годами позже, после того, как Вигнер (Wigner [1]) показал, что диплон (система, состоящая из протона и нейтрона) удерживается в связанном виде силами, действующими на чрезвычайно малых расстояниях, основанная на точечных взаимодействиях трехмерная модель была построена Бете и Пайерлсом (Bethe, Peierls [1]). В 1936 г. Ферми (Fermi [1]) использовал аналогичный подход при изучении движения нейтронов в жидких средах; но хотя его работа в 1950-х годах была продолжена разными авторами и обобщена на задачу  $N$  тел (см. Huang, Yang [1], Huang, Yang, Luttinger [1], Lee и др. [1], Wu [1]), математических основ этой теории не существовало до 1961 г.

В том году Березин и Фаддеев [1] не только показали, как можно интерпретировать одноточечные взаимодействия как самосопряженные операторы, но и дали полную классификацию получающихся гамильтонианов (изложение этой и смежных работ см. в прекрасной обзорной статье Flamand [1] и в книге Демков, Островский [1]). В дальнейшем в работах Friedman [1], [2] было показано, что операторы такого типа могут быть получены как пределы операторов, определяемых обычными потенциалами, а Нельсон в докладе о внутренней теории множеств (Nelson [3]), представленном Американскому математическому обществу, дал нестандартную трактовку этих результатов. Фридман и Нельсон не получили полной классификации Березина — Фаддеева; этот пробел был восполнен в работе Albeverio, Fenstad, Нøegh-Krohn [1], в которой теория также обобщается с одноточечного возмущения на возмущение в произвольном конечном множестве точек. Очередной нестандартный вклад в эту область содержится в диссертации Alonso у Coria [1].

В течение последних нескольких лет наше понимание теории точечных взаимодействий и их свойств быстро росло; созданная в результате богатая и сложная теория детально изложена в монографии Albeverio, Gesztesy, Нøegh-Krohn, Holden [1]. В этом параграфе наша цель гораздо скромнее: мы лишь хотим показать два нестандартных способа построения точечных взаимодействий (напомним, что в § 5.6 был кратко упомянут третий метод).

### *А. Применение общей теории*

Первый метод основан на теории, развитой в предыдущем параграфе: мы просто хотим применить следствие 6.2.12. Чтобы получить необходимую информацию о ядрах  $R_\alpha(\cdot, \cdot)$  и  $R_\alpha R_\alpha(\cdot, \cdot)$ , заметим, что

$$R_\alpha = \int_0^\infty T^t e^{at} dt$$

и

$$R_\alpha R_\alpha = \int_0^\infty t T^t e^{at} dt,$$

где  $T^t$  — полугруппа, связанная с оператором  $-\Delta$ . Поскольку  $T^t$  задается гауссовским ядром

$$T^t(x, y) = (4\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{4t}\right),$$

мы получаем

$$(2) \quad R_\alpha(x, y) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) \exp(\alpha t) dt$$

и

$$(3) \quad (R_\alpha R_\alpha)(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi} (4\pi t)^{-(d/2)+1} \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) \exp(\alpha t) dt.$$

Поскольку  $R_\alpha(x, y)$  и  $(R_\alpha R_\alpha)(x, y)$  зависят только от расстояния  $r = \|x - y\|$  между точками  $x$  и  $y$ , мы можем рассматривать их как одномерные функции  $R_\alpha^{(d)}(r)$  и  $(R_\alpha R_\alpha)^{(d)}(r)$ , где индекс  $d$  добавлен, чтобы подчеркнуть зависимость от размерности. Из формул (2) и (3) непосредственно следует, что

$$(4) \quad (R_\alpha R_\alpha)^{(d)}(r) = \frac{1}{4\pi} R_\alpha^{(d-2)}(r).$$

Наша первая лемма резюмирует хорошо известные асимптотические свойства функций  $R_\alpha^{(d)}(r)$  при стремлении  $r$  к нулю и к бесконечности.

**6.3.1. Лемма.** Пусть  $R_\alpha^{(d)}(r)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_-$  — функция, определенная выше, в формуле (2).

(i) При  $d < 2$  функция  $R_\alpha^{(d)}(r)$  непрерывна и ограничена и равномерно сходится к нулю при  $\alpha \rightarrow -\infty$ .

(ii) При  $d \geq 2$  функция  $R_\alpha^{(d)}(r)$  непрерывна в точках  $r > 0$ , и при  $r \rightarrow \infty$  ее асимптотическое поведение описывается формулой

$$R_\alpha^{(d)}(r) \sim \frac{1}{2} (2\pi)^{-(d-1)/2} (-\alpha)^{(d-3)/4} r^{-(d-1)/2} e^{-\sqrt{-\alpha} r}.$$

(iii) При  $d = 2$  асимптотическое поведение при  $r \rightarrow 0$  описывается формулой

$$R_\alpha^{(2)}(r) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{-\alpha} r).$$

(iv) При  $d > 2$  асимптотическое поведение при  $r \rightarrow 0$  описывается формулой

$$R_\alpha^{(d)}(r) \sim \frac{\Gamma((d-2)/2)}{4\pi^{d/2}} r^{-d+2}.$$

Большинство перечисленных свойств должно быть известно читателю из курса дифференциальных уравнений в частных производных (в конце концов  $R_\alpha$  есть не что иное как функция Грина), так что мы не будем здесь эту лемму доказывать. Чтобы получить более тонкие оценки, можно либо выразить правую

часть формулы (2) в терминах функций Бесселя (см. Градштейн, Рыжик [1], 3.471.9), либо использовать преобразования Фурье, как в книге Glimm, Jaffe [1].

Нужно отметить одно важное обстоятельство относительно леммы 6.3.1: сингулярность в начале координат ухудшается с ростом размерности. Согласно (4), сингулярность функции  $(R_\alpha R_\alpha)$  растет «на две размерности медленнее», чем сингулярность  $R_\alpha$ ; поэтому утверждение 6.2.12(a) представляет собой более сильный инструмент, чем 6.2.12(b). Давайте посмотрим, что получается для точечных взаимодействий.

**6.3.2. Предложение.** Пусть  $E$  — замкнутая форма на  $L^2(\mathbb{R}^d, m)$  (где  $m$  — мера Лебега), порожденная оператором  $-\Delta$ . Если  $d \leq 3$  и  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ , то существует нетривиальное возмущение формы  $E$ , сосредоточенное на множестве  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Если  $d = 1$  и  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ , то форма  $\tilde{E}$ , задаваемая на непрерывных и ограниченных элементах множества  $\mathcal{D}[E]$  равенством

$$(5) \quad \tilde{E}(f, g) = E(f, g) - \sum_{i=1}^n \beta_i f(a_i) g(a_i),$$

замыкаема.

*Доказательство* следует из утверждений 6.2.12 и 6.3.1.

Известно, что при  $d \geq 4$  оператор  $-\Delta$  является существенно самосопряженным, даже если он рассматривается на функциях, обращающиеся в нуль вблизи множества  $\{a_1, \dots, a_n\}$ ; поэтому форма  $E$  не имеет возмущений, сосредоточенных на конечных множествах. В этом смысле предложение 6.3.2 нельзя усилить. С другой стороны, можно воспользоваться теоремой 6.2.6 и формулой (6.2.26) для получения более детальной информации о возможных возмущениях формы  $E$ ; например, если мы выберем  $\lambda$  и  $\rho$  в теореме 6.2.6 равномерными, то возмущение в каждой точке  $a_i$  будет одним и тем же. Но мы оставим читателю более углубленное изучение свойств возмущенных операторов; вместо этого мы познакомимся с другим нестандартным подходом к точечным взаимодействиям.

## В. Альтернативный подход

До сих пор в этой главе наша стратегия состояла в том, чтобы переформулировать данную задачу в виде дискретной (гиперконечной) задачи. Эта техника является достаточно общей и позволяет успешно рассматривать большое число задач, связанных с сингулярными коэффициентами и возмущениями. Часто, однако, оказывается возможным нестандартный непрерывный подход; это означает, что в качестве основного пространства

можно использовать все  $*X$ , а на его богатое гиперконечное подмножество  $Y$ . При дискретном подходе мы сначала приходим к задаче линейной алгебры, а затем опускаем ее решение на стандартное пространство с помощью теории гл. 5 или какого-либо аналогичного средства. При непрерывном подходе сингулярная стандартная задача на  $X$  заменяется достаточно регулярной задачей на  $*X$ ; и снова осмысленный стандартный ответ получается только в том случае, если удастся доказать необходимую гладкость нестандартного решения. В качестве примера мы увидим, как этим методом исследуются точечные взаимодействия в  $\mathbb{R}^3$ .

Пусть  $\chi_\varepsilon$  — индикаторная функция отрезка  $[0, \varepsilon]$ ; сначала на комплексном пространстве  $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$  рассмотрим самосопряженный оператор вида

$$(6) \quad A = -d^2/dr^2 + \lambda\chi_\varepsilon$$

с граничными условиями Дирихле при  $r=0$  и с постоянным  $\lambda$ . Это означает следующее: пусть  $E$  — форма, определенная на функциях из  $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ , обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества в  $(0, \infty)$ , формулой

$$(7) \quad E(f, g) = \int_0^\infty \left( -\frac{d^2}{dr^2} f + \lambda\chi_\varepsilon f \right) g \, dr.$$

Если  $\bar{E}$  — замыкание формы  $E$ , то  $A$  — самосопряженный оператор, определяемый формой  $E$ . Аналогично, обозначим через  $A_0$  самосопряженный оператор на  $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ , задаваемый формулой

$$(8) \quad A_0 = -\frac{d^2}{dr^2}$$

и граничными условиями Дирихле при  $r=0$ .

Выберем  $\varepsilon \approx 0$  и покажем, что при некоторых бесконечно больших  $\lambda$  нестандартный оператор  $A$  индуцирует стандартное возмущение оператора  $A_0$ . В некотором смысле, который будет пояснен позже, это решает «радиальную часть» задачи о точечном взаимодействии в начале координат в  $\mathbb{R}^3$ .

Как и в § 6.2, нашим основным инструментом будет ядро резольвенты оператора  $A$ . Зафиксируем бесконечно малое  $\varepsilon > 0$ , и пусть  $v_1, v_2$  — решения уравнения

$$(9) \quad -u'' + \lambda\chi_\varepsilon u - \alpha u = 0$$

на  $*\mathbb{R}_+$ , где  $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ . Если мы выберем  $v_1$  и  $v_2$  такими, чтобы  $v_1(0) = 0$  и  $v_2(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , то, как известно из элементарной теории Штурма — Лиувилля, величина

$$(10) \quad K = v_1' v_2 - v_1 v_2'$$

не зависит от  $r$ , и оператор, обратный к  $A - \alpha$ , задается интегральным ядром

$$(11) \quad G_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{K} v_1(x) v_2(y) & \text{при } 0 \leq x \leq y, \\ \frac{1}{K} v_1(y) v_2(x) & \text{при } 0 \leq y \leq x, \end{cases}$$

если только  $K \neq 0$ .

Поскольку функция  $\lambda \chi_{\varepsilon}$  постоянна на каждом из промежутков  $[0, \varepsilon]$  и  $(\varepsilon, \infty)$ , уравнение (9) может быть решено в явном виде. Предполагая, что  $\operatorname{Re}(\sqrt{\alpha}) > 0$ , мы видим, что  $v_1$  и  $v_2$  могут быть выбраны следующим образом:

$$(12) \quad v_1(r) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\alpha - \lambda} r) & \text{при } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ ae^{\sqrt{\alpha} r} + be^{-\sqrt{\alpha} r} & \text{при } \varepsilon \leq r, \end{cases}$$

$$(13) \quad v_2(r) = \begin{cases} ce^{\sqrt{\lambda - \alpha} r} + de^{-\sqrt{\lambda - \alpha} r} & \text{при } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ e^{-i\sqrt{\alpha} r} & \text{при } \varepsilon \leq r. \end{cases}$$

Поскольку функции  $v_1(r)$  и  $v_1'(r)$  должны быть непрерывны в точке  $r = \varepsilon$ , получаем

$$(14) \quad a = \frac{1}{2} e^{-i\sqrt{\alpha} \varepsilon} \left( \sin(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) + \sqrt{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) \right),$$

$$(15) \quad b = \frac{1}{2} e^{-i\sqrt{\alpha} \varepsilon} \left( \sin(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) - \sqrt{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) \right).$$

Соответствующие выражения для  $c$  и  $d$  выглядят так:

$$(16) \quad c = \frac{1}{2} e^{-i(\sqrt{\lambda - \alpha} + \sqrt{\alpha}) \varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda - \alpha}} \right),$$

$$(17) \quad d = \frac{1}{2} e^{-i(\sqrt{\lambda - \alpha} - \sqrt{\alpha}) \varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda - \alpha}} \right).$$

Вычисляя  $K$  как предел функции  $v_1'v_2 - v_1v_2'$  при  $r \rightarrow \infty$ , находим

$$(18) \quad K = 2ai \sqrt{\alpha}.$$

Собирая вместе формулы (12), (13) и (18), мы можем превратить (11) в явное выражение для ядра  $G_{\alpha}(x, y)$ . Поскольку  $A$  — самосопряженный оператор, ядро  $G_{\alpha}(x, y)$  должно быть симметричным, так что нам нужен только случай  $x \leq y$ :

$$(19) \quad G_{\alpha}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\alpha - \lambda} x)}{2ai \sqrt{\alpha}} (ce^{\sqrt{\lambda - \alpha} y} + de^{-\sqrt{\lambda - \alpha} y}) & \text{при } x \leq y \leq \varepsilon, \\ \frac{1}{2ai \sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha - \lambda} x) e^{-i\sqrt{\alpha} y} & \text{при } x \leq \varepsilon \leq y, \\ \frac{1}{2i \sqrt{\alpha}} \left( e^{\sqrt{\alpha} x} + \frac{b}{a} e^{-\sqrt{\alpha} x} \right) e^{-i\sqrt{\alpha} y} & \text{при } \varepsilon \leq x \leq y. \end{cases}$$

С другой стороны, резольвента ядра невозмущенного оператора  $A_0$  равна

$$(20) \quad R_\alpha(x, y) = \frac{1}{2i\sqrt{\alpha}} (e^{\sqrt{\alpha}x} - e^{-\sqrt{\alpha}x}) e^{-i\sqrt{\alpha}y}.$$

Наша задача — найти такие  $\lambda$ , для которых стандартная часть резольвенты  $G_\alpha$  отличается от  $R_\alpha$ .

Из формул (16), (17) видно, что если  $^\circ a$ ,  $\alpha \neq 0$ , то при  $x \approx y$  величина  $G_\alpha(x, y)$  конечна. Значит,  $G_\alpha(x, y)$  не имеет сингулярности в начале координат; сравнивая формулу (20) с третьим выражением в (19), мы видим, что единственный способ, каким стандартная часть функции  $G_\alpha$  может отличаться от  $R_\alpha$  — это если

$$(21) \quad \text{st}(b/a) \neq -1.$$

Заметим, что если  $\lambda$  конечно, то

$$(22) \quad a \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}},$$

$$(23) \quad b \approx -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}},$$

так что  $b/a \approx -1$ . Что касается бесконечно больших  $\lambda$ , то если число  $\sqrt{(\alpha - \lambda)/\alpha} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)$  бесконечно велико, то снова  $b/a \approx -1$ . Это означает, что  $\lambda$  следует выбрать бесконечно большим, но таким, чтобы при этом число

$$(24) \quad \sqrt{\frac{\alpha - \lambda}{\alpha}} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)$$

было конечным. Для бесконечно больших  $\lambda$

$$(25) \quad \sqrt{\alpha - \lambda} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) \approx \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda} \varepsilon),$$

так что достаточно найти такое  $\lambda$ , чтобы конечной была величина

$$(26) \quad \tilde{\beta} = \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda} \varepsilon).$$

Следовательно, мы должны положить

$$(27) \quad \sqrt{-\lambda} \varepsilon = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi + \eta$$

для некоторого  $k \in {}^*\mathbb{Z}$  и некоторого бесконечно малого  $\eta$ . Выражая отсюда  $\lambda$ , получаем

$$(28) \quad \lambda = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - 2 \frac{\pi}{\varepsilon} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\eta}{\varepsilon} - \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2,$$

а, соединяя вместе равенства (26) и (27), видим, что

$$(29) \quad \tilde{\beta} = \frac{\eta}{\varepsilon} \cos \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi + \eta \right) + \\ + \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{\cos \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi + \eta \right)}{\eta}.$$

Если мы выберем отношение  $\eta/\varepsilon$  околостандартным, а  $k \in \mathbb{N}$ , то величина  $\tilde{\beta}$  будет иметь стандартную часть, равную стандартной части второго слагаемого в (29):

$$(30) \quad \beta \equiv \text{st} \left( (-1)^k \tilde{\beta} \right) = - \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \text{st}(\eta/\varepsilon).$$

Без всякой потери общности можно взять отношение  $\eta/\varepsilon$  равным некоторому действительному числу  $\gamma$ . Тогда формулы (28) и (30) можно переписать в следующем виде:

$$(31) \quad \lambda = - \left( k + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2/\varepsilon^2 + 2\beta/\varepsilon - \gamma^2,$$

$$(32) \quad \beta = - \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \gamma.$$

Функции  $v_1$  и  $v_2$  и их производные  $S$ -непрерывны на  ${}^*\mathbb{R}_+$ . Следовательно, их стандартные части  $u_1$  и  $u_2$  существуют и удовлетворяют уравнению

$$(33) \quad -u'' - \alpha u = 0.$$

Более того,

$$(34) \quad \frac{u'_1(0)}{u_1(0)} = \text{st} \left( \frac{v'_1(\varepsilon)}{v_1(\varepsilon)} \right),$$

а  $v_1(\varepsilon) = \sin(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)$  и  $v'_1(\varepsilon) = \sqrt{\alpha - \lambda} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)$ , мы получаем

$$(35) \quad \frac{u'_1(0)}{u_1(0)} = \text{st} \left( \frac{\sqrt{\alpha - \lambda} \cos(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)}{\sin(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon)} \right).$$

Из формул (25), (26) и того факта, что  $\sin(\sqrt{\alpha - \lambda} \varepsilon) \approx (-1)^k$ , следует, что

$$(36) \quad u'_1(0) = \beta u_1(0).$$

Значит, ядро

$$(37) \quad \tilde{R}_\alpha(x, y) = \begin{cases} u_1(x) u_2(y) & \text{при } x \leq y, \\ u_1(y) u_2(x) & \text{при } y \leq x \end{cases}$$

представляет собой резольвенту оператора  $-d^2/dr^2$  на  $\mathbb{R}_+$  с граничным условием

$$(38) \quad u'(0) = \beta u(0).$$



Если  $\tilde{A}_0$  — ограничение оператора  $-d^2/dr^2$  на функции класса  $C^\infty$ , обращающиеся в нуль вне компактного подмножества в  $(0, \infty)$ , то, как известно, множество самосопряженных расширений оператора  $\tilde{A}_0$  исчерпывает операторами, задаваемыми условием (38), когда  $\beta$  пробегает множество  $\mathbb{R}$  (см. Reed, Simon [1]). Таким образом, мы доказали следующий факт.

**6.3.3. Предложение.** *Рассмотрим самосопряженный оператор*

$$(39) \quad A_\beta = -\frac{d^2}{dr^2} + \chi_\varepsilon(\beta) \cdot \chi_\varepsilon$$

*с граничными условиями Дирихле на нестандартном гильбертовом пространстве  $*L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ , где  $\chi_\varepsilon(\beta)$  — это число вида*

$$(40) \quad \chi_\varepsilon(\beta) = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \beta + \delta,$$

*$\beta, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon$  — положительное бесконечно малое число,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\chi_\varepsilon$  — индикаторная функция отрезка  $[0, \varepsilon]$ . Тогда оператор  $A_\beta$  околостандартен в том смысле, что его резольвента  $(A_\beta - \alpha)^{-1}$  околостандартна, и стандартная часть оператора  $(A_\beta - \alpha)^{-1}$  служит резольвентой самосопряженного оператора  $-d^2/dr^2$  с граничным условием  $u'(0) = \beta u(0)$ . Таким образом, если  $\beta$  пробегает множество  $\mathbb{R}$ , стандартная часть оператора  $A_\beta$  (независимо от  $k$  и  $\delta$ ) пробегает множество всех самосопряженных расширений оператора  $-d^2/dr^2$ .*

Сравнивая формулы (31) и (40), замечаем, что слагаемое  $-\gamma^2$ , которое, согласно (32), зависело от  $\beta$ , заменено на не зависящую от  $\beta$  величину  $\delta$ ; легко проверить, что это ни на что не влияет.

Теперь объясним, как связано предложение 6.3.3 с точечными взаимодействиями в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $\tilde{\Delta}$  — ограничение оператора  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial^2/\partial x_i^2$  на функции класса  $C^\infty$ , обращающиеся в нуль вне некоторого компактного подмножества в  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ; нас интересуют самосопряженные расширения оператора  $\tilde{\Delta}$ . В полярных координатах оператор  $\Delta$  принимает вид

$$(41) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} B,$$

где  $B$  — оператор Лапласа — Бельтрами на  $L^2(S^2)$ ,  $S^2$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$ . Но оператор  $B$  имеет дискретный конечнократный спектр, и собственные значения равны  $-l(l+1)$ ,  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Поэтому достаточно рассмотреть самосопряженные рас-

ширения ограничений  $\tilde{\Delta}_l$  операторов  $\Delta_l$  вида

$$(42) \quad \Delta_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

на те функции класса  $C^\infty$  из  $L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$ , которые обращаются в нуль вне компактных подмножеств в  $(0, \infty)$ .

Отображение  $f(r) \mapsto rf(r)$  задает унитарную эквивалентность между пространствами  $L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$  и  $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ ; при этом оператор  $\Delta_l$  превращается в оператор

$$(43) \quad d^2/dr^2 - l(l+1)/r^2.$$

Поскольку это отображение переводит класс  $C^\infty$ -функций, обращающихся в нуль вне компактов в  $(0, \infty)$ , в себя, достаточно исследовать самосопряженные расширения оператора (43). Но хорошо известно (см., например, Reed, Simon [1]), что при  $l \geq 1$  этот оператор существенно самосопряжен. Значит, остается рассмотреть только самосопряженные расширения оператора  $d^2/dr^2$  на  $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ ; а именно этим мы и занимались в предложении 6.3.3.

Будем обозначать через  $\Delta$  также самосопряженный оператор Лапласа в нестандартном пространстве  ${}^*H = {}^*L^2(\mathbb{R}^3)$ . Зафиксируем положительное бесконечно малое  $\epsilon$ ; мы хотим знать, когда самосопряженное возмущение

$$(44) \quad A_\beta = -\Delta + \lambda \chi_\epsilon(\|x\|)$$

бесконечно близко к нетривиальному стандартному самосопряженному возмущению стандартного оператора  $-\Delta$ . Разобьем пространство  ${}^*H$  на подпространство  ${}^*H_s$  функций, инвариантных относительно вращений в  $\mathbb{R}^3$ , и его ортогональное дополнение  ${}^*H_s^\perp$ :

$${}^*H = {}^*H_s \oplus {}^*H_s^\perp.$$

Тогда ограничение оператора  $A_\beta$  на  ${}^*H_s^\perp$  околостандартно, и его стандартная часть совпадает с  $-\Delta$  (из приведенных выше замечаний следует, что ограничение оператора  $\Delta$  на  $C^\infty$ -функции из  $H_s^\perp$ , обращающиеся в нуль вне компактов в  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , является существенно самосопряженным в  $H$ ). Значит, остается только рассмотреть ограничение оператора  $A_\beta$  на  ${}^*H_s$ , которое, как мы видели, унитарно эквивалентно оператору  $-d^2/dr^2 + l(l+1)/r^2 + \lambda \chi_\epsilon(\|x\|)$ . Собирая полученные результаты вместе, получаем следующую теорему.

**6.3.4. Теорема.** *Рассмотрим самосопряженный оператор*

$$(45) \quad A_\beta = -\Delta + \lambda_\epsilon(\beta) \chi_\epsilon$$

на пространстве  $*L^2(\mathbb{R}^3)$ , где  $\lambda_\varepsilon(\beta)$  — число вида

$$(46) \quad \lambda_\varepsilon(\beta) = - \left( k + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 / \varepsilon^2 + 2\beta/\varepsilon + \delta,$$

$\beta, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon \approx 0$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $\chi_\varepsilon$  — индикаторная функция шара  $\{\|x\| \leq \varepsilon\}$ . Тогда резольвента  $(A_\beta - \alpha)^{-1}$  является околостандартной, причем ее стандартная часть не зависит от  $k$  и  $\delta$ , но различна для разных  $\beta$ . Когда число  $\beta$  пробегает множество  $\mathbb{R}$ , стандартная часть оператора  $A_\beta$  пробегает множество всех самосопряженных расширений ограничения оператора  $-\Delta$  на множество функций класса  $C^\infty$ , обращающихся в нуль вне компактных подмножеств множества  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Теорема 6.3.4 дает альтернативное описание одноточечных возмущений оператора  $-\Delta$  по сравнению с тем, что мы, используя методы § 6.2, получили в предложении 6.3.2. В статье Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn [1] предложен третий подход, основанный на приближениях операторами конечного ранга; мы не будем его здесь обсуждать. Вместо этого коротко перечислим недавние достижения в теории точечных взаимодействий, как стандартные, так и нестандартные.

Мы уже говорили о достижениях нестандартных работ: Nelson [3], Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn [1], Alonso y Coria [1]. В работах Albeverio, Høegh-Krohn, Streit [1], [2] с помощью стандартных методов дается описание точечных взаимодействий в терминах форм Дирихле; мы приводили его в § 5.6. Grossmann и др. [1], [2], используя приближения операторами конечного ранга, приступили к изучению более тонких свойств возмущений — таких, как собственные значения, ограниченные состояния, резонансы и инфракрасная сходимость. Читателю следует также обратить внимание на работы Thomas [1], [2] и Zorbas [1]. Обобщение возмущений в конечном множестве точек на возмущения в счетном (дискретном) множестве точек проделано в работе Grossmann и др. [1] (сходные модели см. также в работе Svendsen [1]). Интересно отметить, что эта теория не укладывается в рамки теории § 6.2 (поскольку  $\bar{\rho}$  — вероятностная мера, а  $\tilde{\lambda}$  — ограниченная функция); однако бесконечная теория получается из конечной прямыми предельными рассуждениями. В работе Albeverio, Høegh-Krohn [8] точечные взаимодействия характеризуются как пределы взаимодействий с гладкими локальными потенциалами; этот подход уточняется и развивается в работах Albeverio, Gesztesy, Høegh-Krohn [1], Holden [1], Holden и др. [1], [2]. Связи с модной областью случайных потенциалов установлены, например, в Albeverio, Høegh-Krohn, Kirsch, Martinelli [1]. Мы перечислили лишь немногие из большого числа работ на эту тему; за дополнительной

информацией и ссылками мы отсылаем читателя к книгам Alberverio, Gesztesy, Нøegh-Krohn, Holden (2) и Демков, Островский [1]<sup>1)</sup>.

#### 6.4. Возмущения функционалами локального времени

Мы переходим к изучению возмущений оператора Лапласа, индуцированных потенциалами, сосредоточенными на броуновских траекториях. Пусть дано броуновское движение

$$(1) \quad b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d;$$

для каждого  $\omega \in \Omega$  обозначим через  $C_\omega$  траекторию

$$(2) \quad C_\omega = \{b(\omega, t) \mid t \in [0, 1]\}.$$

На множестве  $C_\omega$  имеется естественная мера, индуцированная процессом  $b$ :

$$(3) \quad \tilde{\rho}_\omega(A) = m_1\{t \in [0, 1] \mid b(\omega, t) \in A\},$$

где  $m_1$  — одномерная мера Лебега. Мы используем теорию § 6.2 для изучения операторов на  $L^2(\mathbb{R}^d, m)$ , отвечающих формам

$$(4) \quad \tilde{E}_\omega(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm - \int_{C_\omega} \lambda_\omega(x) f(x) g(x) d\tilde{\rho}_\omega(x)$$

(как обычно,  $m$  обозначает меру Лебега на  $\mathbb{R}^d$ ). Воспользовавшись определением меры  $\tilde{\rho}_\omega$ , формулу (4) можно переписать в виде

$$(5) \quad \tilde{E}_\omega(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm - \int_0^1 \lambda_\omega(b(t)) f(b(t)) g(b(t)) dt;$$

если через  $\delta$  обозначить дельта-функцию в  $\mathbb{R}^d$ , то формальная выкладка «показывает», что соответствующий оператор имеет вид

$$(6) \quad H_\omega = -\Delta - V_\omega(\cdot),$$

где

$$(7) \quad V_\omega(x) = \lambda_\omega(x) \int_0^1 \delta(x - b(t)) dt.$$

Сравнивая формулы (7) и (3.3.6), мы видим, что  $H_\omega$  — это возмущение оператора  $-\Delta$  функционалом локального времени. Хотя локальное время в смысле разд. 3.3.8 существует только

<sup>1)</sup> См. также Гейлер, Маргулис [1\*], [2\*]. — Прим. перев.

в одномерном случае, нетривиальные возмущения оператора  $-\Delta$  вида (6), как мы увидим, существуют при  $d \leq 5$ . При  $d = 4,5$  функцию  $\lambda_\omega$  необходимо выбирать бесконечно малой.

Прежде чем перейти к технической части теории, вкратце перечислим содержание данного параграфа. После того как с помощью следствия 6.2.12, примененного к форме (4), будут получены упомянутые выше результаты, мы попытаемся объяснить, почему возмущения функционалами локального времени представляют интерес для физиков. В этом параграфе мы будем заниматься только моделями полимерных молекул, но в § 7.5 взглянем также на некоторые применения к четырехмерной квантовой теории поля. В качестве моделей полимеров броуновские траектории имеют некоторые нереалистические черты; так, например, броуновская траектория в  $\mathbb{R}^3$  пересекает сама себя бесконечно много раз, в то время как полимерная молекула вообще не имеет самопересечений. Для исправления этого дефекта были попытки заменить броуновское движение его несамопересекающейся модификацией; но вероятностное поведение такого процесса становится в высшей степени сложным, и пока на этом пути мало что достигнуто. Мы закончим этот параграф кратким отчетом о двух наиболее обещающих попытках — а именно, о работах Westwater [1]—[4], посвященных моделям полимеров Эдвардса (Edwards), и о работе Lawler [1], посвященной несамопересекающемуся случайному блужданию.

### *А. Применение общей теории*

Наша первая лемма покажет, что если размерность  $d \leq 5$ , то условия следствия 6.2.12(a) выполнены для почти всех броуновских траекторий. Доказательство состоит в сведении задачи к некоторому вопросу о сходимости кратных интегралов, а исходным пунктом всегда является одно и то же наблюдение — что для любого  $r > 0$

$$(8) \quad \text{интеграл} \int_{\|x\| \leq r} \|x\|^{-p} dx \text{ сходится тогда и}$$

только тогда, когда  $p < d$ ;

$$(9) \quad \text{интеграл} \int_{\|x\| \geq r} \|x\|^{-p} dx \text{ сходится тогда и}$$

только тогда, когда  $p > d$ .

В справедливости этих утверждений легко убедиться с помощью перехода к полярным координатам.

**6.4.1. Лемма.** Пусть  $R_\alpha$  — резольвента оператора  $-\Delta$  в  $\mathbb{R}^d$ . Если  $d \leq 5$  и  $\alpha \in \mathbb{R}_-$ , то

$$(10) \quad (R_\alpha R_\alpha)(\cdot, \cdot) \in L^1(\tilde{\rho}_\omega^2)$$

для почти всех  $\omega$ .

*Доказательство.* Интегральное ядро  $(R_\alpha R_\alpha)(\cdot, \cdot)$  детально описано в лемме 6.3.1 (см. также равенство (6.3.4)). При  $d \leq 3$  это ядро ограничено, и доказывать нечего. Случай  $d = 4$  мы предоставим читателю, а сами займемся размерностью 5. Чтобы увидеть, что именно не получается в более высоких размерностях, давайте попытаемся провести доказательство для общего случая  $d > 4$ .

Из леммы 6.3.1 и формулы (6.3.4) мы знаем, что существуют такие положительные константы  $C$  и  $\beta$ , для которых

$$(11) \quad (R_\alpha R_\alpha)^{(d)}(r) \leq C \frac{e^{-\beta r}}{r^{d-4}}.$$

Чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что число

$$\begin{aligned} I &= E \left( \int_{C_\omega} \int_{C_\omega} \frac{\exp(-\beta \|x - y\|)}{\|x - y\|^{d-4}} d\tilde{\rho}_\omega(x) d\tilde{\rho}_\omega(y) \right) = \\ &= E \left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{\exp(-\beta \|b(t) - b(s)\|)}{\|b(t) - b(s)\|^{d-4}} dt ds \right) \end{aligned}$$

конечно. Вводя гауссовские ядра, получаем

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{d-4}} \frac{\exp(-\|u\|^2/2 |t-s|)}{(2\pi |t-s|)^{d/2}} dt ds du,$$

а заменяя переменную  $s$  новой переменной  $S = (t-s)/\|u\|^2$ , получаем

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_{(t-1)/\|u\|^2}^{t/\|u\|^2} \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{2d-6}} \frac{\exp(-1/2 |S|)}{(2\pi |S|)^{d/2}} dS dt du.$$

Если обозначить

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi |S|)^{-d/2} \exp(-1/2 |S|) dS$$

(этот интеграл сходится, так как  $d > 2$ ), то

$$(12) \quad I \leq K \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{2d-6}} du.$$

В соответствии с формулой (8) последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда  $2d - 6 < d$ , т. е.  $d < 6$ , что и доказывает лемму.  $\square$

Объединяя результаты леммы 6.4.1 и следствия 6.2.12(a), получаем следующую теорему.

**6.4.2. Теорема.** Пусть  $b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  — броуновское движение,  $m$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^d$ . Если  $d \leq 5$ , то для почти всех  $\omega \in \Omega$  форма

$$(13) \quad E(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm$$

имеет нетривиальное замкнутое возмущение, сосредоточенное на траектории

$$C_\omega = \{b(\omega, t) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Следующая проблема — когда упомянутое в теореме возмущение может иметь вид

$$(14) \quad \tilde{E}_\omega(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm - \int_{C_\omega} \lambda_\omega f g \, d\tilde{\rho}_\omega$$

для некоторой стандартной функции  $\lambda_\omega: C_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Из следствия 6.2.12(b) и следующей ниже леммы видно, что этот факт имеет место в случае  $d \leq 3$ .

**6.4.3. Лемма.** Пусть  $R_\alpha(\cdot, \cdot)$  — ядро резольвенты оператора  $-\Delta$  в  $\mathbb{R}^d$ . Если  $d \leq 3$  и  $\alpha < 0$ , то

$$(15) \quad R_\alpha(\cdot, \cdot) \in L^1(\tilde{\rho}_\omega^2)$$

для почти всех  $\omega$ .

*Доказательство* этой леммы почти идентично доказательству предыдущей. Согласно лемме 6.3.1 в случае  $d = 1$  доказывать нечего, а случай  $d = 2$  мы оставим читателю. Пусть  $d \geq 3$ ; тогда существуют такие положительные константы  $C$  и  $\beta$ , что

$$(16) \quad R_\alpha^{(d)}(r) \leq C \frac{e^{-\beta r}}{r^{d-2}},$$

и, следовательно, достаточно найти такие  $d$ , для которых число

$$I = E \left( \int_0^1 \int_0^1 \frac{\exp(-\beta \|b(t) - b(s)\|)}{\|b(t) - b(s)\|^{d-2}} \, ds \, dt \right)$$

конечно. Поскольку  $b$  — это броуновское движение, имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{d-2}} \cdot \frac{\exp(-\|u\|^2/2 |t-s|)}{(2\pi |t-s|)^{d/2}} ds dt du = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_{(t-1)/\|u\|^2}^{t/\|u\|^2} \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{2d-4}} \frac{\exp(-1/2 |S|)}{(2\pi |S|)^{d/2}} dS dt du, \end{aligned}$$

где мы заменили  $s$  на  $S = (t-s)/\|u\|^2$ . Поскольку  $d > 2$ , интеграл

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-1/2 |S|)}{(2\pi |S|)^{d/2}} dS$$

сходится, откуда

$$(17) \quad I \leq K \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(-\beta \|u\|)}{\|u\|^{2d-4}} du.$$

Последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда  $2d-4 < d$ , т. е.  $d < 4$ . Лемма доказана.  $\square$

Согласно следствию 6.2.12(b) форма  $\tilde{E}_\omega$ , определенная в формуле (14), замыкаема, если для некоторого  $\alpha \in \mathbb{R}_-$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  неравенство

$$(18) \quad \lambda_\omega(x) \leq 1 / \left( \int_{C_\omega} R_\alpha(x, y) d\tilde{\rho}_\omega(y) + \varepsilon \right)$$

справедливо для  $\tilde{\rho}_\omega$ -почти всех  $x$ . Из последней леммы следует, что для почти всех  $\omega$  функция

$$\int_{C_\omega} R_\alpha(\cdot, y) d\tilde{\rho}_\omega(y)$$

конечна  $\tilde{\rho}_\omega$ -почти всюду; это влечет за собой замыкаемость формы  $\tilde{E}_\omega$  для широкого класса функций  $\lambda_\omega$ . Но лемма слишком слаба для того, чтобы дать более детальное описание этого класса. Например, она ничего не говорит о том, можно ли выбрать в качестве  $\lambda_\omega$  положительную константу — а это наиболее интересный случай с физической точки зрения. Чтобы ответить на этот вопрос, проанализируем ситуацию более тщательно.

В размерности три ядро резольвенты лапласиана имеет особенно простой вид:

$$(19) \quad R_\alpha(x, y) = \frac{\exp(-\sqrt{-\alpha} \|x-y\|)}{4\pi \|x-y\|}.$$



Для каждого  $\alpha \in \mathbb{R}_-$  определим случайный процесс  $X^\alpha: \Omega \times \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$(20) \quad \begin{aligned} X^\alpha(\omega, t) &= 4\pi \int_{C_\omega} R_\alpha(b(t), y) d\tilde{\rho}_\omega(y) = \\ &= \int_0^1 \frac{\exp(-\sqrt{-\alpha} \|b(t) - b(s)\|)}{\|b(t) - b(s)\|} ds \end{aligned}$$

(множитель  $4\pi$  добавлен здесь лишь для удобства обозначений). Заметим, что если для почти всех  $\omega$

$$(21) \quad X^\alpha(\omega, t) \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow -\infty \text{ равномерно по } t,$$

то из следствия 6.2.12(b) можно заключить, что форма (14) замыкаема для всех ограниченных функций  $\lambda_\omega$ .

Чтобы доказать утверждение (21), прежде всего заметим, что согласно лемме Фату

$$(22) \quad X^\alpha(\omega, t) \leq \lim_{s \rightarrow t} X^\alpha(\omega, s),$$

так что траектории процесса  $X^\alpha$  полунепрерывны снизу. В скором времени мы установим следующую оценку.

**6.4.4. Лемма.** Для любого  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  найдется такая константа  $C_\varepsilon$ , что для всех  $\alpha \in \mathbb{R}_-$ ,  $s, t \in [0, 1]$

$$(23) \quad E(|X^\alpha(t) - X^\alpha(s)|^3) \leq C_\varepsilon |t - s|^{3/2 - \varepsilon}.$$

Заключение этой леммы является условием теоремы Колмогорова о непрерывности (см., например, Симон [2] или предложение 4.8.5); значит, ограничение процесса  $X^\alpha$  на множество двоично-рациональных чисел

$$D = \{(k/2^n) | k, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 2^n\}$$

непрерывно. С помощью формулы

$$(24) \quad Y^\alpha(\omega, t) = \lim_{s \rightarrow t, s \in D} X^\alpha(\omega, s)$$

можно определить непрерывную модификацию  $Y^\alpha$  процесса  $X^\alpha$ . Поскольку траектории процесса  $X^\alpha$  полунепрерывны снизу,

$$(25) \quad X^\alpha(\omega, t) \leq Y^\alpha(\omega, t)$$

при всех  $t$ , так что траектории процесса  $X^\alpha$  ограничены сверху измеримой функцией.

Предполагая справедливой лемму 6.4.4, мы можем доказать следующую теорему.

**6.4.5. Теорема.** Пусть  $\Delta$  — оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ ,  $b: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  — броуновское движение. Для каждого  $\omega \in \Omega$  пусть  $\tilde{\rho}_\omega$  — мера, сосредоточенная на множестве  $C_\omega = \{b(\omega, t) \mid t \in [0, 1]\}$  и равная

$$\tilde{\rho}_\omega(A) = m_1\{t \in [0, 1] \mid b(\omega, t) \in A\},$$

где  $m_1$  — мера Лебега на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда форма

$$\tilde{E}_\omega(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f) g \, dm - \int_{C_\omega} \lambda f g \, d\tilde{\rho}_\omega$$

для любой ограниченной функции  $\lambda$  замыкаема.

*Доказательство.* Согласно следствию 6.2.12, достаточно доказать утверждение (21). Фактически, в силу формул (24) и (25), достаточно показать, что для почти всех  $\omega$

$$(26) \quad X^\alpha(\omega, t) \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow -\infty \text{ равномерно по } t \in D.$$

Заметим, что если предел в (26) брать не равномерным, а поточечным, то он существует в силу ограниченности траекторий процесса  $X^\alpha$  и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Предположим, что утверждение (26) не верно. Тогда существует такое измеримое подмножество  $\Omega_1 \subset \Omega$ ,  $P(\Omega_1) = \delta > 0$ , что при некотором  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$(27) \quad \forall \omega \in \Omega_1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_- \quad \exists t \in D \quad (X^\alpha(\omega, t) \geq \varepsilon).$$

Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  обозначим

$$D_n = \{(k/2^n) \mid k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 2^n\}.$$

Из утверждения (27) следует, что для любого  $\alpha \in \mathbb{R}_-$  должно найтись такое  $n(\alpha)$ , для которого

$$(28) \quad P\{\omega \mid \exists t \in D_{n(\alpha)} (X^\alpha(\omega, t) \geq \varepsilon)\} \geq \delta/2.$$

Применяя принцип переноса, мы видим, что и для бесконечно большого отрицательного  $\alpha$  утверждение справедливо при некотором  $n(\alpha) \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Поскольку утверждение (26) становится справедливым при замене равномерной сходимости на поточечную, для таких  $\alpha$  величина  ${}^*X^\alpha(\omega, t)$  при всех стандартных  $t$  должна быть бесконечно мала. Согласно нестандартной версии леммы 6.4.4 ограничение процесса  ${}^*X^\alpha$  на множество  $D_n(\alpha)$  удовлетворяет условиям гиперконечной теоремы Колмогорова 4.8.5. Значит, процесс  ${}^*X^\alpha \upharpoonright D_n(\alpha)$  является  $S$ -непрерывным, а так как он бесконечно мал во всех стандартных точках, он не может удовлетворять условию (28). Тем самым утверждение (26) доказано, а с ним и теорема.  $\square$

## В. Основная оценка

Нам осталось доказать лемму 6.4.4; с самого начала предупреждаем читателя, что это будет весьма запутанное дело. Основным инструментом будет служить следующая оценка.

**6.4.6. Лемма.** *Существует такая константа  $C$ , что если вектор  $e \in \mathbb{R}^3$  имеет длину  $1/2$ , то для всех  $a \in \mathbb{R}^3$  и всех  $\beta \in \mathbb{R}_+$*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\beta \|k - a\|^2) \left| \frac{1}{\|k - e\|} - \frac{1}{\|k + e\|} \right| dk \leq \frac{C}{\sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + 1)}.$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $a$  и введем новую переменную  $y = \sqrt{\beta} k$ ; тогда

$$\begin{aligned} I(\beta, a) &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\beta \|k - a\|^2) \left| \frac{1}{\|k - e\|} - \frac{1}{\|k + e\|} \right| dk = \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\|y - \sqrt{\beta} a\|^2) \left| \frac{1}{\|y - \sqrt{\beta} e\|} - \frac{1}{\|y + \sqrt{\beta} e\|} \right| dy. \end{aligned}$$

Если  $\beta \rightarrow \infty$ , то последний интеграл (без множителя  $1/\beta$ ) стремится к нулю при  $a \neq \pm e$  и сходится к числу

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\|z\|^2}}{\|z\|} dz < \infty$$

при  $a = \pm e$ . Значит, величина  $I(\beta, a)$  стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $1/\beta$ .

Чтобы увидеть, что происходит при  $\beta \rightarrow 0$ , заметим, что в силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} I(\beta, a) &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\|y - \beta \sqrt{a}\|^2) \left| \frac{1}{\|y - \sqrt{\beta} e\|} - \frac{1}{\|y + \sqrt{\beta} e\|} \right| dy \leq \\ &\leq \frac{2\|e\|}{\sqrt{\beta}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\|y - \sqrt{\beta} a\|^2)}{\|y - \sqrt{\beta} e\| \cdot \|y + \sqrt{\beta} e\|} dy, \end{aligned}$$

и последний интеграл при  $\beta \rightarrow 0$  сходится к

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\|z\|^2}}{\|z\|^2} dz < \infty.$$

Значит, при  $\beta \rightarrow 0$  величина  $I(\beta, a)$  стремится к бесконечности не быстрее чем  $1/\sqrt{\beta}$ .

Из доказанного следует, что для любого  $a$  найдется такая константа  $C(a)$ , что

$$I(\beta, a) \leq \frac{C(a)}{\sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + 1)},$$

и простое рассуждение показывает, что эту константу на самом деле можно выбрать не зависящей от  $a$ .  $\square$

В предполагаемых применениях  $\beta$  будет иметь вид  $\beta = \|x\|^2/2t$ , так что

$$(29) \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}+1)} = \frac{2t}{\|x\|(\|x\|+\sqrt{2t})} \leq \frac{2t}{\|x\|^2}.$$

Мы также воспользуемся следующим алгебраическим тождеством:

$$(30) \quad \alpha \|k - a\|^2 + \beta \|k - b\|^2 - (\alpha + \beta) \left\| k - \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta} \right\|^2 + \\ + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \|a - b\|^2;$$

если подставить  $\alpha = \|x\|^2/2t_1$ ,  $\beta = \|x\|^2/2t_2$ , мы получим

$$(31) \quad \frac{\|x\|^2}{2t_1} \|k - a\|^2 + \frac{\|x\|^2}{2t_2} \|k - b\|^2 = \\ = \frac{\|x\|^2(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} \left\| k - \frac{t_2 a + t_1 b}{t_1 + t_2} \right\|^2 + \frac{\|x\|^2}{2(t_1 + t_2)} \|a - b\|^2.$$

*Доказательство леммы 6.4.4.* Рассуждение похоже на доказательство леммы 6.4.1, но только гораздо сложнее. Мы оценим интеграл

$$(32) \quad I(s, t) = E(|X^0(t) - X^0(s)|^3) = \\ = E \left( \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_1)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_1)\|} \right| \times \right. \\ \times \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_2)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_2)\|} \right| \times \\ \times \left. \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_3)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_3)\|} \right| du_1 du_2 du_3 \right).$$

Поскольку

$$\left| \frac{e^{-\sqrt{-\alpha}\|x\|}}{\|x\|} - \frac{e^{-\sqrt{-\alpha}\|y\|}}{\|y\|} \right| \leq \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right|,$$

лемму 6.4.4 достаточно доказать для  $\alpha = 0$ , так как тогда для всех отрицательных  $\alpha$  результат будет очевиден. Это значит, что достаточно установить неравенство

$$(33) \quad I(s, t) \leq C_\varepsilon |t - s|^{3/2-\varepsilon}.$$

Мы докажем оценку (33), введя интегрирование по гауссовскому ядру в выражение (32). Чтобы рассмотреть возможные зависимости между приращениями  $b(t) - b(u_i)$ ,  $b(s) - b(u_i)$ ,  $1 \leq i$ ,  $j \leq 3$ , мы должны сначала разбить область интегрирования на

части в соответствии с упорядочением чисел  $u_1, u_2, u_3$   $s$  и  $t$ . Всего имеется 120 различных способов упорядочить 5 элементов, но многие из них приводят к одинаковым вычислениям, так что достаточно рассмотреть следующие 6 основных случаев.

*Случай 1.*  $u_1 < u_2 < u_3 < s < t$ .

*Случай 2.*  $u_1 < u_2 < s < u_3 < t$ .

*Случай 3.*  $u_1 < u_2 < s < t < u_3$ .

*Случай 4.*  $u_1 < s < u_2 < t < u_3$ .

*Случай 5.*  $u_1 < s < u_2 < u_3 < t$ .

*Случай 6.*  $s < u_1 < u_2 < u_3 < t$ .

Мы не сможем рассмотреть здесь все случаи и разберем только первый и последний. Они являются экстремальными в том смысле, что в первом случае все  $u_i$  лежат вне интервала  $(s, t)$ , а в шестом случае все они лежат внутри этого интервала. Что касается промежуточных случаев 2—5, то в них нужно попросту скомбинировать методы, использованные в экстремальных случаях; мы оставляем эту работу читателю.

*Доказательство для случая 1.* Требуется оценить интеграл

$$I_1(s, t) = E \left( \int_0^s \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_1)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_1)\|} \right| \times \right. \\ \times \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_2)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_2)\|} \right| \times \\ \left. \times \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_3)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_3)\|} \right| du_1 du_2 du_3 \right).$$

Заметим, что разности  $b(t) - b(s)$ ,  $b(s) - b(u_3)$ ,  $b(u_3) - b(u_2)$ ,  $b(u_2) - b(u_1)$  суть независимые случайные величины. Введем соответствующие гауссовские ядра; пусть соответствующие переменные суть  $x, x_3, x_2$  и  $x_1$ . Тогда

$$I_1(s, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^s \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} \left( \frac{1}{\|x + x_1 + x_2 + x_3\|} - \frac{1}{\|x_1 + x_2 + x_3\|} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{\|x + x_2 + x_3\|} - \frac{1}{\|x_2 + x_3\|} \right) \cdot \left( \frac{1}{\|x + x_3\|} - \frac{1}{\|x_3\|} \right) \times \\ \times \frac{\exp(-\|x\|^2/2(t-s))}{(2\pi(t-s))^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x_3\|^2/2(s-u_3))}{(2\pi(s-u_3))^{3/2}} \times \\ \times \frac{\exp(-\|x_2\|^2/2(u_3-u_2))}{(2\pi(u_3-u_2))^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x_1\|^2/2(u_2-u_1))}{(2\pi(u_2-u_1))^{3/2}} \times \\ \times du_1 du_2 du_3 dx_1 dx_2 dx_3 dx.$$

Введем новые временные переменные

$$v_3 = s - u_3, \quad v_2 = u_3 - u_2, \quad v_1 = u_2 - u_1$$

и новые пространственные переменные  $k_1, k_2, k_3$ , задаваемые соотношениями

$$x_1 + x_2 + x_3 = \|x\| k_1 - x/2,$$

$$x_2 + x_3 = \|x\| k_2 - x/2,$$

$$x_3 = \|x\| k_3 - x/2.$$

Заметим, что

$$x_2 = \|x\| (k_2 - k_3), \quad x_1 = \|x\| (k_1 - k_2).$$

Если положить

$$e = \frac{x}{2\|x\|}$$

и расширить область интегрирования по временным переменным до всего единичного отрезка, мы получим

$$\begin{aligned} I_1(s, t) \leq & \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \|x\|^6 \cdot \left| \frac{1}{\|k_1 + e\|} - \frac{1}{\|k_1 - e\|} \right| \times \\ & \times \left| \frac{1}{\|k_2 + e\|} - \frac{1}{\|k_2 - e\|} \right| \cdot \left| \frac{1}{\|k_3 + e\|} - \frac{1}{\|k_3 - e\|} \right| \times \\ & \times \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_1 - k_2\|^2 / 2v_1)}{v_1^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_2 - k_3\|^2 / 2v_2)}{v_2^{3/2}} \times \\ & \times \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_3 - e\|^2 / 2v_3)}{v_3^{3/2}} \times \frac{\exp(-\|x\|^2 / 2(t-s))}{(t-s)^{3/2}} \times \\ & \times dv_1 dv_2 dv_3 dk_1 dk_2 dk_3 dx. \end{aligned}$$

Теперь проведем интегрирование по  $k_1, k_2$  и  $k_3$  (в указанном порядке), каждый раз используя лемму 6.4.6. Мы получим следующий результат:

$$\begin{aligned} I_1(s, t) \leq & \frac{(2C)^3}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dv_1}{\sqrt{v_1} (\|x\| + \sqrt{2v_1})} \cdot \frac{dv_2}{\sqrt{v_2} (\|x\| + \sqrt{2v_2})} \times \\ & \times \frac{dv_3}{\sqrt{v_3} (\|x\| + \sqrt{2v_3})} \|x\|^3 \frac{\exp(-\|x\|^2 / 2(t-s))}{(t-s)^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Элементарный анализ дает

$$\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v} (\|x\| + \sqrt{2v})} = \sqrt{2} \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\|x\|} \right),$$

откуда

$$I_1(s, t) \leq \left( \frac{C}{\sqrt{2} \pi^2} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^3 \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\|x\|} \right)^3 \frac{\exp(-\|x\|^2/2(t-s))}{(t-s)^{3/2}} dx.$$

Последний раз делая замену переменных

$$y = x/\sqrt{t-s},$$

получаем

$$I_1(s, t) \leq \left( \frac{C}{\sqrt{2} \pi^2} \right)^3 |t-s|^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \|y\|^3 \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t-s} \|y\|} \right) e^{-\|y\|^2/2} dy.$$

Легко проверить, что при  $t-s \rightarrow 0$  интеграл в правой части стремится к бесконечности медленнее, чем  $|t-s|^{-\varepsilon}$  для любого  $\varepsilon > 0$ , чем и завершается доказательство для случая 1.

*Доказательство для случая 6.* Требуется оценить интеграл

$$\begin{aligned} I_6(s, t) = E & \left( \int_s^t \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_1)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_1)\|} \right| \times \right. \\ & \times \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_2)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_2)\|} \right| \times \\ & \left. \times \left| \frac{1}{\|b(t) - b(u_3)\|} - \frac{1}{\|b(s) - b(u_3)\|} \right| du_1 du_2 du_3 \right). \end{aligned}$$

В данном случае независимые случайные величины — это  $b(u_1) - b(s)$ ,  $b(u_2) - b(u_1)$ ,  $b(u_3) - b(u_2)$  и  $b(t) - b(u_3)$ ; вводя для них переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и соответствующие гауссовские ядра, получаем

$$\begin{aligned} I_6(s, t) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} \left| \frac{1}{\|x_2 + x_3 + x_4\|} - \frac{1}{\|x_1\|} \right| \times \\ & \times \left| \frac{1}{\|x_3 + x_4\|} - \frac{1}{\|x_1 + x_2\|} \right| \cdot \left| \frac{1}{\|x_4\|} - \frac{1}{\|x_1 + x_2 + x_3\|} \right| \times \\ & \times \frac{\exp(-\|x_1\|^2/2(u_1-s))}{(2\pi(u_1-s))^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x_2\|^2/2(u_2-u_1))}{(2\pi(u_2-u_1))^{3/2}} \times \\ & \times \frac{\exp(-\|x_3\|^2/2(u_3-u_2))}{(2\pi(u_3-u_2))^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x_4\|^2/2(t-u_3))}{(2\pi(t-u_3))^{3/2}} \times \\ & \times du_1 du_2 du_3 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned}$$

Введем новые переменные следующим образом. Для временных переменных положим

$$v_1 = u_1 - s, \quad v_2 = u_2 - u_1, \quad v_3 = u_3 - u_2,$$

и для удобства обозначений пусть  $v_4$  — зависимая переменная

$$v_4 = t - u_3 = t - (s + v_1 + v_2 + v_3).$$

Новые пространственные переменные суть  $x, k_1, k_2, k_3$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ x_1 &= \|x\| k_1 + x/2, \\ x_1 + x_2 &= \|x\| k_2 + x/2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \|x\| k_3 + x/2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$x_2 = \|x\| (k_2 - k_1), \quad x_3 = \|x\| (k_3 - k_2), \quad x_4 = x/2 - \|x\| k_3.$$

Полагая

$$e = x/2 \|x\|,$$

получаем

$$\begin{aligned} I_6(s, t) &\leq \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{t-s} \int_0^{t-s-v_1} \int_0^{t-s-v_1-v_2} \|x\|^6 \times \\ &\times \left| \frac{1}{\|k_1 - e\|} - \frac{1}{\|k_1 + e\|} \right| \cdot \left| \frac{1}{\|k_2 - e\|} - \frac{1}{\|k_2 + e\|} \right| \times \\ &\times \left| \frac{1}{\|k_3 - e\|} - \frac{1}{\|k_3 + e\|} \right| \cdot \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_1 + e\|^2 / 2v_1)}{v_1^{3/2}} \times \\ &\times \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_2 - k_1\|^2 / 2v_2)}{v_2^{3/2}} \cdot \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_3 - k_2\|^2 / 2v_3)}{v_3^{3/2}} \times \\ &\times \frac{\exp(-\|x\|^2 \|k_3 - e\|^2 / 2v_4)}{v_4^{3/2}} dv_1 dv_2 dv_3 dk_1 dk_2 dk_3 dx. \end{aligned}$$

До сих пор мы во всем следовали доказательству для случая 1; но провести интегрирование так же, как это было сделано в случае 1, мы не можем. Проблема в том, что каждое  $k_i$  встречается в двух экспонентах. В случае 1 переменная  $k_1$  появлялась только в одной экспоненте, и это делало возможным применение леммы 6.4.6. Именно сейчас нам и потребуется алгебраическое тождество (31). Применяя его последовательно три раза, получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{\|x\|^2 \|k_1 + e\|^2}{2v_1} + \frac{\|x\|^2 \|k_1 - k_2\|^2}{2v_2} + \frac{\|x\|^2 \|k_2 - k_3\|^2}{2v_3} + \frac{\|x\|^2 \|k_3 - e\|^2}{2v_4} = \\ &= \frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2)}{2v_1 v_2} \left\| k_1 - \frac{v_1 k_2 - v_2 e}{v_1 + v_2} \right\|^2 + \frac{\|x\|^2}{2(v_1 + v_2)} \|k_2 + e\|^2 + \\ &+ \frac{\|x\|^2 \|k_2 - k_3\|^2}{2v_3} + \frac{\|x\|^2 \|k_3 - e\|^2}{2v_4} = \frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2)}{2v_1 v_2} \left\| k_1 - \frac{v_1 k_2 - v_2 e}{v_1 + v_2} \right\|^2 + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2 + v_3)}{2 (v_1 + v_2) v_3} \left\| k_2 - \frac{(v_1 + v_2) k_3 - v_3 e}{v_1 + v_2 + v_3} \right\|^2 + \\
& + \frac{\|x\|^2}{2 (v_1 + v_2 + v_3)} \|k_3 + e\|^2 + \frac{\|x\|^2 \|k_3 - e\|^2}{2 v_4} = \\
& = \frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2)}{2 v_1 v_2} \left\| k_1 - \frac{v_1 k_2 - v_2 e}{v_1 + v_2} \right\|^2 + \frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2 + v_3)}{2 (v_1 + v_2) v_3} \left\| k_2 - \frac{(v_1 + v_2) k_3 - v_3 e}{v_1 + v_2 + v_3} \right\|^2 + \\
& + \frac{\|x\|^2 (t - s)}{2 (v_1 + v_2 + v_3) v_4} \left\| k_3 - \frac{(v_1 + v_2 + v_3) e - v_4 e}{t - s} \right\|^2 + \frac{\|x\|^2}{2 (t - s)}.
\end{aligned}$$

Используя сокращения

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{v_1 k_2 - v_2 e}{v_1 + v_2}, \\
c_2 &= \frac{(v_1 + v_2) k_3 - v_3 e}{v_1 + v_2 + v_3}, \\
c_3 &= \frac{(v_1 + v_2 + v_3) e - v_4 e}{t - s},
\end{aligned}$$

оценку для  $I_6(s, t)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
I_6(s, t) &\leq \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{t-s} \int_0^{t-s-v_3} \int_0^{t-s-v_3-v_2} \|x\|^6 \times \\
&\times \left| \frac{1}{\|k_1 - e\|} - \frac{1}{\|k_1 + e\|} \right| \cdot \left| \frac{1}{\|k_2 - e\|} - \frac{1}{\|k_2 + e\|} \right| \cdot \left| \frac{1}{\|k_3 - e\|} - \frac{1}{\|k_3 + e\|} \right| \times \\
&\times \frac{1}{(v_1 v_2 v_3 v_4)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2)}{2 v_1 v_2} \|k_1 - c_1\|^2\right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{\|x\|^2 (v_1 + v_2 + v_3)}{2 (v_1 + v_2) v_3} \|k_2 - c_2\|^2\right) \exp\left(-\frac{\|x\|^2 (t - s)}{2 (v_1 + v_2 + v_3) v_4} \|k_3 - c_3\|^2\right) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2 (t - s)}\right) dv_1 dv_2 dv_3 dk_1 dk_2 dk_3 dx.
\end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем по переменным  $k_1, k_2, k_3$  (в указанном порядке), каждый раз используя лемму 6.4.6 и неравенство (29):

$$\begin{aligned}
I_6(s, t) &\leq \frac{(2C)^3}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{t-s} \int_0^{t-s-v_3} \int_0^{t-s-v_3-v_2} \frac{\|x\|^6}{(v_1 v_2 v_3 v_4)^{3/2}} \times \\
&\times \frac{v_1 v_2}{\|x\|^2 (v_1 + v_2)} \cdot \frac{(v_1 + v_2) v_3}{\|x\|^2 (v_1 + v_2 + v_3)} \cdot \frac{(v_1 + v_2 + v_3) v_4}{\|x\|^2 (t - s)} \\
&\times \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2 (t - s)}\right) dv_1 dv_2 dv_3 dx = \\
&= \frac{(2C)^3}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{t-s} \int_0^{t-s-v_3} \int_0^{t-s-v_3-v_2} \frac{\exp(-\|x\|^2/2 (t - s))}{(v_1 v_2 v_3 v_4)^{1/2} (t - s)} dv_1 dv_2 dv_3 dx.
\end{aligned}$$

Делаем еще одну замену переменных:

$$y = \frac{x}{\sqrt{t-s}}, \quad w_1 = \frac{v_1}{t-s}, \quad w_2 = \frac{v_2}{t-s}, \quad w_3 = \frac{v_3}{t-s};$$

заметим, что

$$v_4 = t - s - (v_1 + v_2 + v_3) = t - s - (t - s)(w_1 + w_2 + w_3) = \\ = (t - s)(1 - (w_1 + w_2 + w_3)).$$

В итоге оценка для  $I_6(s, t)$  приобретает следующий вид:

$$I_6(s, t) \leq (t-s)^{3/2} \frac{(2C)^3}{(2\pi)^6} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \int_0^{1-w_3} \int_0^{1-w_3-w_2} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2}\right) \times \\ \times \frac{1}{(w_1 w_2 w_3 (1 - w_1 - w_2 - w_3))^{1/2}} dw_1 dw_2 dw_3 dy.$$

Поскольку интеграл в правой части сходится, требуемая оценка доказана (даже для  $\varepsilon = 0$ ).

Как уже было сказано, мы не будем доказывать оставшиеся случаи 2—5 и лишь повторим, что доказательства для них могут быть получены комбинацией методов двух приведенных выше доказательств; главное — это понять, что с переменными  $u_i$ , лежащими внутри интервала  $(s, t)$ , следует обращаться иначе, нежели с переменными  $u_i$ , лежащими вне этого интервала.  $\square$

### С. Модели полимеров

После всех этих громоздких вычислений мы закончим параграф кратким и неформальным введением в математическую физику полимеров и ее связи с изучаемыми нами операторами. Полимеры — это длинные и гибкие молекулы, похожие на цепи, состоящие из большого числа повторяющихся единиц (называемых мономерами); полимеры появляются, например, в полиэтилене (цепи из  $\text{CH}_2$ -единиц), резине, пластмассах, а также в определенных биологических веществах (биополимеры). Число мономеров в одной молекуле может быть очень большим, вплоть до  $10^5$ — $10^6$  единиц. Мы будем заниматься только линейными цепями, в которых центры повторяющихся единиц соединены ломаной линией, и не будем рассматривать ветвящиеся структуры, довольно обычные в более сложных полимерах. Если пренебречь деталями, меньшими чем определенный характерный размер, называемый длиной стойкости, то полимеры в реальной жизни будут почти абсолютно гибкими. Это наводит на мысль, что их можно моделировать с помощью марковских цепей, у которых углы между двумя последовательными отрезками, соединяющими центры мономеров, имеют определенное распределение. Идея состоит в том, что чем ближе типичный угол к  $180^\circ$ , тем

больше длина стойкости. Детальный анализ этой модели можно найти в работах Florey [1] и Westwater [1]—[4]. Если мы совсем проигнорируем длину стойкости, то обычное случайное блуждание окажется вполне пригодным в качестве модели; если к тому же расстояние между последовательными центрами стремится к нулю, мы придем к броуновскому движению. Таким образом, броуновские траектории могут служить первым приближением к полимерным молекулам.

Если мы примем эту модель, то построенные выше формы  $\tilde{E}_\omega$  будут просто гамильтоновыми формами, описывающими поведение квантово-механической частицы, движущейся вблизи полимерной молекулы и взаимодействующей с этой молекулой посредством сил, действующих на очень малых расстояниях. Вспоминая эвристическое выражение (6)—(7)

$$(34) \quad H_\omega = -\Delta - \lambda_\omega(\cdot) \int_0^1 \delta(\cdot - b(t)) dt$$

для оператора, порожденного формой  $\tilde{E}_\omega$ , мы можем формально применить формулу Фейнмана—Каца и получить выражение

$$(35) \quad \langle T_\omega^t f, g \rangle = \int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{b}(t)) g(\tilde{b}(0)) \times \\ \times \exp \left( \int_0^t \int_0^1 \lambda_\omega(\tilde{b}(s)) \delta(b(r) - \tilde{b}(s)) dr ds \right) d\tilde{P},$$

где  $\tilde{b}$  — новое броуновское движение, не зависящее от  $b$ , и  $T_\omega^t$  — отвечающая ему полугруппа. Эта формула в том виде, как она записана, не имеет смысла; но, используя гиперконечную версию формулы Феймана — Каца из теоремы 5.3.11, можно придать ей смысл и доказать ее.

Пусть  $\mathcal{E}$  — гиперконечное представление формы  $E$  на  $L^2(Y, \mu)$ , и пусть  $\tilde{\delta}: Y^2 \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — «дельта-функция»

$$\tilde{\delta}(x, y) = \begin{cases} 1/\mu(x) & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выберем  $\Delta t$  столь малым, чтобы число  $\mu(x) \log \Delta t$  — бесконечно большое для всех  $x \in Y$ , и пусть  $T$  — ось времени  $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots\}$ . Если  $X: \Omega \times T \rightarrow Y$  и  $\tilde{X}: \tilde{\Omega} \times T \rightarrow Y$  — две независимые копии марковского процесса, порожденного формой  $\mathcal{E}$ , то их стандартные части  $b$  и  $\tilde{b}$  суть независимые броуновские движения.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Стандартное броуновское движение отвечает не оператору  $-\Delta$ , а оператору  $(-1/2)\Delta$  (см., например, формулы (4.1.12), (5.3.27), (5.6.20)). «Броуновские движения», рассматриваемые в этом разделе, имеют вдвое большую дисперсию, чем обычно. — *Прим. перев.*

Рассмотрим формы

$$(36) \quad \tilde{\mathcal{E}}_{\omega}(f, g) = \mathcal{E}(f, g) - \int_0^1 \lambda_{\omega}(X(r)) f(X(r)) g(X(r)) dr.$$

Если функция  $\lambda_{\omega}$  выбрана в соответствии с теоремой 6.2.6, то гиперконечная формула Фейнмана — Каца (теорема 5.3.11) утверждает, что

$$(37) \quad Q_{\omega}^t f(x) \approx E_x \left( f(\tilde{X}(t)) \exp \left( \int_0^t \int_0^1 \lambda_{\omega}(\tilde{X}(r)) \tilde{\delta}(X(r), \tilde{X}(s)) dr ds \right) \right),$$

где  $Q_{\omega}^t$  — полугруппа, порожденная формой  $\mathcal{E}_{\omega}$  (заметим, что условие 5.3.11(b) выполнено, так как мы выбрали  $\mu(x) \log \Delta t$  бесконечно большим). Это сразу же дает нам интерпретацию формулы (35).

Напомним, что, согласно теореме 6.4.5, если размерность не превосходит трех, мы можем выбрать в качестве  $\lambda$  любую ограниченную функцию. Поэтому не кажется удивительной полученная в работе Westwater [1] при  $d \leq 3$  естественная интерпретация выражения

$$(38) \quad T(t, s) = \int_0^t \int_0^s \delta(b_1(u) - b_2(v)) du dv$$

как действительнзначного случайного процесса. Идея его конструкции состоит просто в замене функции  $\delta$  приближенными  $\delta$ -функциями  $\delta_{\varepsilon}$ , а затем в переходе к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Если  $d > 3$ , то предел не существует, так что если мы хотим дать стандартную интерпретацию формулы (35), нужно при  $\varepsilon \rightarrow 0$  устремить к нулю также приближения  $\lambda_{\varepsilon}$ . Теорема 6.4.2 утверждает, что если  $d = 4$  или 5, такое семейство  $\lambda_{\varepsilon}$  найти можно, по крайней мере в том смысле, что  $T_{\omega}^t$  будет отличаться от полугруппы, отвечающей свободной частице. Что происходит при этом с интегралом в экспоненте в формуле (35) — это отдельный интересный вопрос, который мы оставляем читателю.

До сих пор мы использовали в качестве моделей полимеров броуновские траектории; до тех пор, пока речь идет об общем влиянии полимерных молекул на их окружение, такая модель может быть не совсем нереалистической и может представлять определенный интерес. Но для понимания структуры и свойств самих полимеров эта модель слишком проста и идеализированна. Мы нетолько проигнорировали длину стойкости молекул, но также не учли и тот факт, что два мономера не могут занимать одну и ту же точку пространства, и поэтому молекула полимера не может пересекать сама себя. Это условие обычно

называют «эффектом исключенного объема»; с математической точки зрения оно оказывает серьезнейшее влияние на класс приемлемых моделей. Если мы будем представлять себе рост полимерной молекулы как случайный процесс, то требование, чтобы траектория не пересекала сама себя, означает, что возможное положение процесса в любой момент времени зависит от всего его прошлого — модель больше не может быть марковской. Как следствие, анализ получающегося процесса становится крайне сложным, и в физически интересном случае  $d = 3$  до сих пор получено очень мало математических результатов. Тем не менее на более эвристическом уровне довольно много информации было получено с помощью компьютерного моделирования (см., например, следующие работы: Barber, Ninham [1], Domb [1], Flory [1], Freed [1], Hammersley, Morton [1]). В более высоких размерностях аналитические методы имеют несколько больший успех; ниже в этом параграфе мы дадим краткое введение в работы Лолера (Lawler) о несамопересекающихся случайных блужданиях. Но сначала мы хотим обсудить иной подход, предложенный Эдвардсом в работах Edwards [1], [2] и получивший строгое математическое обоснование в работах Westwater [1] — [4].

В модели Эдвардса полимерная молекула тоже описывается как случайный процесс, но вместо динамической картины, возникающей в связи с термином «несамопересекающееся случайное блуждание», описание в этом случае вполне статично: процесс задается в терминах меры на пространстве  $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ . Пусть  $W$  — мера Винера на  $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ ; искомая мера  $\rho_\lambda$  формально описывается выражением

$$(39) \quad d\rho_\lambda = Z^{-1} \exp\left(\lambda \int_0^1 \int_0^1 \delta(x(u) - x(v)) du dv\right) dW(x),$$

где  $\lambda$  — отрицательная константа, называемая константой связи, а  $z$  — нормирующий множитель:

$$(40) \quad Z = \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^d)} \exp\left(\lambda \int_0^1 \int_0^1 \delta(x(u) - x(v)) du dv\right) dW(x).$$

Мы не будем обсуждать здесь физические предположения, лежащие в основе формулы (39) (любому желающему лучше понять полимерные модели мы горячо рекомендуем обзорную статью Freed [1]), но интуитивно эта формула выглядит вполне разумной: поскольку мы интересуемся несамопересекающимися траекториями, мы «наказываем» их, когда они самопересекаются (напомним, что  $\lambda$  отрицательно).

В размерности 1 выражению (39) легко придать смысл с помощью броуновского локального времени; в размерности 2 решение было дано Вараданом (Varadhan) в приложении к работе Symanzik [1]. Случай  $d = 3$  требует новой техники; решение было получено в работах Уэстуотера (Westwater [1], [3]). Оно слишком длинно и технично, чтобы приводить его здесь, но мы попытаемся объяснить основную идею — а именно, использование тесной связи между выражениями (39) и (36), или, более точно, между экспонентами от интегралов

$$(41) \quad \int_0^1 \int_0^1 \delta(b_1(u) - b_2(v)) du dv$$

и

$$(42) \quad \int_0^1 \int_0^1 \delta(x(u) - x(v)) du dv.$$

Напомним (см. (38)), что мы умеем придавать смысл выражению (41); идея состоит в том, чтобы как-то проинтегрировать выражение (42) в терминах выражения (41). Для этого нужно разбить броуновское движение  $x$  в формуле (42) на два независимых броуновских движения  $b_1$  и  $b_2$ , как в (41).

Предлагается следующий трюк. Вместо того чтобы интегрировать сразу по всему квадрату  $[0, 1] \times [0, 1]$ , мы разобьем область интегрирования в формуле (42) на более мелкие части. Сначала разобьем квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$  на четыре меньших квадрата  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ ,  $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$  и проинтегрируем по верхнему левому квадрату  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$  и по правому нижнему —  $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ .

Повторим ту же процедуру с каждым из оставшихся двух квадратов.  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$  и  $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$ , разбив его на 4 части и проинтегрировав по верхней левой и по правой нижней части. Снова повторим ту же процедуру с четырьмя оставшимися неиспользованными квадратами, и так далее до бесконечности. Рис. 6.1 показывает области интегрирования на первых трех шагах. На  $n$ -м шаге повторения процедуры мы будем интегрировать по  $2^n$  квадратам, каждый площадью  $4^{-n}$ . Просуммировав все указанные вклады, мы получим интеграл по всему единичному квадрату  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Чтобы понять идею, стоящую за этой процедурой, давайте посмотрим, что получится при интегрировании по первому из

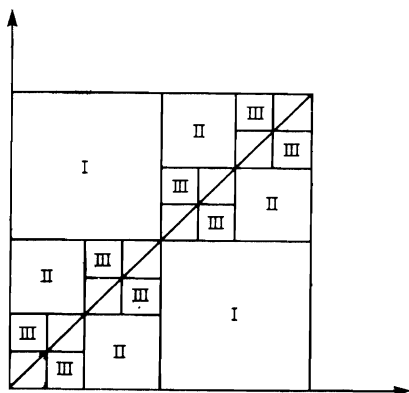


РИС. 6.1.

меньших квадратов  $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Два процесса  $x_1, x_2: \Omega \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , определяемые равенствами

$$(43) \quad x_1(s) = x\left(\frac{1}{2} - s\right) - x\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$(44) \quad x_2(t) = x\left(\frac{1}{2} + t\right) - x\left(\frac{1}{2}\right),$$

являются независимыми броуновскими движениями. Формально заменяя переменные, получаем

$$\int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} \delta(x(s) - x(t)) ds dt = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \delta(x_1(s) - x_2(t)) ds dt.$$

Следовательно, интеграл  $\int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} \delta(x(s) - x(t)) ds dt$  имеет то же распределение, что величина  $T(1/2, 1/2)$  в формуле (38). Аналогично интеграл по любому из квадратов площади  $4^{-n}$ , возникающему на  $n$ -м шаге процедуры, имеет то же распределение, что  $T(1/2^n, 1/2^n)$ . Таким образом, задача придания смысла формуле (39) сводится к задаче о существовании предела сумм случайных величин, имеющих распределение  $T(1/2^n, 1/2^n)$ . Поскольку эти случайные величины зависимы, задача оказывается довольно трудной, и за ее решением мы можем лишь отослать читателя к цитируемым работам Уэстуотера.

Зная о существовании мер  $\rho_\lambda$ , мы можем интересоваться их свойствами. Вопреки формальному выражению (39) эти меры

при  $\lambda < 0$  сингулярны относительно меры Винера; фактически, как показано в работе Westwater [3], при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  меры  $\rho_{\lambda_1}$  и  $\rho_{\lambda_2}$  имеют непересекающиеся носители. Из результатов работы Kusuoka [2], по-видимому, следует, что при конечных  $\lambda$  траектории по-прежнему самопересекаются; о предельном поведении при  $\lambda \rightarrow \infty$  ничего не известно. См. также другие работы о самопересечениях: Dynkin [3], Lawler [3], Le Gall [1], Yor [1], Rosen [1].

Благодаря работам Варадана и Уэстуотера мы знаем, что меры  $\rho_\lambda$ , описываемые формулой (39), существуют при  $d \leq 3$ . Рассуждения Уэстуотера демонстрируют тесную связь между выражениями (39) и (35), а поскольку мы доказали, что формула (35) имеет смысл при  $d \leq 5$ , возникает естественный вопрос — что происходит с формулой (39) в размерностях 4 и 5? Этот вопрос связан не только с праздным любопытством и желанием обобщать; он крайне важен для математической физики. Как следует из программы Симанзика (Symanzik [1]), он теснейшим образом связан с существованием нетривиальных квантовых полей в размерности 4 (физически важная размерность). Мы объясним эту связь в § 7.5. Попытка обобщить рассуждения Уэстуотера на размерность 4 может встретить несколько препятствий; не только существование выражения (39) выглядит в этом случае гораздо более ненадежным, но также и тот факт, что приходится выбирать  $\lambda$  положительным, может создать дополнительные проблемы. Предельная теорема, полученная Уэстуотером, столь сложна, что, может быть, неплохой идеей было бы дать сначала нестандартное рассмотрение размерности 3 (для случая  $d = 2$  это уже сделано в работе Stoll [3]). Сама предельная конструкция принадлежит к тому типу, который, как нам кажется, легко укладывается в рамки нестандартных методов. Рассмотрев размерность 3, следовало бы сделать попытку перейти к размерности 4.

Как было обещано выше, мы закончим этот параграф несколькими замечаниями о несамопересекающихся случайных блужданиях. *Простое случайное блуждание* длины  $N$  — это такая последовательность  $\{x_1, \dots, x_N\}$  элементов множества  $\mathbb{Z}^d$ , для которой  $|x_i - x_{i-1}| = 1$  при всех  $i \leq N$ ; *несамопересекающееся случайное блуждание* длины  $N$  — это такое простое случайное блуждание  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , у которого  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . На множестве  $\Omega_N$  всех простых случайных блужданий длины  $N$  естественной мерой является нормированная считающая мера

$$P_N(\{x_1, \dots, x_n\}) = 2^{-Nd}.$$

Далеко не так очевидно, какая мера является «правильной» на множестве  $S_N$  всех несамопересекающихся случайных блужда-



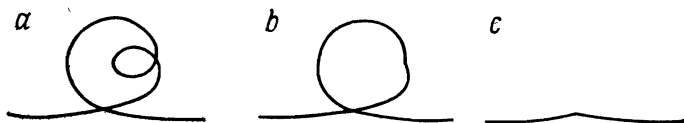


РИС. 6.2.

ний; однако и здесь стало привычным использовать равномерную меру

$$Q_N(\{x_1, \dots, x_N\}) = 1/|S_N|.$$

Точных результатов о мерах  $Q_N$  крайне мало (см. Barber, Ninham [1], Brydges, Fröhlich, Spencer [1], Brydges, Spencer [1], Domb [1], Flory [1], Freed [1], Hammersley, Morton [1], Kesten [1]); несколько лет назад Лолер (см. Lawler [1]) ввел новую, более удобную для изучения меру на множестве  $S_N$ . Его идея состоит в том, чтобы строить несамопересекающиеся случайные блуждания из простых блужданий с помощью удаления петель. Более точно его конструкция может быть описана следующим образом.

Для заданного простого случайного блуждания  $\{x_1, \dots, x_N\}$  определим

$$\varphi = \min \{j \mid \exists i < j (x_i = x_j)\},$$

$$\tau = \text{то } i < \varphi, \text{ для которого } x_i = x_\varphi,$$

и пусть  $\{y_1, \dots, y_M\}$  — траектория, заданная равенствами

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{при } j \leq \tau \\ x_{j+(\varphi-\tau)} & \text{при } \tau \leq j \leq M. \end{cases}$$

Заметим, что  $M = N - (\varphi - \tau)$  и что  $\{y_1, \dots, y_M\}$  — это траектория, полученная из  $\{x_1, \dots, x_N\}$  стиранием петли  $\{x_\tau, x_{\tau+1}, \dots, x_{\varphi-1}\}$ . Если блуждание  $\{y_1, \dots, y_M\}$  оказывается несамопересекающимся, мы заканчиваем процесс; если нет, повторяем операцию стирания петель до тех пор, пока не получим траекторию без самопересечений. Рис. 6.2 иллюстрирует описанный процесс.

Пусть  $\Omega$  — множество простых случайных блужданий бесконечной длины, и  $P$  — естественная мера на  $\Omega$ . Если  $d \geq 3$ , простое случайное блуждание является транзитентным, т. е. с вероятностью единица  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, можно применить описанную выше процедуру к бесконечному случайному блужданию  $\{x_i\}$  и получить в результате бесконечное несамопересекающееся блуждание  $\{z_i\}$ . Будем использовать обозначение

$$D_N(\{x_i\}) = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}.$$

Мера на  $S_N$ , введенная Лолером, определяется так:

$$q_N(\{z_1, \dots, z_N\}) = P(\{x_i\} | \{z_1, \dots, z_N\} = D_N(\{x_i\})).$$

Пусть  $X_N: \Omega_N \times \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{Z}^d$  — простое случайное блуждание, рассматриваемое как случайный процесс на  $(\Omega_N, P_N)$ . Если выбрать число  $N$  бесконечно большим, то, как известно, стандартная часть процесса  $Y_N: \Omega_N \times \{0, 1/N, \dots, 1\} \rightarrow {}^*\mathbb{R}^d$ , равного

$$Y_N(\omega, t) = \frac{d}{\sqrt{N}} X_N(\omega, Nt),$$

является броуновским движением. Точно так же мы можем рассмотреть несамопересекающееся (полученное стиранием петель) случайное блуждание как случайный процесс  $X_N: S_N \times \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{Z}^d$  на  $(S_N, q_N)$ . Основной результат Лолера состоит в том, что если  $d \geq 5$ , то существует такое положительное действительное число  $K_d$ , что стандартная часть процесса

$$Y_N(\omega, t) = \frac{d}{\sqrt{N}} X_N(\omega, K_d Nt)$$

является броуновским движением. На основе эвристических аргументов и численных свидетельств было высказано предположение, что предельное распределение для несамопересекающегося случайного блуждания является гауссовским при  $d \geq 4$  и не гауссовским при  $d \leq 3$ ; сформулированный выше результат является первым успешным шагом на пути к доказательству этого предположения. Исходная гипотеза связана с равномерной мерой  $Q_N$ , а не с введенной Лолером мерой  $q_N$ ; в более поздней работе (Lawler [21]) автор изучает соотношение между этими двумя подходами. Хотелось бы, однако, отметить, что нет никаких оснований считать меру  $Q_N$  более естественной, чем  $q_N$ . В самом деле, в статье Lawler [1] дается следующая характеристика случайного блуждания, полученного стиранием петель, которая кажется более интуитивно ясной, чем определение. Пусть дано подмножество  $A \subset \mathbb{Z}^d$ ; определим *случайное блуждание с запрещенным множеством  $A$* , оставив лишь такие простые случайные блуждания, которые не касаются множества  $A$ . Лолер доказал, что если даны первые  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайного блуждания, полученного стиранием петель, то случайная величина  $x_{n+1}$  имеет то же распределение, что и  $y_{n+1}$ , где  $y$  — это случайное блуждание с запрещенным множеством  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и с условием  $y_n = x_n$ .

За дальнейшей информацией о важности несамопересекающегося случайного блуждания в физике полимеров и в квантовой теории поля мы отсылаем читателя к работам Freed [1], Nelson [4].

## 6.5. Приложения нестандартного анализа к уравнению Больцмана

### А. Уравнение

(Нелинейное) уравнение Больцмана (Boltzmann, 1872) является основным уравнением кинетики газа. Цель состоит в том, чтобы вывести макроскопическое поведение газов из микроскопической модели кинетической теории газа, в которой газ описывается как система твердых шариков (молекул), взаимодействующих при столкновениях по законам упругих столкновений классической механики. Уравнение Больцмана является основной моделью при описании неравновесных явлений, а также приближения к равновесию (асимптотическое распределение Максвелла — Больцмана) в газах.

Для обсуждения уравнения Больцмана введем некоторые обозначения. Рассмотрим газ из идентичных точечных молекул и вначале предположим, что взаимодействие молекул задается потенциалом конечного радиуса действия  $d$ . Молекулы движутся в ограниченной области  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$  с подходящими граничными условиями (например, периодическими). Скорости молекул могут принимать значения в  $\mathbb{R}^3$ , так что фазовым пространством каждой молекулы является  $M = \Lambda \times \mathbb{R}^3$ .

Пусть  $F$  — плотность молекул в  $M$ , величина, о которой априори предполагается, что она существует и дифференцируема по времени и пространственным переменным, так что можно написать эволюционное уравнение. Число молекул в области  $A \subset M$  в момент времени  $t$  дается формулой

$$\int_A F(x, v, t) dx dv.$$

Уравнение Больцмана выражает  $\partial F / \partial t$  посредством баланса между числом молекул, входящих в область столкновения, и числом молекул, покидающих ее.

Рассмотрим две молекулы с начальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , первоначально разделенными в пространстве расстоянием, большим, чем радиус  $d$  действия потенциала. Пусть  $v'_1$  и  $v'_2$  — соответствующие скорости после того как столкновение произошло и молекулы снова оказались на расстоянии больше  $d$  друг от друга. Сохранение импульса и энергии дает

$$v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2 \text{ и } v_1^2 + v_2^2 = (v'_1)^2 + (v'_2)^2.$$

В нашем (трехмерном) случае эти уравнения недостаточны для полного описания столкновения. Чтобы получить такое описание, можно, например, ввести плоскость  $P$ , ортогональную к  $\omega = v_2 - v_1$  и неподвижную относительно первой молекулы. В этой

плоскости рассмотрим вектор  $u$  от первой молекулы к точке пересечения прямой, идущей от положения второй молекулы в момент времени  $-\infty$  в направлении  $\omega$ , с плоскостью  $P$ . Заметим, что в случае конечного радиуса действия  $d$  столкновения возможны лишь при  $|u| \leq d$ . Обозначим в общем случае через  $B$  множество тех значений  $u$ , при которых происходят столкновения.

Больцман, используя законы сохранения и статистическую гипотезу (знаменитый Stosszahlansatz) вычислил количество столкновений, происходящих в течение короткого интервала времени в малой области  $\Delta x$  конфигурационного пространства между молекулами с начальными и конечными скоростями, лежащими соответственно в малых областях  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$  и соответственно  $\Delta v'_1$ ,  $\Delta v'_2$  пространства скоростей. Из этого вычисления он затем вывел уравнение

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, v_1, t) + v_1 \nabla_x F(x, v_1, t) = (QF)(x, v_1, t), \quad t > 0,$$

где  $\nabla_x$  — градиент по пространственным координатам  $x \in \Lambda$ , а  $Q$  — так называемый оператор столкновений

$$(2) \quad (QF)(x, v_1, t) = \int_B \left( \int_{\mathbb{R}^3} [F(x, v'_1, t) F(x, v'_2, t) - F(x, v_1, t) F(x, v_2, t)] |v_2 - v_1| dv_2 \right) du.$$

Это и есть уравнение Больцмана, которое нужно решать с начальным условием  $F(x, v, 0)$ . В случае бесконечного радиуса действия потенциала нужно взять  $B = \mathbb{R}^2$ .

Это уравнение было выведено из классической механики без какой бы то ни было статистической гипотезы, например, в случае потенциала с твердой сердцевиной, т. е. модели твердых шариков радиуса  $d/2$ . Сделавший это Лэнфорд (Lanford [1]) начал с рассмотрения газа из  $n$  таких шариков в фиксированном сосуде  $\Lambda$  и затем совершил предельный переход  $n \rightarrow \infty$ ,  $d \rightarrow 0$  с условием  $nd^2 = 1$ . Он показал, что если начальное условие  $F(x, v, 0)$  таково, что  $F(x, v, 0) = \lim_{d \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} F^{(n, d)}(x, v, 0)$ , где

$F^{(n, d)}$  определяет начальные условия для функции плотности  $F^{(n, d)}(x, v, t)$  для  $n$  молекул диаметра  $d$ , то предел  $F(x, v, t) = \lim_{d \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} F^{(n, d)}(x, v, t)$  почти всюду существует и предельная

функция  $F$  является обобщенным решением уравнения Больцмана, по крайней мере при достаточно малых  $t > 0$ .

По поводу уравнения Больцмана и его следствий имеется обширная литература, как физическая, так и математическая (см., например, Truesdell, Muncaster [1], Cercignani [1\*]). Среди рассмотренных математических проблем — существование и един-

ственность решений, а также их асимптотическое поведение. В так называемом пространственно-однородном случае, когда ищутся не зависящие от пространственной переменной  $x$  решения, существование, единственность и асимптотические результаты получены несколькими авторами, начиная с Карлемана (Carleman, 1933) и включая Моргенштерна (Morgenstern), Уайльда (Wild), Трюсделла (Truesdell) и Повзнера. Самые сильные результаты, по-видимому, получены Аркеридом (Arkeryd [1—8]), дополнительные ссылки см. в книге Truesdell, Muncaster [1], гл. 21. Мы более детально опишем ситуацию в дальнейшем.

В пространственно-неоднородном случае, когда решение может зависеть от пространственной переменной, существование и единственность на конечном временном интервале для потенциалов конечного радиуса действия доказаны Градом (Grad, 1958). Гораздо труднее получить результаты о глобальных решениях, однако для некоторых специальных классов начальных условий Ukai [1], Illner, Shinbrot [1\*] и Arkeryd, Esposito, Pulvirenti [1\*] доказали существование, единственность и асимптотические результаты. Они предполагают, что начальные условия близки либо к максвелловскому равновесию (Ukai), либо к вакууму (Illner, Shinbrot), либо к однородному состоянию (Arkeryd, Esposito, Pulvirenti). Первые глобальные по времени теоремы существования в далеких от равновесия состояниях были получены в работах Arkeryd [3, 7] с помощью нестандартного анализа. Мы опишем эти результаты ниже. Наилучшие на сегодняшний день результаты о существовании содержатся в работе R. DiPerna, P. L. Lions [1\*] и касаются стандартных интегрируемых по Лебегу решений. Ниже мы используем нестандартные методы для анализа асимптотического поведения этих решений.

Введем некоторые обозначения, которые будут полезны нам при нестандартном изучении уравнения Больцмана. Пусть  $\omega$  — некоторая функция от  $v_1, v_2$  и  $u$ . Напишем уравнение

$$(1') \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, v_1, t) + v_1 \nabla_x F(x, v_1, t) = (Q_\omega F)(x, v_1, t),$$

которое представляет собой модифицированное уравнение Больцмана, полученное из (1) заменой величины  $|v_2 - v_1|$  в операторе столкновений на функцию  $\omega(v_1, v_2, u)$ . Часто удобно еще заметить функцию  $\omega$  на ее срезку  $\omega_n^m$ , где

$$\omega_n^m(v_1, v_2, u) = \begin{cases} \omega(v_1, v_2, u) & \text{если } |u| \leq m \text{ и } v_1^2 + v_2^2 \leq n^2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим здесь, что результаты, доказанные ниже для (1') с  $\omega_n^m$  вместо  $\omega$ , верны также при  $\omega(v_1, v_2, u) = |v_2 - v_1|^\alpha$ , где  $0 \leq \alpha < 2$ . Метод применим также к случаю, когда имеется один

угловой параметр столкновений, а силы взаимодействия обратно пропорциональны  $k$ -й степени расстояния с  $k > 2$ .

Для простоты мы рассмотрим случай, когда молекулы имеют положения  $x$ , меняющиеся в  $\Lambda$ , где  $\Lambda$  — сосуд с периодическими граничными условиями, т. е. будем считать  $\Lambda$  тором  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Однако вполне аналогичная техника во многих случаях дает соответствующие результаты в неограниченной области либо в ограниченной области с другими граничными условиями, а также в случае, когда наряду с силами взаимодействия пар тел имеется внешняя сила, действующая на молекулы.

### *В. Физически естественные начальные условия*

Для уравнения Больцмана естественны начальные условия  $F(x, v, 0) = F_0(x, v) \geq 0$  с не более жесткими ограничениями на  $F_0$ , чем требование, что  $F_0, v^2 F_0, F_0 \log F_0$  принадлежат  $L^1(dx dv)$ . В самом деле, требования  $F_0 \geq 0, F_0 \in L^1(dx dv)$  вытекают из того факта, что  $F_0$  — плотность вероятности, а условие  $v^2 F_0 \in L^1$  происходит из того, что  $\int v^2 F_0 dx dv$  имеет физическую интерпретацию полной энергии всех молекул. Проводя формальное вычисление, мы видим, что  $\int F_0 dx dv = \int F dx dv$  и  $\int v^2 F_0 dx dv = \int v^2 F dx dv$  при всех  $t$ , так что величины  $\int F dx dv, \int v^2 F dx dv$  сохраняются. Аналогичным образом можно увидеть, что знаменитая величина  $H$ , задаваемая формулой

$$HF(t) \equiv \int F \log F dx dv,$$

является невозрастающей функцией от  $t$ , т. е.  $HF(t) \leq HF(0)$  при  $t \geq 0$ .

Хорошо известно (см., например, Truesdell, Muncaster [1] и Cercignani [1\*]), что  $HF$  можно интерпретировать как энтропию. Поэтому естественно изучать уравнение Больцмана (1) в пространстве таких функций  $F$ , что  $F \geq 0$  и функции  $F, v^2 F, F \log F$  принадлежат  $L^1$ .

Однако имеются серьезные трудности, связанные с отсутствием линейности и ограниченности в операторе столкновений, входящем в уравнение Больцмана (1). Они возникают тремя различными способами. Во-первых,  $QF$  не является линейным по  $F$ . Во-вторых, по крайней мере в случае  $B = \mathbb{R}^2$ , входящие в  $Q$  два члена по отдельности не являются корректно определенными. В-третьих,  $Q$  как функция от  $x$  содержит квадрат функции из  $L^1$ . В пространственно-однородном случае, когда ищутся решения  $F$ , не зависящие от  $x$ , третья проблема, конечно, исчезает. Это является главной причиной того, что существование и единствен-

ность гораздо легче доказать, когда  $x$  отсутствует. Ниже мы опишем, как это сделать методами нестандартного анализа. В пространственно-неоднородном случае (при наличии зависимости от  $x$ ) первые результаты о глобальном существовании решения при описанных выше физически естественных условиях были получены для решений в  $L^1$ -постановке в смысле Лёба аналитическими методами нестандартного анализа.

### С. Уравнение с усеченным оператором столкновений

Прежде чем рассматривать полное уравнение (1), взглянем сначала на более простой случай «усеченного уравнения Больцмана»

$$(3) \quad \frac{d}{dt} F(x + v_1 t, v_1, t) = (Q_n^m F)(x + v_1 t, v_1, t),$$

в котором

$$(Q_n^m F)(x, v_1, t) = \int_B \int_{\mathbb{R}^3} [\langle F \otimes F \rangle(x, v'_1, v'_2, t) - \langle F \otimes F \rangle(x, v_1, v_2, t)] \omega_n^m(v_1, v_2, u) dv_2 du,$$

где  $m, n$  — неотрицательные целые числа,

$$\langle F \otimes F \rangle = \begin{cases} F \otimes F & \text{при } |F \otimes F| \leq n, \\ n \operatorname{sgn} F \otimes F & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а  $\omega_n^m$  определено в п. 6.5.А.

В этом случае справедлива следующая

**6.5.1. Теорема.** *Существует единственное неотрицательное решение уравнения (3), принадлежащее  $L^\infty$  и имеющее данное начальное условие  $F_0 \in L_+^\infty = \{f \in L^\infty, f \geq 0\}$ .*

*Эскиз доказательства.* Из определения  $\langle F \otimes F \rangle$  легко усмотреть, что для любых функций  $F, G$

$$\begin{aligned} & |\langle F \otimes F \rangle(x, v_1, v_2, t) - \langle G \otimes G \rangle(x, v_1, v_2, t)| \leq \\ & \leq |F(x, v_1, t)| |F(x, v_2, t) - G(x, v_2, t)| + \\ & + |G(x, v_2, t)| |F(x, v_1, t) - G(x, v_1, t)|. \end{aligned}$$

Поскольку интегрирование в выражении для  $Q_n^m$  происходит по ограниченным множествам

$$\|Q_n^m F - Q_n^m G\|_\infty \leq K (\|F\|_\infty + \|G\|_\infty) \cdot (\|F - G\|_\infty),$$

<sup>1)</sup> Здесь  $(F \otimes F)(x, v_1, v_2, t) = F(x, v_1, t)F(x, v_2, t)$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> На каждом конечном отрезке по временной переменной  $t$ . — Прим. ред.

где  $K$  — некоторая постоянная. Таким образом, оператор  $Q_n^m$  локально липшицев в  $L^\infty$  и существует единственное локальное решение  $F$  проинтегрированной версии уравнения (3)

$$F(x + v_1 t, v_1, t) = F_0(x, v_1) + \int_0^t Q_n^m F(x + v_1 s, v_1, s) ds.$$

Но

$$\|Q_n^m F\|_\infty \leq \pi m^2 \cdot 2n \cdot n \cdot \pi n^3 4/3 \equiv K',$$

откуда

$$\|F(t)\|_\infty \leq \|F_0\|_\infty + tK'.$$

Таким образом,  $F(t)$  существует при всех  $t > 0$ . Для окончания доказательства остается лишь проверить, что  $F \geq 0$ .

Легко показать, что  $F$  является единственным решением уравнения

$$\begin{aligned} (4) \quad G(x + v_1 t, v_1, t) &= \exp(-H(x, v_1, t)) F_0(x, v_1) + \\ &+ \int_0^t \exp(-H(x, v_1, t) + H(x, v_1, s)) \times \\ &\times Q_n^{m'} G(x + v_1 s, v_1, s) ds \equiv \tilde{Q} G(x, v_1, t), \end{aligned}$$

где

$$H(x, v_1, t) \equiv \int_0^t \int_B \int_{\mathbb{R}^3} F(x + v_1 \tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2, u) dv_2 du d\tau$$

и

$$\begin{aligned} (Q_n^{m'} F)(x, v_1, s) &= \iint [\langle F \otimes F \rangle(x, v'_1, v'_2, s) + F \otimes F(x, v_1, v_2, s) - \\ &- \langle F \otimes F \rangle(x, v_1, v_2, s)] \omega_n^m(v_1, v_2, u) dv_2 du. \end{aligned}$$

Заметим, что  $Q_n^{m'}$  имеет структуру, аналогичную  $Q_n^m$ , но при этом обладает приятным свойством сохранения порядка в том смысле, что  $Q_n^{m'} G_1 \geq Q_n^{m'} G_2 \geq 0$  как только  $G_1 \geq G_2 \geq 0$ . При малых  $t$  решение  $G$  уравнения (4) является пределом возрастающей последовательности  $G_1 = 0$ ,  $G_j = \tilde{Q} G_{j-1}$ ,  $j \geq 2$ . Отсюда следует, что решение (4) и, следовательно, решение (3) неотрицательно при малых  $t$ . Используя соображения, связанные с продолжением, мы получаем  $F \geq 0$  при всех  $t > 0$ , что завершает доказательство теоремы; дальнейшие подробности см. Arkeryd [1].



**6.5.2. Замечание.** Для решения уравнения (3), задаваемого теоремой 6.5.1, имеет место сохранение массы, т. е.  $\int F_0 dx dv = \int F dx dv$ , а также энергии, т. е.  $\int v^2 F_0 dx dv = \int v^2 F dx dv$ , причем функция  $H$ , введенная в п. 6.5.А, является невозрастающей. Причиной является то, что упомянутое выше простое формальное рассуждение можно в действительности сделать строгим как только  $F_0, v^2 F_0 \in L^1$ . Отсюда следует и общий случай, поскольку

$$F = F_0 \text{ при } |v_1| \geq n,$$

а если  $|v_1| \leq n$ , то  $F$  зависит только от начальной функции  $F_0$ , ограниченной на множество, где  $|v_1| \leq n$ , а такое ограничение очевидным образом принадлежит  $L^1$ .

#### *D. Нестандартные средства*

Мы будем изучать теперь уравнение Больцмана (1) в ограниченной области  $\Lambda$  пространства переменных  $x$  с начальным условием  $F_0 \in L^1_+(\Lambda \times \mathbb{R}^3)$  и с потенциалом попарного взаимодействия конечного или бесконечного радиуса действия. Мы следуем здесь Аркериду (Arkerid [3—8, 1\*]).

Мы начнем с усеченного случая, как в теореме 6.5.1, но теперь в расширенном универсуме  $V(*\mathbb{R})$ . Выберем  $n \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и положим

$$f_0(x, v) = \min(*F_0(x, v), n) + n^{-1} \exp(-v^2).$$

Часто можно легко показать, что  $V(*\mathbb{R})$ -решение  $f$  с начальным условием  $f_0$ , указанное в теореме 6.5.1, определяет слабое решение в  $V(\mathbb{R})$

$$L_t: G \rightarrow \int f^* G,$$

где  $G$  принадлежит подходящему хорошему пространству. Так можно получить разнообразные результаты, которые ранее доказывались прямо в  $V(\mathbb{R})$ , т. е. стандартными методами.

Этот подход имеет два положительных аспекта. Во-первых, наш метод получения старых результатов имеет преимущества концептуального, экспозиционного и педагогического характера. С другой стороны — и это, по-видимому, более важно — он дает новые результаты. Первое доказательство слабой  $L^1$ -сходимости к максвелловскому значению  $F$  при  $t \rightarrow \infty$  для решений уравнения (1) в пространственно однородном случае без обрезания было получено в работе Аркерид [6] с использованием того факта, что один из методов, основанный на стандартном обрезании, можно прямо применить в нестандартной постановке к обрезанию в  $*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Сильная  $L^1$ -сходимость для жестких сил с угловы-

ми обрезаниями была впервые доказана нестандартными методами (Arkeyd [1\*]). В п. 6.5.Е мы обсудим нестандартные методы доказательства существования решений.

В качестве еще одного интересного момента нестандартная техника предлагает новое понятие слабого решения, использовавшееся Аркеридом при изучении существования. Мы обсудим это в п. 6.5.Ф. Наконец, в п. 6.5.Г представлено естественное нестандартное доказательство того, что стандартные  $L^1$ -решения уравнения Больцмана сходятся к глобальному распределению Максвелла при  $t \rightarrow +\infty$ .

Мы надеемся, что последующее обсуждение подкрепит нашу основную философию, состоящую в том, что нестандартный анализ является эффективным дополнительным — скорее, чем альтернативным — инструментом работающего математика. Поскольку тема довольно техническая, мы иногда будем лишь давать наброски основных идей, отсылая читателя за деталями к работам Аркериды.

*Е. Пространственно однородный случай.  
Глобальное существование решений*

Мы обсудим пространственно однородное уравнение Больцмана (1), т. е. будем считать, что начальная функция  $F_0$  и решение  $F$  не зависят от пространственной переменной  $x$ . Потенциалы попарного взаимодействия могут иметь конечный или бесконечный радиус действия.

Сопоставим уравнению (1) его слабую форму

$$\begin{aligned} \int F(v, t) g(v, t) dv = & \int F_0(v) g(v, s) dv + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} F(v, s) \partial_s g(v, s) ds dv + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (QF)(v, s) g(v, s) dv ds \end{aligned}$$

для всех  $t > 0$  и  $g \in C^{1, \infty} \equiv \{G \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^3) \mid \|G\| \equiv \sup |G(u, t)| + \sup |\partial_t G(v, t)| + \sup |\nabla_v G(v, t)| < \infty\}$ .

Аналогичная слабая форма имеется для усеченного уравнения из п. 6.5.С. В расширенном универсуме эту форму можно записать в виде

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_{*\mathbb{R}^3} f(v, t) g(v, t)^* dv = & \int_{*\mathbb{R}^3} f_0(v) g(v, 0)^* dv + \\ & + \int_0^t \int_{*\mathbb{R}^3} f(v, s) \partial_s g(v, s)^* dv ds + \int_0^t \int_{*\mathbb{R}^3} (Q'_n f)(v, s) g(v, s)^* dv ds, \end{aligned}$$

где  $Q'_n \equiv Q_n^n$ . В (5) и дальнейших формулах того же типа наши обозначения слегка небрежны, так как на самом деле следовало бы ставить звездочку при всех дифференциалах, например  $*dv*ds$ , а не просто  $*dvds$ . Заметим, что замена переменных дает

$$\begin{aligned} (Q'_n f(s), g(s)) &\equiv \int (Q'_n f)(v_1, s) g(v_1, s)^* dv_1 = \\ &= \int_{*\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times B} [g(v'_1, s) - g(v_1, s)] \langle f \otimes f \rangle(v_1, v_2, s) \omega_n^n(v_1, v_2, u)^* dv_1 dv_2 du. \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

**6.5.3. Теорема.** Пусть  $F_0 \geq 0$  и функции  $F_0, v^2 F_0, F_0 \log F_0$  принадлежат  $L^1$ . Тогда при  $m = n \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$  решение  $f$  из  $V(*\mathbb{R})$ , описанное в теореме 6.5.1, с начальным условием

$$f_0(v) = \min(*F_0(v), n) + n^{-1} \exp(-v^2)$$

задает в  $V(\mathbb{R})$  отображение

$$F: \mathbb{R}_t \rightarrow L^1_+,$$

определяемое таким образом, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(v, t) G(v) dv = \int_{*\mathbb{R}^3} f(v, t) *G(v)^* dv$$

для любого  $G \in C^{1, \infty}$ .

Функция  $F$  является слабым решением уравнения (1) в том смысле, что если  $F_t(v) \equiv F(v, t)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F_t(v) G(v, t) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} F_0(v) G(v, 0) dv + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} F_s(v) \partial_s G(v, s) dv ds + \\ &+ \int_0^t (QF_s, G(s)) ds. \end{aligned}$$

Здесь

$$(QF, G) \equiv \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times B} [G(v'_1) - G(v_1)] F(v_1) F(v_2) |v_1 - v_2| dv_1 dv_2 du$$

и считается, что потенциалы бесконечного радиуса действия — это потенциалы типа обратной  $k$ -й степени расстояния, где  $k > 2$ , или их подходящие обобщения.

**Замечание.** Более полное обсуждение таких потенциалов, дающее сходимость  $(QF, G)$  см. в работе Arkeryd [4], с. 14. Эта работа содержит также следствия теоремы 6.5.3, не обсуждаемые

ниже, например, описание поведения высших моментов распределения  $F$ .

*Доказательство теоремы 6.5.3.* Поскольку отображение  $L_t$  из пространства  $C_0(\mathbb{R}^3)$  непрерывных функций с компактным носителем на  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}$ , определяемое формулой

$$(L_t G)(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(v, t)^* G(v)^* dv,$$

линейно и допускает оценку

$$|L_t(G)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} f(v, t)^* dv \right) \sup_{\mathbb{R}^3} |G(v)| = \left( \int_{\mathbb{R}^3} F_0(v) dv \right) \sup_{\mathbb{R}^3} |G(v)|,$$

откуда следует, что  $L_t$  определяет меру  $\mu_t$ . Напомним, что при сделанных предположениях относительно  $F_0$  в п. 6.5.С установлены соотношения  $\int F_0 dv = \int F dv$ ,  $\int v^2 F_0 dv = \int v^2 F dv$  (сохранение массы и энергии), используя которые, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{|v|>j} |f(v, t)|^* dv &\leq (1+j^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} (1+v^2) f(v, t)^* dv = \\ &= (1+j^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} (1+v^2) f_0(v)^* dv \approx 0 \end{aligned}$$

при всех  $j \in \mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Отсюда следует, что если имеется любая последовательность чисел  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_t \{|v| > k\} = 0.$$

Из замечания в конце п. 6.5.С с помощью переноса получаем неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(v, t) \log f(v, t)^* dv \leq \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v) \log f_0(v)^* dv,$$

в котором правая часть по условию конечна. Отсюда и из элементарного неравенства  $y \log y \geq -z + y \log z$  ( $y \geq 0$ ,  $z > 0$ ), примененного к случаю  $y = f(v, t)$ ,  $z = \exp(-v^2)$ , вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f \log^+ f^* dv &\leq \int_{\mathbb{R}^3} F_0(v) \log F_0(v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-v^2) dv + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} F_0(v) v^2 dv \equiv K, \end{aligned}$$

где  $\log^+ x = \sup(0, \log x)$ . Отсюда для любых  $*$ -измеримых  $\Omega \subset {}^*\mathbb{R}^3$  и любого  $N > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(v, t) {}^*dv &\leq N \int_{\Omega} {}^*dv + (\log N)^{-1} \int_{|f| > N} f(v, t) \log^+ f(v, t) {}^*dv \leq \\ &\leq N \int_{\Omega} {}^*dv + (\log N)^{-1} \int_{{}^*\mathbb{R}^3} f(v, t) \log^+ f(v, t) {}^*dv \leq \\ &\leq N \int_{\Omega} {}^*dv + K (\log N)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(6) \quad \int_{\Omega} f(v, t) {}^*dv \approx 0 \text{ как только } \int_{\Omega} {}^*dv \approx 0.$$

Пусть теперь  $\Omega_k$  — такая последовательность измеримых подмножеств в  $\mathbb{R}^3$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} dv = 0.$$

Из (6) и определения  $\mu_t$  мы получаем тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_t(\Omega_k) = 0.$$

Отсюда следует, что  $\mu_t$  абсолютно непрерывна относительно  $dv$  и ее производная Радона — Никодима равна  $F_t$ , т. е.  $d\mu_t = F_t dv$ , где  $F_t \in L^1_+(\mathbb{R}^3)$ . Это доказывает первую часть теоремы. Для проверки того, что  $F$  — слабое решение уравнения (1) в описанном в формулировке теоремы смысле, достаточно заметить, что в условиях теоремы выполнено уравнение (5) (в точном смысле, а не только формально). Используя это обстоятельство, с помощью рассуждений, проведенных при доказательстве первой части теоремы, легко убедиться, что  $F$  — слабое решение.  $\square$

**6.5.4. Замечание.** По поводу других результатов, полученных нестандартными методами в пространственно однородном случае, см., например, Arkeryd [4, 1\*, 3\*].

*Ф. Пространственно неоднородный случай:  
подход на основе мер Лёба*

В этом разделе мы ищем зависящие от  $x$  решения уравнения Больцмана в случае периодических граничных условий, т. е.  $x \in \Lambda \equiv \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Наше изложение в существенном взято из работ Arkeryd [3, 7]. Рассмотрим уравнение (3), с помощью переноса определенное для  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Это очевидным

образом соответствует конечной срезке по переменным, описывающим столкновение, но лишь бесконечной срезке в пространстве скоростей. Возьмем начальное условие

$$f_0(v) = \min(*F_0(v), n) + n^{-1} \exp(-v^2),$$

где  $F_0 \geq 0$ ;  $F_0, v^2 F_0, F_0 \log F_0 \in L^1$ .

Из гл. 3 мы знаем, что внутренняя функция  $g$ , заданная на внутреннем пространстве с мерой  $(X, \mathcal{A}, \nu)$ , является  $S$ -интегрируемой, если выполнены следующие условия:

(i)  $g$  является  $\mathcal{A}$ -измеримой;

(ii) интеграл  $\int_X |g| d\nu$  конечен и, значит, околостандартен;

(iii) если  $\Omega \in \mathcal{A}$  и  $g(\Omega) \approx 0$  (в том смысле, что  $g(a) \approx 0$  для любого  $a \in \Omega$ ), то  $\int_{\Omega} |g| d\nu \approx 0$  (это необходимо, поскольку  $\nu$  не обязательно конечна);

(iv) если  $\Omega \in \mathcal{A}$  и  $\nu(\Omega) \approx 0$ , то  $\int_{\Omega} |g| d\nu \approx 0$ .

Пусть  $(X, L(\mathcal{A}), L(\nu))$  — пространство Лёба, ассоциированное с  $(X, \mathcal{A}, \nu)$ . Если функция  $g$  является  $S$ -интегрируемой, то функция  ${}^\circ g: X \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Лёбу и

$$\int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} {}^\circ g dL(\nu)$$

при любом  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

Если сверх того имеется еще такая  $\mathcal{A}$ -измеримая функция  $h: X \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , что при некотором конечном гипердействительном  $K$

$$|h(x)| \leq K |g(x)| \text{ при всех } x \in X,$$

то  $h$  также является  $S$ -интегрируемой.

**6.5.5. Лемма.** Пусть  $f$  — описанное выше решение уравнения (3) с начальным условием  $f_0$ . Тогда функция  ${}^\circ f$  является интегрируемой по Лёбу относительно меры  $L(dx dv)$ , порожденной внутренней мерой Лебега  $*dx dv$ .

*Доказательство.* Достаточно проверить сформулированные выше условия (i)–(iv). Но (i) и (ii) очевидны, а (iv) получается как в доказательстве теоремы 6.5.3. В самом деле, нужно лишь в рассуждении, начинающемся с неравенства

$$\int_{{}^*\mathbb{R}^3} f \log f {}^*dv \leq \int_{{}^*\mathbb{R}^3} f_0 \log f_0 {}^*dv,$$

заменить все интегрирования по  $*dv$  на интегрирования по  $*dx dv$  и мы получим, что  $\int_{\Omega} f {}^*dv dx \approx 0$  для любого внутреннего измери-

мого множества  $\Omega \subset {}^*\Lambda \times {}^*\mathbb{R}^3$  бесконечно малой меры; отсюда следует (iv).

Чтобы доказать (iii), достаточно заметить, что, как в первой части доказательства теоремы 6.5.3,

$$\begin{aligned} \int_{{}^*\Lambda \times \{|v| > j\}} |f(x, v, t)| {}^*dv dx &\leq (1 + j^2)^{-1} \int_{{}^*\Lambda \times \mathbb{R}^3} (1 + v^2) f(x, v, t) {}^*dv dx = \\ &= (1 + j^2)^{-1} \int (1 + v^2) f_0(x, v) {}^*dv dx = (1 + j^2)^{-1} C, \end{aligned}$$

где постоянная  $C \in {}^*\mathbb{R}_+$  околостандартна. Пусть теперь множество  $A$  является \*-измеримым по Лебегу и  $f(A) \approx 0$ . Тогда из полученного неравенства находим, что  $\int_A f(x, v, t) {}^*dv dx \approx 0$  и (iii)

доказано.  $\square$

**6.5.6. Лемма.** Для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times N_s({}^*\mathbb{R}^3)$  функция  $f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2)$  является  $S$ -интегрируемой по  $(v_2, \tau)$ , причем при  $|u| \leq m$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{{}^*\mathbb{R}^3} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2) {}^*dv_2 d\tau = \\ = \int_0^t \int_{N_s({}^*\mathbb{R}^3)} {}^\circ f(x + v_1\tau, v_2, \tau) |v_2 - v_1| L(dv_2 d\tau). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Для конечных  $v_1$ , используя сохранение энергии, находим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{|v_2| < j} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2) {}^*dx dv_2 d\tau \right| \leq \\ \leq (1 + j^2)^{-1/2} K_{v_1} \int_{{}^*\Lambda \times N_s({}^*\mathbb{R}^3) \times [0, t]} f_0(x, v_2) (1 + v_2^2) {}^*dx dv_2 d\tau \end{aligned}$$

с некоторой постоянной  $K_{v_1}$ .

Отсюда следует, что для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times N_s({}^*\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} (7) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{|v_2| \leq j} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2) {}^*dv_2 d\tau = \\ = \int_0^t \int_{{}^*\mathbb{R}^3} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \omega_n^m(v_1, v_2) {}^*dv_2 d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично, благодаря ограниченности  $H$ -функции  $Hf$ , мы получаем для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns({}^*\mathbb{R}^3)$

$$(8) \quad \int_{B_{j,c'}} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) |v_2 - v_1|^* dv_2 d\tau \approx 0,$$

где

$$B_{j,c'} = \{(v_2, \tau) \in \{v_2 \mid |v_2| \leq j\} \times \{\tau \in [0, t] \mid f(x + v_1\tau, v_2, \tau) \geq c'\}\},$$

а число  $c' \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  фиксировано.

Из (7) и (8) следует, что для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns({}^*\mathbb{R}^3)$  функция  $f(x + v_1\tau, v_2, \tau) w_n^m(v_1, v_2)$  является  $S$ -интегрируемой по  $(v_2, \tau)$ . Для этих значений  $(x, v_1)$  функция  ${}^\circ f(x + v_1\tau, v_2, \tau) {}^\circ |v_2 - v_1|$  интегрируема в смысле Лёба по  $(v_2, \tau)$ , причем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{{}^*\mathbb{R}^3} f(x + v_1\tau, v_2, \tau) w_n^m(v_1, v_2) {}^* dv_2 d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{Ns({}^*\mathbb{R}^3)} {}^\circ f(x + v_1\tau, v_2, \tau) {}^\circ |v_2 - v_1| L(dv_2 d\tau), \end{aligned}$$

что доказывает лемму.  $\square$

**6.5.7. Лемма.** Для почти всех в смысле Лёба  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns({}^*\mathbb{R}^3)$  при  $|u| \leq t$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{{}^*\mathbb{R}^3} \langle f \otimes f \rangle(x + v_1s, v_1, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2) {}^* dv_2 ds = \\ & = \int_0^t \int_{Ns({}^*\mathbb{R}^3)} {}^\circ f \otimes {}^\circ f(x + v_1s, v_1, v_2, s) {}^\circ |v_1 - v_2| L(dv_2 ds). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Произведение ограниченной  $*$ -измеримой по Лебегу функции на  $S$ -интегрируемую функцию снова  $S$ -интегрируемо. Из (4) легко усмотреть, что функция  $f(x + v_1s, v_1, s)$  является ограниченной и  $*$ -измеримой по Лебегу, а из леммы 6.5.6 следует, что функция  $f(x + v_1s, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2)$  является  $S$ -интегрируемой по  $(v_2, s)$  для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns({}^*\mathbb{R}^3)$ . Поэтому функция  $f \otimes f(x + v_1s, v_1, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2)$  является  $S$ -интегрируемой для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times$



$\times Ns(*\mathbb{R}^3)$ . То же самое верно для  $\langle f \otimes f \rangle w_n^m$ , поскольку  $0 \leq \langle f \otimes f \rangle \leq f \otimes f$ . Поэтому функция  ${}^\circ[\langle f \otimes f \rangle(x + v_1 s, v_1, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2)]$  интегрируема по Лёбу на  $\{v_2 | |v_2| \leq j\} \times [0, t]$  для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns(*\mathbb{R}^3)$ . Более того,

$$(9) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \int_{*\mathbb{R}^3} \langle f \otimes f \rangle(x + v_1 s, v_1, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2) {}^* dv_2 ds = \\ & = \int_0^t \int_{Ns(*\mathbb{R}^3)} {}^\circ[\langle f \otimes f \rangle(x + v_1 s, v_1, v_2, s) |v_1 - v_2|] L(dv ds). \end{aligned}$$

Но для п. в.  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns(*\mathbb{R}^3)$

$${}^\circ(\langle f \otimes f \rangle w_n^m) = {}^\circ f \otimes {}^\circ f |v_2 - v_1|$$

для п. в.  $(v_2, s) \in Ns(*\mathbb{R}^3) \times [0, t]$ , что легко проверить благодаря тому, что для п. в.  $(x, v_1)$  каждый сомножитель в  $f \otimes f$  конечен почти всюду в  $Ns(*\mathbb{R}^3) \times [0, t]$ . Последнее, в свою очередь, вытекает из  $S$ -интегрируемости  $f$ . Таким образом, для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns(*\mathbb{R}^3)$  из (9) вытекает равенство из формулировки леммы.  $\square$

**6.5.8. Лемма.** Для почти всех по Лёбу  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times Ns(*\mathbb{R}^3)$

$$(10) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \int_{*B} \int_{*\mathbb{R}^3} \langle f \otimes f \rangle(x + s v_1, v'_1, v'_2, s) w_n^m(v_1, v_2, u) {}^* dv_2 du ds = \\ & = \int_0^t \int_{*B} \int_{Ns(*\mathbb{R}^3)} {}^\circ f \otimes {}^\circ f(x + s v_1, v'_1, v'_2, s) |v_1 - v_2| L(dv_2 du ds). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Дальнейшее обсуждение подразумевает, что все делается при почти всех по Лёбу  $(x, v_1)$ . Пусть  $\chi$  — характеристическая функция любого множества вида  $v_1^2 + v_2^2 \leq k^2$ . Из конечности интегралов

$$\int \chi f(x + s v_1, v'_1, s) {}^* dv_1 dv_2 du ds, \quad j = 1, 2,$$

вытекает конечность

$$\chi f(x + s v_1, v'_1, s) \text{ и } \chi f(x + s v_1, v'_2, s)$$

для почти всех по Лёбу  $(v_2, u, s)$ . Таким образом для почти всех по мере Лёба  $(v_2, u, s)$

$${}^\circ\langle f \otimes f \rangle(x + s v_1, v'_1, v'_2, s) w_n^m = {}^\circ f \otimes {}^\circ f(x + s v_1, v'_1, v'_2, s) |v_1 - v_2|.$$

Для доказательства  $S$ -интегрируемости функции

$$\langle f \otimes f' \rangle w_n^m(v_2, u, s) \equiv \langle f \otimes f \rangle(x + s v_1, v'_1, v'_2, s) w_n^m$$

достаточно доказать, что для некоторого конечного  $j > 1$  функция  $\langle f \otimes f' \rangle \omega_n^m$  является  $S$ -интегрируемой на множестве

$$\Omega_j = \{(v_2, u, s) | \langle f \otimes f' \rangle \geq j \langle f \otimes f \rangle\}.$$

Но на  $\Omega_2$

$$0 \leq \langle f \otimes f' \rangle \omega_n^m \leq 2 (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) \omega_n^m,$$

так что достаточно доказать  $S$ -интегрируемость на  $\Omega_2$  правой части этого неравенства. Нужно лишь проверить условия (ii), (iii), (iv). Имеем:

$$f \otimes f' \geq j f \otimes f$$

на  $\Omega_j$  при  $j > 1$  и далее

$$\begin{aligned} (11) \quad 0 &\leq \int_{\Omega_j} (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) \omega_n^m * dv_2 duds \leq \\ &\leq (\log j)^{-1} \int_{\Omega_j} (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) \log (f \otimes f' / f \otimes f) \omega_n^m * dv_2 duds \leq \\ &\leq C / \log j, \end{aligned}$$

где постоянная  $C$  конечна. Беря, в частности,  $j = 2$ , получаем (ii).

Возможность оценки с конечной постоянной  $C$  в последнем члене в (11) получается как в обычном доказательстве  $H$ -теоремы, более точно, вытекает из положительности подынтегрального выражения и оценки

$$\begin{aligned} &\int_A (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) \omega_n^m \log (f \otimes f' / f \otimes f) * dx dv_1 dv_2 duds \leq \\ &\leq \left\{ \int_{*M} (f_0 \log f_0 + \exp(-v^2) + v^2 f_0) * dx dv \right\} \in Ns(*\mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

в которой

$$A = *(M \times \mathbb{R}^3 \times B \times \mathbb{R}_+).$$

Чтобы доказать (iii), выберем  $k \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Из условия  $f_0 > 0$  и  $S$ -интегрируемости функции  $\langle f \otimes f \rangle \omega_n^m$  следует, что

$$0 < j_0^{-2} \equiv \int_{\Omega_2} \langle f \otimes f \rangle \omega_n^m \wedge k^{-1} * dv_2 duds \approx 0.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega_2 - \Omega_{f_0}} \langle f \otimes f' \rangle \omega_n^m \wedge k^{-1} * dv_2 duds \approx 0.$$

На оставшейся части  $\Omega_2$  в силу (11)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_{j_0}} \langle f \otimes f' \rangle w_n^m \wedge k^{-1} {}^* dv_2 duds \leq \\ &\leq \int_{\Omega_{j_0}} \langle f \otimes f' \rangle w_n^m {}^* dv_2 duds < \frac{2C}{\log j_0} \approx 0, \end{aligned}$$

что доказывает (iii),

Чтобы доказать (iv), выберем  $k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и положим

$$\Omega = \{(v_2, u, s) \in \Omega_2 \mid \langle f \otimes f' \rangle w_n^m > k\}.$$

Из (ii) следует, что

$$\int_{\Omega} {}^* dv_2 duds \approx 0,$$

а используя неравенство  $j_0 > 0$  вместе с (4) получаем

$$\int_{\Omega} \langle f \otimes f \rangle w_n^m {}^* dv_2 duds > 0, \text{ если } \int_{\Omega} {}^* dv_2 duds > 0.$$

Теперь

$$0 < j_0^{-2} \equiv \int_{\Omega} \langle f \otimes f \rangle w_n^m {}^* dv_2 duds \approx 0$$

ввиду  $S$ -интегрируемости функции  $\langle f \otimes f \rangle$ . Следовательно,

$$\int_{\Omega - \Omega_{j_0}} \langle f \otimes f' \rangle w_n^m {}^* dv_2 duds \approx 0.$$

На оставшейся части  $\Omega$

$$\int_{\Omega_{j_0}} (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) w_n^m {}^* dv_2 duds \approx 0$$

в силу (11). Отсюда следует (iv) и, значит,  $S$ -интегрируемость.

Наконец, чтобы получить (10), проверим, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{A_v} \langle f \otimes f' \rangle w_n^m {}^* dv_2 duds = 0,$$

где

$$A_v = \{(v_2, u, s) \in \Omega; |v_2| \geq v\}.$$

Предположим, что предел равен  $\varepsilon > 0$ . В силу (11) можно выбрать такое  $j \in \mathbb{N}$ , что

$$\int_{\Omega_j} (\langle f \otimes f' \rangle - \langle f \otimes f \rangle) w_n^{in} {}^* dv_2 duds < \varepsilon/2.$$

Это, однако, приводит к противоречию, поскольку по лемме 6.5.7

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{A_v} \langle f \otimes f \rangle w_n^m * dv_2 duds = 0. \quad \square$$

Из лемм 6.5.5—6.5.8 мы теперь получим следующую теорему существования для пространственно неоднородного уравнения Больцмана (1) на торе  $\Lambda = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$  с парным потенциалом конечного радиуса действия, так что параметр столкновений меняется в  $B = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid |u| \leq m\}$  при некотором  $m < \infty$ . Начальные условия берутся физически естественными как в уже доказанных теоремах.

**6.5.9. Теорема.** *Рассмотрим уравнение Больцмана (1) с таким начальным условием  $F_0$ , что  $F_0 \geq 0$  почти везде по мере Лебега и  $F_0, v^2 F_0, F_0 \log F_0 \in L_1(\Lambda \times \mathbb{R}^3)$ . Пусть  $f$  — решение уравнения*

$$(d/dt) f(x + v_1 t, v_1, t) = (Q_n^m f)(x + v_1 t, v_1, t),$$

где  $Q_n^m$  определено в § 6.5.C, с  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и с начальным условием

$$f_0(x, v) = \min({}^*F_0(x, v), n) + n^{-1} \exp(-v^2).$$

Тогда  $f$  околостандартно для почти всех по мере Лёба  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times \text{Ns}({}^*\mathbb{R}^3)$  и его стандартная часть  ${}^o f$  является решением уравнения Больцмана (1) с начальным условием  $F_0$  в следующем смысле: для почти всех  $(x, v_1) \in {}^*\Lambda \times \text{Ns}({}^*\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} {}^o f(x + v_1 t, v_1, t) &= {}^o F_0(x, v_1) + \\ &+ \int_0^t \int_{\text{Ns}({}^*\mathbb{R}^3) \times {}^*B} {}^o f \otimes {}^o f(x + v_1 s, v'_1, v'_2, s) |v_2 - v_1| L(dv_2 duds) - \\ &- \int_0^t \int_{\text{Ns}({}^*\mathbb{R}^3) \times {}^*B} {}^o f \otimes {}^o f(x + v_1 s, v_1, v_2, s) |v_2 - v_1| L(dv_2 duds). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Интегральная форма уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned} f(x + v_1 t, v_1, t) &= f_0(x, v_1) + \\ &+ \int_0^t \int_{{}^*B \times {}^*\mathbb{R}^3} \langle f \otimes f \rangle(x + v_1 s, v'_1, v'_2, s) w_n^m(v_1, v_2) * dudv_2 ds - \\ &- \int_0^t \int_{{}^*B \times {}^*\mathbb{R}^3} \langle f \otimes f \rangle(x + v_1 s, v_1, v_2, s) w_n^m(v_1, v_2) * dudv_2 ds. \end{aligned}$$

Беря стандарт  
чти всех по '

$of(x + r)$

для почти всех  $(x, v_1) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$ , то  $\tilde{f} \equiv F \circ st$  является решением Лёба, удовлетворяющим для почти всех по мере Лёба  $(x, v_1) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$  уравнению

$$\tilde{f}(x, v_1, t, v_1, t) = {}^{\circ}F_0(x, v_1) +$$

$$\int_0^t \int_{N_s(\mathbb{R}^3) \times {}^{\circ}B} \tilde{f}(x + v_1 s, v'_1, v'_2, s) (|v_2 - v_1|) L(dv_2 duds) -$$

$$\int_0^t \int_{N_s(\mathbb{R}^3) \times {}^{\circ}B} \tilde{f}(x + v_1 s, v_1, v_2, s) (|v_2 - v_1|) L(dv_2 duds).$$

**Доказательство.** Существенным фактом для доказательства является то, что из интегрируемости по Лебегу функции  $f$  следует интегрируемость по мере Лёба функции  $\tilde{f} = f \circ st$ , причем

$$\int \tilde{f} L(dq) = \int f dq.$$

Показывает, что решения Лёба из предыдущих разделов эквивалентны решениям уравнения Больцмана в смысле меры Юнга. Мы объясним, как решения Лёба порождают решения в смысле меры Юнга, но по поводу полной эквивалентности читатель должен обратиться к работе Arkeryd [2\*].

В дальнейшем

$$\Omega = N_s({}^{\circ}\Omega) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$$

для  $\Omega = N_s({}^{\circ}\Omega)$ . Через  $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{R}}_+)$  обозначим множество всех борелевских вероятностных мер на  $\bar{\mathbb{R}}_+$ . Зафиксируем  $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$  и пусть  $f$  — решение, описанное в теореме 6.5.9. Положим

$$U(y) = ({}^{\circ}f(x, v_1, s), {}^{\circ}f(x, v_2, s), {}^{\circ}f(x, v'_1, s)),$$

где  $y = (x, v_1, v_2, s) \in \tilde{\Omega}$ . Пусть  $\mu$  — мера Лёба на  $\tilde{\Omega}$ , а  $D$  — борелевское подмножество в  $\tilde{\Omega}$ . Положим

$$Q(D) = L\{\mu \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{R}}_+) \mid U(y) \in D\}.$$

Пусть  $V_y (y \in \Omega)$  — семейство таких вероятностных мер (ср. § 4.6),

(i)  $V_y \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{R}}_+)$  при всех  $y$ ;

(ii) для любого борелевского  $B \subset \bar{\mathbb{R}}_+$  и любого ограниченного измеримого  $A \subset \Omega$

$$Q(A \times B) = \int_A V_y(B) dy.$$

$$F(x +$$

Если  $D = D_2 \times \bar{\mathbb{R}}_+$ , где  $D_2$  — борелевское подмножество в  $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+^2$ , то  $Q_2(D_2) = Q(D)$  определяет аналогичное  $V_y$  распределение  $V_{2,y}$ , такое что

$$\int_A V(B) dy = \int_A V_{2,y}(B_2) dy$$

для любого борелевского множества  $B = B_2 \times \bar{\mathbb{R}}_+$  и любого ограниченного измеримого множества  $A$ .

Если  $D = D_1 \times \bar{\mathbb{R}}_+^2$ , где  $D_1$  — борелевское подмножество в  $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$ , то уравнение  $Q_1(D_1) = Q(D)$  определяет распределение  $V_{1,y_1}$ , аналогичное  $V_y$  и такое, что

$$\int_A V_y(B) dy = \int_A V_{1,y_1}(B_1) dy$$

для любого борелевского множества  $B = B_1 \times \bar{\mathbb{R}}_+^2 \subset \bar{\mathbb{R}}_+^3$  и любого ограниченного измеримого множества  $A \subset \Omega$ . Здесь  $y_1 = (x, v_1, s)$ , если  $y = (x, v_1, v_2, u, s)$ , т. е.  $V_{1,y_1}$  зависит только от  $(x, v_1, s)$ . Из свойства непрерывности  $f$  вытекает, что интегралы  $\int V_y, \int V_{2,y}, \int V_{1,y_1}$  корректно определены для любого фиксированного момента времени  $t$ .

Решение  ${}^\circ f$  уравнения Больцмана в смысле Лёба удовлетворяет следующей слабой форме этого уравнения

$$\begin{aligned} (12) \quad & \int {}^\circ \varphi \log(1 + {}^\circ f) |_{s=t} L(dx dv) = \int {}^\circ \varphi |_{s=0} \log(1 + f_0) L(dx dv) + \\ & + \int_0^t \int (\partial_t \varphi + v_1 \nabla_x \varphi) \log(1 + {}^\circ f) L(dx dv_1 ds) + \\ & + \int_0^t \int {}^\circ \varphi Q({}^\circ f, {}^\circ f) (1 + {}^\circ f)^{-1} L(dx dv_1 ds) \end{aligned}$$

для любой функции  $\varphi \in {}^*C_0^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ , имеющей конечную норму и такой, что носитель функции  $\varphi(\cdot, \cdot, s)$  лежит в  $Ns(\Lambda \times {}^*\mathbb{R}^3)$  при всех  $s$ .

Пусть  $l(\lambda, \mu) = \lambda \mu (1 + \lambda)^{-1}$  и  $g(\lambda, \mu, \rho) = \lambda \mu (1 + \rho)^{-1}$ ; определим

$$g(V_y) = \int_{\bar{\mathbb{R}}_+^3} g(\xi) dV_y(\xi).$$

Аналогичным образом определим  $l(V_{2,y})$  и  $\ln(1 + V_{1,y_1})$ .

Соответствующая слабая форма уравнения Больцмана для (стандартных) решений в смысле мер Юнга имеет вид

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \int \varphi \ln(1 + V_{1,y_1})|_{s=t} dx dv_1 = \int \varphi|_{s=0} \ln(1 + f_0) dx dv_1 + \\
 & + \int_0^t \int (\partial_s \varphi + v_1 \nabla_x \varphi) \ln(1 + V_{1,y_1}) dx dv_1 ds + \\
 & + \int_0^t \int \varphi(x, v'_1, s) g(V_y) w(v_1, v_2, u) dy - \\
 & - \int_0^t \int \varphi(x, v_1, s) l(V_{2,y}) w(v_1, v_2, u) dy
 \end{aligned}$$

для всех  $\varphi \in C_0^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ . В частности, если  $f$  — стандартное  $L^1$ -решение, то  $V_y$  — мера Дирака в  $\mathbb{R}^3$  в точке  $U(y) = (f(x, v_1, s), f(x, v_2, s), f(x, v'_1, s))$ , а (13) — так называемая перенормированная обобщенная форма уравнения Больцмана.

Пусть  $f_j$  — решение уравнения Больцмана с усеченным оператором столкновений  $Q_j$ . Пусть  $\mu$  — мера Лебега в  $\Omega$ , положим

$$U_j(y) = (f_j(x, v_1, s), f_j(x, v_2, s), f_j(x, v'_1, s))$$

и возьмем в качестве  $\delta_{j,y}$  меру Дирака в точке  $U_j(y)$ . Пусть  $\mathcal{W}$  — замыкание множества мер  $\{\mu(\cdot) \delta_{j,\cdot} | j \in \mathbb{N}\}$  на  $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+^3$  по отношению к слабой \*-топологии, порожденной сепарабельным пространством  $C_0(\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+^3)$ , а  $d$  — соответствующая метрика.

Если бы пространство  $C_0$  бралось на компактной области, то  $\mathcal{W}$  было бы компактно. Используя  $\sigma$ -компактность имеющейся области в комбинации с канторовским диагональным процессом, мы видим, что и в нашем случае  $\mathcal{W}$  компактно. Но тогда из предложения 2.1.6 следует, что мера  $\mu(\cdot) \delta_n, \cdot$  бесконечно близка к некоторому элементу из  $\mathcal{W}$ . Следовательно, можно найти такую подпоследовательность  $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , что последовательность  $(\mu(\cdot) \times \times \delta_{n_j, \cdot})_{j \in \mathbb{N}}$  будет сходиться в метрике  $d$  к некоторой мере  $\mathcal{E} \in \mathcal{W}$ . В силу  $S$ -интегрируемости

$$\begin{aligned}
 \int {}^* \varphi(y, U(y)) L'(dy) &= \int {}^* \varphi(y, U(y)) dy = \\
 &= \int {}^* \varphi(y, \zeta) dy d\delta_{n_j, y}(\zeta) = \int \varphi(y, \zeta) d\mathcal{E}(\zeta) = \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi(y, \zeta) dy d\delta_{n_j, y}(\zeta).
 \end{aligned}$$



Теперь используем идею работы Cutland [4] (см. также § 4.6) для доказательства следующих лемм, связывающих  $V$  и  $f$ .

**6.5.12. Лемма.** Если  $\varphi \in C_0(\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+^3)$ , то

$$\int \circ^* \varphi(y, U(y)) L(dy) = \int \varphi(y, V_y) dy.$$

*Доказательство.* Пусть  $y_0 \in \Omega$ . Заметим, что  $\varphi(y, \zeta)$  равномерно близко к  $\varphi(y_0, \zeta)$  если  $y$  близко к  $y_0$ , а  $\zeta \in \bar{\mathbb{R}}_+^3$ . Следовательно, лемму достаточно доказать для функций, равных 0 при  $y$ , лежащих вне некоторого гиперкуба  $K \subset \Omega$  и равных некоторой непрерывной функции  $\psi: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  во всех точках этого гиперкуба.

Пусть  $\psi_\varepsilon$  — ступенчатая функция вида

$$\psi_\varepsilon = \sum_{j=1}^N \psi_{\varepsilon, j} \chi_{B_{\varepsilon, j}},$$

где  $\bigcup_{j=1}^N B_{\varepsilon, j} \subset [0, 1/\varepsilon]^3$  и семейство  $\{B_{\varepsilon, j}\}_{j=1}^N$  состоит из непересекающихся множеств.

Выберем константы  $\psi_{\varepsilon, j}$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{[0, \varepsilon^{-1}]^3} |\psi(\zeta) - \psi_\varepsilon(\zeta)| < \varepsilon.$$

Утверждение леммы будет доказано, если мы сможем показать, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\int_K \psi_\varepsilon(V_y) dy = \int_{B_\varepsilon} \psi_\varepsilon(U) L(dy),$$

где  $B_\varepsilon = \{y \in {}^*K \mid \circ f(x, v_1, s), \circ f(x, v_2, s), \circ f(x, v'_1, s) \leq 1/\varepsilon\}$ .

Но

$$(15) \quad \int_K \psi_\varepsilon(V_y) dy = \sum_j \psi_{\varepsilon, j} \int_K V_y(B_{\varepsilon, j})' dy = \sum_i \psi_{\varepsilon, i} \int_{C_{\varepsilon, i}} L(dy),$$

где  $C_{\varepsilon, i} = \{y \mid \circ y \in K, U(y) \in B_{\varepsilon, i}\}$ , и сумма в (15) равна

$$\sum_i \psi_{\varepsilon, i} \int_{D_{\varepsilon, i}} L(dy) = \int_{B_\varepsilon} \psi_\varepsilon(U) L(dy),$$

где  $D_{\varepsilon, i} = \{y \in {}^*K \mid U_y \in B_{\varepsilon, i}\}$ .  $\square$

**6.5.13. Лемма.** Пусть  $y = (x, v_1, t)$ . Тогда для любой  $\varphi \in C_0(\Lambda \times \mathbb{R}^3)$

$$\int \circ^* \varphi(\log(1 + \circ f)|_{s=t} L(dx dv_1)) = \int \varphi \log(1 + V_{1, y_i}) dx dv_1.$$

*Доказательство.* Положим

$$\log_{\varepsilon}(\lambda) = \begin{cases} \log(1/\varepsilon) & \text{при } \lambda > 1/\varepsilon, \\ \log(\lambda) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку

$$\int dx dv_1 \int_{\lambda > 1/\varepsilon} \lambda dV_{1,y_1}(\lambda) = \int_{f > 1/\varepsilon} f(x, v_1, t) dx dv_1 \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \downarrow 0,$$

то достаточно доказать, что

$$\int \circ^* \varphi \log_{\varepsilon}(1 + \circ f)|_{s=t} L(dx dv_1) = \int \varphi \log_{\varepsilon}(1 + V_{1,y_1}) dx dv_1,$$

а это доказывается в точности так же, как в предыдущем доказательстве.  $\square$

В частности, эта лемма верна при  $f = 0$ . Аналогичный результат выполняется для

$$\int_0^t \int \circ(\partial_s^* \varphi + v_1 \nabla_x^* \varphi) \log(1 + \circ f) L(dx dv_1 ds),$$

где  $\varphi \in C_0^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ . Кроме того, теми же методами получаются следующие две леммы.

**6.5.14. Лемма.** Если  $\varphi \in C_0(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ , то

$$\begin{aligned} \int \circ^* [\varphi \omega(v_1, v_2, u) \circ f_1 \circ f_2 (1 + \circ f)^{-1}] L(dy) = \\ = \int \varphi \omega(v_1, v_2, u) l(V_{2,y}) dy. \end{aligned}$$

**6.5.15. Лемма.** Если  $\varphi \in C_0(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ , то

$$\begin{aligned} \int \circ^* [\varphi(x, v'_1, s) \omega(v_1, v_2, u) \circ f_1 \circ f_2 (1 + \circ f_1)^{-1}] L(dy) = \\ = \int \varphi(x, v'_1, s) \omega(v_1, v_2, u) g(V_y) dy. \end{aligned}$$

Применяя леммы 6.5.13—6.5.16 к (12), мы получаем, что верна

**6.5.16. Теорема.** Если  $\circ f$  удовлетворяет слабому в смысле Лёба уравнению Больцмана (12), то соответствующее  $V$  является решением в смысле мер Юнга уравнения Больцмана (13).

*Н. Асимптотическая сходимость к равновесию*

Недавно R. Di Perna и P. L. Lions [1\*] доказали существование стандартных интегрируемых по Лебегу решений задачи Коши для уравнения Больцмана (1). Доказательство опирается на свой-

ство компактности скоростных средних для решений линейного уравнения переноса, доказанное в работе Golse, Perthame, Sep-tis [1\*]. То же самое доказательство дает возможность установить, что введенная в § 6.5.С схема аппроксимации фактически производит (стандартные) интегрируемые по Лебегу решения, но поскольку выполнение этой программы связано с большой работой, мы вместо этого сконцентрируемся на асимптотическом поведении этих решений.

Пусть  $f$  — такое  $L^1$ -решение; выберем возрастающую последовательность времен  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $t_k \rightarrow \infty$ . Как и выше, масса, энергия и энтропия ограничены их начальными значениями. Гарантированная этим слабая  $L'$ -компактность семейства  $\{f(\cdot, t_{k_n})\}$  дает существование таких функции  $g$  и подпоследовательности  $\{t_k\}$ , что  $f(\cdot, t_{k_n}) \rightarrow g(\cdot)$  слабо в  $L^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$  при любом  $T > 0$ . Из доказательства существования вытекает, что  $g$  также удовлетворяет уравнению Больцмана. По физическим причинам можно ожидать, что  $g$  будет равновесным распределением Максвелла. Это и в самом деле так, как показал Аркерид (Arkerid [3\*]). Его нестандартное доказательство, которое мы сейчас изложим, является в настоящий момент единственным опубликованным доказательством. Вначале дадим точную формулировку результата

**6.5.17. Теорема.** *Для любой последовательности  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $t_k \uparrow \infty$ , существуют такие подпоследовательность  $\{t_k\}$  и глобальное распределение Максвелла*

$$M(v) = A \exp(-B(v - C)^2),$$

*что для любого  $T > 0$  имеется сходимость  $f(\cdot, \cdot + t_k) \rightarrow M$  слабо в  $L^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$  и, кроме того,  $f(\cdot, t + t_k) \rightarrow M$  слабо в  $L^1(\Lambda \times \mathbb{R}^3)$  для любого  $t > 0$ .*

**Доказательство.** Хотя мы покажем, что предел  $g$  является максвелловским распределением, единственная действительно трудная часть доказательства состоит в проверке более слабого утверждения о том, что  $g$  является зависящим от времени локально максвелловским распределением

$$M(x, v, t) = a(x, t) \exp(-b(x, t)(v - c(x, t))^2).$$

Для доказательства последнего утверждения заметим, что существует такая счетная последовательность  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  функций с ограниченными носителями в  $\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , что  $g = M$  в  $L^1$ , если

$$\int g \varphi_j dx dv dt = \int M \varphi_j dx dv dt \text{ для всех } j \in \mathbb{N}.$$

Мы можем предположить, что последовательность  $\{\varphi_j\}$  содержит все функции  $\chi_{v\rho}$ ,  $v\chi_{v\rho}$ ,  $v^2\chi_{v\rho}$ ,  $v, \rho \in \mathbb{N}$ , где

$$\chi_{v\rho}(v, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } v^2 \leq v^2 \text{ и } t \leq \rho, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через  $M_k$  множество  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ .

Из известной леммы об усреднении вытекает, что для некоторой подпоследовательности  $\{s_k\}$  последовательности  $\{t_k\}$

$$\int_0^k ds \int_{\Lambda} dx \left| \int_{\mathbb{R}^3} [f(\cdot + s_k)\varphi - g(\cdot)\varphi] dv \right| < 1/k, \quad \varphi \in M_k.$$

Поскольку описанный в § 6.5.С подход к доказательству существования дает  $L^1$ -решение, существует такое бесконечно большое  $n \in \mathbb{N}$ , что решение  $f^n$  усеченного уравнения удовлетворяет неравенствам

$$(16) \quad \int_0^k ds \int_{\Lambda} dx \left| \int_{\mathbb{R}^3} (f^n(s_k + \cdot)^* \varphi(\cdot) - {}^*g(\cdot)^* \varphi(\cdot)) dv \right| \leq \leq 1/k, \quad \varphi \in M_k.$$

Предположим также, что подпоследовательность  $\{s_k\}$  выбрана таким образом, что

$$(17) \quad \int_{s_k}^{s_k+k} ds \int (\langle f_{1f_2}^{nn} \rangle'_n - \langle f_{1f_2}^{nn} \rangle) \log((f_{1f_2}^{nn})'/(f_{1f_2}^{nn})) dx dv_1 dv_2 du \leq 1/k;$$

Это возможно благодаря (11). Формулы (16) и (17) верны для всех конечных  $k$  и, следовательно, существует такое бесконечно большое  $k$ , что

$$(18) \quad \int_0^k ds \int_{\Lambda} dx \left| \int_{\mathbb{R}^3} (f^n(s_k + \cdot)^* \varphi - {}^*g^* \varphi) dv \right| \approx 0,$$

$$(19) \quad \int_{s_k}^{s_k+k} ds \int (\langle f_{1f_2}^{nn} \rangle'_n + \langle f_{1f_2}^{nn} \rangle_n) \log((f_{1f_2}^{nn})'/(f_{1f_2}^{nn})) dx dv_1 dv_2 du \approx 0.$$

Из (19) следует, что подынтегральное выражение в левой части бесконечно мало, т. е. для почти всех по мере Лёба  $(x, t) \in {}^*\Lambda \times \mathbb{N}_s({}^*\mathbb{R}_+)$

$$(20) \quad \begin{aligned} f^n(x, v_1, t + s_k) f^n(x, v_2, t + s_k) &\approx \\ &\approx f^n(x, v'_1, t + s_k) f^n(x, v'_2, t + s_k) \end{aligned}$$

для почти всех по мере Лёба  $(v_1, v_2, u) \in \text{Ns}(*\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times B)$ . Теперь тщательный анализ (20) показывает, что  $f^n(s_k + \cdot)$  является почти локально максвелловским:

**6.5.18. Лемма.** Для почти всех по мере Лёба  $(x, t) \in *\Lambda \times \times \text{Ns}(*\mathbb{R}_+)$  существуют такие  $\bar{a}(x, t)$ ,  $\bar{b}(x, t) \in \mathbb{R}_+$  и  $\bar{c}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ , что

$f^n(x, v, t + s_k) \approx \bar{M}(x, v, t)$  для п. в. по Лёбу  $v \in \text{Ns}(*\mathbb{R}^3)$ , где

$$\bar{M}(x, v, t) = \bar{a}(x, t) \exp(-\bar{b}(x, t)(v - \bar{c}(x, t))^2).$$

По поводу довольно технического доказательства этой леммы мы отсылаем читателя к работе Arkeryd [3\*], поскольку оно не использует никаких нестандартных идей.

Комбинируя эту лемму с (18), мы видим, что для любой функции  $\varphi$  из последовательности  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  и любого  $T \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} (21) \quad 0 &= \int_{*\Lambda \times [0, T]} *dxdt \left| \int_{*\mathbb{R}^3} f^n(x, v, t + s_k) * \varphi^* dv - \int_{\mathbb{R}^3} g \varphi dv \right| = \\ &= \int_{*\Lambda \times [0, T]} L(dxdt) \left| \int_{\text{Ns}(*\mathbb{R}^3)} {}^\circ f^n(x, v, t + s_k) {}^\circ \varphi L(dv) - {}^\circ \int_{\mathbb{R}^3} g \varphi dv \right| = \\ &= \int L(dxdt) \left| \int {}^\circ \bar{M}(x, v, t) {}^\circ \varphi L(dv) - {}^\circ \int g \varphi dv \right|. \end{aligned}$$

Беря  $\varphi = \chi_{v\rho}$ ,  $\chi_{v\rho}v$ ,  $\chi_{v\rho}v^2$  и устремляя  $v$  к бесконечности, мы видим, что

$$\bar{a}(x, t) = {}^\circ a(x, t), \quad \bar{b}(x, t) = {}^\circ b(x, t), \quad \bar{c}(x, t) = {}^\circ c(x, t)$$

для почти всех по мере Лёба  $(x, t) \in *\Lambda \times \text{Ns}(*\mathbb{R}_+)$ , где  $a, b, c$  — измеримые по Лебегу функции на  $\Lambda \times \mathbb{R}_+$ . Отсюда следует, что  ${}^\circ \bar{M} = {}^\circ M$ , где  $M = a \exp(-b(v - c)^2)$ .

Таким образом, для любого  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]} (g \varphi_k - M \varphi_k) dx dv dt \right| = \\ &= \left| \int_{\text{ns } *\Lambda \times *\mathbb{R}^3 \times [0, T]} ({}^\circ g {}^\circ \varphi_k - {}^\circ M {}^\circ \varphi_k) L(dx dv dt) \right| = \\ &= \left| \int_{*\Lambda \times [0, T]} L(dxdt) \int_{\text{Ns}(*\mathbb{R}^3)} L(dv) ({}^\circ g {}^\circ \varphi_k - {}^\circ \bar{M} {}^\circ \varphi_k) \right| \leq \\ &\leq \int_{*\Lambda \times [0, T]} L(dxdt) \left| \int_{\text{Ns}(*\mathbb{R}^3)} L(dv) ({}^\circ g {}^\circ \varphi_k - {}^\circ \bar{M} {}^\circ \varphi_k) \right| = 0, \end{aligned}$$

где последнее равенство совпадает с (21). Отсюда следует, что  $g = M$ , т. е.  $g$  — стандартное зависящее от времени локально

максвелловское распределение. Остается показать, что это локально максвелловское распределение на самом деле является глобально максвелловским, но это рассуждение полностью стандартно и мы отсылаем интересующегося им читателя к цитированной работе Аркериды.  $\square$

Здесь мы заканчиваем этот длинный параграф об уравнении Больцмана. В нем мы узнали, что нестандартные методы могут служить мощным орудием в исследовании типичной нелинейной задачи Коши. Они позволяют нам использовать — с помощью принципа переноса — законы сохранения и такие монотонные величины как энтропия, что трудно было бы сделать другими способами ввиду возникающих нелинейностей и негладкости. Можно ожидать, что эти и близкие к ним идеи будут полезны и в других задачах теории интегральных и дифференциальных уравнений.

### 6.6. Заключительное замечание о фейнмановских интегралах по траекториям и других вопросах

Редкая лекция по нестандартному анализу обходится без того, чтобы не возник вопрос о фейнмановских интегралах по траекториям. Можно ли с помощью «новых чисел» сделать это понятие точным?

Фейнмановские интегралы по траекториям были введены Фейнманом с целью дать альтернативную формулировку квантовой динамики (см. Feynman [1], Feynman, Hibbs [1]). Мощная, хотя и эвристическая, идея Фейнмана получила несколько различных математических выражений; см., например, обзоры в сборнике Albeverio, Combe и др. [1]. Здесь мы с помощью нестандартного анализа дадим одну интерпретацию фейнмановских идей, близкую к его исходным мотивировкам.

**Замечание.** Читатель не должен путать фейнмановские интегралы по траекториям с их «евклидовой» версией — интегралом Фейнмана — Каца; о последнем см. § 5.3.

Сначала вкратце напомним эвристические рассуждения Фейнмана. Рассмотрим квантово-механическую частицу массы  $m$ , движущуюся в пространстве  $\mathbb{R}^d$  под действием поля с потенциалом  $V(x)$ . Динамика частицы задается оператором

$$e^{-(i/\hbar)tH}$$

в гильбертовом пространстве  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , где  $\hbar$  — это деленная на  $2\pi$  постоянная Планка, и  $H = H_0 + V$ , где  $H_0 = (-\hbar^2/2m)\Delta$ .

В случае, когда функция  $V$  действительнoзначна, а оператор  $H_0 + V$  существенно самосопряжен на  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ , т. е. на пересечении областей определения операторов  $H_0$  и  $V$  как само-

сопряженных операторов, используя формулу Ли — Троттера, можно записать

$$(1) \quad \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t H\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} V\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} H_0\right) \right)^n,$$

где предел понимается в смысле сильной операторной сходимости.

Ядро оператора  $\exp(-(i/\hbar) \cdot (t/n) H_0)$  равно

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} H_0\right)(x, y) = \left(2\pi i \frac{\hbar}{m} \cdot \frac{t}{n}\right)^{-d/2} \exp\left(\frac{im}{(2\hbar(t/n))} \|x - y\|^2\right)$$

(при правильном выборе комплексной функции  $z^{-d/2}$ ).

Если  $\varphi$  — гладкая функция с компактным носителем, то

$$(2) \quad \begin{aligned} & \left( \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} V\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} H_0\right) \right)^n \varphi(x) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_t(x, x_{n-1}, \dots, x_0)\right) \varphi(x_0) \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{d}x_j, \end{aligned}$$

где  $\tilde{d}x_j = (2\pi i \hbar t / m \cdot n)^{-d/2} dx_j$  (здесь  $dx_j$  — мера Лебега на  $\mathbb{R}^d$ ), и

$$(3) \quad S_t(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{m}{2} \cdot \frac{\|x_j - x_{j-1}\|^2}{(t/n)^2} - V(x_j) \right) \frac{t}{n}.$$

Интеграл в правой части формулы (2) понимается как несобственный интеграл Лебега.

Следуя Фейнману, естественно смотреть на интеграл (2) как на интеграл по множеству кусочно-линейных непрерывных траекторий — в следующем смысле. Пусть  $t_j = j \cdot (t/n)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , и пусть  $\gamma_n(\tau)$  — кусочно-линейная траектория  $[0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , равная  $x_j$  при  $\tau = t_j$ . Определим

$$S_t(\gamma_n) = \frac{m}{2} \int_0^t \dot{\gamma}_n^2(\tau) d\tau - \int_0^t \tilde{V}(\gamma_n(\tau)) d\tau,$$

где  $\frac{m}{2} \int_0^t \dot{\gamma}_n^2(\tau) d\tau$  — это кинетическая энергия, связанная с траекторией  $\gamma_n$  и равная

$$\frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\gamma}_n^2(\tau) d\tau = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\|x_j - x_{j-1}\|^2}{(t/n)^2} \cdot \frac{t}{n},$$

интеграл

$$\int_0^t \tilde{V}(\gamma_n(\tau)) d\tau,$$

в котором  $\tilde{V}(\gamma_n(\tau)) = V(\gamma^n(j(t/n)))$  при  $\tau \in [j(t/n), (j+1)(t/n)]$ , является приближенным значением потенциальной энергии, связанной с траекторией  $\gamma_n$ . Тогда  $S_t(\gamma_n) = S_t(x, x_{n-1}, \dots, x_0)$ , и правая часть формулы (2) превращается в интеграл по траекториям

$$(4) \quad \int_{\Gamma_x} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma_n)\right) \Phi(\gamma_n(0)) d\gamma_n,$$

где  $\Gamma_x$  — это пространство всех таких кусочно-линейных траекторий  $\gamma_n$ , которые имеют разрывы производных только в точках  $j(t/n)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , и  $\gamma_n(t) = x$ . Заметим, что  $\Gamma_x = \Gamma_0 + x$ , где  $\Gamma_0 \cong \mathbb{R}^{nd}$ . Мера  $d\gamma_n$  на  $\Gamma_x$  задается формулой

$$d\gamma_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2\pi i \hbar t}{mn}\right)^{-d/2} d\gamma_n\left(j \frac{t}{n}\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{d}x_j.$$

Идея Фейнмана состоит в том, чтобы взять  $n$  «большим» и посмотреть на выражение (4) как на интеграл по «пространству  $\Gamma$  всех непрерывных траекторий, оканчивающихся в момент времени  $t$  в точке  $x$ ». Формально выражения (1), (2) и (4) дают равенство

$$(5) \quad \exp\left(-\frac{i}{\hbar} tH\right) \Phi(x) = \int_{\gamma(t)=x} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma)\right) \Phi(\gamma(0)) d\gamma.$$

Мы подчеркнули слово «формально», хотя правая часть последней формулы в некоторых случаях может быть проинтегрирована как предел выражения (4) при  $n \rightarrow \infty$ . Но никакой стандартной меры  $d\gamma$  на пространстве траекторий, которая превращала бы правую часть формулы (5) в настоящий интеграл, не существует. Эту трудность по крайней мере до некоторой степени можно преодолеть с помощью нестандартного анализа.

**Замечание.** В литературе о фейнмановских интегралах по траекториям приведенное выше определение интеграла с помощью предельной процедуры, а также сходные определения называются «секвенциальным предельным определением»: см. Alberverio, Combe и др. [1], Kallianpur, Bromley [1] и содержащиеся там ссылки.



Итак,  $\Gamma_0 \cong \mathbb{R}^{nd}$ ; поэтому выражение (4) можно переписать в виде

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}^{nd}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_t(\gamma_n + x)\right) \varphi(\gamma_n(0) + x) d\gamma_n.$$

Продолжая эту формулу с  $n \in \mathbb{N}$  до  $n \in {}^*\mathbb{N}$ , мы можем ввести *внутренний фейнмановский интеграл по траекториям* с помощью того же самого определения (6). В интуитивно ясном смысле мы теперь интегрируем по гиперконечным кусочно-линейным траекториям; это значит, что  $\gamma_n(\tau)$  — кусочно-линейная траектория  ${}^*[0, t] \rightarrow {}^*\mathbb{R}^d$ , причем отрезок  ${}^*[0, t]$  поделен на гиперконечное число точек  $t_j = j \cdot (t/n)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , где  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

Эта конструкция охватывает некоторые формальные свойства исходного предложения Фейнмана. Но она дает *внутреннюю* величину:  $\exp((i/\hbar) S_t(\gamma_n + x)) {}^*d\gamma_n$  — это неограниченная очень сильно осциллирующая  ${}^*\mathbb{C}$ -значная мера, которую нельзя превратить в меру Лёба с помощью техники, описанной в гл. 3. И даже если бы какая-нибудь «конструкция Лёба» существовала, у нас были бы трудности при переходе от пространства гиперконечных (и крайне иррегулярных) траекторий к непрерывным траекториям.

С другой стороны, нетрудно предъявить класс потенциалов  $V$ , для которых внутренний интеграл Фейнмана околостандартен, и его стандартная часть является решением уравнения Шредингера, т. е. решение уравнения

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

с подходящим начальным условием  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  задается формулой.

$$(7) \quad \psi = \exp\left(-i \frac{t}{\hbar} H\right) \varphi = \int_{{}^*\mathbb{R}^{nd}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} {}^*S_t(\gamma_n + x)\right) {}^*\varphi(\gamma_n(0) + x) {}^*d\gamma_n$$

для некоторого  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ .

**Замечание.** Этот класс включает такие операторы  $H$ , которые являются сильными резольвентными пределами при  $k \rightarrow \infty$  таких гамильтонианов  $H_k$ , для которых справедлива формула Ли-Троттера.

Смежные результаты, связанные, в частности, с «нестандартной формулой Ли-Троттера», см. в работах Sloan [1], [2].

Решая уравнение Шредингера, мы предположили, что величина  $\hbar$  стандартна и положительна. А что произойдет с формулой (7), если  $\hbar \neq 0$  бесконечно мало? Эвристическая идея Дирака и Фейнмана состоит в том, что для получения классической механики из квантовой надо воспользоваться тем фактом,

что постоянная Планка очень мала, и, следовательно, найти асимптотику решения уравнения Шредингера при  $\hbar \rightarrow 0$ . Запись решения в виде осциллирующего интеграла, как это было сделано выше, наводит на мысль применить метод стационарной фазы; формально этот прием работает, поскольку стационарные точки фазы суть траектории, на которых обращается в нуль первая вариация функционала  $S_t(\gamma + x)$ , а согласно принципу Гамильтона это и есть классические траектории, заканчивающиеся в момент времени  $t$  в точке  $x$ .

В то время как в конечных размерностях метод стационарной фазы — это классическое средство, восходящее еще к работам Стокса и Кельвина и продолжающее развиваться вплоть до наших дней (см., например, книгу Guillimin, Sternberg [1]), потребовалось значительное время, прежде чем в бесконечной размерности удалось развить соответствующий метод стационарной фазы, достаточно мощный, чтобы с его помощью можно было изучить некоторые классы фейнмановских интегралов по траекториям. Это было сделано в работах Albeverio, Nøegh-Krohn [6], Rezende [1] на основе определения фейнмановских интегралов, данного в работе Albeverio, Nøegh-Krohn [2].

Однако можно — на самом деле даже «естественно» — взять в качестве отправной точки формулу (7) и использовать это явное определение внутреннего фейнмановского интеграла в вычислениях, или, иными словами, отталкиваться от формулы

$$(8) \quad \left( \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} * V\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{t}{n} H_0\right) \right)^n * \varphi(x) \approx \\ \approx \int_{*\mathbb{R}^{nd}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} * S_t(\gamma_n + x)\right) * \varphi(\gamma_n(0) + x) * d\gamma_n$$

при  $n \in *\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и  $\hbar \approx 0$ .

Мы не будем здесь развивать этот сюжет дальше, поскольку он в существенной части является воспроизведением «основного ядра» подхода работ Nepp [1] и Hagedorn [1]. Хотим только подчеркнуть, что внутренний фейнмановский интеграл по траекториям — это точное корректно определенное математическое понятие, ухватывающее значительную часть исходных эвристических соображений, причем его можно эффективно использовать в «гиперконечных» вычислениях. Но нужно соблюдать осторожность: интеграл внутренний и остается внутренним!

**Замечание.** Хартонг развил другое интересное нестандартное обобщение классического метода стационарной фазы для осциллирующих интегралов: см. Harthong [1], [2]. В частности, он применил свои результаты в обсуждении, раскрывающем интересные особенности определенных оптических явлений («муаровых полос»), а также в изучении распространения волн.

## Глава 7

### Гиперконечные решетчатые модели

Общая нить этой главы — изучение гиперконечных решетчатых моделей. В §§ 7.1—7.3 наши решетки гиперконечны, но шаг решетки, или расстояние между соседними узлами, фиксирован и не бесконечно мал. В § 7.1 мы изучаем стохастическую эволюцию решетчатых систем; в § 7.2 используем гиперконечную модель для изучения классической теории равновесия; наконец, в § 7.3 мы обсуждаем глобальное марковское свойство при различных допущениях. Во второй части главы вводятся гиперконечные решетки с бесконечно малым шагом как модели для теорий поля. В § 7.4 мы обсуждаем ряд моделей для квантовых теорий поля, включая несколько коротких замечаний о калибровочных полях; в § 7.5 исследуется связь между полями и полимерами, что расширяет обсуждение § 6.4.

#### 7.1. Стохастическая эволюция решетчатых систем

Изучение стохастической эволюции решетчатых систем в случае модели Изинга было начато Глаубером. Идея заключается в том, чтобы рассматривать ферромагнитную систему, полученную погружением обычной модели Изинга (см. Faris [1]) в тепловую ванну; при этом температура поддерживается постоянной, а энергия варьируется посредством ориентации спинов (элементарных ферромагнетиков) вверх и вниз в заданном темпе. Затем наблюдаемое движение описывается непрерывным марковским процессом, и модель строится таким образом, чтобы гиббсовские состояния ее системы Изинга были состояниями равновесия; ср. § 7.2.

В этом параграфе мы будем изучать стохастическую эволюцию этих систем, используя гиперконечную решетчатую систему с не бесконечно малым шагом. Как обычно, мы начинаем с краткого обзора стандартной теории.

Пусть  $d$ -мерная система задается множеством узлов  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Каждому узлу  $i \in \Lambda$  приписан спин, принимающий значения «вверх» ( $+1$ ) или «вниз» ( $-1$ ); другими словами, с  $\Lambda$  ассоциировано конфигурационное пространство  $\Omega_\Lambda = \{-1, +1\}^\Lambda$ . Элемент  $q \in \Omega_\Lambda$  называется конфигурацией, а  $q(i)$ , равное  $+1$  либо

—1, — спином в узле  $i$  по отношению к конфигурации  $q$ . Часто вместо  $q(i)$  мы будем писать  $q_i$ .

Для  $i, j \in \Lambda$  обозначим  $|i - j|$  обычное евклидово расстояние, и пусть  $B_{i,r} = \{j \in \Lambda \mid |i - j| \leq r\}$  — пересечение множества  $\Lambda$  с шаром радиуса  $r$  центром в  $i$ . Заметим, что  $\Omega_\Lambda$  компактно в топологии произведения. Как обычно,  $C(\Omega_\Lambda)$  обозначает множество действительных непрерывных функций на  $\Omega_\Lambda$ .

В случае  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$  нижние индексы не указываются, т. е.  $\Omega$  служит сокращением для  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  и  $C(\Omega)$  — для соответствующего множества непрерывных функций. Функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *ручной*, если найдется такое *конечное*  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , что для всех  $q, q' \in \Omega$ , согласованных на  $\Lambda$  (т. е. таких, что  $q \upharpoonright \Lambda = q' \upharpoonright \Lambda$ ) выполнено равенство  $f(q) = f(q')$ . Мы называем  $\Lambda$  *базой* ручной функции  $f$ . Имеется простое отождествление между функциями из  $C(\Omega_\Lambda)$ , для конечных  $\Lambda$  и ручными функциями из  $C(\Omega)$  с базой  $\Lambda$ ; а именно, каждой  $f \in C(\Omega)$  мы сопоставляем  $f' \in C(\Omega)$  при помощи равенства  $f'(q) = f(q \upharpoonright \Lambda)$ . И наконец, легко видеть, что теорема Стоуна — Вейерштрасса влечет за собой плотность множества ручных функций в  $C(\Omega)$ .

Мы будем изучать некоторые *диффузионные системы* на бесконечной решетке  $\mathbb{Z}^d$ . Мы предполагаем, что стохастическая эволюция таких систем управляется функцией скорости  $c: \mathbb{Z}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей следующим двум условиям:

(1) Существует такое  $M \in \mathbb{R}$ , что  $0 < c(i, q) \leq M$  для всех  $i \in \mathbb{Z}^d, q \in \Omega$ .

(2) Существует такое  $L \in \mathbb{R}$ , что  $c(i, q) = c(i, q')$  для всех  $i \in \mathbb{Z}^d$  и всех  $q, q'$ , удовлетворяющих условию  $q \upharpoonright B_{i,L} = q' \upharpoonright B_{i,L}$ .

В стандартной терминологии это означает, что мы изучаем *системы с конечным радиусом взаимодействия*. Важнейший пример — классическая модель Изинга с функцией скорости

$$(3) \quad c(i, q) = \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{|i-j|=1} q_i q_j - h q_i \right], \quad \beta > 0, h \in \mathbb{R};$$

т. е. мы имеем систему с внешним полем  $h$ , в которой взаимодействие возможно только между ближайшими соседями.

Мы хотим, чтобы функция скорости управляла стохастической эволюцией следующим образом: если известно, что система находится в конфигурации  $q$  в момент времени  $t_0$ , то вероятность изменения спина в единственном узле  $i \in \mathbb{Z}^d$  в момент времени  $t_0 + \Delta t$  равна  $c(i, q) \Delta t + o(\Delta t)$ , в то время как вероятность изменения спина в двух или более узлах в интервале времени  $\Delta t$  равна  $o(\Delta t)$ .

На языке полугрупп это означает, что мы хотим построить марковскую полугруппу операторов  $T_t$ ,  $t \geq 0$  на  $C(\Omega)$ , имеющую в качестве инфинитезимального генератора расширение следующего оператора  $A$ , определенного на множестве ручных функций на  $C(\Omega)$ :

$$(4) \quad (Af)(q) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c(i, q) (f(q^{(i)}) - f(q)),$$

где  $q^{(i)}$  — конфигурация, полученная из  $q$  изменением спина в узле  $i$ .

**7.1.1. Замечание.** Этот подход к взаимодействующим системам частиц принадлежит Спизеру (Spitzer [1]); однако частный случай ранее обсуждался Глаубером в работе Glauber [1]. На эту тему имеется обширная литература; в качестве введения может служить книга Kindermann, Snell [1], имеющая большую библиографию; см. также Martin [1]. В этом параграфе мы описываем гиперконечный подход, предложенный в работе Helms, Loeb [1]; см. также Helms, Loeb [2].

При стандартном подходе нет прямого способа продолжить оператор, определенный в формуле (4), с ручной на произвольную непрерывную функцию. Заменяя конечное гиперконечным, мы увидим, как сохранить явную форму равенства (4). Это дает внутренний *ограниченный* оператор и, следовательно, полугруппу. Добавьте конструкцию Лёба и некоторые манипуляции со стандартной частью, и полугруппа  $T_t$  на  $C(\Omega)$  предстанет перед вами. Перейдем к деталям.

Выберем  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и пусть  $\Gamma = B_{0, N}$  — гиперконечное подмножество множества  ${}^*\mathbb{Z}^d$ . Пусть  $\Omega_\Gamma$  — множество внутренних отображений из  $\Gamma$  в  $\{-1, +1\}$  и  $C(\Omega_\Gamma)$  — множество внутренних функций на  $\Omega_\Gamma$  со значениями в  ${}^*\mathbb{R}$  и с нормой максимума. Заметим, что для конечных  $\Lambda$  множество  $C(\Omega_\Lambda)$  состоит из **всех** функций из  $\Omega_\Lambda$  в  ${}^*\mathbb{R}$ . Если  $f$  — некоторая функция на  ${}^*\Omega$  и  $q$  — произвольная конфигурация из  ${}^*\Omega - \Omega_\Gamma$ , определим функцию  $f_q$  на  $\Omega_\Gamma$  равенством  $f_q(q') = f(q' \times q)$ ,  $q' \in \Omega_\Gamma$ . Придерживаясь обычной терминологии, мы называем  $q$  *внешней конфигурацией*. Эта терминология может вызвать путаницу; «внешний» здесь означает «внешний относительно гиперконечного множества  $\Omega_\Gamma$ », а не «внешний» (в противоположность к «внутренний») в смысле нестандартного анализа.

В дальнейшем мы будем использовать отображение  $\text{st}_\Gamma$  взятия стандартной части, определенное равенством  $\text{st}_\Gamma q = q \upharpoonright \mathbb{Z}^d$  при  $q \in \Omega_\Gamma$ . Но вначале — гиперконечная конструкция.

Зафиксируем внешнюю конфигурацию  $q_0$  и положим

$$(5) \quad (A_\Gamma, q_0 f)(q) = \sum_{i \in \Gamma} {}^*c(i, q \times q_0) [f(q^{(i)}) - f(q)],$$

где  $f \in C(\Omega_\Gamma)$ ,  $q \in \Omega_\Gamma$ , и  $*c$  — стандартное продолжение заданной функции скорости  $c$ . Наше первое простое, но важное наблюдение заключается в том, что  $A_{\Gamma, q_0}$  — внутренний ограниченный оператор на  $C(\Omega_\Gamma)$ ; фактически

$$\|A_{\Gamma, q_0}\| \leq 2 \cdot M \cdot |\Gamma|,$$

где  $M$  — константа из формулы (1) и  $|\Gamma|$  — внутренняя мощность (или «объем») множества  $\Gamma$ . Заметим также, что  $A_{\Gamma, q_0}1 = 0$ . Посредством переноса стандартной теории мы можем ввести внутреннюю полугруппу операторов  $S_{\Gamma, q_0}(t)$ ,  $t \geq 0$ , на  $C(\Omega_\Gamma)$  при помощи явной формулы

$$(6) \quad S_{\Gamma, q_0}(t) = \exp(tA_{\Gamma, q_0}).$$

Искомая полугруппа  $T_t$ ,  $t \geq 0$ , будет в некотором смысле *стандартной частью* внутренней полугруппы  $S_{\Gamma, q_0}(t)$ .

**7.1.2. Замечание.** Мы будем использовать определение экспоненциальной функции при помощи степенного ряда:

$$\exp(tA_{\Gamma, q_0}) = \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} \frac{(tA_{\Gamma, q_0})^n}{n!}.$$

С внутренней точки зрения эволюция во времени управляется полугруппой

$$Q(t) = (1 + A_{\Gamma, q_0}\Delta t)^{t/\Delta t}$$

(см. § 5.3), и это представление для  $\exp(tA_{\Gamma, q_0})$  может показаться более естественным. Однако  $Q(t)$  и  $S_{\Gamma, q_0}$  имеют одинаковые стандартные части; мы свободны в выборе и в этом параграфе будем следовать подходу работы Helms, Loeb [1].

Основная оценка содержится в следующей лемме.

**7.1.3. Лемма.** Пусть  $f \in C(\Omega)$  — ручная функция с базой  $\Lambda$ , и пусть  $n \in {}^*\mathbb{N}$ ; тогда

$$\|A_{\Gamma, q_0}^n * f_{q_0}\| \leq \|f\| 2^n M^n n! \exp[|\Lambda| + n(2L + 1)^d],$$

где  $\|\cdot\|$  — *sup-норма*.

На первый взгляд это выглядит впечатляюще. Но оценки такого типа хорошо известны в стандартной теории (см., например, Holley [1], [2]); подробное доказательство в гиперконечной постановке дано в работе Helms, Loeb [1]. Так как ничего *принципиально* нового здесь нет, мы опускаем проверку.

Напомним понятие  $S$ -непрерывности на  $\Omega_\Gamma$ , соответствующее отображению взятия стандартной части  $\text{st}_\Gamma$ : функция  $f$  является  $S$ -непрерывной, если она — внутренняя, и  $f(q) \approx f(q')$  как

только  $\text{st}_\Gamma(q) = \text{st}_\Gamma(q')$ . Мы подошли к основному результату о конечности и  $S$ -непрерывности.

**7.1.4. Предложение.** Если  $t$  — конечное неотрицательное гипердействительное число и  $f \in C(\Omega_\Gamma)$  —  $S$ -непрерывная функция на  $\Omega_\Gamma$ , принимающая конечные значения, то функция  $S_{\Gamma, q_0}(t)f$  принимает конечные значения и  $S$ -непрерывна на  $\Omega_\Gamma$ .

Предложение доказывается в несколько шагов. Вначале мы покажем, что оно выполняется для функций типа  $*f_{q_0}$ , где  $f$  — ручная функция, при условии, что выбранное  $t$  удовлетворяет неравенству  $2Mt \exp(2L+1)^d < 1$ . Так как ручные функции образуют плотное множество, предложение немедленно распространяется на функции  $f \in C(\Omega)$ . Далее замечаем, что если мы можем доказать предложение 7.1.4 для указанного ограничения на  $t$ , то оно выполнено для всех конечных неотрицательных  $t$  в силу полугруппового свойства. Для завершения доказательства заметим, что для заданной  $S$ -непрерывной внутренней функции  $f$  на  $\Omega_\Gamma$ , принимающей конечные значения, стандартная часть  ${}^\circ f$ , определяемая равенством  ${}^\circ f(q) = {}^\circ(f(*q \upharpoonright \Gamma))$ ,  $q \in \Omega$ , непрерывна на  $\Omega$ , и  $\|({}^\circ f)_{q_0} - f\| \approx 0$ . Из этого наблюдения нетрудно вывести  $S$ -непрерывность функции  $S_{\Gamma, q_0}(t)f$ , пользуясь  $S$ -непрерывностью функции  $S_{\Gamma, q_0}(t)({}^\circ f)_{q_0}$ . Отсюда следует часть, касающаяся конечности, так как  $\|S_{\Gamma, q_0}(t)f\| \leq \|f\|$  и  $\|f\|$  конечно в силу того, что по предположению множество  $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid |f(q)| \leq n \text{ для всех } q \in \Omega_\Gamma\}$  содержит все гиперконечные натуральные числа, а значит и некоторое конечное  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Остается доказать предложение для ручных функций  $f$  с базой  $\Lambda$  и для  $t$ , удовлетворяющих условию  $2Mt \exp(2L+1)^d < 1$ . Фактически мы получим нечто более сильное. Пусть  $q_0, q'_0$  — внешние конфигурации,  $q, q' \in \Omega_\Gamma$ ; предположим, что  $\text{st}_\Gamma q = \text{st}_\Gamma q'$ . Тогда

$$(7) \quad S_{\Gamma, q_0}(t) * f_{q_0}(q) \approx S_{\Gamma, q'_0}(t) * f_{q'_0}(q').$$

Так как  $f$  — ручная функция, явное определение (5) показывает, что  $A_{\Gamma, q_0}^n * f_{q_0}(q) = A_{\Gamma, q'_0}^n * f_{q'_0}(q')$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . По принципу внутреннего определения должно существовать такое  $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что это равенство выполнено для всех  $n \leq \omega$ . Так как

$$S_{\Gamma, q_0}(t) * f_{q_0}(q) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{t^n}{n!} A_{\Gamma, q_0}^n * f_{q_0}(q) + \sum_{n \geq \omega+1} \frac{t^n}{n!} A_{\Gamma, q_0}^n * f_{q_0}(q),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} & S_{\Gamma, q_0}(t) {}^*f_{q_0}(q) - S_{\Gamma, q'_0}(t) {}^*f_{q'_0}(q') = \\ &= \sum_{n \geq \omega+1} \frac{t^n}{n!} \left[ A_{\Gamma, q_0}^n {}^*f_{q_0}(q) - A_{\Gamma, q'_0}^n {}^*f_{q'_0}(q') \right]. \end{aligned}$$

Используя оценку из леммы 7.1.3, мы видим, что правая часть ограничена величиной

$$2 \|f\| e^{|\Lambda|} \sum_{n \geq \omega+1} t^n 2^n M^n \exp n(2L+1)^d.$$

Используя ограничение на  $t$ , мы немедленно заключаем, что эта разность бесконечно мала, тем самым доказывая 7.1.4 для ручных функций  $f$ . Как было сказано, этого достаточно для доказательства предложения 7.1.4 в полном объеме.  $\square$

**7.1.5. Замечание.** Доказательство предложения 7.1.4 показывает, что внешняя конфигурация  $q_0$  и гиперконечная решетка  $\Gamma$  оказывают только бесконечно малое влияние на  $S_{\Gamma, q_0}(t) {}^*f_{q_0}$ . Это соответствует тому стандартному обстоятельству, что предельные термодинамические величины не зависят от того, как именно мы переходим к пределу и как мы выбираем внешние конфигурации, если только предел понимается в смысле ван Хова (van Hove) см. § 7.2.

Остается взять стандартную часть полугруппы  $S_{\Gamma, q_0}(t)$ . Для этого заметим, что, каковы бы ни были  $t \in {}^*[0, \infty)$  и  $q \in \Omega_\Gamma$ , оператор  $S_{\Gamma, q_0}(t)$  определяет функцию перехода  $U_t^{q_0}(q, \cdot)$ , которая в свою очередь дает внутреннюю вероятностную меру  $P(E) = U_t^{q_0}(q, E)$  на алгебре  $\mathcal{A}$  внутренних подмножеств множества  $\Omega_\Gamma$ . Пусть  $(\Omega_\Gamma, L(\mathcal{A}), L(P))$  — соответствующее пространство Лёба; см. § 3.2. Заметим, что  $\text{st}_\Gamma^{-1}(E) \in L(\mathcal{A})$  как только  $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ . Таким образом, мы можем определить вероятностную меру  $P_S$  на  $\mathcal{B}(\Omega)$  равенством  $P_S(E) = L(P)(\text{st}_\Gamma^{-1}E)$ ; эта техника нам уже знакома. Нам также известно из § 3.2, что при  $f \in C(\Omega)$

$$(8) \quad \int_{\Omega} f dP_S = \int_{\Omega_\Gamma} {}^*(f_{q_0}) dL(P) \approx \int_{\Omega_\Gamma} {}^*f_{q_0} dP.$$

Используя эту общую конструкцию, можно следующим образом определить функцию перехода  $T_t^{q_0}$ . Пусть  $q \in \Omega$  и  $t \in [0, \infty)$ ; это дает частичную функцию перехода  $U_t^{q_0}({}^*q \upharpoonright \Gamma)$ . Общая конструкция теперь дает меру на  $\mathcal{B}(\Omega)$ ; обозначим ее  $T_t^{q_0}(q, \cdot)$ . Эта мера в свою очередь индуцирует оператор  $T_t^{q_0}f$  на ограни-



ченных измеримых по Борелю функций на  $\Omega$  при помощи равенства  $T_t^{q_0}(f) = \int_{\Omega} f(q) T_t^{q_0}(\cdot, dq)$ .

**7.1.6. Лемма.** Если  $f \in C(\Omega)$ , то  $T_t^{q_0}f \in C(\Omega)$ . Более того,

$$T_{t+s}^{q_0}(q, E) = \int T_t^{q_0}(q', E) T_s^{q_0}(q, dq')$$

для всех  $q \in \Omega$ ,  $E \in \mathcal{B}(\Omega)$  и  $s, t \in [0, \infty)$ .

Доказательство довольно просто, если использовать общие свойства конструкции Лёба, такие как (8), и соответствующие полугрупповые свойства гиперконечных объектов. Мы покажем, как доказывается утверждение о непрерывности. Пусть  $f \in C(\Omega)$ ; множество  $\Omega$  компактно, поэтому функция  $f$  равномерно непрерывна на  $\Omega$ ; следовательно,  $*f_{q_0}$  принимает конечные значения и  $\mathcal{S}$ -непрерывна на  $\Omega_{\Gamma}$ , откуда в силу 7.1.4 следует, что  $S_{\Gamma, q_0}(t) * f_{q_0}$  также принимает конечные значения и  $\mathcal{S}$ -непрерывно. Используя (8), вычисляем:

$$\begin{aligned} S_{\Gamma, q_0} * f_{q_0}(*q \upharpoonright \Gamma) &= \int_{\Omega_{\Gamma}} *f_{q_0}(q') U_t^{q_0}(*q \upharpoonright \Gamma, dq') \approx \\ &\approx \int_{\Omega_{\Gamma}} [*f_{q_0}(q')] L(P_t, *q \upharpoonright \Gamma)(dq') = \int_{\Omega} f(q') T_t^{q_0}(q, dq') = T_t^{q_0}f(q), \end{aligned}$$

следовательно,  $T_t^{q_0}f \in C(\Omega)$ . Для доказательства второй части используется соответствующее свойство функции перехода  $U_t^{q_0}(q, \cdot)$ .  $\square$

Заметьте, что мы не пишем индекс  $\Gamma$  у функции перехода  $U_t^{q_0}$ ; используя замечание 7.1.5, мы можем также не писать  $q_0$ . Фактически как функция перехода  $T_t^{q_0}(q, \cdot)$ , так и полугруппа  $T_t^{q_0}$ ,  $t \geq 0$ , не зависят от множества  $\Gamma$  и от конфигурации  $q_0$ . Поэтому  $T_t^{q_0}$  отныне будет обозначаться просто  $T_t$ . Заметим, что в силу леммы 7.1.6 полугруппа  $T_t$  является феллеровской в том смысле, что она отображает непрерывные функции в непрерывные.

**7.1.7. Теорема.** Семейство операторов  $T_t$ ,  $t \geq 0$ , является единственной феллеровской полугруппой, инфинитезимальный генератор которой является расширением оператора  $A$ , определенного в (4).

Для доказательства сильной непрерывности требуется только доказать сильную непрерывность при  $t = 0$ , а это легко сделать,

используя оценку из леммы 7.1.3. Мы покажем, что для ручных  $f$  справедливо утверждение

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t f - f}{t} = A f.$$

Пусть база функции  $f$  — конечное множество  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Тогда для всех  $q \in \Omega_\Gamma$  и малых  $t$

$$\left| \frac{S_{\Gamma, q_0}(t) * f_{q_0}(q) - * f_{q_0}(q)}{t} - A_{\Gamma, q_0} * f_{q_0}(q) \right| \leq \\ \leq \|f\| e^{|\Lambda|} t^{-1} \sum_{\substack{n \in *N \\ n \geq 2}} [2Mt \exp(2L + 1)^d]^n.$$

Выбирая достаточно малое  $t$ , правую часть можно сделать меньше любого положительного числа. Единственность получается как в стандартном случае; см., например Holley [2].  $\square$

Таким образом мы решили нашу ограниченную задачу построения полугруппы  $T_t$  при помощи гиперконечного расширения бесконечной решетчатой системы. Но теория на этом не останавливается; в следующем параграфе мы рассмотрим новую тему — существование инвариантных мер для полугруппы  $T_t$  и их связь с состояниями равновесия; в качестве ссылок приведем Holley, Stroock [1], [2], Liggett [1], Stroock (1) и Sullivan [1].

Мы обсудили случай дискретного слоя  $\{-1, +1\}$ . Обобщение на случай компактного слоя, т. е. на пространства конфигураций вида  $I^{\mathbb{Z}^d}$ , где  $I$  — некоторое компактное подмножество множества  $\mathbb{R}$ , проводится непосредственно. Обобщение на случай непрерывного слоя, т. е. на пространства конфигураций вида  $\mathbb{R}^\Lambda$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , также изучалось; сошлемся на работу Faris [1].

В § 7.3 мы обсудим решетчатые системы как с компактными, так и с непрерывными слоями в связи с глобальным марковским свойством. Но в начале обратимся к классической теории равновесия.

## 7.2. Теория равновесия

В этом параграфе мы дадим краткий обзор гиперконечного подхода к классической теории равновесия. Но вначале — резюме классической теории конечных систем.

**Замечание.** Со стандартной теорией можно ознакомиться по работам Ruelle [1], Israel [1], Preston [1], Gross [3] и Синай [1].

**Взаимодействие**  $\Phi$  — это функция, отображающая конечные непустые подмножества  $X \subset \mathbb{Z}^d$  в действительные непрерывные функции на  $\Omega_X$ , т. е.  $\Phi(X) \in C(\Omega_X)$ . Пусть  $\Lambda$  — *конеч-*

ное подмножество множества  $\mathbb{Z}^d$ ; *гамильтониан*, или функция энергии, для  $\Lambda$ , определенный взаимодействием  $\Phi$ , — это функция

$$(1) \quad H_{\Lambda}^{\Phi} = \sum_{X \in \Lambda} \Phi(X).$$

Классическая модель Изинга дается следующим взаимодействием: пусть  $\Phi(X)(q) = kq_i q_j$ , если множество  $X$  состоит из двух точек  $i, j$ , лежащих на расстоянии 1;  $\Phi(X)(q) = hq_i$ , если  $X$  состоит в точности из одной точки  $i$ ; в противном случае  $\Phi(X)(q) = 0$ . Тогда мы получаем

$$(2) \quad H_{\Lambda}^{\Phi}(q) = k \sum_{\substack{i, j \in \Lambda \\ |i-j|=1}} q_i q_j + h \sum_{i \in \Lambda} q_i.$$

В § 7.1 мы ввели модель Изинга посредством функции скорости  $c(i, q)$ ; см. формулу (3) из § 7.1. Эти процедуры очевидным образом эквивалентны; в этом параграфе мы придерживаемся взаимодействий и ассоциированных с ними гамильтонианов.

Гамильтониан, введенный в (1) не допускает взаимодействий между спинами внутри  $\Lambda$  и спинами вне  $\Lambda$ ; другими словами, мы имеем ситуацию со свободными граничными условиями. Для многих целей важны другие граничные условия. Мы обсудим один тип: *внешняя конфигурация* для  $\Lambda$  является элементом множества  $\Omega_{\Lambda^c}$ , где  $\Lambda^c$  — дополнение множества  $\Lambda$  в  $\mathbb{Z}^d$ . (Как указано в § 7.1, здесь имеется терминологическая трудность. В нестандартном анализе «внешний» значит «не внутренний». В статистической механике понятие «внешний» определено по отношению к дополнению данного множества  $\Lambda$ ; в этом смысле внешняя конфигурация вполне может оказаться внутренней как объект нестандартного анализа. Мы надеемся, что эта дилемма не усложнит читателю жизнь.)

Внешняя конфигурация  $q \in \Omega_{\Lambda^c}$  определяет гамильтониан

$$(3) \quad {}_q H_{\Lambda}^{\Phi}(q') = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi(X)(q' \times q),$$

где  $q'$  — любая конфигурация из  $\Omega_{\Lambda}$ . Здесь  $(q' \times q)(i) = q'(i)$ , если  $i \in \Lambda$  и  $(q' \times q)(i) = q(i)$ , если  $i \in \Lambda^c$ .

Гамильтониан вида  $H_{\Lambda}^{\Phi}$  всегда имеет смысл; в то же время сумма в (3) может расходиться. Но если  $\Phi$  — *взаимодействие с конечным радиусом*, т. е. если существует такое число  $l$ , что  $\Phi(X) = 0$  в случае, когда диаметр множества  $X$  больше  $l$ , то выражение (3) определено. В этом кратком обзоре мы в основном ограничиваемся случаем взаимодействий с конечным радиусом, но теория равновесия охватывает более широкий класс; результаты, касающиеся взаимодействий с бесконечным радиусом (систем Кулона), имеются в работе Ostebee и др. [1].

Пусть  $\mathcal{B}_0$  — линейное пространство взаимодействий с конечным радиусом. Пополняя  $\mathcal{B}_0$  относительно нормы

$$\|\Phi\| = \sum_{X \ni 0} \frac{\|\Phi(X)\|_\infty}{|X|},$$

мы получаем банахово пространство  $\mathcal{B}$ , а пополняя  $\mathcal{B}_0$  относительно нормы

$$\|\Phi\|_\sim = \sum_{X \ni 0} \|\Phi(X)\|_\infty,$$

мы получаем банахово пространство  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Легко видеть, что  $\mathcal{B}_0 \subset \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  и что  $\mathcal{B}_0$  плотно как в  $\tilde{\mathcal{B}}$ , так и в  $\mathcal{B}$ . Большая часть теории распространяется с взаимодействий из  $\mathcal{B}_0$  на  $\tilde{\mathcal{B}}$  или иногда на всё  $\mathcal{B}$ . Легко видеть, что  $qH_\Lambda^\Phi$  конечно, если  $\Phi \in \tilde{\mathcal{B}}$ .

Будем также предполагать, что мы имеем дело с *трансляционно-инвариантными взаимодействиями*: при данном  $i \in \mathbb{Z}^d$  имеется естественное отображение  $t_i: \Omega_{X+i} \rightarrow \Omega_X$ , определенное равенством  $(t_i q)(j) = q(j+i)$ . Это отображение может быть поднято до отображения  $t_i: C(\Omega_X) \rightarrow C(\Omega_{X+i})$ . Мы говорим, что  $\Phi$  трансляционно-инвариантно, если  $\Phi(X+i) = t_i \Phi(X)$  для всех конечных  $X$  и всех  $i \in \mathbb{Z}^d$ .

От взаимодействий и гамильтонианов мы переходим к важным термодинамическим понятиям, таким как давление, энтропия и средняя энергия. Они получаются при помощи подходящего процесса усреднения. Так как наше базовое пространство есть  $\Omega_\Lambda = \Omega_0^\Lambda$ , где  $\Omega_0 = \{-1, +1\}$ , естественной *априорной* мерой на нем является нормированная считающая мера; т. е. любой конфигурации  $q \in \Omega_\Lambda$  приписан вес  $2^{-|\Lambda|}$ . Для каждой функции  $F \in C(\Omega_\Lambda)$  обозначим через  $\langle F \rangle_0$  ожидаемое значение функции  $F$  относительно нормированной считающей меры.

*Статистическая сумма*, ассоциированная с взаимодействием  $\Phi$  и конечным множеством  $\Lambda$ , — это функция

$$(4) \quad Z_\Lambda = \langle e^{-H_\Lambda^\Phi} \rangle_0.$$

*Состояние* конечной системы — это вероятностная мера на пространстве конфигураций  $\Omega_\Lambda$ . *Гиббсовское*, или *равновесное состояние* определено приписыванием каждому  $q \in \Omega_\Lambda$  веса

$$(5) \quad \rho_1(q) = \frac{e^{-H_\Lambda^\Phi(q)}}{\sum_{q' \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda^\Phi(q')}} = Z_\Lambda^{-1} \cdot e^{-H_\Lambda^\Phi(q)} \cdot 2^{-|\Lambda|}.$$

*Термальное среднее* — это математическое ожидание по отношению к равновесному состоянию  $\rho_1$ . Таким образом, для  $F \in C(\Omega_\Lambda)$

термальное среднее дается формулой

$$(6) \quad \langle F \rangle_1 = Z_\Lambda^{-1} \langle e^{-H_\Lambda^\Phi} F \rangle_0.$$

**Замечание.** В классическом случае со слоем  $\Omega_0 = \{-1, +1\}$  чаще используют считающую меру, а не нормированную считающую меру; т. е. мы должны были бы заменить  $Z_\Lambda = \langle e^{-H_\Lambda^\Phi} \rangle_0$  на  $Z_\Lambda = \sum_{q \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda^\Phi}(q)$ . Это не изменило бы меру Гиббса. Мы выбрали нормированную считающую меру для того, чтобы была возможность сравнения с недавними стандартными обзорами; см., например Israel [1].

Мы можем теперь ввести *давление* и *среднюю энергию*:

$$(7) \quad P_\Lambda(\Phi) = |\Lambda|^{-1} \ln Z_\Lambda, \quad \langle H_\Lambda^\Phi \rangle_1 = Z_\Lambda^{-1} \langle e^{-H_\Lambda^\Phi} H_\Lambda^\Phi \rangle_0.$$

Здесь мы использовали гамильтониан со свободными граничными условиями; те же определения распространяются на случай гамильтонианов  ${}_q H_\Lambda^\Phi$  с внешними граничными условиями  $q \in \Omega_\Lambda^c$ .

Пусть  $\rho$  — состояние конечной системы  $\Lambda$ , т. е.  $\rho$  — вероятностная мера на пространстве  $\Omega_\Lambda$ , приписывающая вес  $\rho(q)$  точке  $q \in \Omega_\Lambda$ . Пусть  $\rho^{(\Lambda)}(q) = \rho(q) \cdot 2^{|\Lambda|}$ . Выражаясь научно  $\rho^{(\Lambda)}$  — производная Радона — Никодима меры  $\rho$  по отношению к считающей мере на  $\Omega_\Lambda$ . Именно такой способ выражения используется в случае, когда слой  $\Omega_0$  — произвольное компактное метрическое пространство с некоторой априорной вероятностной мерой  $\mu_0$ . *Энтропия* состояния  $\rho$  в  $\Lambda$  определена как

$$(8) \quad S_\Lambda(\rho) = -\langle \rho^{(\Lambda)} \ln \rho^{(\Lambda)} \rangle_0.$$

Мы видим, что  $-|\Lambda| \ln 2 \leq S_\Lambda(\rho) \leq 0$ , и для гиббсовского состояния в  $\Lambda$  получаем

$$(9) \quad S_\Lambda(\rho) = -\langle Z_\Lambda^{-1} e^{-H_\Lambda^\Phi} \ln Z_\Lambda^{-1} e^{-H_\Lambda^\Phi} \rangle_0 = |\Lambda| P_\Lambda(\Phi) + \langle H_\Lambda^\Phi \rangle_1.$$

Справедлив следующий вариационный принцип.

**7.2.1. Предложение.** Для каждого состояния  $\rho$  конечной системы  $\Lambda$  с гамильтонианом  $H_\Lambda^\Phi$  выполнено неравенство

$$S_\Lambda(\rho) - \rho(H_\Lambda^\Phi) \leq |\Lambda| P_\Lambda(\Phi).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\rho$  является гиббсовским состоянием  $\rho_1$ .

Здесь  $\rho(F)$  — математическое ожидание функции  $F$  относительно меры  $\rho$ . Доказательство — простое приложение хорошо известного неравенства Йенсена.

Мы завершили наш набросок конечной классической теории. Но конечные системы представляют ограниченный физический интерес; например, никакая конечная система не может продемонстрировать явление фазового перехода. Для получения более содержательной физической модели мы должны перейти к *термодинамическому*, или *объемному*, *пределу*.

Конфигурационным пространством бесконечной системы будет  $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Взаимодействием для бесконечной системы будет — как и в случае конечных систем — отображение  $\Phi$  из конечных подмножеств  $X$  множества  $\mathbb{Z}^d$  в действительные непрерывные функции на  $\Omega_X$ . Для остальных величин мы не можем дать прямые явные формулы и прибегаем к предельным процедурам; например, давление  $P(\Phi)$  для бесконечных систем получается как

$$P(\Phi) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} P_{\Lambda}(\Phi) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\Lambda|^{-1} \ln Z_{\Lambda}$$

при  $\Lambda$ , стремящемся к  $\mathbb{Z}^d$ . То же самое справедливо для энтропии и средней энергии.

Ключевое понятие здесь — *предел в смысле ван Хова* (van Hove). Для каждого положительного числа  $a$  мы разбиваем пространство  $\mathbb{Z}^d$  на семейство  $\mathcal{C}_a$  кубов вида

$$\{i \in \mathbb{Z}^d \mid n_j a \leq i_j < (n_j + 1)a, \quad j = 1, \dots, d\}$$

для целых  $n_1, \dots, n_d$ . Пусть  $\Lambda$  — конечное подмножество в  $\mathbb{Z}^d$ ; мы определяем:

$N_a^+(\Lambda)$  = количество кубов в  $\mathcal{C}_a$ , пересекающихся с  $\Lambda$ ,

$N_a^-(\Lambda)$  = количество кубов в  $\mathcal{C}_a$ , содержащихся в  $\Lambda$ .

Будем говорить, что последовательность  $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  конечных подмножеств множества  $\mathbb{Z}^d$  *сходится к бесконечности в смысле ван Хова*, если для всех  $a$

$$(i) \quad N_a^-(\Lambda_n) \rightarrow \infty.$$

$$(ii) \quad N_a^-(\Lambda_n)/N_a^+(\Lambda_n) \rightarrow 1.$$

Для формулировки основных результатов о сходимости нам потребуются понятие *состояния бесконечной системы*:  $\rho$  — состояние бесконечной системы, если  $\rho$  — вероятностная мера на конфигурационном пространстве  $\Omega$ . Заметим, что  $\rho$  индуцирует состояние на любой конечной системе, так как имеется естественное вложение  $t_{\Lambda}$  множества  $C(\Omega_{\Lambda})$  в  $C(\Omega)$ , а именно  $(t_{\Lambda}f)(q) = f(q|_{\Lambda})$ ,  $q \in \Omega$ . Таким образом, вероятность, приписываемая сужением состояния  $\rho$  элементу  $q$  конечного множества  $\Omega_{\Lambda}$ , —

это просто  $\rho(t_{\Lambda} \chi_q) = \rho(\{q \times q' \mid q' \in \Omega_{\Lambda^c}\})$ , где  $\chi_A$  — характеристическая функция подмножества  $A \subset \mathbb{Z}^d$ .

Если дано состояние  $\rho$  бесконечной системы, то для каждого конечного  $\Lambda$  мы имеем корректно определенную величину  $S_{\Lambda}(\rho)$  — энтропию состояния  $\rho$  в  $\Lambda$ .

Так как  $\rho$  — это вероятностная мера на  $\Omega$ , мы немедленно получаем понятие *трансляционно-инвариантного состояния*; через  $E^I$  мы обозначаем множество трансляционно-инвариантных состояний для бесконечной системы.

Сейчас можно сформулировать результаты о сходимости из классической теории.

**7.2.2. Предложение.** (i) Пусть  $\Phi \in \mathcal{F}$ ; тогда предел  $\lim_{\Lambda_n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n}(\Phi)$  существует для всех последовательностей  $\Lambda_n$ , стремящихся к бесконечности в смысле ван Хова, и не зависит от конкретной последовательности ван Хова.

(ii) Пусть  $\rho \in E^I$ ; тогда предел  $\lim_{\Lambda_n \rightarrow \infty} |\Lambda_n|^{-1} S_{\Lambda_n}(\rho)$  существует для всех последовательностей  $\Lambda_n$ , стремящихся к бесконечности в смысле ван Хова, и не зависит от конкретной последовательности ван Хова.

Мы используем  $P(\Phi)$  для обозначения давления в бесконечном объеме и  $S(\rho)$  — для обозначения средней энтропии бесконечной системы в состоянии  $\rho$ .

Следующая тема — обсуждение подходящего понятия *равновесного состояния для бесконечной системы* и получение необходимых результатов существования. Но здесь мы покидаем классическую теорию и переходим к рассмотрению гиперконечного варианта предельной теории.

При *гиперконическом подходе* мы выбираем бесконечно большое целое число  $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и в качестве множества узлов предельной системы берем гиперконечный прямоугольник  $\Gamma$  диаметра  $2N$ . Напомним, что в § 7.1 мы определили  $\Omega_{\Gamma}$  как множество внутренних отображений из  $\Gamma$  в  $\{-1, +1\}$  и  $C(\Omega_{\Gamma})$  — как множество всех гипердействительнозначных функций на  $\Omega_{\Gamma}$  с нормой максимума. Для простоты мы ограничимся рассмотрением взаимодействий  ${}^*\Phi$ , где  $\Phi$  — стандартное взаимодействие с конечным радиусом. Пусть  $q$  — внешняя конфигурация для гиперконечной системы (в смысле § 7.1). Тогда мы имеем гамильтониан

$$(10) \quad q H_{\Gamma}^{*\Phi}(q') = \sum_{\Gamma \cap X \neq \emptyset} {}^*\Phi(X)(q' \times q),$$

где  $X$  конечно и  $q' \in \Omega_{\Gamma}$ . Мы также имеем корректно определенную статистическую сумму

$$(11) \quad Z_{\Gamma, q} = \langle e^{-q H_{\Gamma}^{*\Phi}} \rangle_0,$$

где усреднение производится по отношению к внутренней нормированной считающей мере на  $\Omega_\Gamma$ .

Внутреннее состояние гиперконечной системы  $\Gamma$  — это внутренняя вероятностная мера на пространстве конфигураций  $\Omega_\Gamma$ . По аналогии с конечной теорией мы можем ввести следующее определение.

**7.2.3. Определение.** Внутреннее равновесное состояние с граничным условием  $q_0$  — это внутренняя вероятностная мера

$$(12) \quad \rho_{q_0}(q) = Z_{\Gamma, q_0}^{-1} \exp(-q_0 H_\Gamma^*(q)) 2^{-|\Gamma|}.$$

Это определение вполне аналогично определению (5); он вводит  $\rho_{q_0}$  как внутреннюю конечно-аддитивную вероятностную меру на алгебре внутренних подмножеств множества  $\Omega_\Gamma$ . Обычно, мы будем использовать конструкцию Лёба для  $\sigma$ -аддитивной вероятностной структуры  $(\Omega_\Gamma, \mathcal{L})$ , где  $\mathcal{A}$  обозначает алгебру внутренних подмножеств  $\Omega_\Gamma$ .

**7.2.4. Определение.** Равновесное состояние  $q_0$  для бесконечной предельной системы — внутренняя вероятностная мера вида  $L$  (мера из определения 7.2.3).

Таким образом, в гиперконечном состоянии равновесия для предельной системы проверить, что они хорошо ведут себя на аппроксимациях. Мы также соотносим состояния из определения 7.2.4 со стандартными состояниями стандартной теории.

В стандартной теории равновесные состояния охарактеризованы как состояния, удовлетворяющие *Добрушину — Ланфорда — Рюэлля*. В нашей постановке определение особенно просто. Пусть  $\Lambda$  — состояние на множестве  $\Omega_\Gamma$ . Допустим,  $\Lambda$  — конечное состояние. Условная вероятность конфигурации  $q$  в  $\Lambda$  при известной конфигурации  $q_0 \in \Omega_{\Gamma-\Lambda}$  равна

$$(13) \quad \rho(q|q_0) = \frac{\rho(q \times q_0)}{\sum_{q' \in \Omega_\Lambda} \rho(q' \times q_0)}.$$

Так как  $\Omega_\Lambda$  конечно,  $\rho(q|q_0)$  определено как гипердействительное число.

**7.2.5. Определение.** Внутреннее состояние  $\rho$  удовлетворяет ДЛР-уравнениям для взаимодействия  $\Phi$ , если для всех конеч-



ных  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , всех  $q_1, q_2 \in \Omega_\Lambda$ , и всех  $q_0 \in \Omega_{\Gamma-\Lambda}$  мы имеем

$$(14) \quad \rho(q_1 | q_0) = \exp(q_0 H_\Lambda^\Phi(q_2) - q_0 H_\Lambda^\Phi(q_1)) \rho(q_2 | q_0).$$

Так как радиус взаимодействия  $\Phi$  конечен, величины  $q_0 H_\Lambda^\Phi(q_i)$ ,  $i=1, 2$ , являются классическими объектами. (Более педантичной была бы запись  $q_0 \upharpoonright \mathbb{Z}^d - \Lambda$ .)

**7.2.6. Предложение.** Пусть  $\rho_{q_0}$  — внутреннее равновесное состояние для бесконечной системы. Тогда  $\rho_{q_0}$  удовлетворяет ДЛР-уравнениям.

*Доказательство* очень просто; для конечных  $\Lambda$ ,  $q \in \Omega_\Lambda$  и  $q'_0 \in \Omega_{\Gamma-\Lambda}$  мы замечаем, что

$$\begin{aligned} q_0 H_\Gamma^{*\Phi}(q \times q'_0) &= \sum_{\Gamma \cap X \neq \emptyset} {}^* \Phi(q \times q'_0 \times q_0) = \\ &= \sum_{\substack{\Lambda \cap X \neq \emptyset \\ \text{diam}(X) < l}} \Phi(q \times q'_0) + K = q_0 H_\Lambda^\Phi(q) + K, \end{aligned}$$

где  $K$  не зависит от  $q$ , и число  $l$  таково, что из  $\text{diam}(X) \geq l$  следует  ${}^* \Phi(X) = 0$ .  $\square$

Определение *давления* и *энтропии* для гиперконечной системы  $\Gamma$  очевидно. Но в то время как  $Z_\Gamma, q_0$  — бесконечно большое гипердействительное число, мы хотим, чтобы давление и энтропия были конечны. Для этого мы приведем несколько простых неравенств из конечной теории. Простое вычисление показывает, что для конечных  $\Lambda$

$$(15) \quad \|H_\Lambda^\Phi\|_\infty \leq |\Lambda| \cdot \|\Phi\|.$$

Следовательно,

$$(16) \quad |P_\Lambda(\Phi)| \leq |\Lambda|^{-1} \|H_\Lambda^\Phi\|_\infty \leq \|\Phi\|, \quad |P_\Lambda(\Phi) - P_\Lambda(\Psi)| \leq \|\Phi - \Psi\|.$$

Используя гамильтониан с внешней конфигурацией  $q_0$ , мы получаем

$$(17) \quad \|q_0 H_\Lambda^\Phi\| \leq |\Lambda| \cdot \|\Phi\|_\sim,$$

откуда следует аналог неравенства (15) с нормой  $\|\cdot\|_\sim$  вместо  $\|\cdot\|$ .

Пусть  $\Phi$  — взаимодействие с конечным радиусом,  ${}^* \Phi$  — его продолжение и  $q_0$  — внешняя конфигурация для  $\Gamma$ . Заметим, что  $\|{}^* \Phi\|_\sim = \|\Phi\|$ . Применяя к формуле (17) принцип переноса, мы получаем  $\|q_0 H_\Gamma^{*\Phi}\| \leq |\Gamma| \cdot \|{}^* \Phi\|_\sim$ , откуда следует  $|P_\Gamma({}^* \Phi)| \leq \|\Phi\|_\sim$ ; т. е. нестандартное давление конечно, и, следовательно, имеет стандартную часть.

**7.2.7. Предложение.** Пусть  $q_0 P_\Gamma(*\Phi) = |\Gamma|^{-1} \ln Z_{\Gamma, q_0}$  — нестандартное давление в гиперконечной системе  $\Gamma$ , отвечающее взаимодействию  $\Phi$  с конечным радиусом и с внешней конфигурацией  $q_0$ . Тогда  $q_0 P_\Gamma(*\Phi)$  конечно и

$$\text{st}(q_0 P_\Gamma(*\Phi)) = \lim_{\Lambda_n \rightarrow \infty} P_{\Lambda_n}(\Phi)$$

для любой последовательности  $\Lambda_n$ , сходящейся к бесконечности в смысле ван Хова.

Доказательство является простой адаптацией классического рассуждения о сходимости, как оно изложено, например, в работе Israel [1], теоремы I.2.3—5, и нет нужды повторять его здесь. Мы подчеркиваем, что с нашей точки зрения мы имеем прямое определение давления для гиперконечной системы как  $\text{st}(q_0 P_\Gamma(*\Phi))$ ; это — конечное действительное число, которому в силу предложения 7.2.7 соответствует стандартное давление.

Понятие энтропии для гиперконечных систем также не представляет трудностей; мы просто используем формулу (8), приведенную выше, для определения величины  $S_\Gamma(\rho)$ . Аналогично предложению 7.2.7 мы можем отождествить нестандартную энтропию с обычной предельной последовательностью ван Хова. Но вспомним, что предложение 7.2.2 требует трансляционно-инвариантных состояний; мы имеем следующий результат.

**7.2.8. Предложение.** Пусть  $\rho$  — стандартное трансляционно-инвариантное состояние на  $\Omega$ ; тогда  $|\Gamma|^{-1} S_\Gamma(*\rho)$  — конечное гипердействительное число и

$$S(\rho) = \text{st}(|\Gamma|^{-1} S_\Gamma(*\rho)) = \lim_{\Lambda_n \rightarrow \infty} |\Lambda_n|^{-1} S_{\Lambda_n}(\rho)$$

для любой последовательности  $\Lambda_n$ , сходящейся к бесконечности в смысле ван Хова.

Конечность непосредственно следует из того обстоятельства, что  $-\ln 2 \leq |\Gamma|^{-1} S_\Gamma(*\rho) \leq 0$ ; см. (8) выше. Результат о сходимости, отождествляющий гиперконечный объект со стандартным объектом — адаптация стандартного результата о сходимости; см. теорему II.2.2 из Israel [1]. Заметим, что  $S(\rho)$  корректно определено для любого внутреннего состояния на  $\Omega_\Gamma$ ; только для результата о сходимости мы требуем, чтобы состояние имело тип  $*\rho$ , где  $\rho \in E^I$ .

**7.2.9. Замечание.** Подведем итог. Мы выбрали гиперконечный прямоугольник  $\Gamma$  как множество узлов для предельной системы. Мы ввели понятие внутреннего равновесного состояния для системы  $\Omega_\Gamma$  и проверили, что эти состояния удовлетворяют ДЛР-

уравнениям для конечных множеств  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Далее мы ввели давление и энтропию для гиперконечной системы и показали, что они равны предельным объектам стандартной теории. Таким образом, мы имеем чистое и удовлетворительное определение термодинамического предела.

Но обычное предельное пространство должно было бы быть равно  $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Однако не возникает никаких проблем в использовании функции  $\text{st}_\Gamma$  взятия стандартной части для получения состояния равновесия бесконечной системы  $\Omega$  из внутреннего состояния  $\rho_{q_0}$  на  $\Omega_\Gamma$ . Это — простое приложение конструкции Лёба. Из  $\rho_{q_0}$  мы получаем счетно-аддитивную меру  $L(\rho_{q_0})$  на  $\Omega_\Gamma$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $L(\mathcal{A})$ . Имея  $L(\rho_{q_0})$ , мы вводим состояние  $\tilde{\rho}_{q_0}$  на  $\Omega$ , полагая

$$(18) \quad \tilde{\rho}(B) = L(\rho_{q_0})(\text{st}_\Gamma^{-1} B)$$

для борелевских множеств  $B$  в  $\Omega$ . Нетрудно показать, что  $\tilde{\rho}_{q_0}$  будет удовлетворять ДЛР-уравнениям для конечных  $\Lambda$ ; таким образом,  $\tilde{\rho}_{q_0}$  — равновесное состояние для бесконечной системы  $\Omega$ .

Получили ли мы все равновесные состояния из нашей гиперконечной модели? Ответ в целом положителен, но мы должны несколько усложнить определения 7.2.3 и 7.2.4. Для простоты в оставшейся части этого параграфа мы ограничиваемся взаимодействием  $\Phi$  между ближайшими соседями.

**7.2.10. Определение.** Пусть  $\mu$  — гиперконечная вероятностная мера на  $\Omega_{\partial\Gamma}$ , где  $\partial\Gamma$  — граница множества  $\Gamma$ . *Внутреннее равновесное состояние с граничным распределением*  $\mu$  — это внутренняя вероятностная мера

$$(19) \quad \rho_\mu(q) = \sum_{q' \in \Omega_{\partial\Gamma}} \rho_{q'}(q) \mu(q'),$$

где  $\rho_{q'}$  дается равенством (12) из определения 7.2.3.

Отсюда мы получаем соответствующее обобщение определения 7.2.4.

**7.2.11. Определение.** *Равновесное состояние* для бесконечной системы  $\Omega_\Gamma$  — это произвольная вероятностная мера вида  $L(\rho_\mu)$ , где  $\rho_\mu$  — внутренняя мера из определения 7.2.10.

Аналогично равенству (18), каждому состоянию  $\rho_\mu$  можно сопоставить равновесное состояние  $\tilde{\rho}_\mu$  классической предельной системы  $\Omega$ . Теперь мы можем утверждать, что каждое стандартное равновесное состояние  $\rho$  на  $\Omega$  может быть записано в форме  $\tilde{\rho}_\mu$  для подходящей меры  $\mu$  на  $\Omega_{\partial\Gamma}$ . Это следует из того хорошо известного факта, что сужение равновесного состояния  $\rho$  системы

$\Omega$  на решетку  $\Lambda$  конечного объема может быть записано в виде

$$(20) \quad \rho_{\Lambda} = \sum_{q \in \Omega_{\partial\Gamma}} \rho_q(\cdot) \mu(q),$$

где  $\rho_q$  — гиббсовская мера на  $\Omega_{\Lambda}$  с внешней конфигурацией  $q$  на  $\Omega_{\partial\Gamma}$  и  $\mu$  — вероятностная мера на  $\Omega_{\partial\Gamma}$ . При помощи переноса получаем, что данное  $\rho$  действительно имеет вид  $\tilde{\rho}_{\mu}$  для подходящей внутренней меры  $\mu$  на  $\partial\Gamma$ . Этот результат верен не только для взаимодействий между ближайшими соседями; см. Hurd [1], где дается нестандартный вариант подхода, использующего *проективные семейства спецификаций* (по поводу стандартной теории можно справиться в книге Freston [1]).

**7.2.12. Замечание.** Комбинируя приведенные выше замечания с формулами (18) и (19), мы получаем следующее представление равновесных состояний в терминах «внешних» состояний:

$$(21) \quad \tilde{\rho}_{\mu} = \int_{\Omega_{\partial\Gamma}} \tilde{\rho}_q L(\mu)(dq);$$

т. е. по любому стандартному равновесному состоянию  $\rho$  мы можем найти такую меру  $\mu$  на  $\Omega_{\partial\Gamma}$ , что  $\rho = \tilde{\rho}_{\mu}$  можно записать в виде (21).

Это было бы «правильным» представлением в терминах (стандартных) экстремальных точек, если бы мы знали, что «экстремальные» или «чистые» в стандартном смысле состояния — это в точности состояния вида  $\tilde{\rho}_q$  для некоторого  $q \in \Omega_{\partial\Gamma}$ .

Половина этого утверждения истинна; если  $\rho$  — чистое в стандартном смысле состояние, то из представления (21) следует, что  $\rho$  имеет вид  $\rho = \tilde{\rho}_q$  для некоторого  $q \in \Omega_{\partial\Gamma}$ .

Однако имеются примеры, показывающие, что обратное может не выполняться. Для понимания следующего рассуждения читатель должен обратиться к нашему обсуждению фазовых переходов в конце этого параграфа. Известно, что в двумерной модели Изинга в отсутствие внешних полей имеется ровно два чистых состояния — при условии достаточной малости «обратной температуры»  $\beta$  — а именно,  $\tilde{\rho}_{+} = \tilde{\rho}_{+, \beta, 0}$  и  $\tilde{\rho}_{-} = \tilde{\rho}_{-, \beta, 0}$ .

Пусть  $\Gamma$  — двумерный прямоугольник с четным числом вершин на каждой стороне (см. рис. 7.1). Пусть  $q \in \Omega_{\partial\Gamma}$  — конфигурация, приписывающая  $+1$  каждой второй вершине на  $\partial\Gamma$  и  $-1$  остальным вершинам, как показано плюсами и минусами на рис. 7.1. Рассмотрим состояние  $\tilde{\rho}_q$ . Если бы оно было чистым в стандартном смысле, оно совпадало бы либо с  $\tilde{\rho}_{+}$ , либо с  $\tilde{\rho}_{-}$ . Допустим,  $\tilde{\rho}_q = \tilde{\rho}_{+}$ . При отражении относительно линии  $L$  плюсы и минусы на границе  $\partial\Gamma$  меняются местами. Это дает новое состояние  $\tilde{\rho}_{q'}$ , где  $q'$  получено из  $q$  изменением спина в каждом

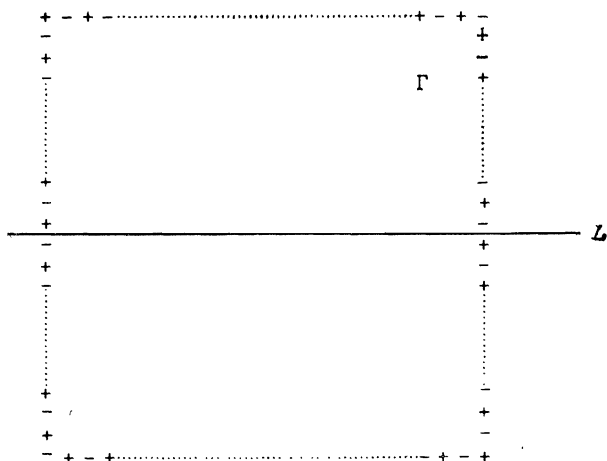


РИС. 7.1.

месте на  $\partial\Gamma$ . Изменение спинов меняет  $\tilde{\rho}_+$  на  $\tilde{\rho}_-$ , следовательно,  $\tilde{\rho}_{q'}$  должно совпадать с  $\tilde{\rho}_-$ . Но новое состояние может быть получено из старого вращением, а  $\tilde{\rho}_+$  очевидным образом не меняется при вращении. Таким образом  $\tilde{\rho}_{q'}$  также должно совпадать с  $\tilde{\rho}_+$ ; противоречие показывает, что  $\tilde{\rho}_q$  не может быть чистым в стандартном смысле. На самом деле легко видеть, что

$$\tilde{\rho}_q = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_+ + \frac{1}{2} \tilde{\rho}_-.$$

Читатель может также обсудить этот пример в терминах конечных аппроксимаций с подходящими граничными значениями.

Мы сейчас сформулируем *вариационный принцип* для гиперконечной теории. Пусть  $\rho_q(*\Phi) = \text{st}(|\Gamma|^{-1} \rho({}_q H_\Gamma^{*\Phi}))$  для внутреннего состояния  $\rho_q$  на  $\Omega_\Gamma$ .

**7.2.13. Предложение.** Пусть  $\Phi$  — взаимодействие с конечным радиусом и  $\rho_q \rightarrow$  внутреннее равновесное состояние на  $\Omega_\Gamma$ . Тогда

$$S(\rho_q) = P(*\Phi) + \rho_q(*\Phi).$$

*Доказательство* просто. При помощи переноса из предложения 7.2.1 получаем

$$S_\Gamma(\rho_q) = |\Gamma|_q P_\Gamma(*\Phi) + \rho_q({}_q H_\Gamma^{*\Phi}).$$

А это все, что нам нужно. Заметим, что как  $S(\rho_q)$ , так и  $\rho_q(*\Phi)$  не зависят от  $q$ .  $\square$

**7.2.14. Замечание.** Макроскопическая термодинамика в значительной мере основана на соотношении

$$TdS = dE + PdV.$$

В сущности это — вариационный принцип 7.2.13 для гиперконечных систем. Надлежащее отождествление мы получим, заметив, что для любой функции  $f$ , для которой предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} df(x)/dx$  существует, предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$  тоже существует и оба предела равны. Когда множество  $\Gamma$  гиперконечно, мы, следовательно, можем отождествить

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad \text{и} \quad P(*\Phi) \approx |\Gamma|^{-1} \ln Z_{\Gamma}, \\ \frac{dS}{dV} &\quad \text{и} \quad S(\rho) \approx |\Gamma|^{-1} S_{\Gamma}(\rho), \\ \frac{dE}{dV} &\quad \text{и} \quad \rho(*\Phi) \approx |\Gamma|^{-1} \rho(H_{\Gamma}^{*\Phi}), \end{aligned}$$

где в гиперконечной системе температура была включена в функцию энергии.

В заключение нашего обзора теории равновесия мы кратко обсудим *фазовые переходы*. Фазовые переходы не встречаются в конечных решетчатых системах. Мы кратко объясним, как они могут встретиться в гиперконечных системах — как своего рода явление «замены масштаба», а именно, как следствие различия между *внутренней* или *\**-дифференцируемостью и *внешней* или *S*-дифференцируемостью. Мы не будем развивать общую теорию, а ограничимся рассмотрением классической модели Изинга, и при этом будем близко следовать изложению в работе Helms, Loeb [1].

Пусть  $\Gamma$  — гиперконечная решетка,  $q$  — конфигурация из  $\Omega_{\Gamma}$  и  $q_0$  — внешнее граничное условие, т. е.  $q_0 \in \Omega_{Zd-\Gamma}^*$ . Напомним обозначение  $q \times q_0$  для комбинированной конфигурации, т. е.

$$(q \times q_0)(i) = \begin{cases} q(i), & \text{если } i \in \Gamma, \\ q_0(i), & \text{если } i \notin \Gamma. \end{cases}$$

В модели Изинга единственное внутреннее равновесное состояние с граничным условием  $q_0$  (см. определение 7.2.3) дается равенством

$$(22) \quad \rho_{q_0}(q) = Z_{\Gamma, q_0}^{-1} \exp \left( -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i, j \in \Gamma \\ |i-j|=1}} (q \times q_0)(i) (q \times q_0)(j) - h \sum_{i \in \Gamma} q(i) \right) 2^{-|\Gamma|}.$$

Здесь  $\beta$  — положительный вещественный параметр, *обратная температура*, и  $h$  — вещественный параметр, представляющий *внешнее поле*. Таким образом, мы видим, что модель Изинга на гиперконечной решетке  $\Gamma$  задается двумя параметрами  $\beta$  и  $h$ .

Мы пишем  $\rho_{q_0, \beta, h}$  для указания зависимости  $\rho_{q_0}$  от параметров  $\beta$  и  $h$ . Через  $\tilde{\rho}_{q_0, \beta, h}$  обозначается соответствующее состояние классической системы. Можно доказать следующее.

(i) Если  $h \neq 0$ , т. е. если имеется внешнее поле, все состояния  $\tilde{\rho}_{q_0, \beta, h}$  совпадают; другими словами, мы имеем только одно равновесное состояние классической системы. Это значит, что имеется только одна чистая фаза системы, и фазовый переход невозможен.

(ii) Если внешнего поля нет, т. е.  $h = 0$ , то для достаточно малых  $\beta$  все состояния  $\tilde{\rho}_{q_0, \beta, 0}$  совпадают, но для достаточно больших  $\beta$  имеется более одного экстремального состояния; т. е. фазовый переход встречается.

Наметим часть доказательства для (1). Пусть  $E_{\beta, h}^q$  обозначает ожидаемое значение относительно меры  $\rho_{q, \beta, h}$  на  $\Omega_\Gamma$ . Выделим особо два граничных условия, а именно  $q \equiv +1$  и  $q \equiv -1$ ; мы обозначаем  $\rho_{\beta, h}^\pm$  соответствующие меры и используем аналогичные обозначения для ожиданий. Точно так же мы записываем статистическую сумму как  $Z(q, \beta, h)$ .

Множество  $\Omega_X$  для любого  $X$  можно частично упорядочить, введя следующее поточечное отношение порядка  $q \leq q'$  тогда и только тогда, когда  $q(i) \leq q'(i)$  для всех  $i \in X$ . Можно показать (см. Helms, Loeb [1]), что если  $f$  не убывает на  $\Omega$  и  $-1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +1$  на  $\Omega_{*Z^d-\Gamma}$ , то

$$(23) \quad E_{\beta, h}^- [f] \leq E_{\beta, h}^{q_1} [f] \leq E_{\beta, h}^{q_2} [f] \leq E_{\beta, h}^+ [f].$$

В дальнейшем будет использоваться следующая лемма (см. Helms, Loeb [1], лемма 7):

**7.2.15. Лемма.** Если  $\beta$  и  $h$  — стандартные действительные числа, то

$$E_{\beta, h}^\pm [q(0)] \approx E_{\beta, h}^\pm \left[ |\Gamma|^{-1} \sum_{i \in \Gamma} q(i) \right].$$

Прежде всего поведение внутреннего давления  ${}_qP(\beta, h)$  определяет, будем ли мы иметь фазовый переход. Слегка видоизменив наши обозначения, будем писать

$$(24) \quad P_\pm(\beta, h) = |\Gamma|^{-1} \ln Z(\pm, \beta, h).$$

Простая оценка показывает, что  $P_+(\beta, h) \approx P_-(\beta, h)$  для всех  $h \in {}^*\mathbb{R}$ . Так же легко показать, что

$$(25) \quad \frac{d}{dh} P_{\pm}(\beta, h) = E_{\beta, h}^{\pm} \left[ |\Gamma|^{-1} \sum_{i \in \Gamma} q(i) \right] \approx E_{\beta, h}^{\pm} [q(0)],$$

где для получения последнего равенства использована лемма 7.2.15.

Основным фактом является то, что если  $h \neq 0$  и  $\beta$  фиксировано, то обе функции  $P_{\pm}$  являются  $S$ -дифференцируемыми; см. работу Helms, Loeb [1], которая близко следует стандартным изложениям Lebowitz, Martin-Löf [1] и Ruelle [1]. Это значит, что определена стандартная функция

$$(26) \quad G(h) = \text{st}(P_{\pm}(h));$$

она будет выпуклой и дифференцируемой в любой стандартной точке  $h \neq 0$ , и, кроме того,

$$G'(h) \approx P'_{\pm}(h)$$

для любого стандартного  $h \neq 0$ . Вспоминая (25), заключаем, что  $E_{h, \beta}^{+} [q(0)] \approx E_{h, \beta}^{-} [q(0)]$  для всех  $h \neq 0$ . В силу трансляционной инвариантности мы можем заключить, что  $E_{h, \beta}^{+} [q(i)] \approx \approx E_{h, \beta}^{-} [q(i)]$  для всех стандартных  $i \in \Gamma$ . Используя (23), видим, что

$$E_{\beta, h}^{q_0} [q(i)] \approx E_{\beta, h}^{+} [q(i)] \approx E_{\beta, h}^{-} [q(i)]$$

для всех внешних конфигураций  $q_0$ . Отсюда можно вывести, что  $L(p_{q_0, \beta, h}) = L(p_{+, \beta, h}) = L(p_{-, \beta, h})$  для всех внешних граничных условий  $q_0$  на  $\partial\Gamma$  и всех  $h \neq 0$ . Следовательно, все состояния  $\tilde{p}_{q_0, \beta, h}$  совпадают и мы не имеем фазового перехода.

Если внешнего поля нет, т. е. если  $h = 0$ , то приведенное рассуждение в одном месте не проходит. Так как решетка  $\Gamma$  гиперконечна, функции  $P_{\pm}$  будут  $*$ -дифференцируемыми, но оказывается, что они *не* будут  $S$ -дифференцируемыми при достаточно больших  $\beta$ . Мы можем как в (26) определить функцию  $G = \text{st}(P_{\pm})$ , но так как функции  $P_{\pm}$  не являются  $S$ -дифференцируемыми, то  $G$  не дифференцируема при  $h = 0$  для достаточно большого  $\beta$ . Этого достаточно, чтобы, используя стандартные рассуждения, показать, что  $\tilde{p}_{+, \beta, 0} \neq \tilde{p}_{-, \beta, 0}$  для достаточно большого  $\beta$ . Так как для достаточно малого стандартного  $\beta$  можно показать, что все состояния  $\tilde{p}_{q, \beta, 0}$  совпадают, то мы в самом деле имеем фазовый переход при изменении  $\beta$ .

В этом параграфе мы имели цель дать обзор малой части классической теории равновесия с гиперконечной точки зрения, в частности показать, как гиперконечная решетка дает очень



естественную модель для термодинамического предельного перехода, причем модель, сохраняющую всю явную алгебру и комбинаторику конечных моделей.

### 7.3. Глобальное марковское свойство

В этом параграфе мы будем использовать гиперконечную модель  $\Omega_\Gamma$  для обсуждения глобального марковского свойства классической предельной системы  $\Omega$ . Напомним, что важность глобального марковского свойства обусловлена тем обстоятельством, что оно позволяет ввести некоторую полугруппу, дающую довольно полное вероятностное описание системы; см., например, Alberverio, Нøegh-Krohn [13], [14] и Alberverio, Нøegh-Krohn, Olsen [1]. Мы также напоминаем читателю о важности глобального марковского свойства в случае евклидовой теории поля, где инфинитезимальный генератор, получающийся из полугруппы, дает гамильтониан соответствующей теории Гординга — Вайтмана; см. Nelson [2], Simon [1] и Alberverio, Нøegh-Krohn [13].

**7.3.1. Замечание.** Читатель должен отметить, что полугруппа, обсуждаемая в связи с марковским свойством — это не та «внешняя» полугруппа, которая была введена в § 7.1 для описания эволюции стохастической решетчатой системы.

Грубо говоря, марковское свойство заключается в следующем. Пусть  $\Phi$  — взаимодействие с конечным радиусом и пусть  $\mathbb{Z}^d$  представлено в виде объединения непересекающихся множеств

$$\mathbb{Z}^d = \Lambda_1 \cup C \cup \Lambda_2,$$

где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — подмножества в  $\mathbb{Z}^d$ , расстояние между которыми превосходит радиус взаимодействия  $\Phi$ ; т. е.  $C$  «изолирует»  $\Lambda_1$  от  $\Lambda_2$  относительно взаимодействия  $\Phi$ . Пусть  $\rho$  — равновесное состояние для бесконечной системы;  $E_\rho(\cdot)$  обозначает математическое ожидание относительно  $\rho$ . Мы обозначаем  $E_\rho(\cdot | C)$  условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_C$ , порожденной проектированиями  $f_i(q) = q(i)$ ,  $i \in C$ .

Если для каждого *конечного*  $\Lambda_1$  справедливо равенство

$$(1) \quad E_\rho(f_1 f_2 | C) = E_\rho(f_1 | C) E_\rho(f_2 | C),$$

где функции  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  органичны и  $\mathcal{B}_{\Lambda_i}$ -измеримы, то говорят, что гиббсовское состояние  $\rho$  обладает *локальным марковским свойством*. Мы говорим, что  $\rho$  обладает *глобальным марковским свойством*, если (1) выполнено для *всех*  $\Lambda_1, \Lambda_2$ .

В заключительной части этого параграфа мы также обсудим случай неограниченного слоя  $\mathbb{R}$  вместо  $\{-1, +1\}$  в определении конфигурационного пространства.

### А. Гиперконечное марковское свойство

Мы начнем с обсуждения марковского свойства на гиперконечной решетке  $\Gamma$ . Глобальное марковское свойство для классической системы тесно связано с «поведением на бесконечности» рассматриваемой системы. Мы думаем, что гиперконечный подход, который позволяет нам *видеть*, что происходит на бесконечности, является интересной альтернативой стандартному предельному подходу.

Для простоты мы ограничимся взаимодействиями  $\Phi$  между ближайшими соседями. Результаты без труда переносятся на случай произвольного взаимодействия с конечным радиусом. Пусть  $\Gamma$  — гиперконечная решетка и  $\rho_{q_0}$  — чистое внутреннее равновесное состояние на  $\Omega_\Gamma$  относительно взаимодействия  $\Phi$  между ближайшими соседями, см. определение 7.2.3; здесь  $q_0$  — граничное, или внешнее условие на  $\Gamma^c = \mathbb{Z}^d - \Gamma$ , фиксирующее состояние. Пусть  $\Gamma$  записано в виде объединения непересекающихся множеств  $\Gamma = \Lambda_1 \cup C \cup \Lambda_2$ , где  $C$  — это «кривая», разделяющая  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ ; т. е.  $C$  — общая граница множеств  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  внутри  $\Gamma$ .

Пусть  $f_1$  — внутренняя функция на  $\Omega_\Gamma$ , независимая от  $\Lambda_2$ ; т. е. если  $q$  и  $q'$  отличаются только в точках из  $\Lambda_2$ , то  $f_1(q) = f_1(q')$ . Пусть аналогичным образом  $f_2$  не зависит от  $\Lambda_1$ . Мы обозначаем через  $E(\cdot)$  (гиперконечное) математическое ожидание относительно внутренней меры  $\rho_{q_0}$  и через  $E(\cdot|C)$  — соответствующее условное математическое ожидание. Мы хотим доказать следующее *гиперконечное марковское свойство*:

**7.3.2. Предложение.**  $E(f_1 f_2 | C) = E(f_1 | C) E(f_2 | C)$ .

Убедимся в истинности предложения при помощи простого гиперконечного вычисления. Для начала выпишем явную формулу для условного математического ожидания. Пусть  $q_C$  — конфигурация на кривой раздела  $C$ , т. е.  $q_C \in \Omega_C$ . Обозначим через  $q_C \times \Omega_{\Gamma-C}$  множество всех конфигураций  $q \in \Omega_\Gamma$ , которые согласуются с  $q_C$  на  $C$ . Можно записать

$$(2) \quad \Omega_\Gamma = \bigcup_{q_C \in \Omega_C} q_C \times \Omega_{\Gamma-C},$$

причем все объединяемые множества не пересекаются. Условное математическое ожидание теперь может быть записано в виде

$$(3) \quad E(f|C) = \sum_{q_C \in \Omega_C} \frac{\sum_{q \in q_C \times \Omega_{\Gamma-C}} f(q) \rho_{q_0}(q)}{\rho_{q_0}(q_C \times \Omega_{\Gamma-C})} \chi_{q_C \times \Omega_{\Gamma-C}},$$

где  $\chi_{q_C \times \Omega_{\Gamma-C}}$  — характеристическая функция множества  $q_C^\circ \times \Omega_{\Gamma-C}$ . Заметим, что  $E(f|C)$  как функция от  $q \in \Omega_\Gamma$  зависит только от поведения  $q$  на  $C$ ; таким образом, для любого  $q_C \in \Omega_C$  имеет смысл выражение  $E(f|C)(q_C)$  и мы видим, что

$$(4) \quad E(f|C)(q_C) = \sum_{q \in q_C \times \Omega_{\Gamma-C}} f(q) \rho_{q_0}(q|q_C) = E_{q_C}(f),$$

где  $\rho_{q_0}(q|q_C)$  — условная вероятностная мера, получающаяся из  $\rho_{q_0}$ , и  $E_{q_C}$  — обозначение для математического ожидания относительно этой меры.

Любой элемент  $q \in \Omega_\Gamma$  может быть записан в виде  $q = q_1 \times q_2 \times q_C$ , где  $q_i \in \Omega_{\Lambda_i}$  и  $q_C \in \Omega_C$ . Мера  $\rho_{q_0}(\cdot|q_C)$  индуцирует меры на  $\Omega_{\Lambda_1}$  и  $\Omega_{\Lambda_2}$  посредством формул

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho_{\Lambda_1}(q_1) &= \rho_{q_0}(q_1 \times \Omega_{\Lambda_2} \times q_C | q_C), \\ \rho_{\Lambda_2}(q_2) &= \rho_{q_0}(\Omega_{\Lambda_1} \times q_2 \times q_C | q_C), \end{aligned}$$

где, например,  $q_1 \times \Omega_{\Lambda_2} \times q_C$  — множество всех таких конфигураций  $q$  из  $\Omega_\Gamma$ , что  $q \upharpoonright \Lambda_1 \cup C = q_1 \times q_C$ . Явное вычисление дает следующее свойство расщепления:

$$(6) \quad \rho_{q_0}(q_1 \times q_2 \times q_C | q_C) = \rho_{\Lambda_1}(q_1) \rho_{\Lambda_2}(q_2).$$

Как видно из равенства (4), для доказательства предложения достаточно показать, что  $E_{q_C}(f_1 f_2) = E_{q_C}(f_1) E_{q_C}(f_2)$  для всех  $q_C \in \Omega_C$ . Последнее равенство получается прямым вычислением с использованием формулы (6):

$$\begin{aligned} E_{q_C}(f_1 f_2) &= \sum_{q \in q_C \times \Omega_{\Gamma-C}} f_1(q) f_2(q) \rho_{q_0}(q|q_C) = \\ &= \sum_{\substack{q_1 \in \Omega_{\Lambda_1} \\ q_2 \in \Omega_{\Lambda_2}}} f_1(q_1) f_2(q_2) \rho_{\Lambda_1}(q_1) \rho_{\Lambda_2}(q_2) = \\ &= E_{q_C}(f_1) E_{q_C}(f_2). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство предложения 7.3.2.  $\square$

**Замечание.** *Локальное марковское свойство* для предельного пространства  $\Omega$  — непосредственное следствие гиперконечного марковского свойства 7.3.2. В следующем разделе мы обсудим, говорит ли гиперконечный вариант что-либо о глобальном марковском свойстве.

### В. Поднятие и глобальное марковское свойство

Мы сейчас объясним, как можно использовать это простое гиперконечное вычисление для обсуждения глобального марковского свойства на  $\Omega$ .

Нам дано взаимодействие  $\Phi$  между ближайшими соседями на  $\Omega$ . При помощи переноса получаем взаимодействие  $^*\Phi$  между ближайшими соседями на  $\Omega_\Gamma$ , где  $\Gamma = \Gamma_\kappa = \{x \in {}^*\mathbb{Z}^d \mid |x_i| < \kappa, i = 1, \dots, d\}$  для некоторого  $\kappa \in \mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Пусть  $\rho_{q_0}$  — внутреннее состояние для  $\Omega_\Gamma$ , где  $q_0 \in \Omega_{\Gamma C}$ . Из  $\rho_{q_0}$  мы получаем при помощи конструкции Лёба состояние  $L(\rho_{q_0})$ . Как объяснялось в § 7.2,  $L(\rho_{q_0})$  индуцирует меру  $\tilde{\rho}_{q_0}$  на  $\Omega$ , определенную равенством

$$(7) \quad \tilde{\rho}_{q_0}(B) = L(\rho_{q_0})(\text{st}_\Gamma^{-1}B),$$

где  $B$  — борелевское множество из  $\Omega$ . Мера  $\tilde{\rho}_{q_0}$  — равновесное состояние для классической системы  $\Omega$ .

Запишем  $\mathbb{Z}^d$  в виде объединения непересекающихся множеств  $\mathbb{Z}^d = \Lambda_1 \cup C \cup \Lambda_2$ , где  $C$  — общая граница для  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Множество  $C$  имеет расширение  $^*C_\Gamma = {}^*C \cap \Gamma$ , разбивающее множество  $\Gamma$  следующим образом:  $\Gamma = \Lambda'_1 \cup {}^*C_\Gamma \cup \Lambda'_2$ , где  $\Lambda'_1, \Lambda'_2$  таковы, что взаимодействие между ними относительно  $^*\Phi$  отсутствует. Пусть  $f \in C(\Omega)$ , и  $^*f_\Gamma$  — продолжение этой функции из  $\Gamma$ , определенное равенством  $^*f_\Gamma(q) = f(q \times q_0)$ ,  $q \in \Omega_\Gamma$ .

Как и выше,  $E(\cdot | {}^*C_\Gamma)$  обозначает внутреннее гиперконечное условное математическое ожидание относительно меры  $\rho_{q_0}$  и внутренней алгебры  $\mathcal{A}_{^*C_\Gamma}$ , порожденной непересекающимся семейством множеств  $q_{^*C_\Gamma} \times \Omega_{\Gamma - ^*C_\Gamma}$ ,  $q_{^*C_\Gamma} \in \Omega_{^*C_\Gamma}$ . Мы будем обозначать через  $E^{(s)}(\cdot | {}^*C_\Gamma)$  условное математическое ожидание относительно меры  $L(\rho_{q_0})$  и  $\sigma$ -алгебры Лёба  $L(\mathcal{A}_{^*C_\Gamma})$ . Из предложения 3.2.12 нам известно, что ожидание  $E(^*f_\Gamma | {}^*C_\Gamma)$  является *поднятием* ожидания  $E^{(s)}(^{\circ}f_\Gamma | {}^*C_\Gamma)$ , т. е.

$$(8) \quad {}^{\circ}E(^*f_\Gamma | {}^*C_\Gamma) = E^{(s)}(^{\circ}f_\Gamma | {}^*C_\Gamma)$$

для множества полной  $L(\rho_{q_0})$ -меры. Таким образом, мы имеем картину, изображенную на рис. 7.2. Пусть  $f$  и  $g$  — ручные функции с носителями в  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Из § 7.3.A известно, что имеет место следующее расщепление:

$$E(^*f_\Gamma \cdot ^*g_\Gamma | {}^*C_\Gamma) = E(^*f_\Gamma | {}^*C_\Gamma) \cdot E(^*g_\Gamma | {}^*C_\Gamma),$$

которое в силу равенства (8) влечет за собой «глобальное» марковское свойство на  $\Gamma$  относительно кривой  $^*C_\Gamma$ . Но нас интересует глобальное марковское свойство на  $\mathbb{Z}^d$ , и непонятно, как

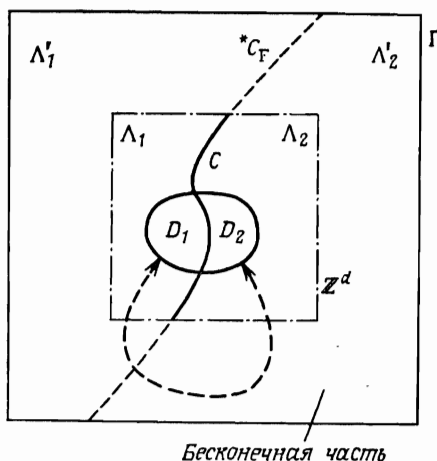


РИС. 7.2.

результаты для  $\Gamma$  могут быть «опущены» на  $\mathbb{Z}^d$ . При достаточно сильном взаимодействии  $\Phi$  возможно взаимное влияние между  $D_1$  и  $D_2$  через бесконечную часть. В технических терминах: непонятно, является ли условное математическое ожидание  $E^{(s)}(\cdot | *C_\Gamma)$  на  $\Omega_\Gamma$  «в сущности тем же», что и условное математическое ожидание  $E(\cdot | C)$  на  $\Omega$  относительно меры  $\tilde{p}_{q_0}$  и алгебры  $\mathcal{B}_C$ .

Имеется много способов управления поведением «на бесконечности». Мы начнем с обсуждения понятия поднятия.

**7.3.3. Определение.** Внутреннее условное математическое ожидание  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  называется *C-поднятием*, если существует такое множество  $N \subset \Omega_\Gamma$ , являющееся  $L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ -измеримым и удовлетворяющее условию  $L(\rho_{q_0})(N) = 0$ , что при  $q_\Gamma, q'_\Gamma \notin N$  и  $\text{st}_\Gamma q_\Gamma = \text{st}_\Gamma q'_\Gamma$  для всех ручных функций  $f$  на  $\Omega$  выполнено соотношение

$$(9) \quad E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q_\Gamma) \approx E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q'_\Gamma).$$

Мы должны показать, что если  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  — *C-поднятие* в смысле определения 7.3.3, то оно — поднятие условного математического ожидания  $E(\cdot | C)$  на  $\Omega$ .

При  $q \in \Omega$  пусть  $\mu(q) = \{q'_\Gamma \in \Omega_\Gamma | \text{st}_\Gamma q'_\Gamma = q\}$  — *монада* элемента  $q$ . Пусть  $h(q_\Gamma)$  — функция

$$(10) \quad h(g_\Gamma) = E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q_\Gamma),$$

где  $f \in C(\Omega)$  — ручная функция. Как было замечено выше, из предложения 3.2.12 следует, что  $h(q_\Gamma) \approx E^{(s)}({}^\circ(*f_\Gamma) | {}^*C_\Gamma)(q_\Gamma)$  для  $L(\rho_{q_0})$ -почти всех  $q_\Gamma \in \Omega_\Gamma$ .

Теперь предположим, что  $E(\cdot | {}^*C_\Gamma)$  —  $C$ -поднятие в смысле определения 7.3.3. Тогда можно ввести следующую функцию  $g$  на  $\Omega$ :

$$(11) \quad g(q) = \begin{cases} \text{st}(h(q'_\Gamma)), & \text{если } \mu(q) \not\subset N \text{ и } q'_\Gamma \in \mu(q) - N, \\ 0, & \text{если } \mu(q) \subset N. \end{cases}$$

В силу соотношения (9) значение  $g(q)$  не зависит от выбора представителя  $q'_\Gamma \in \mu(q) - N$ .

**7.3.4. Предложение.** *Функция  $g$  — одна из версий условного математического ожидания на  $\Omega$  относительно меры  $\tilde{\rho}_{q_0}$  и алгебры  $\mathcal{B}_C$ .*

Мы знаем, что  $E^{(s)}(\cdot | {}^*C_\Gamma)$  измеримо относительно  $\sigma$ -алгебры Лёба  $L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ . Читатель может непосредственно проверить или вывести из общей теории § 3.4, что имеется следующая связь между  $\sigma$ -алгебрами  $\mathcal{B}_C$  и  $L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ :

(i) если  $B \in \mathcal{B}_C$ , то  $\text{st}_\Gamma^{-1}(B) \in L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ ,

(ii) если  $B \subset \Omega$  и  $\text{st}_\Gamma^{-1}(B) \in L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ , то  $B \in \mathcal{B}_C$ .

Чтобы показать  $\mathcal{B}_C$ -измеримость функции  $g$ , достаточно показать, что если  $q_1, q_2 \in \Omega$  имеют одно и то же ограничение на кривую  $C$ , т. е.  $q_1 \upharpoonright C = q_2 \upharpoonright C$ , то  $\mu(q_1) \subset N$  тогда и только тогда, когда  $\mu(q_2) \subset N$ .

Доказательство просто. Пусть  $\hat{q}_1 \in \mu(q_1) - N$ ; нам нужно найти  $\hat{q}_2 \in \mu(q_2) - N$ . Положим

$$\hat{q}_2(i) = \begin{cases} {}^*q_2(i) & \text{при } i \in \Gamma - {}^*C_\Gamma, \\ \hat{q}_1(i) & \text{при } i \in {}^*C_\Gamma. \end{cases}$$

Поскольку множество  $N$  является  $L(\mathcal{A}_{*C_\Gamma})$ -измеримым,  $\hat{q}_1 \notin N$  и  $\hat{q}_1$  и  $\hat{q}_2$  совпадает на  ${}^*C_\Gamma$ , мы видим, что  $\hat{q}_2 \notin N$ . Более того из совпадения  $q_1$  с  $q_2$  на  $C$  следует, что  $\hat{q}_2 \upharpoonright C = \hat{q}_1 \upharpoonright C = q_1 \upharpoonright C = q_2 \upharpoonright C$ , откуда  $\hat{q}_2 \in \mu(q_2)$ . Дальнейшее делается по симметрии.

Завершая доказательство предложения 7.3.4, возьмем любое ручное множество  $B$  из  $\mathcal{B}_C$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_B g \tilde{\rho}_{q_0}(dq) &= \int_{\text{st}_\Gamma^{-1}B} E^{(s)}({}^\circ(*f_\Gamma) | {}^*C_\Gamma) L(\rho_{q_0})(dq) = \\ &= \int_{\text{st}_\Gamma^{-1}B} {}^\circ(*f_\Gamma) L(\rho_{q_0})(dq) = \int_B f \tilde{\rho}_{q_0}(dq). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем взять  $g$  в качестве версии условного математического ожидания  $E(\cdot | C)$ .  $\square$

Комбинируя предложения 7.3.2 и 7.3.4, получаем доказательство следующей теоремы.

**7.3.5. Теорема.** *Состояние  $\tilde{\rho}_{q_0}$  обладает глобальным марковским свойством относительно  $C$ , если  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  является  $C$ -поднятием.*

Эта теорема, доказанная в работе Kessler [1], является обобщением более раннего результата, теоремы 7.3.7, где условие поднятия заменено более сильным условием  $S$ -непрерывности. Мы обсудим это в следующем разделе. Будем говорить, что состояние  $\tilde{\rho}_{q_0}$  удовлетворяет *условию поднятия*, если  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  является  $C$ -поднятием для всех  $C$ .

Но прежде чем продолжать, заметим, что *условие поднятия не является необходимым для глобального марковского свойства*. В работе Goldstein [1] введено так называемое «условие  $C$ », которое представляет еще один способ управления поведением на бесконечности и дает глобальное марковское свойство; см. также Föllmer [2]. В упомянутой работе Кесслера показано, что условие поднятия и условие  $C$  несравнимы, т. е. ни из одного из них не следует другое.

В той же работе дается гиперконечный вариант условия  $C$ , который мы коротко обсудим. Выберем такие  $\kappa, \lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $\kappa - \lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , и рассмотрим гиперконечные решетки  $\Gamma = \Gamma_\kappa$  и  $\Gamma' = \Gamma_\lambda$ . Мы в «стандартной» ситуации; т. е.  $\mathbb{Z}^d$  представлено в виде объединения непересекающихся множеств  $\mathbb{Z}^d = \Lambda_1 \cup C \cup \Lambda_2$ , где  $C$  — «кривая», разделяющая  $\Lambda_1, \Lambda_2$  относительно взаимодействия  $\Phi$  между ближайшими соседями. Наше основное пространство конфигураций — это  $\Omega_\Gamma$ ;  $\rho_{\Gamma, q_0}$  обозначает внутреннее равновесное состояние на  $\Omega_\Gamma$ , определенное граничным условием  $q_0$ .

Обозначим через  $(q_0, q')$  конфигурацию, равную  $q'$  на  $*C_{\Gamma'} = *C_\Gamma \cap \Gamma'$  и равную  $q_0$  на  $(\Gamma - \Gamma') \cap \Lambda'_2$ , где, как и выше,  $\Lambda'_2$  — расширение множества  $\Lambda_2$  на  $\Gamma$ . Тогда  $\rho_{\Gamma' \cap \Lambda'_2, (q_0, q')}$  — внутренняя равновесная мера на  $\Omega_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}$  с внешним условием  $(q_0, q')$ . Определим

$$(12) \quad \rho_{\Gamma, \Gamma', \Lambda'_2, q_0}(B_1 \cap B_2) = \sum_{q' \in B_1} \rho_{\Gamma, q_0}(q') \rho_{\Gamma' \cap \Lambda'_2, (q_0, q')}(B_2),$$

где множество  $B_2$  является  $\mathcal{A}_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}$ -измеримым, а множество  $B_1$  является  $\mathcal{A}_{\Gamma - (\Gamma' \cap \Lambda'_2)}$ -измеримым.

**Замечание.** Если  $B_1 = q'_{\Gamma-(\Gamma' \cap \Lambda'_2)} \times \Omega_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}$  и  $B_2 = \Omega_{\Gamma-(\Gamma' \cap \Lambda'_2)} \times q_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}$ , то множество  $B_1 \cap B_2$  состоит из одного элемента  $q' = q'_{\Gamma-(\Gamma' \cap \Lambda'_2)} \times q_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}$  и

$$(13) \quad \rho_{\Gamma, \Gamma', \Lambda'_2, q_0}(q') = \rho_{\Gamma, q_0}(q'_{\Gamma-(\Gamma' \cap \Lambda'_2)} \times \Omega_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}) \times \times \rho_{\Gamma' \cap \Lambda'_2, (q_0, q')}(q'_{\Gamma' \cap \Lambda'_2}).$$

Таким образом, мы видим, что мера  $\rho_{\Gamma, \Gamma', \Lambda'_2, q_0}$  «близка» к  $\rho_{\Gamma, q_0}$ , но представляет другой способ управления поведением на бесконечности. И если эти меры «не слишком» различаются, они могут иметь совпадающие стандартные части.

**7.3.6. Определение.** Пусть  $\Gamma = \Gamma_\kappa$  для некоторого бесконечно большого  $\kappa$  и  $\rho_{\Gamma, q_0}$  — внутренняя равновесная мера на  $\Omega_\Gamma$ . Говорят, что мера  $\rho_{\Gamma, q_0}$  удовлетворяет *условию C*, если существует такое  $\lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $\kappa - \lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и

$$\tilde{\rho}_{\Gamma, q_0} = \tilde{\rho}_{\Gamma, \Gamma', \Lambda'_2, q_0},$$

где  $\Gamma' = \Gamma_\lambda$ .

Голдстейн (Goldstein [1]) показал, что любая мера  $\tilde{\rho}_{\Gamma, q_0}$ , удовлетворяющая условию C, обладает глобальным марковским свойством. Кесслер (Kessler [1], [2]) построил примеры мер вида  $\tilde{\rho}_{\Gamma, q_0}$ , не удовлетворяющие глобальному марковскому свойству и, следовательно, не удовлетворяющие условию C. Другие работы на ту же тему — Weizsacker [1] и Higuchi [1].

Теперь мы коротко объясним, почему условие C влечет за собой глобальное марковское свойство. Даже если мы не имеем поднятия в смысле определения 7.3.3, мы можем показать, что для любой ручной функции  $g$  существуют такие бесконечно большие  $\eta$  в  ${}^*\mathbb{N}$   $\eta \leq \kappa$ , что  $E_{\rho_{\Gamma, q_0}}(g | {}^*C_{\Gamma_\eta})$  является поднятием (обратите внимание, что условное математическое ожидание как функция зависит только от узлов из  ${}^*C_{\Gamma_\eta} = {}^*C_\Gamma \cap \Gamma_\eta$ ), и множество таких  $\eta$  образует начальный сегмент.

Условие C теперь может быть использовано (Kessler [1]) для того, чтобы показать, что для любого  $\lambda_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  существует  $\lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ,  $\lambda \leq \lambda_0$ , для которого имеет место правильный тип расщепления

$$E_{\rho_{\Gamma, q_0}}(f_1 \cdot f_2 | {}^*C_{\Gamma_\lambda}) \approx E_{\rho_{\Gamma, q_0}}(f_1 | {}^*C_{\Gamma_\lambda}) \cdot E_{\rho_{\Gamma, q_0}}(f_2 | {}^*C_{\Gamma_\lambda}).$$



Собрав все эти факты вместе, при помощи теории меры можно получить глобальное марковское свойство; подробности изложены в цитируемой работе (Kessler [1]).

Для получения из условия  $C$  правильного разбиения мы используем гиперконечное марковское свойство 7.3.2 с надлежащим выбором мер  $\rho_\Gamma, \Gamma_\xi, \Lambda'_2, q_0$  для некоторого  $\xi$ .

*C. S-непрерывность, условие Добрушина  
и глобальное марковское свойство*

Напомним, что  $S$ -непрерывность функции  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  означает, что

$$(14) \quad E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q_\Gamma) \approx E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q'_\Gamma)$$

как только  $\text{st}_\Gamma q_\Gamma = \text{st}_\Gamma q'_\Gamma$ . Таким образом, из  $S$ -непрерывности следует свойство поднятия и мы имеем следующую теорему.

**7.3.7 Теорема.** *Состояние  $\tilde{\rho}_{q_0}$  обладает глобальным марковским свойством относительно множества  $C$ , если функция  $E(\cdot | *C_\Gamma)$  является  $S$ -непрерывной.*

Обратное утверждение неверно; свойство поднятия не влечет за собой  $S$ -непрерывности; контрпример приведен в работе Kessler [1]. Меры, которые построены в этой работе, не являются трансляционно-инвариантными, поэтому остается интересная задача исследования связи между условием поднятия, условием  $C$  и  $S$ -непрерывностью в случае трансляционно-инвариантных мер.

Поднятие и  $S$ -непрерывность — довольно «абстрактные» свойства меры  $\rho_{q_0}$ . В этом разделе мы приведем пример Добрушина [1], [2], в котором  $S$ -непрерывность выводится из условия, наложенного на взаимодействие  $\Phi$ . Мы продолжаем использовать обозначения предыдущего раздела.

Пусть  $\Gamma' = \Gamma - *C_\Gamma$ . Зафиксируем конфигурацию  $q_{*C_\Gamma}$  на  $*C_\Gamma$ . Мы будем рассматривать внутренние равновесные состояния  $\rho'_q$  на  $\Omega_{\Gamma'}$  с граничными условиями, равными  $q_0$  на  $\Gamma^c$  и  $q_{*C_\Gamma}$  на  $*C_\Gamma$ . Любая ручная функция  $f \in C(\Omega)$  продолжается до внутренней функции как на  $\Omega_\Gamma$ , так и на  $\Omega_{\Gamma'}$ ; обозначим эти продолжения через  $*f_\Gamma$  и  $*f_{\Gamma'}$  соответственно. Заметим, что при  $q \in \Omega_{\Gamma'}$  мы имеем  $*f_{\Gamma'}(q) = *f_\Gamma(q \times q_{*C_\Gamma}) = *f(q \times q_{*C_\Gamma} \times q_0)$ . Легко видеть (см. (4) выше), что

$$(15) \quad E_{\rho'_q}(*f_{\Gamma'}) = E(*f_\Gamma | *C_\Gamma)(q_{*C_\Gamma}).$$

Мы сейчас опишем способ вычисления математического ожидания  $E_{\rho'_q}(*f_{\Gamma'})$ , который при подходящих допущениях о потен-

циале взаимодействия  $\Phi$  не зависит от поведения на бесконечности; таким образом мы получим  $S$ -непрерывность функции  $E(\cdot | \cdot^* C_\Gamma)$ .

**7.3.8. Замечание.** Единственность гиббсовских, или равновесных, мер была впервые доказана Добрушиным [1], [2]. Связь между глобальным марковским свойством и единственностью была замечена по разным поводам (см., например, Alberverio, Nøegh-Krohn, Olsen [1] и Föllmer [2]) и использовалась для доказательства глобального марковского свойства решетчатых систем. Настоящее изложение несколько по-другому упорядочивает факты.

Для всех  $i \in \mathbb{Z}^d - C$  и  $q^* \in q_{*C_\Gamma} \times \Omega_\Gamma$ , пусть  $\rho_i(\cdot | q^*)$  — равновесная мера в узле  $i$  с граничным условием  $q^*$ . Далее, обозначим  $t_i(f)(q^*)$  математическое ожидание функции  $f$  относительно меры  $\rho_i(\cdot | q^*)$ .

Зафиксируем нумерацию  $i_1, i_2, \dots$  узлов из  $\mathbb{Z}^d - C$ . Легко видеть, что для каждого  $f \in C(\Omega_{\mathbb{Z}^d - C})$

$$(16) \quad Tf = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{i_1} \dots t_{i_n} f$$

существует (и на самом деле не зависит от нумерации узлов).

Рассмотрим норму

$$(17) \quad \|f\| = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d - C} \sup \{ |f(q) - f(q')| \},$$

где супремум берется по всем таким парам  $q, q' \in q_{*C_\Gamma} \times \Omega_\Gamma$ , что  $q = q'$  вне  $i$ , т. е.  $q(j) = q'(j)$  для всех  $j \neq i$ .

**7.3.9. Предложение.** Пусть

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \sup \{ \|\rho_i(\cdot | q) - \rho_j(\cdot | q')\|_{\text{var}} \},$$

где супремум берется по всем таким парам  $q, q' \in q_{*C_\Gamma} \times \Omega_\Gamma$ , что  $q = q'$  вне  $i$ . Определим

$$\alpha = \sup_i \sum_j \rho_{ij},$$

где  $i, j \in \mathbb{Z}^d - C$ . Если  $\alpha < 1$ , то

$$\|Tf\| < \alpha \cdot \|f\|.$$

Следующее простое наблюдение объясняет последнее неравенство. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — вероятностные меры на некотором (одном и том же) пространстве и пусть  $E_{\mu_1}$  и  $E_{\mu_2}$  — соответствующие математические ожидания; тогда

$$|E_{\mu_1}(f) - E_{\mu_2}(f)| \leq \frac{1}{2} \|\mu_1 - \mu_2\|_{\text{var}} \cdot (\sup f - \inf f).$$

Путь от этого неравенства до предложения описан в работе Gross [2].

Итерация преобразования  $T$  показывает, что  $\|T^n f\| \leq \alpha^n \|f\|$ . Нетрудно видеть (см. Gross [2]), что  $T^n f$  будет равномерно сходиться к некоторому числу  $E(f)$ .

Теперь мы можем собрать куски доказательства воедино. С  $\rho'_q$  ассоциирована такая мера  $\bar{\rho}'_q$  на  $\Omega_{\mathbb{Z}^d - C}$  (см. (7)), что для любого  $f \in C(\Omega)$

$$(18) \quad E_{\rho'_q}(*f_{\Gamma'}) \approx E_{\bar{\rho}'_q}(f).$$

Из того, что  $\rho'_q$  — внутренняя равновесная мера, следует, что для всех  $i \in \mathbb{Z}^d - C$

$$(19) \quad E_{\bar{\rho}'_q}(t_i f) = E_{\bar{\rho}'_q}(f).$$

Отсюда можно заключить, что

$$(20) \quad E_{\rho'_q}(*f_{\Gamma'}) \approx E_{\bar{\rho}'_q}(T^n f),$$

и так как  $T^n f$  равномерно сходится к константе  $E(f)$ , из (15) и (20) следует, что

$$(21) \quad E(*f_{\Gamma} | *C_{\Gamma})(q_{*C_{\Gamma}}) \approx E(f).$$

Так как  $E(j)$  не зависит от бесконечной части конфигурации  $q_{*C_{\Gamma}}$ ,  $S$ -непрерывность при допущениях предложения 7.3.9 доказана.  $\square$

**7.3.10. Замечание.** Условие  $\alpha < 1$  является условием на взаимодействие  $\Phi$ . Сделаем это явным. Вначале напомним, что для каждого конечного подмножества  $X \subset \mathbb{Z}^d$  выполнено  $\Phi(X) \in C(\Omega_X)$ . Обозначим через  $\|\Phi\|_{\infty}$  норму

$$(22) \quad \|\Phi\|_{\infty} = \sup_i \sum_{X \ni i} (|X| - 1) \|\Phi(X)\|_{\infty}.$$

Далее, введем меру общей силы взаимодействия между узлами  $i, j, i \neq j$ :

$$(23) \quad \xi(i, j) = \sup_q \left| \sum_{X \ni \{i, j\}} \Phi(X)(q) \right|.$$

Заметим, что

$$\sum_{i \neq j} \xi(i, j) \leq \sum_{X \ni i} (|X| - 1) \|\Phi(X)\|_{\infty}.$$

Следующее неравенство несмотря на свою простоту является основным. Пусть  $i \neq j$  и  $q = q'$  вне  $j$ ; тогда

$$\|\rho_i(\cdot | q) - \rho_j(\cdot | q')\|_{\text{var}} \leq e^{A_{ij}^*(i, j)} - 1.$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\rho_{ij} \leq 2e^{4\|\Phi\|_\infty} \zeta(i, j).$$

Вспоминая определение величины  $\alpha$  из предложения 7.3.9, мы видим, что

$$(24) \quad \alpha \leq 2e^{4\|\Phi\|_\infty} \|\Phi\|_\infty.$$

Заметим, что если  $\|\Phi\|_\infty < (2e)^{-1}$ , то  $\alpha < 1$ , откуда следует  $S$ -непрерывность функции  $E(\cdot | *C_\Gamma)$ .

Если взаимодействие  $\Phi$  удовлетворяет неравенству  $\|\Phi\|_\infty < (2e)^{-1}$ , то существует единственная равновесная мера на классической системе  $\Omega$ . В этом случае граничное условие  $q_0$  в мере  $\rho_{q_0}$  на  $\Omega_\Gamma$  оказывает не более чем бесконечно малое действие в пространстве  $\Omega$ ; т. е. все меры  $\bar{\rho}_{q_0}$ ,  $q_0 \in \Omega_{\Gamma^c}$ , совпадают.

**7.3.11. Теорема.** Пусть  $\Phi$  — взаимодействие с конечным радиусом, удовлетворяющее неравенству  $\|\Phi\|_\infty < (2e)^{-1}$ . Тогда единственная равновесная мера на  $\Omega$  удовлетворяет глобальному марковскому свойству.

Простое гиперконечное вычисление из предложения 7.3.2,  $S$ -непрерывность, которую мы проверили при указанном условии на взаимодействие  $\Phi$ , и теорема 7.3.7 дают доказательство теоремы.  $\square$

**7.3.12. Замечание.** Допущение теоремы 7.3.11 является частным случаем «условия сильной единственности» для взаимодействия  $\Phi$ . Пусть  $\alpha$  — произвольная мера на  $\Omega$ , равная произведению мер  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$ , где  $\alpha_i$  — мера на слое  $\{-1, +1\}$ . Говорят, что  $\Phi$  обладает *сильным свойством единственности*, если для всех мер-произведений  $\alpha$  существует не более одного состояния равновесия для взаимодействия  $\Phi + \Psi_\alpha$ , где  $\Psi_\alpha$  — взаимодействие, ассоциированное с мерой  $\alpha$ .

Сильная единственность влечет за собой  $S$ -непрерывность; детали см. в работе Kessler [2].

#### Д. Максимальные и минимальные гиббсовские состояния

Мы опишем еще одну ситуацию, когда имеется глобальное марковское свойство. Пространство конфигураций  $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  обладает естественным упорядочением

$$(25) \quad q \leq q' \text{ тогда и только тогда, когда} \\ q(i) \leq q'(i) \text{ для всех } i \in \mathbb{Z}^d.$$

Обозначим через  $K_+$  множество ограниченных неубывающих измеримых функций на  $\Omega$ ; тогда  $K_+$  является выпуклым конусом

и определяет порядок на  $\Omega$  в том смысле, что

$$(26) \quad q \leq q' \text{ тогда и только тогда, когда } F(q) \leq F(q') \\ \text{для всех } F \in K_+.$$

Нам потребуется следующая (стандартная) лемма.

**7.3.13. Лемма.** Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — вероятностные меры на  $\Omega$ . Предположим, что  $E_{\mu_1}(F) = E_{\mu_2}(F)$  для всех  $F \in K_+$ . Тогда  $\mu_1 = \mu_2$ .

Доказательство сводится к простому рассуждению о плотности. Двойственный порядок на множестве вероятностных мер на  $\Omega$  определен следующим образом:

$$(27) \quad \mu_1 \leq \mu_2 \text{ тогда и только тогда, когда } E_{\mu_1}(F) \leq E_{\mu_2}(F) \\ \text{для всех } F \in K_+.$$

Этот порядок в некотором смысле является «линейным продолжением» порядка, определенного в (25). Если  $\mu_1 \leq \mu_2$  и  $\mu_2 \leq \mu_1$ , из леммы 7.3.13 следует, что  $\mu_1 = \mu_2$ .

Пусть  $\Gamma$  — гиперконечный прямоугольник. Приведенные выше определения непосредственно переносятся на пространство  $\Omega_\Gamma$  и на внутренние вероятностные меры на  $\Omega_\Gamma$ .

Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — внутренние вероятностные меры на  $\Omega_\Gamma$ ,  $L(\mu_1)$  и  $L(\mu_2)$  — соответствующие меры Лёба и  $\tilde{\mu}_1$  и  $\tilde{\mu}_2$  — «возвращения» этих мер на  $\Omega$ , определенные в формуле (7). Следующая лемма — непосредственное следствие конструкции Лёба.

**7.3.14. Лемма.** Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — внутренние вероятностные меры на  $\Omega_\Gamma$ . Предположим, что  $\mu_1 \leq \mu_2$ . Тогда  $\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2$  на  $\Omega$ .

Аналогичные понятия можно ввести для мер на  $\Omega_X$ , где  $X \subset {}^*\mathbb{Z}^d$  — произвольное внутреннее множество.

Пусть  $\Phi$  — взаимодействие с конечным радиусом на  $\Omega$  и  ${}^*\Phi$  — его продолжение при помощи переноса. Пусть  $\Gamma$  — гиперконечный прямоугольник и  $\rho_{\Gamma, \mu}$  — соответствующее внутреннее равновесное состояние с граничным условием  $\mu$ : см. определения 7.2.3 и 7.2.10.

**7.3.15. Определение.** Взаимодействие  $\Phi$  называется *притягивающим*, если отображение  $\mu \mapsto \rho_{\Gamma, \mu}$  возрастает для всех  $\Gamma$ .

Мы выбрали довольно абстрактную форму понятия притягивающего взаимодействия для того, чтобы подчеркнуть общие идеи и избежать подробных аналитических рассмотрений в этом месте. Класс притягивающих взаимодействий включает много важных примеров; так, взаимодействие, определяющее модель Изинга (см. формулу (7.2.22)), является притягивающим при  $\beta \geq 0$  и произвольном  $h$ .

**7.3.16. Теорема.** Если  $\Phi$  — притягивающее взаимодействие с конечным радиусом на  $\Omega$ , то существует единственное максимальное гиббсовское состояние  $\bar{\rho}_+$  и единственное минимальное гиббсовское состояние  $\bar{\rho}_-$  на  $\Omega$ .

При нашем выборе определений доказательство просто. Выберем  $\Gamma$  гиперконечным. Пусть  $\rho_{\Gamma,+}$  — внутреннее равновесное состояние на  $\Omega_\Gamma$  относительно взаимодействия  $\Phi$  с граничным условием  $q \equiv +1$ . Так как  $\Phi$  — притягивающее,  $\rho_{\Gamma,+}$  максимально на  $\Omega_\Gamma$ . Мы покажем, что  $\bar{\rho}_+ \equiv \bar{\rho}_{\Gamma,+}$  является единственным максимальным гиббсовским состоянием на  $\Omega$ . Действительно, если  $\rho$  — еще одно гиббсовское состояние на  $\Omega$ , то  $\rho$  должно иметь вид  $\bar{\rho}_{\Gamma,\mu}$  для некоторого внутреннего состояния  $\rho_{\Gamma,\mu}$  на  $\Omega_\Gamma$ . Но на  $\Omega_\Gamma$  выполнено неравенство  $\rho_{\Gamma,\mu} \leq \rho_{\Gamma,+}$ ; поэтому из леммы 7.3.14 следует  $\rho \leq \bar{\rho}_+$  на  $\Omega$ . Это показывает, что  $\bar{\rho}_+$  максимально; единственность следует из леммы 7.3.13; см. замечание после формулы (27). Выбирая граничное условие  $q \equiv -1$ , получаем минимальное гиббсовское состояние  $\bar{\rho}_-$ .  $\square$

Теперь наша цель — следующая теорема; обсуждение относящихся к ней вопросов см. в работе Föllmer [2].

**7.3.17. Теорема.** Пусть  $\Phi$  — притягивающее взаимодействие с конечным радиусом. Тогда единственное максимальное и единственное минимальное гиббсовские состояния  $\bar{\rho}_+$  и  $\bar{\rho}_-$  обладают глобальным марковским свойством.

Для доказательства соответствующего свойства поднятия нам нужна следующая основная оценка, принадлежащая Кесслеру (Kessler [1]).

**7.3.18. Предложение.** Пусть  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  — гиперконечные прямоугольники,  $\Gamma \subset \Gamma'$  и  $f$  — положительная неубывающая ручная функция. Тогда

$$L(\rho_{\Gamma',+})\{E_{\rho_{\Gamma',+}}(f|C_{\Gamma'})(q_{\Gamma'}) \leq E_{\rho_{\Gamma,+}}(f|C_{\Gamma})(q_{\Gamma})\} = 0.$$

**Замечание.**  $a \ll b$  означает, что  $a < b$ , но  $a \not\approx b$ .

Доказательство основано на следующих двух фактах. Прежде всего, для конечных прямоугольников  $\Gamma \subset \Gamma'$ , положительных неубывающих функций  $f$  с носителем в  $\Gamma$  и конфигураций  $q \in \Omega_{\mathbb{Z}^d}$  мы имеем

$$(28) \quad E_{\rho_{\Gamma',+}}(f|C_{\Gamma})(q_{\Gamma}) \geq E_{\rho_{\Gamma',+}}(f|C_{\Gamma'})(q_{\Gamma'}) \geq 0.$$

Смысл этого неравенства заключается в том, что когда мы «проектируем» вниз от  $\Gamma'$  к  $\Gamma$ , мы получаем нечто меньшее (в притягивающем случае), чем из максимального состояния. В силу переноса (28) остается верным для гиперконечных прямоуголь-

ников и стандартных ручных функций — на самом деле, даже для внутренних функций. Далее мы замечаем, что для ручных положительных неубывающих функций неотрицательная последовательность  $E_{\rho_{\Gamma, +}}(f)$  убывает (нестрого) с ростом размера  $\Gamma$ . Таким образом, мы имеем

$$(29) \quad E_{\rho_{\Gamma, +}}(f) \approx E_{\rho_{\Gamma', +}}(f)$$

для гиперконечных  $\Gamma \subset \Gamma'$ .

Предположим теперь, что утверждение 7.3.18 ложно. Тогда существуют такие  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$ , что  $\rho_{\Gamma', +}(B_\varepsilon) \geq \delta$ , где  $B_\varepsilon = C_\varepsilon \times \times \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}$  и

$$C_\varepsilon = \{ (q_1 \times q_2) \in \Omega_{* C_{\Gamma'}} \mid E_{\rho_{\Gamma', +}}(f | * C_{\Gamma'}) (q_1 \times q_2) \leq \leq E_{\rho_{\Gamma, +}}(f | * C_{\Gamma}) (q_1) - \varepsilon \}.$$

**Замечание.** Мы записали конфигурацию  $q_{\Gamma'}$  из  $\Omega_{\Gamma'}$  как  $q_1 \times q_2 \times q_3$ , где  $q_1 \in \Omega_{* C_{\Gamma'}}$ ,  $q_2 \in \Omega_{* C_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}}$  и  $q_3 \in \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}$ .

Мы имеем следующее выражение для математического ожидания  $E_{\rho_{\Gamma', +}}(f)$ :

$$E_{\rho_{\Gamma', +}}(f) = \sum_{q_1 \times q_2 \in \Omega_{* C_{\Gamma'}}} E_{\rho_{\Gamma', +}}(f | * C_{\Gamma'}) \rho_{\Gamma', +}(q_1 \times q_2 \times \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}).$$

Сумма разбивается на две, для  $q_1 \times q_2 \in C_\varepsilon$  или  $q_1 \times q_2 \notin C_\varepsilon$ , и используя (27) и определение  $C_\varepsilon$ , мы получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} E_{\rho_{\Gamma', +}}(f) &\leq \sum_{q_1 \times q_2 \in C_\varepsilon} (E_{\rho_{\Gamma', +}}(f | * C_{\Gamma'}) (q_1) - \varepsilon) \times \\ &\quad \times \rho_{\Gamma', +}(q_1 \times q_2 \times \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}) + \\ &\quad + \sum_{q_1 \times q_2 \notin C_\varepsilon} (E_{\rho_{\Gamma, +}}(f | * C_{\Gamma}) (q_1)) \rho_{\Gamma', +}(q_1 \times q_2 \times \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}) \leq \\ &\leq \sum_{q_1 \times q_2 \in \Omega_{* C_{\Gamma'}}} E_{\rho_{\Gamma, +}}(f | * C_{\Gamma}) (q_1) \rho_{\Gamma', +}(q_1 \times q_2 \times \Omega_{\Gamma' - * C_{\Gamma'}}) - \varepsilon \cdot \delta = \\ &= E_{\rho_{\Gamma', +}}(E_{\rho_{\Gamma, +}}(f | * C_{\Gamma})) - \varepsilon \cdot \delta \leq E_{\rho_{\Gamma, +}}(E_{\rho_{\Gamma, +}}(f | * C_{\Gamma})) - \varepsilon \cdot \delta \leq \\ &\leq E_{\rho_{\Gamma, +}}(f) - \varepsilon \cdot \delta, \end{aligned}$$

что противоречит соотношению (29), и предложение доказано.  $\square$

Пользуясь предложением 7.3.18, мы можем сейчас доказать, что условное математическое ожидание является  $S$ -поднятием в смысле определения 7.3.3. Это, как в § 7.3.В, позволит завершить доказательство теоремы 7.3.17.

Остается проверить свойство  $C$ -поднятия. Пусть  $\kappa \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  — размер прямоугольника  $\Gamma$ , и  $\Gamma_\lambda$  — прямоугольник размера  $\lambda$  для  $\lambda \leq \kappa$ . Для  $\lambda < \kappa$  и  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  мы определяем

$$N_{\lambda, \varepsilon} = \{q \mid E_{\rho_{\Gamma, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma})(q_{\Gamma}) \leq E_{\rho_{\Gamma_{\lambda}, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma_{\lambda}})(q_{\Gamma_{\lambda}}) - \varepsilon\} \in \mathcal{A}_{*C_{\Gamma}}.$$

Так как эти множества являются внутренними, из предложения 7.3.18 следует, что наименьшее  $\lambda \in {}^*\mathbb{N}$  (назовем его  $\lambda_{\varepsilon}$ ), для которого  $\rho_{\Gamma, +}(N_{\lambda, \varepsilon}) \leq \varepsilon$ , на самом деле лежит в  $\mathbb{N}$ ; мы также видим, что при увеличении  $\lambda$  последовательность  $\rho_{\Gamma, +}(N_{\lambda, \varepsilon})$  является невозрастающей; и наконец, замечаем, что  $\lambda_{\varepsilon}$  возрастает при уменьшении  $\varepsilon$ . При помощи леммы Бореля — Кантелли мы заключаем, что множество

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\lambda \geq \lambda_{1/2^n}} N_{\lambda, 1/2^n} \in L(\mathcal{A}_{*C_{\Gamma}})$$

имеет  $L(\rho_{\Gamma, +})$ -меру 0.

Теперь пусть  $q, q'$  — две конфигурации из  $\Omega_{\Gamma}$ . Предположим, что  $q, q' \notin N$ , но  $\text{st}_{\Gamma} q = \text{st}_{\Gamma} q'$ . Так как  $q, q'$  — внутренние конфигурации, имеющие одну и ту же стандартную часть, то существует такое  $\lambda \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что  $q_{\Gamma_{\lambda}} = q'_{\Gamma_{\lambda}}$ . Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} E_{\rho_{\Gamma, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma})(q_{\Gamma}) &\approx E_{\rho_{\Gamma_{\lambda}, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma_{\lambda}})(q_{\Gamma_{\lambda}}) = \\ &= E_{\rho_{\Gamma_{\lambda}, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma_{\lambda}})(q'_{\Gamma_{\lambda}}) \approx \\ &\approx E_{\rho_{\Gamma, +}}(f \mid {}^*C_{\Gamma})(q'_{\Gamma}). \end{aligned}$$

Здесь оба  $\approx$ -утверждения следуют из того факта, что  $q, q' \notin N$ . Доказательство свойства поднятия завершено.  $\square$

Это доказывает теорему 7.3.17. Прежде чем перейти к случаю непрерывного слоя, подведем итоги текущей ситуации при помощи диаграммы. Все стрелки на диаграмме обсуждались выше, за исключением одной, ведущей от сильной единственности к экстремальности. Чистое состояние экстремально, если оно не является выпуклой комбинацией других чистых состояний; таким образом, сильная единственность тривиальным образом влечет за собой экстремальность.





Кесслер (см. Kessler [1], [2]) показал, что в случае отсутствия трансляционной инвариантности стрелки не могут быть обращены. Опровергая гипотезу Голдстейна (Goldstein [1]), он показал также, что экстремальность не влечет за собой глобальное марковское свойство. Из работы Кесслера следует, что поднятие и условие  $C$  несравнимы; ему также принадлежит пример, показывающий, что  $S$ -непрерывность не влечет за собой условие  $C$ .

За стрелками, изображенными выше, скрываются некоторый вариант гиперконечного марковского свойства и некоторая адаптация идеи поднятия. Нам кажется, что гиперконечная картина является интуитивно прозрачным и эффективным способом организации материала.

### Е. Случай неограниченного слоя

В заключительной части этого параграфа мы обсудим неограниченный непрерывный случай. Точнее, мы заменим слой  $\{-1, +1\}$  на  $\mathbb{R}$  и будем изучать пространства конфигураций вида  $\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$ , где  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ . Это выходит за рамки теории § 7.2 и мы, следовательно, вначале кратко резюмируем основы стандартной теории.

*Взаимодействие*  $\Phi$  — это отображение из конечных непустых подмножеств  $X \subset \mathbb{Z}^d$  в действительные непрерывные функции на  $\Omega_X$ . Пусть  $\Lambda$  — конечное подмножество множества  $\mathbb{Z}^d$ ; мы вводим *гиббсовскую*, или *равновесную*, меру  $\mu_\Lambda$  на  $\Omega_\Lambda$  равенством

$$(30) \quad d\mu_\Lambda(q) = Z_\Lambda^{-1} e^{-H_\Lambda^\Phi(q)} dq,$$

где

$$(31) \quad H_\Lambda^\Phi(q) = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(X)(q), \quad q \in \Omega_\Lambda,$$

и

$$(32) \quad Z_\Lambda = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda^\Phi(q)} dq.$$

В этом разделе мы ограничимся взаимодействиями  $\Phi$  с *конечным радиусом*, т. е. взаимодействиями  $\Phi$ , для которых существует такое натуральное число  $l$ , что  $\Phi(X) = 0$ , если диаметр множества  $X \subset \mathbb{Z}^d$  больше  $l$ . При этом ограничении определена следующая конструкция.

Пусть  $\Lambda$  — конечное подмножество множества  $\mathbb{Z}^d$ . *Внешняя конфигурация* для  $\Lambda$  — это элемент множества  $\Omega_{\Lambda^c}$ . Пусть  $q_0$  — внешняя конфигурация для  $\Lambda$ ; мы вводим *гиббсовскую*, или *рав-*

новесную, меру с граничным условием  $q_0$  на  $\Omega_\Lambda$  равенством

$$(33) \quad d\mu_{\Lambda, q_0}(q) = Z_{\Lambda, q_0}^{-1} \exp(-q_0 H_\Lambda^\Phi(q)) dq,$$

где

$$(34) \quad q_0 H_\Lambda^\Phi(q) = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi(X)(q \times q_0), \quad q \in \Omega_\Lambda,$$

и  $Z_{\Lambda, q_0}$  определено так же, как и  $Z_\Lambda$ ; см. (32) выше. Заметим, что, так как  $\Lambda$  конечно и  $\Phi$  имеет конечный радиус, сумма в (34) существует.

Обозначим  $E_{\mu_\Lambda}(\cdot | \Lambda_1^c)$  условное математическое ожидание относительно меры  $\mu_\Lambda$  и  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_{\Lambda_1^c}$ . Для широкого класса взаимодействий предел

$$(35) \quad E_{\Lambda_1^c}^q(F) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} E_{\mu_\Lambda}(F | \Lambda_1^c)(q)$$

существует. Когда радиус взаимодействия  $\Phi$  конечен, мы имеем следующую явную формулу:

$$(36) \quad E_{\Lambda^c}^q(F) = Z_{\Lambda, q}^{-1} \int F(p) \exp(-q H_\Lambda^\Phi(p)) dp.$$

Пусть  $\mu$  — вероятностная мера на  $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ ;  $\mu$  называется *гиббсовской мерой*, или *равновесной мерой* на  $\Omega$ , если

$$(37) \quad E_\mu(F | \Lambda^c)(q) = E_{\Lambda^c}^q(F)$$

для всех конечных  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ .

Это завершает наш беглый набросок стандартной теории. Изучение *гиперконечного* варианта мы начнем с гиперконечного прямоугольника  $\Gamma$  и фиксации граничного условия  $q_0 \in \Omega_{\Gamma^c}$ . При помощи переноса мы получаем внутреннюю меру, соответствующую (33). Если  $\nu$  — вероятностная мера на  $\Omega_{\Gamma^c}$ , мы можем ввести меру  $\mu_{\Gamma, \nu}$  формулой

$$(38) \quad d\mu_{\Gamma, \nu}(q) = \int_{\Omega_{\Gamma^c}} \mu_{\Gamma, q_0}(q) d\nu(q_0).$$

Это — внутренняя мера, но присоединяя конструкцию Лёба и отображение взятия стандартной части, мы можем ввести меру  $\mu$  на  $\Omega$  равенством

$$(39) \quad \mu(B) = L(\mu_{\Gamma, \nu})(st^{-1}B),$$

где  $B$  — борелевское множество в  $\Omega$ . Прямая адаптация теории из § 7.2 (см. также теорию расширений в §§ 3.4, 3.5) показывает, что мера  $\mu$  из (39) является *гиббсовской мерой* на  $\Omega$  и что каж-

дая гиббсовская мера может быть представлена в таком виде для подходящих  $\Gamma$  и  $\nu$ .

При адаптации прежних определений к настоящему случаю не возникает никаких трудностей. Так что предполагаем, что радиус взаимодействия  $\Phi$  конечен и  $\Phi$  — *притягивающее* взаимодействие (см. определение 7.3.15). В неограниченном случае недостаточно убедиться в существовании максимальной и минимальной гиббсовской меры; требуется наложить условие роста на взаимодействие  $\Phi$ .

**7.3.19. Определение.** Вероятностная мера  $\mu$  на  $\Omega$  называется *умеренной*, если существуют такие целые числа  $k, N \in \mathbb{N}$ , что

$$(40) \quad E_{\mu}(|q_i|) \leq k(1 + |i|)^N$$

для всех  $i \in \mathbb{Z}^d$ .

Взаимодействие  $\Phi$  называется *умеренным*, если для всех конечных  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  мера  $\mu_{\Lambda, \nu}$  умеренна как только мера  $\nu$  умеренна. Взаимодействие  $\Phi$  называется *равномерно умеренным*, если для любого умеренного  $\nu$  семейство  $\{\mu_{\Lambda, \nu} \mid |\Lambda| < \infty\}$  однородно умеренно в том смысле, что существуют такие  $k, N \in \mathbb{N}$  что

$$(41) \quad E_{\mu_{\Lambda, \nu}}(|q_i|) \leq k(1 + |i|)^N$$

для всех конечных  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  и  $i \in \mathbb{Z}^d$ .

В этом обзоре мы не будем доказывать общие результаты об умеренных взаимодействиях; подробная информация имеется в работе Bellissard, Нøegh-Krohn [1]. Мы упомянем один важный пример взаимодействия:

$$(42) \quad H_{\Lambda}^{\Phi}(q) = \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i, j \in \Lambda \\ |i-j|=1}} |q_i - q_j|^2 + \beta \sum_{i \in V} V(q_i),$$

которое равномерно умеренно при довольно слабых условиях на потенциал  $V$ .

Это взаимодействие удовлетворяет следующему важному неравенству:

$$(43) \quad E_{\{i\}^c}^q(|q_i|) \leq a + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r_{ij} |q_j|,$$

где  $a > 0$  и  $\sum_j r_{ij} \leq c_1 < 1$ . (Всегда можно предположить, что  $r_{ii} = 0$ ; и в простом случае взаимодействия (42) требуется суммировать только по ближайшим соседям узла  $i$ .)

Для доказательства заметим, что (43) выводится из (42) при помощи стандартной техники оценивания асимптотического поведения преобразований Лапласа; см. Bellissard, Нøegh-Krohn [1].

Из (43) мы можем вывести следующее ключевое неравенство.

**7.3.20. Лемма.** Пусть  $\Phi$  — равномерно умеренное взаимодействие с конечным радиусом, удовлетворяющее неравенству (43). Тогда существует такая константа  $c$ , что

$$(44) \quad E_{\mu}(|q_i|) < c$$

для всех  $i \in \mathbb{Z}^d$  и всех умеренных гиббсовских мер  $\mu$  на  $\Omega$ .

Используя тот факт, что  $\mu$  — гиббсовская мера, и беря математические ожидания от обеих частей неравенства (43), получаем

$$E_{\mu}(|q_i|) \leq a + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r_{ij} E_{\mu}(|q_j|),$$

откуда вытекает, что

$$(45) \quad \sum_j (\delta_{ij} - r_{ij}) E_{\mu}(|q_j|) \leq a.$$

Пусть  $(1 - r)$  — матрица с элементами  $(1 - r)_{ij} = \delta_{ij} - r_{ij}$  и  $X$  — вектор, определенный равенством  $X_j = E_{\mu}(|q_j|)$ ; тогда (45) можно переписать в виде множества неравенств  $((1 - r)X)_i \leq a$ .

И так как  $(1 - r)_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + r_{ij} + \sum_k r_{ik} r_{kj} + \dots$  состоит из неотрицательных членов и  $\sum_j (1 - r)_{ij}^{-1}$  по предположению сходится и ограничено некоторым числом  $< 1$ , не зависящим от  $i$ , то существует такая константа  $c$ , что  $E_{\mu}(|q_i|) < c$  для всех  $i \in \mathbb{Z}^d$  и всех умеренных гиббсовских мер  $\mu$ .  $\square$

Теперь мы можем построить *максимальную умеренную гиббсовскую меру* на  $\Omega$ . Наш исходный пункт — равномерно умеренное взаимодействие  $\Phi$ , удовлетворяющее лемме 7.3.20. Для управления ростом зафиксируем два целых числа  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  и так выберем конфигурацию  $q^+ \in \Omega_* \mathbb{Z}^d$ , чтобы выполнялись условия

$$(46) \quad |i|^{N_1} \leq |q_i^+| < |i|^{N_2} \text{ для всех } i \in \mathbb{Z}^d$$

и

$$(47) \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{q_i^+} < \infty.$$

Выбор  $N_1$  будет зависеть от размерности  $d$  пространства  $\mathbb{Z}^d$ .

Пусть  $\Gamma$  — гиперконечный прямоугольник. Рассмотрим меру  $\mu_+$  на  $\Omega$ , определенную равенством

$$(48) \quad \mu_+ = L(\mu_{\Gamma, q^+}) \circ \text{st}^{-1}.$$

Прежде всего заметим, что это — умеренная гиббсовская мера на  $\Omega$ ; см. (46) выше. Мы должны показать, что она максимальна, т. е.

$$(49) \quad E_{\mu}(F) \leq E_{\mu+}(F)$$

для всех  $F \in K_+$  (см. (27)) и всех умеренных гиббсовских мер  $\mu$  на  $\Omega$ . Неравенство (49) также влечет единственность меры  $\mu_+$ .

Проводим следующее предварительное вычисление:

$$(50) \quad E_{\mu}(F) = E_{\mu}(E_{\mu}(F | \Lambda^c)(q)) \leq \int_{B_{\Lambda, q^+}} E_{\Lambda^c}^q(F) d\mu(q) + \|F\|_{\infty} \mu(B_{\Lambda, q^+}^c),$$

где

$$(51) \quad B_{\Lambda, q^+} = \{q \in \Omega \mid q_i \leq q_i^+ \text{ для всех } i \in \Lambda^c\} = \bigcap_{i \in \Lambda^c} \{q \mid q_i \leq q_i^+\}.$$

Верхняя оценка из леммы 7.3.20 дает

$$(52) \quad \mu(B_{\Lambda, q^+}^c) \leq \sum_{i \in \Lambda^c} \mu(\{q \mid q_i > q_i^+\}) \leq \sum_{i \in \Lambda^c} \frac{1}{q_i^+} \sum_{\mu} (|q_i|) \leq \sum_{i \in \Lambda^c} \frac{c}{q_i^+}.$$

Из (47) следует, что мера  $\mu(B_{\Lambda, q^+}^c)$  может быть сделана сколь угодно малой, если выбрать  $\Lambda$  достаточно большим.

Так как  $\Phi$  — притягивающее взаимодействие, то  $E_{\Lambda^c}^q(F) \leq E_{\Lambda^c}^{q^+}(F)$  на  $B_{\Lambda, q^+}$ , следовательно,  $\int_{B_{\Lambda, q^+}} E_{\Lambda^c}^q(F) d\mu(q) \leq E_{\Lambda^c}^{q^+}(F)$ .

Мы заключаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется «достаточно большое» конечное  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ , для которого

$$(53) \quad E_{\mu}(F) \leq E_{\Lambda^c}^{q^+}(F) + \varepsilon.$$

Переходя к гиперконечной картине, мы видим, что  $E_{\Gamma^c}^{q^+}(F)$  — внутреннее математическое ожидание относительно меры  $\mu_{\Gamma, q^+}$ . Из (48) и обычной теории Лёба заключаем, что

$$(54) \quad E_{\mu}(F) \leq E_{\mu+}(F).$$

для всех умеренных гиббсовских мер  $\mu$ .

**7.3.21. Теорема.** Пусть  $\Phi$  — притягивающее и равномерно умеренное взаимодействие конечного радиуса, удовлетворяющее не-

равенству (43): тогда существует единственная максимальная гиббсовская мера  $\mu_+$  и единственная минимальная гиббсовская мера  $\mu_-$  относительно  $\Phi$  на  $\Omega$ .

Здесь мы завершаем наш рассказ. Глобальное марковское свойство мер  $\mu_{\pm}$  было доказано в работе Zegarliński [1] с использованием условия C; мы приглашаем читателя посмотреть на это доказательство с гиперконечной точки зрения; см. определение 7.3.6.

**7.3.22. Замечание.** Обсуждение решетчатых моделей с «неограниченными спинами» было в основном мотивировано изучением соответствующих задач для непрерывных квантовых полей. Фактически существование, единственность и глобальное марковское свойство были вначале доказаны для квантово-полевых моделей (с тригонометрическими взаимодействиями) — см. Albeverio, Нøegh-Krohn [7]. Случай решетчатых моделей с неограниченными спинами при выполнении условия единственности Добрушина анализировался в работе Bellissard, Picco [1]. Более общие постановки рассматривались в работах Bellissard, Нøegh-Krohn [1] и Zegarliński [1]. Некоторые недавние работы для случая непрерывного квантового поля: Gielera [1], Zegarliński [1], Röckner [1]. Мы приглашаем читателя посмотреть на эти работы в контексте гиперконечных моделей с бесконечно малым шагом, которые мы строим в следующем параграфе.

## 7.4. Гиперконечные модели в квантовой теории поля

В этом параграфе мы представим евклидову квантовую теорию поля как систему с непрерывными спинами на гиперконечной решетке с бесконечно малым шагом. В следующем параграфе мы используем эту формулировку при обсуждении  $\Phi_d^4$  — полимерного представления.

### А. Программа

Начнем с того, что очертим стандартную вероятностную конструкцию свободного евклидовского поля. Это будет гауссовское случайное поле специального вида.

**7.4.1. Определение.** Пусть  $(Q, \mathcal{F}, \mu)$  — вероятностное пространство,  $H$  — действительное гильбертово пространство. Гауссовским случайным полем, индексированным пространством  $H$ , называется отображение  $\Phi: H \rightarrow L^2(Q, d\mu)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) отображение  $\Phi$  линейно;
- (ii) множество случайных величин  $\{\Phi(v) \mid v \in H\}$  полно, т. е. порождает алгебру измеримых множеств;

(iii) каждое  $\Phi(v)$  — гауссовская случайная величина;

$$(iv) \langle \Phi(v) \Phi(w) \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \langle v, w \rangle_H.$$

Будет уместным сделать несколько замечаний. Алгебра из п. (ii) — это, конечно же,  $\mathcal{B}/\mathcal{I}_0$ , где  $\mathcal{I}_0$  —  $\sigma$ -идеал множеств меры нуль; условие полноты, очевидно, необходимо для единственности поля. Измеримая функция  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  определяет меру  $\mu_f$  на  $\mathbb{R}$  равенством  $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ ; функция  $f$  называется *гауссовской случайной величиной*, если мера  $\mu_f$  имеет вид

$$(1) \quad d\mu_f(x) = (2\pi a)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} a^{-1} x^2\right) dx,$$

где  $a = \int f^2 d\mu$  — дисперсия случайной величины  $f$ . (Заметим, что мы рассматриваем только гауссовские случайные величины со средним 0.) Наконец,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это скалярное произведение в  $H$ , а  $\langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle_{L^2} = \int \Phi(v) \Phi(w) d\mu$ .

Установим некоторые обозначения и терминологию. Если дано гильбертово пространство  $H$ , то гауссовское случайное поле, индексированное пространством  $H$ , определяется однозначно с точностью до изоморфизма пространства с мерой; поэтому будем обозначать через  $Q_H$  соответствующее измеримое пространство, и через  $d\mu_{0,H}$  — соответствующую меру.

Теперь можно дать краткое описание свободного евклидового поля. Прежде всего, пусть  $N_m$  — гильбертово пространство всех действительных обобщенных функций  $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ , у которых преобразования Фурье имеют конечную норму

$$(2) \quad \|f\|_{N_m}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(k)|^2 dk}{k^2 + m^2} < \infty;$$

при этом предполагается, что  $m > 0$  при  $d = 1, 2$  и  $m \geq 0$  при  $d \geq 3$ . Истинная физическая размерность  $d$ , т. е. размерность реального пространства-времени, равна 4.

**7.4.2. Определение.** Свободное евклидово поле массы  $m$  — это гауссовское случайное поле  $\Phi_0$ , индексированное пространством  $N_m$ .

Пусть  $d\mu_0$  обозначает меру  $d\mu_{0,N_m}$ . Функции Швингера  $S_n$ , отвечающие свободному евклидову полю  $\Phi_0$ , определяются формулой

$$(3) \quad S_n(f_1, \dots, f_n) = \int \Phi_0(f_1) \dots \Phi_0(f_n) d\mu_0.$$

В случае свободного поля имеют значение только среднее (всегда равное нулю) и ковариация, так что мы можем ограничиться

рассмотрением только *двухточечных* свободных функций  $S_2$ . Заметим, что

$$(4) \quad S_2(f, g) = \frac{1}{2} \langle f, g \rangle_{N_m} = \langle f, (-\Delta + m^2)^{-1} g \rangle_{L^2}.$$

С евклидовой точки зрения функции Швингера — не более чем моменты некоторого случайного поля. Поэтому было бы разумным вкратце пояснить, как эти сущности возникают из физической теории квантовых полей. С классической точки зрения поле  $\Phi_F$  — это действительнозначная функция. Поэтому в квантовом случае основным объектом должна быть операторнозначная функция. Но значение  $\Phi_F(x)$  квантового поля в пространственно-временной точке  $x$  может оказаться чересчур сингулярным объектом; в результате мы приходим к следующей точке зрения.

*Эрмитово (бозонное) скалярное квантовое поле* — это операторнозначная обобщенная функция  $\Phi_F$ . *Пространство состояний* — это некоторое подходящее гильбертово пространство  $H$  с выделенным состоянием  $\Omega$ , которое называется *вакуумом*. *Наблюдаемые* — это операторы  $\Phi_F(f)$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^d)$ . Следует еще потребовать выполнения различных свойств релятивистской инвариантности, микроскопической причинности, регулярности. Однако для нашего грубого очерка будет достаточно, если мы лишь представим основных действующих лиц пьесы, оставив принадлежащий им текст (в данном случае — аксиомы Уайтмана — Гординга) произнесенным.

Мы только ненадолго сосредоточим внимание на таких объектах физической теории, как (обобщенные) *функции Уайтмана*, или *вакуумные средние*:

$$(5) \quad W_n(f_1, \dots, f_n) = \langle \Omega, \Phi_F(f_1) \dots \Phi_F(f_n) \Omega \rangle.$$

Дело в том, что от функций Уайтмана можно перейти к функциям Швингера; это делается следующим образом. Назовем точку  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{dn}$  *евклидовой*, если каждое  $z_j \in \mathbb{C}^d$  имеет вид

$$(6) \quad z_j = (is_j, x_j),$$

где  $s_j \in \mathbb{R}$ ,  $x_j \in \mathbb{R}^{d-1}$  (т. е. это точка с чисто мнимым временем). Каждому  $z_j$  сопоставим  $y_j = (s_j, x_j) \in \mathbb{R}^d$  и параметризуем евклидовы точки в  $\mathbb{C}^{dn}$  векторами  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ . Обозначим через  $\mathcal{E}_n$  *множество евклидовых точек с несовпадающими координатами*, т. е. таких евклидовых точек  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , для которых  $y_i \neq y_j$  при  $i \neq j$ .

Фундаментальный результат теории Уайтмана — Гординга состоит в том, что функции Уайтмана могут быть продолжены в некоторую область в  $\mathbb{C}^{dn}$ , включающую множество  $\mathcal{E}_n$ ; или, в несколько более точных терминах, функция Уайтмана  $W_n$  яв-



ляется граничным значением некоторой аналитической функции (обозначаемой также  $W_n$ ), определенной в области пространства  $\mathbb{C}^{dn}$  включающей множество  $\mathcal{E}_n$ .

**7.4.3. Определение.** Ограничение функции  $W_n$  на множество  $\mathcal{E}_n$  называется *n-точечной функцией Швингера*.

Будем использовать обозначение  $S_n$  для функций Швингера, рассматриваемых как функции от соответствующих переменных  $y$ . Ключевым моментом нашего рассказа является то, что можно выписать набор свойств функций Швингера, достаточный для того, чтобы можно было восстановить исходное физическое поле; это значит, что если задано семейство  $\{S_n\}$  функций Швингера, удовлетворяющих этим свойствам, то существует (и, по существу, единственно) такое поле Уайтмана — Гординга  $\Phi_F$ , функции Швингера которого совпадают с функциями  $S_n$ . Рассказ завершается замечанием, что функции Швингера, введенные в формуле (3), удовлетворяют всем предположениям *теоремы реконструкции*; таким образом, свободное евклидово поле посредством функций Швингера (3) дает нам модель (невзаимодействующего) скалярного квантового поля.

Такова в общих чертах одна из версий истории; детали можно восполнить по книге Simon [1]. Однако на евклидово поле можно смотреть и с иной точки зрения (см., например, Glimm, Jaffe [1]). Из теоремы Минлоса следует, что свободную меру  $\mu_0$  можно представить как вероятностную меру на пространстве обобщенных функций  $S'(\mathbb{R}^d)$ , т. е. мы всегда можем взять  $Q_{N_m} = S'(\mathbb{R}^d)$ . В этом случае само поле как отображение  $\Phi_0: N_m \rightarrow L^2(Q_{N_m})$  может быть представлено в виде

$$(7) \quad \Phi_0(f)(T) = T(f),$$

где  $f \in S(\mathbb{R}^d)$ ,  $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ . Свойства меры  $\mu_0$  столь же легко получить из характеристического функционала

$$(8) \quad S(f) = \int e^{iT(f)} d\mu_0(T),$$

сколь и из Швингеровских, или моментных, функций

$$(9) \quad \begin{aligned} S_n(f_1, \dots, f_n) &= \int \Phi_0(f_1) \dots \Phi_0(f_n) d\mu_0 = \\ &= \int T(f_1) \dots T(f_n) d\mu_0(T). \end{aligned}$$

Мы пришли к следующему общему определению евклидовского случайного поля.

**7.4.4. Определение.** *Евклидова теория поля* задается вероятностной мерой  $\mu$  на  $(\sigma$ -алгебре, порожденной цилиндрическими

множествами)  $S'(\mathbb{R}^d)$ , чей характеристический функционал

$$S(f) = \int e^{iT(f)} d\mu(T)$$

удовлетворяет следующим условиям:

*Аналитичность.* Функционал  $S(f)$  является целой аналитической функцией<sup>1)</sup>.

*Регулярность.* Для некоторого  $p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , некоторой константы  $c$  и всех  $f \in S(\mathbb{R}^d)$  справедлива оценка

$$|S(f)| \leq \exp\{c(\|f\|_1 + \|f\|_p^p)\}.$$

*Инвариантность.* Функционал  $S(f)$  инвариантен относительно евклидовских симметрий (т. е. переносов, поворотов и отражений).

*Положительность при отражениях (свойство Остервальдера — Шрадера).* Пусть  $\mathbb{R}_+^d$  — множество точек  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ , у которых  $t > 0$ , и  $\mathcal{A}_+$  — множество функций из  $S'(\mathbb{R})$  в  $\mathbb{C}$  вида

$$\sum_{j=1}^n c_j \exp(T(f_j)),$$

где  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^d)$  и  $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ . Тогда для любой функции  $A \in \mathcal{A}_+$  справедливо неравенство  $\langle \theta A, A \rangle \geq 0$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в (комплексном) пространстве  $L^2(\mu)$ , а  $\theta$  — отражение времени  $\theta: (t, \mathbf{x}) \mapsto (-t, \mathbf{x})$ .

*Эргодичность.* Для всех функций  $F \in L^1(d\mu)$  справедливо равенство

$$\int F d\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(T_s) ds,$$

где  $T_s(s', \mathbf{x}) = T(s' + s, \mathbf{x})$  для всех  $(s', \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ .

Список свойств выглядит внушительно, но все они переводятся в физически осмысленные свойства поля Уайтмана — Гординга  $\Phi_F$ . Евклидовская инвариантность переводится в релятивистскую инвариантность поля  $\Phi_F$ ; эргодичность гарантирует единственность вакуумного состояния  $\Omega$ ; положительность при отражениях позволяет восстановить гамильтониан физического поля. Наконец, некоторые свойства регулярности приходится накладывать, чтобы держать под контролем физическую теорию — отсюда первые два свойства из списка.

<sup>1)</sup> Это означает, что для любых  $f_1, \dots, f_n \in S(\mathbb{R}^d)$  функция  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto S(z_1 f_1 + \dots + z_n f_n)$  является целой функцией на  $\mathbb{C}^n$ . — Прим. перев.

Легко видеть, что свободное евклидово поле из определения 7.4.2 удовлетворяет всем свойствам определения 7.4.4. Но оно представляет весьма ограниченный физический интерес: в нем нет взаимодействия частиц. Чтобы исправить положение, нужно искать какие-то не гауссовские случайные поля, в которые каким-то подходящим образом входит потенциал взаимодействия  $U$ .

Мы постараемся проделать это в духе определения 7.4.4, сохранив процесс  $\Phi_0$  и пространство  $Q_{N_m}$ , отвечающие свободному евклидовому полю, но заменив свободную меру  $d\mu_0$  на меру с взаимодействием

$$(10) \quad d\nu = \frac{\exp(-U) d\mu_0}{\int \exp(-U) d\mu_0},$$

где  $U$  — добавленный потенциал взаимодействия. При условии, что мере  $d\nu$  удастся придать смысл, можно непосредственно выписать соответствующий характеристический функционал или соответствующие функции Швингера — и далее надеяться восстановить физически нетривиальную теорию.

### В. Свободные скалярные поля

Построить физически нетривиальную теорию — немалая задача. Один из путей подхода к ней — начать с построения *свободного решетчатого поля*.

Пусть  $\delta > 0$  — фиксированное положительное действительное число, и пусть  $\mathcal{L}_\delta$  — решетка с шагом  $\delta$ , т. е. множество

$$(11) \quad \mathcal{L}_\delta = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}^d\}.$$

На  $\mathcal{L}_\delta$  рассматривается пространство функций  $l^2(\mathcal{L}_\delta)$  с нормой

$$(12) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \delta^d |f(n\delta)|^2 < \infty.$$

Имея определенную нестандартную подготовку, мы понимаем роль нормировочной константы  $\delta^d$ : если  $\delta$  бесконечно мало, то  $\|f\|_2^2 \approx \int |f|^2 dx$ .

Из формулы (4) следует, что свободное евклидово поле имеет «матрицу ковариаций»  $(-\Delta + m^2)^{-1}$ ; для решетчатой модели нам придется исследовать дискретизацию этого оператора. Как хорошо известно из предыдущих глав, оператор  $-\Delta_\delta$  на  $l^2(\mathcal{L}_\delta)$  задается выражением

$$(13) \quad (-\Delta_\delta f)(n\delta) = \delta^{-2} \left[ 2d \cdot f(n\delta) - \sum_{|n'-n|=1} f(n'\delta) \right].$$

Определим матрицу  $C$  следующим образом:

$$(14) \quad C_{n, n'} = \delta^{-d} (-\Delta_\delta + m^2)_{n, n'}^{-1}.$$

Пусть  $\mathcal{T}_\delta = [-\pi/\delta, \pi/\delta]^d$  — пространство, двойственное к  $\mathcal{L}_\delta$ . Справедлива следующая явная формула:

$$(15) \quad C_{n, n'} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathcal{T}_\delta} e^{ik(n-n')\delta} \mu_\delta(k)^{-2} dk,$$

где

$$(16) \quad \mu_\delta(k)^2 = \delta^{-2} \left[ 2d - 2 \sum_{j=1}^d \cos(k_j \delta) \right] + m^2.$$

Заметим, что если  $\delta \approx 0$  и  $k$  конечно, то  $\mu_\delta(k)^2 \approx \mu(k)^2 = k^2 + m^2$ .

Свободное решетчатое поле можно определить для всей решетки  $\mathcal{L}_\delta$ . Но с многих точек зрения столь же естественно начать с конечного пространственного обрезания. Пусть  $\Lambda$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ .

**7.4.5. Определение.** Поставим в соответствие области  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  следующие объекты:

- (i)  $\Lambda_\delta = \Lambda \cap \mathcal{L}_\delta$ ;
- (ii)  $\Lambda_\delta^{\text{int}} = \{n\delta \in \Lambda_\delta \mid \forall m (|n - m| = 1 \rightarrow m\delta \in \Lambda_\delta)\}$ ;
- (iii)  $\partial\Lambda_\delta = \Lambda_\delta - \Lambda_\delta^{\text{int}}$ .

Если  $M$  — некоторая матрица, индексированная элементами решетки  $\mathcal{L}_\delta$ , будем через  $M^\Lambda$  обозначать ограничение этой матрицы на множество индексов  $\Lambda_\delta$ . Будем говорить, что матрица  $M$  сосредоточена на множестве  $\partial\Lambda_\delta$ , если из  $M_{m, n} \neq 0$  следует, что  $m\delta, n\delta \in \partial\Lambda_\delta$ .

Для введенной выше матрицы  $C$  справедлив следующий важный результат:

$$(17) \quad (C^\Lambda)^{-1} = (C^{-1})^\Lambda - B_{\partial\Lambda_\delta},$$

где  $B_{\partial\Lambda_\delta}$  — матрица с неотрицательными элементами, сосредоточенная на  $\partial\Lambda_\delta$ .

Обсудим версию свободного евклидова поля, определенного на решетке  $\Lambda_\delta$ . Заметим, что  $\Lambda_\delta$  — конечное множество; пусть  $l = |\Lambda_\delta|$  — число элементов в нем. Наше обрезанное пространство с мерой будет конечным произведением  $Q_{\Lambda_\delta} = \mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$  со сво-

бодной мерой

$$(18) \quad d\mu_{0, \Lambda_\delta}(q) = (2\pi)^{-l/2} [\det(C^\Lambda)]^{-1/2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta} (C^\Lambda)^{-1}_{n, n'} q_{n\delta} q_{n'\delta}\right) dq,$$

где  $q \in Q_{\Lambda_\delta}$  и  $dq = \prod_{n\delta \in \Lambda_\delta} dq_{n\delta}$ .

**7.4.6. Определение.** Случайное поле  $\Phi_\delta$ , индексированное множеством  $\Lambda_\delta$  — это отображение

$$\Phi_\delta: \Lambda_\delta \times Q_{\Lambda_\delta} \rightarrow \mathbb{R},$$

задаваемое равенством

$$\Phi_\delta(n\delta, q) = q_{n\delta}, \quad n\delta \in \Lambda_\delta.$$

Оно называется *свободным решетчатым полем* массы  $m$  на  $\Lambda_\delta$ .

Используя формулу (17) для матрицы  $(C^\Lambda)^{-1}$ , получаем равенство

$$(19) \quad \sum_{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta} (C^\Lambda)^{-1}_{n, n'} q_{n\delta} q_{n'\delta} = (2d\delta^{d-2} + m^2\delta^d) \sum_{n\delta \in \Lambda_\delta} q_{n\delta}^2 - \\ - \sum_{\substack{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta, \\ |n-n'|=1}} \delta^{d-2} q_{n\delta} q_{n'\delta} - \sum_{n\delta, n'\delta \in \partial\Lambda_\delta} B_{n, n'} q_{n\delta} q_{n'\delta}.$$

Мы видим, что свободную меру  $d\mu_{0, \Lambda_\delta}$  можно описать как модель Изинга с непрерывными гауссовскими спинами, с взаимодействием ближайших соседей внутри  $\Lambda_\delta$ , но еще к тому же с дополнительным взаимодействием на границе.

Объясним, как свободное решетчатое поле определения 7.4.6 связано со свободным евклидовым полем из определения 7.4.2. Трюк в том, чтобы представить случайные величины  $\Phi_\delta(n\delta)$ ,  $n\delta \in \Lambda_\delta$  на пространстве  $Q_{N_m}$ , положив

$$(20) \quad \Phi_\delta(n\delta) = \Phi_0(f_{n\delta}),$$

где  $f_{n\delta}$  — функция на  $\mathbb{R}^d$ , чье преобразование Фурье равно

$$(21) \quad \hat{f}_{n\delta}(k) = \begin{cases} e^{-ikn\delta} \mu(k)/2\pi\mu_\delta(k) & \text{при } k \in \mathcal{T}_\delta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Явное вычисление показывает, что  $\int \Phi_0(f_{n\delta}) d\mu_0 = 0$  и

$$(22) \quad \langle \Phi_0(f_{n\delta}), \Phi_0(f_{n'\delta}) \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \langle f_{n\delta}, f_{n'\delta} \rangle_{N_m} = C_{n, n'},$$

где под  $L^2$  подразумевается  $L^2(d\mu_0)$ . Пусть носитель функции  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  лежит внутри области  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ . Положим

$$(23) \quad \Phi_\delta(g) = \sum_{n\delta \in \Lambda_\delta} \delta^d g(n\delta) \Phi_\delta(n\delta).$$

Используя представление  $\Phi_\delta(n\delta) = \Phi_0(f_{n\delta})$ , можно показать (см. Simon [1]), что  $\Phi_\delta(g)$  сходится к  $\Phi_0(g)$  при  $\delta \downarrow 0$  в любом из пространств  $L^p(Q_{N_m}, d\mu_0)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Таким образом, на свободное решетчатое поле можно смотреть как на приближение «изнутри» к свободному евклидовскому полю.

Перейдем к *гиперконечной картине*, которая дает приближение свободного евклидового поля «снаружи». Пусть  $\delta > 0$  бесконечно мало,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область,  $\mathbb{R}^d \subset \Lambda$ , и  $\Lambda_\delta$  — гиперконечная решетка в  $\mathbb{R}^d$  с шагом  $\delta$ . Применяя к определению 7.4.6 принцип переноса, строим гиперконечное свободное поле.

**7.4.7. Определение.** Пусть  $(\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}, L(\mathcal{H}), L(\mu_{0, \Lambda_\delta}))$  — пространство Лёба, построенное из внутренней борелевской алгебры  $\mathcal{H}$  на  $\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$  и внутренней меры  $\mu_{0, \Lambda_\delta}$ , полученной с помощью принципа переноса из формулы (18). *Гиперконечное решетчатое свободное поле* — это случайное поле

$$\Phi_\delta: \Lambda_\delta \times \mathbb{R}^{\Lambda_\delta} \rightarrow \mathbb{R},$$

задаваемое равенством

$$\Phi_\delta(n\delta, q) = q_{n\delta},$$

где  $n\delta \in \Lambda_\delta$  и  $q \in \mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$ .

Справедливо следующее утверждение о регулярности.

**7.4.8. Лемма.** Пусть  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; тогда же на множестве  $L(\mu_{0, \Lambda_\delta})$ -меры 1 в  $\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$  величина

$$(24) \quad \Phi_\delta(*g) = \sum \delta^d \cdot *g(n\delta) \Phi_\delta(n\delta)$$

околостандартна.

Для доказательства заметим, что справедлива следующая формула для ковариации относительно внутренней меры  $\mu_{0, \Lambda_\delta}$

$$(25) \quad E(\Phi_\delta(*g) \Phi_\delta(*g)) = \sum \delta^{2d} \cdot *g(n\delta) \cdot g(n'\delta) C_{n, n'},$$

а эта величина конечна в силу того, что функция  $g$  имеет компактный носитель.  $\square$

Пусть  $D$  — счетное множество функций из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , плотное в пространстве  $N_m$ . Из только что доказанной леммы следует,

что существует такое множество  $R \subset {}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$ ,  $L(\mu_0, \Lambda_\delta)(R) = 1$ , что для всех  $g \in D$  и всех  $q \in R$  величина  $\Phi_\delta({}^*g)(q)$  около-стандартна.

**7.4.9. Теорема.** *Случайное поле  $\Phi_\delta$  на гиперконечной решетке  $\Lambda_\delta$ , где  $\Lambda \supset \mathbb{R}^d$  и  $\delta > 0$  бесконечно мало, является «реализацией» свободного евклидового поля на вероятностном пространстве  $({}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}, L(\mathcal{B}), L(\mu_0, \Lambda_\delta))$ .*

Имеется в виду в точности следующее. Множество  $\{\text{st}(\Phi_\delta({}^*g)) \mid g \in D\}$  представляет собой семейство гауссовских случайных величин с нулевым средним и с «правильной» ковариацией

$$\langle \text{st}(\Phi_\delta({}^*g)), \text{st}(\Phi_\delta({}^*g)) \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \langle g, g \rangle_{N_m}.$$

Поскольку множество  $D$  плотно в  $N_m$ , последнее равенство можно продолжить на все пространство  $N_m$ . Таким образом, величина  $\Phi_0(g)$  для  $g \in N_m$  может быть представлена как  $\text{st}(\Phi_\delta({}^*g))$ .

Доказательство состоит во взятии стандартных частей в формуле (25); так же, как в § 6.2, это приведет к стандартному интегралу по ядру резольвенты лапласиана. Далее надо воспользоваться формулой (4).

**7.4.10. Замечание.** Мы видим, что теорема 7.4.9 о представлении не зависит от конкретного выбора бесконечно малого  $\delta$  и гиперконечной решетки  $\Lambda_\delta$ . Это соответствует сходимости  $\Phi_\delta(g)$  к  $\Phi_0(g)$  при  $\delta \downarrow 0$  в случае конечной решетчатой аппроксимации — см. обсуждение в связи с формулой (23).

Таким образом, мы построили свободное поле на гиперконечной решетке. Формула (24) задает это поле как внутреннюю конструкцию. Стоит отметить здесь один аспект: наше поле *определено поточно*; величины  $\Phi_\delta(n\delta)$  имеют ясный вычислительный смысл для всех точек  $n\delta \in \Lambda_\delta$ . При стандартном подходе определения 7.4.2 это невозможно. Не удастся приписать понятный смысл величинам  $\Phi_\delta(f_{n\delta})$  при бесконечно малом  $\delta$ , ибо если  $n\delta$  выбрано так, что  $x = \text{st}(n\delta)$  существует как точка в  $\mathbb{R}^d$ , то величина  $\Phi_\delta(f_{n\delta})$  должна была бы соответствовать значению поля в точке  $x$ ; но такого понятия, вообще говоря, не существует<sup>1)</sup>.

При стандартном подходе это приводит нас к понятию случайного поля, индексированного некоторым пространством проб-

<sup>1)</sup> Иными словами, для двух бесконечно близких точек  $n\delta, m\delta$ ,  $\text{st}(n\delta) = \text{st}(m\delta) = x$ , величины  $\Phi_\delta(n\delta)$  и  $\Phi_\delta(m\delta)$  могут существенно отличаться, и определить «значение поля в точке  $x$ » не удастся — Прим. перев.

ных функций. Напротив, при нестандартном подходе мы используем в качестве исходного множества индексов узлы решетки  $\Lambda_\delta$ , и продолжаем поле на пробные функции с помощью формулы (7.4.24). При этом у нас по-прежнему будут возникать «бесконечности», но их можно контролировать с помощью соответствующей алгебры, что ведет к разумным и недвусмысленным результатам.

**Замечание.** Вероятностное пространство  $(^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}, L(\mathcal{B}), L(\mu, \Lambda_\delta))$  дает гиперконечную реализацию *обобщенного случайного поля*. В работе Kessler [1] развит общий гиперконечный подход к обобщенным случайным полям. По-видимому, нестандартный подход дает некоторые технические преимущества. В частности, если основное вероятностное пространство является пространством Лёба, то оказывается, что характеристики Гельфанда и Урбаника обобщенных полей порядка  $n$  эквивалентны; детали см. в упомянутой статье Кесслера.

Поскольку мы все равно отвлеклись, воспользуемся возможностью, чтобы вставить краткое замечание о статусе обобщенных функций в связи с нестандартным анализом. То, что нестандартный анализ может предоставить подходящие рамки для изучения обобщенных функций, было понято достаточно рано — см., например, представление  $\delta$ -функции Дирака в виде  $\delta(x) = (\pi\epsilon)^{-d/2} e^{-|x|^2/2\epsilon}$ ,  $\epsilon \approx 0$  (Robinson [1], Laugwitz [1]). Нестандартная теория легко перенимает и более общее определение обобщенных функций как пределов последовательностей (Antosik и др. [1]), заменяя последовательности и пределы бесконечно малыми и стандартными частями; см., например, Richter [1]. Однако систематическое исследование, особенно в связи с дифференциальными уравнениями в частных производных, до сих пор отсутствует (см. тем не менее работу Li Bang-He [1], где обобщенные функции определяются нестандартным образом через аналитические функции). В § 6.5 мы видели, что обобщенные решения в нестандартном смысле иногда могут в самом деле дать новый взгляд на задачи о дифференциальных уравнениях в частных производных там, где обобщенные функции в стандартном смысле ничего не дают. Кесслер разработал систематический гиперконечный подход к обобщенным функциям. Намек дает формула (24): обобщенная функция  $\Phi_0(g)$ , формально записываемая в виде интеграла  $\int \Phi_0(x) g(x) dx$ , реализуется в виде стандартной части от суммы

$$\sum \delta^d \cdot {}^*g(n\delta) \Phi_\delta(n\delta),$$

что вполне осмысленно. Кесслер вообще заменяет пробные функции, обобщенные функции и дифференциальные операторы их



гиперконечными аналогами. В частности, элементы пространства  $D'$  поднимаются до внутренних функций на некоторой гиперконечной решетке  $\Gamma$ , являющейся «богатым» подмножеством в  ${}^*\mathbb{R}^d$ . Упомянутый выше результат об обобщенных полях  $n$ -го порядка — это лишь частный случай того, сколь удобный контроль над обобщенными функциями может быть достигнут при использовании гиперконечной картины.

**Замечание.** Существуют и другие попытки использования нестандартных методов при обсуждении квантовых полей, например, Blanchard, Tarski [1], Fittler [1], Kelemen, Robinson [1] Nagamachi, Nishimura [1].

### С. Взаимодействующие скалярные поля

О свободном поле сказано уже достаточно; пора вернуться к взаимодействиям. Мы будем следовать программе, намека на которую содержится в формуле (10).

Один из путей получения взаимодействий состоит в построении подходящих «локальных аддитивных функционалов» от свободного поля; в конечном счете, чтобы это проделать, мы используем нашу гиперконечную реализацию из определения 7.4.7. Но сначала очертим стандартную процедуру. Пусть  $\delta > 0$  — стандартное действительное число, и  $\Lambda_\delta$  — решетка, полученная из ограниченной области  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ . Пусть  $g$  — неотрицательная функция с носителем в области  $\Lambda$ , и пусть  $u_\delta$  — произвольная непрерывная действительная функция. Мы будем изучать взаимодействия вида

$$(26) \quad U_g^\delta = \lambda_\delta \sum \delta^d g(n\delta) u_\delta(\Phi_\delta(n\delta)),$$

где  $\lambda_\delta$  — некоторая положительная константа, так называемая «константа связи». По аналогии с формулой (10) положим

$$(27) \quad d\mu_{g, \Lambda_\delta} = \frac{\exp(-U_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta}}{\int \exp(-U_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta}}.$$

Мы находимся в конечной ситуации, так что при некоторых разумных условиях  $\mu_{g, \Lambda_\delta}$  оказывается корректно определенной вероятностной мерой.

Функция  $g$  в формуле (26) представляет собой некоторого рода «пространственное обрезание»; она, например, может быть характеристической функцией некоторой подобласти в  $\Lambda$ . Чтобы получить нетривиальное поле, мы устремим  $\delta$  к нулю, заставив в то же самое время  $\Lambda$  стремиться к  $\mathbb{R}^d$ . Для снятия пространственного обрезания устремим  $g$  к функции, тождественно равной 1 на всем  $\mathbb{R}^d$ .

Гиперконечная версия всего сказанного состоит в выборе бесконечно малого  $\delta > 0$ , гиперконечной решетки  $\Lambda_\delta$ , являющейся богатым подмножеством в  ${}^*\mathbb{R}^d$ , и такой внутренней функции  $g$ , что  $g(n\delta) = 1$  для всех околостандартных  $n\delta \in \Lambda_\delta$ . В силу принципа переноса формулы (26) и (27) по-прежнему имеют смысл. Но мы хотим извлечь из внутреннего объекта  $\mu_{g, \Lambda_\delta}$  не-гауссовскую меру, удовлетворяющую условиям определения 7.4.4.

Обсудим эту проблему шаг за шагом. Сначала проделаем несколько вычислений в по-настоящему конечном случае. Далее выберем бесконечно малое  $\delta > 0$  и гиперконечную решетку  $\Lambda_\delta$ , но функцию  $g$  по-прежнему будем брать с компактным носителем. После этого вернемся к конечному случаю и установим некоторые оценки, которые в конечном итоге используются для снятия пространственного обрезания в гиперконечной модели.

Такова общая программа, которую мы обсудим довольно детально для случая экспоненциального взаимодействия, т. е. когда выбрана (не зависящая от  $\delta$ ) функция  $u(y) = \exp(\alpha y)$ ,  $\alpha$  — некоторое действительное число; см. Albeverio, Нøegh-Krohn [1].

Начнем со следующего вычисления: пусть  $\delta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Lambda_\delta$  — конечная решетка, и носитель функции  $g \geq 0$  содержится в области  $\Lambda$ . Тогда

$$(28) \quad \int (U_g^\delta)^2 d\mu_{0, \Lambda_\delta} = \lambda_\delta^2 \sum_{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta} \delta^{2d} g(n\delta) g(n'\delta) \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}} e^{\alpha(\Phi_\delta(n\delta) + \Phi_\delta(n'\delta))} d\mu_{0, \Lambda_\delta}.$$

Из хорошо известных свойств гауссовских интегралов получаем

$$(29) \quad \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}} e^{\alpha(\Phi_\delta(n\delta) + \Phi_\delta(n'\delta))} d\mu_{0, \Lambda_\delta} = e^{\alpha^2 C_{n, n'}^\delta + \frac{\alpha^2}{2} C_{n, n}^\delta + \frac{\alpha^2}{2} C_{n', n'}^\delta} = (A_\alpha^\delta)^2 e^{\alpha^2 C_{n, n'}^\delta},$$

где верхний индекс  $\delta$  над матричным элементом  $C_{n, n'}$  (см. (14)) поставлен для того, чтобы подчеркнуть зависимость от  $\delta$ , и где, согласно (15), величина

$$(30) \quad A_\alpha^\delta = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2} C_{n, n}^\delta\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2} (2\pi)^{-d} \int_{\mathcal{F}_\delta} \mu_\delta(k)^{-2} dk\right)$$

не зависит от  $n$ . Таким образом,

$$(31) \quad \int (U_g^\delta)^2 d\mu_{0, \Lambda_\delta} = \lambda_\delta^2 (A_\alpha^\delta)^2 \sum_{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta} \delta^{2d} g(n\delta) g(n'\delta) e^{\alpha^2 C_{n, n'}^\delta}.$$

Поскольку мы находимся в конечной ситуации, все величины корректно определены.

Переходя к следующему шагу, возьмем  $\delta \approx 0$  и гиперконечную решетку  $\Lambda_\delta$ , но сохраним функцию  $g$  стандартной с компактным носителем. По принципу переноса выражение (31) по-прежнему определено, но может оказаться бесконечно большим. Нам нужно узнать, при каких значениях величин  $d$ ,  $\alpha$  и  $\lambda_\delta$  выражение в правой части (31) будет околостандартным.

При  $d = 1$  сумма

$$(32) \quad \sum_{n\delta, n'\delta \in \Lambda_\delta} \delta^{2d} \cdot {}^*g(n\delta) \cdot {}^*g(n'\delta) e^{\alpha^2 C_{n, n'}^\delta}$$

конечна для всех  $\alpha$ , поскольку величина  $C_{n, n'}^\delta$  конечна для всех  $n, n'$ , а функция  $g$  имеет компактный носитель.

При  $d = 2$  и при  $|n\delta - n'\delta| \approx 0$  величина  $C_{n, n'}^\delta$  с точностью до конечных слагаемых равна  $-(1/2\pi) \ln |n\delta - n'\delta|$ . Поэтому, если  $\alpha^2 < 4\pi$  и  $g$  имеет компактный носитель, то сумма (32) конечна.

При  $d \geq 3$ , а также при  $d = 2$  и  $\alpha^2 \geq 4\pi$  сумма бесконечно велика. (Аналитические детали читатель может найти в работе Albeverio, Høegh-Krohn [1].)

Таким образом, при  $d = 1$ , а также при  $d = 2$  и  $\alpha^2 < 4\pi$  правая часть равенства (31) будет конечной, если конечна величина  $\lambda_\delta^2 (A_\alpha^\delta)^2$ . Из формулы (30) видно, что при  $\delta \approx 0$  и  $d = 2$  величина  $A_\alpha^\delta$  бесконечно велика. Но у нас есть еще один свободный выбор: мы пока никак не определили константу связи  $\lambda_\delta$ . Поэтому положим

$$(33) \quad \lambda_\delta = \lambda (A_\alpha^\delta)^{-1},$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  не зависит от  $\alpha$  и  $\delta$ . При таком выборе правая часть равенства (31) околостандартна. Нетрудно проверить, что ее стандартная часть равна

$$(34) \quad \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} g(x) g(y) e^{\alpha^2 G(x-y)} dx dy,$$

где  $G(x-y)$  — ядро оператора  $(-\Delta + m^2)^{-1}$ ; аналогичные рассуждения см. в § 6.2 и в теореме 7.4.9.

В итоге можно заключить, что функция  $U_g^\delta$  положительна, и при указанном выше выборе константы  $\lambda_\delta$  ее  $L^2(d\mu_0, \Lambda_\delta)$ -норма конечна; более того, легко видеть, что  $\text{st}(U_g^\delta) \neq 0$ . Значит, при  $d = 1$  и любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ , а также при  $d = 2$  и  $\alpha^2 < 4\pi$  функция  $\exp(-U_g^\delta)$  околостандартна и не равна тождественно единице. Таким образом, мы получили следующий результат.

**7.4.11. Теорема.** При  $d = 1$  и любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ , а также при  $d = 2$  и  $\alpha^2 < 4\pi$  мера Лёба  $L(\mu_{g, \Lambda_\delta})$ , отвечающая внутренней мере  $\mu_{g, \Lambda_\delta}$ , определенной равенством (27), с константой связи в случае  $d = 2$ , выбранной в соответствии с формулой (33) для любой стандартной функции  $g \geq 0$  с компактным носителем, абсолютно непрерывна относительно меры  $L(\mu_{0, \Lambda_\delta})$ , отвечающей свободному полю, причем производная Радона — Никодима принадлежит классу  $L^\infty$  и равна

$$\text{st} \left( e^{-U_g^\delta} / \int e^{-U_g^\delta} d\mu_{0, \Lambda_\delta} \right).$$

Мы завершили второй этап нашей программы. Прежде чем пойти дальше, отметим, что взаимодействие  $U_g^\delta$  чаще записывается в виде

$$U_g^\delta = \lambda \sum \delta^d g(n\delta) : e^{\alpha \Phi_\delta(n\delta)} :,$$

где:  $e^{\alpha \Phi_\delta(n\delta)} := (A_\alpha^\delta)^{-1} e^{\alpha \Phi_\delta(n\delta)}$  — так называемая перенормировка Вика случайной величины  $e^{\alpha \Phi_\delta(n\delta)}$ . В обозначениях Вика равенство (29) есть не что иное, как частный случай тождества

$$\langle : \exp(\alpha f) : , : \exp(\beta g) : \rangle = \exp(\alpha \beta \langle f, g \rangle).$$

Мы избрали более прямой подход, чтобы яснее высветить выбор бесконечно малой константы связи в (33).

**7.4.12. Замечание.** Величину  $U_g^\delta$ , очевидно, можно заменить на  $\tilde{U}_g^\delta = \int U_g^\delta d\nu(\alpha)$  для произвольной положительной конечной меры  $\nu$  (в случае  $d = 2$  носитель меры  $\nu$  должен содержаться в интервале  $(-\sqrt{4\pi}, \sqrt{4\pi})$ ). Именно этот случай был исследован стандартными методами в работе Albeverio, Høegh-Krohn [1]; см. также ссылки, имеющиеся в работе Albeverio, Høegh-Krohn [13].

Вернемся к дискретному случаю и установим некоторые неравенства, которые сыграют решающую роль в финальном снятии пространственного обрезания. Пусть  $\delta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Lambda_\delta$  — конечная решетка, и носитель функции  $g$  лежит в  $\Lambda$ . Мы будем использовать взаимодействие  $\tilde{U}_g^\delta$ , где для простоты будем считать, что  $\nu(\alpha) = \nu(-\alpha)$ . Функции Швингера, отвечающие мере  $\mu_{g, \Lambda_\delta}$ , равны

$$\begin{aligned} (35) \quad S_g^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta) &= \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) d\mu_{g, \Lambda_\delta} = \\ &= \left( \int \exp(-\tilde{U}_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta} \right)^{-1} \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) \exp(-\tilde{U}_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta}. \end{aligned}$$

Пусть носители  $\text{supp}(g)$ ,  $\text{supp}(g')$  функций  $g$ ,  $g'$  лежат в  $\Lambda$ ; предположим, что  $\text{supp}(g) \subset \text{supp}(g')$  и  $g = g'$  на  $\text{supp}(g)$ . Мы хотим показать, что

$$(36) \quad S_{g'}^\delta \leq S_g^\delta.$$

Чтобы сделать это, введем функции

$$(37) \quad S_{g', g, \beta}^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta) = \\ = \frac{\int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) \exp(-\beta(\tilde{U}_{g'}^\delta - \tilde{U}_g^\delta)) \exp(-\tilde{U}_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta}}{\int \exp(-\beta(\tilde{U}_{g'}^\delta - \tilde{U}_g^\delta)) \exp(-\tilde{U}_g^\delta) d\mu_{0, \Lambda_\delta}}.$$

Заметим, что  $S_{g'}^\delta = S_{g', g, 1}^\delta$  и  $S_g^\delta = S_{g', g, 0}^\delta$ . Следовательно, чтобы установить неравенство (36), достаточно вычислить  $\partial S_{g', g, \beta}^\delta / \partial \beta$  и показать, что  $\partial S_{g', g, \beta}^\delta / \partial \beta \leq 0$  при  $0 \leq \beta \leq 1$ . А этот факт следует из неравенств Гриффитса — Келли — Шермана: см. Simon [1]. В общих чертах рассуждение состоит в следующем. Отталкиваясь от явного вида меры  $d\mu_{g, \Lambda_\delta}$  (см. (27) и (18)), из упомянутых неравенств непосредственно получаем

$$(38) \quad \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) \Phi_\delta(n\delta)^l d\mu_{g, \Lambda_\delta} \geq \\ \geq \left( \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) d\mu_{g, \Lambda_\delta} \right) \int \Phi_\delta(n\delta)^l d\mu_{g, \Lambda_\delta}$$

для всех  $l \geq 0$ . Далее, используя разложение в ряд и четность меры  $dv$ , можно показать, что

$$(39) \quad \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) (\tilde{U}_{g'}^\delta - \tilde{U}_g^\delta) d\mu_{g, \Lambda_\delta} \geq \\ \geq \left( \int \Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta) d\mu_{g, \Lambda_\delta} \right) \int (\tilde{U}_{g'}^\delta - \tilde{U}_g^\delta) d\mu_{g, \Lambda_\delta},$$

а это как раз то, что требуется для доказательства неравенства  $\partial S_{g', g, \beta}^\delta / \partial \beta \leq 0$ . Аналогичным образом из тех же неравенств следует, что для всех  $g$  с носителем в  $\Lambda$

$$(40) \quad S_g^\delta \geq 0.$$

Теперь все готово для заключительной стадии. Давайте снова вернемся к гиперконечной модели с бесконечно малым  $\delta > 0$  и гиперконечной решеткой  $\Lambda_\delta$ . По принципу переноса моменты  $S_g^\delta$  корректно определены по отношению к соответствующей внутрешней мере.

Рассмотрим сначала случай  $g = 0$  на  $\Lambda_\delta$ . В этом случае мы получим функции Швингера для свободного поля. Более детально, пусть  $n_1\delta$  и  $n_2\delta$  — конечные точки; предположим, что

$x = \text{st}(n_1\delta) \neq \text{st}(n_2\delta) = y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Тогда для  $d = 2$  имеем

$$(41) \quad \begin{aligned} {}^\circ(S_0^\delta(n_1\delta, n_2\delta)) &= \int {}^\circ(\Phi_\delta(n_1\delta) \Phi_\delta(n_2\delta)) dL(\mu_0, \Lambda_\delta) = \\ &= S_0(x, y) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2} dk. \end{aligned}$$

Как хорошо известно, в случае свободного поля произвольная функция Швингера выражается в виде суммы произведений «двухточечных функций», определенных в (41). Поэтому для несовпадающих точек  $x_1 = \text{st}(n_1\delta)$ , ...,  $x_k = \text{st}(n_k\delta)$ ,  $x_i = n_j$  при  $i \neq j$ , величина  ${}^\circ S_0^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta)$  корректно определена и конечна. Пусть теперь  $g_n$  — характеристическая функция куба с центром в начале координат и со стороной  $2n$ . По принципу переноса

$$(42) \quad 0 \leq S_{*g_n}^\delta \leq S_0^\delta$$

для всех  $n$ . Возьмем бесконечно большое  $\omega$ , и пусть  $g_\omega$  — (внутренняя) характеристическая функция куба со стороной  $2\omega$ , причем  $\text{supp}(g_\omega) \subset \Lambda$ ; это значит, что если  $g_\omega(n\delta) = 1$ , то  $n\delta \in \Lambda_\delta$ . Тогда  $S_{g_\omega}^\delta$  — внутренняя моментная функция для внутренней меры  $\mu_{g_\omega, \Lambda_\delta}$ , и она тоже удовлетворяет неравенству (42). Далее, если  $n_i\delta \approx n'_i\delta$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и точки  $\text{st}(n_i\delta) \in \mathbb{R}^2$  при  $i = 1, \dots, k$  различны, то  $S_{g_\omega}^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta) \approx S_{g_\omega}^\delta(n'_1\delta, \dots, n'_k\delta)$ . Это следует из явного определения функций  $S_{g_\omega}^\delta$  и из того, что  $g_\omega(n_i\delta) = g_\omega(n'_i\delta)$  при  $i = 1, \dots, k$ . Таким образом, величина  $S_{g_\omega}^\delta$  имеет корректно определенную стандартную часть, и из неравенств

$$(43) \quad 0 \leq S_{g_\omega}^\delta \leq S_{*g_n}^\delta \text{ для всех } n \in \mathbb{N}$$

следует, что

$$(44) \quad \begin{aligned} {}^\circ(S_{g_\omega}^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta)) &= \int {}^\circ(\Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta)) dL(\mu_{g_\omega, \Lambda_\delta}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int {}^\circ(\Phi_\delta(n_1\delta) \dots \Phi_\delta(n_k\delta)) dL(\mu_{*g_n, \Lambda_\delta}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\circ(S_{*g_n}^\delta(n_1\delta, \dots, n_k\delta)). \end{aligned}$$

Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

**7.4.13. Теорема.** Пусть  $\delta > 0$  бесконечно мало,  $\Lambda_\delta$  — гиперконечная решетка, и  $g_\omega$  — такая внутренняя функция, что  $g_\omega(n\delta) = 1$  для всех конечных  $n\delta$ . Тогда  $L(\mu_{g_\omega, \Lambda_\delta})$  — это негаус-

совская вероятностная мера на  $({}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}, L(\mathcal{B}))$ , где  $\mathcal{B}$  — внутренняя борелевская алгебра на  ${}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$ . Функции Швингера этой меры конечны и  $S$ -непрерывны в конечных точках и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq S_{g_\omega}^\delta \leq S_0,$$

где  $S_0$  — (стандартные) функции Швингера свободного евклидова поля.

**Замечание.** Казалось бы, в гиперконечной картине мы одним махом совершили двойной предельный переход, выбрав  $\delta > 0$  бесконечно малым («непрерывный предел») и выбрав такую гиперконечную решетку  $\Lambda_\delta$ , что  $\text{st}(\Lambda_\delta)$  совпадает со всем  $\mathbb{R}^d$  («предел бесконечного объема»). Означает ли это, что в нестандартном анализе не надо заботиться о порядке, в котором берутся повторные пределы? Вовсе нет, как это видно из обсуждения в § 1.3. В нашей модели, однако, об этом в самом деле не приходится заботиться в силу свойств строгой монотонности соответствующих функций Швингера.

В работе Albeverio, Nøegh-Krohn [1] дается нетривиальная нижняя оценка для  $\text{st} S_{g_\omega}^\delta$ . Нам нужно еще проверить, что мера  $L(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta)$  — не гауссовская. Напомним, что если  $\mu$  — гауссовская мера (с нулевым средним), то

$$(45) \quad \langle f_1 \dots f_{2n} \rangle_\mu = \sum \langle f_{i_1} f_{j_1} \rangle_\mu \cdot \dots \cdot \langle f_{i_n} f_{j_n} \rangle_\mu,$$

где  $\langle \cdot \rangle_\mu$  обозначает усреднение по мере  $\mu$ , а сумма берется по всем таким перестановкам  $(i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n)$  множества индексов  $\{1, \dots, 2n\}$ , для которых  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ ,  $i_1 < j_1, \dots, i_n < j_n$ . Чтобы проверить негауссовость меры  $\mu = L(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta)$ , достаточно взять  $n = 2$ , одинаковые функции  $f$ , равные  $\Phi_\delta(*h)$  для некоторого подходящего  $h$ , и с помощью прямого вычисления убедиться в том, что равенство (45) нарушается; детали для стандартного случая см. в работе Albeverio, Nøegh-Krohn [7].

Осталось обсудить аксиомы из определения 7.4.4. Для этого есть два пути. При стандартном подходе, когда у нас нет гиперконечной модели и приходится работать с приближениями, задаваемыми последовательностью  $g_n$ , мы сначала определяем семейство характеристических функционалов, которые (в наших обозначениях) равны

$$(46) \quad S_n(f) = \int \exp(i \Phi_\delta(f)) dL(\mu_{g_n}, \Lambda_\delta), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Далее нужно показать, что существует

$$(47) \quad S_\infty(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f).$$

После этого применение теоремы Минлоса дает вероятную меру  $d\mu_\infty$  на  $S'(\mathbb{R}^2)$ , и мы вновь оказываемся в ситуации определения 7.4.4.

Но, имея гиперконечную модель и корректно определенную меру  $L(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta)$ , мы можем сразу определить требуемый характеристический функционал:

$$(48) \quad S(f) = \int \exp(i \operatorname{st} \Phi_\delta(f)) dL(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta),$$

где  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Определение 7.4.4 в этой ситуации вполне осмысленно, и мы можем заняться проверкой аксиом.

**7.4.14. Теорема.** *Вероятностная мера  $L(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta)$  на пространстве  $(\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}, L(\mathcal{B}))$  определяет негауссовскую евклидову теорию поля; это означает, что характеристический функционал*

$$S(f) = \int \exp(i \operatorname{st} \Phi_\delta(f)) dL(\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta)$$

*обладает всеми свойствами из определения 7.4.4 (т. е. аналитичностью, регулярностью, инвариантностью, положительностью при отражениях и эргодичностью).*

Мы не будем доказывать теорему во всех деталях. Заметим, что аналитичность и регулярность легко следуют из оценок, установленных в теореме 7.4.13. Для доказательства инвариантности нужно убедиться в том, что  $S(f \circ E) = S(f)$  для любой евклидовой симметрии  $E$ . Но при построении приближений  $g_n$  мы предполагали, что  $g_n$  — характеристическая функция некоторой ограниченной области  $\Lambda^{(n)} \subset \mathbb{R}^d$  (а именно, куба со стороной  $2n$  и с центром в начале координат). Применяя к области  $\Lambda^{(n)}$  симметрию  $E$ , мы получаем новую последовательность  $g'_n$ ; легко видеть, что при бесконечно большом  $\omega$  внутренняя функция  $g'_\omega$  определяет ту же меру, что и  $g_\omega$  — это следует из общего вида неравенств (36). Свойство положительности при отражениях следует из того факта, что внутренняя предельная мера  $\mu_{g_\omega}, \Lambda_\delta$  обладает гиперконечным глобальным марковским свойством — см. § 7.3. Оценки из теоремы 7.4.13 вновь играют существенную роль при проверке эргодичности: детали, однако, здесь довольно трудоемки, и мы приглашаем читателя обратиться к оригинальной работе Albeverio, Nøegh-Krohn [1].  $\square$

Мы рассмотрели особенно простую модель, чтобы показать, как использовать гиперконечную картину для построения моделей квантовых полей.

Отметим, что гиперконечную конструкцию можно использовать для любой размерности пространства-времени. С помощью



взаимодействия

$$(49) \quad U_g^\delta = \lambda_\delta \sum \delta^d g(n\delta) u_\delta(\Phi_\delta(n\delta))$$

можно получить внутреннюю меру  $\mu_{g, \Lambda_\delta}$ . Соответствующая мера Лёба всегда существует, и некоторые из аксиом — а именно, инвариантность при евклидовских переносах и отражениях и положительность при отражениях — проверяются непосредственно.

Что касается остальных аксиом, можно найти способы справиться и с ними; настоящая трудность кроется в том факте, что мера  $L(\mu_{g, \Lambda_\delta})$  может оказаться тривиальной, т. е. совпадающей со свободной мерой. Обсуждение этих вопросов см. в работах Albeverio, Høegh-Krohn [1], [8], [13], Albeverio, Galavotti, Høegh-Krohn [1].

Добавим несколько замечаний о «полях с граничными условиями»; они потребуются нам в § 7.5. Пусть  $\mu_{0, \Lambda_\delta}^B$  — гауссовская мера, задаваемая формулой

$$(50) \quad d\mu_{0, \Lambda_\delta}^B(q) = (2\pi)^{-l/2} [\det(C^\Lambda)]^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum (C^\Lambda)^{-1}_{n, n'} q_{n\delta} q_{n'\delta}\right) dq,$$

где  $(C^\Lambda)^{-1} = ((C^{-1})^\Lambda - B_{\partial\Lambda})$ ,  $C^{-1} = \delta^d(-\Delta_\delta + m^2)$ ,  $(C^{-1})^\Lambda$  — это ограничение матрицы  $C^{-1}$  на  $\Lambda_\delta$ , а  $B_{\partial\Lambda}$  — мера, сосредоточенная на  $\partial\Lambda$  (см. формулы (17), (18)). Мы называем меру  $\mu_{0, \Lambda_\delta}^B$  *мерой свободного решетчатого поля с граничным условием B*.

Иногда удобно в качестве области  $\Lambda$  брать «гиперкуб» вида  $\prod_{i=1}^d (-l_i\delta, l_i\delta)$ , а  $\Lambda_\delta = \Lambda \cap \mathcal{L}_\delta$ .

Свободное решетчатое поле  $\Phi_\delta^B$  на  $\Lambda_\delta$  с граничным условием  $B$  было введено в определениях 7.4.6 и 7.4.7. Это гауссовское случайное поле с нулевым средним и с ковариацией

$$(51) \quad E(\Phi_\delta^B(n\delta) \Phi_\delta^B(n'\delta)) = C_{n, n'}^\Lambda,$$

где  $E$  обозначает математическое ожидание по мере  $\mu_{0, \Lambda_\delta}^B$ .

В § 7.5, в частности, будут использоваться «неймановские граничные условия»; это означает, что мы полагаем  $(B_{\partial\Lambda})_{n, m} = \delta_{n, m} i$ , где

$$i = \begin{cases} 2, & \text{если } n\delta \in \partial\Lambda_\delta \text{ — угловая вершина,} \\ 1, & \text{если } n\delta \in \partial\Lambda_\delta \text{ — не угловая вершина.} \end{cases}$$

Заметим, что это соответствует выбрасыванию из плотности меры  $\mu_{0, \Lambda_\delta}^B$  перекрестных членов  $(q_{n\delta} - q_{n'\delta})^2$  на  $\partial\Lambda_\delta$ , так что

мы получаем дискретную версию приравнивания нулю нормальной производной.

Другой частный выбор — это «граничные условия Дирихле», когда полагают  $B_{\partial\Lambda} = 0$ .

Поле  $(\Phi_\delta^B, \mu_{\delta, \Lambda_\delta}^B)$  можно использовать в формулах (26) и (27) для построения негауссовских евклидовых случайных полей. Это было проделано в некотором числе работ по конструктивной квантовой теории поля: см. Simon [1], Glimm, Jaffe [1], а также цитируемые в них работы.

Завершим этот раздел несколькими замечаниями о модели  $\Phi_d^4$  с гиперконечной точки зрения. В модели  $\Phi_d^4$  взаимодействие имеет вид (49), где функция  $u_\delta$  является полиномом четвертой степени. Мы приведем набросок подхода работы Brydges, Frölich, Sokal [1] для случаев  $d = 2, 3$  и покажем, как их конструкция укладывается в предлагаемые нами рамки. На самом деле, используя гиперконечную решетку, мы преодолеем «некоторую безвкусицу» конструкции (использующей компактность и подпоследовательности), в которой авторы нуждаются для завершения своей программы.

Начнем с теории в конечном объеме. Пусть  $\Lambda_\delta$  — конечная решетка с шагом  $\delta > 0$  в  $\mathbb{R}^d$ . На  $\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}$  введем меру

$$(52) \quad d\mu(\varphi) = Z_{\Lambda_\delta}^{-1} \exp(-S_{\Lambda_\delta}(\varphi)) \prod_{x \in \Lambda_\delta} d\varphi_x,$$

где  $Z_{\Lambda_\delta}$  — нормировочный множитель, и

$$(53) \quad S_{\Lambda_\delta}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{|x-y|=\delta} \delta^{d-2} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \frac{1}{2} a \sum_{x \in \Lambda_\delta} \delta^d \varphi_x^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{x \in \Lambda_\delta} \delta^d \varphi_x^4,$$

$\lambda, a \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ . При этом сумма по ближайшим соседям  $|x - y| = \delta$  берется по всей решетке  $\mathcal{L}_\delta = \{n\delta | n \in \mathbb{Z}^d\}$ , но при этом мы считаем, что  $\varphi_x \equiv 0$  при  $x \notin \Lambda_\delta$ , что соответствует наложению граничных условий Дирихле.

**Замечание.** Мы следуем изложению в цитируемой работе Brydges, Frölich, Sokal [1]. Поэтому мера (52) содержит одновременно «свободную» и «взаимодействующую» части. Взаимодействующая часть, соответствующая формуле (49), равна

$$\frac{1}{2} a \sum_{x \in \Lambda_\delta} \delta^d \varphi_x^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{x \in \Lambda_\delta} \delta^d \varphi_x^4.$$

Авторы обращают обычную процедуру и берут сначала предел бесконечного объема. Пусть  $\langle \cdot \rangle_{\Lambda_\delta}^{(\delta)}$  обозначает математическое ожидание по мере (52). Из известных неравенств и равно-

мерных оценок (см. цитируемую работу) следует, что определен следующий предел:

$$(54) \quad \langle F \rangle^{(\delta)} = \lim_{\Lambda_\delta \uparrow \omega} \langle F \rangle_{\Lambda_\delta}^{(\delta)};$$

заметим, что  $\delta$  остается фиксированным. На нашем языке это означает, что мы переходим к гиперконечной решетке  $\Gamma_\delta$  с конечным шагом  $\delta$  и полагаем

$$(55) \quad \langle F \rangle^{(\delta)} = \text{st} \langle F \rangle_{\Gamma_\delta}^{(\delta)}.$$

Осталось перейти к «непрерывному пределу», т. е. взять положительным бесконечно малым. Чтобы получить нечто конечное и в то же время нетривиальное, нужны сильные равномерные неравенства.

Как выше (см. (33)) нам пришлось выбирать  $\lambda_\delta = \lambda (A_a^\delta)^{-1}$ , чтобы сократить некоторые бесконечности при переходе к непрерывному ( $\delta \approx 0$ ) пределу, здесь мы тоже нуждаемся в подходящих массовых контрчленах». Фактически выбирается

$$(56) \quad a(\delta) = \begin{cases} m_0^2 + \delta m_1^2(\delta) & \text{при } d=2, \\ m_0^2 + \delta m_1^2(\delta) + \delta m_2^2(\delta) & \text{при } d=3, \end{cases}$$

где  $\delta m_1^2 = -3\lambda C^{(\delta)}(0, 0)$ ,  $\delta m_2^2 = 6\lambda^2 \int C^{(\delta)}(0, z) dz$ , а  $C^{(\delta)}(x, y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle^{(\delta)}$  — свободная (т. е. отвечающая  $\lambda=0$ ,  $a=m_0^2$ ) двухточечная функция в пределе бесконечного объема.

Пусть  $S^{(\delta)}(x, y) = \langle \varphi_x \varphi_y \rangle^{(\delta)}$  — взаимодействующая двухточечная функция в пределе бесконечного объема. Обозначим через  $||| \cdot |||$  норму

$$(57) \quad ||| f ||| = \| f \|_1 + \| f \|_\infty.$$

Ключевым моментом успешного перехода к непрерывному пределу является следующее неравенство, от которого решающим образом зависит «перенормировка» (56): существуют такие универсальные константы  $\lambda_0 > 0$  и  $c$ , что для всех  $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$

$$(58) \quad ||| S^{(\delta)} - C^{(\delta)} ||| \leq c\lambda^2;$$

*универсальный* в данном контексте значит не зависящий от  $\delta$ . Как только установлено это неравенство, обычные аргументы позволяют завершить конструкцию. При нашем подходе мы приходим к нетривиальной теории на гиперконечной решетке  $\Gamma_\delta$  с  $\delta \approx 0$ .

Завершим обсуждение несколькими замечаниями об оценке (58). В ее доказательство входят три основных ингредиента:

(i) уравнение поля, которое в случае решетки  $\Gamma_\delta$  получается переносом из теории для конечного объема;

(ii) так называемые скелетные неравенства, которые доказываются с помощью представления классических спиновых систем через случайные блуждания (см. цитируемую работу);

(iii) непрерывная зависимость величины  $\|S^{(\delta)} - C^{(\delta)}\|$  от параметра  $\lambda$ .

В случае  $d = 4$  у нас нет такой истории с благополучным концом, которую можно было бы здесь пересказать. Некоторые положительные результаты получены в книге Glimm, Jaffe [1]. Имеются также некоторые соображения, наводящие на мысль о том, что теория  $\Phi_4^4$  с положительным  $\lambda$  тривиальна, т. е. что соответствующая мера «схлопывается» в свободную меру. Обсуждалась также возможность нетривиальной теории  $\Phi_4^4$  с  $\lambda < 0$ ; см. работы Albeverio, Blanchard, Høegh-Krohn [1], Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn, Karwowski, Lindstrøm [1] и содержащиеся в них ссылки.

В § 7.5 мы вернемся к обсуждению модели  $\Phi_4^4$  в связи с «полимерным представлением».

#### *Д. Несколько заключительных замечаний о калибровочных полях*

Как в математике, так и в физике наблюдается огромный интерес к *калибровочным полям*: см., например, Frölich [1], Seiler [1] и содержащиеся в этих работах ссылки. Многие физики выражают надежду, что квантованные калибровочные поля могут дать подходящее физическое описание взаимодействий в физике элементарных частиц, а математики изучают калибровочные поля, во-первых, в качестве возможных кандидатов на роль нетривиальных моделей релятивистских квантовых полей, и, во-вторых, в связи с богатой математической структурой, которую эти поля демонстрируют на классическом уровне. В этой заключительной части параграфа мы покажем, как, отталкиваясь от моделей на гиперконечной решетке с бесконечно малым шагом (см. § 7.4 В, С), можно описать в нестандартных терминах непрерывные калибровочные поля в размерности 2. Более того, мы построим «марковские коповерхности» и «марковские ковекторные поля», которые являются естественными обобщениями абелевых калибровочных полей на произвольную размерность пространства — времени.

Начнем с напоминания некоторых понятий из стандартной теории. Пусть  $\Gamma$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ , и  $\delta > 0$ ; как обычно, положим

$$\Gamma_\delta = \Gamma \cap \mathcal{L}_\delta.$$

*Ячейка*  $A$  решетки  $\Gamma_\delta$  — это гиперкуб, образованный переносом гиперкуба  $\{x \in \mathbb{R}^d | 0 \leq x_i \leq \delta\}$  на вектор  $n\delta$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Как множество точек ячейка, разумеется, является подмножеством множества  $\mathbb{R}^d$ , а не  $\Gamma_\delta$ . Она определяется множеством своих вершин, которые обязаны лежать в  $\Gamma_\delta$ .

Обозначим через  $F_1, F_2, \dots, F_{2d}$  *границы* ячейки  $A$ , рассматриваемые как  $(d-1)$ -мерные гиперповерхности, ориентированные таким образом, чтобы базисный вектор, ортогональный каждой грани, смотрел наружу. Мы имеем  $\partial A = \bigcup_{i=1}^{2d} F_i$ , где  $\partial A$  — граница ячейки  $A$ . Будем называть две ячейки *смежными*, если они имеют общую грань; эта грань, будучи гранью двух ячеек, имеет, разумеется, противоположные ориентации.

При  $d=2$  определим *произведение*  $F_1 F_2$  двух таких граней (в данном случае отрезков), что конец отрезка  $F_1$  является началом отрезка  $F_2$ , как множество  $F_1 \cup F_2$  с ориентацией, заимствованной из ориентаций отрезков  $F_1$  и  $F_2$ . Аналогичным образом при  $d > 2$  определим произведение  $F_1 F_2$  двух таких ячеек, что  $F_1 \cap F_2$  является  $(d-2)$ -мерной ячейкой, и ее ориентации, унаследованные от  $F_1$  и от  $F_2$ , противоположны.

Определим рекуррентно

$$F_1 \dots F_{n+1} = (F_1 \dots F_n) F_{n+1};$$

пусть  $\Sigma = \Sigma_{\Gamma_\delta}$  — множество всех таких произведений.

Каждому элементу  $S \in \Sigma$  сопоставим элемент  $C(S)$  некоторой группы  $G$ , которая предполагается абелевой при  $d > 2$ , но не обязательно абелевой при  $d = 2$ . Мы предполагаем, что отображение  $C$  удовлетворяет условию

$$C(S_1 S_2) = C(S_1) C(S_2),$$

если  $S_1 S_2$  — корректно определенный элемент множества  $\Sigma$ , а произведение в правой части понимается в смысле групповой операции в  $G$ . Более того, мы предполагаем, что

$$C(S^{-1}) = C(S)^{-1},$$

где  $S^{-1}$  как множество совпадает с  $S$ , но имеет противоположную ориентацию.

Мы называем отображение  $C$  *коповерхностью* на  $\Gamma_\delta$  со значениями в  $G$ ; или, в другой терминологии,  $C$  — это  $G$ -значная  $(d-1)$ -коцепь. Множество всех коповерхностей на  $\Gamma_\delta$  обозначается  $\Gamma_G = \Gamma_{\Gamma_\delta}$ .

**Замечание.** В случае  $d=2$  клетки — это квадраты с вершинами в узлах решетки  $\Gamma_\delta$ , а грани — это отрезки, соединяющие соседние узлы. В терминологии решетчатой теории калибровочных полей клетки называются «плакетами», а грани — «связями».

Установив основную геометрическую терминологию, наделим теперь группу  $G$  измеримой структурой. Тогда мы сможем ввести понятие *стохастической коповерхности* как измеримого отображения  $S$  из некоторого вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  в  $\Gamma_G$ . При  $d = 1$  настоящего произведения граней нет, и множество  $\Sigma$  сводится к множеству узлов решетки  $\Gamma_\delta$ ; поэтому в этом случае стохастическая коповерхность — это просто дискретный  $G$ -значный случайный процесс, индексированный множеством  $\Gamma_\delta$ .

В этих замечаниях мы лишь походя коснемся понятия стохастической коповерхности: более широкое обсуждение см. в работах Albeverio, Нøegh-Krohn, Holden [1], [2].

Теперь мы готовы к тому, чтобы ввести основное понятие *взаимодействия*, подходящее для решетчатой теории калибровочных полей. Пусть  $U$  — такая действительная функция, что  $U(gh) = U(hg)$  для всех  $g, h \in G$ , и  $\beta$  — некоторая действительная константа. *Взаимодействие* на  $\Gamma_\delta$ , заданное функцией  $U$  и константой  $\beta$  — это семейство функций  $\{W_\Lambda\}$ , где  $\Lambda$  пробегает множество всех конечных объединений клеток решетки  $\Gamma_\delta$ , а именно,

$$W_\Lambda(C) = -\beta \sum_{A \subset \Lambda} U(C(\partial A)),$$

где сумма берется по всем клеткам  $A$  из  $\Lambda$ , а  $C$  — некоторая коповерхность из  $\Gamma_{G, \Lambda}$ . Фактически  $W_\Lambda(C)$  зависит только от коповерхностей вида  $C(\partial A)$ ,  $A \subset \Lambda$ . Заметим также, что в силу условий, наложенных на функцию  $U$ , величина  $U(C(\partial A)) = U(C(F_1) \dots C(F_{2d}))$  не зависит от порядка, в котором идут грани  $F_1, \dots, F_{2d}$  клетки  $A$ , если только этот порядок совместим с ориентацией.

Группа  $G$  имеет измеримую структуру: более точно, предположим, что на  $G$  задана  $G$ -инвариантная вероятностная мера  $dg$ , причем  $\beta$  и  $U$  таковы, что интеграл

$$c(\beta) = \int_G \exp(\beta U(g)) dg$$

существует. Тогда можно ввести вероятностную меру  $d\mu_\Lambda$  на  $\Gamma_{G, \Lambda}$  по формуле

$$d\mu_\Lambda(C) = Z_\Lambda^{-1} \exp(-W_\Lambda(C)) \prod_{A \subset \Lambda} \prod_{F \in \partial A} dC(F),$$

где

$$Z_\Lambda = \int \exp(-W_\Lambda(C)) \prod_{A \subset \Lambda} \prod_{F \in \partial A} dC(F),$$

а произведение берется по всем граням  $F$  всех клеток  $A$  из  $\Lambda$ . Поскольку  $U(C(\partial A))$  инвариантно относительно циклических

перестановок граней  $F_1, \dots, F_{2d}$  из  $\partial A$ , а  $W_A(C)$  инвариантно относительно перестановок клеток, мы видим, что и сама мера не зависит от порядка клеток и от порядка, в котором берутся их грани, при условии, что этот порядок таков, что  $\prod_{F \in \partial A} C(F) = C(\partial A)$ .

**Замечание.** Читателей может смутить обозначение  $dC(F)$ ; однако можно представлять себе  $C(F)$  как *переменную*, принимающую значения в группе  $G$ , а  $C(\partial A)$ , или, более общо,  $C(S)$ ,  $S \in \Sigma$  — как составные члены, полученные в соответствии с «определяющими соотношениями»  $C(S_1 S_2) = C(S_1) C(S_2)$  и  $C(S^{-1}) = C(S)^{-1}$ .

Для дальнейших ссылок заметим, что

$$Z_\Lambda = E_{\mu_\Lambda}(1) = c(\beta)^{N_\Lambda},$$

где  $N_\Lambda$  — число клеток в  $\Lambda$ .

Пусть  $f$  — функция на  $\Gamma_G, \Lambda$  вида

$$f(C) = f_0(g_1, \dots, g_l),$$

где  $f_0$  — действительнoзначная ограниченная непрерывная или неотрицательная измеримая функция на  $G^l$ , а каждое  $g_i = C(F_i)$ , где  $F_i$  — такая грань некоторой клетки  $A$  из  $\Lambda$ , что  $F_i \cap \partial \Lambda = \emptyset$ . Таким образом, функция  $f$  «сосредоточена» на внутренней области  $\Lambda$ ; для простоты будем писать  $\text{supp}(f) = (F_1, \dots, F_l)$ . Для таких  $f$  получаем следующую формулу для математического ожидания функции  $f$  по мере  $\mu_{\Gamma_\delta}$  (напомним, что  $\Gamma_\delta$  — тоже конечное объединение клеток):

$$(59) \quad E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f) = \int f \cdot \prod_{A \subset \text{supp}(f)} \left( \frac{e^{\beta U(C(\partial A))}}{c(\beta)} \right) \prod_{A \subset \text{supp}(f)} \prod_{F \in \partial A} dC(F).$$

По *принципу переноса* возьмем в качестве  $\Gamma_\delta$  *гиперконечную решетку с бесконечно малым шагом*, простирающуюся за пределы пространства  $\mathbb{R}^d$ . Тогда будет определена внутренняя величина  $E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f)$  и соответствующая мера Лёба  $L(\mu_{\Gamma_\delta})$ ; они могут служить отправной точкой для построения моделей калибровочных теорий поля.

**Замечание 1.** Мера  $\mu_{\Gamma_\delta}$  является «гиббсовским состоянием» для взаимодействия  $W$  на гиперконечной решетке  $\Gamma_\delta$  в том же духе, что и гиперконечные гиббсовские состояния, построенные в § 7.2.

**Замечание 2.** Пусть  $d = 2$  и  $U(y) = \chi(y)$ ,  $y \in G$ , где  $G$  — некоторая компактная группа Ли, а  $\chi$  — характер некоторого не-

приводимого унитарного представления группы  $G$ . Тогда можно показать, что мера  $L(\mu_{\Gamma_\delta})$  в гиперконечном случае реализует вероятностную меру, описывающую решетчатую калибровочную теорию поля (чистую решетчатую теорию Янга—Миллса) на решетке с шагом  $\delta$ . Гиббсовское состояние, задаваемое мерой  $L(\mu_{\Gamma_\delta})$  будет инвариантным относительно калибровочных преобразований в том смысле, что если  $F$  — ребро с вершинами  $x, y \in \Gamma_\delta$  и  $(z) = \gamma_z$  — произвольное измеримое отображение из  $\Gamma_\delta$  в  $G$ , то мера  $\mu_{\Gamma_\delta}$  инвариантна относительно преобразования  $C(F) \mapsto \gamma_x C(F) \gamma_y^{-1}$ .

В общепринятой терминологии величина  $\exp(\beta U(C(\partial A)))$  называется *петлей Вильсона*, так что мера  $\mu_{\Gamma_\delta}$  дает распределение произведений петель Вильсона.

Пусть  $G = U(1) = S^1$  — унитарная группа, и пусть  $B_\mu$ ,  $\mu = 1, 2$  — гладкие отображения из  $\mathbb{R}^2$  в алгебру Ли группы  $G$ . Они определяют 1-форму  $B = \sum B_\mu dx_\mu$ ; с физической точки зрения на  $B_\mu$  можно смотреть как на «калибровочные поля» с «интенсивностью поля», равной  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ,  $\mu, \nu = 1, 2$ . Связь 1-формы  $B$  с нашей коповерхностью состоит в следующем.

Пусть  $A$  — ячейка решетки  $\Gamma_\delta$  с вершинами  $v_1 = \delta z$ ,  $v_2 = \delta(z + e_1)$ ,  $v_3 = \delta(z + e_1 + e_2)$ ,  $v_4 = \delta(z + e_2)$ , где  $z \in \mathbb{Z}^2$  и  $e_1, e_2$  — ортогональный базис в  $\mathbb{Z}^2$ . Тогда

$$\int_{\partial A} B = \int_{\partial A} \sum_{\mu} B_{\mu}(x) dx_{\mu} \approx \delta B_1 \left( \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \right) - \delta B_1 \left( \frac{1}{2} (v_3 + v_4) \right) + \\ + \delta B_2 \left( \frac{1}{2} (v_2 + v_3) \right) - \delta B_2 \left( \frac{1}{2} (v_1 + v_4) \right),$$

где  $\partial A = (v_1, v_2) \cup (v_2, v_3) \cup (v_3, v_4) \cup (v_4, v_1)$ , причем подразумевается, что ребро  $(v_i, v_j)$  ориентировано от  $v_i$  к  $v_j$ . Определим коповерхность  $C$ , положив

$$C(v_1, v_2) = \exp \left[ -ig\delta B_1 \left( \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \right) \right],$$

$$C(v_2, v_3) = \exp \left[ -ig\delta B_2 \left( \frac{1}{2} (v_2 + v_3) \right) \right],$$

$$C(v_3, v_4) = \exp \left[ ig\delta B_1 \left( \frac{1}{2} (v_3 + v_4) \right) \right],$$

$$C(v_4, v_1) = \exp \left[ ig\delta B_2 \left( \frac{1}{2} (v_4 + v_1) \right) \right],$$



где  $g$  — некоторый действительный параметр. Тогда

$$C(\partial A) = C(v_1, v_2) C(v_2, v_3) C(v_3, v_4) C(v_4, v_1) \approx \exp \left[ -ig \int_{\partial A} B \right].$$

Мы видим, что для бесконечно малых  $\delta$  задание вероятностного распределения на коповерхностях  $C(\partial A)$  означает задание распределения для потока  $\int_{\partial A} B$  нашей 1-формы  $B$  через  $\partial A$ . Как мы увидим ниже, выбор в качестве распределения для  $C(\partial A)$  меры  $\mu_{\Gamma_\delta}$  приводит к распределению для потока  $\int_{\partial A} B$ , совпадающему с обычным физическим распределением, изучаемым в теории калибровочных полей.

**Замечание 3.** При  $d > 2$  обычная решетчатая теория Янга — Миллса изучает случайные величины, связанные с одномерными границами двумерных плакетов, в то время как мы изучаем случайные величины, связанные с  $(d-1)$ -мерными поверхностями. Таким образом, только при  $d = 2$  наши модели включают обычные модели Янга — Миллса.

Написать величину  $E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f)$  легко; гораздо труднее понять, что она означает. Постараемся извлечь некоторые идеи из суждения нескольких примеров. Единичная ячейка  $A$  решетки  $\Gamma_1$  путем разбиения делится на множество меньших ячеек. Точнее, пусть  $\delta = 2^{-n}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . В решетке  $\Gamma_\delta$  ячейка  $A$  разделена на  $2^{dn}$  меньших ячеек  $A_n^i$ ,  $i = 1, \dots, 2^{dn}$ . Грань  $F_i$  ячейки  $A$  разделена на  $2^{(d-1)n}$  граней  $F_{i,1}, \dots, F_{i,2^{(d-1)n}}$ , где каждое  $F_{i,j}$  — это грань некоторой ячейки  $A_n^{i'}$  (но, конечно, не каждая грань ячейки  $A_n^{i'}$  входит в семейство  $F_{i,j}$ ). Для перечисления всех граней ячейки  $A_n^{i'}$  будем использовать обозначение  $F_{i',j}$ ,  $j = 1, \dots, 2d$ .

Для простоты выберем функции специального вида на  $\Gamma_\sigma, \Gamma_\delta$ :

$$f(C) = f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})),$$

где  $f_0$  — ограниченная действительнoзначная функция на  $G^{2d}$ , а каждое  $F_i$  — это грань ячейки  $A$  в  $\Gamma_1$ . Более точно, если  $C$  и  $C'$  — две коповерхности в  $\Gamma_\sigma, \Gamma_\delta$ , для которых при  $i = 1, \dots, 2d$  справедливо равенство

$$C(F_{i,1}) \cdot \dots \cdot C(F_{i,2^{(d-1)n}}) = C'(F_{i,1}) \cdot \dots \cdot C'(F_{i,2^{(d-1)n}}),$$

то  $f(C) = f(C')$ . Используя формулу (59) для вычисления величины  $E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 (60) \quad E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f) &= \int f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})) \times \\
 &\times \prod_{i=1}^{2dn} \left\{ \frac{\exp[\beta U(C(\partial A_n^i))]}{c(\beta)} \right\} \prod dC(F_{i,j}) = \\
 &= c(\beta)^{-2dn} \int f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})) \times \\
 &\times \prod_i \exp\left[\beta U\left(\prod_j C(F_{i,j})\right)\right] \prod_j dC(F_{i,j}) = \\
 &= c(\beta)^{-2dn} \int f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})) q_\beta^{*(2dn)} \left(\prod_{i=1}^{2d} C(F_i)\right) \prod_{i=1}^{2d} dC(F_i),
 \end{aligned}$$

где  $q_\beta(g) = \exp[\beta U(g)]$ ,  $g \in G$ , а  $q_\beta^{*(k)}$  означает  $k$ -кратную свертку функции  $q_\beta$  с собой. Заметим, что приведенная выкладка сводит заданный интеграл  $E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f)$  к интегралу фиксированной размерности  $2d$ , а отображение  $C$ , появляющееся в последнем интеграле, может интерпретироваться как коповерхность в  $\Gamma_1$ .

Любое вычисление может быть по принципу переноса продолжено в нестандартную область. Пусть  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  и  $\delta = 2^{-n}$ . В гиперконечной решетке  $\Gamma_\delta$  единичная ячейка  $A$  делится на бесконечно большое число ячеек  $A_n^i$ . Будем считать, что группа  $G$  компактна, и на ней имеется нормированная мера Хаара. Пусть  $f$  — внутренняя функция вида

$$(61) \quad f(C) = {}^*f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})),$$

где  $C$  — коповерхность на  $\Gamma_\delta$  со значениями в  ${}^*G$ , а  $f_0$  — ограниченная непрерывная действительностнозначная функция на  $G^{2d}$ . Заметим, что в этом случае  $C(F_i)$  равняется гиперконечному произведению

$$C(F_i) = C(F_{i,1}) \cdot \dots \cdot C(F_{i,2^{(d-1)n}});$$

как элемент группы это произведение принадлежит  ${}^*G$ . Так как группа  $G$  компактна, элемент  $C(F_i)$  околостандартен в  ${}^*G$ . Значит, можно заключить, что  $f$  как функция на  $\Gamma_{*G, \Gamma_\delta}$  является  $S$ -интегрируемой относительно внутренней меры  $\mu_{\Gamma_\delta}$ , и

$$(62) \quad E_{L(\mu_{\Gamma_\delta})}({}^cf) = \text{st}(E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f)),$$

где — подчеркнем это еще раз — функция  $f$  имеет вид (61), а  $L(\mu_{\Gamma_\delta})$  — это мера Лёба на  $\Gamma_{*G, \Gamma_\delta}$ , соответствующая мере  $\mu_{\Gamma_\delta}$ .

Но от равенства (62) мало пользы, пока мы не сумеем определить величину

$$c(\beta)^{-2dn} q_{\beta}^{*(2dn)} \left( \prod_{i=1}^{2d} C(F_i) \right).$$

Общий ответ получить трудно; давайте возьмем  $G = S^1$ ,  $U(g) = \text{Re } \chi(g)$ , где  $\chi$  — характер  $\chi(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$ , а  $e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — естественная параметризация группы  $G$ .

При  $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  короткое вычисление показывает, что при выборе  $\beta = 2^{dn}/\sigma^2$  мы получим

$$(63) \quad c(\beta)^{-2dn} q_{\beta}^{*(2dn)} \left( \prod_{i=1}^{2d} C(F_i) \right) \approx Q_1(C(\partial A)),$$

где  $C$  справа рассматривается как (стандартная) коповерхность на  $\Gamma_1$ , а  $Q_1$  — стандартная функция

$$Q_1(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\varphi^2/2\sigma^2}.$$

Если определить  $Q_t(e^{i\varphi}) = 1/\sqrt{2\pi t}\sigma \exp(-\varphi^2/2\sigma^2 t)$  то, очевидно, ядра  $Q_t$  образуют полугруппу на  $S^1$ ; фактически  $Q_t$  — это полугруппа, описывающая броуновское движение на  $S^1$  с коэффициентом диффузии  $\sigma$  (что «объясняет», почему мы добавили  $\sigma^2$  в коэффициент  $\beta$ )<sup>1)</sup>.

Из формул (60), (62), (63) заключаем, что

$$E_L(\mu_{\Gamma_\delta})(\circ f) = \int f_0(C(F_1), \dots, C(F_{2d})) Q_1(C(\partial A)) \prod_{i=1}^{2d} dC(F_i),$$

причем интеграл в правой части стандартен, а функция  $f$  имеет вид (61). Таким образом, наше «понимание» формулы (62) существенно возросло. Знание меры Хаара на  $S^1$  и явный вид полугруппы  $Q_t$  дают нам в принципе полный контроль над математическим ожиданием  $E_L(\mu_{\Gamma_\delta})$ .

В качестве следующей иллюстрации пусть  $A$  — объединение трех единичных ячеек  $A^1, A^2, A^3$  в  $\Gamma_1$ , причем  $A^1$  имеет общую грань и с  $A^2$ , и с  $A^3$ , а  $A^2$  и  $A^3$  не имеют общей грани. Пусть функция  $f$  зависит только от граней  $F \in \partial A$ , т. е.

$$f(C) = {}^*f_0(\{C(F)\}_{F \in \partial A});$$

заметим, что это условие — полная аналогия условия (61). Используя полугрупповое свойство для  $Q_t$ , отмечаем, что для прилегающих клеток  $A^1$  и  $A^2$

$$Q_1(C(\partial A^1)) \cdot Q_1(C(\partial A^2)) = Q_2(C(\partial(A^1 \cup A^2))),$$

<sup>1)</sup> Указанные плотности определены не на окружности, а на накрывающей эту окружность прямой. — *Прим. перев.*

где произведение понимается в смысле свертки соответствующих ядер; отсюда видно, что

$$(64) \quad E_{\mu_{\Gamma_\delta}}(f) \approx \int f_0(\{C(F)\}_{F \ni \partial A}) Q_{|A|}(C(\partial A)) \prod_{F \ni \partial A} dC(F),$$

где  $|A|$  означает декартов объем множества  $A$ , т. е. в данном случае  $|A| = 3$ .

Рассуждение, приводящее к формуле (64), можно обобщить, причем даже на гиперконечный случай. Пусть  $A$  — ограниченное гиперконечное объединение клеток в  $\Gamma_\delta$ ; иными словами, мы предполагаем, что множество стандартных точек множества  $A$

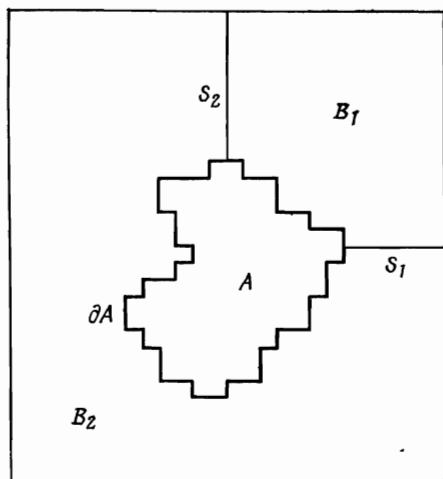


РИС. 7.3.

ограничено. В этом случае границу  $\partial A$  можно представлять себе как гиперконечное приближение к «хорошей» замкнутой поверхности в  $\mathbb{R}^d$  (кривой в  $\mathbb{R}^2$ ), внутренность которой имеет конечный объем — см. рис. 7.3. По техническим причинам мы добавили две «кривых»  $S_1$  и  $S_2$ , чтобы получившееся разбиение решетки  $\Gamma_\delta$  на множества  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  состояло из трех связных и односвязных кусков.

Пусть  $K = \{\partial A, S_1, S_2\}$  и  $D_K = \{A, B_1, B_2\}$ . Набор  $K$  — что пример того, что называется *регулярным насыщенным комплексом*, а  $D_K$  — соответствующее разбиение исходного пространства. Обобщая формулу (64), можно ввести вероятностную меру  $\nu_{K, \delta}$ , ассоциированную с  $K$  и  $D_K$ :

$$(65) \quad d\nu_{K, \delta}(C) = \prod_{A \in D_K} Q_{|A|} \left( \prod_{F \ni \partial A} C(F) \right) \prod_{F \ni \partial A} dC(F),$$

где  $Q_t$  в нашем примере задается формулой (63), но может в принципе быть любой полугруппой на  $G$ , удовлетворяющей условию  $Q_t(gh) = Q_t(hg)$ ; в случае, если объем  $|A|$  бесконечно велик, мы предполагаем, что  $Q_{|A|} \approx 1$ . Тогда, предполагая, что функция  $f$  зависит только от «кривой»  $\partial A$ , т. е. что

$$f(C) = {}^*f_0(\{C(F)\}_{F \in \partial A}),$$

можно по аналогии с формулой (64) записать

$$(66) \quad F_{\mu_{T_\delta}}(f) \approx E_{\nu_{K, \delta}}(f).$$

Приближенное равенство (66) станет точным, если мы дополним построение конструкцией Лёба. Таким образом, в конечном итоге для бесконечно малых  $\delta$  мы получили интерпретацию формулы (60) в терминах полугруппы  $Q_t$ , меры объема  $|A|$  и меры Хаара на группе  $G$ . Заметим, что при стандартном подходе меру  $L(\nu_{K, \delta})$  пришлось бы получать с помощью конструкции проективного предела.

Меру Лёба  $L(\mu_{T_\delta})$  можно взять в качестве меры базового вероятностного пространства для поля  $C(S)$  канонических случайных величин, отвечающих гладким  $(d-1)$ -мерным поверхностям в  $\mathbb{R}^d$ . При  $d=2$  и  $S=\partial A$  это случайное поле в соответствии с замечанием 2 и формулой (63) по существу совпадает с потоком  $\int_S B$  калибровочного поля  $B$  через  $S$ . В качестве калибровочной группы здесь выбрана группа  $G=U(1)=S^1$ , но то же самое верно и для других примеров, например, для  $G=SU(2)$  или  $G=\mathbb{Z}^2$  (см. Albeverio, Нёгх-Кроhn, Holden [1]). Таким образом, в указанных ситуациях *случайное поле  $C(S)$  реализует «непрерывный предел» «решетчатых калибровочных полей»*.

Для произвольного  $d > 2$  и абелевой группы  $G$  можно показать (см. Albeverio, Нёгх-Кроhn, Holden [3]), что случайное поле  $C(S)$  обладает глобальным марковским свойством и удовлетворяет  $d$ -мерным аналогам аксиом для евклидовых калибровочных полей (см. Seiler [1]). При  $G=\mathbb{T}^n$  марковские коповерхности  $C(S)$  можно также представлять себе как решения стохастического дифференциального уравнения  $DB=\xi$  для ковекторного поля  $B$ , где  $D$  — ковариантная производная, а  $\xi$  — безгранично делимое обобщенное случайное поле на  $\mathbb{R}^d$ . Здесь появляются новые интересные математические структуры, но исследование их увело бы нас слишком далеко. Мы надеемся, что нам удалось убедить читателя в том, что конструкция Лёба снова оказалась полезной для «геометрического» построения «непрерывного» поля с помощью гиперконечной «дискретной» модели.

### 7.5. Поля и полимеры

В этом заключительном параграфе мы изучим тесные взаимосвязи, существующие между квантовыми полями и полимерными мерами. С момента их открытия в середине 1960-х годов (см. Symanzik [1]) эти взаимосвязи играют важную роль в квантовой теории поля и способствуют укреплению и без того прочных связей между теорией вероятностей и математической физикой. Как мы вскоре увидим, основным ингредиентом теории является представление квадрата свободного поля  $\Phi$  в виде пуассоновского случайного поля локальных времен броуновских петель. Если мы добавим к полю  $\Phi$  взаимодействие, это приведет в вероятностном представлении к появлению возмущения, включающего пересечения и самопересечения броуновских траекторий, что приводит нас непосредственно к задачам, изучавшимся в § 6.4. К концу параграфа мы используем указанные взаимосвязи, чтобы пролить новый свет на модели  $\Phi^4$  и (в особенности)  $\overline{\Phi}_1^2 \Phi_2^2$  с бесконечно малой константой связи.

#### А. Пуассоновские поля броуновских мостов

В течение всего параграфа пуассоновские поля броуновских петель и мостов будут появляться в различных видах; поэтому удобно начать их изучение с абстрактной точки зрения.

Пусть дано внутреннее \*-ограниченное подмножество  $\Lambda \subset {}^*\mathbb{R}^d$  и положительное  $\delta \in {}^*\mathbb{R}$ ; пусть  $\Lambda_\delta$  — это решетка

$$\Lambda_\delta = \{n\delta \in \Lambda \mid n \in {}^*\mathbb{Z}^d\}.$$

Для каждого  $i \in \Lambda_\delta$  пусть

$$N_i = \{j \in \Lambda_\delta \mid |i - j| = \delta\}$$

— множество ближайших соседей узла  $i$  в  $\Lambda_\delta$ , а  $|N_i|$  — число элементов в этом множестве; очевидно,  $|N_i| = 2d$ , за исключением случая, когда вершина  $i$  лежит на границе решетки  $\Lambda_\delta$ .

Дискретный оператор Лапласа в  $\Lambda_\delta$  с неймановскими граничными условиями задается формулой

$$(1) \quad \Delta_\delta f(i) = \delta^{-2} \left( \sum_{j \in N_i} f(j) - |N_i| f(i) \right).$$

Нас будут интересовать марковские процессы на  $\Lambda_\delta$  с инфинитесимальным генератором

$$-\frac{1}{2} \Delta_\delta + m^2,$$

где «масса»  $m$  — это положительное действительное число. Осью времени для этих процессов будет служить гипердискретная прямая  $T = \{k\Delta t \mid k \in {}^*\mathbb{N} \cup \{0\}\}$ , где  $\Delta t$  — некоторая положительная

бесконечно малая; она будет оставаться фиксированной на протяжении всего параграфа (в отличие от  $\delta$ , которое в одних случаях будет стандартным, в других — бесконечно малым). К множеству  $\Lambda_\delta$  нам придется добавить «ловушку» или «поглощающее состояние»  $\square$ ; следовательно, нашим пространством состояний будет

$$\bar{\Lambda}_\delta = \Lambda_\delta \cup \{\square\}$$

(ловушка  $\square$  играет в точности ту же роль, что и состояние  $s_0$  в гл. 5).

Чтобы описать марковский процесс более точно, предположим, что в момент времени  $t$  он находится в состоянии  $i \in \Lambda_\delta$ . Тогда в момент времени  $t + \Delta t$  он окажется в ловушке  $\square$  с вероятностью  $m^2 \Delta t$ ; он окажется в любом из соседних состояний  $j \in N_i$  с вероятностью  $\Delta t / 2\delta^2$ ; и он останется в состоянии  $i$  с вероятностью  $1 - ((|N_i|/2\delta^2) + m^2) \Delta t$ . Чтобы эти вероятности имели смысл, должно выполняться неравенство  $((|N_i|/2\delta^2) + m^2) \Delta t \leq 1$ , т. е.

$$\delta \geq \sqrt{\frac{|N_i| \Delta t}{2(1 - m^2 \Delta t)}},$$

и мы всегда будем предполагать, что это неравенство справедливо. Если же процесс в момент времени  $t$  находился в ловушке  $\square$ , он останется в ловушке и во все последующие моменты времени.

Пусть  $X: \Omega \times T \rightarrow \bar{\Lambda}_\delta$  — гиперконечный марковский процесс, отвечающий приведенному выше описанию. Вычисляя его инфинитезимальный генератор, получаем

$$\begin{aligned} Af(i) &= \frac{\sum_{j \in N_i} f(j) (\Delta t / 2\delta^2) - f(i) (1 - ((|N_i|/2\delta^2) + m^2) \Delta t)}{\Delta t} = \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{-2} \left[ \sum_{j \in N_i} f(j) - |N_i| f(i) \right] + m^2 f(i). \end{aligned}$$

Таким образом,  $A = -\frac{1}{2} \Delta_\delta + m^2$ , в точности как мы хотели<sup>1)</sup>.

Заметим, что если  $\delta$  бесконечно мало, то внутри решетки  $\Lambda_\delta$  стандартная часть процесса  $X$  ведет себя как броуновское движение с интенсивностью убивания  $m^2$ . Заметим также, что если значение процесса  $X$  в нулевой момент времени равномерно распределено, скажем,

$$P\{X(0) = i\} = \delta^d,$$

<sup>1)</sup> Предполагается, что  $f(\square) = 0$ . — Прим. перев.

то и в любой дальнейший момент времени значение процесса  $X$  тоже равномерно распределено:

$$P\{X(t) = i\} = \delta^d (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t}.$$

Ради именно этого эффекта мы выбрали для работы неймановские граничные условия<sup>1)</sup>.

Для  $i \in \Lambda_\delta$  пусть, как обычно,  $P_i$  — это вероятностная мера для процесса, выходящего из точки  $i$ . Тогда если  $P$  — мера процесса с равномерным начальным распределением  $P\{X(0) = j\} = \delta^d$ , то

$$P_i(A) = \delta^{-d} P\{\omega \in A | X(\omega, 0) = i\}.$$

Если мы подсчитываем только те траектории, которые в момент времени  $t$  еще не попали в ловушку, мы получаем следующие вероятностные меры:

$$P_i^t(A) = \frac{P_i\{\omega \in A | X(\omega, t) \neq \square\}}{(1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t}} = \frac{P\{\omega \in A | X(\omega, 0) = i \wedge X(\omega, t) \neq \square\}}{\delta^d (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t}}.$$

Если даны два элемента  $i, j \in \Lambda_\delta$ , которые соединяются хотя бы одной траекторией длины  $t$ , будем использовать меру

$$P_{i,j}^t(A) = \frac{P_i^t\{\omega \in A | X(\omega, t) = j\}}{P_i^t\{\omega | X(\omega, t) = j\}}$$

для обсуждения множества вот таких «броуновских мостов». Если такой связи между точками  $i$  и  $j$  нет, условимся считать  $P_{i,j}^t$  единичной мерой, сосредоточенной на постоянной траектории  $X(\omega, t) = \square$ . Математические ожидания относительно мер  $P_i$ ,  $P_i^t$ ,  $P_{i,j}^t$  будут обозначаться  $E_i$ ,  $E_i^t$  и  $E_{i,j}^t$  соответственно.

До сих пор из объявленной темы «Пуассоновские поля броуновских мостов» упоминалась только вторая половина — броуновские мосты. Теперь обратимся к пуассоновским полям; пусть  $\alpha$  — внутренняя мера на пространстве  $\Lambda_\delta^2 \times T$ . Если  $\Sigma$  — множество всех внутренних отображений

$$\sigma: \Lambda_\delta^2 \times T \rightarrow \{0, 1\},$$

то мера  $\alpha$  индуцирует меру  $Q$  на  $\Sigma$  следующим образом: положим  $q_{i,j,t}(\sigma) = \alpha(i, j, t)$ , если  $\sigma(i, j, t) = 1$  и  $q_{i,j,t}(\sigma) = 1 - \alpha(i, j, t)$  в противном случае, и пусть

$$Q(\sigma) = \prod q_{i,j,t}(\sigma),$$

где произведение берется по всем  $(i, j, t) \in \Lambda_\delta^2 \times T$ .

<sup>1)</sup> Как и в гл. 5 (см. § 5.3), здесь не предполагается, что мера  $P$  — вероятностная. — *Прим. перев.*



Легко проверить, что пара  $(\Sigma, Q)$  образует пуассоновское случайное поле с параметром  $\alpha$  в следующем смысле.

**7.5.1. Лемма.** *Предположим, что мера  $\alpha$  неатомарна, т. е.  $\alpha\{x\} \approx 0$  для всех  $x \in \Lambda_\delta^2 \times T$ . Если множество  $C \subset \Lambda_\delta^2 \times T$  измеримо по Лёбу, и  $L(\alpha)(C) < \infty$ , то для всех  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$L(Q) \left\{ \sum_{x \in C} \sigma(x) = m \right\} = \frac{(L(\alpha)(C))^m}{m!} e^{-L(\alpha)(C)}.$$

*Доказательство.* Очевидно, достаточно показать, что если  $C$  — внутреннее множество, мера которого конечна, но не бесконечно мала, то

$$Q \left\{ \sum_{x \in C} \sigma(x) = m \right\} \approx \frac{\alpha(C)^m}{m!} e^{-\alpha(C)}.$$

Выберем подмножество  $C_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset C$ , имеющее  $m$  элементов. Вероятность того, что  $C_0$  является множеством тех элементов из  $C$ , где  $\sigma = 1$ , равна

$$\alpha(x_1) \alpha(x_2) \dots \alpha(x_m) \cdot \prod_{x \in C - C_0} (1 - \alpha(x)).$$

Поскольку мера  $\alpha$  неатомарна,

$$\begin{aligned} \prod_{x \in C - C_0} (1 - \alpha(x)) &= \exp \left[ \sum_{x \in C - C_0} \ln(1 - \alpha(x)) \right] \approx \\ &\approx \exp \left[ - \sum_{x \in C - C_0} \alpha(x) \right] \approx \exp \left[ - \sum_{x \in C} \alpha(x) \right] = \exp[-\alpha(C)], \end{aligned}$$

где мы воспользовались разложением Тейлора для  $\ln(1 - \alpha(x))$ . Таким образом, вероятность того, что  $\sum_{x \in C} \sigma(x) = m$  бесконечно близка к числу

$$e^{-\alpha(C)} \sum \alpha(x_1) \alpha(x_2) \dots \alpha(x_m),$$

где сумма берется по всем  $m$ -элементным подмножествам  $C_0 = (x_1, \dots, x_m) \subset C$ . Каждое такое подмножество может быть упорядочено  $m!$  различными способами, откуда мы получаем

$$Q \left\{ \sum_{x \in C} \sigma(x) = m \right\} \approx \frac{e^{-\alpha(C)}}{m!} \sum \alpha(x_1) \dots \alpha(x_m),$$

где сумма на этот раз берется по всем упорядоченным наборам  $(x_1, \dots, x_m)$  с различными координатами. Однако, поскольку мера  $\alpha$  неатомарна и множество  $C$  имеет конечную меру, от добавления наборов с совпадающими координатами сумма изме-

нится лишь на бесконечно малую величину. Таким образом,

$$Q\left\{\sum_{x \in C} \sigma(x) = m\right\} \approx \frac{e^{-\alpha(C)}}{m!} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in C^m} \alpha(x_1) \dots \alpha(x_m) = \\ = \frac{e^{-\alpha(C)}}{m!} \alpha(C)^m$$

и лемма доказана.  $\square$

Теперь объединим пуассоновское поле и броуновские мосты в одну структуру. Пусть

$$\Theta = \Sigma \times \Omega^{\Lambda_\delta^2 \times T},$$

где, как обычно,  $\Omega^{\Lambda_\delta^2 \times T}$  обозначает множество всех внутренних отображений из  $\Lambda_\delta^2 \times T$  в  $\Omega$ . Пусть  $Z$  — внутренняя мера на  $\Theta$ , полученная произведением меры  $Q$  на  $\Sigma$  и мер  $P_{i,j}^t$  на каждой  $(i, j, t)$ -й компоненте множества  $\Omega^{\Lambda_\delta^2 \times T}$ .

Для каждой внутренней функции  $g: \Lambda_\delta \rightarrow {}^*\mathbb{R}_+$  определим случайную величину  $T(g): \Theta \rightarrow {}^*\mathbb{R}_+$  следующим образом:

$$(2) \quad T(g)(\sigma, \omega) = \sum_{(i, j, t) \in \Lambda_\delta^2 \times T} \sigma(i, j, t) \sum_{s=0}^t g(X(s, \omega_{i,j,t})) \Delta t,$$

где  $\omega_{i,j,t}$  — это  $(i, j, t)$ -я компонента элемента  $\omega$ . Условимся считать, что  $g(\square) = 0$ . Случайную функцию  $T$  будем называть *пуассоновским полем броуновских мостов, индуцированным мерой  $\alpha$* .

Можно легко перефразировать то, как устроена функция  $T$ . Выбираем случайный элемент  $\xi = (\sigma, \omega) \in \Theta$  в соответствии с мерой  $Z$ ; тогда первая компонента  $\sigma$  выделяет множество точек  $\{(i_1, j_1, t_1), \dots, (i_m, j_m, t_m)\} \subset \Lambda_\delta^2 \times T$ , а вторая компонента  $\omega$  определяет множество броуновских мостов, соединяющих точки  $i_k$  с точками  $j_k$  за время  $t_k$ . Тогда  $T_g$  — это сумма интегралов функции  $g$  по этим траекториям.

Тот факт, что  $\sigma$  имеет пуассоновское распределение, позволяет легко вычислить преобразование Лапласа для случайной величины  $T(g)$ .

**7.5.2. Лемма.** Пусть  $g$  — такая неотрицательная внутренняя функция, что

$$(3) \quad \sum_{\Lambda_\delta^2 \times T} (1 - \exp(-t \|g\|_\infty))^2 \alpha(i, j, t)^2 \approx 0.$$

Тогда

$$E \exp(-T(g)) \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \left\{ \exp \left[ - \int_0^t g(X(s)) ds \right] - 1 \right\} d\alpha(i, j, t) \right\}.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $\mathbf{P}$  меру на  $\Omega^{\Lambda_\delta^2 \times T}$ , равную произведению  $\prod P_{i,j}^t$ . Для каждого  $(i, j, t) \in \Lambda_\delta^2 \times T$  и каждого  $\omega \in \Omega^{\Lambda_\delta^2 \times T}$  положим

$$G_{i,j,t}(\omega) = \int_0^t g(X(\omega_{i,j,t}, s)) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E(e^{-T(g)}) &= \sum_{\omega} \sum_{C_0 \subset \Lambda_\delta^2 \times T} \prod_{(i,j,t) \in C_0} \exp(-G_{i,j,t}(\omega)) \alpha(i, j, t) \times \\ &\quad \times \prod_{(i,j,t) \notin C_0} (1 - \alpha(i, j, t)) \mathbf{P}\{\omega\} = \\ &= \sum_{\omega} \prod_{(i,j,t) \in \Lambda_\delta^2 \times T} [(1 - \alpha(i, j, t)) + \exp(-G_{i,j,t}(\omega)) \times \\ &\quad \times \alpha(i, j, t)] \mathbf{P}(\omega), \end{aligned}$$

что легко видеть, раскрывая биномы в правой части. Продолжая вычисления, получаем

$$\begin{aligned} E \exp(-T(g)) &= \sum_{\omega} \prod_{(i,j,t)} [1 + \alpha(i, j, t)(\exp(-G_{i,j,t}(\omega)) - 1)] \mathbf{P}\{\omega\} = \\ &= \prod_{(i,j,t)} [1 + \alpha(i, j, t) E_{i,j}^t (\exp(-G_{i,j,t}) - 1)] = \\ &= \exp \left\{ \sum_{(i,j,t)} \ln [1 + \alpha(i, j, t) E_{i,j}^t (\exp(-G_{i,j,t}) - 1)] \right\}. \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора, превращаем последнее выражение в

$$E \exp(-T(g)) = \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t (\exp(-G_{i,j,t}) - 1) d\alpha + R \right\},$$

где остаточный член  $R$  отрицателен, и

$$|R| \leq \frac{1}{2} \sum_{(i,j,t)} E_{i,j}^t (\exp(-G_{i,j,t}) - 1)^2 \alpha(i, j, t).$$

Но  $G_{i,j,t} \leq \|g\|_\infty \cdot t$ , поэтому выражение в правой части не превосходит величины

$$\frac{1}{2} \sum_{(i,j,t)} (1 - \exp(-t \|g\|_\infty))^2 \alpha(i,j,t),$$

которая по предположению леммы бесконечно мала. Лемма доказана.  $\square$

Используя полученный результат, мы вскоре покажем, что при подходящем выборе меры  $\alpha$  пуассоновское поле  $T$  имеет то же самое преобразование Лапласа, что и квадрат свободного поля на  $\Lambda_\delta$ , так что два поля можно отождествить. Возможно, читателя удивило, что мы использовали несколько странное условие (3) в лемме 7.5.2, а не, например, чуть более сильное, но более естественное условие

$$\Sigma \alpha(i,j,t)^2 \approx 0;$$

это сделано потому, что для упомянутой теоремы о представлении требуется как раз такое более слабое условие.

**Замечание.** Идея, лежащая в основе гиперконечного подхода к пуассоновским случайным полям, ни в малейшей степени не является новой; фактически самое первое применение мер Лёба в теории вероятностей в исходной работе Loeb [2] состояло в аналогичной конструкции пуассоновских процессов (см. также Strojan, Bayod [1]).

### В. Квадрат свободного поля как функционал локального времени

Переходя к решетчатым полям, в качестве первой задачи мы должны вычислить преобразование Лапласа от квадрата свободного поля, чтобы установить то отождествление, о котором говорилось выше. Но прежде чем начать вычисления, нужно условиться о терминологии. Пусть  $D_{\Lambda_\delta}$  — ядро (матрица) оператора  $-\frac{1}{2}\Delta_\delta + m^2$ , действующего из  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$  в  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , т. е.

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_\delta + m^2\right)f(i) = \sum_{j \in \Lambda_\delta} D_{\Lambda_\delta}(i,j) f(j) \delta^{2d}.$$

Обратная матрица будет обозначаться  $C_{\Lambda_\delta}$ ; заметим, что  $\delta^{-2d}C_{\Lambda_\delta}$  — это ядро оператора  $\left(-\frac{1}{2}\Delta_\delta + m^2\right)^{-1}$ . Пусть  $\{\tilde{\Phi}_\delta^N(i) | i \in \Lambda_\delta\}$  — гауссовское случайное поле с нулевым средним и с матрицей ковариаций  $C_{\Lambda_\delta}$ ; пусть  $\Phi_\delta^N = \delta^{-d}\tilde{\Phi}_\delta^N$  — «плотность»

этого поля относительно меры  $\delta^d$  на  $\Lambda_\delta$ . Напомним, что, согласно предыдущему параграфу,  $\Phi_\delta^N$  — это свободное решетчатое поле массы  $m$  на  $\Lambda_\delta$  с неймановскими граничными условиями.<sup>1)</sup>

Введем квадрат свободного поля  $\Psi_\delta^N(i) = \Phi_\delta^N(i)^2$  и запишем для всех внутренних функций

$$\Phi_\delta^N(g) = \sum_{i \in \Lambda_\delta} g(i) \tilde{\Phi}_\delta^N(i) = \sum_{i \in \Lambda_\delta} g(i) \Phi_\delta^N(i) \delta^d,$$

$$\Psi_\delta^N(g) = \sum_{i \in \Lambda_\delta} g(i) \Psi_\delta^N(i) \delta^d.$$

Полезно иметь в виду, что

$$E(\Phi_\delta^N(f) \Phi_\delta^N(g)) = \sum f(i) g(j) C_{\Lambda_\delta}(i, j) = \left\langle \left(-\frac{1}{2} \Delta_\delta + m^2\right)^{-1} f, g \right\rangle,$$

где скалярное произведение берется в пространстве  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ .

Теперь все готово для вычисления величины  $E \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right)$  (множитель  $1/2$  включен для технического удобства), где  $f$  — произвольная неотрицательная внутренняя функция. По определению поля  $\{\Phi_\delta^N\}$  имеем

$$\begin{aligned} E \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right) &= (2\pi)^{-|\Lambda_\delta|/2} (\text{Det } C_{\Lambda_\delta})^{-1/2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{\Lambda_\delta}^{-1}(i, j) q_i q_j\right] \exp\left[-\frac{\delta^{-d}}{2} \sum_i f(i) \times \right. \\ &\quad \left. \times q_i^2\right] dq_1 dq_2 \dots dq_{|\Lambda_\delta|}. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что  $D_{\Lambda_\delta} = C_{\Lambda_\delta}^{-1}$  и что для всех положительных симметрических  $n \times n$ -матриц  $A$

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} (Aq, q)\right) dq = (2\pi)^{n/2} (\text{Det } A)^{-1/2},$$

получаем

$$\begin{aligned} (5) \quad E \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right) &= \\ &= (\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} (\text{Det}(D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить эти детерминанты, сначала переведем задачу на язык операторов в пространстве  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ . Если обозначить

<sup>1)</sup> Верхний индекс  $N$  происходит от имени Neumann. — Прим. перев.

оператор  $-\frac{1}{2}\Delta_\delta + m^2$  через  $H_\delta$ , то

$$\text{Det } D_{\Lambda_\delta} = \delta^{-d} |\Lambda_\delta| \exp(\text{tr} \log H_\delta)$$

и

$$\text{Det} (D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f) = \delta^{-d} |\Lambda_\delta| \exp(\text{tr} \log (H_\delta + f)),$$

где  $\text{tr}$  означает след матрицы. Таким образом,

$$(6) \quad E \exp \left( -\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f) \right) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} [\log (H_\delta + f) - \log H_\delta] \right\}.$$

Наша следующая цель — освободиться от логарифмов. Применяя к положительному оператору  $A\Delta t$  хорошо известное разложение в ряд

$$\log x = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1-x)^k,$$

получаем равенство  $\log (A\Delta t) = - \sum_{k=1}^{\infty} (1/k) (I - A\Delta t)^k$ . Следовательно,

$$E \exp \left( -\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f) \right) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [(I - (H_\delta + f)\Delta t)^k - (I - H_\delta \Delta t)^k] \right\}.$$

Для вычисления следа используем формулу Фейнмана — Каца и ортонормированный базис  $\{e_i | i \in \Lambda_\delta\}$ , где

$$e_i(j) = \begin{cases} \delta^{-d/2} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Чтобы выполнялись условия гиперконечной теоремы Фейнмана — Каца, удобно предположить, что  $\|f\|_\infty \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$ . Тогда согласно следствию 5.3.12

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [I - (H_\delta + f)\Delta t]^k e_i, e_i \right\rangle \approx \\ & \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E \left\{ e_i(X(k\Delta t)) e_i(X(0)) \exp \left( - \sum_{j=0}^k f(X(j\Delta t)) \Delta t \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $X$  — марковский процесс, порожденный оператором  $H_\delta$ .

В терминах условных мер  $P_i^t$ ,  $P_{i,j}^t$  последнее соотношение может быть переписано в виде

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [I - (H_{\delta} + f) \Delta t]^k e_i, e_i \right\rangle \approx \\ \approx \sum_{t=\Delta t}^{\infty} \frac{1}{t} (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} P_i^t \{X(t) = i\} E_{i,i}^t \exp \left( - \sum_{s=0}^t f(X(s)) \Delta t \right) \Delta t.$$

Если  $t$  не бесконечно мало, то вероятность  $P_i^t \{X(t) = j\}$  имеет порядок малости  $\delta^d$ ; поэтому удобно изменить масштаб для  $P_i^t$ , введя функцию

$$p(i, j, t) = \delta^{-d} P_i^t \{X(t) = j\}.$$

Заметим, что  $p(i, j, t)$  есть не что иное, как «ядро» дискретного уравнения теплопроводности на  $\Lambda_{\delta}$  с неймановскими граничными условиями. Имеем

$$(8) \quad \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [I - (H_{\delta} + f) \Delta t]^k e_i, e_i \right\rangle \approx \\ \approx \sum_{t=\Delta t}^{\infty} \frac{1}{t} (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, i, t) E_{i,i}^t \exp \left( - \sum_{s=0}^t f(X(s)) \Delta t \right) \delta^d \Delta t.$$

В выражении (7) для величины  $E \exp \left( - \frac{1}{2} \Psi_{\delta}^N(f) \right)$  след равен сумме левых частей формулы (8) по всем  $i \in \Lambda_{\delta}$ . Таким образом, если множество  $\Lambda_{\delta}$  конечно, то

$$(9) \quad \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [(I - (H_{\delta} + f) \Delta t)^k - (I - H_{\delta} \Delta t)^k] \approx \\ \approx \sum_{i \in \Lambda_{\delta}} \sum_{t=\Delta t}^{\infty} \frac{1}{t} (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, i, t) \times \\ \times E_{i,i}^t \left\{ \exp \left( - \sum_{s=0}^t f(X(s)) \Delta t \right) - 1 \right\} \delta^d \Delta t.$$

Но если эта формула справедлива для всех конечных  $\Lambda_{\delta}$ , она должна быть справедлива также и для всех гиперконечных  $\Lambda_{\delta}$ , у которых число элементов не превосходит некоторого бесконечно большого  $n_0 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ . Для таких множеств  $\Lambda_{\delta}$ , объеди-

няя формулы (7) и (9), получаем

$$(10) \quad E \exp \left( -\frac{1}{2} \Psi_{\delta}^N(f) \right) \approx \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_{\delta} \times T} \frac{1}{t} (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, i, t) \times \right. \\ \left. \times E_{i, i}^t \left( \exp \left( -\sum_{s=0}^t f(X(s)) ds \right) - 1 \right) \delta^d \Delta t \right\}$$

(здесь и в оставшейся части параграфа мы используем соглашение  $1/0 = 0$ ). Сравнивая формулу (10) с леммой 7.5.2, мы видим, что если в этой лемме выбрать меру  $\alpha$  равной

$$(11) \quad \alpha(i, j, t) = (\delta_{ij}/2t) (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, j, t) \delta^d \Delta t,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, то случайные функции  $\frac{1}{2} \Psi_{\delta}^N$  и  $T$  имеют одно и то же распределение (разумеется, если выполнены условия леммы 7.5.2). Поскольку мера  $\alpha$  сосредоточена на диагонали  $\{(i, i, t) \mid i \in \Lambda_{\delta}, t \in T\}$ , броуновские мосты, из которых строится случайная функция  $T$ , на самом деле являются броуновскими петлями, начинающимися и заканчивающимися в одной и той же точке.

Подводя итоги, получаем следующую теорему.

**7.5.3. Теорема.** Пусть  $\Psi_{\delta}^N$  — квадрат свободного решетчатого поля на  $\Lambda_{\delta}$  с неймановскими граничными условиями, и пусть  $T$  — пуассоновское случайное поле броуновских мостов, индуцированное мерой  $\alpha$ , определенной в формуле (11). Тогда существует такое бесконечно большое  $n \in {}^*\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что если  $|\Lambda_{\delta}| \leq n$ , то

$$E \exp \left( -\frac{1}{2} \Psi_{\delta}^N(f) \right) \approx E \exp(-T(f))$$

для всех неотрицательных внутренних функций  $f: \Lambda_{\delta} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , удовлетворяющих условию  $\|f\|_{\infty} \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$ .

**Доказательство.** Мы уже провели все необходимые вычисления; осталась лишь некоторая бухгалтерия — а именно, нам нужно проследить за различными условиями, которые явно или неявно предполагались выполненными. Как указывалось выше, условие

$$\|f\|_{\infty} \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$$

позволяет использовать формулу Фейнмана — Каца.

Оставшаяся часть доказательства состоит просто в ссылке на лемму 7.5.2, для чего требуется только проверить условие

$$\sum_{(i, j, t)} (1 - \exp(-t\|f\|_{\infty}))^2 \alpha(i, j, t) \approx 0.$$



Используя тот факт, что

$$1 - \exp(-t \|f\|_\infty) \leq t \|f\|_\infty,$$

а также то, что сумма

$$S = \frac{1}{4} \sum_{t \in T} (1 - m^2 \Delta t)^{2t/\Delta t} \Delta t = \frac{1}{8m^2 - 4m^4 \Delta t}$$

конечна, мы убеждаемся в том, что если выбрать  $n \leq 1/\sqrt{\Delta t}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{(i, j, t)} (1 - \exp(-t \|f\|_\infty))^2 \alpha(i, j, t)^2 &\leq \sum_{i \in \Lambda_\delta} \sum_{t \in T} t^2 \|f\|_\infty^2 \frac{1}{4t^2} \times \\ &\times (1 - m^2 \Delta t)^{2t/\Delta t} \Delta t = \\ &= S \sum_{i \in \Lambda_\delta} \|f\|_\infty^2 \Delta t \leq S \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left( \log \frac{1}{\Delta t} \right) \Delta t \approx 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

Выбрав произвольный элемент  $k \in \Lambda_\delta$  и применив  $T$  к функции  $f_k(i) = \delta^{-d} \delta_{ik}$ , мы получим равенство

$$\begin{aligned} (12) \quad T(k)(\sigma, \omega) &= T(f_k)(\sigma, \omega) = \\ &= \sum \sigma(i, j, t) \delta^{-d} \cdot |\{s < t \mid X(s, \omega_{i, j, t}) = k\}| \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Поскольку число  $|\{s < t \mid X(s, \omega_{i, j, t}) = k\}|$  (т. е. количество элементов в указанном множестве) измеряет то время, которое процесс  $X$  проводит в точке  $k$ , теорема 7.5.3 дает представление поля  $\Phi^2$  в виде пуассоновского случайного поля броуновских локальных времен.

*С. Представления в виде локальных времен  
для взаимодействий, являющихся функциями от  $\Phi^2$*

Следующий шаг нашей программы состоит в использовании только что найденного представления для изучения взаимодействующих скалярных полей. Внутренняя функция  $u: {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  определяет взаимодействие  $U$  по формуле

$$(13) \quad U = \lambda \sum_{i \in \Lambda_\delta} u(\Phi_\delta^N(i)) \delta^d,$$

где  $\lambda \in {}^*\mathbb{R}$  — константа связи. Если  $\mu_0$  — «свободная» мера (т. е. та самая уже многократно использовавшаяся нами мера, делающая  $\Phi_\delta^N$  гауссовским случайным вектором со средним 0 и с матрицей ковариаций  $\delta^{-2d} C_{\Lambda_\delta}$ , то «взаимодействующая»

мера  $\mu_U$  задается формулой

$$(14) \quad d\mu_U = \frac{\exp(-U) d\mu_0}{\int \exp(-U) d\mu_0}.$$

Напомним, что, как и в предыдущем параграфе, взаимодействующее поле — это то же самое поле  $\Phi_\delta^N$ , рассматриваемое как случайная функция относительно меры  $\mu_U$ .

Чтобы найти преобразование Лапласа взаимодействующего поля, нужно вычислить

$$(15) \quad E \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp(-U),$$

где математическое ожидание берется по мере  $\mu_0$ . Нам не удастся сделать это для взаимодействий общего вида, но, используя теорему 7.5.3, мы получим соотношение

$$(16) \quad E \exp(-\Phi_\delta^N(g)) F\left(\frac{1}{2} \Psi_\delta^N\right) \approx E(F(T+T_g)) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle\right),$$

где  $F: {}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренний функционал, а  $T$  и  $T_g$  — два независимых пуассоновских поля броуновских мостов (мера  $\alpha$  для поля  $T_g$  зависит от функции  $g$ ). Если взаимодействие является функцией от  $\Psi_\delta^N$ , т. е.

$$U = \lambda \sum_{i \in \Lambda_\delta} v(\Psi_\delta^N(i)) \delta^d,$$

мы можем применить соотношение (16) к функционалу  $F(\Psi_\delta^N) = e^{-U}$  и таким образом получить информацию о величине (15).

Чтобы доказать (16), сначала рассмотрим специальный случай, когда  $F(\Psi_\delta^N) = \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right)$  для некоторой функции  $f$ , и покажем, что

$$(17) \quad E\left(\exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right)\right) \approx \\ \approx E \exp(-T(f) - T_g(f)) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \langle g, H_\delta^{-1} g \rangle\right).$$

Когда это соотношение установлено, простые рассуждения типа доказательства теоремы Стоуна — Вейерштрасса дают тот же результат для произвольных  $F$ .

Основным средством для вычисления величины (17) является просто формула преобразования Лапласа гауссовской меры:

$$(18) \quad (2\pi)^{-n/2} (\text{Det } A)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} (Ax, x)\right) \exp(-(y, x)) dx = \\ = \exp\left(\frac{1}{2} (A^{-1}y, y)\right).$$

Вспомогая, что  $\Phi_\delta^N$  имеет гауссовское распределение с ковариационной матрицей  $\delta^{-2d} C_{\Lambda_\delta}$  и что  $D_{\Lambda_\delta} = C_{\Lambda_\delta}^{-1}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right) \right] = \\
 & = (2\pi)^{-|\Lambda_\delta|/2} (\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_\delta}} \exp\left[-\frac{1}{2}((D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f I) x, x)\right] \times \\
 & \quad \times \exp(-(g, x)) dx = \\
 & = (\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} [\text{Det}(D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f I)]^{-1/2} \times \\
 & \quad \times \exp\left[\frac{1}{2}((D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f I)^{-1} g, g)\right],
 \end{aligned}$$

где все скалярные произведения, обозначаемые круглыми скобками, берутся в  $\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}$ , т. е.  $(x, y) = \sum_{i \in \Lambda_\delta} x_i y_i$ . Поскольку в другом месте мы использовали скалярное произведение в  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , обозначаемое угловыми скобками  $\langle f, g \rangle = \sum_{i \in \Lambda_\delta} f(i) g(i) \delta^d$ , удобно переписать равенство (19) в виде

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp\left(-\frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f)\right) \right] = \\
 & = (\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} [\text{Det}(D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f I)]^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \langle g, (H_\delta + f)^{-1} g \rangle\right).
 \end{aligned}$$

Напомним, что  $H_\delta = -\frac{1}{2} \Delta_\delta + m^2$ .

Произведение двух детерминантов в последней формуле мы уже вычислили ранее:

$$(\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} [\text{Det}(D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d} f I)]^{-1/2} \approx E \exp(-T(f)),$$

где  $T$  — пуассоновское поле броуновских петель, отвечающее мере  $\alpha$ , определенной в формуле (11).

Чтобы вычислить экспоненциальный член в формуле (20), заметим, что

$$(21) \quad (H_\delta + f)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - (H_\delta + f) \Delta t)^k \Delta t,$$

так как оператор  $H_\delta + f$  строго положителен. По формуле Фейнмана — Каца

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \langle (I - (H_\delta + f) \Delta t)^k g, g \rangle \approx \\
 & \approx \sum_{t=0}^{\infty} E \left( g(X(t)) g(X(0)) \exp\left(-\int_0^t f(X(s)) ds\right) \right) \Delta t,
 \end{aligned}$$

где  $X$  — марковский процесс, порожденный оператором  $H_\delta$ . Через условные меры  $P_{i,j}^t$  и отвечающие им математические ожидания  $E_{i,j}^t$  последняя формула переписывается

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \langle (I - (H_\delta + f) \Delta t)^k g, g \rangle \approx \\ \approx \sum_{(i,j,t) \in \Lambda_\delta^2 \times T} g(i) g(j) (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, j, t) \times \\ \times E_{i,j}^t \left[ \exp \left( - \int_0^t f(X(s)) ds \right) \delta^{2d} \Delta t \right].$$

Если определить внутреннюю меру  $\alpha_g$  на  $\Lambda_\delta^2 \times T$  равенством

$$(24) \quad \alpha_g(i, j, t) = \frac{1}{2} g(i) g(j) (1 - m^2 \Delta t)^{t/\Delta t} p(i, j, t) \delta^{2d} \Delta t,$$

то, собрав вместе формулы (21)–(24), мы получим

$$(25) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \langle (H_\delta + f)^{-1} g, g \rangle \right) \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \left[ \exp \left( - \int_0^t f(X(s)) ds \right) \right] d\alpha_g(i, j, t) \right\}.$$

Заметим, что если  $f \equiv 0$ , последняя формула превращается в соотношение

$$(26) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right) \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t(1) d\alpha_g(i, j, t) \right\}$$

(на самом деле в этом случае имеет место точное равенство), откуда

$$(27) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \langle (H_\delta + f)^{-1} g, g \rangle \right) \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \left[ \exp \left( - \int_0^t f(X(s)) ds \right) - 1 \right] d\alpha_g \right\} \times \\ \times \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right).$$

Причиной для этого последнего, довольно загадочного маневра является попросту то, что если  $T_g$  — пуассоновское случайное

поле броуновских мостов, отвечающее мере  $\alpha_g$ , то, согласно лемме 7.5.2,

$$(28) \quad E \exp(-T_g(f)) \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \left[ \exp \left( - \int_0^t f(X(s)) ds \right) - 1 \right] d\alpha_g \right\},$$

и, значит, формула (27) утверждает, что

$$(29) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \langle (H_\delta + f)^{-1} g, g \rangle \right) \approx \\ \approx E [\exp(-T_g(f))] \cdot \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right).$$

Объединяя формулы (20) и (29), получаем

$$(30) \quad E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp \left( - \frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f) \right) \right] \approx \\ \approx E \exp(-T(f)) E \exp(-T_g(f)) \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right),$$

или — при условии, что случайные поля  $T(f)$  и  $T_g(f)$  построены независимо друг от друга —

$$(31) \quad E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp \left( - \frac{1}{2} \Psi_\delta^N(f) \right) \right] \approx \\ \approx E \exp(-(T + T_g)(f)) \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right).$$

Если  $F_f: {}^*\mathbb{R}^{\Lambda_\delta} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  — внутренний функционал вида

$$F_f(g) = \exp(-\langle g, f \rangle),$$

формулу (31) можно переписать в виде

$$(32) \quad E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) F_f \left( \frac{1}{2} \Psi_\delta^N \right) \right] \approx \\ \approx E(F_f(T + T_g)) \exp \left( \frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle \right);$$

здесь  $T + T_g$  рассматривается как функция из  $\Lambda_\delta$  в  ${}^*\mathbb{R}$ , заданная равенством

$$(33) \quad (T + T_g)(i) = (T + T_g)(f_i),$$

где  $f_i$  — функция, равная  $f_i(j) = \delta^{-d} \delta_{ij}$ .

Прежде чем обобщать соотношение (32) на более общие функционалы, сформулируем уже полученные результаты в виде леммы.

**7.5.4 Лемма.** *Существует такое бесконечно большое число  $n_1 \in {}^*\mathbb{N}$ , что если  $|\Lambda_\delta| \leq n_1$ , то для всех неотрицательных в ну-*

тренних функций  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих условиям  $\|f\|_\infty \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$  и  $\|g\|_2/\sqrt{\Delta t} \approx 0$ , справедливо соотношение  $E\left[\exp(-\Phi_\delta^N(g)) F_f\left(\frac{1}{2}\Psi_\delta^N\right)\right] \approx E[F_f(T+T_g)] \exp\left(\frac{1}{2}\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle\right)$ .

**Доказательство.** Так же как и при доказательстве теоремы 7.5.3, нам нужно только проверить, что условия леммы являются достаточными для тех вычислений, которые мы уже провели. Ясно, что они достаточно сильны для использования теоремы 7.5.3, и столь же легко проверить, что условие  $\|f\|_\infty \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$  делает законным применение формулы Фейнмана — Каца в (22). Значит, справедливо соотношение (27).

Чтобы узаконить ссылку на лемму 7.5.2, достаточно проверить, что  $\sum_{i,j,t} \alpha_g(i,j,t)^2 \approx 0$ . Но

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j,t)} \alpha_g(i,j,t)^2 &\leq \sum_{(i,j,t)} \frac{1}{4} g(i)^2 g(j)^2 (1 - m^2 \Delta t)^{2t/\Delta t} \delta^{2d} \Delta t^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{8m^2 - 4m^4 \Delta t} \left( \sum_i \frac{1}{2} g(i)^2 \delta^d \right)^2 \Delta t \approx 0, \end{aligned}$$

и лемма доказана.  $\square$

Чтобы обобщить лемму 7.5.4, нужно сначала показать, что на множество функционалов специального вида  $F_f$  натянуто множество всех разумных (в подходящем смысле) функционалов. Будем использовать следующую терминологию. Для каждого  $H \in {}^*\mathbb{N}$  назовем  $H$ -функционалом такую внутреннюю функцию

$$F: l^2(\Lambda_\delta, \delta^d) \rightarrow {}^*\mathbb{R},$$

что для всех  $f, g \in l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$  справедливы оценки

$$(34) \quad |F(f)| \leq H \exp(-\|f\|^2/H),$$

$$(35) \quad |F(f) - F(g)| \leq H \|f - g\|.$$

Гиперконечная последовательность  $(\beta_n, f_n)$ , состоящая из чисел  $\beta_n \in {}^*\mathbb{R}$  и неотрицательных внутренних функций  $f_n: \Lambda_\delta \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ , назовем  $(K, \Delta t)$ -последовательностью, если  $\sum |\beta_n| \leq K$  и  $\|f_n\|_\infty \leq (\log(1/\Delta t))^{1/2}$  для всех  $n$ .

**7.5.5. Лемма.** Для любого  $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  найдется такое  $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что если  $|\Lambda_\delta| \leq H$ , то для любого  $H$ -функционала  $F: l^2(\Lambda_\delta, \delta^d) \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  найдется такая  $(K, \Delta t)$ -последовательность  $(\beta_n, f_n)$ , для которой

$$|F(g) - \sum \beta_n F_{f_n}(g)| \leq \frac{1}{H}$$

для всех неотрицательных внутренних функций  $g: \Lambda_\delta \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Пусть сначала число  $H$  конечно. Не вводя новых обозначений, будем считать, что множество  $\mathbb{R}_+$  содержит 0. Пусть  $\overline{\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}} = \mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta} \cup \{\infty\}$  — одноточечная компактификация пространства  $\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}$ . В силу конечности множества  $\Lambda_\delta$  пространство  $\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}$  является подмножеством пространства  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , и мы можем превратить  $F$  в стандартную функцию  $\tilde{F}: \overline{\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}} \rightarrow \mathbb{R}$ , положив

$$\tilde{F}(g) = {}^\circ F(g)$$

для всех  $g \in \mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}$ , а также положив

$$\tilde{F}(\infty) = 0.$$

Заметим, что условие  $|F(g)| \leq H e^{-\|g\|^2/H}$  влечет непрерывность функции  $\tilde{F}$  в бесконечности.

Каждой строго положительной функции  $f: \Lambda_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  соответствует непрерывная функция  $\tilde{F}_f$  на  $\overline{\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}}$ , определяемая равенствами

$$\tilde{F}_f(g) = \exp(-\langle g, f \rangle), \quad g \in \mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}, \quad \tilde{F}_f(\infty) = 0;$$

строгая положительность нужна для непрерывности в бесконечности. Алгебра функций  $\mathcal{A}$ , состоящая из всех конечных линейных комбинаций

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \tilde{F}_{f_i},$$

разделяет точки и содержит все постоянные функции. Так как пространство  $\overline{\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}}$  компактно, теорема Стоуна — Вейерштрасса утверждает, что можно найти такую конечную последовательность  $(\beta_i, f_i)$ , что

$$(36) \quad \left| \tilde{F}(g) - \left( \beta_0 + \sum \beta_i \tilde{F}_{f_i}(g) \right) \right| \leq \frac{1}{2H}$$

для всех  $g \in \overline{\mathbb{R}_+^{\Lambda_\delta}}$ .

Рассматривая функции  $f_i$  как элементы пространства  $P(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , определим функционалы  $F_{f_i}: l^2(\Lambda_\delta, \delta^d) \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ ,

$$F_{f_i}(g) = \exp(-\langle g, f_i \rangle).$$

Используя условия убывания и непрерывности функционала  $F$  (см. (34), (35)), а также тот факт, что все  $\beta_i, f_i$  стандартны и  $f_i$

строго положительны, выводим из формулы (36) оценку

$$|F(g) - (\beta_0 + \sum \beta_i F_{f_i}(g))| \leq \frac{1}{H}$$

для всех неотрицательных внутренних функций  $g: \Lambda_\delta \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ . Так как последовательность  $(\beta_i, f_i)$  очевидно является  $(K, \Delta t)$ -последовательностью, лемма доказана для всех конечных  $H$ , и, следовательно, для всех достаточно малых бесконечно больших  $H$ .  $\square$

**Замечание.** Условие  $|F(f)| \leq H \exp(-\|f\|^2/H)$ , которое мы использовали для управления поведением функции  $F$  на бесконечности, ни в какой мере не является каноническим. Фактически его можно заменить на условие

$$(37) \quad |F(f)| \leq {}^*G(H, \|f\|),$$

где  $G$  — произвольная стандартная функция  $G: \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , для которой  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(n, x) = 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Собирая вместе леммы 7.5.4 и 7.5.5, получаем следующую теорему.

**7.5.6. Теорема.** *Существует такое  $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что если  $|\Lambda_\delta| \leq H$ , то для всех  $H$ -функционалов  $F: l^2(\Lambda_\delta, \delta^d) \rightarrow {}^*\mathbb{R}$  и всех  $g \in l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , для которых  ${}^\circ\|g\| < \infty$ ,  $g > 0$ , справедлива формула*

$$(38) \quad E[\exp(-\Phi_\delta^N(g)) F(\frac{1}{2} \Psi_\delta^N)] \approx E[F(T + T_g)] \exp(\frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle).$$

Если к тому же  ${}^\circ F$  не равно тождественно нулю, то

$$(39) \quad \frac{E[\exp(-\Phi_\delta^N(g)) F(\frac{1}{2} \Psi_\delta^N)]}{E[F(\frac{1}{2} \Psi_\delta^N)]} \approx \frac{E[F(T + T_g)] \exp(\frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle)}{E[F(T)]}.$$

**Доказательство.** Если  $|\Lambda_\delta|$  меньше, чем константа  $n_1 \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$  из леммы 7.5.4, то должно найтись такое  $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ , что для всех  $(K, \Delta t)$ -последовательностей  $(\beta_n, f_n)$  и всех  $g \in l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$  с конечной нормой

$$\begin{aligned} & \left| E[\exp(-\Phi_\delta^N(g)) \sum \beta_n F_{f_n}(\frac{1}{2} \Psi_\delta^N)] - \right. \\ & \left. - E[\sum \beta_n F_{f_n}(T + T_g)] \exp(\frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle) \right| \leq \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Если к тому же  $|\Lambda_\delta|$  меньше, чем константа  $H$  из леммы 7.5.5, то найдется такая  $(K, \Delta t)$ -последовательность  $(\beta_n, f_n)$ , для которой разность  $F - \sum \beta_n F_{f_n}$  меньше, чем  $H^{-1}$ , по норме супремума.



Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \left( F\left(\frac{1}{2}\Psi_\delta^N\right) - \Sigma \beta_n F_{f_n}\left(\frac{1}{2}\Psi_\delta^N\right) \right) \right] \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{H} E \exp(-\Phi_\delta^N(g)) = \frac{1}{H} \exp\left(\frac{1}{2}\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left| E \left[ F(T + T_g) - \Sigma \beta_n F_{f_n}(T + T_g) \right] \exp\left(\frac{1}{2}\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle\right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{H} \exp\left(\frac{1}{2}\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle\right). \end{aligned}$$

Поскольку оператор  $H_\delta$  ограничен снизу числом  $m^2$ , мы имеем

$$\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle \leq \|g\|^2/m^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left| E \left[ \exp(-\Phi_\delta^N(g)) F\left(\frac{1}{2}\Psi_\delta^N\right) \right] - E[F(T + T_g)] \exp\left(\frac{1}{2}\langle H_\delta^{-1}g, g \rangle\right) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{K} + \frac{2}{H} \exp\left(\frac{\|g\|^2}{2m^2}\right), \end{aligned}$$

и формула (38) доказана.

Обращаясь к формуле (39), замечаем, что если число  $H$  конечно, то величины  $E\left(F\left(\frac{1}{2}\Psi_\delta^N\right)\right)$  и  $E(F(T))$  бесконечно близки друг к другу и не бесконечно малы. Значит, соотношение (39) выполняется для всех конечных  $H$  и, следовательно, для достаточно малых бесконечно больших  $H$ .  $\square$

**Замечание.** Полученная теорема является гиперконечной версией формулы представления Дынкина (см. Dynkin [1], [2], а также Brydges и др. [1]). Заметим, что класс внутренних функционалов  $F$ , допускаемый этой теоремой, достаточно богат, чтобы можно было представить все стандартные функционалы из  $l^2(\Lambda, dx)$  в  $\mathbb{R}$ .

#### Д. $\Phi^4$ и полимерные меры

Напомним (см. § 7.4), что поля  $\Phi^4$  задаются взаимодействиями вида

$$\begin{aligned} (40) \quad U(\Phi_\delta^N) &= \frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Phi_\delta^N(i)^4 \delta^d + \frac{a}{2} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Phi_\delta^N(i)^2 \delta^d = \\ &= \frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Psi_\delta^N(i)^2 \delta^d + \frac{a}{2} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Psi_\delta^N(i) \delta^d, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  и  $a$  — константы. Чтобы увидеть, как такое поле может быть представлено в терминах броуновских локальных времен,

заметим, что его характеристический функционал может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
 (41) \quad & E \exp(-\Phi_{\delta}^N(g)) \exp(-U) = \\
 & = E \left[ \exp(-\Phi_{\delta}^N(g)) \exp\left(-\frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_{\delta}} \Psi_{\delta}^N(i)^2 \delta^d - \frac{a}{2} \sum_{i \in \Lambda_{\delta}} \Psi_{\delta}^N(i) \delta^d\right) \right] = \\
 & = E \exp(-\Phi_{\delta}^N(g)) F\left(\frac{1}{2} \Psi_{\delta}^N\right),
 \end{aligned}$$

где

$$F(f) = \exp\left(-\lambda \sum_{\Lambda_{\delta}} f^2 \delta^d - a \sum_{\Lambda_{\delta}} f \delta^d\right).$$

Если справедливы условия теоремы 7.5.6, это означает, что

$$(42) \quad E \exp(-\Phi_{\delta}^N(g)) \exp(-U) \approx E(F(T + T_g)) \exp\left(\frac{1}{2} \langle H_{\delta}^{-1} g, g \rangle\right),$$

или, если записать то же самое более подробно,

$$\begin{aligned}
 (43) \quad & E \exp(-\Phi_{\delta}^N(g)) \exp(-U) \approx \\
 & \approx E \exp\left\{-\lambda \sum_{i \in \Lambda_{\delta}} [T(i)^2 + 2T(i)T_g(i) + T_g(i)^2] \delta^d - \right. \\
 & \quad \left. - a \sum_{i \in \Lambda_{\delta}} [T(i) + T_g(i)] \delta^d\right\} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \langle H_{\delta}^{-1} g, g \rangle\right).
 \end{aligned}$$

Прежде чем обсуждать это выражение, нам придется сделать обозначения несколько более явными. Напомним, что, согласно формуле (12), функция  $T$  определяется как

$$(44) \quad T(k)(\sigma, \omega) = \sum_{(i, j, t)} \sigma(i, j, t) \sum_{s=0}^t \delta^{-d} I_{\{k\}}(X(\omega_{i, j, t}, s)) \Delta t,$$

где  $\sigma$  — гиперконечное пуассоновское поле, отвечающее мере  $\alpha$ , определенной в (11), а  $X$  — марковский процесс, соответствующий оператору  $H_{\delta}$ . Аналогично,

$$(45) \quad T_g(k)(\sigma_g, \omega_g) = \sum_{(i, j, t)} \sigma_g(i, j, t) \sum_{s=0}^t \delta^{-d} I_{\{k\}}(X_g(\omega_{g, i, j, t}, s)) \Delta t,$$

где  $\sigma_g$  — гиперконечное пуассоновское поле, отвечающее мере  $\alpha_g$ , определенной в (24), а  $X_g$  — другая копия марковского процесса, соответствующего оператору  $H_{\delta}$ . Поскольку случайные функции  $T$  и  $T_g$  предполагались независимыми, выберем  $\sigma$ ,  $X$  и  $\sigma_g$ ,  $X_g$  независимыми.

Квадратичные члены относительно  $T$  и  $T_g$  теперь могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad & \lambda \sum_{k \in \Lambda_\delta} T(k) T_g(k) \delta^d = \\
 & = \lambda \sum_{k \in \Lambda_\delta} \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma(i, j, t) \sigma_g(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \times \\
 & \quad \times \sum_{s=0}^t \sum_{\tilde{s}=0}^{\tilde{t}} \delta^{-d} I_{\{k\}}(X(s)) I_{\{k\}}(X_g(\tilde{s})) \Delta t^2 = \\
 & = \lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma(i, j, t) \sigma_g(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X(s) - X_g(\tilde{s})) d\tilde{s} ds,
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{\delta}$  — гиперконечная версия  $d$ -мерной дельта-функции, т. е.  $\tilde{\delta}(0) = \delta^{-d}$  и  $\tilde{\delta}(i) = 0$  при  $i \neq 0$ . Аналогично,

$$\begin{aligned}
 (47) \quad & \lambda \sum_{k \in \Lambda_\delta} T(k)^2 \delta^d = \lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma(i, j, t) \sigma(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \times \\
 & \quad \times \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X(\omega_{i, j, t}, s) - X(\omega_{\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})) d\tilde{s} ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (48) \quad & \lambda \sum_{k \in \Lambda_\delta} T_g(k)^2 \delta^d = \lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma_g(i, j, t) \sigma_g(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \times \\
 & \quad \times \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X_g(\omega_{g, i, j, t}, s) - X_g(\omega_{g, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})) d\tilde{s} ds,
 \end{aligned}$$

где мы явно выписали аргументы  $\omega$  в правых частях, чтобы подчеркнуть, что если  $(i, j, t) \neq (\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})$ , то процессы  $X(\omega_{i, j, t}, s)$  и  $X(\omega_{\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})$  независимы (так же, как и процессы  $X_g(\omega_{g, i, j, t}, s)$  и  $X_g(\omega_{g, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})$ ).

Члены, линейные относительно  $T$  и  $T_g$ , тоже можно вычислить:

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & a \sum_{k \in \Lambda_\delta} T(k) \delta^d = a \sum_{(i, j, t)} \sigma(i, j, t) \sum_{s=0}^t \delta^{-d} I_{\{k\}}(X(s)) \Delta t \delta^d = \\
 & = a \sum_{(i, j, t)} \sigma(i, j, t) \int_0^t I_{\Lambda_\delta}(X(s)) ds,
 \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$(50) \quad a \sum_{k \in \Lambda_\delta} T_g(k) \delta^d = a \sum_{(i, j, t)} \sigma_g(i, j, t) \int_0^t I_{\Lambda_\delta}(X_g(s)) ds.$$

Подставляя правые части формул (46) — (50) в формулу (43), мы приходим к следующему выражению:

$$(51) \quad \begin{aligned} & E \exp(-\Phi_\delta^N(g)) \exp(-U) \approx \\ & \approx E \exp \left\{ -\lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma(i, j, t) \sigma(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \times \right. \\ & \quad \times \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X(\omega_{i, j, t}, s) - X(\omega_{\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})) d\tilde{s} ds - \\ & \quad - 2\lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma(i, j, t) \sigma_g(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X(s) - X_g(\tilde{s})) d\tilde{s} ds - \\ & \quad - \lambda \sum_{(i, j, t)} \sum_{(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})} \sigma_g(i, j, t) \sigma_g(\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}) \times \\ & \quad \times \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \tilde{\delta}(X_g(\omega_{g, i, j, t}, s) - X_g(\omega_{g, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t}}, \tilde{s})) d\tilde{s} ds - \\ & \quad - a \sum_{i, j, t} \sigma(i, j, t) \int_0^t I_{\Lambda_\delta}(X(s)) ds - \\ & \quad \left. - a \sum_{(i, j, t)} \sigma_g(i, j, t) \int_0^t I_{\Lambda_\delta}(X_g(s)) ds \right\} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \langle H_\delta^{-1} g, g \rangle\right). \end{aligned}$$

Два последних слагаемых в этом выражении (происходящие из формул (49) и (50)) не сложны, в то время как остальные три напоминают выражения, исследовавшиеся в § 6.4.С. До тех пор пока  $(i, j, t) \neq (\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})$ , процессы, стоящие внутри одной и той же дельта-функции, независимы, и мы находимся в ситуации, отраженной в формулах (6.4.35) — (6.4.37). Когда же  $(i, j, t) = (\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{t})$  (заметим, что вероятность этого события не бесконечно мала!), мы имеем дело с более сложной ситуацией полимерных мер, описываемых формулами (6.4.39) — (6.4.40). Таким образом, тривиальность или нетривиальность скалярного поля  $\Phi^4$  тесно свя-

зана с поведением полимерных мер и с возмущениями оператора Лапласа, сосредоточенными на броуновских траекториях.

Здесь будет уместно отметить, что если мы не сказали ничего определенного о поле  $\Phi_4^4$ , то вовсе не потому, что нам не удалось справиться с четырехмерными полимерными мерами. Напомним, что в соответствии с § 6.4 мы можем придать выражению

$$\exp\left(-\int_0^t \int_0^{\tilde{t}} \lambda \delta(b_1(s) - b_2(\tilde{s})) d\tilde{s} ds\right)$$

стандартный смысл только при отрицательных бесконечно малых  $\lambda$ <sup>1)</sup>. Теперь же оказывается, что результат, на котором базируется наше обсуждение, а именно теорема 7.5.6, при отрицательных  $\lambda$  неверен! На самом деле и числитель, и знаменатель левой части формулы (39) при отрицательных  $\lambda$  расходятся. Однако, поскольку  $T$  и  $T_g$  являются \*-конечными величинами, правая часть формулы (39) имеет смысл, и сравнительно несложно так интерпретировать левую часть (с помощью аргументов, связанных с обрезанием), чтобы результат можно было продолжить на отрицательные  $\lambda$ . Гораздо более серьезную проблему представляет тот факт, что бесконечно малые  $\lambda$ , найденные нами в § 6.4, являются не константами, а функциями от  $\omega$  и  $t$ . Конечно, может так случиться, что кому-то удастся, не нарушив рассуждений § 6.4, выбрать  $\lambda$  постоянными; нам этого сделать не удалось. С другой стороны, если  $\lambda$  не является константой, то нет очевидного способа придания формуле (51) смысла квантового поля.

Подводя итоги, подчеркнем, что хотя приведенные выше вычисления в совокупности с результатами § 6.4, как кажется, наводят на мысль, что поле  $\Phi_4^4$  может при определенном выборе отрицательной бесконечно малой константы связи  $\lambda$  быть нетривиальным, но прежде чем удастся доказать либо опровергнуть это утверждение, предстоит проделать большой путь. Такая работа сейчас происходит: в то время как пишутся эти строки, Андреас Столл развивает гиперконечный подход к полимерным мерам, основывающийся на (самоотталкивающихся) случайных блужданиях (см. Stoll [3]).

Другие результаты о бесконечно малых константах связи и смежных вопросах — таких, как тривиальность отталкивающих моделей  $\Phi^4$  — см. в работах Aizenman [1], Albeverio, Blanchard, Høegh-Krohn [1], [3], Albeverio, Fenstad, Høegh-Krohn, Karwowski, Lindstrom [1], Frölich [2], Galavotti, Nicolò [1], Sokol [1], Westwater [1], [4].

<sup>1)</sup> Заметим, что это соответствует полимерной плотности при  $d = 4$  в § 6.4, но при этом  $\lambda$  обозначалось —  $\lambda$  в § 6.4. А. — Прим. ред.

Е. Поля  $\Phi_1^2 \Phi_2^2$  и возмущения локальным временем

Как мы только что видели, две основные проблемы, с которыми мы сталкиваемся при попытке построить поле  $\Phi^4$  с помощью его представления через локальное время, суть появление полимерных мер в правой части формулы (51) и необходимость выбора величины  $\lambda$ , равной константе. Здесь мы кратко рассмотрим другой тип взаимодействующих квантовых полей, когда первую проблему удастся обойти, но вторая, к сожалению, остается. Мы имеем в виду так называемые модели  $(\Phi_1^2 \Phi_2^2)_d$ , описывающие два  $d$ -мерных квантовых поля  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , взаимодействующие с помощью члена

$$(52) \quad \frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Phi_1(i)^2 \Phi_2(i)^2 \delta^d,$$

где  $\lambda$  — константа связи.

Опишем ситуацию математически. Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — два положительных действительных числа, представляющие собой массы двух полей. Пусть  $D_k$ ,  $k = 1, 2$  — матрица оператора  $H_k = -\frac{1}{2} \Delta_k + m_k^2$ , действующего из  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$  в  $l^2(\Lambda_\delta, \delta^d)$ , а  $C_k = D_k^{-1}$ . Зафиксируем вероятностную меру  $\mu_0$  и два независимых случайных вектора  $\{\tilde{\Phi}_1(i)\}_{i \in \Lambda_\delta}$  и  $\{\tilde{\Phi}_2(i)\}_{i \in \Lambda_\delta}$  с ковариационными матрицами  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. Так же как и в § 7.5.B, квантовые поля  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются равенствами  $\Phi_k = \delta^{-d} \tilde{\Phi}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Очевидно, что  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — независимые свободные скалярные поля относительно меры  $\mu_0$ .

Взаимодействующая мера  $\mu$  определяется следующим образом:

$$(53) \quad d\mu = Z^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Phi_1(i)^2 \Phi_2(i)^2 \delta^d\right) d\mu_0,$$

где

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\lambda}{4} \sum_{i \in \Lambda_\delta} \Phi_1(i)^2 \Phi_2(i)^2 \delta^d\right) d\mu_0$$

— нормирующий множитель. Предположим пока, что  $\lambda$  неотрицательно. Как обычно, мы хотим вычислить преобразование Лапласа меры  $\mu$ :

$$(54) \quad F(f, g) = \int \exp(-\Phi_1(f) - \Phi_2(g)) d\mu = \\ = Z^{-1} \int \exp\left(-\sum_{i \in \Lambda_\delta} \left\{ \frac{\lambda}{4} \Phi_1(i)^2 \Phi_2(i)^2 + \Phi_1(i) f(i) + \Phi_2(i) g(i) \right\} \delta^d\right) d\mu_0.$$

Задача о двух взаимодействующих квантовых полях не укладывается в рамки подхода из § 7.5.C, и нам придется начать все вычисления сначала. Оказывается, однако, что в процессе этих вычислений нам удастся воспользоваться некоторыми уже выведенными формулами, и это существенно упростит нашу задачу. В частности, мы воспользуемся формулой для преобразования Лапласа гауссовской меры:

$$(55) \quad (2\pi)^{-n/2} (\text{Det } A)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(Ax, x)\right) \exp(-(y, x)) dx = \\ = \exp\left(\frac{1}{2}(A^{-1}y, y)\right);$$

выражением

$$(56) \quad (\text{Det } D_{\Lambda_\delta})^{1/2} (\text{Det } (D_{\Lambda_\delta} + \delta^{-d}f))^{-1/2} \approx \\ \approx \exp\left\{\int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \left(\exp\left(-\int_0^t f(X(s)) ds\right) - 1\right) d\alpha\right\} = \\ = \exp(-\alpha(\Lambda_\delta^2 \times T)) \exp\left\{\int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \exp\left(-\int_0^t f(X(s)) ds\right) d\alpha\right\},$$

полученным из формул (5), (10) и (11), а также формулой (25), т. е.

$$(57) \quad \exp\left(\frac{1}{2}\langle (H_\delta + f)^{-1}g, g \rangle\right) \approx \\ \approx \exp\left\{\int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i,j}^t \exp\left(-\int_0^t f(X(s)) ds\right) d\alpha_g\right\}.$$

Начнем наши вычисления со следующего наблюдения: поскольку  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$  — независимые и гауссовские поля с матрицами ковариаций  $C_1$  и  $C_2$ , то

$$(58) \quad \tilde{F}(f, g) = Z \cdot F(f, g) = (2\pi)^{-|\Lambda_\delta|} (\text{Det } C_1)^{-1/2} (\text{Det } C_2)^{-1/2} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^2 |\Lambda_\delta|} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_\delta} C_1^{-1}(i, j) p_i p_j\right] \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_\delta} C_2^{-1}(i, j) q_i q_j\right] \times \\ \times \exp\left[-\sum_{i \in \Lambda_\delta} \left\{\frac{\lambda}{4} p_i^2 q_i^2 \delta^{-3d} + p_i f(i) + q_i g(i)\right\}\right] \prod_{i \in \Lambda_\delta} dp_i \prod_{i \in \Lambda_\delta} dq_i.$$

Проинтегрируем по переменным  $p_i$ . Вспоминая, что  $D_k = C_k^{-1}$ , из формулы (55) получаем

$$(59) \quad \tilde{F}(f, g) = (2\pi)^{-|\Lambda_\delta|/2} (\text{Det } D_2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}} (\text{Det } D_1)^{1/2} \times \\ \times \left( \text{Det} \left( D_1 + \frac{\lambda}{2} q^2 \delta^{-3d} \right) \right)^{-1/2} \exp \left( \frac{1}{2} \left( \left( D_1 + \frac{\lambda}{2} q^2 \delta^{-3d} \right)^{-1} f, f \right) \right) \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \sum D_2(i, j) q_i q_j \right) \exp \left( -\sum q_i g(i) \right) \prod_{i \in \Lambda_\delta} dq_i.$$

Согласно формуле (56)

$$(60) \quad (\text{Det } D_1)^{1/2} \left( \text{Det} \left( D_1 + \frac{\lambda}{2} q^2 \delta^{-3d} \right) \right)^{-1/2} \approx \\ \approx \exp \left( -\alpha_1 (\Lambda_\delta^2 \times T) \right) \times \\ \times \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( -\int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q (X_1(s))^2 ds \right) \right) d\alpha_1 \right\},$$

где  $X_1$  — марковский процесс, отвечающий оператору  $H_1 = -\frac{1}{2} \Delta_d + m_1^2$ , а  $\alpha_1$  — мера, полученная из формулы (11) при подстановке  $m_1$  вместо  $m$ . Аналогично, согласно формуле (57)

$$(61) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \left( \left( D_1 + \frac{\lambda}{2} q^2 \delta^{-3d} \right)^{-1} f, f \right) \right) = \\ = \exp \left( \frac{1}{2} \left\langle \left( H_1 + \frac{\lambda}{2} q^2 \delta^{-2d} \right)^{-1} f, f \right\rangle \right) \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( -\int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q (X_1(s))^2 ds \right) \right) d\alpha_f \right\},$$

где  $\alpha_f$  — мера, полученная из формулы (24) при подстановке  $f$  и  $m_1$  вместо  $g$  и  $m$ .

Подставляя (60) и (61) в (59) и вынося за знак интеграла все, что не зависит от  $q$ , получаем

$$(62) \quad \tilde{F}(f, g) \approx (2\pi)^{-|\Lambda|/2} (\text{Det } D_2)^{1/2} \exp \left( -\alpha_1 (\Lambda_\delta^2 \times T) \right) \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}} \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( -\int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q (X_1(s))^2 ds \right) \right) d(\alpha_1 + \alpha_f) \right\} \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \sum D_2(i, j) q_i q_j \right) \exp \left( -\sum q_i g(i) \right) \prod_{i \in \Lambda_\delta} dq_i.$$



Строго говоря, мы здесь обманываем: существуют условия, при которых верны формулы (56) и (57), и эти условия надо проверять; нельзя просто подставлять (60) и (61) в (59) и быть уверенным, что получится верный результат. Однако нетрудно доказать что формула (62) справедлива для конечных  $|\Lambda_\delta|$  и  $\delta^{-1}$  и, следовательно, для достаточно малых бесконечно больших  $|\Lambda_\delta|$  и  $\delta^{-1}$ . Поскольку мы сейчас пытаемся не столько доказать теорему, сколько сообщить идею, начиная с этого момента всю бухгалтерию такого сорта мы оставляем читателю.

Чтобы вычислить интеграл по переменным  $q_i$  в формуле (62), разложим сначала экспоненту в ряд:

$$(63) \quad \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q(X_1(s))^2 ds \right) \right) d(\alpha_1 + \alpha_f) \right\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q(X_1(s))^2 ds \right) \right) d(\alpha_1 + \alpha_f) \right\}^n.$$

Пусть  $\beta_f^n$  — мера на  $\Lambda_\delta^{2n} \times T^n$ , полученная  $n$ -кратным произведением мер  $\alpha_1 + \alpha_f$ . Обозначим через  $X_1^1(\omega_1, \cdot), \dots, X_1^n(\omega_n, \cdot)$  независимые копии процесса  $X_1$  и пусть

$$E_{i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n}, i_1, \dots, i_n$$

обозначает математическое ожидание относительно произведения мер  $\prod_{k=1}^n P_{i_k, j_k}^{t_k}(\omega_k)$ . Тогда формулу (63) можно переписать следующим образом:

$$(64) \quad \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} E_{i, j}^t \left( \exp \left( - \int_0^t \frac{\lambda}{2} \delta^{-2d} q(X_1(s))^2 ds \right) \right) d(\alpha_1 + \alpha_f) \right\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} E_{i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n}, i_1, \dots, i_n \\ \exp \left( - \frac{1}{2} \lambda \delta^{-2d} \sum_{k=1}^n \int_0^{t_k} q(X_1^k(s))^2 ds \right) d\beta_f^n.$$

Подставляя полученное равенство в формулу (62) и меняя порядок интегрирования, убеждаемся в том, что

$$(65) \quad \tilde{F}(f, g) = (2\pi)^{-|\Lambda_\delta|/2} (\text{Det } D_2)^{1/2} \exp(-\alpha_1(\Lambda_\delta^2 \times T)) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} E_{i_1', \dots, i_n', i_1, \dots, i_n}^{t_1', \dots, t_n} \\ \left( \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum D_2(i, j) q_i q_j - \sum q_i g(i)\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda \delta^{-2d} \sum_{k=1}^n \int_0^{t_k} q(X_1^k(s))^2 ds\right) \prod_{i \in \Lambda_\delta} dq_i \right) d\beta_f^n.$$

Идея состоит в том, что можно вычислить внутренний интеграл с помощью формулы для преобразования Лапласа гауссовской меры. В самом деле, пусть  $L_n$  — это «локальное время»

$$(66) \quad L_n(i) = \delta^{-d} \sum_{k=1}^n |\{s \leq t_k \mid X_1^k(s) = i\}| \Delta t;$$

заметим, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \lambda \delta^{-2d} \sum_{k=1}^n \int_0^{t_k} q(X_1^k(s))^2 ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda \delta^{-d} \sum_{i \in \Lambda_\delta} L_n^{\square}(i) q_i^2\right).$$

Согласно формуле (55)

$$(2\pi)^{-|\Lambda_\delta|/2} \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_\delta|}} \exp\left(-\frac{1}{2} ((D_2 + \lambda \delta^{-d} L_n) q, q)\right) \exp(-(g, q)) = \\ = (\text{Det}(D_2 + \lambda \delta^{-d} L_n))^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} ((D_2 + \lambda \delta^{-d} L_n)^{-1} g, g)\right);$$

поэтому соотношение (65) превращается в

$$(67) \quad \tilde{F}(f, g) \approx \exp(-\alpha_1(\Lambda_\delta^2 \times T)) (\text{Det } D_2)^{1/2} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} E_{i_1', \dots, i_n', i_1, \dots, i_n}^{t_1', \dots, t_n} \\ \left( (\text{Det}(D_2 + \lambda \delta^{-d} L_n))^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \langle (H_2 + \lambda L_n)^{-1} g, g \rangle\right) \right) d\alpha_f^n.$$

Если  $X_2$  — марковский процесс, отвечающий оператору  $H_2 = -\frac{1}{2} \Delta_d + m_2^2$  и не зависящий от всех процессов  $X_1^k$ , то из фор-

мулы (56) следует, что

$$(68) \quad (\text{Det } D_2)^{1/2} (\text{Det } (D_2 + \lambda \delta^{-d} L_n))^{-1/2} \approx \\ \approx \exp(-\alpha_2 (\Lambda_\delta^2 \times T)) \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} \tilde{E}_{i, l}^t \left( \exp \left( -\lambda \int_0^t L_n(X_2(s)) ds \right) \right) d\alpha_2 \right\},$$

где  $\tilde{E}$  — математическое ожидание по мере, связанной с процессом  $X_2$ , а  $\alpha_2$  — мера из формулы (11), в которой  $m$  заменено на  $m_2$ . Аналогично из (57) следует

$$(69) \quad \exp \left( \frac{1}{2} \langle (H_2 + \lambda L_n)^{-1} g, g \rangle \right) \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} \tilde{E}_{i, l}^t \left( \exp \left( -\lambda \int_0^t L_n(X_2(s)) ds \right) \right) d\alpha_g \right\},$$

где  $\alpha_g$  — мера из формулы (24), в которой  $m$  заменено на  $m_2$ .

Подставляя (68) и (69) в (67) (и оставляя всю бухгалтерию читателям!), получаем

$$(70) \quad \tilde{F}(f, g) \approx \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)(\Lambda_\delta^2 \times T)) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} E_{i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n} \\ \left\{ \exp \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} \tilde{E}_{i, l}^t \left( \exp \left( -\lambda \int_0^t L_n(X_2(s)) ds \right) \right) d(\alpha_2 + \alpha_g) \right\} d\beta_f^n.$$

Вспоминая определение случайной величины  $L_n$ , мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$(71) \quad \tilde{F}(f, g) \approx \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)(\Lambda_\delta^2 \times T)) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} E_{i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n} \\ \left\{ \exp \int_{\Lambda_\delta^2 \times T} \tilde{E}_{i, l}^t \left( \exp \left( -\lambda \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^{t_k} \delta(X_2(s) - X_1^k(s_k)) ds_k ds \right) \right) \times \right. \\ \left. \times d(\alpha_2 + \alpha_g) \right\} d\beta_f^n,$$

где  $\tilde{\delta}$  — это, как и ранее, гиперконечная версия дельта-функции, равная  $\tilde{\delta}(0) = \delta^{-d}$  и  $\tilde{\delta}(i) = 0$  при  $i \neq 0$ .

Формула (71) может показаться странно асимметричной относительно  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Но если мы разложим экспоненциальный член в степенной ряд, то увидим, что

$$(72) \quad \tilde{F}(f, g) \approx \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)(\Lambda_\delta^2 \times T)) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} \int_{\Lambda_\delta^{2m} \times T^m} E_{i_1, \dots, i_n, i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n} \tilde{E}_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m}^{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m} \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m \\ \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \int_0^{t_k} \int_0^{\tilde{t}_l} \tilde{\delta}(X_2^l(\tilde{s}_l) - X_1^k(s_k)) d\tilde{s}_l ds_k\right) d\tilde{\beta}_g^m d\beta_f^n,$$

где  $X_2^1, X_2^2, \dots$  — независимые копии процесса  $X_2$ , и где ожидания  $\tilde{E}_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m}^{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m}$  и меры  $\tilde{\beta}_g^m$  построены из процессов  $X_2^l$  и мер  $\alpha_2 + \alpha_g$  точно так же, как ожидания  $E_{i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n}$  и меры  $\beta_f^n$  построены из процессов  $X_1^k$  и мер  $\alpha_1 + \alpha_f$ .

Поскольку нормирующий множитель  $Z$  в формуле (58) равен  $\tilde{F}(0, 0)$ , мы в конечном итоге приходим к выражению

$$(73) \quad F(f, g) \approx \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} \int_{\Lambda_\delta^{2m} \times T^m} E_{i_1, \dots, i_n, i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n} \right. \\ \left. \tilde{E}_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m}^{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m} \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \int_0^{t_k} \int_0^{\tilde{t}_l} \tilde{\delta}(X_2^l(\tilde{s}_l) - X_1^k(s_k)) d\tilde{s}_l ds_k\right) \times \right. \\ \left. \times d\tilde{\beta}_g^m d\beta_f^n \right) / \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda_\delta^{2n} \times T^n} \int_{\Lambda_\delta^{2m} \times T^m} E_{i_1, \dots, i_n, i_1, \dots, i_n}^{t_1, \dots, t_n} \right. \\ \left. \tilde{E}_{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m}^{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_m} \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_m \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \int_0^{t_k} \int_0^{\tilde{t}_l} \tilde{\delta}(X_2^l(\tilde{s}_l) - X_1^k(s_k)) d\tilde{s}_l ds_k\right) \times \right. \\ \left. \times d\alpha_2^m d\alpha_1^n \right),$$

которое справедливо при условии, что  $|\Lambda_\delta|$  и  $\delta^{-1}$  меньше некоторой бесконечно большой константы, а  $f$  и  $g$  — «разумные» функции.

Таково наше представление поля  $\Phi_1^2 \Phi_2^2$  в терминах функционалов локального времени. Заметим, что поскольку процессы  $X_2^l$  и  $X_1^k$  независимы, экспоненциальные члены всегда имеют вид, изучавшийся в § 6.4, и никакие полимерные меры в рассмотрение не входят. Но перед нами по-прежнему стоят две проблемы. Первая состоит в том, что в то время как в § 6.4, чтобы получить что-то нетривиальное, мы были вынуждены выбирать  $\lambda$  отрицательным и бесконечно малым, приведенные выше вычисления применимы только неотрицательным  $\lambda$ . В самом деле, член  $e^{-(\lambda/4) \Phi_1^2 \Phi_2^2}$ , описывающий взаимодействие, при  $\lambda < 0$  не интегрируем по свободной мере  $\mu_0$ , так что наши вычисления при таком выборе  $\lambda$  не имеют смысла. Правда, правая часть формулы (73) всегда существует, так что нетрудно придать смысл левой части с помощью подходящих обрезаний таким образом, чтобы соотношение (73) осталось верным (или, в более оппортунистическом духе, можно просто объявить правую часть интерпретацией левой при  $\lambda < 0$ ).

Вторая проблема более трудна — и гораздо более важна. Существует ли такое отрицательное бесконечно малое  $\lambda$ , которое делает выражение (73) отличным от преобразования Лапласа свободного поля? Иными словами, является ли поле  $\Phi_1^2 \Phi_2^2$  нетривиальным при  $d = 4$  или  $d = 5$ ? Результаты § 6.4 указывают, что если бы нам было позволено менять  $\lambda$  в зависимости от  $\omega$  и  $t$ , то ответ был бы положительным. Но мы попросту недостаточно владеем ситуацией, чтобы ответить на тот же вопрос для постоянных  $\lambda$ . Все, что известно из гл. 6, — это что допустимые  $\lambda$  зависят от локального поведения броуновской траектории, так что мы имеем дело с вопросом, связанным с автомодельностью броуновского движения. Мы оставляем эту проблему открытой и лишь еще раз подчеркнем то, что должен был проиллюстрировать данный параграф, — а именно ту легкость и гибкость, которую гиперконечные методы демонстрируют при обращении с некоторыми тонкими концептуальными и вычислительными вопросами квантовой теории поля.

**Замечание.** В качестве еще одной иллюстрации отметим, что экспоненциальная модель, рассмотренная в § 7.4.С, недавно привлекла пристальное внимание из-за ее связей с *теорией релятивистских струн* с нулевой массой. Модель безмассового экспоненциального взаимодействия называется *моделью Лиувилля*, поскольку исходно она изучалась Лиувиллем как классическая теория поля. Связь между квантовой версией этой теории поля и релятивистскими струнами была подмечена Поляковым в 1981 году. Фактически оказалось, что теория релятивистских струн в пространстве-времени размерности  $D \leq 13$  (отвечающей

значениям  $\alpha < \sqrt{4\pi}$  — по поводу выбора числа  $\alpha$  см. § 7.4.C) может быть выражена в терминах математических ожиданий относительно меры на пространстве траекторий модели Лиувилля: см. Albeverio, Høegh-Krohn, Paycha, Scarlatti [1]. Сведение струнной модели к (гиперконечной) экспоненциальной евклидовой модели сводит также «сингулярности» струнного подхода к обсуждению сингулярностей евклидовой модели; таким образом, струнная модель может исследоваться гиперконечными методами, развитыми в этой главе.

# Литература

Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.

- [1] Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. — Доклады АН СССР, 137 (1961), № 5, с. 1011—1014.

Вишик М. И., Комеч А. И., Фурсиков А. В.

- [1] Некоторые математические задачи статистической гидродинамики. — Успехи матем. наук, 34 (1979).

Градштейн И. С., Рыжик И. М.

- [1] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971 (5-е изд.).

Демков Л. Н., Островский В. Н.

- [1] Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.

Добрушин Р. Л.

- [1] Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. — Функ. анализ и его примен., 2 (1968), № 4, с. 31—43.  
[2] Описание случайного поля условными вероятностями и условия его регулярности. — Теория вероятн. и ее примен., 13 (1968), № 2, с. 201—229.

Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.

- [1] Теоремы и задачи о процессах Маркова. — М.: Наука, 1967.

Звонкин А. К., Шубин М. А.

- [1] Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи матем. наук, 39 (1984), № 2, с. 77—127.

Крылов Н. В.

- [1] О стохастических интегральных уравнениях Ито. — Теория вероятн. и ее примен., 14 (1969), № 2, с. 340—348. [См. также исправление: Теория вероятн. и ее примен., 17 (1972), № 2, с. 392—393.]  
[2] Некоторые оценки плотности распределения стохастического интеграла. — Известия АН СССР, серия матем., 38 (1974), № 1, с. 228—248.  
[3] Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.

Ломоносов В. И.

- [1] Инвариантные подпространства для операторов, коммутирующих с компактными. — Функц. анализ и его примен., 7 (1973), № 3, с. 55—56.

Портенко Н. И.

- [1] Диффузионные процессы с обобщенным коэффициентом сноса. — Теория вероятн. и ее примен., 24 (1979).  
[2] Стохастические дифференциальные уравнения с обобщенным вектором сноса. — Теория вероятн. и ее примен., 24 (1979).

Синай Я. Г.

- [1] Теория фазовых переходов: Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.

Филиппов А. Ф.

- [1] О некоторых вопросах теории оптимального управления. — Журн. соц. индустр. и прикл. матем., Серия А: Управление, 1 (1962).

Ченцов Н. Н.

- [1] Многопараметрическое броуновское движение Леви и обобщенный белый шум. — Теория вероятн. и ее примен., 2 (1957), № 2, с. 281—282.

Aizenman M.

- [1] Proof of the triviality of  $\Phi_d^4$  field theory and some mean field features of using models for  $d > 4$ . — *Phys. Rev. Lett.*, 47 (1981).

Albeverio S.

- [1] Nonstandard analysis; polymer models, quantum fields. — *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* XXVI (1984).

Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R.

- [1] Some applications of functional integration. — In «Mathematical problems in theoretical physics» (R. Schrader, R. Seiler and D. A. Uhlenbrock eds.), *Lect. Notes in Physics* 153 (1982).  
 [2] A stochastic model for the orbits of planets and satellites: An interpretation of Titius — Bode law. — *Expo. Math.* 4 (1983).  
 [3] Newtonian diffusions and planets, with remark on nonstandard Dirichlet forms and polymers. — In «Proceedings of the LMS Symposium on Stochastic Analysis and Applications» (Swansea, 1983, A. Truman and D. Williams eds.), *Lecture Notes in Math.* 1094 (1984), p. 1—24.  
 [4] Diffusions sur une variété riemannienne: Barrières infranchissable et applications. — In «Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz», *Asterisque* 132 (1985).

Albeverio S., Blanchard Ph., Gesztesy F., Streit L.

- [1] Quantum mechanical low energy scattering in terms of diffusion processes. — In «Stochastic aspects of classical and quantum systems» (S. Albeverio, Ph. Combe and M. Sirugue-Collin eds.), *Lect. Notes in Math.*, 1109 (1985), p. 207—227.

Albeverio S., Casati G., Merlini D. (eds.)

- [1] Stochastic processes in classical and quantum systems. *Proceedings of the First International Ascona-Como Meeting. Lect. Notes in Physics* (1986).

Albeverio S., Combe Ph., Høegh-Krohn R., Rideau G., Sirugue M., Sirugue-Collin M., Stora R. (eds.)

- [1] Feynman path integrals. — *Lect. Notes in Physics* 106 (1979).

Albeverio S., de Faria M., Høegh-Krohn R.

- [1] Stationary measures for the Euler flow in two dimensions. — *J. Statist. Phys.* 20 (1979).

Albeverio S., Fenstad J. E., Høegh-Krohn R.

- [1] Singular perturbations and nonstandard analysis. — *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), p. 275—295.

Albeverio S., Fenstad J. E., Høegh-Krohn R., Karwowski W., Lindstrøm T.

- [1] Perturbations of the Laplacian supported by null sets, with applications to polymer measures and quantum fields. — *Phys. Lett. A*, 104 (1984).  
 [2] in preparation (1989).

Albeverio S., Fukushima M., Karwowski W., Streit L.

- [1] Capacity and quantum mechanical tunneling. — *Comm. Math. Phys.* 81 (1981).

Albeverio S., Galavotti G., Høegh-Krohn R.

- [1] Some results for the exponential interaction in two or more dimensions. — *Comm. Math. Phys.* 70 (1979).

Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R.

- [1] The low energy expansion in nonrelativistic scattering theory. — *Ann. Inst. H. Poincaré, sect. A*, 37 (1982).

Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.

- [1] Some exactly solvable models in quantum mechanics and the low energy expansions. — In «Proc. Leipzig Conf. on Operator Algebras, 1983, Teubner, Stuttgart» (1984).  
 [2] Solvable models in quantum mechanics. — Springer; New York (1988).  
 [Готовится перевод в изд-ве «Мир».]



Albeverio S., Gesztesy F., Karwowski W., Streit L.

- [1] On connection between Schrödinger and Dirichlet forms. — J. Math. Phys. 26 (1985), p. 2546—2553.

Albeverio S., Høegh-Krohn R.

- [1] The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two-dimensional space-time. — J. Funct. Anal. 16 (1974).
- [2] Mathematical theory of Feynman path integrals. — Lect. Notes in Math. 523 (1976).
- [3] Quasi-invariant measures, symmetric diffusion processes and quantum fields. In «Les Méthodes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs», CNRS, Paris (1976).
- [4] Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 40 (1977).
- [5] Hunt processes and analytic potential theory on rigged Hilbert spaces. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 13 (1977).
- [6] Oscillatory integrals and the method of the stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics. I. — Invent. Math., 40 (1977).
- [7] Uniqueness and the global Markov property for Euclidean fields. The case of trigonometric interaction. — Comm. Math. Phys., 68 (1979).
- [8] Martingale convergence and the exponential interaction in  $\mathbb{R}^h$ . In «Quantum Fields — Algebras and Processes» (L. Streit ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).
- [9] Point interactions as limits of short range interactions. — J. Operator Theory, 6 (1981).
- [10] Stochastic methods in quantum field theory and hydrodynamics. — Phys. Rep., 77 (1981).
- [11] Some Markov processes and Markov fields in quantum theory, group theory, hydrodynamics and C\*-algebras. — In «Stochastic Integrals» (D. Williams ed.), Lecture Notes Math. 851 (1981), p. 497—539.
- [12] Some remarks on Dirichlet forms and their applications to quantum mechanics and statistical mechanics. — In «Functional Analysis and Markov Processes» (M. Fukushima ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1982).
- [13] Diffusion fields, quantum fields, fields with values in Lie groups. — I. «Stochastic Analysis and Applications» (M. Pinsky ed.), Dekker, New York (1984), p. 1—97.
- [14] Local and global Markov fields. — Rep. Math. Phys., 19 (1984).

Albeverio S., Høegh-Krohn R., Holden H.

- [1] Markov cosurfaces and gauge fields. — Acta Phys. Austriaca, Suppl. XXVI (1984).
- [2] Markov processes in infinite dimensional spaces. Markov fields, and Markov cosurfaces. — In «Stochastic Space-Time Models, Limit Theorems» (L. Arnold and P. Kotelenz eds.), Reidel, Dordrecht (1985), p. 11—40.
- [3] Markov cosurfaces and quantum fields. — In preparation (1986).

Albeverio S., Høegh-Krohn R., Kirsch W., Martinelli F.

- [1] The spectrum of the three-dimensional Kronig — Penney model with random point defects. — Adv. Appl. Math., 3 (1982).

Albeverio S., Høegh-Krohn R., Merlini D.

- [1] Euler flows, associated generalized random fields and Coulomb systems. — In «Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes» (S. Albeverio ed.), Res. Notes Math., Pitman, London (1985), p. 216—244.

Albeverio S., Høegh-Krohn R., Olsen G.

- [1] The global Markov property for lattice systems.—J. Multivariate Anal., 11 (1981).
- Albeverio S., Høegh-Krohn R., Paycha S., Scarlatti S.
- [1] Pathspace measure for the Liouville quantum field theory and the construction of relativistic strings.—Phys. Lett. B 174 (1986), p. 81—86.
- Albeverio S., Høegh-Krohn R., Streit L.
- [1] Energy forms, Hamiltonians, and distorted Brownian paths.—J. Math. Phys., 18 (1977).
- [2] Regularization of Hamiltonians and processes.—J. Math. Phys., 21 (1980).
- Albeverio S., Kusuoka S., Streit L.
- [1] Convergence of Dirichlet forms and associated Schrödinger operators.—Preprint Math. Inst., Ruhr Univ., Bochum (1984); J. Funct. Anal. 68 (1986), p. 130—148.
- Alonso y Coria A.
- [1] Shrinking potentials in the Schrödinger equation.—Ph. D. thesis, Princeton Univ., Princeton, New Jersey (1978).
- Anderson R. M.
- [1] A nonstandard representation for Brownian motion and Itô integration.—Israel J. Math., 25 (1976).
- [2] Star-finite representations of measure spaces.—Ph. D. thesis, Yale Univ., New Haven, Connecticut (1977).
- [3] Star-finite representation of measure spaces.—Trans. Amer. Math. Soc., 271 (1982).
- Anderson R. M., Rashid S.
- [1] A nonstandard characterization of weak convergence.—Proc. Amer. Math. Soc., 69 (1978).
- Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R.
- [1] Theory of Distributions. The Sequential Approach.—Warszawa, PWN (1973). [Имеется перевод: Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.—М.: Мир, 1976.]
- Arkeryd L.
- [1] On the Boltzmann equation, I, II.—Arch. Rational Mech. Anal., 45 (1972), p. 1—34.
- [2] An existence theorem for a modified space-inhomogeneous, non-linear Boltzmann equation.—Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), p. 610—614.
- [3] A non-standard approach to the Boltzmann equation.—Arch. Rational Mech. Anal., 77 (1981), p. 1—10.
- [4] Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation.—Arch. Rational Mech. Anal., 77 (1981), p. 11—23.
- [5] A time-wise approximated Boltzmann equation.—IMA J. Appl. Math., 27 (1981), p. 373—383.
- [6] Asymptotic behavior of the Boltzmann equation with infinite range forces.—Comm. Math. Phys., 86 (1982), p. 475—484.
- [7] Loeb solutions of the Boltzmann equation.—Arch. Rational Mech. Anal., 86 (1984).
- [8] Loeb—Sobolev spaces with applications to variational integrals and differential equations.—Preprint, Chalmers Inst. Technol., Gothenborg, Sweden (1984).
- Arkeryd L., Bergh J.
- [1] Some properties of Loeb—Sobolev spaces.—J. London Math. Soc. 34 (1986), p. 317—334.
- Barber M. N., Nihnam B. W.
- [1] Random and Restricted Walks.—Gordon and Breach, New York (1970).
- Barlow M. T.

- [1] Construction of a martingale with given absolute value. — *Ann. Probab.*, 9 (1981).
- [2] One dimensional stochastic differential equation with no strong solution. — *J. London Math. Soc.*, 26 (1982).
- Barlow M. T., Perkins E.
- [1] One-dimensional stochastic differential equation involving a singular increasing process. — *Stochastics*, 12 (1984).
- Bellisard J., Høegh-Krohn R.
- [1] Compactness and the maximal Gibbs state for random Gibbs fields on a lattice. — *Comm. Math. Phys.*, 84 (1982).
- Bellisard J., Picco P.
- [1] Lattice quantum fields: uniqueness and Markov property. — Preprint, Marseille (1979).
- Benninghofen B., Richter M. M.
- [1] General theory of superinfinitesimals. — Preprint, RWTH Aachen (1983).
- Benninghofen B., Stroyan K. D.
- [1] Bounded-weak-star continuity. — Preprint, Univ. of Iowa (1984).
- Benoit E., Callot J.-L., Diener F., Diener M.
- [1] Chasse au canard. — *Collect. Math.*, 32 (1980).
- Bensoussan A., Temam R.
- [1] Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. I. — *Israel J. Math.*, 11 (1972).
- [2] Equations stochastiques du type Navier — Stokes. — *J. Funct. Anal.*, 13 (1973).
- Berg C., Reus-Christensen J. P., Ressel P.
- [1] Harmonic Analysis on Semigroups. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1984).
- Berg O., Blomberg C.
- [1] Association kinetics with coupled diffusional flows. Special application to the Lac Repressor-Operator system. — *Biophys. Chem.*, 4 (1976).
- [2] Association kinetics with coupled diffusion. An extension to coiled-chain macro-molecules applied to Lac Repressor-Operator system. *Biophys. Chem.*, 7 (1977).
- Bernstein A. R.
- [1] Non-standard analysis. — In «Studies in Model Theory», Math. Ass. of Amer. (1973).
- Bethe H., Peierls R.
- [1] Quantum theory of the diplom. — *Proc. Roy. Soc. London*, A 148 (1935).
- Beurling A., Deny J.
- [1] Espaces de Dirichlet. — *Acta Math.*, 99 (1958).
- [2] Dirichlet spaces. — *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 45 (1959).
- Billingsley P.
- [1] Convergence of Probability Measures. — Wiley, New York (1968).  
[Имеется перевод: Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.]
- Birkeland B.
- [1] A singular Sturm — Liouville problem treated by nonstandard analysis. — *Math. Scand.*, 47 (1980).
- Birkeland B., Normann D.
- [1] A non-standard treatment of the equation  $y' = f(y, t)$ . — *Mat. Sem. Oslo* (1980).
- Blanchard Ph., Sarski J.
- [1] Renormalizable interactions in two dimensions and sharp-time fields. — *Acta Phys. Austriaca*, 49 (1978).
- Blumental R. M., Gettoor R. K.

- [1] Markov Processes and Potential Theory. — Academic Press, New York and London (1968).
- Brydges D. C., Fröhlich J., Sokal A. D.  
 [1] A new proof of the existence and nontriviality of the continuum  $\phi_2^4$  and  $\phi_3^4$  quantum field theories. — Comm. Math. Phys., 91 (1983).
- Brydges D. C., Fröhlich J., Spencer T.  
 [1] The random walk representation of classical spin systems and their correlation inequalities. — Comm. Math. Phys., 83 (1982).
- Brydges D. C., Spencer T.  
 [1] Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. — Comm. Math. Phys., 97 (1985).
- Callot J.-L.  
 [1] Bifurcations du portrait de phase pour des équations différentielles du second ordre ayant pour type l'équation d'Hermite. — These, Strasbourg (1981).
- Carlen E.  
 [1] Conservative diffusions. — Comm. Math. Phys., 94 (1984).
- Carmona R.  
 [1] Regularity properties of Schrödinger and Dirichlet semigroups. — J. Funct. Anal., 33 (1979).
- Cartier P.  
 [1] Introduction à l'étude de mouvement browniens à plusieurs paramètres. — Sem. Probab. V. Lect. Notes in Math., 191 (1971), p. 58—75.  
 [2] Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. — Sem. Bourbaki, № 580 (1981), p. 1—24. [Имеется перевод: Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ. — Успехи матем. наук, т. 39 (1984), № 2, с. 57—76.]
- Cercignani C.  
 [1] Theory and Application of the Boltzmann Equation. — Scottish Academic Press (1975).
- Chang C. C., Keisler H. J.  
 [1] Model Theory. — North Holland, Amsterdam (1973). [Имеется перевод: Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.]
- Chojnowska-Michalik A.  
 [1] Stochastic differential equations in Hilbert spaces. — In «Probability Theory» (Z. Ciesielski ed.), Banach Center Publications 5, PWN, Warsaw (1979).
- Chow P.-L.  
 [1] Stochastic partial differential equations in turbulence and related problems. — In «Probabilistic Analysis and Related Topics» (A. T. Bharucha-Reid ed.), vol. 1, Academic Press, New York (1978).
- Christopheit N.  
 [1] Discrete approximations of continuous time stochastic control systems. — SIAM J. Control Optim., 21 (1983).
- Chung K. L.  
 [1] Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1960). [Имеется перевод: Чжун Кайлай. Однородные цепи Маркова. М.: 1964.]
- Chung K.-L., Williams R.  
 [1] Introduction to Stochastic Integration. — Birkhäuser, Basel (1983). [Имеется перевод: Чжун К.-Л., Уильямс Р. Введение в стохастическое интегрирование. — М.: Мир, 1986.]
- Cole J. D.  
 [1] Perturbation Methods in Applied Mathematics. — Ginn (Blaisdel), Boston, Massachusetts (1968). [Имеется перевод: Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.]

Cutland N. J.

- [1] On the existence of solutions to stochastic differential equations on Loeb spaces. — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 60 (1982).
- [2] Infinitesimal methods in measure theory, probability theory and stochastic analysis. — *Bull. Inst. Math. Appl.*, 18 (1982).
- [3] Nonstandard measure theory and its applications. — *Bull. London Math. Soc.*, 15 (1983).
- [4] Internal controls and relaxed controls. — *J. London Math. Soc.*, 27 (1983).
- [5] Optimal controls for partially observed stochastic systems: an infinitesimal approach. — *Stochastics*, 8 (1983).
- [6] Partially observed stochastic controls based on cumulative digital readouts of the observations. — In «Proc. IFIP Work. Conf. Stochastic Differential Systems, 4-th, Marseille-Luminy, 1984», Springer-Verlag, Berlin and New York (1985).
- [7] Simplified existence for solutions to stochastic differential equations. — *Stochastics*, 14 (1985).
- [8] Infinitesimal methods in control theory: Deterministic and stochastic. — *Acta Appl. Math.*, 5 (1986), p. 105—135.

Davis M.

- [1] Applied Nonstandard Analysis. — Wiley, New York (1977). [Имеется перевод: Девис М. Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980.]

Davis M. H. A.

- [1] Lectures on Stochastic Control and Nonlinear Filtering. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1984).

Deny J.

- [1] Méthodes Hilbertiennes et théorie du potentiel. — In «Potential Theory» (M. Brelot ed.), Edizioni Cremonese, Roma (1970).

Diener F.

- [1] Méthode du plan d'observabilité. Développements en  $\varepsilon$ -ombres. — Thèse, Strasbourg (1981).

Diener M.

- [1] Etude générique des canards. — Thèse, Strasbourg (1981).

Doléans-Dade C.

- [1] Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de class (D). — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 9 (1968).
- [2] On the existence and unicity of solutions of stochastic differential equations. — *Z. Wahrsh. verw. Gebiete*, 36 (1976).

Domb C.

- [1] Self-avoiding random walks on lattices. — In «Stochastic Processes in Chemical Physics» (K. E. Shuler ed.), Wiley, New York (1969).

Doob J. L.

- [1] Stochastic Processes. — Wiley, New York (1953). [Имеется перевод: Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.]
- [2] Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1984).

Dunford N., Pettis B. J.

- [1] Linear operations on summable functions. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47 (1940), p. 323—392.

Dynkin E. B.

- [1] Gaussian and nongaussian random fields associated with Markov processes. — *J. Funct. Anal.*, 55 (1984).
- [2] Polinomials of the occupation field and related random fields. — *J. Funct. Anal.*, 58 (1984).
- [3] Random fields associated with multiple points of the Brownian motion. — *J. Funct. Anal.*, 62 (1985).

Edwards S. F.

- [1] The statistical mechanics of polymer with excluded volume. — Proc. Phys. Soc. London, 85 (1965).
- [2] A note on the convergence of perturbation theory in polymer problems. — J. Phys., A, 8 (1975).

Elliott R. J.

- [1] Stochastic Calculus and Applications. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1982). [Имеется перевод: Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. — М.: Мир, 1986.]

Elliott R. J., Kohlmann M.

- [1] On the existence of optimal partially observed controls. — Appl. Math. Optim., 9 (1982).

Elmroth T.

- [1] Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for infinite range forces. — Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), p. 1—2.

Enflo P., Lindenstrauss J., Pisier G.

- [1] On the «three space problem». — Math. Scand., 36 (1975).

Fajardo S.

- [1] Completeness theorems for the general theory of stochastic processes. — Methods in Math. Logic, Lect. Notes in Math., 1030 (1984).
- [2] Probability logic with conditional expectation. — Ann. Pure Appl. Logic, 28 (1985).

Faris W. G.

- [1] The stochastic Heisenberg model. — J. Funct. Anal., 32 (1979).

Faris W. G., Jona-Lasinio G.

- [1] Large fluctuations for a non-linear heat equation with noise. — J. Phys., A, 15 (1982).

Fenstad J. E.

- [1] A note on «standard» versus «nonstandard» topology. — Indag. Math., 29 (1967).
- [2] Nonstandard methods in stochastic analysis, and mathematical physics. — Jber. Deutsch. Math.-Verein., 82 (1980).
- [3] Is nonstandard analysis relevant for the philosophy of mathematics? — Synthese, 62 (1985).
- [4] Lectures on stochastic analysis with applications to mathematical physics. — Proc. Simposio Chileno Log. Math., Santiago (1986).

Fenstad J. E., Nyberg A.

- [1] Standard and nonstandard methods in uniform topology. — «Logic Colloq. 1969», North-Holland, Amsterdam (1970), p. 353—359.

Fermi E.

- [1] Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate. — Ric. Sci., 7 (1936).

Feynman R. P.

- [1] Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys., 20 (1948).

Feynman R. P., Hibbs A. R.

- [1] Quantum Mechanics and Path Integrals. — McGraw-Hill, New York (1965). [Имеется перевод: Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.]

Fittler R.

- [1] Some nonstandard quantum electrodynamics. — Helv. Phys. Acta, 57 (1984).

Flamand G.

- [1] Mathematical theory of non-relativistic two- and three-particle systems with pion interactions. — In «Cargese Lectures in Theoretical Physics, 1967» (F. Lurcat ed.), Gordon and Breach, New York (1967).

Flory P. J.

- [1] Statistical Mechanics of Chain Molecules. — Wiley (Interscience), New York (1969).
- Föllmer H.  
 [1] Phase Transition and Martin Boundary. — «Sem. Probab. Strasbourg IX», Lect. Notes in Math., 465 (1975).  
 [2] On the global Markov property. — In «Quantum Fields — Algebras Processes» (L. Streit ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).  
 [3] Von der Brownschen Bewegung zum Brownschen Blatt. einige neuere Richtungen in der Theorie der Stochastischen Prozesse. — In «Perspectives in Mathematics» (W. Jäger et al. eds.), Birkhäuser, Basel (1984).
- Freed K. F.  
 [1] Polymers as self-avoiding random walks. — Ann. Probab., 9 (1981).
- Friedman C. N.  
 [1] Perturbations of the Schrödinger equation by potentials with small support, semigroup product formulas, and applications to quantum mechanics. — Ph. D. thesis, Princeton Univ., Princeton, New Jersey (1971).  
 [2] Perturbations of the Schrödinger equation by potentials with small support. — J. Funct. Anal., 10 (1972).
- Fröhlich J.  
 [1] Some results and comments on quantized gauge fields. — In «Recent Developments in Gauge Theory, Cargèse Summer Inst., 1979», Plenum Press, New York (1980).  
 [2] On the triviality of  $\lambda\phi_d^4$ -theories and the approach to the critical point in  $d \geq 4$  dimensions. — Nucl. Phys., B, 200 (1982).
- Fukushima M.  
 [1] Dirichlet spaces and strong Markov processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 162 (1971).  
 [2] A decomposition of additive functionals of finite energy. — Nagoya Math. J., 19 (1979).  
 [3] Dirichlet Forms and Markov Processes. — North-Holland, Amsterdam (1980).  
 [4] Energy forms and diffusion processes. — In «Mathematics + Physics; Lectures on Recent Results» (L. Streit ed.), World Scientific Publ. Co., Singapore (1985).
- Galavotti G., Nicolò F.  
 [1] Renormalisation theory in four dimensional scalar fields. II. — Comm. Math. Phys., 101 (1985).
- Gangolli R.  
 [1] Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 3 (1967).
- Gielerak R.  
 [1] Verification of the global Markov property in some classes of strongly coupled exponential interactions. — J. Math. Phys., 24 (1983).
- Glauber R. J.  
 [1] Time dependent statistics of the Ising model. — J. Math. Phys., 4 (1963).
- Glimm J., Jaffe A.  
 [1] Quantum Physics, a Functional Integral Point of View. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1981). [Имеется перевод: Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики: Подход с использованием функциональных интегралов. — М.: Мир, 1984.]
- Goldstein S.  
 [1] Remarks on global Markov property. — Comm. Math. Phys., 74 (1980).

Greenwood P., Perkins E.

- [1] A conditional limit theorem for random walk and Brownian local time on square root boundaries. — *Ann. of Probab.*, 11 (1983).
- [2] Limit theorems for excursions from a moving boundary. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 29 (1984), № 4, с. 703—714.

Gross L.

- [1] Abstract Wiener spaces. — *Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, 1965, vol. 2, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles (1967).
- [2] Decay of correlation in classical lattice models at high temperature. — *Comm. Math. Phys.*, 68 (1979).
- [3] Thermodynamics, statistical mechanics and random fields. — «Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour, X-1980», *Lect. Notes in Math.*, 929 (1982).

Grossmann A., Høegh-Krohn R., Mebkhout M.

- [1] A classe of explicitly soluble, local, many center Hamiltonians for one-particle quantum mechanics in two and three dimensions. — *J. Math. Phys.*, 21 (1980).
- [2] The one-particle theory of periodic point interactions. — *Comm. Math. Phys.*, 77 (1980), N 1, p. 87—110.

Guerra F.

- [1] Structural aspects of stochastic mechanics and stochastic field theory. — In «New Stochastic Methods in Physics» (C. De Witt-Morette and K. D. Elworthy eds.), *Phys. Rep.*, 77 (1981).

Guerra F., Morato L.

- [1] Quantisation of dynamical systems and stochastic control theory. — *Phys. rev.*, D, 27 (1983).

Guillemin V., Sternberg S.

- [1] *Geometric Asymptotics*. — Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1977). [Имеется перевод: Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1981.]

Hagedorn G. A.

- [1] Semiclassical quantum mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 71 (1980).

Hammersley J., Morton K. W.

- [1] Poor man's Monte Carlo. — *J. R. Statist. Soc.*, 16 (1954).

Harthong J.

- [1] Le moiré. — *Adv. Appl. Math.*, 2 (1981).
- [2] Etudes sur la mécanique quantique. — *Astérisque*, 111 (1984).

Heinrich S.

- [1] Ultraproducts in Banach space Theory. — *J. Reine Angew. Math.*, 313 (1980).

Helms L. L., Loeb P. A.

- [1] Applications of nonstandard analysis to spin models. — *J. Math. Anal. Appl.*, 69 (1979).
- [2] Bounds on the oscillation of spin systems. — *J. Math. Anal. Appl.*, 86 (1982).
- [3] A nonstandard proof of the martingale convergence theorem. — *Rocky Mountain J. Math.*, 12 (1982).

Henle J. M., Kleinberg E. M.

- [1] *Infinitesimal Calculus*. — MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1979).

Henry J. P.

- [1] Prolongements de Mesure de Radon. — *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 19 (1969).

Henson C. W.

- [1] Analytic sets, Baire sets and the standard part map. — *Canad. J. Math.*, 31 (1979).



- [2] Unbounded Loeb measures. — Proc. Amer. Math. Soc., 74 (1979).
- [3] Banach space model theory. — in preparation (1989).
- Henson C. W., Kaufmann M., Keisler H. J.
- [1] The strength of nonstandard methods in arithmetic. — J. Symbolic Logic, 49 (1984).
- Henson C. W., Keisler H. J.
- [1] The strength of nonstandard analysis. — J. Symbolic Logic 51 (1986), p. 377—386.
- Henson C. W., Moore L. C.
- [1] Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces. — «Nonstandard Analysis: Recent Developments», Lect. Notes in Math., 983 (1983).
- Hepp K.
- [1] The classical limit for quantum mechanical correlation functions. — Comm. Math. Phys., 35 (1974).
- Higuchi Y.
- [1] A remark on the global Markov property for the d-dimensional Ising Model. — Proc. Japan Acad., Ser. A, 60 (1984).
- Holden H.
- [1] Konvergens mot punkt-interaksjoner. — Cand. real. thesis, Math. Inst., Univ. of Oslo (1981).
- Holden H., Høegh-Krohn R., Johannesen S.
- [1] The short range expansion. Adv. Appl. Math., 4 (1983).
- [2] The short-range expansion in solid state physics. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, 41 (1994), N 4, p. 335—362.
- Holley R.
- [1] A class of interactions in an infinite spin systems. — Adv. Math., 5 (1970).
- [2] Markovian interaction processes with finite range interactions. — Ann. Math. Statist., 43 (1972).
- Holley R., Stroock D. W.
- [1]  $L^2$  theory for the stochastic Ising model. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 35 (1976).
- [2] In one and two dimensions every stationary measure for a stochastic Ising model is a Gibbs state. — Comm. Math. Phys., 55 (1977).
- Hooton J. G.
- [1] Dirichlet forms associated with hypercontractive semigroups. — Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1979).
- Hoover D. N.
- [1] Probability logic. — Ann. Math. Logic, 14 (1978).
- [2] A normal form theorem for  $L_{\omega_1 P}$  with applications. — J. Symbolic Logic, 47 (1982).
- [3] Synonymity, generalized martingales and subfiltrations. — Ann. Probab., 12 (1984).
- [4] A probabilistic interpolation theorem — J. Symb. Logic, 50 (1985), p. 708—713.
- Hoover D. N., Keisler H. J.
- [1] Adapted probability distributions. — Trans. Amer. Math. Soc., 286 (1984).
- Hoover D. N., Perkins E.
- [1] Nonstandard construction of the stochastic integral and applications to stochastic differential equations. I, II. — Trans. Amer. Math. Soc., 275 (1983).
- Høegh-Krohn R., Holden H., Johannesen S., Wentzel-Larsen T.
- [1] The Fermi surface for point interactions. — J. Math. Phys., 27 (1986).
- Huang K., Yang C. N.
- [1] Quantum-mechanical many-body problem with hard-sphere interaction. — Phys. Rev., 105 (1957).

- Huang K., Yang C. N., Luttinger J. M.  
 [1] Imperfect Bose gas with hard-sphere interaction. — *Phys. Rev.*, 105 (1957).
- Hurd A. E.  
 [1] Nonstandard analysis and lattice statistical mechanics: a variational principle. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 263 (1981).  
 [2] Nonstandard Analysis: Recent Developments (A. Hurd ed.). — *Lect. Notes in Math.*, 983 (1983).
- Hurd A. E., Loeb P. A.  
 [1] Introduction to Nonstandard Real Analysis. — Academic Press, New York (1985).
- Ikeda N., Watanabe S.  
 [1] Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. — North-Holland, Amsterdam (1981). [Имеется перевод: Ватанабэ С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986.]
- Israel R. B.  
 [1] Convexity in the Theory of Lattice Gases. — Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1979).
- Itô K.  
 [1] Stochastic integral. — *Proc. Imp. Acad. (Tokyo)*, 20 (1944).
- Jacod J., Memin J.  
 [1] Existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving semimartingales. — *Stochastics*, 4 (1981).
- Jona-Lasinio G., Mitter P. K.  
 [1] On the stochastic quantization of field theory. — *Comm. Math. Phys.*, 101 (1985).
- Kallianpur G.  
 [1] Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces. — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 17 (1971).
- Kallianpur G., Bromley G.  
 [1] Generalized Feynman integrals using analytic continuation in several complex variables. — In «Stochastic Analysis and Applications» (M. Pinsky ed.), Dekker, New York (1984).
- Kamae T.  
 [1] A simple proof of the ergodic theorem using non-standard analysis. — *Israel J. Math.*, 42 (1982).
- Kato T.  
 [1] Perturbation Theory for Linear Operators. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1976 — 2nd ed.). [Имеется перевод первого издания: Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.]
- Katznelson Y., Weiss B.  
 [1] A simple proof of some ergodic theorems. — *Israel J. Math.*, 42 (1982).
- Keisler H. J.  
 [1] Foundations of Infinitesimal Calculus. — Prindle, Weber and Schmidt, Boston, Massachusetts (1976).  
 [2] Hyperfinite model theory. — In «Logic Colloquium 1976» (R. O. Gandy and J. M. E. Hyland eds.), North-Holland, Amsterdam (1977).  
 [3] A non-tatônnement process with infinitesimal traders (preliminary version). — Univ. of Wisconsin, Madison (1983).  
 [4] An infinitesimal approach to stochastic analysis. — *Mem. Amer. Math. Soc.*, 297 (1984).  
 [5] Probability quantifiers. — In «Model Theoretical Logics» (J. Barwise and S. Feferman eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1985).
- Kelemen P. J., Robinson A.  
 [1] The nonstandard  $\lambda: \phi_2^4(x)$ : model. — *J. Math. Phys.*, 13 (1972).

Kessler C.

- [1] Nonstandard methods in the theory of random fields.— Thesis, Bochum (1984).
- [2] Examples of extremal lattice fields without the global Markov property.— Publ. RIMS, 21 (1985).

Kesten H.

- [1] On the number of self-avoiding walks. I.— J. Math. Phys., 4 (1963).

Kindermann R., Snell J. L.

- [1] Markov Random Fields and their Applications.— Amer Math. Soc., Providence, Rhode Island (1980).

Kiszyński J.

- [1] On the generation of tight measures.— Studia Math., 30 (1968), p. 141—151.

Kosciuk S. A.

- [1] Nonstandard stochastic methods in diffusion theory.— Ph. D. thesis, Univ. of Wisconsin, Madison (1982).
- [2] Stochastic solutions to partial differential equations.— In «Nonstandard Analysis: Recent Developments» (A. Hurd ed.), Lect. Notes in Math., 983 (1983), p. 113—119.

Kronig R. D. L., Penney W. G.

- [1] Quantum mechanics of electrons in crystal lattices.— Proc. R. Soc. London, Ser. A, 130 (1931).

Kuelbs J.

- [1] The invariance principle for a lattice random variables.— Ann. Math. Statist., 39 (1968).
- [2] The invariance principle for Banach space valued random variables.— J. Multivariate Anal., 3 (1973).

Kunita H., Watanabe S.

- [1] On square integrable martingales.— Nagoya Math. J., 30 (1967). [Имеется перевод: Кунита Х., Ватанабе Ш. О мартингалах, интегрируемых с квадратом.— Математика: Сб. перев., 1971, 15:1, с. 66—102.]

Kuo H.-H.

- [1] Gaussian Measures in Banach Spaces.— Springer-Verlag, Berlin and New York (1975). [Имеется перевод: Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах.— М.: Мир, 1979.]

Kusuoka S.

- [1] Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces.— J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math., 29 (1982).
- [2] On the path property of Edwards' model for long polymer chains in three dimensions.— In «Proceedings of the USP Meeting on Stochastic Processes and Infinite Dimensional Analysis» (S. Albeverio ed.), Res. Notes in Math., Pitman, London (1985).
- [3] Asymptotics of polymer measures in one dimension.— In «Proceedings of the USP Meeting on Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes» (S. Albeverio ed.), Res. Notes in Math., Pitman, London (1985).

Lanford O. E.

- [1] Time evolution of large classical systems.— In «Dynamical Systems, Theory and Applications» (J. Moser ed.), Lect. Notes in Physics, 38 (1975), p. 1—111.

LaSalle J. P., Lefschetz S.

- [1] Stability by Liapunov's Direct Method with Applications.— Academic Press, New York (1961). [Имеется перевод: Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М.: Мир, 1964.]

Laugwitz D.

- [1] Infinitesimalkalkül.— Bibliographisches Inst., Mannheim (1978).

- Lawler G. F.  
 [1] A self-avoiding random walk. — *Duke Math. J.*, 47 (1980).  
 [2] A connective constant for loop-erased self-avoiding random walk. — *J. Appl. Probab.*, 20 (1983).  
 [3] Intersections of random walks in four dimensions. II. — *Comm. Math. Phys.*, 97 (1985).
- Lebowitz J. L., Martin-Löf A.  
 [1] On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems. — *Comm. Math. Phys.*, 25 (1972).
- Lee T. D., Huang K., Yang C. N.  
 [1] Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties. — *Phys. Rev.*, 106 (1957).
- LeGall J. F.  
 [1] Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan, et la méthode de renormalization de Varadhan. — In «Sém. Prob. XIX, 83/84» (J. Azema and M. Yor eds.), *Lect. Notes in Math.*, 1123 (1985).
- Lévy P.  
 [1] Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. — Gauthier-Villars, Paris (1948). [Имеется перевод: Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.]
- Li Bang-He  
 [1] Nonstandard analysis and multiplication of distributions. — *Sci. Sinica*, 21 (1978).
- Liggett T. M.  
 [1] *Interacting Particle Systems*. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1985). [Имеется перевод: Лигgett Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. — М.: Мир, 1988.]
- Lindström T. L.  
 [1] Hyperfinite stochastic integration. I: The nonstandard theory. — *Math. Scand.*, 46 (1980).  
 [2] Hyperfinite stochastic integration. II: Comparison to the standard theory. — *Math. Scand.*, 46 (1980).  
 [3] Hyperfinite stochastic integration. III: Hyperfinite representations of standard martingales. — *Math. Scand.*, 46 (1980).  
 [4] A Loeb-measure approach to theorems by Prohorov, Sazonov and Gross. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 269 (1982).  
 [5] Stochastic integration in hyperfinite dimensional linear spaces. — In «Nonstandard Analysis: Recent Developments» (A. Hurd ed.), *Lecture Notes in Math.*, 983 (1983).  
 [6] Nonstandard analysis and perturbations of the Laplacian along Brownian paths. — In «Proceedings of the First BiBoS Symposium», *Lect. Notes in Math.*, 1158 (1985).  
 [7] The structure of hyperfinite stochastic integrals. — in preparation (1989).  
 [8] Weak Loeb-space representations. — in preparation (1986).  
 [9] A standard characterization of nonstandard stochastic integrals. — in preparation (1986).  
 [10] Nonstandard energy forms and diffusion on manifolds and fractals. — In «Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems», *Proc. 1-st Int. Ascona — Coma Meet., Lect. Notes in Physics* (1986).
- Loeb P. A.  
 [1] A nonstandard representation of measurable spaces,  $L_\infty$  and  $L_\infty^*$ . — In «Contributions to Nonstandard Analysis» (W. A. J. Luxemburg and A. Robinson eds.), North-Holland, Amsterdam (1972).  
 [2] Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 211 (1975).  
 [3] Applications of nonstandard analysis to ideal boundaries in potential theory. — *Israel J. Math.*, 25 (1976).

- [4] Weak limits of measures and the standard map. — Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979).
  - [5] An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory. — In «Probabilistic Analysis and Related Topics» (T. Bharucha-Reid ed.), vol. II, Academic Press, New York (1979).
  - [6] A regular metrizable boundary for solutions of elliptic and parabolic differential equations. — Math. Ann., 251 (1980).
  - [7] A construction of representing measures for elliptic and parabolic differential equations. — Math. Ann., 260 (1982).
  - [8] Measure spaces in nonstandard models underlying standard stochastic processes. — Proc. Intern. Congr. Math. Warsaw (1983).
  - [9] A functional approach to nonstandard measure theory. — Contemporary Mathem., 26 (1984), p. 251—261.
- Loges V.
- [1] Girsanov's theorem in Hilbert space and an application to the statistics of Hilberts space-valued stochastic differential equations. — Stoch. Proc. and Appl., 17 (1984).
- Lutz R., Gose M.
- [1] Nonstandard Analysis, a Practical Guide with Applications. — Lect. Notes in Math., 881 (1981).
- Luxemburg W. A. J.
- [1] A general theory of monads. — In «Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability» (W. A. J. Luxemburg ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York (1969).
  - [2] What is nonstandard analysis. — Amer. Math. Monthly, 80 (1973).
- MacDonald A. L.
- [1] Sturm—Liouville theory via nonstandard analysis. — Indiana Univ. Math. J., 25 (1976).
- Martin P. A.
- [1] On the stochastic dynamics of Ising Models. — J. Statist. Phys., 16 (1977).
- McKean H. P.
- [1] Brownian motion with a several dimensional time. — Теория вероятн. и ее прим., 8 (1963), № 4, с. 357—378.
- McShane E. J.
- [1] Relaxed controls and variational problems. — SIAM J. Control. Optim., 5 (1967).
- Metivier M., Pellaumail J.
- [1] Stochastic Integration. — Academic Press, New York (1980).
- Meyer P. A.
- [1] Un cours sur les intégrales stochastiques. — In «Sém. Probab. X», Lect. Notes in Math., 511 (1976).
- Moore L. C.
- [1] Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space. — Trans. Amer. Math. Soc., 218 (1976).
- Müller D. W.
- [1] Nonstandard proofs of invariance principles in probability theory. — In «Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability» (W. A. Luxemburg ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York (1969).
- Nagamachi S., Nishimura T.
- [1] Linear canonical transformations on Fermion Fock space with indefinite metric. — Preprint. Tokushima (1984).
- Nelson E.
- [1] Dynamical Theories of Brownian Motion. — Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1967).

- [2] Construction of quantum fields from Markov fields. — J. Funct. Anal., 12 (1973).
  - [3] Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. — Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977).
  - [4] A remark on the polymer problem in four dimensions. — Studies in applied mathematics, Adv. Math. Suppl. Stud., 8 (1983), 1—5.
  - [5] Quantum fluctuations. — Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1985).
  - [6] Radically elementary probability theory. — Preprint, Math. Dept., Princeton Univ. (1985).
- Neveu J.
- [1] Discrete Parameter Martingales. — North-Holland, Amsterdam (1975).
- Oikkonen J.
- [1] Harmonic analysis and nonstandard Brownian motion in the plane. — Math. Scand., 57 (1985), p. 346—358.
- Osswald H.
- [1] On hyperfinite integration in reflexive Banach spaces. — Preprint, Univ. of München (1983).
  - [2] On the existence of solutions to stochastic integral equations with respect to square integrable continuous martingales on Loeb spaces. — Preprint, Univ. of München (1984).
  - [3] On Pettis integrability on Loeb spaces. — Preprint, Univ. of München (1985).
  - [4] Introduction to nonstandard measure theory, I—II. — Lecture Notes, Univ. of München, 1983—85 (1985).
- Ostebee A., Gambardella P., Dresden M.
- [1] A «nonstandard» approach to the thermodynamic limit. II. Weakly tempered potentials and Neutral Coulomb systems. — J. Math. Phys., 17 (1976).
- Ōshima Y.
- [1] Some singular diffusion processes and their associated stochastic differential equations. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 59 (1982).
- Paclet Ph.
- [1] Espaces de Dirichlet et capacités fonctionnelles sur triplets de Hilbert — Schmidt. — In «Sem. Krée, Exp. 5, 4e année, 1977—78, Université Pierre et Marie Curie, Paris» (1977/1978).
  - [2] Espaces de Dirichlet en dimension infinie. — C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A, 288 (1979).
- Panetta R. L.
- [1] Hyperreal probability spaces: some applications of the Loeb construction. — Ph. D. thesis, Univ. of Wisconsin, Madison (1978).
- Perkins E.
- [1] A global intrinsic characterization of Brownian local time. — Ann. Prob., 9 (1981).
  - [2] The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 58 (1981).
  - [3] Weak invariance principles for local time. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 60 (1982).
  - [4] Local time is a semimartingale. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 60 (1982).
  - [5] Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. — Sem. Probab. XVI, Lect. Notes in Math., 920 (1982).
  - [6] On the construction and distribution of a local martingale with a given absolute value. — Trans. Amer. Math. Soc., 271 (1982).
  - [7] Stochastic processes and nonstandard analysis. — In «Nonstandard analysis: Recent Developments» (A. Hurd ed.), Lect. Notes in Math., 983 (1983).

- [8] On the Hausdorff dimension of the Brownian slow points. — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64 (1983).
- Persson J.  
 [1] Second order linear ordinary differential equations with measures as coefficients. — *Matematiche (Catania)*, 36 (1981).  
 [2] Linear distribution differential equations. — *Comment. Math., Univ. St. Pauli*, 33 (1984).
- Preston C.  
 [1] Random Fields. — *Lect. Notes in Math.*, 534 (1976).
- Protter P. E.  
 [1] On the existence, uniqueness, convergence, and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations. — *Ann. Probab.*, 5 (1977).  
 [2] Right continuous solutions of systems of stochastic integral equations. — *J. Multivariate Anal.*, 7 (1977).
- Radjavi H., Rosenthal P.  
 [1] Invariant Subspaces. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1973).
- Reed M., Simon B.  
 [1] Methods of Modern Mathematical Physics. — Academic Press, New York and London (1975). [Имеется перевод: Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1978.]
- Rezende J.  
 [1] The method of stationary phase for oscillatory integrals on Hilbert space. — *Comm. Math. Phys.*, 101 (1985).
- Richter M. M.  
 [1] Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandard-Methoden. — Vieweg, Wiesbaden (1982).
- Richter P. H., Eigen M.  
 [1] Diffusion control reaction rates in spheroidal geometry. Application to repressor-operator association and membrane bound enzymes. — *Biophys. Chem.*, 2 (1974).
- Robinson A.  
 [1] Non-Standard Analysis. — North-Holland, Amsterdam (1966).  
 [2] Selected Papers, Vol. 2. — North-Holland, Amsterdam (1979).
- Rodenhause H.  
 [1] The completeness theorem for adapted probability logic. — Doctoral Dissertation, Univ. of Heidelberg (1982).  
 [2] A characterization of nonstandard liftings of measurable functions and stochastic processes. — *Israel J. Math.*, 43 (1982).
- Rosen J.  
 [1] A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. — *Comm. Math. Phys.*, 88 (1983).
- Ross D.  
 [1] Measurable transformations in saturated models of analysis. — Ph. D. thesis, Univ. of Wisconsin, Madison (1983).  
 [2] Automorphisms of the Loeb algebra. — *Fund. Math.*, 128 (1988), p. 29–36.  
 [3] Completeness theorem for probability logic with function symbols. — Preprint, Univ. of Iowa (1984).
- Röckner M.  
 [1] A Dirichlet problem for distributions and specifications for random fields. — *Mem. Amer. Math. Soc.*, 54 (1985).
- Röckner M., Wielens N.  
 [1] Dirichlet forms — closability and change of speed measure. — In «Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes» (S. Albeverio ed.), *Res. Notes Math.*, Pitman, London (1985).
- Ruelle D.  
 [1] Statistical Mechanics: Rigorous Results. — Benjamin, New York (1983).

[Имеется перевод первого издания: Рюэль Д. Статистическая механика: Строгие результаты. М.: Мир, 1971.]

Saks S.

- [1] Theory of the Integral. — Monograf. Mat. 7, Polska Akademia Nauk, Warszawa (1937). [Имеется перевод: Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.]

Schwartz L.

- [1] Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures. — Oxford Univ. Press, London and New York (1972).

Seiler E.

- [1] Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics. — Lect. Notes in Physics, 159 (1982). [Имеется перевод: Зайлер Э. Калибровочные теории. — М.: Мир, 1985.]

Silverstein M. L.

- [1] Symmetric Markov Processes. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1974).
- [2] Boundary Theory for Symmetric Markov Processes. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1976).

Simon B.

- [1] The  $P(\varphi)_2$  Euclidean (Quantum) Field Theory. — Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1974). [Имеется перевод: Саймон Б. Модель  $P(\varphi)_2$ , эвклидовой квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.]
- [2] Functional Integration and Quantum Physics. — Academic Press, New York and London (1979).
- [3] Schrödinger semigroups. — Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 7 (1982).

Simpson S.

- [1] Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? — J. Symbolic Logic, 49 (1984).

Skolem T. A.

- [1] Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. — Fund. Math., 33 (1934).

Sloan A.

- [1] An application of the nonstandard Trotter product formula. — J. Math. Phys., 18 (1977).
- [2] A note on the exponential of distributions. — Pacific J. Math., 79 (1978).

Sokal A.

- [1] An alternate constructive approach to the  $\Phi_3^4$  quantum field theory, and a possible destructive approach to  $\Phi_4^4$ . — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, 37 (1982).

Spitzer F.

- [1] Interaction of Markov Processes. — Adv. Math., 5 (1970).

Stoll A.

- [1] A nonstandard construction of Lévy Brownian Motion with applications to invariance principles. — Diplomarbeit, Freiburg (1982).
- [2] A nonstandard construction of Lévy Brownian Motion. — Probab. Theory and Related Fields, 71 (1986), p. 321—334.
- [3] Selfrepellent random walks and polymer measures in two dimensions. — Doctoral dissertation, Bochum (1985).
- [4] Self-repellent random walks and polymer measures in two dimensions. — In «Stochastic Processes — Mathematics and Physics» (S. Albeverio, Ph. Blanchard and L. Streit eds.), Lect. Notes in Math. 1250 (1986).



- Stroock D. W.  
 [1] Lectures on infinite interacting systems. — *Lectures in Math.*, 11 (1978).
- Stroock D. W., Varadhan S. R. S.  
 [1] *Multidimensional Diffusion Processes*. — Springer-Verlag, Berlin and New York (1979).
- Stroyan K. D.  
 [1] Previsible sets for hyperfinite filtrations. — *Probab. Theory and Related Fields*, 73 (1986), p. 183—196.
- Stroyan K. D., Bayod J. M.  
 [1] *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis*. — North-Holland, Amsterdam (1986).
- Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.  
 [1] *Introduction to the Theory of Infinitesimals*. — Academic Press, New York (1976).
- Sullivan W. G.  
 [1] Markov processes for random fields. — *Comm. Dublin Inst. Adv. Stud.*, Ser. A, 23 (1975).
- Svendsen E. C.  
 [1] The effect of submanifolds upon essential self-adjointness and deficiency indices. — *J. Math. Anal. Appl.*, 80 (1981).
- Symanzik K.  
 [1] Euclidean quantum field theory. — In «*Local Quantum Theory*» (R. Jost ed.), Academic Press, New York and London (1969).
- Takeda M.  
 [1] On the uniqueness of Markovian extensions of self-adjoint diffusion operators on infinite dimensional spaces. — *Osaka J. Math.*, 22 (1985), p. 233—242.
- Takenaka S.  
 [1] On projective invariance of multi-parameter Brownian motion. — *Nagoya Math. J.*, 67 (1977).
- Thomas L. E.  
 [1] Birman — Schwinger bounds for the Laplacian with point interactions. — *J. Math. Phys.*, 20 (1979).  
 [2] Scattering from point interactions. — In «*Mathematical Methods and Applications of Scattering Theory. Proceedings, 1979*» (De Santo, Saenz and Zachary eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1980).
- Tomisaki M.  
 [1] Dirichlet forms associated with direct product diffusion processes. — In «*Functional Analysis in Markov Processes*» (M. Fukushima ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1982), p. 76—119.
- Truesdell C., Muncaster R. G.  
 [1] *Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas*. — Academic Press, New York (1980).
- Ukai S.  
 [1] On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. — *Proc. Jpn. Acad.*, 50 (1974), p. 179—184.
- Warga J.  
 [1] Functions of relaxed controls. — *SIAM J. Control Optim.*, 5 (1967).  
 [2] *Optimal Control of Differential and Functional Equations*. — Academic Press, New York and London (1972).
- Wattenberg F.  
 [1] Nonstandard measure theory — Hausdorff measure. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65 (1977).
- von Weizsäcker H.  
 [1] A simple example concerning the global Markov property of lattice random fields. — *Proc. 8th Winter School Abstr. Anal.*, Praha (1980).

Westwater J.

- [1] On Edwards' model for long polymer chains. — *Comm. Math. Phys.*, 72 (1980).
- [2] On Edwards' model for long polymer chains: II. The self-consistent potential. — *Comm. Math. Phys.*, 79 (1981).
- [3] On Edwards' model for long polymer chains: III. Borel summability. — *Comm. Math. Phys.*, 84 (1982).
- [4] On Edwards' model for long polymer chains. — In «Trends and Developments in the Eighties» (S. Albeverio and Ph. Blanchard eds.), *Proc. Bielefeld Enc. Math. Phys. IV*, World Scientific, Singapore (1985).

Wichura M. J.

- [1] Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multidimensional time parameters. — *Ann. Math. Statist.*, 40 (1969).

Wielens N.

- [1] The essential self-adjointness of generalized Schrödinger operators. — *J. Funct. Anal.*, 61 (1985).

Wigner E.

- [1] On the mass defect of Helium. — *Phys. Rev.*, 43 (1933).

Williams D.

- [1] *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 1: Foundations.* — Wiley, New York (1979).

Wu T. T.

- [1] Ground state of a Bose system of hard spheres. — *Phys. Rev.*, 115 (1959).

Yasue K.

- [1] Stochastic calculus of variations. — *J. Funct. Anal.*, 41 (1981).

Yor M.

- [1] Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersections du mouvement brownien dans  $\mathbf{R}^3$ . — In «Sem. Probab. XIX, 83/84» (J. Azema and M. Yor eds.), *Lect. Notes in Math.*, 1123 (1985).

Zakon E.

- [1] Remarks on nonstandard real axis. — In «Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability», Holt, New York (1969).

Zegarliński B.

- [1] Extremality and the global Markov property. II: Global Markov property for non-FKG maximal Gibbs measures. — Preprint, BiBoS, Bielefeld (1984).
- [2] Uniqueness and the global Markov property for Euclidean fields: the case of general exponential interaction. — *Comm. Math. Phys.*, 96 (1985).

Zheng W., Meyer P. A.

- [1] Quelques resultats de «Mécanique Stochastique». — In «Sém. Probab. XVIII» (J. Azema ed.), *Lect. Notes in Math.*, 1059 (1984).

Zivaljevic R.

- [1] Loeb-completion of internal vector-valued measures. — *Math. Scand.*, 56 (1985).

Zorbas J.

- [1] Perturbation of self-adjoint operators by Dirac distribution. — *J. Math. Phys.*, 21 (1980).

## Приложение: обзор новых результатов<sup>1)</sup>

Цель настоящего приложения — обратить внимание читателя на некоторые новые достижения в нестандартном анализе. Прежде всего, упомянем несколько появившихся в последние годы книг: среди них — французское и английское издания книги Robert [1\*], [2\*], русские тексты Успенского [1\*], [2\*], посвященный асимптотическому анализу том van den Berg [1\*], новая книга Laugwitz [1\*], замечательная маленькая книжка Nelson [1\*], посвященная нестандартной теории вероятностей, а также его глубокое исследование по предикативной арифметике Nelson [2\*], и, наконец, сборник статей Cutland [2\*]. Этот последний сборник содержит введение в нестандартный анализ Lindström [1\*], за которым следуют обзоры по нестандартным методам в теории вероятностей, функциональном анализе и математической физике (Keisler [1\*], Henson [1\*], Albeverio [1\*]). Том заканчивается подборкой статей, принадлежащих ведущим исследователям в нестандартной области. Одна из этих статей (Diener F., Diener M. [2\*]) содержит обзор текущего состояния исследований французской группы по дифференциальным уравнениям и динамическим системам; в другой (Diener F., Stroyan [1\*]) разъясняется соотношение между подходом к нестандартному анализу, основанным на суперструктурах, и принадлежащей Нельсону «внутренней теории множеств». Еще один вклад Строяна в сборник (Stroyan [1\*]) — современное введение в принадлежащую Беннингхофену, Рихтеру и Строяну теорию супер-бесконечно малых, включающее также теорему Катлэнда о  $\pi$ -переносе; в то же время статья Benninghofen, Richter [1\*] посвящена совершенно иной теме, а именно — комбинаторной теории групп.

Прежде чем перейти к краткому обзору новейших достижений в нестандартной теории вероятностей, упомянем работы Neves [1\*], [2\*], в которых получены некоторые обещающие результаты, связанные с анализом на бесконечномерных многообразиях.

В замечательной работе Landers, Rogge [1\*] авторы развивают и уточняют идеи § 3.4 нашей книги; в числе прочего ими получена теорема о представлении для нерадоновских мер. Перкинс (см. Perkins [1\*]) использовал нестандартные методы для изучения так называемых суперпроцессов (или, если угодно, критически ветвящихся диффузионных процессов), а его ученик

---

<sup>1)</sup> Данное приложение, а также список дополнительной литературы составлены совместно переводчиком и одним из авторов, Томом Линдстрёмом, в процессе работы над корректурой.

Марк Реймерс провел некоторые интересные смежные исследования (Reimers [1\*], [2\*]). В недавних работах Катлэнда (Cutland [1\*], [3\*], [4\*], [5\*]) нестандартный анализ используется для изучения функционалов действия, больших отклонений и «плоского интеграла» Донскера. Роберт Даланг (Даланг [1\*]) применил нестандартные методы в задаче об оптимальной остановке двухпараметрических процессов, а Звонкин (Zvonkin [1\*]) — в вероятностной теории чисел. В недавней статье Линдстрёма (Lindström [2\*]) изучается броуновское движение на некотором аксиоматически определяемом классе конечно ветвящихся фракталов.

Вполне стандартными методами Иоганнес Браше (см. Brasche [1\*]) широко раздвинул границы нашего понимания природы сингулярных возмущений операторов. Один из его результатов утверждает, что множество нулевой меры может служить носителем возмущения оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^d$ , если его хаусдорфова размерность больше  $d - 4$ , и не может быть носителем возмущения, если его размерность меньше  $d - 4$ . В критическом случае, когда размерность равна в точности  $d - 4$ , хаусдорфова размерность оказывается чересчур грубым средством, так что приходится прибегнуть к более тонким понятиям из теории потенциала. Продолжая свои предыдущие результаты, упоминавшиеся в § 6.4, Лолер (см. Lawler [1\*]) показал, что введенное им случайное блуждание без петель является гауссовским даже в размерности 4, но в этом случае требуется замена времени с бесконечно большим коэффициентом. Столл (Stoll [1\*]) исследовал с нестандартной точки зрения двумерную модель Эдвардса и получил весьма обещающие результаты. В своем докладе в сборнике Cutland [2\*] Аркерид дает обзор своих работ, посвященных уравнению Больцмана (см. Arkeryd [4\*]); этот обзор в некоторых отношениях удачно дополняет наше изложение § 6.5. В двух недавних работах Hurd [1\*], [2\*] содержатся очень интересные результаты, касающиеся строгого вывода уравнения Больцмана из «первых принципов». В заключение упомянем работу Alberverio, Nøegh-Krohn, Paycha, Scarlatti [1\*], в которой авторы продолжают свои предшествующие исследования по теории струн.

## Дополнительная литература

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.

- [1\*] Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Наука, 1961.

Гейлер В. А., Маргулис В. А.

- [1\*] Спектр магнито-блоховского электрона в двумерной решетке. — ТМФ, 58 (1984), № 3, с. 461—472.
- [2\*] Структура спектра магнито-блоховского электрона в двумерной решетке. — ТМФ, 61 (1984), № 1, с. 140—149.
- [3\*] Андерсоновская локализация в недискретной мэрилендской модели. — ТМФ, 70 (1987), № 2, с. 192—201.

Гордон Е. И.

- [1\*] Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона. — Сиб. матем. журнал, 30 (1989), № 1, с. 89—95.
- [2\*] О преобразовании Фурье в нестандартном анализе. — Изв. вузов. Математика, 1989, № 2, с. 17—25.

Звонкин А. К., Крылов Н. В.

- [1\*] О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. — Труды школы—семинара по теории случайных процессов, Вильнюс (1975), т. 2, с. 9—98.

Козн П. Дж.

- [1\*] Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969.

Лозэв М.

- [1\*] Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962.

Прохоров Ю. В.

- [1\*] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1 (1956), № 1, с. 177—237.

Урбаник К.

- [1\*] Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. — Теория вероятн. и ее примен., 1 (1956), № 1, с. 146—149.

Успенский В. А.

- [1\*] Нестандартный, или неархимедов, анализ. — М.: Знание, 1983.
- [2\*] Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987.

Albeverio S.

- [1\*] Applications of nonstandard analysis in mathematical physics. — In Cutland [2\*], p. 182—220.

Albeverio S., Høegh-Krohn R., Paycha S., Scarlatti S.

- [1\*] A global and stochastic analysis approach to bosonic strings and associated quantum fields. — Preprint, Bochum (1989), 87 pp.

Arkeryd L.

- [1\*] On the Boltzmann equation in unbounded space far from equilibrium — Comm. Math. Phys., 105 (1986), p. 205—219.
- [2\*] On the generation of measure valued solutions on  $\mathbb{R}^n$  from Loeb solutions on  ${}^*\mathbb{R}^n$  — To appear in Transp. Theory Stat. Phys. (1988).
- [3\*] On the long time behavior of the Boltzmann equation. — Technical Report, Gothenborg (1988).
- [4\*] The nonlinear Boltzmann equation far from equilibrium — In Cutland [2\*], p. 321—340.

Arkeryd L., Esposito R., Rulvirenti M.

- [1\*] The Boltzmann equation for weakly inhomogeneous data. — *Comm. Math. Phys.*, 111 (1987), p. 393—407.

Benninghofen B., Richter M. M.

- [1\*] An application of nonstandard methods to combinatorial group theory. — In Cutland [2\*], p. 237—257.

Berg I., van den

- [1\*] Nonstandard asymptotic analysis. — *Lecture Notes in Math.*, v. 1249, Springer Verlag, Berlin (1988), VII + 182 pp.

Brasche J.

- [1\*] Perturbations of self-adjoint operators supported by null sets. — Doctoral dissertation, Bielefeld, 1988.

Cercignani C.

- [1\*] The Boltzmann Equation and its Applications. — Springer, New York (1988).

Cutland N. J.

- [1\*] Infinitesimals in action. — *J. London Math. Soc.*, 35 (1987), p. 202—216.

- [2\*] Nonstandard Analysis and its Applications (N. Cutland ed.). — Cambridge University Press, 1988, XIV + 346 pp.

- [3\*] An extension of the Ventcel—Freidlin large deviation principle. — *Stochastics* 24 (1988), p. 121—149.

- [4\*] The Brownian bridge as a flat integral. — To appear in *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*

- [5\*] An action functional for Levy Brownian motion. — Preprint, Hull (1989).

Dalang R.

- [1\*] Optimal stopping of two parameter processes on nonstandard probability spaces. — Preprint (1989).

Diener F., Diener M.

- [1\*] Fleuves. Collection d'articles. — Paris (1987), 124 pp.

- [2\*] Some asymptotic results in ordinary differential equations. — In Cutland [2\*], p. 282—297.

Diener F., Stroyan K. D.

- [1\*] Syntactical methods in infinitesimal analysis. — In Cutland [2\*], p. 258—281.

DiPerna R., Lions P. L.

- [1\*] On the Cauchy problem for Boltzmann equations. — To appear in *Ann. Math.* (1988).

Eckhaus W.

- [1\*] Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks. — *Lecture Notes in Math.*, v. 985 (1983), p. 449—494.

Golse F., Perthame B., Sentis R.

- [1\*] Un resultat pour les equations de transport. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 301 (1985), p. 341—344.

Henson C. W.

- [1\*] Infinitesimals in functional analysis. — In Cutland [2\*], p. 140—181.

Hurd A. E.

- [1\*] Global existence and validity for the BBGKY hierarchy. — *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 98 (1987), p. 191—209.

- [2\*] Global existence and validity for the limiting Enskog hierarchy. — Preprint, Victoria (1989).

Illner R., Shintrof M.

- [1\*] The Boltzmann equation. Global existence. — *Comm. Math. Phys.*, 95 (1984), p. 217—226.

Keisler H. J.

- [1\*] Infinitesimals in probability theory. — In Cutland [2\*], p. 106—139.

- Landers D., Rogge L.  
[1\*] Universal Loeb-measurability of sets and the standard part map with applications. — Trans. Amer. Math. Soc., 304 (1987), p. 229—243.
- Laugwitz D.  
[1\*] Zahlen und Kontinuum. — Bibliographisches Institut, Mannheim (1986).
- Lawler G. F.  
[1\*] Gaussian behavior of loop-erased, self-avoiding random walk in four dimensions. — Duke Math. J., 53 (1986), p. 249—270.
- Lindström T. L.  
[1\*] An invitation to nonstandard analysis. — In Cutland [2\*], p. 1—105.  
[2\*] Brownian motion on nested fractals. — To appear in *Memoirs Amer. Math. Soc.* (1990).
- Nelson E.  
[1\*] Radically Elementary Probability Theory. — Princeton University Press, Princeton (1987), X + 98 pp.  
[2\*] Predicative Arithmetic. — Princeton University Press, Princeton (1987).  
[3\*] The syntax of nonstandard analysis. — To appear in *Ann. Pure Appl. Logic*.
- Neves V.  
[1\*] Topologies on spaces of smooth functions. — Ph. D. thesis, University of Iowa (1985).  
[2\*] Infinitesimal calculus in HM spaces. — Bull. Belgian Math. Soc., 39 (1987).
- Perkins E.  
[1\*] A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions. — Trans. Amer. Math. Soc., 305 (1988), pp. 743—795.
- Reimers M.  
[1\*] Hyperfinite methods applied to the critical branching diffusion. — Prob. Theory Rel. Fields, 81 (1989), p. 11—27.  
[2\*] One dimensional stochastic partial differential equations and the branching measure diffusion. — Prob. Theory Rel. Fields, 81 (1989), p. 319—340.
- Robert A.  
[1\*] Analyse Non-standard. — Presse Polytechnique Romandes, Lausanne (1985).  
[2\*] Nonstandard Analysis. — Wiley, New York and Chichester (1988).
- Stoll A.  
[1\*] Invariance principle for Brownian intersection local time and polymer measures. — To appear in *Math. Scand.*
- Stroyan K. D.  
[1\*] Superinfinitesimals and inductive limits. — In Cutland [2\*], p. 298—320.
- Zvonkin A. K.  
[1\*] Nonstandard analysis in probability theory. — Proceedings of the First World Congress of Bernoulli Society, vol. 1, VNU Science Press, Utrecht (1988), p. 191—200.

# Предметный указатель

- Абсолютная взаимная вариация** (absolute joint variation) 192  
— оболочка (span) 192  
— измеримость (universal measurability) 318  
**Абсолютно ортогональные процессы** (absolutely orthogonal processes) 192  
**Абстрактное винеровское пространство** (abstract Wiener space) 237  
**Аксиомы Уайтмана—Гординга** (Wightman—Garding axioms) 510  
**Амплитуда** (amplitude) 55  
**Аналитичность** (analyticity) 512  
**Андерсона случайное блуждание** (Anderson's random walk) 101, 194  
**Андерсона—Лузина теорема** (Anderson—Lusin theorem) 120  
**Анри теорема** (Henry's theorem) 129  
**Асколи лемма** (Ascoli lemma) 45  
**Атомарная формула** 20
- Белый шум** (white noise) 246  
**Бесконечно большое число** (infinite number) 17  
— малое число (infinitesimal) 16  
— малая точка в нормированном пространстве (infinitesimal in a normed space) 70  
**Бёрлинга—Дени формула** (Beurling—Deny formula) 293  
**Билинейная форма** (bilinear form). —  
См. *форма билинейная*  
**Богатое множество** (rich set) 248, 286  
**Больцмана уравнение** (Boltzmann equation) 434  
— — усеченное (truncated) 437  
— —, перенормированная обобщенная форма 454  
— —, решение в смысле меры Юнга 452  
— —, решение Лёба (Loeb solution) 450  
— —, слабая форма (weak form) 440  
**Брело пространство** (Brelot space) 365  
**Броуновский лист** (Brownian sheet) — см. *Иеха—Винера процесс*  
— мост (bridge) 109, 542  
**Броуновское движение** (Brownian motion) 102, 189  
— — бесконечномерное (infinite dimensional) 237  
— — гиперконечное (hyperfinite) 101, 194  
— — *Леви* (Levy) 255  
— — на окружности (on a circle) 297  
— локальное время (local time) 110  
**Буркхольдера—Дэвиса—Ганди неравенства** (Burkholder—Davis—Gundy inequalities) 154  
**Быстрая точка** (fast point) 48
- Вакуум** (vacuum) 510  
**Вакуумное среднее** (vacuum expectation value) 510  
**Ван-дер-Поля уравнение** (Van der Pol Equation) 48  
**Вариационный принцип** (variational principle) 483  
**Вариация абсолютная взаимная** (absolute joint variation) 192  
— квадратическая (quadratic) 143, 180  
**Вероятностная логика** (probability logic) 186, 262



- Вероятностное пространство (probability space) 85
- — гиперконечное (hyperfinite) 87
- Взаимодействие (interaction) 472
- для калибровочных полей (for gauge fields) 532
- для квантовых полей (for quantum fields), 519
- притягивающее (attractive) 499
- равномерно умеренное (uniformly tempered) 505
- сингулярное (singular) 376
- с конечным радиусом (finite range) 473
- с нулевым радиусом (zero range) 359, 376, 399
- трансляционно-инвариантное (translation — invariant) 474
- умеренное (tempered) 505
- Вильсона петля (Wilson loop) 534
- Вложение суперструктур (superstructure embedding) 34
- Внешнее множество (external set) 31
- поле (field) 485
- Внешняя конфигурация (external configuration) 467
- Внутреннее множество (internal set) 31
- Внутренняя мера (internal measure) 82
- мощность (cardinality) 86
- стандартная часть (inner standard part) 314
- стратегия (internal control) 212
- функция (function) 34
- Возмущение, сосредоточенное на множестве (perturbation, supported on a set) 394
- Волновая функция (wave function) 375
- Время жизни марковского процесса (lifetime of Markov process) 319
- Гамильтониан (Hamiltonian) 347, 473
- Гауссовская случайная величина (Gaussian Random variable) 104, 509
- Гауссовское случайное поле (Gaussian random field) 508
- — —, индексированное пространством  $H$  (indexed by  $H$ ) 508
- Гельфанда теорема о представлении (Gelfand's representation theorem) 364
- Генератор полугруппы инфинитезимальный (infinitesimal generator of semigroup) 267
- Гиббсовская мера (Gibbs measure) 503
- Гиббсовское состояние (Gibbs state) 474
- Гильберта—Шмидта норма (Hilbert—Schmidt norm) 238
- — оператор (operator) 127, 238
- Гипердействительное число (hyperreal) 15
- Гиперконечная ось времени (hyperfinite time line) 87
- решетка (lattice) 251
- форма энергии (energy form) 351
- Гиперконечное вероятностное пространство (hyperfinite probability space) 87
- множество (set) 86
- марковское свойство (Markov property) 488
- решетчатое свободное поле (lattice free field) 516
- случайное блуждание (random walk) 101
- Гиперконечномерное линейное пространство (hyperfinite dimensional linear space) 72
- Гиперконечный интеграл Ито (hyperfinite Itô integral) 131
- марковский процесс (Markov process) 290, 309
- случайный процесс (stochastic process) 88, 132
- Гирсанова формула (Girsanov formula) 227
- Глобальное марковское свойство (global Markov property) 487

- Граница *Мартина* (Martin boundary) 365
- Граничные условия *Дирихле* (Dirichlet boundary condition) 528
- — *Неймана* (Neumann) 527
- Грань ячейки (face of a cell) 531
- Гриффитса—Келли—Шермана* неравенства (Griffiths—Kelly—Sherman inequalities) 523
- Гросса* теорема (Gross theorem) 127
- Давление (pressure) 475
- Дирихле* граничные условия (Dirichlet boundary conditions) 528
- задача (problem) 365
- форма (form) (см. также Форма билинейная) 287, 292
- Диффузионная система (diffusion system) 466
- Добрушина—Ланфорда—Рюэлла* уравнения, ДЛР-уравнения (*Dobrushin—Lanford—Ruelle* equations, DLR-equations) 478
- условие единственности (uniqueness condition) 498
- Долеан* мера (Doleans measure) 173
- Допустимая стратегия (admissible control) 210
- — — распределенная (relaxed) 211
- — — оптимальная (optimal) 212
- Дуба* неравенство (Doob's inequality) 145
- Дынкина* формула (Dynkin's formula) 559
- Евклидова теория поля (Euclidean field theory) 511
- точка (point) 510
- Евклидово поле (Euclidean field) 511
- — свободное (free) 509
- Единичное обрезание (unit contraction) 294
- Задача *Дирихле* (Dirichlet problem) 365
- *Штурма—Лиувилля* (Sturm—Liouville) 366
- Замена масштаба (change of scale) 51
- Замкнутая форма (closed form) 274
- Замкнутое множество в  $\mathbf{R}$  (closed set in  $\mathbf{R}$ ) 19
- — в топологическом пространстве (in topological space) 63
- Замкнутость относительно конечных пересечений (finite intersection property) 13
- Изинга* модель (Ising model) 484
- Измеримая норма (measurable norm) 126
- Измеримое множество (measurable set) 161
- Измеримый процесс (measurable process) 135, 161
- прямоугольник (rectangle) 161
- Инвариантность (invariance) 512
- Инвариантных подпространств проблема (invariant subspace problem) 77
- Интервал *Ито* (Itô integral) 136
- *Лебега* (Lebesgue) 93
- *Римана* (Riemann) 41
- *Стилтьеса* (Stieltjes) 131
- стохастический (stochastic) 132, 136
- Интегральное представление *Мартина—Шоке* (Martin—Choquet integral representation) 365
- Инфинитезимальный генератор полугруппы (infinitesimal generator of semigroup) 267
- Исключительное множество (exceptional set) 311
- Ито* интеграл (Itô integral) 136
- лемма (lemma) 138, 184
- уравнение (equation) 193
- —, решение сильное (strong solution) 195
- —, — слабое (weak) 195
- —, — строгое (strict) 195

- Иеха** — **Винера** процесс (Yeh—Wiener process) 261
- Калибровочное поле** (gauge field) 530
- Квадратическая вариация** (quadratic variation) 143, 180
- Квазинепрерывная функция** (quasi-continuous function) 334
- Квантовое поле** (quantum field) 510
- евклидово (Euclidean) 511
- — — свободное (free) 509
- — с экспоненциальным взаимодействием (with exponential interaction) 519, 526
- — — — и релятивистская струна (and relativistic string) 571
- — эрмитово бозонное скалярное (Hermitean boson scalar) 510
- —  $\Phi_d^4$  528, 559
- — — и полимерные меры (and polymer measures) 559
- —  $\Phi_1^2 \Phi_2^2$  564
- Квантор** (quantifier) 21
- ограниченный (bounded) 28
- Кейслера—Фубини теорема** (Keisler—Fubini theorem) 97
- Кёнига лемма** (König lemma) 45
- Колмогорова теорема** о непрерывности (Kolmogorov continuity theorem) 252
- Компактное множество** в  $\mathbb{R}$  (compact set in  $\mathbb{R}$ ) 19
- — в топологическом пространстве (in topological space) 63
- отображение (map) 69
- Компактно-открытая топология** (compact-open topology) 68
- Компактный носитель** (compact support) 345
- оператор (operator) 73, 382
- Конечная точка** в метрическом пространстве (finite point in metric space) 68
- — в нормированном пространстве (in normed space) 70
- Конечное число** (finite number) 18
- Конфигурационное пространство** (configuration space) 465
- Конфигурация** внешняя (external configuration) 467
- Коперверхность** (cosurface) 531
- стохастическая (stochastic) 532
- Кофинитное множество** (cofinite set) 12
- Коцепь** (cochain) 531
- Крылова неравенство** (Krylov's inequality) 198, 199
- Лапласа оператор** (Laplace operator) — см. *оператор Лапласа*
- преобразование (transform) 552
- Левая стандартная часть** (left standard part) 147
- Леви броуновское движение** (Levy Brownian motion) 255
- модуль непрерывности (Modulus of continuity) 122, 123
- Лемма Асколи** (Ascoli lemma) 45
- **Ито** (Itô) 138, 184
- **Кёнига** (König) 45
- об аппроксимации (approximation lemma) 64
- **Робинсона** (Robinson) 34
- Линейный оператор** **Гильберта—Шмидта** (Hilbert—Schmidt linear operator) 127, 238
- — гиперконечномерный (hyperfinite dimensional) 74
- — — околостандартный (nearstandard) 237
- — —  $S$ -ограниченный ( $S$ -bounded) 237
- — идемпотентный (idempotent) 74
- — компактный (compact) 73, 382
- — марковский (Markov) 287
- — ограниченный (bounded) 72
- — полиномиально компактный (polynomially compact) 77
- — проектор (projection) 74

- —, производящий генератор группы (infinitesimal generator of semigroup) 267
- — самосопряженный (self-adjoint) 74
- — эрмитов (Hermitean) 74
- Ли—Троттера* формула (Lie—Trotter formula) 433
- Лиувилля* модель (Liouville model) 571
- Ловушка (trap) 291
- Логика вероятностная (probability logic) 186, 262
- Локализующая последовательность (localizing sequence) 144
- Локально конечная форма *Дирихле* (locally finite Dirichlet form) 341
- Локальное время броуновское (Brownian local time) 110
- марковское свойство (Markov property) 487
- Локальный  $L^2$ -мартингал (local  $L^2$ -martingale) 172
- $SL^2$ -мартингал ( $SL^2$ -martingale) 174
- $\lambda^2$ -мартингал ( $\lambda^2$ -martingale) 144
- Лося* теорема (theorem of Los) 22
- Лузина* теорема (Lusin theorem) 120
- Льенара* плоскость (Lienard plane) 48, 51
- Максвелловское распределение (Maxwell distribution) 457
- — глобальное (global) 457
- — локальное (local) 457
- Максимальная умеренная гиббсовская мера (maximal tempered Gibbs measure) 506
- Марковский момент (остановки) (stopping time) 144, 173, 318
- оператор (operator) 287
- процесс (process) 290
- — гиперконечный (hyperfinite) 290, 309
- — симметричный (symmetric) 291
- — с исключительными дефектами (with exceptional irregularities) 320
- — *Ханта* (Hunt) 326, 345
- —, время жизни (lifetime) 319
- —, множество дефектов (set of irregularities) 320
- Марковское свойство квадратичной формы (Markov property of quadratic form) 294
- — случайного поля 487
- — — гиперконечное (hyperfinite) 488
- — — глобальное (global) 487
- — — локальное (local) 487
- Мартина* граница (Martin boundary) 365
- Мартина—Шоке* интегральное представление (Martin—Choquet integral representation) 365
- Мартингал (martingale) 142
- гиперконечный (hyperfinite) 142
- ,  $S$ -непрерывность ( $S$ -continuity) 150
- Математическое ожидание (expectation) 91
- — условное (conditional) 95
- Медленная точка (slow point) 48
- Медленное многообразие (slow manifold) 48
- —, неустойчивый/отталкивающий участок (unstable/repelling part) 48
- —, устойчивый/притягивающий участок (stable/attracting part) 48
- Мера вероятностная (probability measure) 83
- *Винера* (Wiener) 108
- — условная (conditional) 109
- *Гиббсовская* (Gibbs)
- *Долеана* (Doleans) 173
- *Лёба* (Loeb) 85
- на  $\Omega \times T$ , абсолютно непрерывная относительно меры на  $\Omega$  (on  $\Omega \times T$  absolutely continuous with respect to measure on  $\Omega$ ) 162
- неограниченная (unbounded) 100, 286
- плотная (tight) 118
- равномерная (uniform) 162

- радоновская (Radon) 113, 286
- регулярная (regular) 112
- считающая (counting) 87
- умеренная (tempered)
- Минлоса** теорема (Minlos theorem) 526
- Множество** абсолютно измеримое (universally measurable set) 318
- богатое (rich) 248, 286
- внешнее (external) 31
- внутреннее (internal) 31
- гиперконечное (hyperfinite) 86
- дефектов (of irregularities) 320
- замкнутое (closed) 63
- измеримое (measurable) 161
- — почти наврное (almost surely) 161
- исключительное (exceptional) 311
- компактное (compact) 63
- кофинитное (cofinite) 12
- неупреждающее (nonanticipating) 162
- открытое (open) 63
- предсказуемое (predictable) 161
- — почти наврное (almost surely) 161
- с конечной энергией (with finite energy) 335
- собственно исключительное (properly exceptional) 312
- —  $\delta$ -исключительное ( $\delta$ -exceptional) 312
- согласованное (adapted) 161
- — почти наврное (almost surely) 161
- стандартное (standard) 31
- — порождающее (generating) 234
- цилиндрическое (cylinder) 123
- $\mathcal{F}$ -замкнутое ( $\mathcal{F}$ -closed) 271
- $\delta$ -исключительное ( $\delta$ -exceptional) 310
- \*-конечное (\*-finite) 86
- Модель Изинга** (Ising model) 484
- **Лиувилля** (Liouville) 571
- **Эдвардса** (Edwards) 427
- Модифицированная стандартная часть** (modified standard part) 320
- Модуль непрерывности** *Леви* (Lévy modulus of continuity) 122, 123
- Монада** (monad) 19, 62
- Мощность** множества внешняя (external cardinality) 87
- — внутренняя (internal) 86, 87
- Мягкое интегральное решение** (mild integral solution) 244
- Наблюдаемая** (observable) 510
- Наблюдение** (observation) 210
- Неймановские граничные условия** (Neumann boundary conditions) 540
- Непрерывная справа фильтрация** (right-continuous filtration) 318
- Непрерывность** (continuity) 39, 66
- , нестандартная характеристизация (nonstandard characterization) 39, 66
- равномерная (uniform) 39, 68
- —, нестандартная характеристизация (nonstandard characterization) 39, 68
- Непустоты конечных пересечений** свойство (finite intersection property) 59
- Неравенства** *Буркхольдера—Дэвиса—Ганди* (Burkholder—Davis—Gundy inequalities) 154
- Гриффитса—Келли—Шермана* (Griffiths—Kelly—Sherman) 523
- Неравенство Дуба** (Doob's inequality) 145
- *Крылова* (Krylov) 198, 199
- Несамопересекающееся случайное блуждание** (self-avoiding random walk) 430
- Нестандартная оболочка нормированного пространства** (nonstandard hull of normed space) 70, 78, 265
- Неупреждающая функция** (nonanticipating function) 171, 228
- Неупреждающий случайный процесс** (nonanticipating stochastic process) 133, 134
- Норма Гильберта—Шмидта** (Hilbert—Schmidt norm) 238
- измеримая (measurable) 126

- Нормальная форма *Дирихле* (normal Dirichlet form) 301
- Нормированное пространство (normed space) 70
- —, нестандартная оболочка (nonstandard hull) 70
- —, пополнение (completion) 71
- Нулевая точка (zero point) 370
- Ньютона* уравнение (Newton's equation) 375
- Область определения (domain) 266, 268
- Обобщенный равновесный потенциал (generalized equilibrium potential) 336
- Оболочка абсолютная (absolute span) 192
- нестандартная (nonstandard hull) 70, 78, 265
- Обратная температура (inverse temperature) 485
- Объемный предел (bulk limit) 476
- Ограниченная ультрастепень (bounded ultrapower) 27
- Ограниченный квантор (bounded quantifier) 28
- язык (restricted language) 28
- Околостандартная точка (nearstandard point) 63, 68, 71
- Околостандартный оператор (nearstandard operator) 237
- Оператор компактный (compact operator) 382
- *Лапласа* (Laplace) 289, 376
- — дискретный (discrete) 289, 354, 513, 540
- — и броуновское движение (and Brownian motion) 297, 304
- — и квантовая механика (and quantum mechanics) 304, 347, 376, 510
- —, сингулярное возмущение ((singular perturbation) 377
- —, — — в точке (at a point) 358, 399
- —, — — вдоль броуновской траектории (along Brownian path) 410
- —, ядро резольвенты (resolvent kernel) 401
- линейный (linear) — см. Линейный оператор
- околостандартный (nearstandard) 237
- столкновений (collision) 434
- —, усеченная форма (truncated form) 437
- *S*-ограниченный вне множества *B* (*S*-bounded off *B*) 382, 383
- $\rho$ -плотный ( $\rho$ -dense) 382
- Операция *Суслина* (Souslin operation) 316
- Ореол (halo) 19
- Ортогональность абсолютная (absolute orthogonality) 192
- Ослабленное решение (weakened solution) 244
- Остановленный процесс (stopped process) 144, 173
- Остервальдера—Шрадера* свойство (Osterwalder—Schrader property) 512
- Открытость, нестандартная характеристизация (openness, nonstandard characterization) 63
- Отображение компактное (compact map) 69
- непрерывное (continuous) 66
- стандартной части (standard part map) 19, 235
- Переменная свободная (free variable) 22
- Перенос (transfer) 24
- Переноса принцип (transfer principle) 24, 29
- Перепополнение (overflow) 33
- снизу (underflow) 33
- Перманентности принцип (permanence principle) 33
- Петля *Вильсона* (Wilson loop) 534
- Плакет (plaquett) 531

- Плоскость *Льенара* (Lienard plane) 48, 51  
 — фазовая (phase) 51  
 Поднятие процесса (lifting of process) 136, 164  
 — — равномерное (uniform) 165  
 — — существенно равномерное (essentially uniform) 168  
 — случайной величины (of random variable) 88, 235  
 — функции (of function) 88, 89  
 Поднятия условие (lifting condition) 493  
 Подпространство  $S$ -плотное ( $S$ -dense subspace) 283  
 Положительность при отражениях (reflection positivity) 512  
 Полугруппа, ассоциированная с формой  $\mathcal{E}$  и с  $\Delta t$  (semigroup associated with  $\mathcal{E}$  and  $\Delta t$ ) 267  
 — феллеровская (Feller) 471  
 Польское пространство (Polish space) 209  
 Порождающее множество стандартное (standard generating set) 234  
 Последовательность (sequence) 35  
 — двойная (double) 37  
 —  $E_1$ -фундаментальная ( $E_1$ -Cauchy) 274  
 —, предел (limit) 36  
 —, продолжение (extension) 35, 61  
 Потенциал взаимодействия (interaction potential) 513  
 — равновесный (equilibrium) 298, 299  
 Почти наверное измеримое множество (almost surely measurable set) 161  
 — — измеримый процесс (measurable process) 161  
 — — предсказуемое множество (predictable set) 161  
 — — предсказуемый процесс (predictable process) 161  
 — — согласованное множество (adapted set) 161  
 — — согласованный процесс (adapted process) 137, 161  
 — — компактное пространство (compact space) 310  
 Правая стандартная часть (right standard part) 147, 319  
 Предел в смысле *ван Хова* (limit in the sense of van Hove) 476  
 — объемный (bulk) 476  
 — термодинамический (thermodynamic) 476  
 Преколомостандартная точка (prestandard point) 25, 71, 234  
 Предсказуемое множество (predictable set) 161  
 — почти наверное множество (almost surely predictable set) 161  
 Предсказуемый процесс (predictable process) 161  
 — почти наверное процесс (almost surely predictable process) 161  
 — прямоугольник (rectangle) 161  
 — почти наверное прямоугольник (almost surely predictable rectangle) 161  
 Преобразование *Лапласа* (Laplace transform) 552  
 Принцип внутреннего определения (internal definition principle) 33  
 — инвариантности (invariance) 260  
 — — для броуновского движения Леви (for Levy Brownian motion)  
 — насыщения общий (general saturation) 62  
 — переноса (transfer) 24, 29  
 — перманентности (permanence) 33  
 — расширения (extension) 26  
 — счетного насыщения (countable saturation) 60  
 Притягивающее взаимодействие (attractive interaction) 499  
 Проблема инвариантных подпространств (invariant subspace problem) 77  
 — трех пространств (three-space property) 80

- Продолжение *Фридриха* (Friedrichs extension) 258
- Проективная система мер (projective system of measures) 122
- — топологических пространств (of topological spaces) 122
- Проективное семейство спецификаций (projective family of specifications) 482
- Проективный предел (projective limit) 122
- Произведение граней (product of faces) 531
- мер (product measure) 96, 97
- Производящий оператор полугруппы (infinitesimal generator of semigroup) 267
- Пропозициональная связка (propositional connective) 21
- Простое случайное блуждание (simple random walk) 430
- Пространственное обрезание (space cutoff) 514
- Пространство вероятностное (probability space) 85
- — гиперконечное (hyperfinite) 87
- — конфигурационное (configuration space) 465
- — *Лёба* (Loeb space) 85
- — линейное (linear)
- — банахово (Banach) 70
- — — рефлексивное (reflexive) 79
- — — суперрефлексивное (super-reflexive) 79
- — — финитно представимое (finitely representable) 79
- — гильбертово (Hilbert) 73
- — гиперконечномерное (hyperfinite-dimensional) 72
- — нормированное (normed) 70
- — метрическое (metric space) 68
- — сепарабельное (separable) 69
- — наблюдений (observation space) 210
- — непрерывных отображений (of continuous maps) 68
- — польское (Polish) 209
- — с мерой (measure space) 82
- — — внутреннее (internal) 82
- — — гиперконечное (hyperfinite) 87
- — — — неатомарное (atomless) 247, 543
- — топологическое (topological) 62
- — *Брело* (Brelot) 365
- — компактное (compact) 64
- — локально компактное (locally compact) 69
- — почти  $\sigma$ -компактное (almost  $\sigma$ -compact) 310
- — регулярное (regular) 327
- — типа  $T_3$  (of  $T_3$  type) 327
- —, удовлетворяющее второй аксиоме счетности (second countable) 327
- — хаусдорфово (Hausdorff) 63
- Прохорова* теорема (Prohorov theorem) 122
- Процесс (process) — см. *Случайный процесс*
- Прямоугольник измеримый (measurable rectangle) 161
- — почти наверное (almost surely) 161
- — предсказуемый (predictable) 161
- — почти наверное (almost surely) 161
- — согласованный (adapted) 161
- — почти наверное (almost surely) 161
- Пуассоновское поле (Poisson field) 542
- — броуновских мостов (of Brownian bridges) 542
- Равновесная мера (equilibrium measure) 503
- Равновесное состояние (equilibrium state) 477, 481
- — бесконечной системы (of infinite system) 477, 481
- — внутреннее (internal) 478
- — — с граничным распределением (with boundary distribution) 478



- Равновесный потенциал (equilibrium potential) 298, 299
- — обобщенный (generalized) 336
- Равномерная мера (uniform measure) 162
- Равномерное поднятие (uniform lifting) 165
- Радоновская мера (Radon measure) 113, 286
- Разделяющая компакты форма Дирихле (separating compacts Dirichlet form) 328
- точки форма Дирихле (separating points Dirichlet form) 339
- Разделяющее семейство функций (separating family of functions) 328
- Распределение максвелловское (Maxwell distribution) 457
- — глобальное (global) 457
- — локальное (local) 457
- Распределенная стратегия (relaxed control) 211
- — оптимальная (optimal) 212
- Расширение насыщенное (saturated extension) 62
- нестандартное множества  $\mathbf{R}$  (non-standard extension of  $\mathbf{R}$ ) 15
- — универсума  $V(\mathbf{R})$  (of  $V(\mathbf{R})$ ) 28
- полинасыщенное (polysaturated) 62
- счетно насыщенное (countably saturated) 60
- $\kappa$ -насыщенное ( $\kappa$ -saturated) 62
- Расширения принцип (extension principle) 26
- Расширенный универсум (extended universe) 28
- —, модель (model of) 28
- Регулярная форма Дирихле (regular Dirichlet form) 345
- функция множество (set function) 112
- Регулярное топологическое пространство (regular topological space) 327
- Регулярность (regularity) 512
- Регулярный насыщенный комплекс (regular saturated complex) 538
- Резольвента (resolvent) 275
- Реконструкции теорема (reconstruction theorem) 511
- Релятивистских струн теория (theory of relativistic strings) 571
- Решение стохастического дифференциального уравнения (solution of stochastic differential equation) 194
- — — мягкое интегральное (mild integral) 244
- — — ослабленное (weakened) 244
- — — сильное (strong) 195
- — — слабое (weak) 195
- — — строгое (strict) 195
- Решетка гиперконечная (hyperfinite lattice) 251
- Робинсона лемма (Robinson's lemma) 34
- Ручная функция (tame function) 466
- —, база (base of) 466
- Самосопряженный оператор (selfadjoint operator) 74
- — и замкнутая форма (and closed form) 377
- Свободная переменная (free variable) 22
- Свободное евклидово поле (free Euclidean field) 509
- решетчатое поле (lattice field) 513
- — — гиперконечное (hyperfinite) 516
- — — с граничным условием (with boundary condition) 527
- Свойство единственности сильное (strong uniqueness property) 498
- Остервальдера—Шрадера (Osterwalder—Schrader) 512
- Связка пропозициональная (propositional connective) 21
- Связь (link, bond) 531
- Семимартингал (semimartingale) 206

- Сильное решение (strong solution) 195  
 — свойство единственности (uniqueness property) 498  
 Симметричный марковский процесс (symmetric Markov process) 291  
 Сингулярная задача *Штурма—Лиувилля* (singular Sturm—Liouville problem) 366  
 Сингулярное возмущение (singular perturbation) 377, 394  
 Система диффузионная (diffusion system) 466  
 — с конечным радиусом взаимодействия (with finite range interaction) 466  
 Слабое решение (weak solution) 195  
 Случайное блуждание андерсоновское (Anderson random walk) 101, 194  
 — гиперконечное (hyperfinite) 101, 194  
 — гиперконечномерное (hyperfinite dimensional) 235  
 — — несамопересекающееся (self—avoiding) 430  
 — — простое (simple) 430  
 — — с запрещенным множеством (with taboo set) 432  
 Случайное поле гауссовское (Gaussian random field) 508  
 — — обобщенное (generalized) 518  
 — — пуассоновское (Poisson) 542  
 — —, броуновский лист (Brownian sheet) 261  
 — —, броуновское движение *Леви* (Levy Brownian motion) 255  
 — —, процесс *Йеха—Винера* (Yeh—Wiener process) 261  
 Случайный процесс внутренний (internal stochastic process) 161  
 — — гиперконечный (hyperfinite) 88, 132  
 — — измеримый (measurable) 135, 161  
 — — — почти наверное (almost surely) 161  
 — — — *Йеха—Винера* (Yeh—Wiener) 261  
 — — марковский (Markov)—см. Марковский процесс  
 — — неупреждающий (nonanticipating) 133, 134, 142  
 — — остановленный (stopped) 144, 173  
 — — предсказуемый (predictable) 161  
 — — — почти наверное (almost surely) 161  
 — — с бесконечно малыми приращениями (with infinitesimal increments) 154  
 — — согласованный (adapted) 161  
 — — — почти наверное (almost surely) 161  
 — — спокойный (well—behaved) 181  
 — — стандартный (standard) 88  
 — — строго марковский (strong Markov) 319  
 — — *S*-непрерывный (*S*-continuous) 150, 251  
 — — — справа в нуле (*S*-right continuons at zero) 174  
 Смежные ячейки (adjacent cells)  
 Собственно исключительное множество (properly exceptional set) 312  
 —  $\delta$ -исключительное множество ( $\delta$ -exceptional set) 312  
 Согласованное множество (adapted set) 161  
 — почти наверное множество (almost surely adapted set) 161  
 Согласованный процесс (adapted process) 135, 161  
 — почти наверное процесс (almost surely adapted process) 161  
 — прямоугольник (rectangle) 161  
 — почти наверное прямоугольник (almost surely adapted rectangle) 161  
 Состояние (state) 474, 478  
 — бесконечной системы (of infinite system) 476

- — — равновесное (equilibrium) 477, 481
- гиббсовское (Gibbs) 474
- равновесное (equilibrium) 474, 478
- трансляционно-инвариантное (translation-invariant) 477
- чистое (pure) 482
- экстремальное (extremal) 482, 498
- Спин (spin) 465
- Спокойная функция (well-behaved function) 181
- Спокойный процесс (well-behaved process) 181
- Средняя энергия (mean energy) 475
- Стандартная часть (standard part) 19, 63, 235
- — билинейной формы (of bilinear form) 274
- — в компактно-открытой топологии (in compact-open topology) 69
- — в хаусдорфовом пространстве (in Hausdorff space) 63
- — в  $*\mathbf{R}$  (in  $*\mathbf{R}$ ) 19
- — внутренней стратегии (of internal control) 214
- — внутренняя (inner) 314
- — конфигурации (of configuration) 467
- — левая (left) 147
- — модифицированная (modified) 320
- — полугруппы (of semigroup) 468
- — правая (right) 147, 319
- — случайного процесса (of stochastic process) 147
- Стандартное множество (standard set) 31
- порождающее множество (generating set) 234
- Статистическая сумма (partition function) 474
- Стохастическая коповерхность (stochastic cosurface) 532
- фильтрация (filtration) 160
- — внутренняя (internal) 160
- — непрерывная справа (right-continuous) 318
- —, порожденная внутренней фильтрацией (generating by internal filtration) 160
- —, удовлетворяющая обычным условиям (satisfying usual conditions) 160
- Стохастический интеграл (stochastic integral) 132, 136, 239
- — бесконечномерный (infinite dimensional) 243
- — гиперконечномерный (hyperfinite dimensional) 243
- — гиперконечный (hyperfinite) 132
- — по белому шуму (with respect to white noise) 249
- —,  $S$ -непрерывность ( $S$ -continuity) 251
- Стохастическое дифференциальное уравнение (stochastic differential equation) 193
- — — бесконечномерное (infinite dimensional) 234, 243
- — —, решение мягкое интегральное (mild integral solution) 244
- — —, — ослабленное (weakened) 244
- — —, решение (solution) 194
- — —, — сильное (strong) 195
- — —, — слабое (weak) 195
- — —, — строгое (strict) 195
- Стратегия (control) 208
- внутренняя (internal) 212
- допустимая (admissible) 210
- — распределенная (relaxed) 211
- — — оптимальная (optimal) 212
- Строго марковский процесс (strong Markov process) 319
- Строгое решение (strict solution) 195
- Субмартингал (submartingale) 142
- Супермартингал (supermartingale) 142
- Суперструктур вложение (superstructure embedding) 34
- Суперструктура (superstructure) 26

- Суслина* операция (Souslin operation) 316
- Существенно равномерное поднятие (essentially uniform lifting) 168
- Считающая мера (counting measure) 87
- Тень (shadow) 19
- Теорема Андерсона—Лузина* (Anderson-Lusin theorem) 120
- *Анри* (Henry) 129
- *Гельфанда* о представлении (Gelfand theorem) 364
- *Гросса* (Gross) 127
- единственности для вложений суперструктур (uniqueness theorem for superstructure embedding) 62
- *Кейслера—Фубини* (Keisler—Fubini) 97
- *Колмогорова* о непрерывности (Kolmogorov continuity theorem) 252
- *Лося* (Los) 22
- *Лузина* (Lusin) 120
- *Минлоса* (Minlos) 526
- о бесконечной сумме (infinite sum theorem) 42
- о поднятии (lifting theorem) 164
- об инвариантных подпространствах (invariant subspace theorem) 77
- *Пеано* (Peano) 43
- *Прохорова* (Prohorov) 122
- реконструкции (reconstruction theorem) 511
- спектральная (spectral) 73
- *Фубини* (Fubini) 97
- *Фукусимы* о разложении (Fukushima decomposition theorem) 301
- — — существовании (Fukushima existence theorem) 345
- центральная предельная (central limit theorem) 103
- *Энфло—Линденстраусса—Пизье* (Enflo—Lindenstrauss—Pisier) 81
- эргодическая (ergodic theorem) 101
- Теория поля евклидова (Euclidean field theory) 511
- релятивистских струн (of relativistic strings) 571
- *Янга—Миллса* (Yang—Mills) 534
- Термальное среднее (thermal average) 474
- Термодинамический предел (thermodynamic limit) 476
- Топология компактно-открытая (compact-open topology) 68
- Точечное взаимодействие 359, 376, 399
- Точка бесконечно малая в нормированном пространстве (infinitesimal point in normed space) 70
- быстрая (fast) 48
- евклидова (Euclidean) 510
- конечная в метрическом пространстве (finite point in metric space) 68
- — — нормированном пространстве (finite point in normed space) 70
- медленная (slow) 48
- околостандартная (nearstandard) 48, 63, 68, 71
- предоклостандартная (pre-near-standard) 25, 71
- Трансляционно-инвариантное взаимодействие (translation-invariant interaction) 474
- — состояние (state) 477
- Трех пространств проблема (three-space property) 80
- Уайтмана—Гординга* аксиомы (Wightman—Gording axioms) 510
- функции (Wightman functions) 510
- Узел (node) 370
- решетки (site) 465
- Ультростепень ограниченная (bounded ultrapower) 27
- Ультрафильтр (ultrafilter) 13
- Универсум (universe) 26
- расширенный (extended) 26
- Уравнение *Больцмана* (Boltzmann equation) 434
- — усеченное (truncated) 437

- — решение *Лёба* (Loeb solution) 450
- —, слабая форма (weak form) 440
- *Ван-дер-Поля* (Van der Pol) 48
- дифференциальное (differential) 43
- *Ито* (Itô) 193
- *Ньютона* (Newton) 375
- стохастическое дифференциальное (stochastic differential equation) — см. *Стохастическое дифференциальное уравнение*
- *Шредингера* (Schrödinger) 436
- Уравнения *Добрушина—Ланфорда—Рюэля*, ДЛР-уравнения (Dobrushin—Lanford—Ruelle equations, DLR—equations) 478
- Условие поднятия (lifting condition) 493
- C (condition C) 493
- Условное математическое ожидание (conditional expectation) 95
- Утка (canard, duck) 51
  
- Фазовая плоскость (phase plane) 51
- Фазовый переход (phase transition) 484
- Фактор динамической системы (factor of dynamical system) 101
- Фейнмана—Каца* формула (Feynman—Kac formula) 305, 307
- Фейнмановский интеграл по траекториям (Feynman path integral) 433—437
- — — — внутренний (internal) 435
- — — —, секвенциальное предельное определение (sequential limit definition) 435
- Феллеровская полугруппа (Feller semigroup) 471
- Фильтр (filter) 13
- *Коши* (Cauchy) 59
- кофинитных множеств (of cofinite sets) 13
- свободный (free) 13
  
- Фильтрация (filtration) — см. *Стохастическая фильтрация*
- Форма билинейная (bilinear form) 265
- — гиперконечная (hyperfinite) 265
- — замкнутая (closed) 274
- — и полугруппа (and semigroup) 267
- — S-ограниченная (S-bounded) 265
- —, возмущение (perturbation) 394
- —, гиперконечное представление стандартной формы (hyperfinite representation of standard form) 283
- —, нетривиальное возмущение (nontrivial perturbation) 288, 383
- —, область определения (domain) 266
- —, резольвента (resolvent) 275
- —, стандартная форма, индуцированная гиперконечной (standard form, induced by hyperfinite form) 283
- —, стандартная часть (standard part of) 274
- *Дирихле* (Dirichlet) 287, 292
- — локально конечная (locally finite) 341
- — нормальная (normal) 301
- — регулярная (regular) 345
- — с околостандартным носителем (nearstandardly concentrated) 331
- —, марковское свойство (Markov property of) 294
- —, порождающая квазинепрерывные продолжения (generating quasi-continuous extensions) 335
- —, разделяющая компакты (separating compacts) 328
- —, — точки (separating points) 339
- квадратичная (quadratic form) — см. *Форма билинейная*
- энергии (energy form) 348
- — гиперконечная (hyperfinite) 351

- Формула атомарная (elementary formula) 20  
 — Бёрлинга—Дени (Beurling—Deny) 293  
 — Гирсанова (Girsanov) 227  
 — Ли—Троттера (Lie—Trotter) 433  
 — представления Дынкина (Dynkin's representation formula) 559  
 — Фейнмана—Каца (Feynman—Kac) 305  
 — элементарная (elementary) 21  
 — языка  $L(\mathbf{R})$  21  
 Фридрихса продолжение (Friedrichs extension) 285  
 Фукусимы теорема о разложении (Fukushima's decomposition theorem) 301  
 — — о существовании (Fukushima's existence theorem) 345  
 Функции Уайтмана (Wightman functions) 510  
 — Швингера (Schwinger functions) 509  
 — — двухточечные (two-point) 510  
 — —  $n$ -точечные ( $n$ -point) 509, 511  
 Функция абсолютно измеримая (universally measurable function) 318  
 — волновая (wave function) 375  
 — квазинепрерывная (quasicontinuous) 334  
 — множеств регулярная (regular set function) 112  
 — неупреждающая (nonanticipating) 171, 228  
 — потерь (cost function) 210  
 — ручная (tame) 466  
 — —, база (base of) 466  
 — с компактным носителем (with compact support) 345  
 — с конечной энергией (with finite energy) 334  
 — скорости (speed function) 466  
 — спокойная (well-behaved) 181  
 —  $J$ -липшицева ( $J$ -Lipschitz) 199  
 —  $S$ -интегрируемая ( $S$ -integrable) 92, 100  
 —  $S$ -непрерывная ( $S$ -continuous) 67,  
 —  $S$ -ограниченная ( $S$ -bounded) 93  
 — \*-непрерывная (\*-continuous) 67  
 Ханта процесс (Hunt process) 326, 345  
 Характеристический функционал (generating functional) 511  
 Хаусдорфово пространство (Hausdorff space) 63  
 Цена (cost) 208, 210, 215  
 Центральная предельная теорема (central limit theorem) 103  
 Цепь (chain) 14  
 Цилиндрическое множество (cylinder set) 123  
 Число бесконечно большое (infinite number) 17  
 — — малое (infinitesimal) 16  
 — гипердействительное (hyperreal) 15  
 — конечное (finite) 18  
 Чистое состояние (pure state) 482  
 Швингера функции (Schwinger functions) 509  
 — — двухточечные (two-point) 510  
 — —  $n$ -точечные ( $n$ -point) 509, 511  
 Шредингера уравнение (Schrodinger equation) 376, 436  
 — оператор (operator) 347, 376  
 Штурма—Лиувилля задача (Sturm—Liouville problem) 366  
 — — — сингулярная (singular) 366  
 Эдвардса модель (Edwards model) 427  
 Экстремальное состояние (extremal state) 482, 498  
 Элементарная формула (elementary formula) 21  
 Энергии форма (energy form) 348  
 — — гиперконечная (hyperfinite) 351

- Энергия средняя (mean energy) 475  
 Энтропия (entropy) 475  
 Эргодическая теорема (ergodic theorem) 101  
 Эргодичность (ergodicity) 512  
 Эрмитово бозонное скалярное квантовое поле (Hermitean boson scalar quantum field) 510  
 Эффект исключенного объема (excluded volume effect) 427
- Язык ограниченный** (restricted language) 28  
**Янга—Миллса** теория (Yang—Mills theory) 534  
 Ячейка (cell) 531  
 —, грань (face of) 531  
 —, —, произведение (product of faces) 531  
 Ячейки смежные (adjacent cells) 531
- C-поднятие** (*C*-lifting) 491
- $E_1$ -фундаментальная последовательность** ( $E_1$ -Cauchy sequence) 274  
 **$\mathcal{E}$ -замкнутое множество** ( $\mathcal{E}$ -closed set) 271
- $H$ -множество** ( $H$ -set) 219  
 **$H$ -стратегия** ( $H$ -control) 219  
 **$H$ -функционал** ( $H$ -functional) 556  
 **$H$ -функция** ( $H$ -function) 486  
 **$H$ -элемент** ( $H$ -element) 218
- $J$ -липшицева функция** ( $J$ -Lipschitz function) 199
- $L^2$ -мартингал** ( $L^2$ -martingale) 172  
 — локальный (local) 172
- $n$ -точечные функции Швингера** ( $n$ -point Schwinger functions) 509, 511
- $S$ -белый шум** ( $S$ -white noise) 247  
 **$S$ -интегрируемость** ( $S$ -integrability) 92, 100  
 **$S$ -независимость** ( $S$ -independence) 103  
 **$S$ -непрерывность** ( $S$ -continuity) 67, 106  
 **$S$ -непрерывный процесс** ( $S$ -continuous process) 150, 251  
 — справа в нуле процесс ( $S$ -right continuous at zero process) 174  
 **$S$ -ограниченная билинейная форма** ( $S$ -bounded bilinear form) 265  
 — функция (function) 93  
 **$S$ -ограниченное множество** ( $S$ -bounded set) 301  
 **$S$ -ограниченный оператор** ( $S$ -bounded operator) 237  
 — вне множества  $B$  оператор ( $S$ -bounded off  $B$  operator) 382—383  
 **$S$ -плотное подпространство** ( $S$ -dense subspace) 283  
 **$S$ -предел слева** ( $S$ -left limit) 146  
 — справа ( $S$ -right limit) 145  
**SDJ-process** (SDJ-process) 181  
 **$SL^2$ -мартингал** ( $SL^2$ -martingale) 174  
 — локальный (local) 174
- $t$ -непрерывность** ( $t$ -continuity) 451
- $\delta$ -исключительное множество** ( $\delta$ -exceptional set) 310  
 **$\chi$ -насыщенность** ( $\chi$ -saturation) 62  
 **$\lambda^2$ -мартингал** ( $\lambda^2$ -martingale) 144  
 — локальный (local) 144  
 **$\mu$ -измеримая норма** ( $\mu$ -measurable norm) 126  
 **$\rho$ -плотный оператор** ( $\rho$ -dense operator) 382
- 2-поднятие** (2-lifting) 178, 241  
 **$(K, \Delta t)$ -последовательность** ( $(K, \Delta t)$ -sequence) 556  
**\*-независимость** (\*-independence) 102  
**\*-непрерывность** (\*-continuity) 67

# Оглавление

|                                                        |   |
|--------------------------------------------------------|---|
| Предисловие переводчика и редактора перевода . . . . . | 6 |
| Предисловие . . . . .                                  | 7 |
| Предисловие к русскому изданию . . . . .               | 9 |

## Часть I. Основной курс

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 1. Дифференциальное и интегральное исчисление . . . . .          | 10  |
| 1.1. Бесконечно малые . . . . .                                        | 12  |
| 1.2. Расширенный универсум . . . . .                                   | 26  |
| 1.3. Пределы, непрерывность и производная . . . . .                    | 35  |
| 1.4. Интеграл . . . . .                                                | 40  |
| 1.5. Дифференциальные уравнения . . . . .                              | 43  |
| Глава 2. Топология и линейные пространства . . . . .                   | 59  |
| 2.1. Топология и насыщение . . . . .                                   | 59  |
| 2.2. Линейные пространства и операторы . . . . .                       | 70  |
| 2.3. Спектральное разложение компактных эрмитовых операторов . . . . . | 73  |
| 2.4. Нестандартные методы в теории банаховых пространств . . . . .     | 78  |
| Глава 3. Вероятность . . . . .                                         | 82  |
| 3.1. Мера Лёба . . . . .                                               | 82  |
| 3.2. Гиперконечные вероятностные пространства . . . . .                | 86  |
| 3.3. Броуновское движение . . . . .                                    | 101 |
| 3.4. Опускание мер Лёба . . . . .                                      | 112 |
| 3.5. Применение к предельным мерам и продолжению мер . . . . .         | 121 |

## Часть II. Избранные приложения

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 4. Стохастический анализ . . . . .                                       | 131 |
| 4.1. Гиперконечный интеграл Ито . . . . .                                      | 131 |
| А. Стохастическое интегрирование . . . . .                                     | 131 |
| В. Поднятия . . . . .                                                          | 136 |
| С. Лемма Ито . . . . .                                                         | 138 |
| 4.2. Общая теория стохастического интегрирования . . . . .                     | 140 |
| А. Внутренние мартингалы . . . . .                                             | 141 |
| В. Интегрирование по мартингалам . . . . .                                     | 149 |
| 4.3. Теоремы о поднятии . . . . .                                              | 159 |
| А. Неупреждающие поднятия . . . . .                                            | 159 |
| В. Равномерные поднятия . . . . .                                              | 165 |
| 4.4. Теоремы о представлении . . . . .                                         | 172 |
| А. Квадратично $S$ -интегрируемые мартингалы . . . . .                         | 172 |
| В. Нестандартные представления стандартных стохастических интегралов . . . . . | 177 |
| С. Квадратичная вариация и лемма Ито . . . . .                                 | 180 |
| D. Дальнейшие замечания о нестандартных представлениях . . . . .               | 185 |
| E. Стандартные представления нестандартных стохастических интегралов . . . . . | 186 |
| 4.5. Стохастические дифференциальные уравнения . . . . .                       | 193 |
| А. Уравнения Ито с непрерывными коэффициентами . . . . .                       | 193 |
| В. Уравнения Ито с измеримыми коэффициентами . . . . .                         | 197 |
| С. Уравнения с коэффициентами, зависящими от прошлого . . . . .                | 206 |
| 4.6. Стохастическое оптимальное управление . . . . .                           | 208 |
| А. Оптимальное управление: марковский случай . . . . .                         | 209 |



|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| В. Формула Гирсанова . . . . .                                                              | 220        |
| С. Оптимальное управление: зависимость от прошлого . . . . .                                | 228        |
| 4.7. Стохастическое интегрирование в бесконечномерных пространствах . . . . .               | 233        |
| А. Броуновское движение в гильбертовых пространствах . . . . .                              | 234        |
| В. Бесконечномерные стохастические интегралы . . . . .                                      | 237        |
| С. Замечание о стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных . . . . .   | 243        |
| 4.8. Белый шум и броуновское движение Леви . . . . .                                        | 246        |
| А. Построение белого шума . . . . .                                                         | 247        |
| В. Стохастические интегралы и теорема непрерывности . . . . .                               | 249        |
| С. Броуновское движение Леви . . . . .                                                      | 255        |
| D. Принципы инвариантности . . . . .                                                        | 258        |
| Замечания . . . . .                                                                         | 262        |
| <b>Глава 5. Гиперконечные формы Дирихле и марковские процессы . . . . .</b>                 | <b>264</b> |
| 5.1. Гиперконечные квадратичные формы и их области определения . . . . .                    | 264        |
| А. Область определения . . . . .                                                            | 265        |
| В. Резольвента . . . . .                                                                    | 274        |
| 5.2. Связи со стандартной теорией . . . . .                                                 | 282        |
| 5.3. Гиперконечные формы Дирихле . . . . .                                                  | 289        |
| А. Гиперконечные марковские процессы и определение форм Дирихле . . . . .                   | 290        |
| В. Альтернативные описания форм Дирихле . . . . .                                           | 293        |
| С. Равновесные потенциалы . . . . .                                                         | <b>298</b> |
| D. Теорема Фукусимы о разложении . . . . .                                                  | 301        |
| E. Гиперконечная формула Фейнмана — Каца . . . . .                                          | 304        |
| 5.4. Стандартные части и марковские процессы . . . . .                                      | 308        |
| А. Исключительные множества . . . . .                                                       | 309        |
| В. Строго марковские процессы и модифицированные стандартные части . . . . .                | 318        |
| 5.5. Регулярные формы и марковские процессы . . . . .                                       | 327        |
| А. Разделение компактов . . . . .                                                           | 328        |
| В. Формы с околостандартными носителями . . . . .                                           | 331        |
| С. Квазинепрерывные продолжения . . . . .                                                   | 334        |
| D. Регулярные формы . . . . .                                                               | 339        |
| 5.6. Применения к квантовой механике и стохастическим дифференциальным уравнениям . . . . . | 346        |
| А. Гамильтонианы и формы энергии . . . . .                                                  | 346        |
| В. Стандартные и нестандартные формы энергии . . . . .                                      | 351        |
| С. Формы энергии и марковские процессы . . . . .                                            | 360        |
| <b>Глава 6. Вопросы теории дифференциальных операторов . . . . .</b>                        | <b>366</b> |
| 6.1. Сингулярная задача Штурма — Лиувилля . . . . .                                         | 366        |
| 6.2. Сингулярные возмущения неотрицательных операторов . . . . .                            | 375        |
| А. Вычисление . . . . .                                                                     | 378        |
| В. Нетривиальность . . . . .                                                                | 381        |
| С. Основной результат . . . . .                                                             | 385        |
| D. Случай стандартных $\lambda$ . . . . .                                                   | 390        |
| E. Перевод на стандартный язык . . . . .                                                    | 392        |
| 6.3. Точечные взаимодействия . . . . .                                                      | 399        |
| А. Применение общей теории . . . . .                                                        | 400        |
| В. Альтернативный подход . . . . .                                                          | 402        |
| 6.4. Возмущения функционалами локального времени . . . . .                                  | 410        |
| А. Применение общей теории . . . . .                                                        | 411        |
| В. Основная оценка . . . . .                                                                | 417        |
| С. Модели полимеров . . . . .                                                               | 424        |
| 6.5. Приложения нестандартного анализа к уравнению Больцмана . . . . .                      | 433        |
| А. Уравнение . . . . .                                                                      | 433        |

|                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| В. Физически естественные начальные условия . . . . .                                                   | 436        |
| С. Уравнение с усеченным оператором столкновений . . . . .                                              | 437        |
| D. Нестандартные средства . . . . .                                                                     | 439        |
| Е. Пространственно однородный случай. Глобальное существование решений . . . . .                        | 440        |
| F. Пространственно неоднородный случай: подход на основе мер Лёба . . . . .                             | 443        |
| Н. Асимптотическая сходимости к равновесию . . . . .                                                    | 456        |
| 6.6. Заключительное замечание о фейнмановских интегралах по траекториям и других вопросах . . . . .     | 460        |
| <b>Глава 7. Гиперконечные решетчатые модели . . . . .</b>                                               | <b>465</b> |
| 7.1. Стохастическая эволюция решетчатых систем . . . . .                                                | 465        |
| 7.2. Теория равновесия . . . . .                                                                        | 472        |
| 7.3. Глобальное марковское свойство . . . . .                                                           | 487        |
| A. Гиперконечное марковское свойство . . . . .                                                          | 488        |
| B. Поднятие и глобальное марковское свойство . . . . .                                                  | 490        |
| C. S-непрерывность, условие Добрушина и глобальное марковское свойство . . . . .                        | 495        |
| D. Максимальное и минимальное гиббсовские состояния . . . . .                                           | 498        |
| E. Случай неограниченного слоя . . . . .                                                                | 503        |
| 7.4. Гиперконечные модели в квантовой теории поля . . . . .                                             | 508        |
| A. Программа . . . . .                                                                                  | 508        |
| B. Свободные скалярные поля . . . . .                                                                   | 513        |
| C. Взаимодействующие скалярные поля . . . . .                                                           | 519        |
| D. Несколько заключительных замечаний о калибровочных полях . . . . .                                   | 530        |
| 7.5. Поля и полимеры . . . . .                                                                          | 540        |
| A. Пуассоновские поля броуновских мостов . . . . .                                                      | 540        |
| B. Квадрат свободного поля как функционал локального времени . . . . .                                  | 546        |
| C. Представления в виде локальных времен для взаимодействий, являющихся функциями от $\Phi^2$ . . . . . | 551        |
| D. $\Phi^4$ и полимерные меры . . . . .                                                                 | 559        |
| E. Поля $\Phi_1^2 \Phi_2^2$ и возмущения локальным временем . . . . .                                   | 564        |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                                             | <b>573</b> |
| <b>Приложение: обзор новых результатов . . . . .</b>                                                    | <b>593</b> |
| <b>Дополнительная литература . . . . .</b>                                                              | <b>595</b> |
| <b>Предметный указатель . . . . .</b>                                                                   | <b>598</b> |

