Г. ДЮЛАК

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ

Перевод с французского Г. И. ШИЛОВОЙ

Под редакцией Н. Ф. ОТРОКОВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE T. 51. 1923.

SUR LES CYCLES LIMITES

par

M. HENRI DULAC

22.161.6
Д 95
УДК 517.9

Дюлак Г. **О предельных циклах.**— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 160 стр.

Работа Г. Дюлака, крупнейшего французского математика, посвящена доказательству теоремы о конечности числа предельных циклов алгебраического дифференциального уравнения.

Методы исследования предельных циклов, изложенные в работе, представляют большой интерес для математиков, аспирантов и специалистов, занимающихся теорией дифференциальных уравнений и ее приложениями в теории нелинейных колебаний.

Книга доступна студентам математических специальностей университетов и педагогических институтов.

Д $\frac{20203-071}{053(02)-80}$ 39-80.1702050000

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Методы качественного исследования дифференциальных уравнений, опирающиеся на теорию предельных циклов, получили широкое распространение. Вместе с тем достаточно популярного изложения основных результатов этой теории, равно как и изложения большого круга идей, связанных с проблемами оценки числа циклов, пока, по-видимому, не существует. Предлагаемая вниманию читателя книга отчасти восполняет этот пробел. Здесь дается полный перевод работы Генри Дюлака (1870—1955) «О предельных циклах», опубликованной им в 1923 году (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 31), в которой последовательно и в доступной форме излагается доказательство теоремы о конечности числа предельных циклов у алгебраического дифференциального уравнения.

Еще Пуанкаре сформулировал свою знаменитую теорему: *предельных циклов конечное число, если только ни один из них не проходит через седло.* Многие видные математики делали безуспешные попытки показать, что ограничение в теореме Пуанкаре не нужно и что *каждое нормальное уравнение с правой частью в виде отношения двух полиномов всегда имеет конечное число предельных циклов.* С глубиной, настойчивостью и изобретательностью Г. Дюлак в результате долгих исследований блестяще доказал эту теорему. Этот результат о предельных циклах, принесший автору мировую известность, является наиболее значительным за последние пятьдесят лет.

В работе дается полная классификация особых точек, через которые могут проходить циклы, выводятся канонические формы дифференциальных уравнений для седловых областей, примыкающих к особым точкам. Рассматривается совершенно новый класс функций полурегулярных вблизи сепаратрисного цикла, в этом классе доказывается существование нормированных первых интегралов, с их помощью строится функция последования. Самостоятельный интерес большого теоретического и прикладного значения имеют изложенные в работе методы исследования особых предельных циклов (полициклов).

Следует остановиться па форме изложения. К. Вейерштрасс в своем письме к С. Ковалевской писал: «От всякой научной работы я требую единства метода, последовательного проведения определенного плана и достаточной проработки деталей». Работа Г. Дюлака не только удовлетворяет всем этим требованиям, но является примером великого служения науке, убедительно показывающим как можно невероятно сложное сделать доступным, строгим и увлекательным.

В книге исправлены незначительные опечатки и приложен список трудов Г. Дюлака — полный, насколько это было возможно.

г. Горький,
1979

Н. Ф. Отроков

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи

Действительную интегральную кривую, определяемую дифференциальным уравнением

$$X(x, y)dy + Y(x, y)dx = 0,$$

будем называть *характеристикой*. Предположим вначале, что X и Y — полиномы по переменным x и y. Замкнутую характеристику назовем *циклом*. Работы Пуанкаре и Бендиксона[1]) позволяют сформулировать следующие результаты относительно поведения интегральных кривых этого уравнения.

А. Пусть S — произвольная кривая на плоскости xy, координаты которой есть голоморфные функции параметра t. Обозначим через M_0 и M две соседние точки на S, соответствующие значениям параметров t_0 и t. Предположим, что через эти точки проходят две характеристики C_0 и C, которые, следуя в одном и том же направлении, вновь пересекут S в точках M_0' и M', отвечающих значениям параметров t_0' и t'. *Если на дуге M_0M_0' кривой S нет особых точек дифференциального уравнения и если характеристика C_0 не касается S в точке M_0', то имеет место зависимость*

$$t' = h(t),$$

где $h(t)$ — голоморфная функция в окрестности точки $t = t_0$. Функция *соответствия* между положением точек M и M' голоморфная.

---

1) Poincaré, *Journal de mathématique*, années 1881 et 1882; Bendixson, *Acta Mathématica*, t. XXIV.

В. *Если* Γ — *цикл, не проходящий через седло или сложную особую точку* (кратную точку пересечения кривых $X(x, y)=0$ и $Y(x, y)=0$), *то в окрестности* Γ *существуют две кольцеобразные области, примыкающие к* Γ: *внешняя* E *и внутренняя* I *такие, что в каждой из них возможен один из следующих двух случаев.*

1) *ни одна из характеристик, проходящих внутри области, не является циклом;*

2) *все характеристики, проходящие внутри области,— циклы.*

Случай, который будет иметь место в области E, одновременно будет иметь место и в области I. Если выполняется случай 1), то кривую назовем *предельным циклом.*

С. *Если не существует циклов, проходящих через седло или сложную особую точку, то предельных циклов конечное число.*

В случае, когда характеристика C оканчивается в узле или в сложной особой точке и соседние с ней характеристики также оканчиваются в этой точке, характеристику C нельзя продолжить через особую точку. Если же характеристики, близкие к C, не оканчиваются в особой точке, то характеристика C имеет одно или два продолжения, как это, например, имеет место в случае седла. Через C_0 обозначим совокупность C и одного из ее продолжений.

Исследование характеристик, проходящих в окрестности седла или сложной особой точки, позволяет следующим образом обобщить результаты, сформулированные в пунктах А, В и С.

А$'$. *Если дуга* M_0M_0' *кривой* C_0 *проходит через одно седло, то функция соответствия между точками* M *и* M', *указанная в утверждении* А, *изменится и примет вид*

$$t' - t_0' = t^{\lambda} f(t),$$

где λ — *положительное число, получаемое непосредственно из дифференциального уравнения, функция* $f(t)$ *определена в окрестности* $t=0$ *и не обращается в нуль при* $t=0$.

Если λ — число иррациональное, то $f(t)$ представляется в виде ряда, члены которого есть конечные суммы произведений целых положительных степеней величины t^λ и функций переменного t, голоморфных в точке $t=0$. Функция $f(t)$ в общем случае не может быть представлена в виде ряда по степеням t и t^λ, но она обладает следующим свойством, которое будет использоваться в доказательствах. Каково бы ни было положительное число σ, функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t)=P_\sigma(t,\ t^\lambda)+t^\sigma R_\sigma(t),$$

где P_σ — полином по степеням t и t^λ, R_σ стремится к нулю вместе с t.

Если λ — рациональное, или на дуге M_0M_0' лежит более одного седла, или, наконец, на ней расположены сложные особые точки, то функция $f(t)$ имеет другую структуру, но свойство, аналогичное указанному, имеет место.

B$'$. Пусть Γ_0 — цикл, проходящий через одну или бо́льшее число особых точек. В неособой точке M_0 на Γ_0 проведем нормаль к этому циклу. *На нормали, по разные стороны от точки M_0, можно найти две точки M_1 и M_2 такие, что на каждом сегменте M_0M_1 и M_0M_2 будет иметь место один из следующих двух случаев*:

1) *никакая характеристика, пересекающая сегмент, не является циклом*;

2) *все характеристики, пересекающие сегмент,— циклы*. Может оказаться, что на одном сегменте имеет место один из указанных случаев, а на другом — второй.

C$'$. *Предельных циклов конечное число.*

Доказательства этих теорем проводятся при единственном предположении, что все рассматриваемые характеристики расположены в области, где функции X и Y голоморфны.

Во введении, после напоминания результатов, которые считаются известными, будет доказано ряд лемм, используемых в дальнейшем.

В первой части устанавливается форма общего интеграла дифференциального уравнения, справедливая в действительной области в окрестности седла. Этот интеграл применяется при изучении *функции соответствия*, которая связывает точки пересечения M и M' двух дуг S и S' с характеристикой C, близкой к характеристике C_0', проходящей через одно седло.

Доказывается теорема В′ для цикла Γ_0, проходящего через одно или несколько седел.

Во второй части рассматриваются исключительные особые точки, в окрестности которых дифференциальное уравнение (при надлежащем выборе осей координат) может быть записано в виде

$$[x + X_2(x, y)]dy + Y_2(x, y)dx = 0,$$

где X_2 и Y_2 — ряды по x и y, начинающиеся с многочленов второго порядка. Будет показано, что проблема построения функции соответствия в случае исключительных особых точек полностью сводится к задаче с простыми седлами.

В третьей части рассматриваются особые точки совершенно произвольного типа и с помощью предыдущих результатов изучается функция соответствия, которая связывает точки пересечения двух дуг S и S' с характеристикой C, близкой к характеристике C_0, проходящей через одну исключительную особую точку. Доказывается теорема B' для цикла, проходящего через любое число особых точек.

В четвертой части, прежде чем доказать, что предельных циклов конечное число, будет рассмотрен случай особой точки типа *«центр»*, в которой ни одна характеристика не может оканчиваться с определенной касательной. Доказывается, что в окрестности такой точки либо все характеристики — спирали, либо все — циклы, окружающие особую точку. В более частном случае, когда X и Y — полиномы, показывается, каким образом функция соответствия может быть распространена на характеристики с бесконечными ветвями.

В последующих работах и при других условиях будут развиваться полученные результаты о поведении характеристик, а также о числе и приближенном расположении предельных циклов.

§ 2. Функция соответствия в окрестности дуги характеристики, не проходящей через особые точки

Рассмотрим дифференциальное уравнение и запишем его в виде

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} = dz, \tag{1}$$

где X и Y — голоморфные функции x и y в окрестности дуги M_0M_0' уже рассмотренной характеристики C_0. Пусть S и S' — две дуги кривых, проходящих соответственно через M_0 и M_0'. Сделаем следующие предположения:

1) в окрестности точки M_0 с координатами x_0, y_0 координаты любой точки M и дуги S — голоморфные функции параметра t, который предположим равным нулю в точке M_0;

2) в окрестности точки M_0' с координатами x_0', y_0' координаты точки M' дуги S' — голоморфные функции параметра t', который предполагается равным нулю в самой точке M_0';

3) характеристика C_0 уравнения (1) не касается в точке M_0' дуги S';

4) на дуге M_0M_0' кривой C_0 нет особых точек уравнения (1).

Покажем, что *если рассматривать характеристику C, проходящую через точку M дуги S, отвечающую значению параметра t и близкую к точке M_0, то эта характеристика встретит дугу S' в точке M' с параметром t', связанным с t соотношением*

$$t' = h(t), \quad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k, \tag{2}$$

где $h(t)$ — голоморфная функция t, равная нулю при $t = 0$.

При перемещении по характеристике C_0 от точки M_0 к точке M_0' параметр z, входящий в (1), изменяется в конечных пределах от z_0 до z_0', поскольку на дуге M_0M_0' нет особых точек уравнения (1). Можно предполагать, что $z_0' = 0$. Если рассмотреть характеристику C, проходящую при $z = z_0$ через точку M, лежащую на S в окрестности M_0, имеющую координаты x_1 и y_1, и взять переменное t за параметр, то координаты точки x и y этой характеристики на основании теоремы Пуанкаре выразятся голоморфными функциями параметров z и t в окрестности $t = 0$, $z_0 = z = 0$. Действительно, x и y — голоморфные функции x_1, y_1 для x_1 в окрестности x_0 и y_1 в окрестности y_0. Следовательно, они голоморфные функции t. Они будут и *голоморфными функциями z в силу* *уравнения* (1). Поэтому имеем

$$x = x_0' + az + \alpha t + \ldots, \quad y = y_0' + bz + \beta t + \ldots, \qquad (3)$$

где выписаны только члены наинизшей степени по z и t.

Координаты точки M' дуги S' выражаются в окрестности M_0' в виде

$$x = x_0' + a't' + \ldots, \quad y = y_0' + b't' + \ldots, \qquad (4)$$

где выписаны только члены младшей степени, а коэффициенты a', b', a, b, α, β — постоянные. Для точки пересечения характеристики C с дугой S' будем иметь

$$az + \alpha t + \ldots = a't' + \ldots,$$

$$bz + \beta t + \ldots = b't' + \ldots$$

Определитель $ab' - ba'$ отличен от нуля, так как характеристика C_0, получающаяся из C при $t = 0$, не касается S' в точке M_0'. Поэтому на основании теоремы о существовании системы неявных функций в окрестности точки $t = z = t' = 0$ эту систему можно разрешить относительно z и t', выразив их как голоморфные функции переменного t, обращающиеся в нуль при $t = 0$. Таким образом, характеристика C, проходящая через точку M, близкую к M_0, пересекается с дугой S' в точке M', отвечающей параметру t', который выражается в форме (2).

Замечание 1. Неявно предполагалось, что производные от x и y по t для точек дуги S' не обращаются одновременно в нуль при $t' = 0$. Это всегда возможно, если M_0' — обыкновенная точка дуги S'.

Замечание 2. Если M_0 есть обыкновенная точка дуги S и если характеристика C_0 не касается в M_0 с S, то параметр t, соответствующий точке M, можно рассматривать как функцию t', голоморфную при $t' = 0$. Это следует из того, что постоянная c_1 в (2) отлична от нуля.

Когда условия, сформулированные выше, будут выполнены, будем говорить, что имеется голоморфное соответствие между точками M и M', в которых характеристика C встречает соответственно кривые S и S'.

В работе будет дано обобщение функции соответствия, найденной Пуанкаре (1881 г.) для двух последовательных точек пересечения характеристики с одной и той же кривой S.

Функция соответствия позволяет легко доказать теоремы В и С. Для обобщения этих теорем вначале будет изучена функция соответствия в случае, когда на дуге M_0M_0' кривой C_0 есть особые точки. Для этого прежде всего необходимо уточнить различные типы особых точек, способы продолжения характеристики через особую точку, а также возможные типы особых циклов. Все эти вопросы на основании работ Пуанкаре и Бендиксона будут изложены в третьем параграфе. Следует только заметить, что при изложении известных результатов они группируются так, как это представляется наиболее целесообразным. Для удобства формулировок вводятся некоторые новые понятия.

§ 3. Сепаратрисы

Всякий раз, когда речь пойдет *о дуге характеристики, оканчивающейся в точке* P, будем подразумевать дугу, ограниченную точкой P. Характеристика, продолжаемая через особую точку, будет состоять из двух дуг, оканчивающихся в точке P.

Пусть C — характеристика, оканчивающаяся в особой точке P с определенной касательной. Проведем нормаль в точке M к кривой C и будем рассматривать характеристики, близкие к C, идущие в том же направлении от M к P, что и характеристика C. Очевидно, что на этой нормали можно найти две точки M_1 и M_2, лежащие по разные стороны от C, такие, что будет иметь место один из следующих трех случаев:

1) все характеристики, пересекающие M_1M_2, оканчиваются в P;

2) ни одна из характеристик, отличная от C и пересекающая M_1M_2, не оканчивается в P;

3) характеристики, пересекающие один из сегментов MM_2 или MM_1, оканчиваются в P, а характеристики, пересекающие другой из этих сегментов, не оканчиваются в P.

В первом случае будем говорить, что C лежит внутри *узловой области* точки P.

Во втором и третьем случаях будем говорить, что C есть *сепаратриса особой точки* P[1]). Другими словами можно говорить, что C есть сепаратриса, примыкающая к точке P, если по крайней мере с одной ее стороны не существует характеристик, близких к C и примыкающих к P.

Рассмотрим круг с центром в точке P настолько малого радиуса, чтобы внутри его не было никакой другой особой точки, отличной от P. Возьмем точку M на пересечении характеристики C и границы этого круга. Предположим, что точка M_1 находится справа от наблюдателя, помещенного в точку M и обращенного лицом в направлении, по которому можно достичь точки P, перемещаясь по C. Если характеристики, пересекающие MM_1, не оканчиваются в P, то будем говорить, что характеристики, расположенные справа от C, не оканчиваются в P. В этом случае существует характеристика C', оканчивающаяся в P и такая, что внутри сектора, расположенного справа от C, ограниченного характеристиками C и C', не существует никакой характеристики, оканчивающейся в P. Если через точку этого сектора провести характеристику Г, то она при продолжении в обе стороны выйдет из сектора. Такой сектор мы назовем *сектором* или *областью отталкивания* особой точки P. Характеристики, расположенные в секторе отталкивания, по своему виду напоминают ветви гиперболы, для которой роль асимптот играют характеристики C и C'. Естественно рассматривать C' как *правое продолжение* C через точку P. Если характеристики, пересекающие MM_2, не оканчиваются в P, то существует характеристика C'', оканчивающаяся в P и являющаяся *левым продолжением* характеристики C через точку P. Характеристики C и C'' ограничивают область отталкивания особой точки P. Кривые C' и C'' различны, за исключением случая, о котором будем говорить позднее в § 5, когда особая точка — *полуособая*.

Если характеристика C не сепаратриса, то она входит в область, в которой все характеристики оканчи-

[1]) Сепаратрису можно рассматривать как «характеристику, надлежащим образом продолженную через P», как это делалось раньше Бендиксоном (стр. 25) при условии голоморфности X и Y в окрестности точки P. Здесь, как и в дальнейшем, имеется в виду работа Бендиксона, упомянутая на стр. 5. (*Прим. ред.*)

ваются в P, т. е. в *узловую область*, или *область притяжения*. Очевидно, что такая характеристика не продолжаема через P. Чтобы продолжение было определенным, необходимо особое соглашение.

Замечание 1. Соглашение продолжать сепаратрису через точку P направо означает, что все характеристики, близкие к C справа, расположены в окрестности продолженной характеристики C'. Следовательно, если C' есть правое продолжение C и не оканчивается в новой особой точке P', то далее должно рассматриваться правое продолжение C' через точку P'. В случае, когда начальное продолжение C — правое, все последующие продолжения должны быть правыми. Если характеристики, близкие к C и расположенные справа, после прохождения в окрестности различных особых точек оканчиваются в точке P', то должны оканчиваться в точке P' и продолжения C. Отсюда следует, что характеристика C не может иметь более двух продолжений, каково бы ни было число пересекаемых особых точек.

Замечание 2. Каждая сепаратриса ограничивает две области, в которых, в общем случае, характеристики имеют различное поведение. Характеристики, близкие к сепаратрисе C и расположенные по разные ее стороны, при продолжении не остаются близкими.

§ 4. Циклы

Термин *цикл* в дальнейшем сохраним для замкнутой характеристики, не проходящей через особую точку. *Предельный цикл* — это цикл C, обладающий тем свойством, что все характеристики, близкие к нему, представляют собой спирали, неограниченно приближающиеся к C в соответствующем направлении движения. Известно, что если характеристики, близкие к C и расположенные по одну сторону от C, есть спирали, неограниченно приближающиеся к C, то тем же свойством обладают и характеристики, лежащие по другую сторону.

Если характеристики, близкие к C, не спирали, то они все — циклы, и в этом случае C будем называть *обыкновенным циклом*.

Если существует замкнутая кривая C, составленная из дуг сепаратрис, продолженных через особые точки, и если хотя бы в одной из областей, ограниченных C, не содержится характеристик, оканчивающихся в особых точках, расположенных на C, тогда C назовем *особым циклом.*

Особый цикл составлен из сепаратрис и их продолжений — или только правых, или только левых. Особый цикл может проходить и через одну особую точку.

Другие замкнутые кривые, составленные из характеристик, рассматриваться не будут.

§ 5. Типы особых точек

Особые точки можно классифицировать двумя различными способами в зависимости от того, рассматривается ли расположение характеристик в окрестности особой точки или изучается форма уравнения вблизи такой точки.

Эти две точки зрения различны; уравнения разной формы могут иметь одинаковые расположения характеристик в окрестности особой точки. Первая точка зрения необходима при решении вопросов, связанных с понятием непрерывности характеристик. Вторая точка зрения будет необходима при исследовании функции соответствия, когда характеристика проходит в окрестности особой точки и в ней не оканчивается.

В этом параграфе исследуются особые точки в связи с расположением характеристик. Любая характеристика, которая оканчивается в особой точке или оканчивается в этой точке с определенной касательной, или спиралью, накручивается на P и неограниченно к ней приближается. Каждый из этих двух случаев, имеющий место для одной характеристики, будет иметь место и для всех характеристик, оканчивающихся в P. В соответствии с этим будем различать следующие случаи:

1. Ни одна из характеристик не оканчивается в P. *Точка будет центр*[1]).

2. Характеристики оканчиваются в P, но ни одна из них не оканчивается с определенной касательной. Особая точка — *фокус*. В этом случае, если точку при-

---

[1]) Бендиксон и Пуанкаре дают другие определения центра. В § 36 будет доказано, что в случае, когда X и Y — голоморфные функции в окрестности P, все три определения эквивалентны между собой.

нять за центр круга достаточно малого радиуса, то все характеристики, входящие внутрь этого круга, спиралями приближаются к P (§ 52). К точке P не будет примыкать ни одна сепаратриса.

3. Дуги характеристик, оканчивающиеся в P с определенной касательной, будут сепаратрисами. Особая точка — *седло*. Число характеристик, оканчивающихся в седле, всегда конечное и четное. Каждая из них имеет два продолжения. Область, ограниченная двумя соседними характеристиками, оканчивающимися в P, есть область отталкивания.

4. Характеристики оканчиваются в P с определенной касательной, но ни одна из них не будет *сепаратрисой*. Особая точка — *узел*. Приняв P за центр круга, можно выбрать его радиус настолько малым, чтобы каждая характеристика, входящая в этот круг извне, приближалась к P с определенной касательной.

5. Дуги характеристик оканчиваются в P с определенной касательной, и некоторые из них, но не все — сепаратрисы. Такую особую точку назовем *смешанной*. Существует конечное число сепаратрис, оканчивающихся в P, каждая из которых имеет одно или два продолжения. Построим круг с центром в точке P, не содержащий внутри особых точек, отличных от P. Можно показать, что при достаточно малом радиусе круга, каждая сепаратриса пересекает круг только в одной точке. Две сепаратрисы назовем *соседними*, если их точки пересечения с границей круга, обозначенные соответственно N и N_1, определяют дугу, которую не пересекает ни какая другая сепаратриса, примыкающая к P. Две соседние характеристики, из которых одна есть продолжение другой, ограничивают сектор отталкивания. Две сепаратрисы, не продолжающие одна другую, ограничивают сектор *притяжения*, или *узловой* сектор.

Простейший пример смешанной особой точки дает уравнение

$$x^2 dy + y\,dx = 0,$$

общий интеграл которого запишется в виде $y = ce^{1/x}$. Область $x < 0$ — узловая. Две области полуплоскости $x > 0$, ограниченные прямыми $x = 0$ и $y = 0$, есть области отталкивания. Положительная часть оси Ox — сепаратриса, имеющая продолжениями две полуоси

Oy. Седло и смешанную особую точку можно объединить в один тип особых точек, имеющих область отталкивания.

Замечание 1. Из сказанного выше следует, что для обобщения функции соответствия на характеристики, близкие к характеристике C_0, проходящей через особые точки, следует рассматривать только такие C_0, которые проходят через точки, имеющие области отталкивания.

При обобщении теоремы В будем рассматривать только *особые циклы.*

Замечание 2. Среди особых точек необходимо отметить такие, в которых оканчиваются только две характеристики. Эти дуги, имеющие в особой точке общую касательную, дают такое же расположение кривых, как дуги характеристики, оканчивающиеся в обыкновенной точке. Ввиду этого такую точку будем называть *полуособой* [1]).

Две характеристики, оканчивающиеся в полуособой точке, которую можно предполагать совпадающей с началом координат, изображаются функцией $y = f(x)$, имеющей при $x = 0$ точку регулярности, алгебраическую точку или точку другой более сложной природы. Нетрудно привести примеры таких точек. Дифференциальное уравнение

$$[y^2 + x^2(x^2 + y^2)]dy + xy[1 - x^2 - y^2]dx = 0$$

в полярных координатах имеет общий интеграл

$$\rho^2 \ln \sin^2 \theta + c\rho^2 = 1.$$

Две характеристики, проходящие через полуособую точку $x = 0$, $y = 0$, это две полуоси $y = 0$.

Для уравнения

$$2y\,dy - 3x^2dx = 0,$$

имеющего общий интеграл $y^2 - x^3 = c$, две дуги характеристики, оканчивающиеся в $x = 0$, $y = 0$, задаются уравнением $y^2 = x^3$.

[1]) Бендиксон (стр. 28) по этому поводу замечает, что такую точку можно уподобить обыкновенной точке. Можно показать, что с точки зрения функции соответствия они играют роль, аналогичную точкам регулярности.

Для уравнения

$$[(x^2+y^2)^2+2x^2y+2y^2+2y^3]dy+$$
$$+2x[y+x^2+y^2]dx=0 \qquad (5)$$

только две дуги характеристики оканчиваются в начале координат, каждая из них касается ветви параболы $y+x^2=0$, и они не могут быть представлены функцией, голоморфной или алгебраической при $x=0$. Действительно, уравнение (5) заменой переменного

$$u=x^2+y^2$$

приводится к виду

$$u^2dy+(y+u)du=0.$$

Через точку $u=0$, $y=0$ у этого уравнения проходят характеристики $u=0$ и $y=\varphi(u)$, причем функция $\varphi(u)$ при $u=0$ не будет ни голоморфной, ни алгебраической.

§ 6. Форма дифференциального уравнения в окрестности особой точки

Исследуем форму дифференциального уравнения в окрестности особой точки. Предположим, что особая точка лежит в начале координат и рассмотрим дифференциальное уравнение (1) в окрестности $P(x=0, y=0)$.

1. Если P — простая точка пересечения кривых

$$X(x, y)=0, \quad Y(x, y)=0, \qquad (6)$$

т. е. если эти кривые не касаются между собой в начале координат, то точку P будем называть простой *обыкновенной особой* точкой. Оставив в стороне случай центра или фокуса, при надлежащем выборе осей координат уравнение (1) можно записать в виде

$$[x+X_2(x, y)]dy+[\lambda y+\alpha x+Y_2(x, y)]dx=0, \qquad (7)$$

где X_2 и Y_2 — полиномы или ряды, не имеющие линейных членов, λ и α — постоянные, причем $\lambda\neq 0$. В зависимости от знака λ особая точка — *седло* или *узел*.

2. Если P — кратная точка одной из кривых (6) или если эти кривые касаются в P, то особую точку назовем *кратной*.

Среди кратных особых точек будет рассмотрен один частный случай, когда заменой переменных уравнение (1) преобразуется к виду

$$X_2(x, y)dy + [y + Y_2(x, y)]dx = 0, \tag{8}$$

где X_2, Y_2 — полиномы или ряды по x и y, начинающиеся с членов не ниже второй степени.

Особую точку в этом случае будем называть *исключительной*.

Можно построить ряды $Q_2(x, y)$ и $R_2(x, y)$, содержащие лишь члены не ниже второй степени, такие, что заменой переменных

$$u = x + Q_2(x, y), \quad v = y + R_2(x, y)$$

уравнения (7) и (8) приводятся к виду

$$u^{n+1}dv + [\lambda v + \alpha u + U_2(u, v)]du = 0, \tag{9}$$

который называется *канонической* формой. Если $n = 0$, то из (9) получаем случай простой особой точки типа седла или узла. Если $n \neq 0$, то получим исключительную особую точку, которая будет седлом, узлом или точкой смешанного типа в зависимости от знака λ и четности числа n.

Особую точку назовем *элементарной*, если заменой переменных уравнение в окрестности этой точки можно привести к виду (7) или (8). Неэлементарную особую точку будем называть *сложной*. Это различие между элементарными и сложными точками используется при установлении различия между простыми и кратными точками.

§ 7. Функциональные мажоранты

В дальнейшем встретимся с несколькими приемами представления функций $f(x, y)$ рядами, удовлетворяющими некоторым условиям. Чтобы выделить эти условия, будем употреблять, за недостатком лучшего выражения, следующее.

Определение. Пусть даны положительное число λ и функция $f(x, y)$; будем говорить, что эта функция удовлетворяет условию $\lambda - F > 0$, если она подчиняется требованиям:

1) функцию $f(x, y)$ можно представить в виде ряда по y

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) y^k$$

с коэффициентами $f_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, непрерывными по x в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$;

2) существуют положительные числа F_k такие, что для $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполняются неравенства

$$|f_k(x)| \leqslant F_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

3) ряд $F(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k y^k$ сходится в точке $y = 1$;

4) имеет место неравенство $\lambda - F(1) > 0$.

При этих предположениях ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x) y^k$ абсолютно сходится для всех $|y| \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Постоянные F_k — мажоранты для коэффициентов $f_k(x)$. Функция $F(y)$ — мажоранта для $f(x, y)$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Наконец, для этих значений x и y будет иметь место неравенство

$$\lambda - f(x, y) > 0.$$

Пусть $g(x, y)$ — произвольная голоморфная функция в окрестности начала координат и равная нулю при $x = 0$, $y = 0$; проделав замену переменных $x = ax_1$, $y = by_1$, где a и b — постоянные, получим новую функцию

$$g(ax_1, by_1) = f(x_1, y_1).$$

Покажем, что коэффициенты a и b можно выбрать так, чтобы функция $f(x_1, y_1)$ удовлетворяла условию $\lambda - F > 0$. Поскольку $g(x, y)$ — голоморфная функция в окрестности $x = 0$, $y = 0$, найдутся такие числа ξ и η, что $g(x, y)$ представляется рядом, абсолютно сходящимся в точке $x = \xi$, $y = \eta$. Сделав замену переменных $x = \xi u$, $y = \eta v$, получим

$$g(\xi u, \eta v) = \gamma(u, v).$$

Ряд $\gamma(u, v)$ абсолютно сходится при $u = 1$, $v = 1$, и его можно представить в виде

$$\gamma(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(u) v^k.$$

Пусть $\Gamma(u, v)$ — ряд, который получается из $\gamma(u, v)$ заменой коэффициентов при u и v их абсолютными значениями; тогда

$$\Gamma(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k(u) v^k.$$

Для всех $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ и для любого n имеют место неравенства

$$|\gamma_n(u)| \leqslant \Gamma_n(u) \leqslant \Gamma_n(1); \quad |\gamma(u, v)| \leqslant \Gamma(u, v).$$

Функция $\Gamma(u, v)$ равна нулю при $u = 0$, $v = 0$, поэтому ее можно представить в виде

$$\Gamma(u, v) = uA(u) + vB(u, v),$$

где

$$uA(u) = \Gamma_0(u); \quad B(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(u) v^{k-1}.$$

Обозначим через $\lambda/(2r)$ наибольшее из чисел $A(1)$ и $B(1, 1)$. Можно предполагать, что $r < 1$. Очевидно, что

$$\lambda - \Gamma(r, r) > 0. \tag{10}$$

В функции $\gamma(u, v)$ сделаем замену переменных $u = rx_1$, $v = ry_1$; получим

$$g(x, y) = \gamma(u, v) = \gamma(rx_1, ry_1) = f(x_1, y_1).$$

Покажем, что $f(x_1, y_1)$ удовлетворяет всем условиям $\lambda - F > 0$. Действительно:

1. $f(x_1, y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(rx_1) r^k y_1^k.$

Обозначив $f_k(x_1) = r^k \gamma_k(rx_1)$, получим

$$f(x_1, y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_1) y_1^k,$$

где $f_k(x_1)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$.

2. $|f_k(x_1)| = |r^k \gamma_k(rx_1)| \leqslant r^k \Gamma_k(r)$.

Следовательно, если положить $F_k = r^k \Gamma_k(r)$, то $|f_k(x_1)| < F_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Обозначим

$$F(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k y_1^k; \quad F(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k(r) r^k y_1^k.$$

Этот ряд сходится при $y_k = 1$, поскольку

$$F(1) = \Gamma(r, r).$$

4. Из равенства $F(1) = \Gamma(r, r)$ и (10) заключаем, что

$$\lambda - F(1) > 0.$$

Замечание 1. Если функция

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) y^k$$

голоморфна при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, то за числа F_k можно взять сумму абсолютных значений членов ряда $f_k(1)$. В этом случае для функции $f(x, y)$ будет выполнено не только условие $\lambda - F > 0$, но она обладает еще и свойствами:

1) для любого n и для всех $|x| \leqslant 1$

$$\lambda - f_n(x) > 0;$$

2) $[\lambda - f_n(x)]^{-1}$ и $[\lambda - f(x, y)]^{-1}$ — голоморфные функции x и y при $|x| < 1$, $|y| < 1$;

3) если $f(x, y)$ представить рядом по x

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) x^k,$$

то для каждого n при $|y| \leqslant 1$ имеем

$$\lambda - \varphi_n(y) > 0.$$

Замечание 2. Аналогично, если дано положительное число λ и ряд $f(x)$ абсолютно сходится при $x = 1$, то будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\lambda - F > 0$, если сумма абсолютных значений членов ряда $f(1)$ меньше λ.

Замечание 3. В соответствии с введенным понятием будем говорить, что $F(x)$ есть мажоранта для $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$, если $F(x)$ положительна и $F(x) \geqslant |f(x)|$ для всех x из указанного отрезка. В дальнейшем, когда положительную или отрицательную функцию $f(x)$ заменим на положительную или отрицательную функцию $F(x)$ такую, что $F(x) \geqslant f(x)$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, то будем говорить, что увеличиваем функцию $f(x)$.

§ 8. Лемма 1

Дифференциальное уравнение

$$x[\lambda - xg(x)]\frac{dy}{dx} - (r+\lambda)y = x^{s+1}h(x), \qquad (11)$$

где λ и r — произвольные положительные постоянные; s — целое; $g(x)$ и $h(x)$ — функции регулярные в окрестности точки $x=0$, разлагающиеся в ряды с положительными коэффициентами, сходящиеся при $x=1$, имеет решение, представимое в виде ряда

$$y = \sum_{k=s+1}^{\infty} a_k x^k$$

с положительными коэффициентами, сходящегося при $x=1$, если

$$\lambda - g(1) > 0,$$

$$s\lambda - r > 0.$$

Рассмотрим уравнение без правой части; получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{(r+\lambda)\,dx}{x[\lambda - xg(x)]} = \frac{(r+\lambda)xd}{\lambda x} + u'(x)\,dx.$$

$u'(x)$ представляется в виде степенного ряда, сходящегося в силу предположений относительно $g(x)$ при $x=1$. Следовательно, общее решение уравнения (11) запишется в форме

$$y = cx^{1+\frac{r}{\lambda}}e^{u(x)} + x^{1+\frac{r}{\lambda}}e^{u(x)}\int x^{s-1-\frac{r}{\lambda}}e^{-u(x)}h(x)\frac{dx}{\lambda - xg(x)},$$

где подынтегральное выражение имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s-1+k-r/\lambda};$$

проинтегрировав его, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda c_k}{s\lambda + k\lambda - r}x^{s+k-r/\lambda}.$$

В силу предположений леммы ни один из знаменателей коэффициентов этого ряда не может быть равен нулю, и ряд сходится при $x=1$. Положив в общем решении уравнения (11) $c=0$, получим частное решение

$$y = \lambda e^{u} x^{s+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^k}{s\lambda + k\lambda - r},$$

также сходящееся при $x = 1$. В случае, когда r/λ равняется целому числу q, все решения уравнения (11) будут регулярными, но этот случай неинтересен, так как разложение будет начинаться с члена степени $q+1$ меньшей, чем $s+1$. Докажем, что в выделенном частном решении все коэффициенты положительны; для этого напишем разложения

$$y = \sum_{k=s+1}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x^{k-1},$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^{k-1}$$

и будем непосредственно вычислять коэффициенты a_k с помощью уравнения (11). Подставив выписанные ряды в уравнение (11) и приравняв в обеих частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях x получим

$$[k\lambda - r - \lambda] a_k = (k-1) a_{k-1} g_2 + \ldots$$

$$\ldots + (k-s-1) a_{s+1} g_{k-s-1} + h_{k-s},$$

$$k = s+1, \ s+2, \ldots$$

Так как k принимает значения, начиная с $s+1$, то коэффициент $k\lambda - r - \lambda$ всегда больше или равен величине $s\lambda - r$, которая по условию леммы положительна. Из написанных уравнений видно, что все величины a_k $(k = s+1, \ s+2, \ \ldots)$ положительны.

Замечание. Первая часть рассуждений, проведенных в доказательстве леммы 1, распространяется и на уравнение

$$x[1 - xg(x)] \frac{dy}{dx} - [\nu + xf(x)] y = h(x),$$

где $f(x)$ и $h(x)$ — ряды с произвольными коэффициентами, сходящиеся при $x=1$. Если $g(x)$ удовлетворяет условию $1-G>0$ (см. § 7, замечание 2), то рассматриваемое уравнение имеет частное решение, представимое в виде ряда, сходящегося при $x=1$.

Обозначим

$$\frac{\nu + xf(x)}{x[1 - xg(x)]} = \frac{\nu}{x} + u'(x).$$

Очевидно, что ряд $u'(x)$ сходится при $x=1$. Тогда общее решение уравнения запишется в виде

$$y = cx^{\nu}e^{u(x)} + x^{\nu}e^{u(x)}\int \frac{h(x)\,e^{-u(x)}\,dx}{x^{\nu+1}[1 - xg(x)]}.$$

Подынтегральное выражение можно записать как дробь

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k}{x^{\nu+1}}.$$

Легко видеть, что если ν не равно целому положительному числу, то общее решение $y(x)$ разлагается в ряд, сходящийся при $x=1$. Если же ν — целое число, то следует различать два случая:

1) $c_\nu \neq 0$ — никакое решение не будет регулярным вследствие того, что при интегрировании в $y(x)$ войдет выражение

$$x^{\nu}e^{u(x)}\ln x;$$

2) $c_\nu = 0$ — все решения регулярны и сходятся при $x=1$.

§ 9. Лемма 2

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{n+1}\frac{dy}{dx} + g(x)\,y + f(x) = 0, \tag{12}$$

где n — целое положительное или нуль, функции $g(x)$ и $f(x)$ непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Это уравнение имеет единственное непрерывное на интервале $0 < x < 1$ решение $y(x)$ такое, что $y(1) = 0$. Исследуем его.

Покажем, что справедливы следующие свойства:

1) *решение* $y(x)$ *положительно на интервале* $(0, 1)$, *если функция* $f(x)$ *положительна на этом интервале.*

Действительно, положим

$$u(x) = \int_x^1 \frac{g(x)\, dx}{x^{n+1}},$$

тогда

$$y(x) = e^{u(x)} \int_x^1 \frac{f(x)\, e^{-u(x)}}{x^{n+1}}\, dx;$$

2) *если при фиксированной функции* $f(x)$ *увеличить* $g(x)$, *заменив ее на* $G(x)$, *удовлетворяющую неравенству* $G(x) > g(x)$, *то решение нового уравнения* Y *обращается в нуль при* $x = 1$, *удовлетворяет неравенству* $Y(x) - y(x) > 0$ *в интервале* $0 < x < 1$. Действительно, Y удовлетворяет уравнению

$$x^{n+1} \frac{dY}{dx} + G(x)\, Y + f(x) = 0. \tag{13}$$

Вычитая почленно (12) из (13), получим

$$x^{n+1} \frac{d(Y - y)}{dx} + G(x)\, Y - g(x)\, y = 0,$$

или

$$x^{n+1} \frac{d(Y - y)}{dx} + G(x)(Y - y) + [G(x) - g(x)]\, y = 0.$$

$Y = y$ обращается в нуль при $x = 1$, $[G(x) - g(x)]\, y > 0$, поэтому в силу 1)

$$Y - y > 0$$

при

$$0 < x < 1;$$

3) *если увеличивать функцию* $f(x)$, *оставив неизменной* $g(x)$, *то решение* $y(x)$ *увеличится.* Это непосредственно следует из выражения для решения $y(x)$;

4) *если* $\varphi(x)$ *есть решение уравнения* (12) *такое, что* $\varphi(1) = b > 0$, *то для всех* $0 < x < 1$ *должно быть выполнено неравенство* $\varphi(x) > y(x)$. Это непосредственно следует из выражения для решения

$$\varphi(x) = y(x) + b e^{u(x)};$$

5) в силу сказанного выше приходим к заключению, что если в интервале $(0, 1)$ увеличить функции $g(x)$ и $f(x)$, увеличив при этом начальное значение $y(1)$, положив его равным $b > 0$, то в интервале $0 < x < 1$ увеличивается и решение $y(x)$.

§ 10. Полурегулярные функции

В дальнейшем неоднократно будут встречаться функции $f(x)$, которые при любом целом σ могут быть представлены в виде

$$f(x) = P_\sigma(x) + x^\sigma R_\sigma(x),$$

где R_σ стремятся к нулю так же как x, P_σ — сумма конечного числа членов. Такие функции $f(x)$ будем называть *полурегулярными* в точке $x = 0$.

В каждом отдельном случае уточняется структура членов, входящих в конечные суммы P_σ. Иногда это будут степенные ряды по x, в других случаях — ряды по x, содержащие такие выражения, как $x^{\lambda_i} \ln x$ и x^{λ_i}, где $\lambda_i > 0$, i принимает некоторое множество значений.

В дальнейшем P_σ строится как такая сумма, любое слагаемое которой $P(x)$, поделенное на x^σ, при $x \to 0$ либо неограниченно возрастает, либо стремится к конечному пределу. Однако это лишь свойство членов суммы P_σ, его не следует рассматривать как способ построения P_σ.

Очевидно, что сумма или произведение полурегулярных функций есть функция полурегулярная. В дальнейшем рассматриваются только полурегулярные функции, которые обращаются в нуль при $x = 0$. Для таких функций, в соответствии с определением полурегулярности, будем говорить о бесконечно малых членах наинизшего порядка. Для функций, которые встречаются в дальнейшем, такие минимальные члены будут cx^ν, где c и ν — постоянные. Члены же с $\ln x$ могут входить в величины более высокого порядка.

Докажем следующее утверждение.

Если $f(u)$ — функция, полурегулярная при $u = 0$ и $u = g(x)$ — функция, полурегулярная при $x = 0$, то $h(x) = f[g(x)]$ есть функция, полурегулярная при $x = 0$.

Пусть σ — любое фиксированное целое число, r и s — целые, которые подберем в дальнейшем. В силу полурегулярности функций $f(u)$ и $g(x)$ имеем

$$f(u) = \overline{P}_r(u) + u^r\overline{R}_r(u) = au^\alpha[1 + A(u)] + u^r\overline{R}_r(u),$$
$$u = g(x) = \underline{P}_s(x) + x^s\underline{R}_s(x) = bx^\beta[1 + B(x)] + x^s\underline{R}_s(x),$$

где au^α и bx^β — соответственно члены с наименьшими степенями в $f(u)$ и $g(x)$, $A(u)$ и $B(u)$ — конечные суммы, обращающиеся в нуль при $u=0$ и $x=0$.

1. Так как bx^β — член наинизшей степени в $g(x)$, то

$$u = bx^\beta[1 + v(x)],$$

где $v(0)=0$. Если это выражение подставить вместо u в $u_r\overline{R}_r(u)$ и предположить, что r выбрано так, что $\beta r > \sigma$, то будем иметь

$$u^r\overline{R}_r(u) = x^\sigma S(x),$$

где $S(x)$ стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. Выражение $u^r\overline{R}_r(u)$ начинается со слагаемых, имеющих порядок по x выше чем σ.

2. Покажем, что $\overline{P}_r(u)$ содержит только конечное число бесконечно малых членов, имеющих по x порядок, не превосходящий σ. Пусть $mu^\nu(\ln u)^{\nu'}$ — некоторый член из $\overline{P}_r(u)$. Показатель ν' равен нулю или целому положительному числу. Выражение для u можно записать еще и в виде

$$u = bx^\beta[1 + B(x)](1 + x^{s-\beta}z),$$

где z стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. Тогда

$$mu^\nu(\ln u)^{\nu'} = mb^\nu x^{\beta\nu}(1 + B(x))^\nu(1 + x^{s-\beta}z)^\nu \times$$
$$\times [\ln b + \beta\ln x + \ln(1 + B(x)) + \ln(1 + x^{s-\beta}z)]^{\nu'}.$$

Разложим в этом выражении величины $[1 + B(x)]^\nu$ и $(1 + x^{s-\beta}z)^\nu$ по формуле бинома и рассмотрим слагаемые, которые содержат z. Во всех этих членах выражение, содержащее наинизшую степень x, имеет вид

$$m_1x^{\beta\nu-\beta+s}[\ln b + \beta\ln x]^{\nu'}.$$

Наименьшее значение показателя ν равно α. Следовательно, если s выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha\beta - \beta + s > \sigma$, то множество членов, содержащих z, будет вида $x^\sigma \overline{S}(x)$, т. е. опи входят в $x^\sigma R_\sigma(x)$. Чтобы найти члены вида $mu^\nu (\ln u)^{\nu'}$,входящие в $P_\sigma(x)$, достаточно рассмотреть выражение

$$mb^\nu x^{\beta\nu} (1 + B)^\nu [\ln b + \beta \ln x + \ln (1 + B)]^{\nu'}$$

и выбрать из него слагаемые, степени которых меньше чем σ. Таких слагаемых будет конечное число. Повторяя аналогичные рассуждения относительно различных членов $\overline{P}_r(u)$, придем к заключению, что

$$h(x) = f[g(x)] = P_\sigma(x) + x^\sigma R_\sigma(x),$$

где $P_\sigma(x)$ содержит только конечное число слагаемых. Следовательно, функция $h(x)$ — полурегулярная при $x = 0$.

ЧАСТЬ 1

ЦИКЛЫ, ПРОХОДЯЩИЕ В ОКРЕСТНОСТИ СЕДЕЛ

§ 11. Этапы исследования

В начале установим простейшие канонические формы, к которым с помощью замены переменных можно привести дифференциальное уравнение в окрестности седла. Эти формы позволяют построить в окрестности простого седла общий интеграл дифференциального уравнения и получить свойства этого интеграла в действительной области изменений переменных. При помощи их получим форму функции соответствия для характеристик, лежащих в окрестности характеристики, проходящей через одно седло.

Пусть на дуге M_0M_0' характеристики C_0 лежит только одно седло и S, S' — дуги кривых, пересекающие C_0 соответственно в точках M_0 и M_0'; обозначим M и M' точки пересечения соседней с C_0 траектории C с кривыми S и S'. Тогда можно установить зависимость между параметрами, определяющими положение точек M и M' на кривых S и S'. Полученная функция соответствия применяется к исследованию характеристик в окрестности особого цикла, проходящего через одну или несколько особых точек типа седла.

§ 12. Упрощение дифференциального уравнения в окрестности одного седла

Покажем, что с помощью замены переменных в уравнении

$$X(x, y)dy + Y(x, y)dx = 0 \tag{14}$$

можно избавиться от некоторых групп членов разложения в ряд X и Y.

Прежде всего, заметим, что если за оси координат $x=0$ и $y=0$ принять две характеристики, проходящие через седло, то уравнение (14) преобразуется к виду

$$x\,dy + y[\lambda + a(x, y)]\,dx = 0, \tag{15}$$

где λ — положительная постоянная, $a(x, y)$ — функция переменных x и y, регулярная в некоторой окрестности точки $x=0$, $y=0$ и такая, что $a(0, 0)=0$. Не изменяя формы этого уравнения, можно в случае необходимости заменить x на cx и y на cy так, чтобы функция $a(x, y)$ удовлетворяла еще условию $\lambda - A > 0$ (см. § 7).

Покажем, что если λ не рациональное число, то, каковы бы ни были целые положительные числа r и s, существуют два ряда по целым, положительным степеням x и y; $l(x, y)$ и $b(x, y)$, обращающиеся в нуль при $x=0$, $y=0$, такие, что при помощи замены переменных $v = y[1 + l(x, y)]$ уравнение (15) приводится к виду

$$x\,dv + v[\lambda + x^r v^s b(x, v)]\,dx = 0. \tag{16}$$

Обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — функции переменного x; построим функцию вида

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\, y^k$$

так, чтобы она удовлетворяла уравнению в частных производных

$$x\varphi_x' - y[\lambda + a(x, y)]\,\varphi_y' + \lambda\varphi = 0. \tag{17}$$

Функцию $a(x, y)$ можно представить в виде

$$a(x, y) = x\alpha'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k,$$

где $\alpha'(x)$ — производная от ряда по целым степеням x, обращающегося в нуль при $x=0$, a_1, a_2, ... ряды по целым степеням, сходящиеся, как известно, при $|x| \leqslant 1$. Для функции φ_1 имеем

$$x\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + x\alpha'(x)\,\varphi_1 = 0,$$

откуда находим $\varphi_1(x) = e^{\alpha(x)}$ в предположении, что $\varphi_1 = 1$ при $x=0$. Функция $\varphi_1(x)$ регулярна при $|x| \leqslant 1$. Покажем, что указанным свойством регулярности обладают и функции φ_k $(k=2, 3, \ldots)$. Действительно, если предположить, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ существуют и регулярны, то, приравнивая нулю коэффициент при y^k (для определения $\varphi_k(x)$), получим уравнение

$$x\varphi_k'(x) - [(k-1)\lambda + xk\alpha'(x)]\varphi_k(x) = (k-1)a_1\varphi_{k-1}(x) + \\ + (k-2)a_2\varphi_{k-2}(x) + \ldots + a_{k-1}\varphi_1(x), \quad (18)$$

где правая часть — функция, регулярная при $|x| \leqslant 1$. Согласно замечанию (§ 8) уравнение (18) имеет решение $\varphi_k(x)$, регулярное при $|x| \leqslant 1$.

Определив последовательно члены $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, рассмотрим функцию

$$f(x, y) \equiv y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \ldots + y^s\varphi_s(x).$$

Если в (17) заменить φ на f, то коэффициенты при $y, y^2, \ldots, y^s$ в левой части исчезнут и получим

$$\lambda f + xf_x' - y[\lambda + a(x, y)]f_y' \equiv y^{s+1}\eta(x, y), \quad (19)$$

где $\eta(x, y)$ — регулярная функция при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

Положим $\varphi = f + \psi$; тогда ψ будет удовлетворять уравнению

$$x\psi_x' - y[\lambda + a(x, y)]\psi_y' + \lambda\psi + y^{s+1}\eta(x, y) = 0. \quad (20)$$

Представив $a(x, y)$ и $\eta(x, y)$ как ряды по степеням x:

$$a(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(y)x^k, \quad \eta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(y)x^k,$$

будем искать решение (20) в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(y)x^k,$$

где $\psi_k(y)$ $(k=0, 1, \ldots)$ — функции одного только y. Коэффициент $\psi_0(y)$ находится из уравнения

$$y[\lambda + \beta_0(y)]\psi_0' - \lambda\psi_0 - y^{s+1}\eta_0(y) = 0.$$

Функция $\beta_0(y)$ (см. замечание 3 § 7) удовлетворяет условию $\lambda - B > 0$. В силу этого дифференциальное уравнение для $\psi_0(y)$ имеет (см. замечание § 8) бесчисленное множество регулярных по y решений, и только одно из них не содержит членов с первой степенью y. Это решение примем за функцию $\psi_0(y)$; она имеет множитель y^{s+1} и представляется в виде ряда, сходящегося при $y=1$[1]). Покажем, что такими же свойствами будут обладать функции ψ_k ($k=1, 2, \ldots$), т. е. они представляются рядами по степеням y, сходящимися при $y=1$ и имеющими множитель y^{s+1}. Если предположить, что справедливость этих свойств доказана для функций $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, то, приравнивая нулю коэффициент при x^n в (20), получим

$$y[\lambda+\beta_0(y)]\psi_n'-(n+\lambda)\psi_n=$$
$$=y^{s+1}\eta_n-y\beta_1\psi_{n-1}'-\ldots-y\beta_n\psi_0'.$$

Правую часть этого соотношения обозначим $y^{s+1}\gamma_n(y)$, где $\gamma_n(y)$ — ряд по степеням y, сходящийся при $y=1$. Согласно замечанию § 8 у этого уравнения существует решение, представимое в виде ряда по степеням y, сходящегося при $y=1$ и имеющего множителем y^{s+1}. Определив таким способом $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{r-1}$, положим

$$g(x, y)=\psi_0(y)+x\psi_1(y)+\ldots+x^{r-1}\psi_{r-1}(y).$$

Если в уравнении (20) вместо $\psi(x, y)$ подставить $g(x, y)$, то коэффициенты при $x, x^2, \ldots, x^{r-1}$ в левой части исчезнут, и получим

$$xg_x'-y[\lambda+a(x,y)]g_y'+\lambda g+$$
$$+y^{s+1}\eta(x,y)=x^r y^{s+1}h(x,y). \quad (21)$$

Положим $K(x, y)=f+g$, тогда, приняв во внимание (19) и (21), получим, что функция $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$x\varphi_x'-y[\lambda+a(x,y)]\varphi_y'+\lambda\varphi=x^r y^{s+1}h(x,y). \quad (22)$$

Вместо переменного y введем новое переменное

$$v=K(x, y). \quad (23)$$

Функция $K(x, y)$ имеет вид $K=y[1+l(x, y)]$, где $l(x, y)$ — ряд, сходящийся в области $|y|\leqslant 1$, $|x|\leqslant 1$, $l(0,0)=0$. Поэтому (23) можно разрешить относительно переменного y, выразив его через x и v. Проделав в уравнении (15) замену переменного (23), будем иметь

$$x\,dv=xK_x'dx+xK_y'dy=\left[xK_x'-y(\lambda+a)K_y'\right]dx.$$

Обозначим через $V(x, v)$ коэффициент при dx, заменив

[1]) Здесь и в последующем слова «функция имеет множитель y^{s+1}» означают, что разложение этой функции в ряд по степеням y начинается с членов степени $s+1$. (*Прим. ред.*)

предварительно y его выражением через x и v; тогда уравнение (15) в новых переменных примет вид

$$x\,dv + V(x, v)dx = 0.$$

В уравнении (22) сделаем замену переменного (23); обозначив через $F(x, v)$ результат подстановки в $\varphi(x, y)$ вместо y его выражения через x и v, получим

$$xF'_x(x, y) - \left[y(\lambda + a)K'_y - x K'_x\right]F'_v + \lambda F = x^r y^{s+1} h(x, y)$$

или

$$xF'_x - V(x, v)F'_v + \lambda F = x^r v^{s+1} b(x, v).$$

Так как это уравнение имеет решение $F \equiv v$, то

$$V(x, v) = \lambda v - x^r v^{s+1} b(x, v).$$

Следовательно, замена переменного (23) приводит уравнение (15) к виду (16).

З а м е ч а н и е 1. Замена переменного (23) возможна только при таких достаточно малых v, для которых $K'_y \neq 0$. Но заменяя v на cv, где c мало, можно предполагать, что указанная подстановка имеет место при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ и что функция $b(x, v)$ удовлетворяет условию $\lambda - B > 0$ (§ 7).

З а м е ч а н и е 2. Уравнение (15), в частности, можно привести к виду

$$x\,dv + v(\lambda + vb(x, v))]dx = 0,$$

если заменить x вместо того, чтобы заменять y. Использовав разложение $a(x, y)$ в ряд по степеням y, перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{dy}{y} + \frac{\lambda + x\alpha'(x)}{x}dx + \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y^k a_k(x)}{x}dx = 0.$$

Введем новое переменное u, определив его из уравнения

$$\frac{\lambda + x\alpha'(x)}{x}dx = \frac{\lambda du}{u}, \quad xe^{\frac{\alpha(x)}{x}} = cu.$$

Взяв c достаточно малым, заменяя x на u, приведем уравнение (15) к виду

$$u\,dy + y[\lambda + yb(u, y)]du = 0,$$

где $b(u, y)$ — ряд, сходящийся при $|u| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

§ 13. Случай рационального λ

Если λ — число вида p/q, где p и q — целые и взаимно простые числа, то рассуждения предыдущего параграфа применимы не при любых r и s. Предположим в начале, для простоты, что уравнение (15) (согласно замечания 2 § 12) приведено к виду

$$x\,dy + y[\lambda + a(x, y)]\,dx = 0,$$

где

$$a(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, y^k$$

и $a_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — регулярные функции x. Так же как и в предыдущем случае, найдем функцию

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\, y^k,$$

удовлетворяющую уравнению

$$x\varphi'_x - y(\lambda + a)\,\varphi'_y + \lambda\varphi = 0. \tag{24}$$

В начале определим регулярную при $x = 0$ функцию $\varphi_1(x)$ такую, что $\varphi_1(0) = 1$, и без затруднений найдем также в виде рядов по x и $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_q$. Но в общем случае будет невозможно найти функцию φ_{q+1} в виде ряда по целым степеням x. Действительно, уравнение, из которого определяется φ_{q+1}, имеет вид

$$x\varphi'_{q+1} - q\lambda\varphi_{q+1} + \alpha_q(x) = 0, \quad q\lambda = p,$$

где $\alpha_q(x)$ выражается через известные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$. Следовательно,

$$\varphi_{q+1} = cx^p + x^p \int \frac{\alpha_q(x)\,dx}{x^{p+1}}.$$

Если в разложении $\alpha_q(x)$ имеется член c_1x^p, то в φ_{q+1} войдет член $c_1x^p \ln x$ и функция уже не будет регулярной. Однако от этого члена можно избавиться, если вместо уравнения (24) рассмотреть уравнение

$$x\varphi'_x - y(\lambda + a)\,\varphi'_y + \lambda\varphi = -c_1x^p\varphi^{q+1}.$$

В этом случае для функций φ_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ получим такие же выражения, как и прежде, но функция φ_{q+1}

будет определяться из нового уравнения

$$x\varphi_{q+1}' - p\varphi_{q+1} = \alpha_q(x) - c_1x^p.$$

Теперь решение этого уравнения φ_{q+1} будет рядом по целым степеням x, в котором коэффициент при x — произвольный. Аналогично можно избавиться от членов с $\ln x$ в функциях $\varphi_{2q+1}, \varphi_{3q+1}, \ldots, \varphi_{mq+1}$, если вместо (24) рассматривать уравнение вида

$$x\varphi_x' - y(\lambda + a)\varphi_y' + \lambda\varphi = -\sum_{k=1}^{m} c_k x^{kp}\varphi^{kp+1}, \qquad (25)$$

где $c_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ — постоянные, которые могут быть и нулями. Условимся для определенности в дальнейшем коэффициент при x^{kp}, который остается произвольным при определении φ_{kq+1}, считать равным нулю.

Предположим, что m можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$mq + 1 \leqslant s \leqslant (m+1)q.$$

Тогда, так же как и в § 12, построим функцию

$$f = y + \sum_{k=2}^{s} y^k\varphi_k(x),$$

которая удовлетворяет уравнению

$$xf_x' - y(\lambda + a)f_y' + \lambda f = y^{s+1}\eta + \sum_{k=1}^{m} c_k f^{kq+1}x^{kp}, \qquad (26)$$

где η — ряд по целым степеням x и y.

Если положить $\varphi = f + \psi$, то уравнение (25) преобразуется следующим образом:

$$x\psi_x' - y(\lambda + a)\psi_y' + \lambda\psi + y^{s+1}\eta + \sum_{k=1}^{m} c_k f^{kq+1}x^{kp} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} c_k x^{kp}(f + \psi)^{kq+1}. \qquad (27)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$\psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\psi_k(y),$$

где $\psi_k(y)$ — функции одного только переменного y. Очевидно, если положить $a(0, y) = \beta_0(y)$, то ψ_k будут находиться из уравнения

$$(k+\lambda)\psi_k - y[\lambda+\beta_0(y)]\psi_k' + y^{s+1}\gamma_k(y) = 0.$$

Для $k=0$ непосредственно видно, что

1) $\gamma_k(y)$ — ряд по целым степеням y;

2) $\psi_k(y)$ — ряд по целым степеням y, имеющий множитель y^{s+1}.

Если первое свойство выполняется для $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, то оно будет иметь место и при $k=n$, т. е. $\gamma_n(y)$ будет также выражаться рядом по целым степеням y. Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ — ряды по y, имеющие множитель y^{s+1}; тогда таким же свойством обладает и $\psi_n(y)$. Найдем условия, при которых эти свойства нарушаются. Уравнение для ψ_n можно переписать в виде

$$y\psi_n' - \left[\frac{n}{\lambda}+1+y\alpha'(y)\right]\psi_n = y^{s+1}\eta_n(y),$$

где $\alpha'(y)$ — производная от $\alpha(y)$, функции $\eta_n(y)$ и $\alpha(y)$ — ряды по целым степеням y. Решив это линейное уравнение, найдем

$$\psi_n = cy^{\frac{n}{\lambda}+1}e^{\alpha(y)} + y^{\frac{n}{\lambda}+1}e^{\alpha(y)}\int y^{s-\frac{n}{\lambda}-1}\eta_n(y)\,e^{-\alpha(y)}dy.$$

Положив $c=0$, получим, что ψ_n будет рядом по целым степеням y, если при интегрировании не войдет член с $\ln y$. Но подобный член может появиться, только если выполнены следующие два условия:

1) $n/\lambda = nq/p$ — целое, т. е. когда $n=kp$, k — целое;

2) разложение $y^{s-\frac{n}{\lambda}}\eta_n e^{-\alpha}$ в ряд начинается со свободного члена.

Для этого необходимо $s-n/\lambda \leqslant 0$ или $n \geqslant sp/q$. С другой стороны, по предположению, $mq+1 \leqslant s$. Из последних двух неравенств находим, что $n \geqslant mp + p/q$. Это неравенство будет заведомо выполнено, если $n \geqslant p(m+1)$.

Таким образом, если r удовлетворяет неравенству $r \leqslant p(m+1)$, то функции $\psi_0, \psi_1, \psi_{r-1}$ — ряды по целым степеням. Выбирая всякий раз $c=0$ в выражении для ψ_n, можем предполагать, что все они имеют множителем y^{s+1}. Это следует из вида подынтегральной функции. Положим

$$g(x, y) = \psi_0(y) + x\psi_1(y) + \ldots + x^{r-1}\psi_{r-1}(y);$$

тогда получим

$$xg'_x - y(\lambda + a) g'_y + \lambda g + y^{s+1}\eta +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} c_k f^{kq+1} x^{kp} - \sum_{k=1}^{m} c_k (f+g)^{kq+1} = x^r y^{s+1} h(x, y), \quad (28)$$

где $h(x, y)$ — ряд по целым степеням x и y.

Приняв во внимание (26) и (28), видим, что $k = f + g$ есть решение уравнения

$$x\varphi'_x - y(\lambda + a)\varphi'_y + \lambda\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi^{kq+1} x^{kp} + x^r y^{s+1} h(x, y).$$

Далее, рассуждая так же как и в § 12, приходим к заключению, что заменой переменного $v = K(x, y)$ уравнение (15) приводится к виду

$$x\,dv + v\left[\lambda - \sum_{k=1}^{m} c_k x^{kp} v^{kq} - x^r v^s b(x, v)\right] dx = 0.$$

Можно предполагать, что ряд $b(x, v)$ сходится при $|x| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$ (см. § 12, замечание 1).

§ 14. Форма общего интеграла дифференциального уравнения в окрестности седла

Рассмотрим уравнение (15) в виде

$$x\,dy + y[\lambda - x^r a(x, y)]\,dx = 0, \qquad (29)$$
$$a(x, y) = \sum_{k=s}^{\infty} a_k(x) y^k,$$

где $a_k(x)$ $(k = s, s+1, \ldots)$ — ряды по целым степеням x. Случай, который обычно будет рассматриваться, соответствует значениям $r = 0$, $s = 1$, однако для дальнейшего будут полезны свойства общего интеграла при любых r и s. Предположим, что $a(x, y)$ удовлетворяет условию $\lambda - A > 0$ (§ 7), и поэтому существуют постоянные числа A_k такие, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполняются неравенства $|a_k(x)| \leqslant A_k$ $(k = s, s+1, \ldots)$.

Найдем общий интеграл уравнения (29) в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} y^k f_k(x) \equiv c.$$

Функция f должна удовлетворять уравнению

$$xf'_x - \lambda y f'_y = -yx^r a(x, y) f'_y.$$

Для определения f положим $f(1, y) = y$. Тогда получим $xf'_1 - \lambda f_1 = 0$ и $f_1(x) = x^\lambda$, так как при $x = 1$ должно быть $f_1 = 1$. Коэффициенты $f_n(x)$ при $n > s$ удовлетворяют уравнениям

$$xf'_n - n\lambda f_n =$$
$$= -x^r [a_{n-1}f_1 + 2a_{n-2}f_2 + \ldots + (n-s) a_s f_{n-s}]; \quad (30)$$

отсюда

$$f_n(x) = x^{n\lambda} \int\limits_x^1 \frac{a_{n-1}f_1 + 2a_{n-2}f_2 + \ldots + (n-s) a_s f_{n-s}}{x^{n\lambda - r + 1}} dx, \quad (31)$$

так как

$$f_n(1) = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Из (31) видно, что можно последовательно найти функции f_n $(n = 2, 3, \ldots)$ и что все они ограничены при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для каждой функции f_n $(n = 2, 3, \ldots)$ определим мажорирующую функцию F_n такую, чтобы она была положительна или нуль при $x = 1$ и удовлетворяла уравнению

$$xF'_n - n\lambda F_n = -x^r [A_{n-1}F_1 + \ldots + (n-s) A_s F_{n-s}].$$

Их нельзя получить непосредственно из выражения (31) для f_n. С этой целью найдем функцию

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) y^k,$$

удовлетворяющую уравнению

$$xF'_x - \lambda y F'_y = -yx^r A(y) F'_y,$$

где

$$A(y) = \sum_{k=s}^{\infty} A_k y^k.$$

Будем различать два случая:

1) $s = 1$, $r = 0$. За функцию F можно взять общий интеграл уравнения

$$x\,dy + y\left[\lambda - \sum_{k=1}^{\infty} A_k y^k\right] dx = 0. \quad (32)$$

Положим

$$\frac{1}{\lambda - \sum_{k=1}^{\infty} A_k y^k} = \frac{1 + y\alpha'(y)}{\lambda}, \tag{33}$$

где $\alpha'(y)$ — производная от $\alpha(y)$. Все коэффициенты ряда $\alpha(y)$ положительны, и он сходится при $|y| \leqslant 1$, поскольку знаменатель левой части (33) не обращается в нуль при этих значениях y. Следовательно, уравнение (32) имеет общий интеграл $F(x, y) \equiv yx^{\lambda}e^{\alpha(y)} = c$. Легко видеть, что разложение в ряд по степеням y функции $F(x, y)$ удовлетворяет всем требованиям мажоранты для функции $f(x, y)$, можно считать, что это будет справедливо при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ряд для F сходится при $|y| \leqslant 1$, разложение функции f по степеням y сходится при $|y| < 1$ и x, меняющемся от 0 до 1. Поэтому

$$f(x, y) = yx^{\lambda}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) y^k\right],$$

$$F(x, y) = yx^{\lambda}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k y^k\right],$$

где $1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k y^k = e^{\alpha(y)}$. Так как $|g_k(x)| < G_k$, то ряд $1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) y^k$ будет сходиться в той же области, что и ряд $f(x, y)$. Таким образом, получаем следующую теорему.

Если $a(x, y)$ удовлетворяет условию $\lambda - A > 0$, то дифференциальное уравнение

$$x\,dy + y[\lambda - ya(x, y)]dx = 0 \tag{34}$$

имеет при $|y| \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, общий интеграл вида

$$yx^{\lambda}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) y^k\right] = c,$$

где $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — ограниченные функции при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

2) *r и s — любые.* В этом случае

$$F_1 = x^{\lambda}, \quad F_2 = F_3 = \ldots = F_s = 0,$$

и так как F_k $(k = s + 1, \ldots)$ имеет множитель $x^{r+\lambda}$, то

Можно положить

$$F(x, y) \equiv yx^{\lambda} + x^{r+\lambda} K(x, y),$$

$$K(x, y) = \sum_{n=s+1}^{\infty} K_n(x) y^n,$$

где $K_n(1) = 0$ $(n = s+1, s+2, \ldots)$.

Функция $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(r + \lambda) K + xK'_x - \lambda y K'_y = -yA(y) - yx^r A(y) K'_y,$$

поэтому K_n будут находиться из таких же уравнений вида (30), что и f_k. Найдем функции G_n, мажорантные для K_n при x, меняющемся от нуля до 1, и потребуем, чтобы G была положительна или нуль при $x = 1$; тогда

$$G(x, y) = \sum_{k=s+1}^{\infty} G_k(x) y^k,$$

удовлетворяет уравнению

$$(r + \lambda) G - xG'_x - \lambda y G'_y = -yA(y) - yA(y) G'_y. \quad (35)$$

Действительно, уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты G_n, получаются из уравнений для функций K_n заменой x^r на 1, поэтому, применив лемму § 9, получим функцию G_n.

Решение уравнения (35), не зависящее от x, должно удовлетворять уравнению

$$y[\lambda - A(y)] \frac{dG}{dy} - (r + \lambda) G = yA(y).$$

Это уравнение вида (10) § 8. Предположим, что r и s выбраны так, чтобы $s\lambda > r$. Оно имеет решение

$$G(y) = \sum_{k=s+1}^{\infty} G_k y^k,$$

сходящееся при $y = 1$, причем все коэффициенты G_k положительны. G_k будут мажорантами для функции K_k, F_k — для f_k при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Поэтому ряды для K, F, f абсолютно сходятся при $|y| \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $f_2, \ldots, f_s$ тождественно равны нулю, поскольку они имеют мажорантами равные нулю функции $F_2, \ldots, F_s$.

Очевидно, ряды для f и F имеют вид

$$f \equiv yx^{\lambda}\left[1 + x^{r}\sum_{k=s+1}^{\infty} g_k(x)\, y^k\right],$$

$$F \equiv yx^{\lambda}\left[1 + x^{r}\sum_{k=s+1}^{\infty} K_k(x)\, y^k\right],$$

$$|g_k(x)| \leqslant K_k(x) \leqslant G_k.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Дифференциальное уравнение

$$x\,dy + y[\lambda + x^r y^s a(x,\ y)]dx = 0, \tag{36}$$

где $a(x,\ y)$ удовлетворяет условию $\lambda - A > 0$, имеет общий интеграл вида

$$yx^{\lambda}\left[1 + x^r y^s \sum_{k=0}^{\infty} g_{k+s}(x)\, y^k\right] = c.$$

Ряд, стоящий в левой части, сходится при $|y| < 1$ и $0 \leqslant x < 1$, $g_k(x)$ — ограниченные функции при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 15. Исследование частного вида уравнения при рациональном λ

Прежде чем рассматривать вопрос об общем интеграле уравнения (36) в случае рационального $\lambda = p/q$, исследуем вначале частный вид дифференциального уравнения

$$x\,dy + y\,[p/q - x^{mp} y^{mq} c\,(x^p y^q)]\,dx = 0, \tag{37}$$

$$c\,(x^p y^q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{kp} y^{kq},$$

где c_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$ — постоянные, m — целое, которое в общем случае равно 1. Для дальнейшего достаточно рассмотреть случай, когда c — полином по степеням $x^p y^q$, но в рассуждениях ничего не изменится, если c предполагать рядом по этим переменным. Пусть c удовлетворяет условию $\lambda - C > 0$, т. е. $p/q - \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| > 0$.

Тогда в силу теоремы из § 14 уравнение (37) имеет общий интеграл вида

$$g\,(x,\ y) \equiv yx^{p/q}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\, y^k\right] = \mathrm{const}.$$

Найдем аналитические выражения для коэффициентов $g_k(x)$. Полагая

$$u = yx^{p/q}, \quad t = -\ln x,$$

уравнение (37) преобразуем к виду

$$du + u^{mq+1}c(u^q)dt = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения можно найти в форме

$$f(u, t) \equiv u + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(u)\, t^k.$$

Функция $f(u, t)$ удовлетворяет уравнению

$$f'_t = u^{mq+1}c(u^q)\, f'_u.$$

Действительно, из общих теорем существования следует наличие у рассматриваемого уравнения интеграла $f(u, t)$ такого, что $f(u, 0) = u$. Этот интеграл можно представить в виде ряда по степеням t с коэффициентами, зависящими от u, причем ряд сходится в окрестности точки $t = u = 0$. Коэффициенты f_n последовательно определяются уравнениями

$$(n+1)\, f_{n+1}(u) = u^{mq+1}c(u^q)\, f'_n(u).$$

Полагая $n = 0$, находим, что f_1 имеет множителем u^{mq+1}. Легко убедиться, что все последующие функции f_n $(n = 2, \ldots)$ содержат множитель u^{nmq+1}. Следовательно, $f(u, t)$ имеет вид

$$f \equiv u\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k u^{mqk} R_k(u^q)\right],$$

где R_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — многочлены или степенные ряды по u^q, в зависимости от того, будет ли c многочленом или рядом. У ряда $f(u, t)$ можно перегруппировать члены, расположив их по степеням u; тогда

$$f \equiv u\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^{mqk} P_k(t)\right],$$

где P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — многочлены по t степени не выше k и не имеющие свободного члена. Если в $f(u, t)$ заменить u на $yx^{p/q}$ и t на $-\ln x$, то интеграл f будет тождествен интегралу g, поскольку оба при $x = 1$

обращаются в y. Следовательно,

$$g(x, y) \equiv y x^{p/q} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{mkp} y^{mkq} P_k(-\ln x) \right],$$

где P_k — многочлен по $\ln x$ степени не выше n.

§ 16. Структура общего интеграла в случае рационального λ

Рассмотрим уравнение

$$x\,dy + y\left[\frac{p}{q} - c(x^p y^q) - x^r y^s a(x, y)\right] dx = 0, \qquad (38)$$

где

$$c(x^p y^q) = \sum_{k=1}^{m'} c_k x^{kp} y^{kq},$$

$$a(x, y) = \sum_{k=s+1}^{\infty} a_k(x)\, y^{k-s-1},$$

$c_1, c_2, \ldots c_{m'}$ — постоянные, $a_k(x)$ $(k = s+1, \ldots)$ — функции переменного x. Пусть $r > m'p$, $s > m'q$. Положим $C_k = |c_k|$, $A_k = \max |a_k(x)|$,

$$A(y) = \sum_{k=s+1}^{\infty} A_k y^{k-s-1},$$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y^{kq}.$$

Предположим, наконец, что функция $c(x^p y^q) + x^r y^s \times \times a(x, y)$ удовлетворяет условию $\lambda - C - A > 0$. Общий интеграл (38) в силу теоремы § 14 напишется в виде

$$f(x, y) = y x^{p/q} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, y^k \right] = \text{const},$$

$f(x, y)$ — удовлетворяет уравнению

$$x f'_x - y\,[p/q - c(x^p y^q) - x^r y^s a(x, y)]\, f'_y = 0.$$

Согласно § 15 функция

$$g(x, y) \equiv x^{\lambda} \gamma(x, y) = y x^{\lambda} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\, y^k \right]$$

удовлетворяет уравнению

$$xg_x' - y\,[\lambda - c\,(x^p y^q)]\,g_y' = 0, \quad \lambda = p/q.$$

Поэтому, если положить

$$f(x,\ y) = q(x,\ y) + x^{\lambda+r}\varphi(x,\ y),$$

то для φ получим дифференциальное уравнение

$$(\lambda + r)\,\varphi + x\varphi_x' - \lambda y\varphi_y' = -\,(c + x^r y^s a)\,y\varphi_y' - y^{s+1}a\gamma_y'.$$

Будем искать функцию φ в виде

$$\varphi\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,(x)\,y^k,$$

где $\varphi_k(1) = 0$ $(k = 1,\ 2, \ldots)$.

Коэффициенты $\varphi_k(x)$ находятся из уравнений

$$x\varphi_k' - (k\lambda - \lambda - r)\,\varphi_k = -\,\psi_k,$$

где ψ_k зависят от коэффициентов функций a и c, а также от тех φ_i и g_i, для которых $i < k$. Найдем мажоранты Φ_k функций $\varphi_k(x)$, заменив a_i, q_i и c_i соответствующими мажорантами. Для этого построим функцию

$$G\,(y) = y\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k y^k\right],$$

где G_k — мажоранты для $g_k(x)$ при x, изменяющемся от нуля до единицы. Существование такой функции было показано в § 14. Построим ряд

$$\Phi\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k\,(x)\,y^k$$

с неотрицательными при $x = 1$ коэффициентами Φ_k $(k = 1,\ 2, \ldots)$ и такой, чтобы он удовлетворял дифференциальному уравнению

$$(\lambda + r)\,\Phi + x\Phi_x' - \lambda y\Phi_y' =$$
$$= -\,(G + y^s A)\,y\Phi_y' - y^{s+1}G_y' A\,(y),$$

где $A(y)$ — мажоранта для $a(x,\ y)$. Это уравнение имеет вид (35) и к нему применимы рассуждения из § 14. Поэтому ряд, представляющий функцию φ, сходится при $|y| \leqslant 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следует заметить, что при $n < s + 1$ функции $\Phi_n \equiv 0$, как и функции F_2,

$F_3, \ldots, F_s$ (см. § 14). Поэтому φ_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ — также нули.

Таким образом, используя результаты из §§ 14 и 15, приходим к следующей теореме.

Дифференциальное уравнение

$$x\,dy + y\left[\frac{p}{q} - c(x^p y^q) - x^r y^s a(x, y)\right] dx = 0, \qquad (38)$$

где $r > m'p$, $s > m'q$, $c(x^p y^q)$ — *полином степени* m' *по* $x^p y^q$ и *функция* $c(x^p y^q) + x^r y^s a(x, y)$ *удовлетворяет условию* $p/q - C - A > 0$, *имеет общий интеграл вида*

$$x^{p/q} y\left[1 + \sum_{k=1}^{m'} x^{kp} y^{kq} P_k(\ln x) + x^r y^s h(x, y)\right] = c.$$

Функции $P_k(\ln x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m')$ *полиномы по* $\ln x$ *степени, не превосходящей индекса* k, $h(x, y)$ *имеет вид*

$$h(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\, y^k,$$

где h_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — *функции одного только* x *и ряд* $h(x, y)$ *сходится при* $|y| \leqslant 1$ *и* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

§ 17. Структура общего интеграла в случае иррационального λ

Различные формы, которые можно придать уравнению (15), позволяют установить свойства разложения общего интеграла этого уравнения, а также вид членов в этих разложениях.

Как было показано, уравнение

$$x\,dy + y[\lambda + ya(x, y)]dx = 0 \qquad (39)$$

имеет общий интеграл

$$f = yx^{\lambda}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, y^k\right] = c \qquad (40)$$

такой, что $f(1, y) = y$. Если сделать замену переменного, указанную в § 12:

$$v = y[1 + l(x, y)],$$

то уравнение (39) приводится к виду

$$x\,dv + v[\lambda + x^r v^s b(x, v)]dx = 0$$

и имеет общий интеграл

$$G(x, v) = x^\lambda v[1 + x^r v^s g(x, v)] = c.$$

Если в G заменить v на $y[1 + l(x, y)]$, то получим функцию $K(x, y)$, которая, будучи приравнена к постоянной, даст общий интеграл (39). Пусть

$$y + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k y^k$$

— значение, которое принимает этот интеграл при $x = 1$. Функция $\varphi(x, y)$, определяемая соотношением

$$\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \varphi^k = K(x, y),$$

будет иметь вид

$$\varphi(x, y) \equiv K(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n K^n(x, y), \tag{41}$$

где α_k, β_k $(k = 2, 3, \ldots)$ — постоянные. Из способа построения функции $\varphi(x, y)$ следует, что она представляет собой интеграл (39), равный y при $x = 1$. Следовательно, $\varphi \equiv f$; отсюда вытекают следующие свойства:

1) члены в разложении f, содержащие y в степени, меньшей чем $s + 1$, получаются, если в разложении G взять только одно слагаемое $x^\lambda v$ и заменить в (41) $K(x, y)$ на $yx^\lambda[1 + E(x, y)]$, где

$$E(x, y) \equiv y l_1(x) + y^2 l_2(x) + \ldots + y^{s-1} l_{s-1}(x)$$

есть сумма первых $s - 1$ членов ряда $l(x, y)$, функции l_i $(i = 1, 2, \ldots, s - 1)$ — ряды по целым степеням x. Кроме того, из ряда (41) нужно взять только первые s слагаемых. Члены в разложении f, содержащие y в степени не выше $s + 1$, тождественны с соответствующими членами выражения

$$yx^\lambda(1 + E) + \beta_2 y^2 x^{2\lambda}(1 + E)^2 + \ldots + \beta_s y^s x^{s\lambda}(1 + E)^s.$$

Вследствие этого при $n < s$ коэффициент f_n будет полиномом по x^λ степени не выше n. Коэффициенты этого полинома — ряды по целым степеням x. Число s может быть взято каким угодно, и, следовательно, это справедливо при любом n. *Функции f_k — полиномы по x^λ степени не выше k и коэффициенты этих полиномов — ряды по целым степеням x*;

2) выделим в $f(x, y)$ члены, в которые переменное x входит с показателем степени, не превосходящим σ. Предположим, что r и s выбраны так, что

$$\sigma < r, \quad \sigma < (s+1)\lambda.$$

Искомые члены можно получить из (41); для этого нужно рассмотреть слагаемые, содержащие K в степени не выше s, и заменить K на $yx^\lambda[1+M(x, y)]$. Выражение

$$M(x, y) \equiv m_0(y) + xm_1(y) + \ldots + x^{r-1}m_{r-1}(y),$$

где $m_k(y)$ есть ряды по целым степеням y, обозначает сумму членов $l(x, y)$, которые не имеют множителя x^r. Очевидно, что совокупность рассматриваемых членов $P_\sigma(x, x^\lambda, y)$ имеет вид полинома по x и x^λ, коэффициенты которого ряды по целым степеням y. Поэтому можно написать

$$f(x, y) \equiv P_\sigma(x, x^\lambda, y) + x^\sigma R_\sigma(x, y),$$

где R_σ имеет разложение, аналогичное $f(x, y)$. Функция R_σ ограничена при $|y| < 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Более того, она стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. Действительно, члены, которые остаются в выражении $K + \beta_2 K^2 + \ldots + \beta_s K^s$ после выделения части, входящей в P_σ, содержат множитель x в степени выше σ, и частное от деления их на x^σ остается конечным в рассматриваемой области, поскольку они выражаются рядами, сходящимися в этой области. Такое же заключение можно сделать и в отношении членов f, получающихся из $\sum\limits_{n=s+1}^{\infty} \beta_n K^n(x, y)$. Эти члены содержат множителем $x^{(s+1)\lambda}$ и после деления на x^σ стремятся к нулю вместе с x, поскольку $\sigma < (s+1)\lambda$. Число σ может быть сделано как угодно большим, откуда следует, что *f как функция переменного x полурегулярна при $x = 0$* (см. § 10).

§ 18. Свойства общего интеграла при рациональном λ

Уравнение (39), имеющее интеграл (40), заменой переменного, введенной в § 13, преобразуется в уравнение

$$x\,dv + v[\lambda - c(x^p y^q) - x^r v^s a(x, v)]\,dx = 0, \quad \lambda = p/q$$

с интегралом (§ 16) вида

$$G(x, v) \equiv x^\lambda v[1 + H(x^p v^q, x^p v^q \ln x) + x^r h(x, v)] = \hat{c},$$

где H — полином степени m по каждому из выражений $x^p v^q$ и $x^p v^q \ln x$. Пусть $s > mq$, $r > mp$.

Применим к рассматриваемому уравнению рассуждения § 17. Если в G переменное v заменим на $y[1 + l(x, y)]$, то получим интеграл уравнения (39), который обозначим через $K(x, y)$. Интеграл (40) тогда запишется в виде

$$f(x, y) \equiv K(x, y) + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n K^n(x, y).$$

Поэтому имеют место утверждения:

1. Члены f, которые содержат y в степени не выше s, получаются следующим способом: рассмотрим в G один член $x^\lambda v(1 + H)$, заменим в этом выражении v на $y(1 + E)$ и возьмем только те слагаемые, в которые y входит в степени, меньшей $s + 1$. Подставим полученное выражение вместо K в

$$K + \beta_2 K^2 + \ldots + \beta_s K^s. \tag{42}$$

Для $n < s$ функции f_n в интеграле (40) будут полиномами по x^λ и $x^p \ln x$ с коэффициентами, представимыми в виде рядов по целым степеням x. Степени этих полиномов по x^λ не выше n, а по $x^p \ln x$ не выше n/q. Это свойство справедливо для любого n, поскольку s можно выбрать сколь угодно большим.

2. Выделим в f слагаемое, содержащее x в степени, не превосходящей σ. Возьмем r и s такими, чтобы r и $(s + 1)\lambda$ были больше σ. Интересующие нас члены получим из (42), если в этом выражении K заменим на $vx^\lambda(1 + H)$ и v на $y(1 + M)$. Рассматриваемые члены будут иметь вид полинома $P_\sigma(x, x^\lambda, x^p y^q \ln x)$ по степеням выражений x, x^λ, x^p, $y^q \ln x$. Коэффициенты этих полиномов — ряды по степеням y. Так же как и в предыдущем параграфе, имеем

$$f \equiv P_\sigma(x, x^\lambda, x^p y^q \ln x) + x^\sigma R_\sigma(x, y),$$

где R_σ — функция, ограниченная при $|y| < 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. *Функция $f(x, y)$ — полурегулярная по x при $x = 0$.*

§ 19. Функция соответствия в окрестности характеристики, проходящей через одно седло

Пусть особая точка P с координатами x_0, y_0 есть седло, в этой точке оканчиваются четыре дуги характеристики Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, попарно касающиеся двух прямых; они делят окрестность точки на четыре сектора. Характеристики, расположенные в каждом из них, образуют четыре существенно различных семейства. Будем изучать отдельно каждый сектор.

Пусть R — один из них, Γ_1 и Γ_2 — сепаратрисы, ограничивающие этот сектор. Очевидно, Γ_1 и Γ_2 не имеют общей касательной в точке P. Предположим, что при движении по Γ_1 в сторону точки P область R остается справа и Γ_2 будет правым продолжением Γ_1. Характеристика C, близкая к Γ_1, пройдет в окрестности Γ_2, если она проходит в окрестности Γ_1, и в том же направлении, что и Γ_1.

Совокупность кривых Γ_1 и Γ_2 образует характеристику C_0, имеющую в P угловую точку (см. § 3). Это будет единственная характеристика в области R, которую можно рассматривать как составленную из двух характеристик.

Из результатов § 12 следует, что дифференциальное уравнение в окрестности P можно, с помощью замены переменных вида

$$u = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \sum_{n+k=2}^{\infty} c_{nk}(x - x_0)^n (y - y_0)^k,$$
$$v = \sum_{n+k=1}^{\infty} \gamma_{nk}(x - x_0)^n (y - y_0)^k \qquad (43)$$

представить в виде

$$u\,dv + v[\lambda + va(u, v)]\,du = 0. \qquad (39)$$

Разрешив уравнение (43) относительно $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, получим

$$x - x_0 = \sum_{n+k=1}^{\infty} A_{kn}u^k v^n, \quad y - y_0 = \sum_{n+k=1}^{\infty} B_{kn}u^k v^n. \qquad (44)$$

a, b, c_{nk}, γ_{nk}, A_{kn}, B_{kn} — постоянные.

Четыре полупрямых в плоскости u, v, определенные прямыми $u = 0$, $v = 0$, соответствуют четырем дугам характеристик Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 в плоскости xy. Каждому из четырех секторов, образованных в плоскости u, v прямыми $u=0$, $v=0$, соответствует сектор в плоскости xy, ограниченный двумя сепаратрисами из Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. Можно предполагать, что рассматриваемой области R в плоскости xy соответствует в плоскости uv сектор $u>0$, $v>0$. Предположим наконец, что переменные u, v таковы, что заменой (44) и (43) общий интеграл уравнения (39) приводится к виду

$$u^\lambda v\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} f_k(u)\, v^k\right]=c \tag{45}$$

для всех u и v, лежащих между 0 и 1 (см. § 12, замечание 1 и § 14). Известно, что $f_k(1)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим в плоскости uv квадрат $O'A'D'B'$ со сторонами, уравнения которых будут соответственно: $O'A'$: $v=0$, $O'B'$: $u=0$, $A'D'$: $u=1$, $B'D'$: $v=1$. Характеристика C' уравнения (39), которая пересекает сторону $B'D'$ в точке $N'(u, 1)$ выйдет из квадрата, пересекая $A'D'$ в точке $Q'(1, v)$, поскольку она не может ни остаться внутри квадрата, ни пересечь стороны $O'A'$, $O'B'$ и $B'D'$, ни окончиться в особой точке O'. Для всех точек квадрата $O'A'D'B'$ в силу интеграла (45) имеем соотношение

$$v=u^\lambda\,[1+f(u)], \quad f(u)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(u).$$

Дуги AD и BD на плоскости xy, в которые заменой переменных (44) переводятся сегменты $A'D'$ и $B'D'$, играют роль кривых S и S' (§ 2). Координаты u и v точек N' и Q' определяют в силу формул (44) положение точек N и Q, точек пересечения характеристики C в плоскости xy с дугами AD и BD. Характеристике C_0, образованной двумя дугами Γ_1 и Γ_2, соответствуют сегменты $O'A'$ и $O'B'$ плоскости uv, играющие роль дуги M_0M_0' характеристики C_0 (§ 2).

Таким образом, получаем функцию соответствия между точками пересечения характеристики C, близкой к C_0 с двумя дугами кривых AD и BD в случае, когда на дуге BPA лежит одно седло P.

Эта функция соответствия $v=u^\lambda[1+f(u)]$ вообще не голоморфная, но обладает свойствами, установленными в §§ 17 и 18, которые позволяют использовать функции $f(u)$, полурегулярные в точке $u=0$, таким же образом, как и ряды по целым степеням u.

Замечание. Рассмотрим две дуги S и S', пересекающие сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 в точках M_0 и M_0' так, что на дугах AM_0 и BM_0' кривых Γ_1 и Γ_2 нет особых точек. Легко установить вид функции соответствия между точками M и M' пересечения дуг S и S' с характеристикой C, близкой к C_0. Будем считать, что для дуг S, S' и их расположения относительно C_0 выполнены предположения 1), 2), 3) и замечание § 2. В частности, координаты точки M на S будут функциями параметра t. Эти функции голоморфны при значении параметра $t=0$, соответствующего точке M_0. Координата точки M' на S' есть функция параметра t', голоморфная при $t'=0$, соответствующем M_0'.

Предположим, что характеристика C, близкая к C_0, следует в направлении M_0PM_0' и встречает:

1) S в точке M с параметром t;
2) дугу AD в точке N с параметром u;
3) S' в M' с параметром t';
4) BD в Q с параметром v;

На дугах M_0A и BM_0' кривой C_0 нет особых точек, поэтому будем иметь

$$t' = av[1+h(v)], \quad u = bt[1+g(t)],$$

где a и b — постоянные, отличные от нуля; $h(v)$, $g(t)$ — голоморфные функции такие, что $g(0)=0$, $h(0)=0$; используя уже имеющуюся зависимость

$$v = u^{\lambda}[1+f(u)],$$

получим

$$v = b^{\lambda}t^{\lambda}[1+H(t)], \quad t' = ab^{\lambda}t^{\lambda}[1+G(t)],$$
$$t' = ct^{\lambda}[1+G(t)],$$

где c — постоянная, отличная от нуля; H и G — функции переменного t, которые (согласно § 10) будут полурегулярными и равными нулю при $t=0$, поскольку $f(u)$ — полурегулярная функция u, равная нулю при $u=0$. Установленная зависимость между t' и t имеет место, если t достаточно мало. Как и в § 2, легко установить, что если M достаточно близка к M_0, характеристика, пересекающая S в точке M, будет пересекать S' в точке M', близкой к M_0'. Этот результат может быть также получен при помощи рассуждений, аналогичных тем, какие проведены Бендиксоном (стр. 19). Уравнение, связывающее t и t', можно разрешить относительно t; тогда получим

$$t = c' t'^{\lambda'} [1 + K(t')],$$

где $c \cdot c' = 1$, $\lambda \cdot \lambda' = 1$. Функция $K(t')$ полурегулярная и равная нулю при $t' = 0$. Чтобы получить зависимость между t и t' в этой форме, достаточно провести рассуждения, подобные изложенным выше, но в обратном порядке.

§ 20. Характеристика в окрестности цикла, проходящего через одно седло

Рассмотрим особый цикл C_0, проходящий через седло P и не имеющий других особых точек. Этот цикл, согласно изложенному в §§ 3 и 19, имеет форму петли с угловой точкой в P. На основании § 19 можно заключить, что характеристики, близкие к C_0, будут только те, которые расположены в области R внутри C_0. Всегда можно предполагать, что области R соответствуют в окрестности P часть плоскости uv, для которой u и v положительны. Найдем условия, при которых в области R существуют замкнутые характеристики, близкие к C_0. Сохраним те же обозначения, что и в предыдущем параграфе. Пусть S — дуга кривой BD, соответствующей сегменту $B'D'$. Обозначим S' дугу кривой AD, соответствующей сегменту $A'D'$. Цикл C_0 пересекает дуги S и S' в точках A и B, которые определяют на C_0 две дуги APB и BIA. Построим характеристику C, близкую к C_0 и продолженную в направлении $BPAIB$. Характеристика C пересекает кривую S в точке N с параметром u, дугу S' в точке Q с параметром v и вновь пересекает S в N_1 с параметром u_1. Согласно § 19 имеем зависимость

$$v = u^{\lambda}[1 + f(u)]. \tag{46}$$

Из результатов § 2 следует, что $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_1^k$, поскольку на дуге AIB кривой C_0 нет особых точек и дуги S и S' не касаются характеристики C_0 в точках A и B.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_1^k = u^{\lambda} [1 + f(u)].$$

Это соотношение легко разрешить относительно u или u_1. Зависимость между u и u_1 дает функцию соответствия, связывающую параметры двух последовательных точек пересечения дуги S с характеристикой C. Чтобы характеристика C была циклом, необходимо и достаточно, чтобы точки N и N_1 совпадали, т. е. чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k = u^{\lambda} [1 + f(u)]. \tag{47}$$

Очевидно, что если $\lambda \neq 1$, то это соотношение не будет удовлетворяться ни при каких значениях u, близких к нулю; следовательно, *не существует замкнутых характеристик, близких к* C_0.

Если $\lambda = 1$, то могут представится два случая:

1) *точка P — центр*[1]), *т. е. с помощью надлежащей замены переменных* (44) *уравнение* (15) *может быть приведено к виду*

$$u\,dv + v\,du = 0.$$

В этом случае $f(u) \equiv 0$. Соотношение (46) имеет вид $u = v$, а (47) перейдет в

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k = u.$$

Если $a_1 = 1$ и $a_k = 0$ ($k = 2, 3, \ldots$), то все характеристики, близкие к C_0, есть циклы. Если эти условия не удовлетворяются, то ни одна из характеристик, близких к C_0, не может быть замкнута;

2) *точка P — фокус*. Это означает, что в интеграле (45) функции $f_k(u)$ содержат члены с $\ln u$. Покажем, что в этом случае ни одна из характеристик, близких к C_0, не замкнута.

Соотношение (47), согласно § 18, при любом положительном σ можно записать в виде

$$P_\sigma(u,\ u \ln u) + u^\sigma R_\sigma(u) = 0, \tag{48}$$

где P_σ — полином по степеням u и $u \ln u$, все члены

---

[1]) О центре и фокусе в случае седла см. мемуар Дюлака [18], с. 21—22.

которого по отношению к u бесконечно малые порядка не выше σ, R_σ стремится к нулю при u, стремящемся к нулю.

Покажем вначале, что существует целое ν такое, что при $\sigma < \nu$ полином P_σ тождественно равен нулю, а полином P_ν отличен от нуля.

Тогда многочлен P_ν имеет вид $u^\nu P(\ln u)$, где P — многочлен по степеням $\ln u$, выражение (48) при $\sigma = \nu$ обратится в

$$P(\ln u) - R_\nu(u) = 0.$$

Для малых u это уравнение не имеет решений. Следовательно, *не существует циклов, близких к* C_0.

Остается доказать, что такое ν, для которого $P_\nu \neq 0$, существует. Действительно, если бы для любого σ многочлен P_σ был равен нулю, то левая и правая части (47) до членов степени не выше σ были бы тождественны. Это означает, что правая часть не содержит членов с $\ln u$.

Она получается, если в интеграле (45) положить $v = 1$. Значение $v = 1$ не имеет никакого преимущества перед другими, так как, заменяя v на cv в дифференциальном уравнении (39), можно $v = 1$ поставить в соответствие любое число, и вид интеграла (45) при этом сохранится. В силу этого член с $\ln u$ не может исчезнуть при $v = 1$.

Дадим другое доказательство того, что $P_\nu \neq 0$. Если не имеет места случай центра, то постоянные c_1, c_2, ..., c_m, полученные в § 13, не могут быть все равны нулю.

Пусть $c_m = \gamma$ — первая из этих постоянных, отличная от нуля. Тогда уравнение (37), рассмотренное в § 15, при $\lambda = p = q = 1$ имеет вид

$$x\,dy + y[1 - \gamma x^m y^m]\,dx = 0,$$

и его интеграл, согласно § 15, будет

$$g(x, y) \equiv xy[1 + m\gamma x^m y^m \ln x]^{-1/m}.$$

Если теперь написать дифференциальное уравнение (39) в виде, рассмотренном в § 16, где $m' = m$, $r > m$, $s > m$ и заменить x и y на u и v, тогда в интеграл (45) войдет член vu^λ, который при $\lambda = 1$, $v = 1$, $a_1 = 1$ в равенстве (47) сократится с соответствующими членами в левой части. В этом случае единственный член интеграла (45) со степенью по переменному u, меньшей чем $m+2$, не сокращающийся в уравнении (47), будет $\gamma v^{m+1} u^{m+1} \ln u$.

Следовательно, если $a_1 \neq 1$, то $\nu = 1$, а если $a = 1$, то $\nu = m+1$. В результате предыдущих рассуждений приходим к выводу. *Всегда можно построить внутри R кольцевую область A, ограниченную с одной стороны циклом C_0, такую, что в ней возможны только два случая:*

1) *ни одна из характеристик в A не является циклом;*

2) *все характеристики, расположенные в A, — циклы.*

Первый из указанных случаев — общий. Для выполнения второго случая необходимо, чтобы $\lambda = 1$, точка P была центром (постоянные c_i § 2 все нули) и чтобы выполнялось бесконечное множество других условий.

§ 21. Особые циклы, проходящие через несколько седел

Рассмотрим особый цикл, проходящий через несколько седел. Предположим, что эти седла встречаются в порядке

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_1,$$

когда цикл C_0 обходится в некотором направлении. Цикл C_0 образован дугами сепаратрис, идущими из одного седла P_i в другое седло P_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$). Согласно сказанному в §§ 3 и 19 цикл C_0 в каждом седле имеет угловые точки. Окрестность особой точки P_i, в которой будут рассматриваться характеристики, близкие к C_0, вполне определена: это сектор с углом, не превосходящим π, и ограниченный двумя сепаратрисами, идущими из точек P_{i-1} и P_{i+1} в точку P_i. Будем рассматривать только такие циклы C_0, для которых область R, ограниченная C_0, содержит секторы каждого из седел P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Это

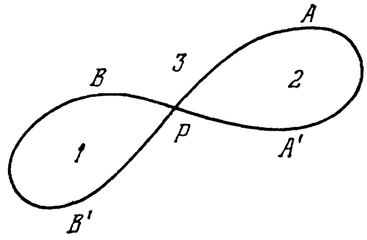

Рис. 1.

позволяет выделить характеристики, расположенные в R, близкие к C_0.

Если особый цикл C_0 имеет двойную точку, то он должен обходиться таким образом, чтобы рассматриваемые дуги не пересекались (рис. 1).

Так циклом должен быть $PAA'PBB'P$, но не $PA'APB'BP$. Подобные циклы или полициклы образуют на плоскости более двух областей. Изучение характеристик в каждой из этих областей существенно зависит от характера области. Например, на рис. 1 три области, помеченные цифрами *1*, *2*, *3*. Изучение характеристик, расположенных в областях *1* и *2*, ограниченных соответственно циклами PAP и PBP было проведено в § 19. Характеристики, расположенные в области *3*, ограниченной циклом $PA'A'PBB'P$, и близкие к нему, должны рассматриваться как характеристики, проходящие вблизи двух седел. Действительно, эти характеристики проходят дважды вблизи седла P и его следует считать за два седла. На рис. 2 четыре седла P_1, P_2, P_3, P_4 расположены на изображенной кривой таким образом, что получается шесть областей, помеченных цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*; соответствующие им циклы:

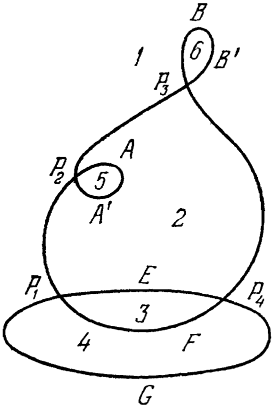

Рис. 2.

1. $P_1P_2P_3BB'P_3P_4GP_1$,
2. $P_1P_2A'AP_2P_3P_4EP_1$,
3. $P_1EP_4FP_1$,
4. $P_1FP_4GP_1$,
5. $P_2AA'P_2$,
6. $P_3BB'P_3$.

Характеристики в области *1*, близкие к циклу 1, должны рассматриваться как проходящие вблизи пяти седел P_1, P_2, P_3, P_3, P_4. Седло P_3 должно рассматриваться дважды. Точно так же для характеристик области *2*, близких к циклу 2, седло P_2 считается два раза. Характеристики, расположенные в области *3* и *4*, близкие соответственно к циклам 3 и 4, проходят вблизи двух седел P_1 и P_4. Характеристики, расположенные в областях *5* и *6*, близкие соответственно к циклам 5 и 6, проходят вблизи только одного седла,

§ 22. Характеристики, близкие к особому циклу, проходящему через несколько седел

Пусть цикл C_0 проходит последовательно через седла $P_1, P_2, \ldots, P_n$ при обходе в определенном направлении. Некоторые из седел могут совпадать, тогда они должны рассматриваться так, как это объяснено на рис. 1 и 2. Седла, в окрестности которых характеристика C, близкая к C_0, проходит дважды, будут обозначаться двумя индексами.

Каждому седлу P_i, проходимому в направлении $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, соответствует показатель λ_i, значение которого получается в результате приведения дифференциального уравнения, заменой переменных типа (43) к виду

$$u\,dv + v[\lambda_i + va(v, u)]\,du = 0.$$

Дуге $P_{i-1}P_i$ соответствует в плоскости u, v положительная часть оси $u = 0$, дуге P_iP_{i+1} соответствует положительная часть оси $v = 0$. Если P_i и P_j — одно и то же седло, проходимое дважды, то $\lambda_i = \lambda_j$.

На каждой дуге P_iP_{i+1} возьмем точку M_i и проведем дугу кривой S_i, пересекающую C_0 в M_i. За дуги S_i можно брать прямые, в частности отрезки, параллельные координатным осям. Пусть t_i есть значение параметра, фиксирующего положение точки N_i на S_i, t_i должно обращаться в нуль, когда точка N_i совпадает с M_i. Точка M_n будет расположена между P_n и P_1.

Рассмотрим характеристику C, близкую к C_0 и пересекающую S_n в точке N с параметром t. Известно, что если N достаточно близка к M_n, то эта характеристика будет при своем продолжении проходить в направлении $P_nP_1, \ldots P_{n-1}P_n$, встречая последовательно все кривые S_i в точках N_i с параметрами t_i и, в частности вновь встретит S_n в точке с параметром t_n. Согласно § 19 имеем зависимость

$$\begin{aligned}
t_n &= c_n t_{n-1}^{\lambda n}\,[1 + F_n(t_{n-1})], \\
t_{n-1} &= c_{n-1} t_{n-2}^{\lambda n-1}\,[1 + F_{n-1}(t_{n-2})], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_2 &= c_2 t_1^{\lambda_2}\,[1 + F_2(t_1)], \\
t_1 &= c_1 t^{\lambda_1}\,[1 + F_1(t)],
\end{aligned} \tag{49}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — отличные от нуля постоянные, $F_i(t_{i-1})$ — функции переменного t_{i-1}, полурегулярные и равные нулю при $t_{i-1}=0$. Возведем обе части второго уравнения в степень λ_n, обе части третьего уравнения в степень $\lambda_n \cdot \lambda_{n-1}$ и т. д., предпоследнего в степень $\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \lambda_3$ и последнего в степень $\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \ldots \lambda_3 \cdot \lambda_2$. Перемножая полученные таким образом равенства, будем иметь

$$\begin{aligned} \nu_i &= \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \lambda_i, \\ \nu_n &= \lambda_n, \\ \nu_1 &= \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \ldots \lambda_1, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= c_n \cdot c_{n-1}^{\nu_n} \cdot c_{n-2}^{\nu_{n-1}} \ldots c_1^{\nu_2}; \\ c_i &= c_n \cdot c_{n-1}^{\nu_n} \ldots c_i^{\nu_{i+1}}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$t_n = c_1 t^{\nu_1} [1 + F_n(t_{n-1})] \ldots [1 + F_1(t)]^{\nu_2}. \tag{52}$$

Для того чтобы характеристика C была замкнутой, необходимо, чтобы $t_n = t$. Полагая в (52) $t_n = t$, поделим правую и левую части на t. Если принять во внимание, что $F_n(t_{n-1}), \ldots, F_1(t)$ стремятся к нулю при t_i, стремящихся к нулю, получим, что равенство $t_n = t$ возможно, если

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ c_1 &= 1. \end{aligned} \tag{53}$$

Таким образом, имеем два необходимых условия для того, чтобы существовали циклы в окрестности C_0. Первое условие алгебраическое, ибо числа λ_i могут быть получены алгебраическими вычислениями. Условие же $c_1 = 1$ не алгебраическое, потому что числа c_i ($i = 1, 2, \ldots n$) вычисляются не алгебраическим методом. Если рассмотрим, например, особый цикл C_0, изображенный на рис. 1, $PA'APBB'P$, который два раза пересекает седло P, имеющее показатель λ, то в этом случае $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Для того чтобы характеристики, близкие к C_0 были циклами, необходимо чтобы $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = 1$.

Таким образом, в общем случае в кольцевой окрестности цикла, проходящего через несколько седел, не существует других циклов. Покажем, что при более детальном изучении вопроса имеет место заключение, аналогичное тому, которое сделано в § 20.

§ 23. Исследование функции соответствия между t и t_n

Найдем зависимость между t и t_n непосредственно из равенства (49), воспользовавшись соотношениями (50) и (51).

Заменяя t_{n-1} в первом из уравнений (49) его значением из второго уравнения, получим

$$t_n = c_{n-1} t_{n-2}^{\nu_{n-1}} [1 + K_{n-1}(t_{n-2})].$$

Выразив также t_{n-2} через t_{n-3}, будем иметь

$$t_n = c_{n-2} t_{n-3}^{\nu_{n-2}} [1 + K_{n-2}(t_{n-3})],$$

и, продолжая далее, получим, наконец, соотношение

$$t_n = c_1 t^{\nu_1} [1 + K_1(t)]. \tag{54}$$

Согласно сказанному в § 10 все функции K_i полурегулярны при $t_{i-1} = 0$ и $K_i(0) = 0$. Это свойство выполняется при $i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$, поскольку каждый раз в полурегулярную функцию подставляем полурегулярную.

Основное соотношение $v = u^\lambda[1 + f(u)]$, доказанное в § 19 и положенное в основу наших рассуждений, справедливо при $0 \leqslant u \leqslant 1$. Последовательные подстановки, которые приводят к формуле (54), уменьшают интервал изменения t, но не могут свести его к нулю. Существует положительное ε такое, что равенство (54) будет справедливо для $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Все большее усложнение функции K_i по мере уменьшения индекса не может изменить природу функции в проводимых рассуждениях. Действительно, по определению полурегулярных функций можно каким угодно способом расположить члены функции K_i по возрастающим степеням t, отыскивая в начале слагаемые, порядок которых не выше единиц, затем слагаемые, порядок малости которых не выше двух, и т. д. Легко найти выражение K_i. Положим

$$\nu_j^i = \lambda_j \cdot \lambda_{j+1} \ldots \lambda_{i-1} \lambda_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n, \quad \nu_1^i = \lambda_i.$$

Члены $K_{n-1}(t)$ содержат только степени t и t^ν, где ν принимает два значения: λ_{n-1} и $\lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$. Если λ_{n-1} или λ_n — рациональные числа, то к этим слагаемым необходимо добавить еще степени $t^\nu \ln t$. Таким образом, установлено, что при $j = n - 1$, $K_j(t)$ содержит только степени t и t^ν и, может быть, еще $t^\nu \ln t$, где ν принимает значения

$$\nu = \nu_j^i \quad (i = j, j+1, \ldots, n). \tag{55}$$

Покажем, что $K_{j-1}(t')$ содержит только степени $t', t'^{\nu'}$ и, может быть, $t'^{\nu'} \ln t'$, где ν' принимает значения

$$\nu' = \nu_{j-1}^i \quad (i = j-1, j, \ldots, n). \tag{56}$$

Действительно, принимая t_{j-2} и t_{j-1} за t', имеем

$$t = c_j u^{\nu_j} [1 + K_j(u)], \tag{57}$$

$$u = c_{j-1} t'^{\lambda_{j-1}} [1 + F_{j-1}(t')]. \tag{58}$$

Заменяя в (57) u его выражением из (58), получим

$$t = c_{j-1} t'^{\nu_{j-1}} [1 + K_{j-1}(t')].$$

Рассмотрим выражение u^ν, которое входит в K_j для значений ν, заданных равенствами (55). Величина u^ν зависит от t' и содержит только степени $t'^{\nu'}$ для $\nu' = \nu\lambda_{j-1}$. Значения ν' задаются формулами (56). Содержащиеся в (57) члены с $u^\nu \ln u$ и слагаемые с $t'^{\lambda_{j-1}} \ln t'$ в (58) легко переводятся в члены с $t'^{\nu'} \ln t'$ в $K_{j-1}(t')$.

Используя соотношения (54), можно определить те случаи, когда кривые близкие к C_0, будут циклами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $t_n = t$, и снова получаем два условия (53), найденные ранее.

Если эти условия выполнены, то необходимо и достаточно, чтобы, кроме того,

$$K_1(t) = 0. \tag{59}$$

Покажем, что если $K_1(t) \not\equiv 0$, то существует положительное число η такое, что уравнение (59) не имеет ни одного корня между 0 и η.

Функция K_1 — полурегулярная при $t = 0$. Поэтому можно найти такое целое число σ, что

$$K_1(t) = P_\sigma(t) + t^\sigma R_\sigma(t),$$

где $P_\sigma(t)$ — полином, не равный тождественно нулю, имеющий порядок малости по t выше $\sigma - 1$, но не выше σ. Функция $R_\sigma(t)$ стремится к нулю при t, стремящемся к нулю. Выберем среди конечного числа членов P_σ те, порядок малости которых наивысший. Эти члены можно написать в виде $t^\sigma B$, где B — отличная от нуля постоянная, а в более сложных случаях полином по $\ln t$. Следовательно, B имеет вид $B(\ln t)$. Поделив равенство (59) на t^σ, получим

$$B(\ln t) + S(t) = 0,$$

где $S(t)$ стремится к нулю при t, стремящемся к нулю. Это уравнение не имеет корней, близких к нулю. Из проведенных рассуждений можно заключить:

В окрестности C_0 всегда существует кольцевая область A, ограниченная с одной стороны циклом C_0 так, что в ней возможен только один из следующих случаев:

1. *В области A нет ни одной замкнутой характеристики.*
2. *Все характеристики, проходящие в A,— циклы.*

ЧАСТЬ 2

ЦИКЛЫ, ПРОХОДЯЩИЕ В ОКРЕСТНОСТИ СЛОЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

§ 24. Форма дифференциального уравнения в окрестности исключительной особой точки

Особую точку будем называть *исключительной*, если после переноса ее в начало координат и надлежащего выбора координатных осей дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$X_2(x, y)dy + [y + Y_2(x, y)]dx = 0, \tag{60}$$

где X_2 и Y_2 — полиномы или ряды по целым степеням переменных x и y, начинающиеся с членов не ниже второй степени. Известно [1]), что заменой переменных вида

$$x = x_1 + F_2(x_1, y_1), \quad y = y_1 + G_2(x_1, y_1),$$

где F_2 и G_2 — ряды, содержащие члены только выше первой степени по x и y, дифференциальное уравнение (60) приводится к виду

$$x_1^{n+1}dy_1 + \left[\alpha y_1 + x_1 y_1 A(x_1) + \right.$$
$$\left. + y_1^2 B(y_1) + C(x_1) + x_1 y_1^2 \Phi(x_1, y_1)\right] dx_1 = 0, \tag{61}$$

где α — постоянная, отличная от нуля, n — целое число, A, B, C и Φ — ряды по целым степеням x_1 и y_1 соответственно и $C(0) = 0$. Покажем, что можно подобрать такую замену переменного, что $C(x_1)$ будет начинаться с члена $n + 1$ степени. Приравняем нулю коэффициент при dx_1 в (61), разрешим это уравнение

---

[1]) Дюлак [18], с. 59.

относительно переменного y_1, получим $y_1 = y_1(x_1)$. Обозначим через $\varphi_n(x_1)$ члены со степенями ниже $n+1$, входящие в $y_1(x_1)$. Проделав в уравнении (61) замену переменного $y_1 = \varphi_n(x_1) + z_1$, получим

$$x_1^{n+1}dz_1 + [\alpha z_1 + x_1 z_1 A_1(x_1) + \\ + z_1^2 B(z_1) + C_1(x_1) + x_1 z_1^2 \Phi(x_1, z_1)]\, dx_1 = 0,$$

где $C_1(x_1)$ начинается с члена не ниже $n+1$ степени по переменному x_1. Для дальнейших рассуждений будет полезно показать, что с помощью замены переменных возможны следующие упрощения дифференциального уравнения (61):

1) можно считать $B(y_1)$ тождественно равным нулю;

2) можно $x_1 A(x_1)$ заменить на bx_1^n, где b — постоянная, которая может быть и нулем;

1. Чтобы привести к случаю, когда $B \equiv 0$, запишем уравнение (61) в виде

$$\frac{x_1^{n+1}dy_1}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)} + \\ + \left[1 + \frac{x_1 y_1 A_1(x_1) + C(x_1) + x_1 y_1^2 \Phi(x_1, y_1)}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)}\right] dx_1 = 0. \quad (62)$$

Построим функцию $z(y_1)$ такую, что

$$\frac{dy_1}{\alpha y_1 + y_1^2 B(y_1)} = \frac{dz}{\alpha z}.$$

Это уравнение имеет бесконечно много голоморфных решений $z(y_1)$, равных нулю при $y_1 = 0$. Среди этих решений выберем функцию вида

$$z = y_1 + y_1^2 f(y_1), \quad (63)$$

где f — ряд по целым степеням y_1. Делая замену переменного (63) в уравнении (62), приведем его к виду

$$\frac{x_1^{n+1}}{\alpha z} dz + dx_1 + \frac{x_1 z A(x_1) + C(x_1) + x_1 z^2 \Phi_1(x_1, z)}{\alpha z[1 + zh(z)]} dx_1 = 0,$$

где $h(z)$ — функция голоморфная и равная нулю при $z = 0$. Умножая обе части уравнения на αz, получим

$$x_1^{n+1}dz + [\alpha z + x_1 z A(x_1) + C(x_1) + x_1 z^2 \Phi_2(x_1, z)]\, dx_1 = 0.$$

2. Чтобы показать возможность замены $x_1 A(x_1)$ на bx_1^n рассмотрим уравнение

$$\frac{\alpha + x_1 A(x_1)}{x_1^{n+1}} dx_1 = \frac{\alpha + bx_2^n}{x_2^{n+1}} dx_2.$$

Покажем, что при надлежащем выборе постоянной b это уравнение имеет голоморфное решение $x_2 = f(x_1)$, равное нулю при $x_1 = 0$. Положим

$$x_2 = wx_1 + x_1. \tag{64}$$

Тогда получим уравнение

$$\left[\alpha + bx_1^n (1 + w)^n\right] \cdot [x_1 dw + (1 + w) dx_1] = \\ = (w + 1)^{n+1} [\alpha + x_1 A(x_1)] dx_1,$$

которое можно записать следующим образом:

$$x_1 \left(\alpha + bx_1^n + \ldots\right) dw = \\ = \left(n\alpha w + c_1 x_1 + \ldots - bx_1^n + \ldots\right) dx_1,$$

где выписаны только члены наинизшей степени как среди членов, содержащих b, так и среди членов, не зависящих от b. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_1^k.$$

Коэффициенты a_k определяются из уравнений

$$(k - n)\alpha a_k = P_k, \tag{65}$$

где P_k — полином, зависящий от коэффициентов a_q, для которых $q < k$, и коэффициентов ряда $A(x_1)$. Легко найти a_k, если $k < n$. Эта группа коэффициентов не зависит от b, для $k = n$ уравнение (65) примет вид $0 = P_n - b$. Положим $b = P_n$, и тогда a_n будет произвольным. Принимая, например, $a_n = 0$, можно определить коэффициенты a_k и для $k > n$. Очевидно, что полученное таким образом разложение w будет сходящимся рядом для достаточно малых x_1. Сделав в уравнении (61) подстановки (63) и (64), получим

$$x_2^{n+1} dz + \left[\alpha z + bzx_2^n + H(x_2) + x_2 z^2 F(x_2, z)\right] dx_2 = 0. \tag{66}$$

В результате от уравнения (60) заменой переменных

$$x = x_1 + F_2(x_1, y_1); \quad y = y_1 + G_2(x_1, y_1)$$

и

$$z = y_1 + y_1^2 f(y_1); \quad x_2 = x_1 [1 + w(x_1)]$$

можно прийти к уравнению (66). Ряд w не имеет свободного члена, и, очевидно, эти подстановки приводятся к виду

$$x_2 = x + Q_2(x, y); \quad z = y + R_2(x, y),$$

где Q_2 и R_2 — ряды, начинающиеся с членов не ниже второй степени, по x и y.

§ 25. Поведение характеристик в окрестности исключительной особой точки

Чтобы исследовать характеристики уравнения (60) в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, достаточно рассмотреть уравнение (61) вблизи точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; опуская индексы, запишем это уравнение в виде

$$x^{n+1}dy + [\alpha y + xyA(x) + \\ + y^2B(y) + C(x) + xy^2\Phi(x, y)]dx = 0. \quad (67)$$

Известно (Бендиксон, с. 45), что если рассматривать характеристики, проходящие через точки, близкие к началу координат и *расположенные в области, где* $x > 0$, то могут представиться два случая:

1. Если $\alpha < 0$, то y стремится к нулю при x, стремящемся к нулю на каждой из характеристик. Все кривые проходят через начало координат.

2. Если $\alpha > 0$, то существует единственная, отличная от $x = 0$ характеристика, проходящая через начало координат. Пусть ее уравнение будет $y = \varphi(x)$.

В обоих случаях характеристики, отличные от $x = 0$, оканчиваются в начале координат, касаясь прямой $y = 0$. Действительно, все характеристики, оканчивающиеся в (0, 0), имеют определенные касательные. Чтобы найти эти касательные, положим $x = ty$. Тогда уравнение (67) приводится к виду

$$[\alpha + yh(ty)][y\,dt + t\,dy] + t^{n+1}y^n dy = 0. \quad (68)$$

Если t стремится к конечному пределу, когда y стремится к нулю, то предел в силу (68) может быть только $t=0$. Но это невозможно, ибо в плоскости y, t для уравнения (68) точка $t=0$, $y=0$ — седло. Через эту точку проходят две характеристики $t=0$ и $y=0$. В плоскости x, y им соответствует характеристика $x=0$ и не могут соответствовать рассматриваемые характеристики. Следовательно, t должно неограниченно расти, когда x и y стремятся к нулю.

Известно, что в случае $\alpha > 0$ функция $y=\varphi(x)$, соответствующая характеристике, оканчивающейся в начале координат, вообще не выражается рядом по целым степеням x. Эта функция полурегулярная при $x=0$. Каково бы ни было σ, можно записать:

$$\varphi(x) = P_\sigma(x) + x^\sigma R_\sigma(x),$$

где P_σ — полином степени σ и R_σ стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. Если предположить, что $C(x)$ имеет множитель x^{n+1} (это можно сделать в силу рассуждений § 24), то многочлен P_σ при $\sigma > n+1$ будет также иметь множитель x^{n+1}.

Исследуем теперь характеристики, близкие к началу координат и расположенные в области $x<0$. Для этого достаточно заменить x на $-x$.

Очевидно, будут иметь место следующие четыре случая:

1. $\alpha<0$, n — *четное*. Все характеристики оканчиваются в $(0, 0)$.

2. $\alpha<0$, n — *нечетное*. В области $x>0$ все характеристики оканчиваются в $(0, 0)$. Только одна характеристика из области $x<0$ оканчивается в $(0, 0)$ и вместе с двумя полуосями Oy она ограничивает два отталкивающих сектора.

3. $\alpha>0$, n — *четное*. Четыре дуги характеристик оканчиваются в $(0, 0)$. Две из них образованы двумя полуосями Oy. Две другие касаются оси Ox: одна со стороны положительных x, другая со стороны отрицательных x. Эти характеристики ограничивают четыре отталкивающих сектора.

4. $\alpha>0$, n — *нечетное*. Все характеристики, расположенные со стороны отрицательных x, оканчиваются в $(0, 0)$, и только одна характеристика со стороны $x>0$ оканчивается в $(0, 0)$. Вместе с двумя полуосями Oy она ограничивает два сектора отталкивания.

Из проведенных рассуждений и из всего сказанного в §§ 3, 4 следует, что особые циклы, проходящие через исключительную особую точку, содержат часть оси Oy и ее продолжение через точку (0, 0). Можно предположить, изменяя направление осей, что часть оси Oy, которая принадлежит циклу, расположена со стороны положительных y и что ее продолжение расположено со стороны положительных x. Следовательно, достаточно рассматривать только случаи 3 и 4, предполагая $\alpha > 0$, и изучать характеристики, расположенные в области $x > 0$ над характеристикой, касающейся оси Ox в (0, 0).

§ 26. Упрощение дифференциального уравнения в окрестности исключительной особой точки

Используя результаты, установленные в § 24, запишем уравнение (66) в виде

$$x_2^{n+1}dz + \Big[z\left(\alpha + bx_2^n\right) + \\ + H(x_2) + \sum_{i=1}^{\infty} z^{i+1}\alpha_i(x_2)\Big]dx_2 = 0, \qquad (69)$$

где α — положительно; H — ряд по степеням x_2, начинающийся с членов степени не ниже $n+1$. Пусть $z = \varphi(x_2)$ — единственное решение, такое, что z стремится к нулю при x_2, стремящемся к нулю. Проделав замену переменного $z = \varphi(x_2) + w$, уравнение (69) приведем к виду

$$x_2^{n+1}dw + w\Big[\alpha + bx_2^n + \\ + \sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\varphi^{i+1}(x_2)\alpha_i(x_2) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x_2)w^i\Big]dx_2 = 0,$$

где $b_i(x_2)$ — полурегулярные функции в окрестности $x_2 = 0$.

Положим $w = z_1\lambda(x_2)$ и покажем, что при надлежащем подборе $\lambda(x_2)$ уравнению можно придать вид

$$x_2^{n+1}dz_1 + z_1\left[\alpha + bx_2^n + \sum_{i=1}^{\infty} z_1^i\beta_i(x_2)\right]dx_2 = 0, \qquad (70)$$

где функции b и β_i — полурегулярные и равные нулю при $x_2 = 0$. Для этого достаточно, чтобы

$$x_2^{n+1} \frac{\lambda'(x_2)}{\lambda(x_2)} + \alpha + bx_2^n + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)\,\varphi^{i+1}(x_2)\,\alpha_i(x_2) = \\ = \alpha + bx_2^n;$$

$\varphi(x_2)$, так же как и $H(x_2)$, имеет множитель x_2^{n+1}.

Полученное уравнение можно представить в виде $\lambda' = \lambda g(x_2)$, и поэтому

$$\lambda(x_2) = e^{\int\limits_0^{x_2} g(t)dt} = 1 + G(x_2).$$

Очевидно, что $G(x_2)$ — функция полурегулярная и равная нулю при $x_2 = 0$.

Уточним область, в которой имеет смысл рассматривать уравнение (70). Можно предполагать, что в уравнении (69) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x_2)\, z^{i+1}$ сходится при $|z| \leqslant \varepsilon$, и $|x_2| \leqslant \varepsilon'$ и что в этой области $\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i z^{i+1}\right|$ не превосходит M. Члены рассматриваемого ряда (по модулю) при $|x_2| < \varepsilon'$ меньше соответствующих членов разложения по степеням z выражения $\zeta = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - z}$. Заменяя в этом выражении z на

$$z = \varphi(x_2) + z_1[1 + G(x_2)], \tag{71}$$

будем иметь

$$\zeta = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - \varphi(x_2) - z_1[1 + G(x_2)]} = \\ = \frac{M\varepsilon}{\varepsilon - \varphi(x_2)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z_1[1 + G(x_2)]}{\varepsilon - \varphi(x_2)}}.$$

Можно предполагать ε' настолько малым, чтобы функции $H(x_2)$ и $\varphi(x_2)$ были определены при всех $0 \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon'$ и чтобы для этих значений x_2 выполнялись неравенства

$$|\varphi(x_2)| < \varepsilon/2; \quad |1 + G(x_2)| < 2; \quad \alpha + b\varepsilon'^n > 0. \tag{72}$$

Каждый член разложения ζ по степеням z будет, следовательно, меньше по модулю соответствующего члена в разложении $\dfrac{2M\varepsilon}{\varepsilon - 2z_1\,|\,1 + G(x_2)\,|}$.

Слагаемые, в которые z_1 входит в степени выше первой, будут равны слагаемым с той же степенью в разложении

$$\zeta = \frac{2^3 M (1+G)^2 z_1^2}{\varepsilon\left(\varepsilon - 2z_1\,|\,1+G\,|\right)}.$$

Члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_1^k \beta_k(x_2)$ получаются из членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{k+1}\alpha_k(x_2)$ заменой z выражением (71) с последующим делением на $z_1(1+G)$. Члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_1^k\beta_k$ будут, следовательно, по модулю меньше соответствующих членов разложения $\dfrac{2^4 M z_1}{\varepsilon\left(\varepsilon - 4z_1\right)}$. Если положить

$$x_2 = \varepsilon' u; \quad na = \frac{\alpha}{\varepsilon'^n}; \quad k_i(u) = \frac{\beta_i(\varepsilon' u)}{\varepsilon'^n}, \tag{73}$$

то уравнение (70) приводится к виду

$$u^{n+1} dz_1 + z_1\left[na + bu^n + \sum_{i=1}^{\infty} z_1^i k_i(u)\right] du = 0.$$

При $0 \leqslant u \leqslant 1$ члены ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i(u)\, z_1^i$ по модулю будут меньше членов с той же степенью z_1 в разложении

$$\frac{2^4 M z_1}{\varepsilon'^n \left(\varepsilon - 4z_1\right)\varepsilon}. \tag{74}$$

Вместе с тем при $0 \leqslant u \leqslant 1$ имеет место неравенство $na + bu^n > nc$, где c, согласно (72),— положительное число. Из полученного неравенства следует, что если $0 \leqslant u \leqslant 1$, то выражение $na + bu^n + \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_1^i k_i(u)$ может обратиться в нуль при значении z_1, по модулю больше того, которое удовлетворяет уравнению nc —

$-\dfrac{2^4 M z_1}{\varepsilon'^n(\varepsilon - 4z_1)} = 0.$ Пусть $0 < \eta < \varepsilon/4$ есть постоянное такое, что

$$\frac{2^4 M}{\varepsilon'^n \cdot \varepsilon} = \frac{nc(\varepsilon - 4\eta)}{\eta}. \tag{75}$$

Если положить

$$z_1 = \eta v; \quad h_i(u) = \frac{k_i(u)}{\eta^i}, \tag{76}$$

то получим уравнение

$$u^{n+1} dv + v\left[na + bu^n + \sum_{i=1}^{\infty} v^i h_i(u)\right] du = 0. \tag{77}$$

Коэффициенты ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v^i h_i(u)$ будут при $0 \leqslant u \leqslant 1$ по модулю меньше соответствующих членов (74), где z_1 заменено на ηv. Заменяя одновременное в этом выражении M его значением из (75), получим $\dfrac{nc(\varepsilon - 4\eta)v}{\varepsilon - 4\eta v}$, полагая $\theta = 4\eta/\varepsilon$, будем иметь

$$\frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v}. \tag{78}$$

Коэффициенты разложения в ряд по степеням v выражения (78) служат мажорантами для функций $h_i(u)$.

Уравнение (77), которое в дальнейшем будет рассматриваться, имеет смысл при $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1/\theta$. Так как $\theta < 1$, то область изменения v можно брать от 0 до 1. При этих условиях коэффициент при du в уравнении (77) положительный, поскольку $na + bu^n > nc$, в то время как (согласно (78)) сумма абсолютных значений членов ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v^i h_i(u)$ меньше или равна nc.

§ 27. Приведенная форма дифференциального уравнения

Чтобы придать уравнению (77) возможно более простую форму, будем предполагать, согласно § 21, что в уравнении (61) функция $B(y_1) \equiv 0$, т. е. оно приводится к виду (76) или (77), где $\beta_k(0)=0$, $h_k(0)=0$. Пусть s — произвольное целое положительное число. Поскольку $\beta_k(u)$ — полурегулярные функции при $u=0$, уравнение (77) можно записать в виде

$$u^{n+1}dv+V\,du=0, \tag{79}$$

где

$$V=(na+bu^n)\,v+v^2\sum_{i=1}^{s-1}u^i f_i(v)+u^s v^2 F(u,v),$$

$f_1, \ldots, f_{s-1}$ — ряды по целым степеням v; $F(u, v)$ — ряд по степеням v, коэффициенты которого полурегулярные функции u, равные нулю при $u=0$.

Покажем, что заменой переменного вида

$$z=K(u,\ v) \tag{80}$$

уравнению (77) можно придать форму

$$u^{n+1}dz+z[na+bu^n+zu^s m(u,\ z)]du=0, \tag{81}$$

где m — ряд по целым степеням z, коэффициенты которого полурегулярные функции переменного u при $u=0$.

Сделав замену переменного (80) в уравнении (79), получим

$$u^{n+1}dz+\left(VK_v'-u^{n+1}K_u'\right)du=0.$$

Чтобы это уравнение имело форму (81), после замены переменного v в функциях K_v' и K_u' его значением через z и u, достаточно потребовать выполнения тождества

$$VK_v'-u^{n+1}K_u'\equiv(an+bu^n)\,z+z^2u^s m\,(u,z).$$

Это будет иметь место, если выражение

$$N=\left[(an+bu^n)\,v+v^2\sum_{i=1}^{s-1}u^i f_i(v)\right]K_v'-$$
$$-u^{n+1}K_u'-(an-bu^n)\,K$$

не содержит членов, в которые u входит в степени, меньшей чем s. Будем искать $K(u, v)$ в виде суммы

$$K(u,v)\equiv k_0(v)+uk_1(v)+\ldots+u^{s-1}k_{s-1}(v)+u^s k_s(v).$$

Чтобы найти коэффициенты $k_0, k_1, \ldots, k_{s-1}$, напишем условие того, что члены в выражении $\mathring{N}$, которые содержат u в степени, меньшей чем s, равны нулю. Обозначим k_i' производную $k_i(v)$; имеем

$$vk_0' - k_0 = 0; \quad k_0 = v.$$

Пусть $q < n$; приравнивая нулю члены с u^q в N, получим

$$na\left(vk_q' - k_q\right) + v^2\left(f_1k_{q-1}' + f_2k_{q-2}' + \ldots + f_qk_0'\right) = 0.$$

Рассмотрим частное решение этого уравнения

$$k_q = \frac{-v}{an}\int\limits_0^v \left(f_1k_{q-1}' + f_2k_{q-2}' + \ldots + f_qk_0'\right)dv.$$

Применяя полученную формулу для $q = 1$, найдем, что k_1 будет рядом по целым степеням v, имеющим множитель v^2. Обычные в таких случаях рассуждения доказывают, что то же свойство имеет место для $q = 2, 3, \ldots, n-1$. Если $q \geqslant n$, имеем

$$\begin{aligned} na\left(vk_q' - k_q\right) + v^2\left(f_1k_{q-1}' + \ldots + f_qk_0'\right) + \\ + bvk_{q-n}' - (b + q - n)\,k_{q-n} = 0; \end{aligned} \tag{82}$$

в частности, для $q = n$

$$na\left(vk_q' - k_q\right) + v^2\left(f_1k_{q-1}' + \ldots + f_qk_0'\right) = 0.$$

Очевидно, что, как и выше, можно взять k_n в виде ряда по целым степеням v, имеющего множителем v^2. То же самое будет иметь место и для k_q, $n \leqslant q \leqslant s-1$. Коэффициент k_s подберем так, чтобы $K(1, v) \equiv v$, тогда ряд k_s будет иметь множителем v^2. Таким образом, приходим к следующему заключению: существует замена переменного вида

$$z = v + uv^2P(u, v), \tag{83}$$

где P — полином по u степени $s-1$, обращающийся в нуль при $u = 1$, коэффициенты которого — ряды по целым степеням v, сходящиеся при $|v| < 1$, такая, что, проделав ее в уравнении (77), получим (81).

§ 28. Общий интеграл дифференциального уравнения (77)

Найдем интеграл уравнения (77) в виде ряда

$$\Gamma(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(u) v^k = \text{const},$$

где γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — функции переменного u. Очевидно, он должен удовлетворять уравнению

$$u^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} v^k \gamma_k(u) =$$
$$= v \sum_{k=1}^{\infty} k v^{k-1} \gamma_k(u) \left[na + bu^n + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(u) v^k \right].$$

Коэффициенты γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ найдем из системы

$$u^{n+1}\gamma_1' = (na + bu^n)\gamma_1; \quad \gamma_1 = u^b e^{-\frac{a}{u^n}},$$

. . . .

$$u^{n+1}\gamma_k' = k(na + bu^n)\gamma_k + \gamma_{k-1}h_1 + \gamma_{k-2}h_2 + \ldots + \gamma_1 h_{k-1}$$
$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Подчинив их дополнительному условию $\gamma_k(1) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$, получим

$$\gamma_k(u) = \gamma_1^k \int_1^u \frac{\gamma_{k-1}h_1 + \ldots + \gamma_1 h_{k-1}}{u^{n+1}\gamma_1^k}\, du.$$

Покажем, что полученный таким образом ряд $\Gamma(u, v)$ будет сходиться в области $0 < u < 1$, $0 < v < 1$.

Согласно § 9 и тому, что было сказано в конце § 26, найдем мажоранты для γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ при $0 < u < 1$. Заменим в уравнении (77) $na + bu^n$ на nc, а функции $h_i(u)$ соответствующими членами разложения по степеням v выражения $-\frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v}$, все коэффициенты которого отрицательны. Чтобы найти мажоранты $\Gamma_k(u)$, $k = 1, 2, \ldots$ для $\gamma_k(u)$ построим общий интеграл

$$C(u, v) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} v^k \Gamma_k(u) = \text{const}$$

уравнения

$$u^{n+1}dv + \frac{ncv(1-v)}{1-\theta v}du = 0 \tag{84}$$

в предположении, что $\Gamma_k(1) \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, причем $\Gamma_1(1) \geqslant e^{-a}$.

Проинтегрировав (84), получим общий интеграл

$$e^{c-a}ve^{-c/u^n}(1-v)^{\theta-1} = c_1,$$

в разложении которого по степеням v все коэффициенты при $u = 1$ положительны. Вследствие этого ряд $\Gamma(u, v)$ будет сходиться при $0 \leqslant u \leqslant 1$. Дадим другое доказательство этого факта, которое выясняет свойства функции $\Gamma(u, v)$. Мажоранты функции γ_k получим, заменяя, согласно § 9, функции h_k их мажорантами, которые по доказанному представляют собой коэффициенты разложения по степеням v выражения $\frac{nc(1-\theta)v}{1-\theta v}$. Если в этом выражении заменить nc на $na + bu^n$, которое всегда больше чем nc, то еще больше увеличим мажоранты функций h_k. Такая замена приводит к уравнению

$$u^{n+1}dv + \frac{(na + bu^n)v(1-v)}{1-\theta v}du = 0,$$

общий интеграл которого при $u = 1$, начинающийся с члена $e^{-a}v$, имеет вид

$$vu^be^{-a/u^n}(1-v)^{\theta-1} = c_1.$$

Коэффициенты разложения левой части общего интеграла по степеням v положительны при $u = 1$ и представляют собой мажоранты для соответствующих членов $\Gamma(u, v)$. Если $\Gamma(u, v)$ представить в виде

$$\Gamma(u, v) = vu^be^{-a/u^n}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k f_{k+1}(u)\right],$$

то члены ряда, заключенного в скобках, имеют мажорантами соответствующие коэффициенты разложения $(1-v)^{\theta-1}$ по степеням v. Этот ряд, следовательно, сходится при $|v| < 1$. В результате получаем следующую теорему.

Уравнение

$$u^{n+1}dv + v[na + bu^n + vh(u, v)]du = 0,$$

где $h(u, v)$ — ряд по целым степеням v, коэффициенты которого полурегулярные функции при $u = 0$, удовлетворяющий условию $na - |b| - H > 0$ (§ 7), имеет при $|v| < 1$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, общий интеграл вида

$$vu^b e^{-a/u^n}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k f_{k+1}(u)\right] = c, \qquad (85)$$

коэффициенты которого f_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots)$ — ограниченные функции при $0 \leqslant u \leqslant 1$.

§ 29. Общий интеграл дифференциального уравнения, имеющего приведенную форму

Предположим, что дифференциальное уравнение (77) приведено к виду (81)

$$u^{n+1}dz + z\,[na + bu^n + zu^s m(u, z)]\,du = 0,$$

$$zm(u, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k m_k(u),$$

где $m_k(u)$, $k = 1, 2, \ldots$ определены для $0 \leqslant u \leqslant 1$ и являются полурегулярными функциями при $u = 0$. Покажем, что в этом случае общий интеграл (85) можно представить в виде

$$\Gamma(u, z) \equiv zu^b e^{-a/u^n}\left[1 + u^s \sum_{k=1}^{\infty} z^k g_{k+1}(u)\right] = c, \qquad (86)$$

где g_k, $k = 2, 3, \ldots$,— ограниченные функции при $0 \leqslant u \leqslant 1$. Очевидно, что эти функции остаются конечными, когда $u \neq 0$, ибо $g_k = f_k/u^s$. Чтобы исследовать их при $u = 0$, рассмотрим уравнение

$$u^{n+1}\Gamma'_u = z\Gamma'_z\,[na + bu^n + zu^s m(u, z)],$$

которому должна удовлетворять функция $\Gamma(u, z)$. Обозначим через $\gamma(u)$ выражение $u^b e^{-a/u^n}$ и положим

$$\Gamma(u, z) = z\gamma(u) + u^s\gamma(u)\,g(u, z),$$

$$g(u, z) = \sum_{k=2}^{\infty} z^k g_k(u).$$

Функция $g(u, z)$ удовлетворяет уравнению

$$u^{n+1}g'_u + (na + bu^n + su^n)\,g - (na + bu^n)\,zg'_z =$$
$$= \left(z^2 + z^2u^s g'_z\right) m(u, z),$$

поэтому для коэффициентов $g_k(u)$ должны быть справедливы равенства

$$u^{n+1}g_k' - [na(k-1) + u^n(b_k - b - s)]\, g_k =$$
$$= m_{k-1} + u^s[m_1(k-1)g_{k-1} + \ldots + m_{k-2}g_2]$$
$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Допустим, что для $k = 2, 3, \ldots, p-1$ ограниченность g_k доказана. Покажем, что g_p также ограничена. Если обозначим $g_p = y$, $u = x$, то функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^{n+1}y' - [na(p-1) + x^n(bp - b - s)\,y] = \varphi(x), \quad (87)$$

где $\varphi(x)$ — ограниченная функция при $0 \leqslant x \leqslant 1$. В соответствии со сказанным ранее достаточно показать, что $y(x)$ остается ограниченной при x, стремящемся к нулю. Доказательство для $y = g_2$ будет непосредственно получаться тем же методом, что и для $k = p$.

Пусть ε таково, что при $0 < x < \varepsilon$ имеет место неравенство

$$na(p-1) + (pb - b - s)x^n > 0.$$

Можно найти два числа A и B, $A > B$ и построить прямоугольник со сторонами $x = 0$, $x = \varepsilon$, $y = A$, $y = B$ такой, что при $0 < x < \varepsilon$ кривая

$$y[na(p-1) + (pb - s - b)x^n] + \varphi(x) = 0 \quad (88)$$

лежит внутри этого прямоугольника. Часть плоскости xy, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = \varepsilon$, делится на три области: область I, для которой $y > A$, область III, для которой $y < B$, и область II внутри прямоугольника.

Рассмотрим характеристику уравнения (87) для x, уменьшающихся от ε до 0. Пусть M — точка этой характеристики с координатами x, y. Если M все время остается внутри области I, то y будет убывать и стремиться при x, стремящемся к нулю, к конечному пределу, большему или равному A. Если M все время остается в области III, то y будет возрастать и стремиться при x, стремящемся к нулю, к конечному пределу, меньшему или равному B. Приняв во внимание, что каждая характеристика, проходящая через точки прямых $y = A$ и $y = B$, входит в область II при убывающих x, придем к заключению, что каждая характеристика, которая не остается в области I или в области III, остается в области II и, следовательно, остается ограниченной при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Можно установить более точный результат и показать, что когда x стремится к нулю, y стремится к конечному пределу, равному ординате точки пересечения оси Oy с кривой (88).

§ 30. Свойства общего интеграла уравнения (85)

Преобразуем замену переменного (83) к виду

$$z = v + v \sum_{i=1}^{\infty} v^i \left[p_i(u) + c_i u^s\right], \tag{89}$$

где $p_i(u)$ — полиномы, степени $s-1$ по переменному u, c_i — постоянные такие, что $p_i(1) + c_i = 0$. Если в интеграле (86) уравнения (78) переменное z заменить его выражением (89), то получим интеграл уравнения (77). Этот интеграл при $u = 1$ имеет значение ve^{-a} такое же, как и общий итеграл (85) уравнения (77). Поэтому

$$z\left[1 + u^s \sum_{k=1}^{\infty} z^k g_{k+1}\right] \equiv v\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k f_{k+1}\right],$$

где z нужно заменить его выражением (89).

Приравнивая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях v, получим

$$f_2(u) = p_1(u) + u^s[g_2(u) + c_1],$$

. . . .

$$f_k(u) = p_{k-1}(u) + u^s P_k(g_2, \ldots, g_k) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где P_k — линейное выражение относительно $g_2, g_3, \ldots$ $\ldots, g_k$ Так как целое число s может быть каким угодно, то эта формула показывает, что функции $f_k(u)$ полурегулярные при $u = 0$.

§ 31. Функция соответствия в окрестности характеристики, проходящей через одну исключительную особую точку

Рассмотрим в плоскости u, v квадрат $O'A'D'B'$, стороны которого имеют уравнения $O'A'$: $v = 0$; $O'B'$: $u = 0$; $A'D'$: $u = 1$; $B'D'$: $v = 1$. Характеристика C'

дифференциального уравнения (77), входящая в квадрат через точку Q' стороны $A'D'$, выходит из него, пересекая сторону $B'D'$ в точке N', так как v возрастает, когда u убывает от 1 до 0. Действительно, из рассуждений, проведенных в § 26, следует, что $\frac{dv}{du} < 0$ внутри квадрата $O'A'D'B'$. Пусть $(1, v)$ — координаты точки Q', а $(u, 1)$ — координаты точки N'. Всегда можно, заменяя, в случае необходимости, v на cv, выбрать постоянную c так, чтобы формула (85) общего интеграла (77) сохраняла смысл и при $v = 1$. Общий интеграл (85) непосредственно дает зависимость между параметрами u и v, определяющими положение точек N' и Q' на прямых $v = 1$ и $u = 1$:

$$ve^{-a} = u^b e^{-a/u^n}\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} f_k(u)\right]. \qquad (90)$$

Это и есть искомая функция соответствия.

Из вида уравнения (66) следует, что все коэффициенты $\alpha_i(x_2)$ в уравнении (69) имеют множитель x_2. В силу этого в уравнении (77) все коэффициенты $h_i(u)$ имеют множитель u. Применяя к уравнению (77) результат, полученный в § 29, видим, что функции $f_k(u)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ равны нулю при $u = 0$. Следовательно, (90) можно записать в виде

$$v = a_1 u^b e^{-a/u^n}[1 + f(u)], \qquad (91)$$

где a_1 — постоянная, $f(u)$ равно нулю при $u = 0$.

Далее заметим, что, согласно доказанному в § 30,

$$f_k(u) = p_{k-1}(u) + u^s P_k(g_2, \ldots, g_k) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где $p_{k-1}(u)$ — полиномы по u степени, меньшей чем s и ряд $v + \sum_{k=1}^{\infty} p_k v^{k+1}$ сходится при $|v| \leqslant 1$. Следовательно, $f(u)$ есть *функция полурегулярная* и равная нулю при $u = 0$.

Рассмотрим в плоскости xy две кривые S и S', соответствующие прямым $u = 1$ и $v = 1$ плоскости u, v. Пусть C — характеристика уравнения (60), соответствующая характеристике C' уравнения (77), и C_0 — характеристика (60), проходящая через особую точку (0, 0) и соответствующая двум дугам сепаратрис $u = 0$, $v = 0$, ограничивающих область отталкивания, в которой расположена C. Кривые S и S' пересекают C_0 в точках Q_0 и N_0. Точкам Q_0 и N_0 соответствуют близкие точки Q и N, лежащие на пересечениях дуг S и S' с кривой C. Функция соответствия между Q и N известна.

Освободимся от ограничений, связанных со специальным выбором кривых S и S'. Возьмем на части дуги C_0, соответствующей $v=0$, точку R_0, а на части дуги C_0, соответствующей $u=0$,— точку P_0. Пусть эти точки будут таковы, что, перемещаясь по C_0 в направлении P_0OR_0 встречаем последовательно точки P_0, N_0, O, Q_0, R_0, не пересекая других особых точек, отличных от $(0, 0)$.

Пусть S_1 — дуга кривой, пересекающей C_0 в R_0, и S_1' — дуга кривой, пересекающей C_0 в P_0. Найдем функцию соответствия между точками P и R, в которых характеристика C, проходящая через Q и N, пересекает кривые S_1 и S_1'. Эта зависимость получается непосредственно на основании § 2 (см. § 19, замечание), если координаты x и y точки Q на S будут голоморфными функциями u, а координаты точки N на S' будут голоморфными функциями v. Исследуем результирующую замену переменных, переводящую уравнение (60) в уравнение (77). Эти замены следующие:

$$x_2 = x + Q_2(x, y), \quad z = y + R_2(x, y), \tag{92}$$

$$z = \varphi(\varepsilon' u) + [1 + G(\varepsilon' u)]\eta v, \quad x_2 = \varepsilon' u. \tag{93}$$

Функции $\varphi(\varepsilon' u)$ и $G(\varepsilon' u)$ — полурегулярные и равные нулю при $u=0$, $Q_2(x, y)$ и $R_2(x, y)$ — ряды, начинающиеся с членов не ниже второй степени по x и y. Равенства (92) можно разрешить относительно x и y, выразив их как голоморфные функции x_2 и z. В силу этого на кривой S, соответствующей $u=1$, x и y будут голоморфными функциями v. Пусть t — параметр, фиксирующий положение точки R на S_1; если этот параметр обращается в нуль, когда R совпадает с R_0, то справедливо соотношение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v^k,$$

где правая часть — ряд по степеням v с постоянными коэффициентами b_k ($k = 1, 2, \ldots$). Из этой зависимости и уравнения (91) получаем

$$t = a_2 u^b e^{-a/u^n} [1 + F(u)],$$

где постоянная $a_2 \neq 0$, $F(u)$ — функция полурегулярная и равная нулю при $u = 0$.

Однако, рассуждая таким образом, нельзя получить соответствие между точкой P на S_1' и точкой N на S'. Действительно, согласно формуле (93), на дуге S', соответствующей $v = 1$, имеем

$$z = \varphi(\varepsilon' u) + [1 + G(\varepsilon' u)]\eta, \quad z = \eta + m(u),$$

где функция $m(u)$ — полурегулярная и равная нулю при $u = 0$; координаты x и y точки N на S' не будут голоморфными функциями u, эти функции полурегулярные.

§ 32. Окончательная форма функции соответствия

Чтобы найти функцию соответствия между точками пересечения характеристики C с кривыми S' и S_1', рассмотрим промежуточную кривую S'', имеющую в плоскости z, u уравнение $z = \varepsilon$. Постоянная ε, о которой шла речь в § 26, не превосходит радиуса сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x_2) z^k$, который входит в уравнение (69). Пусть $\eta < \varepsilon$. Кривая S'' пересекает характеристику C_0 в точке M_0 и характеристику C в точке M. Чтобы найти функцию соответствия между точками M и N, т. е. точками пересечения характеристики C с кривыми S' и S'', рассмотрим дифференциальное уравнение (66) и запишем его в виде

$$x_2^{n+1} dz + \alpha [z + x_2 H_2(x_2, z)] dx_2 = 0.$$

Заменяя x_2 на $\varepsilon' u$ и α на $n a \varepsilon'^n$, получим уравнение

$$u^{n+1} dz + na[z + uK_1(u, z)] du = 0, \tag{94}$$

где K_1 — ряд по целым степеням u и z, не имеющий свободного члена. Число ε' можно считать настолько малым, чтобы дуга кривой $z + x_2 H_2(x_2, z) = 0$ при $0 \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon'$ не пересекала бы дуги кривых $z = \varphi(x_2) + [1 + G(x_2)]\eta$ и $z = \varepsilon$, отвечающих соответственно дугам S' и S'' в плоскости x_2, z. Это означает, что при $0 < u < 1$ кривая $z + uK_1(u, z) = 0$ не пересекает кривых

Σ' и Σ'', представленных в плоскости u, z уравнениями $z = \eta + m(u)$ и $z = \varepsilon$, которым в плоскости x, y соответствуют кривые S' и S''. Выражение $z + uK_1(u, z)$ остается положительным, когда точка (u, z) лежит в области, ограниченной прямыми $u = 0$, $u = 1$, Σ'' и кривой Σ'. Таким образом, если, оставаясь в этой области, перемещаться по характеристике уравнения (94), то координата u текущей точки будет убывать при возрастании z от значения на кривой Σ' до ε. Вследствие этого каждая характеристика C уравнения (60), пересекающая S' в точке N с параметром u, пересечет S'' в точке M с параметром u_1. Построив рисунок, можно заключить, что если u_1 достаточно мало, то каждая характеристика C, пересекающая S'' в точке M, пересечет S' в точке N.

Величины u и u_1, определяющие положение точек N и M, одновременно обращаются в нуль, и каждая из них есть возрастающая функция другой. Покажем, что эти функции полурегулярные.

Характеристика $u = 0$ дифференциального уравнения (94) пересекает дуги Σ' и Σ'' в точках P_0 и M_0 с ординатами $z = \eta$ и $z = \varepsilon$. На дуге P_0M_0 нет других особых точек. Функция u_1, в которую обращается при $z = \varepsilon$ интеграл уравнения (94), удовлетворяющий начальному условию $u_0 = u$ и $z_0 = z$, будет голоморфной функцией u и z для $u = 0$ и $z = 0$. Поэтому $u_1 = H(u, z - \eta)$. Если начальное значение u и z есть координаты точки дуги Σ', представляемой уравнением $z = \eta + m(u)$, то

$$u_1 = H[u, m(u)]. \tag{95}$$

Эта формула показывает, что u_1 — полурегулярная функция u и равная нулю при $u = 0$.

Функции соответствия (95) достаточно для рассмотрения циклов, проходящих через одну исключительную особую точку. Но, чтобы рассматривать все возможные случаи, докажем, что u есть также полурегулярная функция u_1. Это можно установить из вида функции H. Покажем, что отношение u_1/u стремится к единице, когда u стремится к нулю, и что (95) можно разрешить относительно u.

Рассмотрим интеграл уравнения (94), обращающийся при $z = \varepsilon$ в u_1. Значения, которые имеет этот интеграл при z, близких к η, будут голоморфными функциями u_1 и z в окрестности точки $z = \eta$, $u_1 = 0$. Интеграл имеет вид

$$u = \Phi(u_1,\ z - \eta).$$

Если N — точка пересечения характеристики, соответствующей этому интегралу, с кривой Σ', представляемой уравнением $z = \eta + m(u)$, то

$$u = \Phi[u_1,\ m(u)]. \tag{96}$$

Так как $m(u)$ — полурегулярная функция, то, каково бы ни было целое положительное число s, можно записать:

$$m(u) = p(u) + u^s q(u),$$

где p — полином степени s и q стремится к нулю при u, стремящемся к нулю. Рассмотрим соотношение

$$u = \Phi[u_1,\ p(u)]. \tag{97}$$

$\Phi(u_1,\ z - \eta)$ равна нулю при $u_1 = 0$ и, следовательно, имеет множителем u_1. Такой же множитель есть и в правой части (97), поэтому (97) можно переписать в виде $u = g(u_1)$, где $g(u_1)$ — ряд по целым степеням u_1, не имеющий свободного члена. Положим

$$u = g(u_1) + w. \tag{98}$$

Поскольку u и $g(u_1)$ стремятся к нулю при u_1, стремящемся к нулю, то тем же свойством должна обладать и функция w. Если покажем, что w/u_1^s стремится к нулю при u_1, стремящемся к нулю, то тем самым будет установлено, что и u есть полурегулярная функция u_1. Легко установить соотношения

$$\Phi\{u_1,\ p[g(u_1)]\} = g(u_1),$$

$$\Phi[u_1,\ m(u)] = \Phi[u_1,\ p(u)] + u^s R(u,\ u_1),$$

$$\Phi\{u_1,\ p[q(u_1) + w]\} = Q\{u_1,\ p[g(u_1)]\} + wQ(u_1,\ w).$$

Присоединяя к этим трем уравнениям (96), получим

$$u = \Phi[u_1,\ m(u)] = g(u_1) + u^s R(u,\ u_1) + wQ(u_1,\ w).$$

Из этого выражения, согласно (98), находим

$$w = wQ(u_1,\ w) + u^s R(u,\ u_1),$$

где $R(u,\ u_1)$ стремится к нулю при u, стремящемся к нулю, так же как и функция $Q(u_1,\ w)$, которая имеет множителем u_1; поэтому и $\Phi[u_1,\ p(u)]$ стремится к нулю при u, стремящемся к нулю. Следовательно, отношение w/u^s стремится к нулю при u, стремящемся к нулю. Чтобы показать, что то же свойство имеет место и для отношения w/u_1^s, достаточно показать, что u/u_1 не стремится к бесконечности, когда u стремится к нулю.

Функцию $g(u_1)$ в выражении (18) можно представить в виде

$$g(u_1) = cu_1^r(1+\varepsilon_1),$$

где c — постоянная, не равная нулю и ε_1 — функция, которая стремится к нулю при u_1, стремящемся к нулю. Поделив обе части (98) на u, получим

$$1 = c\frac{u_1}{u}u_1^{r-1}(1+\varepsilon_1) + \frac{w}{u}. \tag{99}$$

Когда u стремится к нулю, w/u — стремится к нулю, величина $u_1^{r-1}(1+\varepsilon_1)$ стремится к нулю при $r > 1$ и к единице при $r = 1$. Если отношение u/u_1 не ограничено, то u_1/u стремится к нулю и равенство (99) невозможно.

Согласно (95) отношение u_1/u не может неограниченно возрастать, когда u стремится к нулю, поэтому равенство (99) возможно, если $r = 1$ и предел u/u_1 равен c. Следовательно, имеем соотношение

$$u = cu_1[1 + k(u_1)], \tag{100}$$

где $k(u_1)$ — функция полурегулярная и равная нулю при $u_1 = 0$.

Обозначим t' значение параметра, определяющего положение точки P на кривой S_1'; t' обращается в нуль, когда точка P совпадает с P_0. Между t' и u_1 существует зависимость в форме

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t'^k,$$

где правая часть — ряд по целым степеням t'. На основании (100) получим

$$u = c_1 t'[1 + l(t')],$$

где $l(t')$ — полурегулярная функция, равная нулю при $t' = 0$, c_1 — постоянная.

В силу § 31 имеем

$$t = a_2 u^b e^{-a/u^r}[1 + F(u)].$$

Заменяя u его выражением через t', получим соотношение между параметрами t и t', определяющими положение точек пересечения R и P характеристики C, близкой к C_0 с двумя кривыми S_1 и S'_1, выделяющими на C_0 дугу, не содержащую никаких иных особых точек, кроме исключительной точки 0. Выразим это соотношение в более простой форме. Поскольку $l(t')$ — полурегулярная функция u, равная нулю при $t' = 0$, можно записать:

$$-\frac{a}{u^n} = \frac{p(t')}{t'^n} + a_3 + q(t'),$$

где a_3 — постоянная, $p(t')$ — полином по t' степени, меньшей чем n и такой, что $p(0) < 0$; $q(t')$ — функция полурегулярная и равная нулю при $t' = 0$. Следовательно,

$$e^{-a/u^n} = \alpha_1 e^{p(t')/t'^n}[1 + Q(t')]. \tag{101}$$

$$t = \beta t'^b e^{p(t')/t'^n}[1 + G(t')].$$

В этих формулах α_1 и β — постоянные, $Q(t')$ и $G(t')$ — полурегулярные функции, равные нулю при $t' = 0$.

Такова окончательная форма, которую можно дать функции соответствия в окрестности характеристики C_0, пересекающей одну исключительную особую точку.

З а м е ч а н и е. Будем обходить характеристику C_0, начиная с точки P_0 в направлении $P_0N_0OQ_0R_0$ и на продолжении дуги Q_0R_0 возьмем точку T_0 такую, чтобы на дуге R_0T_0 не было ни одной исключительной точки, но имелось бы некоторое число седел. Пусть S''_2 — дуга кривой, пересекающей C_0 в точке T_0. Характеристика C, идущая в направлении $PNQR$, пересечет S''_2 в точке T, положение которой на S''_2 определяется параметром θ, равным нулю, когда T совпадает с T_0. Согласно сказанному в § 21 между параметрами t и θ, определяющими положение точек R и T, существует зависимость

$$\theta = ct^{\nu}[1 + F(t)],$$

где c и ν — положительные постоянные, $F(t)$ — полурегулярная функция, равная нулю при $t=0$. Если в этом выражении для θ заменить t его значением из (101), получим соотношение между параметрами t' и θ, определяющими точки пересечения C с кривыми S_1' и S_2'':

$$\theta = c\beta^{\nu}(t')^{b\nu}e^{\frac{\nu p(t')}{t'^n}}[1+G(t')]^{\nu}[1+F(t)], \qquad (102)$$

$$\theta = \alpha t'^a e^{\frac{q(t')}{t'^n}}[1+\varphi(t')],$$

где положено

$$\alpha = c\beta^{\nu};$$
$$a = b\nu;$$
$$q(t') = \nu p(t');$$
$$1+\varphi(t') = [1+G(t')]^{\nu}[1+F(t')],$$

$\varphi(t')$ — полурегулярная функция, равная нулю при $t'=0$. Действительно, члены $\varphi(t')$, степень которых не превосходит целого числа s, не могут быть получены из $F(t)$, где t заменено его выражением (101). Будем рассматривать только те слагаемые в выражении $[1+ G(t')]^{\nu}-1$, степень которых меньше $s+1$. Эти члены, аналогично членам полурегулярной функции $G(t')$, образуют полином $P_s(t')$, и $\varphi(t')$ будет представляться в виде

$$\varphi(t') = P_s(t') + t'^s Q_s(t'),$$

где $Q_s(t')$ — функция полурегулярная и равная нулю при $t'=0$.

Изменяя незначительно обозначения, рассмотрим две кривые S' и S, пересекающие C_0 в P_0 и T_0. Характеристика C, близкая к C_0, пересечет S' и S в точках P и T, соответствующих параметрам t' и θ, равным нулю, когда P и T совпадают с P_0 и T_0. Между этими параметрами имеет место соотношение (102), если будут выполнены следующие условия:

1. На дуге P_0T_0 кривой C_0 лежит только одна исключительная особая точка, которую будем обозначать P'.

2. На дуге P_0P' кривой C_0 нет других особых точек, отличных от P'.

3. Дуге P_0P' в плоскости u, v соответствует характеристика уравнения (77) $u=0$, дуге $P'T_0$ соответству-

ет характеристика $v=0$. Характеристика C_0 не будет в общем случае голоморфной в P'.

4. На дуге $P'T$, за исключением P', нет особых точек, отличных от седел. Число седел любое.

§ 33. Характеристики, близкие к особому циклу, проходящему через одну исключительную особую точку

Пусть C_0 — особый цикл, проходящий через исключительную особую точку P' и через некоторое количество седел. Обозначим (как и в § 31) через S_1 и S_1' две дуги кривых, пересекающих C_0 в точках R_0 и P_0 так, что на дуге $P_0P'R_0$ нет других особых точек, отличных от P'. Предположим, что дуге P_0P' соответствует в плоскости переменных u, v, введенных в § 31, характеристика $u=0$. Между параметрами t и t', определяющими положение точек пересечения R и P характеристики C с кривыми S_1 и S_1', имеется соотношение (101). Продолжим характеристику C, близкую к C_0 в направлении $R_0P'P$. Согласно сказанному в § 21 о характеристиках, близких к циклу C_0, пересекающему несколько седел, C вновь пересечет S_1 в точке P_1 с параметром t_1. В соответствии с § 23 между параметрами t' и t будет иметь место зависимость вида

$$t_1=c_1t'^{\nu}[1+K(t')],$$

где c_1 и ν — положительные постоянные, $K(t')$ — полурегулярная и равная нулю при $t'=0$ функция. Для того чтобы C была циклом, необходимо, чтобы две точки пересечения R и R_1 кривой C с S_1 совпадали, т. е. чтобы $t_1=t$. Следовательно, должно иметь место равенство

$$\beta t'^{b}e^{\frac{p(t')}{t'^{n}}}[1+G(t')]=c_1t'^{\nu}[1+K(t')].$$

Соотношение подобного вида не может иметь места для значений t', близких к нулю. Действительно, поделив правую и левую части равенства на t'^{ν} и переходя к пределу при t', стремящемся к нулю, видим, что левая часть имеет пределом нуль, в то время как правая часть стремится к пределу, отличному от нуля. Следовательно, *не существует циклов, близких к особому циклу C_0*.

§ 34. Замечания о характеристиках, близких к циклу, проходящему через несколько исключительных особых точек

Параметры u и v, введенные в § 19 при получении функции соответствия в окрестности характеристики, проходящей через одно седло, абсолютно равноправны. Соотношение, связывающее u и v, имеет одинаковый вид, разрешить ли его относительно u или относительно v. Этого уже нельзя сказать о переменных u и v, введенных в § 31 при получении функции соответствия в окрестности характеристики, проходящей через одну исключительную особую точку. Соотношение (91) изменит свою форму, если его разрешить относительно u.

Рассмотрим цикл C_0, проходящий через несколько исключительных особых точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Обозначим через u_i, v_i — параметры, соответствующие точке P_i — аналогичные параметрам u и v, рассмотренным в § 31. Допустим, что параметр u_i играет ту же роль, что и параметр u в § 31. Можно всегда предполагать, как в § 22, что дуга $P_{i-1}P_i$ соответствует положительной части оси $u_i = 0$. Если на цикле C_0 зафиксируем определенное направление обхода, при котором точки P_i проходятся в порядке их индексов, то, начиная от P_1, будут встречаться точки P_i двух различных категорий:

1) такие, для которых дуге $P_{i-1}P_i$ соответствует положительная часть оси $v_i = 0$;

2) такие, для которых дуге $P_{i-1}P_i$ соответствует положительная часть оси $u_i = 0$.

Допустим, что, следуя вдоль характеристики C, близкой к C_0, в направлении, зафиксированном на C_0, пройдем в окрестности точки P_i первой категории. При этом характеристика пересечет линию $u_i = 1$ в точке с параметром v_i и выйдет из окрестности, пересекая кривую $v_i = 1$ в точке с параметром u_i. В этом случае будем говорить, что C_0 пересекает P_i в смысле vu. Если точка P_i — второй категории, то будем говорить, что C_0 пересекает P_i в смысле uv.

Предположим теперь, что, обходя цикл C_0, пересечем исключительную точку P в направлении uv и после прохождения через некоторое число седел пересечем вторую исключительную точку P' в направлении vu. Рассмотрим характеристику C, близкую к C_0. Найдем функцию соответствия между точками пересечения C с двумя дугами кривых S и S', пересекающих C_0 в точках M_0 и M'_0. Пусть при этом кривые S и S' пересекают C_0 таким образом, что, перемещаясь по дуге $M_0M'_0$, начиная с M_0, встречаем вначале точку P, затем после некоторого числа седел точку P' и, наконец, M'_0. Покажем, что искомая функция соответствия имеет форму, аналогичную тому, как если бы на дуге $M_0M'_0$ не существовало других особых точек, кроме седла.

Возьмем на дуге $M_0M'_0$ точку μ_0, заключенную между P и P' и не совпадающую ни с одним из седел. Рассмотрим дугу кривой Σ, пересекающую C_0 в μ_0. Характеристика C встречает последовательно кривые S, Σ, S' в точках M, μ, M' с параметрами t, θ, t'. Предположим, что эти параметры обращаются в нуль, когда C совпадает с C_0. В силу (102) § 32 (замечание) имеем

$$\theta = \alpha t^a e^{\frac{p(t)}{t^n}} [1 + G(t)],$$

$$\theta = \alpha' t'^{a'} e^{\frac{-q(t')}{t'^m}} [1 + H(t')],$$

где α, α', a, a' — положительные постоянные, m и n — целые, p и q — полиномы степени соответственно меньше m и n, G и H — полурегулярные функции, равные нулю при $t = 0$, $t' = 0$.

Приравнивая два значения θ и логарифмируя, получим

$$\frac{q(t')}{t'^m} + a' \ln t' + \ln [1 + H(t')] =$$

$$= \ln \frac{a}{\alpha'} + \frac{p(t)}{t^n} + a \ln t + \ln [1 + G(t)].$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\frac{t'^m}{q(0) + F(t')} = \frac{t^n}{p(0) + K(t)}.$$

Извлекая корень степени m из обоих членов, полагая $\nu = n/m$ и обозначая $A(t')$ и $B(t)$ и полурегулярные функции, равные нулю при нулевых значениях переменных, имеем

$$t'[1+A(t')] = ct^{\nu}[1+B(t)], \tag{103}$$

где c — постоянная. Из (102) следует, что частное t'/t^{ν} имеет конечный предел при t, стремящемся к нулю. Поэтому

$$t' = ct^{\nu}[1+\varphi(t)], \tag{104}$$

где $\varphi(t)$ — стремится к нулю при t, стремящемся к нулю. Покажем, что эта функция полурегулярная при $t=0$. Из (103) и (104) имеем

$$\varphi + (1+\varphi)A(t') = B(t). \tag{105}$$

Так как $A(t')$ — полурегулярная функция при $t'=0$, то, каково бы ни было s, можно записать

$$A(t') = f_s(t',\ t'^m \ln t') + t'^s g_s(t'),$$

где $g_s(t')$ стремится к нулю, когда t' стремится к нулю, f_s — полином по обеим переменным t' и $t'^m \ln t'$. Если заменить t' в выражении $t'^m \ln t$ его значением из (104), то получим

$$t'^m \ln t' = c^m (1+\varphi)^m t^n [\ln c + \nu \ln t + \ln(1+\varphi)].$$

Пусть $K(t,\ t^n \ln t,\ \varphi)$ — значение $f_s(t',\ t'^m \ln t')$, куда вместо t' подставлено (104). Функция K есть ряд по t и $t^n \ln t$, причем все его коэффициенты обращаются в нуль при $t=0$. Таким образом, можно записать

$$A(t') = K(t,\ t^n \ln t,\ \varphi) + t'^s g_s(t').$$

Рассмотрим функцию $z(t)$, равную нулю при $t=0$ и удовлетворяющую уравнению

$$z + (1+z)K(t,\ t^n \ln t,\ z) = B(t), \tag{106}$$

которое получается, если в (105) вместо $A(t')$ подставить $K(t,\ t^n \ln t,\ z)$ и заменить φ на z. Очевидно, z будет голоморфной функцией переменных t, $t^n \ln t$, $B(t)$. Следовательно, z — полурегулярная функция, равная нулю при $t=0$. Положим $\varphi = z + w$; тогда

$$K(t,\ t^n \ln t,\ z+w) = K(t,\ t^n \ln t,\ z) + wG(t,\ t^n \ln t,\ w), \tag{107}$$

где G — ряд по степеням w с коэффициентами, представляющими собой полиномы по t и $t^n \ln t$, равный нулю при $t=0$.

Сделав ту же подстановку $\varphi = z + w$ в (105) и принимая во внимание (106) и (107), получим

$$w + (1+z)[wG + t'^s g_s(t')] + w[K + wG + t'^s g_s(t')] = 0,$$

$$w[1 + G + zG + K + wG + t'^s g_s(t')] = -(1+z)t'^s g_s(t').$$

Это соотношение показывает, что при t, стремящемся к нулю, w и t' стремятся к нулю, причем отношение w/t'^s также стремится к нулю. Аналогично ведет себя и отношение $w/t^{s\nu}$. Величина $s\nu$ может принимать какие угодно большие значения. Отсюда следует, что $\varphi = z + w$ — полурегулярная функция, равная нулю при $t = 0$.

Таким образом, (104) имеет структуру, аналогичную той, какую имеет функция соответствия для характеристики, близкой к дуге $M_0 M_0'$, проходящей через одно седло (§ 19).

§ 35. Характеристики, близкие к циклу, проходящему через несколько исключительных особых точек

Рассмотрим особый цикл C_0, проходящий через исключительные точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и через некоторое число простых седел, которые расположены каким-либо образом между точками P_i. Пусть P_i и P_{i+1} — две последовательно проходимые, исключительные особые точки, такие, что первая проходится в смысле uv, а вторая в смысле vu, когда цикл обходится в фиксированном направлении $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Тогда прохождение характеристики C, близкой к C_0, в окрестности точек P_i, P_{i+1} и седел, заключенных между ними, равносильно в отношении функции соответствия прохождению вблизи одного седла (§ 34). Следовательно, можно исключить из рассмотрения эти две точки вместе с соответствующими седлами и заменить их одним фиктивным седлом. Будем поступать, таким образом, всякий раз, когда встречаются две исключительные точки, из которых первая проходится в смысле u, v, другая — в смысле vu. Устранением точек подобного рода можно прийти к рассмотрению как исключительных точек, расположенных последовательно, так и, в следствие выбрасывания, к точкам, которые первоначально не были последовательны. После попарного удаления указанным способом исключительных точек, насколько это возможно, могут представиться два случая:

1) все исключительные точки устранены;

2) остались некоторые исключительные точки.

В первом случае значениям параметров t и t' соответствуют две точки пересечения характеристики C, близкой к C_0, с кривой S, пересекающей C_0. Между этими параметрами (равными нулю, когда C совпадает с C_0) имеет место зависимость

$$t' = ct^{\nu}[1 + F(t)],$$

где c и ν — положительные постоянные, $F(t)$ — полурегулярная функция, равная нулю при $t = 0$.

Чтобы характеристика C была циклом, необходимо выполнение равенства $t' = t$. Для значений t, близких к нулю, это возможно только в том случае, если $c = 1$, $\nu = 1$ и $F(t) = 0$. При выполнении этих равенств все характеристики C, близкие к C_0, есть циклы. Если же не все предыдущие условия выполнены, то характеристики C, близкие к C_0,— не циклы. Приходим к заключению § 23.

Рассмотрим второй случай, когда остается некоторое число исключительных точек. Пусть эти точки $P'_1, P'_2, \ldots, P'_r$. Можно всегда предполагать, что при надлежащем способе обхода цикла C_0 точка P'_1 имеет тип uv и что другие точки P'_i встречаются в порядке их индексов. Нетрудно показать, что все эти точки имеют также тип uv.

Действительно, если существуют точки типа vu, то можно обозначить первую из этих точек через P'_{i+1}. Две последовательные точки P'_i и P'_{i+1} проходятся — первая в смысле uv, вторая в смысле vu, но это противоречит предположению, поскольку все подобные пары были удалены из рассмотрения. Таким образом, все точки $P'_1, P'_2, \ldots, P'_r$ имеют тип uv.

На характеристике C_0 между точками P'_{i-1} и P'_i выберем точку M_i; тогда точка M_1 лежит между P'_r и P'_1.

Через каждую точку M_i проведем кривую, например отрезок прямой, не касающийся C_0.

Характеристика C, которая встречает S_1 в точке N_1, близкой к M_1, будет пересекать каждую из дуг S_i

в точке N_i, близкой к M_i, и должна будет вновь встретить S_1 в точке N_{r+1}.

Пусть t_i — значение параметра, определяющего положение N_i на S_i; этот параметр обращается в нуль, когда C совпадает с C_0.

Между значениями t_i и t_{i+1}, согласно § 33 (замечание), имеет место соотношение вида

$$t_{i+1} = \alpha_i t_i^{a_i} e^{\frac{p_i(t_i)}{t_i^{n_i}}} [1 + \varphi_i(t_i)],$$

где α_i, a_i — постоянные, $p_i(t_i)$ — полином степени не выше n_i, такой, что $p_i(0) < 0$, φ_i — полурегулярные функции, равные нулю при $t_i = 0$.

Чтобы характеристика C была циклом, необходимо, чтобы $t_{r+1} = t_1$, но это невозможно. Действительно, отношение t_{i+1}/t_i стремится к нулю при t_i, стремящемся к нулю, поскольку $p_i(0) < 0$. Все дроби

$$t_2/t_1;\ t_3/t_2;\ \ldots;\ t_{r+1}/t_r$$

одновременно стремятся к нулю при t_1, стремящемся к нулю. То же самое имеет место и для их произведения. Следовательно, для t_1, близких к нулю, невозможно равенство $t_{r+1} = t_1$. *Никакая характеристика, близкая к C_0, не может быть циклом.* Пришли к тому же заключению, что и в § 23.

ЧАСТЬ 3

ЦИКЛЫ, ПРОХОДЯЩИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

§ 36. Метод исследования

Рассмотрим сложную особую точку P. Перенеся начало координат в нее, запишем дифференциальное уравнение в виде

$$[X_r(x, y) + X^*(x, y)]dy + \\ + [Y_r(x, y) + Y^*(x, y)]dx = 0, \quad (108)$$

где X_r и Y_r — однородные полиномы степени r по переменным x и y, X^* и Y^* — полиномы или ряды, начинающиеся с членов степени не ниже $r+1$. Предположим, что многочлены X_r и Y_r не могут одновременно тождественно обращаться в нуль. Такую особую точку $x = 0$, $y = 0$ назовем *особой точкой порядка r*. Заметим, что если $r = 1$, то особая точка не обязательно будет простой.

Для изучения характеристик, близких к особому циклу, проходящему через сложную особую точку, необходимо провести исследования сепаратрис, примыкающих к этой особой точке. Согласно изложенному в § 3 сепаратрисы могут существовать при условии, что вообще есть характеристики, оканчивающиеся в P с определенной касательной. В этом случае все характеристики, оканчивающиеся в P, имеют в ней касательную. Поэтому целесообразно начать исследование с характеристик, оканчивающихся в P с определенной касательной. Применяемый для этой цели метод состоит в том, что делают замены переменных, приводящие дифференциальное уравнение к *простейшей форме*, т. е. к виду уравнения, имеющего в начале координат *простую* особую точку (§ 6). С помощью этого метода непосредственно выводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы сложная особая точка была *центром* или *фокусом*. Для того чтобы облегчить рассуждения, будем применять наиболее простые замены переменных, позволяющие, однако, изучить сепаратрисы.

Все эти предварительные исследования дают возможность наиболее простым способом построить функции соответствия для характеристик, проходящих в окрестности точки P. Эту функцию соответствия построим вначале для одного случая, который впоследствии будет полезен при переходе к общему случаю. В заключение получим, что прохождение характеристики в окрестности сложной особой точки эквивалентно (в смысле функции соответствия) прохождению характеристики в окрестности нескольких простых особых точек.

§ 37. Дикритическая точка

Рассмотрим вначале случай, когда $x=0$, $y=0$ есть дикритическая точка, т. е. такая особая точка уравнения (108), для которой выражение

$$R(x, y) \equiv yX_r(x, y) + xY_r(x, y) \tag{109}$$

тождественно равно нулю. Обозначим через $P(x, y)$ однородный полином степени $r-1$. Уравнение (108) в этом случае можно записать в виде

$$\left[xP + \sum_{k=r+1}^{\infty} A_k\right] dy + \left[-yP + \sum_{k=r+1}^{\infty} B_k\right] dx = 0, \tag{110}$$

где A_k, B_k — однородные полиномы степени k.

Положим $y = xz$; тогда вдоль каждой характеристики, оканчивающейся в начале координат с касательной, отличной от оси Oy, переменная z должна стремиться к конечному пределу. Этой заменой уравнение (110) преобразуется к виду

$$[P(1, z) + X(x, z)]dz +$$
$$+ [zA_{r+1}(1, z) + B_{r+1}(1, z) + Y(x, z)]dx = 0, \tag{111}$$

где функции X и Y имеют множитель x. Обозначим через Γ характеристику уравнения (111) и C — соответствующую ей характеристику уравнения (110).

Если для $z=a$ выполнены условия

$$P(1, a)=0; \quad aA_{r+1}(1, a)+B_{r+1}(1, a)=0, \quad (112)$$

то направление прямой $y=ax$ назовем *особым направлением*. Характеристике C в плоскости xy, касающейся этого направления, соответствует характеристика Г, проходящая через особую точку $x=0$, $z=a$ в плоскости xz. Оставим этот случай в стороне.

Будем предполагать, что a не удовлетворяет обоим уравнениям (112). В таком случае через точку $x=0$, $z=a$ проходит единственная характеристика Г. Ей соответствует определенная характеристика C, проходящая через точку $x=0$, $y=0$ в направлении $y=ax$. Если $P(1, a)\neq 0$, то ни Г, ни C не представляют никакого интереса для дальнейшего. Допустим, что $z=a$ есть корень кратности $n\geqslant 1$ уравнения $P(1, z)=0$. Полагая $z=a+t$ из уравнения (111) находим

$$x=\alpha t^{n+1}[1+\varepsilon(t)],$$

где α — постоянная, отличная от нуля, и $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при t, стремящемся к нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} &y=xz=ax+tx;\\ &y-ax=\alpha t^{n+2}(1+\varepsilon);\\ &\quad x=\alpha t^{n+1}(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

Если n — четное, то характеристика Г, представляемая уравнениями

$$\begin{aligned} &z=a+t;\\ &x=\alpha t^{n+1}(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

пересекает ось $x=0$ в точке $x=0$, $z=a$. Соответствующая ей характеристика C касается прямой $y=ax$ в точке $(0, 0)$, имея в этой точке такое же расположение, как у обыкновенной кривой в регулярной точке. Если n — нечетное, кривая Г касается оси $x=0$, не пересекая ее в точке $x=0$, $z=a$. Характеристика C имеет в начале координат точку возврата.

Чтобы получить характеристики C, которые касаются оси $x=0$ в точке $(0, 0)$, полагаем $x=uy$ и рассмотрим характеристику Г дифференциального уравнения

$$[-P(u, 1)+X(u, y)]du+$$
$$+[uB_{r+1}(u, 1)+A_{r+1}(u, 1)+Y(u, y)]dy=0,$$

проходящую через особую точку $y=0$, $u=0$. Если $P(0, 1)=0$ и $A_{r+1}(0, 1)=0$, то направление $x=0$ *особое* для дикритической точки.

Во всех других случаях будем иметь единственную характеристику, проходящую через точку $u=0$, $y=0$. Ей соответствует характеристика C, проходящая через точку $x=0$, $y=0$ и касающаяся оси Oy.

Если $u=0$ — корень нечетной кратности уравнения $P(u, 1)=0$, то кривая Γ в точке $u=0$, $y=0$ касается оси $u=0$, не пересекая ее в этой точке. Соответствующая кривая C имеет в $x=0$, $y=0$ точку возврата с касательной $x=0$.

Направление, удовлетворяющее одновременно двум уравнениям

$$P(x, y)=0; \quad yA_{r+1}(x, y)+xB_{r+1}(x, y)=0,$$

назовем *особым*. Неособое направление, получающееся приравниванием нулю линейного множителя нечетного порядка многочлена $P(x, y)$, назовем *необычным*. Тогда полученные выше результаты можно сформулировать следующим образом. *Существует одна, и только одна характеристика C, касающаяся в дикритической точке* P *каждого неособого направления D. Если это направление является необычным, то в этом и только в этом случае точка* P *будет точкой возврата первого рода для характеристики C.*

Замечание. *Область R, примыкающая к точке* P *и заключенная между двумя ветвями характеристики C, имеющей в* P *точку возврата, будет областью отталкивания для дикритической точки.*

Действительно, рассмотрим случай, когда касательная в точке возврата отлична от оси $x=0$ (это всегда можно предположить); тогда характеристика Γ, соответствующая C в плоскости переменных xz, не пересекает ось $x=0$ в окрестности $x=0$, $z=a$. Предположим для определенности, что она остается справа от $x=0$. Характеристики Γ', близкие к Γ и расположенные справа от Γ, не пересекают прямой $x=0$. Преобразование $y=xz$ переводит их в характеристики C', близкие к C, расположенные в области R; для них x и y не могут одновременно стремиться к нулю, поскольку при обходе Γ' переменное x не может обращаться в нуль.

§ 38. Характеристики, оканчивающиеся в особой точке с определенной касательной

Сделаем в уравнении (108) замену переменного $y = xz$. Используя обозначение (109), преобразованное уравнение можно записать в виде

$$x[X_r(1, z) + X^{**}(x, z)]dz + \\ + [R(1, z) + Y^{**}(x, z)]dx = 0. \quad (113)$$

Переменная z должна стремиться к конечному пределу на каждой характеристике C, оканчивающейся в (0, 0) с касательной, отличной от оси $x = 0$. Этот предел удовлетворяет уравнению $R(1, z) = 0$. Полагая далее

$$z = a + y_1; \quad y = x(a + y_1), \quad (114)$$

получим уравнение в переменных x и y_1, которое в дальнейшем будем называть *трансформированным* или *преобразованным* из (108). Характеристики этого преобразованного уравнения будем обозначать Γ, соответствующие им характеристики уравнения (108) — C. Точку $x = 0$, $y_1 = 0$ обозначим O_1. Если $z = a$ — простой корень уравнения $R(1, z) = 0$ или если этот корень кратный, но такой, что $X_r(1, z) \neq 0$, то уравнение в переменных x и y_1 назовем *уравнением простой формы*. Для него $x = 0$, $y_1 = 0$ будет *элементарной особой точкой*. Известно, что в этих случаях существует по крайней мере одна характеристика Γ, проходящая через $x = 0$, $y_1 = 0$ и отличная от $x = 0$. Следовательно, существует по крайней мере одна характеристика C, проходящая через точку $x = 0$, $y_1 = 0$, касающаяся в ней прямой $y = ax$.

Чтобы исследовать характеристики C, проходящие через (0, 0) и касающиеся в этой точке оси $x = 0$, положим

$$x = uy \quad (115)$$

и будем отыскивать характеристики *трансформированного уравнения*

$$y[Y_r(u, 1) + X^{**}(u, y)]du + \\ + [R(u, 1) + Y^{**}(u, y)]dy = 0, \quad (116)$$

проходящие через точку $y = 0$, $u = 0$ и отличные от $y = 0$. Такие характеристики могут существовать лишь при условии, что $u=0$ есть корень уравнения $R(u, 1)=0$. Утверждать же их существование можно только в двух случаях:

1) когда u — простой корень уравнения $R(u, 1)=0$;

2) когда u — кратный корень уравнения $R(u, 1)=0$, но не обращает в нуль величину $Y_r(u, 1)$.

Все эти результаты можно сформулировать следующим образом.

Возможные направления касательных в (0, 0) к характеристикам, проходящим через особую точку, получаются приравниванием нулю линейных действительных множителей выражения $R(x, y)$.

Если фиксировать один из этих множителей, то характеристики C, касающиеся соответствующей прямой, определяются из трансформированного уравнения, получающегося заменой переменных (114) или (115). Когда рассматриваемый линейный множитель простой или когда он кратный, но не может быть множителем $Y_r(x, y)$ и $X_r(x, y)$, тогда трансформированное уравнение имеет простую форму и существует по крайней мере одна характеристика C, касающаяся исследуемого направления в (0, 0). Если же соответствующий множитель $R(x, y)$ кратный и, кроме того, будет множителем $Y_r(x, y)$ и $X_r(x, y)$, то трансформированное уравнение не имеет простой формы.

Пусть, например, в переменных x и y_1 уравнение запишется в виде

$$x[A_{r_1}(x, y_1)+A^*(x, y_1)]dy_1+ \\ +[B_{r_1}(x, y_1)+B^*(x, y_1)]dx=0, \quad (117)$$

где A_{r_1} и B_{r_1} — однородные полиномы степени r_1 по переменным x и y_1, A^* и B^* — члены степени выше чем r_1. Чтобы определить характеристики C, нужно найти характеристики уравнения (117), проходящие через точку $x=0$, $y_1=0$.

Замечание 1. Уравнение (117) имеет характеристику $x=0$, которая оканчивается в начале координат с определенной касательной. Ввиду этого все характеристики Г, оканчивающиеся в $x=0$, $y_1=0$, будут иметь в этой точке определенную касательную и могут быть найдены при дальнейшем исследовании уравнения (117). То же самое относится и к уравнению (116).

Замечание 2. Решение $x=0$ уравнения (117) не дает характеристик C. Чтобы отличить это решение от других решений уравнения (117), приводящих к характеристикам C, будем называть его *решением, введенным при помощи преобразования* $y = x(a + y_1)$. Аналогично уравнение (116) имеет решение $y = 0$, которое также будет *введенным решением.*

§ 39. Последовательные преобразования уравнений

Если уравнение (117) имеет дикритическую точку, то к нему применимы результаты § 37. Если же $x = 0$, $y_1 = 0$ не будет дикритической точкой, то, согласно § 38 (замечание 1), задача приводится к изучению характеристик Г, имеющих в $x = 0$, $y_1 = 0$ определенную касательную. Будем исследовать уравнение (117) так же, как уравнение (108), именно: образуем трансформированные дифференциальные уравнения по отношению к различным возможным направлениям касательных в точке $x = 0$, $y_1 = 0$. Получающиеся уравнения будем называть *вторыми трансформированными уравнениями* для (108).

Если вторые трансформации приводят к уравнениям простой формы, то проблема исследования характеристик Г решена, поскольку известно поведение характеристик для уравнений этого рода. Если некоторые из вторых трансформаций не имеют простой формы, то вновь повторим рассуждения, относящиеся к уравнению (117), делая указанные замены переменных вида (114) или (115) и т. д.

Какое бы число замен переменных ни делалось, всегда можно вернуться к исходному уравнению и выразить старые переменные x и y в виде полиномов от новых переменных u и v. Одна из этих переменных u или v в некоторых случаях может совпадать с x или y. Рассматривая последовательные преобразования, будем получать характеристики γ, оканчивающиеся в $u = 0$, $v = 0$ с определенной касательной. Этим кривым соответствуют искомые характеристики C для уравнения в переменных x и y.

Известно (Бендиксон, стр. 72 и 75), что в результате конечного числа замен переменных указанного типа приходим к уравнениям в переменных u и v, для которых $u = 0$, $v = 0$ будет либо простой особой точкой, либо обыкновенной точкой.

Если в ряду трансформированных уравнений не встретится уравнение, имеющее в начале координат дикритическую точку, то для всех преобразованных уравнений начало координат будет особой точкой, в окрестности которой сами уравнения приводятся к одной из следующих простых форм:

$$[u + X_2(u, v)]dv + [\lambda u + \alpha v + Y_2(u, v)]du = 0, \tag{118}$$

$$X_2(u, v)dv + [v + Y_2(u, v)]du = 0, \tag{119}$$

где λ и α — постоянные, X_2 и Y_2 — целые ряды по степеням u и v не ниже второй степени. Все трансформированные уравнения в этом случае имеют решения или $u = 0$, или $v = 0$.

Однако может случиться, что в ряду трансформированных уравнений встретится уравнение, для которого начало координат будет дикритической точкой; тогда необходимо рассматривать каждую из прямых, проходящих через эту точку. Если эта прямая не особого направления, то получим уравнение, для которого $u = 0$, $v = 0$ будет обыкновенной точкой и это уравнение можно написать в виде

$$dv = F(u, v)du, \tag{120}$$

где F — ряд по целым степеням u и v.

Если же прямая имеет особое направление, то у трансформированного уравнения в начале координат будет особая точка, но не будет, как это видно из (111), ни решения $u = 0$, ни решения $v = 0$ — в отличие от тех преобразований, которые не приводят к дикритическим точкам. Изучение этого трансформированного уравнения проводится как и в случае уравнения (108).

Замечание 1. Решение или характеристику трансформированного уравнения будем называть *введенным в трансформированное уравнение*, если ему не соответствуют решения или характеристики исходного уравнения. Такими решениями могут быть либо $u = 0$, либо $v = 0$, если u и v — переменные преобразованного уравнения. Может случиться, что новое уравнение, преобразованное относительно направления введенной характеристики, имеет простую форму и у него есть только характеристики введенного уравнения. Такое уравнение простой формы в этом случае, очевидно, не дает никаких характеристик C.

Рассмотрим, например, для уравнения (117) введенное решение $x = 0$. Положим

$$x = uy_1;$$
$$A(0, 1) + B(0, 1) = \alpha; \quad B(0, 1) = \beta$$

и допустим, что постоянные α и β отличны от нуля; тогда получим уравнение

$$y_1[\beta + X(u, y_1)]du + u[\alpha + Y(u, y_1)]dy_1 = 0,$$

где $X(0, 0) = 0$, $Y(0, 0) = 0$. Если $\alpha \cdot \beta > 0$, то особая точка $u = 0$, $y_1 = 0$ — седло. Характеристики, проходящие через это седло, будут $u = 0$ и $y_1 = 0$. Но ни та, ни другая не дают характеристик уравнения в переменных x и y.

Замечание 2. Как уже отмечалось (§ 38, замечание 1), для уравнения (117), имеющего характеристику $x = 0$, все характеристики оканчиваются в $x = 0$, $y_1 = 0$ с определенной касательной. То же самое справедливо для уравнения, преобразованного к переменным u и v, имеющего или решение $u = 0$ или $v = 0$.

Для преобразованного уравнения с дикритической точкой, в общем случае, этого не может быть. Уравнение с дикритической точкой не имеет ни решения $u = 0$, ни решения $v = 0$ и, на основании § 5 для него возможны следующие случаи.

1. *Уравнение имеет характеристику, оканчивающуюся в* $u = 0$, $v = 0$ *с определенной касательной.* Как и в случае, рассмотренном в § 38, все характеристики, оканчивающиеся в $u = 0$, $v = 0$ имеют в этой точке касательную.

2. $u = 0$, $v = 0$ — *фокус.* Бесчисленное множество характеристик оканчиваются в особой точке, не имея касательной.

3. $u = 0$, $v = 0$ — *центр.* Ни одна из характеристик не оканчивается в этой точке.

В двух последних случаях (Бендиксон, стр. 69) спирали или замкнутые кривые, окружающие (0, 0), переводятся в характеристики уравнения (110), проходящие через $x = 0$, $y = 0$, но ни одна из этих характеристик не касается в начале координат направления, которому соответствует преобразованная форма. Все эти характеристики заполняют часть узловой области. Ни одна из них не будет сепаратрисой.

§ 40. Случай, когда особая точка — центр или фокус

Для того чтобы особая точка $O(x=0,\ y=0)$ уравнения (108) была фокусом или центром, необходимо (§ 5), чтобы ни одна из характеристик не оканчивалась в O с определенной касательной. Из предыдущего следует, что такие случаи могут иметь место. Уточним их. При исследовании уравнения (108), вообще говоря, могут быть следующие четыре возможных случая.

1. *Точка O — дикритическая точка.* Это единственный случай, когда уравнение возможных направлений касательных в O для характеристик, оканчивающихся в этой точке, обращается в тождество.

2. *Уравнение $R(x,\ y)=0$, дающее направление касательных в O, имеет по крайней мере один действительный множитель, которому соответствует трансформированное уравнение простой формы.*

3. *Уравнение $R(x,\ y)=0$ не имеет действительных множителей.*

4. *Уравнение $R(x, y)=0$ имеет действительные множители, но ни одному из них не соответствует трансформированное уравнение простой формы.*

Как известно (§§ 37, 38) в случаях 1 и 2 существует по крайней мере одна характеристика C с определенной касательной в точке O. В случае 3 таких характеристик нет. В случае 4 необходимы дополнительные исследования. С этой целью получим трансформированные уравнения для каждого из действительных множителей $R(x,\ y)$. Рассмотрим какое-либо из этих уравнений. Случай 3 для него не может иметь места, так как оно имеет введенное решение $x=0$ или $y=0$. Случай 2 может представиться, но ему не будет соответствовать характеристика C.

В самом деле, рассмотрим действительный множитель выражения $R(x,\ y)$, соответствующий введенному решению $x=0$ или $y=0$, и сделаем преобразование, отвечающее этому множителю. Согласно сказанному (§ 39, замечание 1) полученное уравнение будет иметь только введенные решения, а они не дают характеристик C. Поэтому только случаи 1, 2 и 3 могут иметь место для каждого последующего преобразования. Все, что было сказано в отношении уравнения (108), может быть повторено для каждого нового трансформированного уравнения. Продолжим рассуждения до тех пор, пока не встретится случай 4. После конечного числа преобразований увидим, что для того чтобы точка O была фокусом или центром, должны выполняться следующие условия:

а) *необходимо, чтобы уравнения, определяющие направление касательных в начале координат как для данного уравнения, так и для его различных трансформаций, не имели, за исключением множителей, соответствующих введенным решениям, никаких линейных действительных множителей, приводящих трансформированное уравнение к простой форме*;

б) *если линейный множитель, соответствующий введенному решению, приводит трансформированное уравнение к простой форме, то необходимо, чтобы это уравнение имело только введенные решения.*

Сформулированные необходимые условия будут и достаточными. Действительно, из результатов § 39 следует, что всякая характеристика C, имеющая касательную в O, соответствует характеристике Γ' дифференциального уравнения простой формы, полученного в результате конечного числа последовательно выполненных преобразований. Эта характеристика Γ' также должна оканчиваться в начале координат с определенной касательной. Но если условия а) и б) выполняются, то трансформированное уравнение простой формы, полученное посредством замен переменных, не имеет характеристик Γ', которым бы соответствовали характеристики C.

§ 41. Результирующие преобразования, приводящие уравнения к простой форме

Совокупность замен переменных, которые надлежит сделать, чтобы получить уравнение простой формы, имеет то неудобство, что не сохраняется (по крайней мере в некоторых случаях) ни одно из первоначальных переменных x и y. Для упрощения подстановок важно показать, что в большинстве случаев можно сохранить или переменное x, или переменное u, связанное с x соотношением $u^p = x$, где p — целое число, выбранное соответствующим образом.

Случай, когда не сохраняется переменное x, будет иметь место, если рассматривать характеристику, для которой отношение y/x неограниченно возрастает при

x и y, стремящихся к нулю, или, в более общем случае, когда для рассматриваемой характеристики в переменных x и y_s, отношение y_s/x неограниченно возрастает при x и y_s, стремящихся к нулю. Положим $x = y_s x_1$, тогда x_1 будет стремиться к нулю одновременно с y_s.

Рассмотрим самый общий случай; предположим, что для исследуемой характеристики, если сделать замену переменных

$$x_{i-1} = y_s x_i; \quad x_0 = x, \tag{121}$$

то x_i стремится к нулю вместе с x_{i-1} и y_s. Могут иметь место следующие два случая.

1. *В результате конечного числа замен переменных вида* (121) *в плоскости $x_p y_s$ получается уравнение такое, что для рассматриваемой характеристики отношение y_s/x_p стремится к конечному пределу α, который может быть и нулем.* Для уравнения в переменных x_p и y_s особая точка $x_p = 0$, $y_s = 0$ будет тогда или элементарной, или сложной.

2. *Каково бы ни было число i проделанных замен переменных вида* (121), *всегда в точках рассматриваемой характеристики значения x_i стремятся к нулю вместе с y_s и x_{i-1}.* При этом очевидно, что для некоторого конечного $i = q$ (Бендиксон, стр. 72) получится уравнение простой формы. Это уравнение в переменных x_p и y_s имеет характеристику, обладающую тем свойством, что при любом целом r отношение x_q/y_s^r стремится к нулю при x_q и y_s, стремящихся к нулю.

Рассмотрим первый случай.

По предположению $y_s/x_p = t$ будет иметь конечный предел, когда y_s и x_p стремится к нулю. Пусть

$$x = y_s^p x_p = y_s^{p+1}/t.$$

Если положить $x = u^{p+1}$, то $t = y_s^{p+1}/u^{p+1}$, откуда следует, что отношение y_s/u стремится к конечному пределу при u и y_s, стремящихся к нулю. Рассматривая уравнение в переменных u и y_s, приходим к общему случаю, когда существует характеристика, которая в плоскости переменных u и y_s не касается прямой $u = 0$ в точке $u = 0$, $y_s = 0$. Таким образом, в этом случае, можно не применять подстановки (121), а сделать замену вида

$$x = x_1^n, \tag{122}$$

где n — целое число. Напомним, что приведение уравнения к простой форме требует конечного числа замен переменных. Осуществляя конечное число подстановок вида (122) $x_i = x_{i+1}^m$, можно избежать замен переменных (121).

Совокупность подстановок типа (122) эквивалентна одному преобразованию $x = u^m$.

Допустим, что существует характеристика C, проходящая через точку O, такая, что отношение y/x стремится к конечному пределу, когда x и y стремятся к нулю, и что для всех применяемых при отыскании C преобразований переменных x и y_i, отношение y_i/x тоже стремится к конечному пределу. Этот случай будем называть *нормальным*. Заменой переменного

$$y = \varphi(x) + x^n v,$$

где $\varphi(x)$ — надлежащим образом подобранный полином степени ниже чем $n+1$, дифференциальное уравнение в переменных x и v преобразуется к виду (118), (119) или (120). Тем самым устанавливается соответствие характеристики C с характеристикой преобразованного уравнения, проходящей через точку $x = 0$, $v = 0$.

Если при исследовании характеристики C не приходим к нормальному случаю или же отмеченному выше случаю 2, то будем говорить, что имеет место *приводимый* случай. Пусть m и n — целые числа и $\varphi(x)$ — надлежащим образом подобранный полином степени не выше n. Тогда заменой переменных вида

$$x = u^n; \quad y = \varphi(x) + u^n v \tag{123}$$

уравнение преобразуется к типу (118), (119) или (120). Характеристике C соответствует характеристика уравнения в переменных u и v, проходящая через точку $u = 0$, $v = 0$.

Наконец, может встретиться случай 2, который будем называть *неприводимым* случаем. Обозначим m, n и q целые числа и $\varphi(z)$ соответствующим образом подобранный полином степени не выше n. Замена переменных

$$x = z^m; \quad y = \varphi(z) + vz^n; \quad z = uv^q$$

приводит в этом случае к уравнению в переменных u и v вида (118), (119) или (120). Тем самым характеристике C будет приведена в соответствие характеристика Γ', проходящая через точку $u = 0$, $v = 0$, обладающая тем свойством, что, каково бы ни было $r>0$ отношение u/v^r стремится к нулю вместе с u и v. В силу этого уравнение в переменных u и v не может иметь ни форму (118), ни (120). Оно имеет вид (119) и точка $u=0$, $v=0$ — исключительная особая точка.

§ 42. Отыскание сепаратрис

Допустим, что среди характеристик, оканчивающихся в O, есть сепаратрисы. В точке O они имеют касательную и принадлежат к виду кривых, изученных в §§ 38 и 39. Если при отыскании сепаратрис не встречаются уравнения с дикритическими точками, тогда эти кривые находятся из уравнений вида (118) или (119), имеющих решение либо $u=0$, либо $v=0$.

Если же при отыскании сепаратрисы C встретится уравнение с дикритической точкой, то соответствующая характеристика Γ' не может иметь в этой точке касательную с обыкновенным направлением, в противном случае Γ' оказалась бы внутри сектора, где все характеристики оканчиваются в дикритической точке. То же самое должно иметь место и для C, что невозможно, поскольку C есть сепаратриса. Таким образом, в дикритическом случае имеются две возможности.

1. Характеристика Γ' касается необычного направления. В этом случае Γ', а следовательно, и C будут получаться с помощью уравнения вида (120), для которого $u=0$, $v=0$ будет обыкновенной точкой.

2. Γ' касается особого направления, тогда сепаратриса C будет, в виде исключения, получаться при помощи уравнения типа (120), а в общем случае из уравнений вида (118) и (119), которые могут не иметь ни решения $u=0$, ни решения $v=0$. Во всех случаях, очевидно, существует конечное число уравнений вида (118), (119) или (120), которые могут дать сепаратрисы. Чтобы выделить уравнения, имеющие сепаратрисы, покажем вначале, что сепаратрисам данного уравнения (108) всегда соответствуют сепаратрисы преобразованных уравнений.

После замены $y=xz$ точка M с координатами x и y перейдет в точку μ с координатами x, z. Кривая C плоскости x, y преобразуется в кривую Γ на плоскости xz. Пусть C_1 и C_2 — две сепаратрисы, соответствующие $x=0$ и $y=0$, ограничивающие область отталкивания

R в окрестности O. Предположим, что R не пересекается осью Oy и ни C_1, ни C_2 не касаются оси Oy в точке O. Преобразованием $y = xz$ кривые C_1 и C_2 переводятся в характеристики Γ_1 и Γ_2 плоскости x, z. Эти кривые пересекают ось $x = 0$ соответственно в точках A_1 и A_2 с координатами $z = \alpha_1$ и $z = \alpha_2$. Если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то области R плоскости xy соответствует область ρ, ограниченная кривыми Γ_1, Γ_2 и отрезком оси $x = 0$. Всякая характеристика Γ уравнения в переменных x и z, заключенная в области ρ, не пересекает сегмент A_1A_2 оси $x = 0$, поскольку таким кривым соответствовали бы характеристики C уравнения в переменных x и y, оканчивающиеся в точке O и лежащие внутри R. Следовательно, Γ_1 и Γ_2 будут сепаратрисами особых точек A_1 и A_2.

Если ось Oy пересекает сектор R и характеристика C_1 не касается оси Oy, то построим полупрямую OL с тангенсом угла наклона, равным α, ограничивающую вместе с C_1 сектор R', расположенный в R и не содержащий внутри себя оси Oy. Применяя к сектору R', где полупрямая OL играет роль C_2, те же рассуждения, что и для R, получим, что Γ_1 будет сепаратрисой, оканчивающейся в особой точке $x = 0$, $z = \alpha_1$.

Если C_1 касается оси Oy в точке O, то сделаем замену переменного $x = yz$ и, рассуждая аналогично, покажем, что в плоскости y, z кривой C_1 соответствует сепаратриса Γ_1, оканчивающаяся в особой точке $y = 0$, $z = 0$.

Таким образом, сепаратрисе C соответствует сепаратриса Γ трансформированного уравнения, и это свойство остается справедливым, каково бы ни было число выполненных преобразований. Следовательно, если Γ характеристика уравнений (118), (119) и (120), соответствующая сепаратрисе C, то она также будет сепаратрисой, примыкающей к точке $u = 0$, $v = 0$.

Если после замены переменных приходим к уравнению вида (120), то для того, чтобы характеристика этого уравнения, проходящая через точку $u = 0$, $v = 0$, могла привести к сепаратрисе, необходимо (§ 37, замечание), чтобы Γ' не пересекала ось $v = 0$ в точке $u = 0$, $v = 0$. Уравнение (120) трансформируется из уравнения с дикритической точкой и соответствует необычному направлению в этой дикритической точке.

Если получается уравнение вида (118), то необходимо и достаточно, чтобы λ было числом положительным.

Только в этом случае характеристика Γ, проходящая через точку $u=0$, $v=0$, будет сепаратрисой.

Наконец, если получается уравнение вида (119), то легко найти, согласно сказанному (§§ 24 и 25), условия того, чтобы характеристика Γ, проходящая через точку $u=0$, $v=0$, была сепаратрисой.

Замечание 1. Приведенные выше рассуждения в случае, когда ось Oy пересекает область R и когда характеристика C_1 не касается оси Oy, будут распространяться и на случай, когда C_1 не будет сепаратрисой, при условии, что не существует никакой характеристики C, оканчивающейся в O и остающейся внутри сектора R', ограниченного C_1 и OL. Характеристика Γ, соответствующая C, может быть сепаратрисой. Очевидно, что если характеристике C при помощи замены переменных $y=xz$ ставится в соответствие сепаратриса Γ, то обратное не всегда верно.

Например, уравнение

$$(y+2x)dy - y\,dx = 0,$$

общий интеграл которого

$$y^2 = c(y+x),$$

будет иметь в точке O *узел*. Полагая $y=xz$, получим уравнение в переменных z и x, у которого особая точка $x=0$, $z=0$ будет *седло* и прямая $z=0$ есть сепаратриса этого седла, тогда как соответствующая характеристика $y=0$ не будет сепаратрисой.

Замечание 2. Поскольку сепаратрисе трансформированного уравнения не обязательно соответствует сепаратриса уравнения в переменных x и y, полезно указать, каким образом можно выделить сепаратрисы среди характеристик уравнения, приведенного к одной из форм (118), (119) или (120).

Если обозначить Γ_0' совокупность двух ветвей характеристики уравнения (120), проходящих через точку $u=0$, $v=0$, то Γ_0' может соответствовать сепаратрисе только при условии, если (120) преобразуется из уравнения с дикритической точкой и если характеристика Γ_0 этого уравнения, соответствующая Γ_0', касается в этой дикритической точке неособого направления. Две ветви Γ_0 касаются ребра возврата. Чтобы характеристика C_0 уравнения в переменных x и y была сепаратрисой, необходимо и достаточно, чтобы характеристика Г уравнения с дикритической точкой, заключенная между двумя ветвями Γ_0, соответствовала характеристике C, не оканчивающейся в O. Легко проверить, будет ли это иметь место, если рассматривать последовательные замены переменных, которые от уравнения в переменных x и y приводят к уравнению в переменных u и v.

Рассмотрим характеристику Γ_1, сепаратрису уравнения (118) или (119), примыкающую к точке $u=0$, $v=0$. Чтобы соответствующая характеристика C_1 уравнения в переменных x и y была сепаратрисой, примыкающей к точке O, необходимо и достаточно, чтобы существовала по крайней мере еще одна характеристика C_2, оканчивающаяся в O и такая, что область, заключенная между C_1 и C_2, была бы областью отталкивания. Эта вторая сепаратриса C_2 может быть получена только при помощи уравнений (118) или (119). Рассматривая те из этих уравнений, которые могут привести к сепаратрисам, и выполняя соответствующие замены переменных, можно определить два трансформированных уравнения E' и E'' простой формы (118) или (119), позволяющие найти сепаратрисы C, расположенные по разные стороны от C_1 и ограничивающие вместе с C_1 области отталкивания. Чтобы, например, узнать, дает ли уравнение E' сепаратрису C_2, ограничивающую вместе с C_1 область отталкивания, рассмотрим все возможные сепаратрисы Γ_0 уравнения E' и найдем для каждой из них соответствующую характеристику C_0 в плоскости xy, если она вместе с C_1 ограничивает область отталкивания, то ее можно принять за сепаратрису C_2. Исследуя уравнения E' и E'', можно установить принадлежит ли C_1 к границе одного или двух секторов отталкивания, или C_1 не будет сепаратрисой.

§ 43. Замечания о случаях, встречающихся при исследовании сепаратрис

Чтобы исследовать характеристику C, имеющую в O касательную, сделаем замену переменных типа указанного в § 39 и получим преобразованное уравнение E в переменных u и v. Кривой C в плоскости u, v соответствует характеристика Г, проходящая через точку

$u=0$, $v=0$. Будем говорить, что сепаратриса C *изолируется* рассматриваемой заменой, если соответствующее уравнение E имеет одну из форм (118), (119) или (120).

Если две характеристики C_1 и C_2 проходят через O, но не имеют в этой точке общей касательной, то будем говорить, что характеристики C_1 и C_2 *разделены*. Две характеристики C_1 и C_2 назовем *разделимыми* заменой переменных, приводящей уравнение к виду E, если две характеристики Γ_1 и Γ_2 проходят через точку $u=0$, $v=0$, но не имеют в ней общей касательной.

Из результатов § 42 следует, что сепаратриса C всегда может быть *изолирована*. Если уравнение E имеет вид (120), то, кроме Γ, оно не имеет никакой характеристики, проходящей через точку $u=0$, $v=0$. Если же E вида (118) или (119), то оно имеет характеристику Γ, соответствующую C, и еще характеристику $u=0$ или $v=0$, которые в общем случае будут введенными.

Покажем, что две сепаратрисы C_1 и C_2, имеющие общую касательную и ограничивающие область отталкивания особой точки O, всегда можно разделить.

Будем предполагать, что в процессе разделения сепаратрис не встретится случай приводимости, так как от него можно избавиться заменой x на x^n, где n — некоторое целое положительное число. Предположим, что такое преобразование в случае надобности выполнено. Тогда останутся лишь два возможных случая: *нормальный* и *неприводимый*. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Пусть C_1 и C_2 — две сепаратрисы такие, что при изоляции каждой из них имеет место нормальный случай. Обозначим

$$y=\varphi_1(x)+x^{n_1}v; \quad y=\varphi_2(x)+x^{n_2}v$$

замены переменных, изолирующие каждую из этих сепаратрис. Здесь φ_1 и φ_2 — полиномы степени соответственно не выше n_1 и n_2. Члены первой степени в полиномах φ_1 и φ_2 совпадают, поскольку C_1 и C_2 имеют общую касательную в точке O. Докажем предварительно, что φ_1 и φ_2 не могут быть равны тождественно. Допустим противное: пусть $\varphi_1\equiv\varphi_2$, следовательно, $n_1=n_2$, тогда заменой переменного $y=\varphi_1+x^{n_1}v$ будет установлено соответствие C_1 и C_2 двум сепаратрисам Γ_1 и Γ_2 преобразованного уравнения E, изолирующего C_1. Обе эти кривые проходят через точку $x=0$, $v=0$.

Уравнение E не может быть вида (120), так как последнее имеет только одну кривую, проходящую через точку $x=0$, $v=0$. Следовательно, оно будет или вида (118) или вида (119). Допустим, для определенности, что C_1 и C_2 расположены по одну сторону от оси Oy, например со стороны положительных x. Тогда соответствующие сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 также расположены в плоскости x, v со стороны положительных x. Уравнение вида (118) или (119) имеет характеристику $x=0$, и если одна из характеристик, расположенных справа от оси Oy, есть сепаратриса, то других характеристик, проходящих через точку $x=0$, $v=0$ и расположенных со стороны положительных x, быть не может. Кривые Γ_1 и Γ_2 не могут быть сепаратрисами.

Следовательно, два полинома φ_1 и φ_2 различны. Предположим, что они имеют различные члены, начиная с порядка не ниже чем $r+1$, в то время как члены степени меньше чем $r+1$ тождественны между собой. Пусть $\varphi(x)$ — полином, образованный этими одинаковыми членами. Полагая

$$y=\varphi(x)+x^r y_r. \tag{124}$$

Получим преобразованное уравнение E в переменных x и y_r. Сепаратрисам C_1 и C_2 будут соответствовать сепаратрисы Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку $x=0$, $y_r=$ $=0$, но не имеющие в этой точке общей касательной. Следовательно, C_1 и C_2 разделимы, причем они имеют в точке O касание порядка r.

Замечание. Общую замену переменных (124), приводящую уравнение в переменных x и y к виду E, в переменных x и y_r можно рассматривать как результат последовательных замен вида

$$y_{i+1}=a_i x+x y_i, \quad y_0=y \quad (i=1, 2, 3, \ldots, r).$$

Что касается замен переменных, которыми уравнение E приводится к форме, изолирующей C_1, то их можно представить таким же образом, полагая $i=r+1$, $r+2, \ldots, n$.

Уравнения, получающиеся при последовательной замене переменных, соответствующие $i<r$, могут иметь в $x=0$, $y_i=0$ дикритическую точку, а при $i \geqslant r$ особая точка $x=0$, $y_i=0$ дикритической быть уже не может.

Действительно, сепаратрисам C_1 и C_2 соответствуют в плоскости переменных x и y_i характеристики Γ_1' и Γ_2'.

Кривая Γ_1' — сепаратриса, примыкающая к точке $x=0$, $y_i=0$. Области отталкивания, ограниченной в плоскости xy кривыми C_1 и C_2, соответствует в плоскости xy_i область, ограниченная кривыми Γ_1' и Γ_2', если $i \leqslant r$, и область, ограниченная кривыми Γ_1', Γ_2' и отрезком оси $x=0$, если $i > r$. В последнем случае эта область такова, что в ней можно провести бесконечно много векторов, начинающихся в точке $x=0$, $y_i=0$. Если при каком-либо $i > r$ точка $x=0$, $y_i=0$ оказалась бы дикритической, то существовали бы характеристики Γ', касающиеся в этой точке каждого из этих векторов и расположенные в исследуемой области. Каждой из таких кривых Γ' соответствовала бы в плоскости xy характеристика, оканчивающаяся в точке O и расположенная в области отталкивания, заключенной между C_1 и C_2. Полученное противоречие показывает, что ни уравнение E, ни те уравнения, которые из него получаются путем преобразований, не могут иметь в начале координат дикритическую точку. Отсюда, в частности, следует, что *каждое из преобразованных уравнений, которые получаются из E для изоляции C_1 или C_2, имеет характеристику $x=0$.*

§ 44. Сепаратрисы, при отыскании которых встречается неприводимый случай

Чтобы определить такие сепаратрисы, рассмотрим все случаи, где они встречаются. Пусть C — характеристика, в процессе изоляции которой имеет место случай *неприводимости.*

Существует целое положительное число s и полином $\varphi(x)$ степени не выше s, равный нулю при $x=0$, такие, что заменой переменного

$$y = \varphi(x) + x^s y_s \tag{125}$$

исходное уравнение преобразуется в уравнение E, сепаратриса C переходит в характеристику Γ, проходящую через точку $x=0$, $y_s=0$ и для точек этой характеристики отношение x/y_s^r, каково бы ни было целое положительное число r, стремится к нулю при x, стремящемся к нулю. Может случиться, что $s=0$, тогда $y=y_0$ и $\varphi=0$.

Покажем вначале, что для случая неприводимости необходимо, чтобы уравнение E имело решение $x=0$. Допустим, что такого решения нет. Тогда уравнение E запишется в виде

$$\left[xA(x, y_s)+y_s^p(a+y_sF(x, y_s))\right]dy_s+B(x, y_s)dx=0,$$

где a — постоянная, отличная от нуля, p — целое положительное число, F, A, B — ряды по целым степеням x и y_s и $B(0, 0)=0$.

Положим $x=uy_s^{p+1}$; тогда, поделив на y_s^p, получим уравнение

$$[a+D(u, y_s)]dy_s+y_sC(u, y_s)du=0,$$

где D и C — ряды по u и y_s, $D(0,0)=0$. Это уравнение не имеет решения, для которого u стремится к нулю при y_s, стремящемся к нулю, вопреки требованию неприводимости. Полученное противоречие доказывает утверждение, что уравнение E имеет решение $x=0$.

Предположим, что уравнение E имеет решение $x=0$, и допустим также, что при отыскании сепаратрисы, примыкающей к особой точке $x=0$, $y_s=0$, встретился случай неприводимости. Согласно § 41 существует целое положительное число q такое, что заменой переменного

$$x=x_qy_s^q \tag{126}$$

уравнение E приводится к простой форме, если q достаточно велико. Сепаратрисе Г уравнения E соответствует сепаратриса, примыкающая к особой точке $x_q=0$, $y_s=0$, и она касается в этой точке прямой $x_q=0$, поскольку не имеет места нормальный случай.

Следует иметь в виду, что есть два различных вида уравнений простой формы. В одном случае существует только одна характеристика, проходящая через точку $x_q=0$, $y_s=0$ и касающаяся в ней оси $x_q=0$, в другом случае таких характеристик бесконечно много. Если имеет место первый случай, то эта характеристика будет $x_q=0$, она соответствует решению $x=0$ уравнения E. Если выполняется второй случай, то очевидно, что с каждой стороны характеристики Г′, отличной от $x_q=0$, существует бесконечно много характеристик, сколь угодно близких к Г′ и оканчивающихся в точке $x_q=0$, $y_s=0$. Ни одна из этих характеристик Г′ не может соответствовать сепаратрисе Г. Следовательно, сепаратрисе

Γ уравнения E в переменных x и y_s не может соответствовать никакая характеристика, отличная от $x_q = 0$. Характеристика $x_q = 0$ переходит в характеристику C_s уравнения в переменных x и y только при условии, что у него есть решение $x = 0$. Действительно, из (126) следует, что если $x_q = 0$, то $x = 0$. Из (125) при $s > 0$ заключаем, что если $x = 0$, то $y = 0$. Но для характеристики C это невозможно. Итак, приходим к следующему результату. *Неприводимый случай при изоляции сепаратрисы уравнения* (108) *может встретиться только тогда*, *когда эта сепаратриса есть ось* $x = 0$.

Следовательно, если случай неприводимости встретится при исследовании двух сепаратрис, ограничивающих область отталкивания особой точки O, то одна из них будет $x = 0$, другая касается прямой, отличной от оси Oy. Такие сепаратрисы всегда разделены. Ясно, что при отыскании сепаратрис можно простым поворотом координатных осей избавиться от случая непроводимости.

§ 45. Преобразование уравнения относительно интегралов, касающихся оси $x=0$

Можно всегда предполагать, изменяя в случае необходимости направление координатных осей, что $x = 0$ не будет возможным направлением касательных в точке O для характеристик уравнения (108). Таких предположений в отношении уравнений, преобразованных из (108) и имеющих, вообще говоря, решение $x = 0$, делать уже нельзя. При изучении функции соответствия потребуется рассматривать уравнения, преобразованные относительно действительных или комплексных интегралов, касающихся оси $x = 0$ и удовлетворяющих уравнениям, полученным из (108) заменой переменных. Рассмотрим уравнение

$$xX(x, y)dy + Y(x, y)dx = 0. \qquad (127)$$

Очевидно, оно имеет решение $x = 0$. Чтобы исследовать действительные или комплексные интегралы, касающиеся оси $x = 0$ в точке O, положим $x = x_1 y$. Тогда получим уравнение, имеющее ршения $x_1 = 0$ и $y = 0$, которое можно записать в виде

$$x_1[A(x_1, y) + X^*(x_1, y)]dy + y[B(x_1, y) + \\ + Y^*(x_1, y)]dx_1 = 0, \qquad (128)$$

где $A(x_1, y)$ и $B(x_1, y)$ — однородные полиномы степени n, представляющие собой члены наименьшей степени в коэффициентах при dx_1 и dy. Если не делать никаких дополнительных предположений, то n может быть произвольным положительным целым числом, но если предположить, что сделана замена переменных $x = x_1^p$, где p — целое число, позволяющая избавиться от случая приводимости в интегралах уравнения (127), касающихся оси $x = 0$, то для n возможно только одно значение $n = 0$, т. е. уравнение (128) должно быть простой формы. При доказательстве этого утверждения будем опираться на следующую теорему [1]), в которой рассматриваются как мнимые, так и действительные интегралы. Для интегралов, изучаемых в этом параграфе, x_1 и y могут стремиться к нулю и по комплексным значениям. Отношение y/x_1 при x_1 и y, стремящихся к нулю, может стремиться как к комплексному, так и к действительному пределу.

1. *Если $x = 0$, $y = 0$ — особая точка порядка p*, т. е. если в уравнении

$$X(x, y)dy + Y(x, y)dx = 0$$

ряды X и Y начинаются с однородных многочленов по x и y степени p, *то существует не менее $p+1$ различных интегралов, проходящих через точку $x = 0$, $y = 0$.*

2. *Если $x = 0$, $y = 0$ — исключительная особая точка*, т. е. если дифференциальное уравнение в переменных x и y имеет вид (119), *то существует бесконечно много интегралов, для которых x и y одновременно стремятся к нулю.*

Итак, покажем, что при сделанных предположениях $n = 0$. Поскольку исключается случай приводимости, то интегралы, касающиеся оси $x = 0$, могут быть только при условии, что встретится случай неприводимости. Выполним последовательно замены переменных

$$x_i = x_{i+1}y \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

На любом шаге будут получаться уравнения, обладающие тем свойством, что для каждого интеграла, проходящего через начало координат, отношение y/x_i стре-

[1]) Первая часть этой теоремы доказана Дюлаком в работе [3]. Доказательство второй части дано в его статье [18].

мится к конечному пределу, или нулю, когда x_i и y стремятся к нулю.

Покажем невозможность того, чтобы в получаемых уравнениях члены с наинизшей степенью по переменным x_i и y в коэффициентах при dx_i и dy все время имели бы порядок $n+1$. Действительно (§ 45), эти замены переменных приводят к уравнению, для которого $x_i=0$, $y=0$ будет особой точкой первого порядка, что соответствует степени $n=0$. С другой стороны, покажем, что если точка $x_i=0$, $y=0$ для уравнения в переменных x_i и y будет особой точкой порядка меньше чем $n+1$, то будет иметь место приводимый случай. Из полученного противоречия будет следовать, что $n=0$.

Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение в переменных x_2 и y. Предположим, что порядок особой точки $x_2=0$, $y=0$ меньше чем $n+1$. Предварительно установим тождество

$$A(x_1, y)+B(x_1, y)\equiv cx_1^n; \tag{129}$$

где c — постоянная. Действительно, если это тождество не имеет места, то заменой переменного $y=tx_1$ уравнение преобразуется к виду

$$x_1[A(1, t)+X^{**}(x_1, t)]dt+\\+t[A(1,t)+B(1,t)+Y^{**}(x_1,t)]dx_1=0. \tag{130}$$

Равенство

$$A(1, t)+B(1, t)=0 \tag{131}$$

выполняется по крайней мере для одного $t=\alpha$. Докажем, что существует хотя бы один интеграл такой, что t стремится к α, когда x стремится к нулю, тем самым будет показано, вопреки нашему предположению, что имеет место приводимый случай и тождество (129) будет установлено.

Если $\alpha\neq 0$ и $A(1, \alpha)\neq 0$, то существует голоморфный в точке $x_1=0$ интеграл $t(x_1)$ уравнения (130) и такой, что $t(0)=\alpha$. Если $\alpha\neq 0$ и $A(1, \alpha)=0$, причем $t=\alpha$ есть корень порядка q уравнения (131), то, полагая в уравнении (130) $z=t-\alpha$ получим

$$x_1[zh(z)+x_1H(x_1, z)]dz+[z^q g(z)+x_1G(x_1, z)]dx_1=0,$$

где $h(z)$ и $g(z)$ — полиномы по z, $g(0)=0$, H и G — ряды по целым степеням x_1 и z. Можно всегда предполагать, что $x_1 G(x_1, z)$ начинается с членов не ниже второй степени. Если это не имеет места, то, полагая $x_1 = u^2$, получим требуемое свойство. Таким образом, приходим к рассмотрению двух случаев уравнений в переменных x_1 и z:

1. $q = 1$, точка $x_1 = 0$, $z = 0$ — исключительная особая точка.

2. $q > 1$, точка $x_1 = 0$, $z = 0$ — особая точка порядка выше первого.

В обоих случаях существуют интегралы $z(x_1)$, стремящиеся к нулю при x_1, стремящемся к нулю.

Если $\alpha = 0$, $A(1, 0) \neq 0$, то $z = t = 0$, $x_1 = 0$ будет исключительной особой точкой уравнения (130). Для $\alpha = 0$ $A(1, 0) = 0$, тогда $z = t = 0$, $x_1 = 0$ будет особой точкой порядка выше первого. В этих двух последних случаях существуют интегралы $t(x_1)$, отличные от $t = 0$, для которых t стремится к нулю при x_1, стремящемся к нулю.

Тождество (129), таким образом, доказано. В силу этого, если положить $x_1 = x_2 y$, то уравнение (128) приведется к виду

$$x_2 \left[cx_2^n + yH(x_2, y)\right] dy + \\ + y\left[x_2^r g(x_2) + yG(x_2, y)\right] dx_2 = 0, \qquad (132)$$

где r — целое число, меньшее или равное n, $g(x_2)$ — полином по x_2, $g(0) \neq 0$. H и G — ряды по целым степеням x_2 и y, причем $H(0, 0) = 0$ и $G(0, 0) = 0$.

Поскольку предполагаем, что особая точка $x_2 = 0$, $y = 0$ имеет порядок меньше чем $n + 1$, то наименьшая степень членов в скобках будет меньше n. Для этого необходимо, чтобы $r < n$, или же чтобы выражения $yH(x_2, y)$ или $yG(x_2, y)$ начинались с членов степени, меньшей чем n. Рассмотрим в отдельности каждый из этих случаев.

Если $r < n$, то заменой переменного $y = vx_2^r$ уравнение (132) преобразуется к виду

$$x_2 \left[cx_2^{n-r} + vH_1(x_2, v)\right] dv + \\ + v\left[g(x_2) + rcx_2^{n-r} + vG_1(x_2, v)\right] dx_2 = 0, \qquad (133)$$

где H_1 и G_1 — ряды по целым степеням x_2 и v. Так как $g(0) \neq 0$, то $x_2 = 0$, $v = 0$ — исключительная особая точка уравнения (133). Если $n = r$, но разложение $yH(x_2, y)$ или $yG(x_2, y)$ в ряд начинается с членов степени, меньшей чем n, то можно, обозначая эти члены соответственно через $yP(x_2, y)$ и $yQ(x_2, y)$, написать уравнение (132) в виде

$$x_2\left[yP(x_2, y) + cx_2^n + yH_1(x_2, y)\right]dy + \\ + y\left[yQ(x_2, y) + g(x_2)x_2^n + yG_1(x_2, y)\right]dx_2 = 0.$$

Положив $y = vx_2$, получим уравнение

$$x_2[vP(1, v) + P_2(x_2, v)]dv + v[vP(1, v) + \\ + vQ(1, v) + Q_2(x_2, v)]dx_2 = 0, \quad (134)$$

в котором функции P_2 и Q_2 имеют множителем x_2.

Функции, стоящие в каждой из скобок, начинаются по крайней мере с членов первой степени по x_2 и v, особая точка $x_2 = 0$, $v = 0$ будет иметь порядок выше первого. Следовательно, чтобы у уравнения (133) или (134) существовал по крайней мере один интеграл, отличный от $v = 0$, который бы стремился к нулю при x_2, стремящемся к нулю, должен иметь место приводимый случай. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Если при исследовании действительных или комплексных интегралов уравнения (127), *проходящих через точку $x = 0$, $y = 0$ и касающихся в ней оси $x = 0$, не может иметь места приводимый случай, то для уравнения, полученного при помощи подстановки $x = x_1y$, точка $x_1 = 0$, $y = 0$ будет простой особой точкой.*

Случай, когда $x = 0$, $y = 0$ дикритическая, невозможен.

§ 46. Функция соответствия для области отталкивания, ограниченной единственной характеристикой $x=0$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Дифференциальное уравнение имеет характеристику $x = 0$, проходящую через сложную особую точку $x = 0$, $y = 0$.

2. По одну сторону от этой характеристики, например со стороны положительных x, не существует никакой характеристики, оканчивающейся в $x = 0$, $y = 0$ и не пересекающей оси $x = 0$.

Дифференциальное уравнение запишем в виде

$$x[P(x, y) + X(x, y)]dy + [Q(x, y) + Y(x, y)]dx = 0, \quad (135)$$

где xP и Q — однородные полиномы степени n, представляющие собой члены наинизшей степени в коэффициентах при dx и dy.

Пусть l и l' — два положительных числа таких, что дифференциальное уравнение не имеет, за исключением $x=0$, $y=0$ никакой другой особой точки, расположенной на оси $x=0$ между прямыми $y=l$ и $y=-l'$. Рассмотрим характеристику C, близкую к $x=0$, и найдем функцию соответствия между абсциссами точек пересечения M и M' кривой C с прямыми $y=l$ и $y=-l'$.

Лемма. Зависимость, которую дает искомая функция соответствия, показывает, что *каждая характеристика C, пересекающая прямую $y=l$ в точке M, достаточно близкой к оси Oy, пересечет и прямую $y=-l'$ в точке M', которая будет также близка к оси Oy.*

Чтобы не вводить в рассуждения излишних осложнений, докажем это свойство непосредственно. Оно будет в дальнейшем использоваться во многих рассуждениях.

Всегда можно найти такое α, что для $y=l$ и $0<x<\alpha$ коэффициент $[Q(x, y)+Y(x, y)]$ при dx в уравнении (135) не будет обращаться в нуль. Пусть M_0 и M_0' — точки пересечения характеристики $x=0$ с прямым $y=l$ и $y=-l'$. Обозначим A и A' — точки пересечения прямых $y=l$ и $y=-l'$ с $x=\alpha$ и рассмотрим прямоугольник $M_0AA'M_0$, который будем обозначать R.

Можно подобрать α настолько малым, чтобы внутри R не существовало особых точек уравнения (135). Характеристика C, проходящая через точку M отрезка M_0A, не касается его в этой точке. Продолжим ее внутрь прямоугольника R; очевидно, что C выйдет из R через точку M', так как внутри R нет особых точек и, по предположению, C не может окончиться в точке O. Когда точка M приближается в точке M_0, соответствующая ей точка M' перемещается по границе R в одном и том же направлении и, следовательно, стремится к некоторому предельному положению K'. Покажем, что K' совпадает с M_0'.

Действительно, если K' не совпадает с M_0', то через точку K' проходит характеристика C', отличная от оси

Oy. На характеристике C' существует направление, следуя по которому она входит внутрь области R через точку K'. Действительно, если бы это не имело места, то характеристика C, проходящая через точку M', близкую к K', также не могла бы войти внутрь R. Характеристика C', следуя по указанному направлению, выйдет из R через точку K, отличную от M_0. На дуге $K'K$ кривой C нет особых точек. Характеристика C, проходящая через точку M', близкую к K' и следующая в том же направлении, что и C', выйдет из R в точке M, близкой к K. Но это невозможно, поскольку M должна быть близка к M_0, а K отлично от M_0.

Таким образом, K' совпадает с M_0'. *Характеристика C, пересекающая прямую $y=l$ в точке M, близкой к M_0, пересечет $y=-l'$ в точке M', близкой к M_0'.* Лемма доказана. Прежде чем приступить к нахождению функции соответствия между M и M', сделаем одно замечание.

Предположениям, сделанным в отношении рассматриваемого уравнения, не противоречит утверждение, что уравнение (135) имеет действительные или мнимые решения такие, что частное x/y стремится к нулю при x и y, стремящихся к нулю. Необходимо только полагать, что на этих решениях x стремится к нулю, принимая отрицательные значения. Допустим сначала, что приводимый случай не встретится при исследовании интегралов уравнения (135), проходящих через точку $x=0$, $y=0$ и касающихся в ней оси $x=0$. Если существуют интегралы, на которых x/y стремится к нулю одновременно с x и y, то они должны быть такими, что для любого целого положительного s отношение x/y^s также стремится к нулю при x и y, стремящихся к нулю. Пусть η — произвольное положительное число. Рассмотрим прямые OD и OD', имеющие соответственно уравнения $\eta y=x$ и $\eta y+x=0$. Если точка M достаточно близка к точке M_0, то M будет лежать выше прямой OD, а M' ниже OD'. Характеристика C, пересекающая $y=l$ и $y=-l'$ в точках с абсциссами x и x' будет пересекать OD и OD' в точках N и N' с абсциссами x_1 и x_1'. Выбирая надлежащим образом η, покажем, что можно найти:

1) функцию соответствия между x и x_1, а также между x' и x_1';

2) функцию соответствия между x_1 и x_1'.

1°. *Функция соответствия между x и x_1.* Если положить $x = yt$, то уравнение (135) приведется к виду

$$t[P(t, 1) + Q(t, 1) + X^*(t, y)]dy + \\ + y[Q(t, 1) + Y^*(t, y)]dt = 0, \qquad (136)$$

где $X^*(t, 0) = 0$ и $Y^*(t, 0) = 0$. Поскольку предположили, что приводимый случай не может иметь места для решений уравнения (135), проходящих через точку $t = 0$, $x = 0$ и касающихся в ней оси $x = 0$, то, согласно § 45, $t = 0$, $y = 0$ — элементарная особая точка уравнения (136). Следовательно, одновременно $P(0, 1)$ и $Q(0, 1)$ не могут обращаться в нуль. Выражение $P(t, 1) + Q(t, 1)$ не равно тождественно нулю, ибо в противном случае $x = 0$, $y = 0$ была бы дикритической точкой, а это противоречит сформулированному в начале § 46 условию 2.

В силу выбора чисел l и l' на оси $t = 0$ между прямыми $y = -l'$ и $y = l$ нет никаких особых точек уравнения (136), отличных от точки $t = 0$, $y = 0$. Существует $\eta > 0$ такое, что при $-\eta < t < \eta$ выражение $P(t, 1) + Q(t, 1)$ не обращается в нуль, за исключением, быть может, точки $t = 0$ [1]).

Положение точек пересечения M, N, N', M' кривой C с прямыми $y = l$, $\eta y = x$, $\eta y = -x$, $y = -l'$ будет полностью определяться значениями x, x_1, x_1', x' абсцисс этих точек. Соотношение $x = ty$ ставит в соответствие характеристике C уравнения (135) характеристику C_2 уравнения (136), точкам M, N, N', M' точки M_2, N_2, N_2', M_2', в которых C_2 пересекается с прямыми $y = l$, $t\eta = 1$, $t\eta = -1$, $y = -l$. Положение этих точек будет полностью определяться значениями x, x_1, x_1', x'. Точкам M_0 и M_0' соответствуют в плоскости t, y точки $A_0(t =$

---

[1]) Если $P(0, 1) + Q(0, 1) = 0$, то $t = 0$, $y = 0$ будет исключительной особой точкой уравнения (136), и можно показать, что это уравнение имеет решение $y(t)$ такое, что когда t стремится к нулю по надлежащим образом выбранному контуру в плоскости комплексного переменного t, то функция y и отношение y/t стремятся к нулю. Можно, следовательно, предполагать (§ 43), что $P(0, 1) + Q(0, 1) \neq 0$, поскольку случай приводимости не будет иметь места при отыскании интегралов уравнения (135), проходящих через точку $x = 0$, $y = 0$ и касающихся в ней оси Ox.

$=0,\ y=l),\ A_0'(t=0,\ y=-l')$. Возьмем в плоскости ty точки $O'(y=0,\ t=0)$, $D_0(y=0,\ t=\eta)$, $D_0'(y=0,\ t=-\eta)$.

Рассмотрим часть характеристики C_2, расположенную в области $t>0$, $y>0$, она близка к характеристике C_0, образованной сегментом A_0O' оси $t=0$ и сегментом $O'D_0$ оси $y=0$. Прямые $y=l$ и $t=\eta$, которые пересекают C_0 в точках A_0 и D_0, будут нормалями к C_0. На дуге $A_0O'D_0$ кривой C_0 есть только одна элементарная особая точка. Следовательно, известен вид зависимости между x и x_1. Точно так же из рассмотрения части C_2, расположенной в области $t<0$, $y<0$, найдем зависимость между x_1' и x'. Природа этой зависимости определяется характером особой точки O', которая может быть или седлом, или исключительной особой точкой.

2°. *Функция соответствия между* x_1 *и* x_1'. Положим $y=xz$, тогда уравнение (135) приведется к виду

$$x[xP(1,\ z)+X(x,\ z)]dz+$$
$$+[zP(1,\ z)+Q(1,\ z)+Y(x,\ z)]dx=0. \quad (137)$$

Двум прямым $x=\pm\eta y$ плоскости x,y соответствуют две прямые $\eta z=\pm 1$ плоскости $x,\ z$, характеристике C соответствует характеристика C_2, пересекающая прямые $\eta z=1$ и $\eta z=-1$ в точках N_1 и N_1' с абсциссами x_1 и x_1'

Допустим вначале, что на оси $x=0$ между прямыми $\eta z=\pm 1$ нет ни одной особой точки уравнения (137). Выражение $zP(1,\ z)+Q(1,\ z)$ не обращается в нуль, когда ηz изменяется от -1 до 1.

Обозначим Δ_0 и Δ_0' точки пересечения прямой $x=0$ с прямыми $\eta z=\pm 1$. Сегмент $[\Delta_0, \Delta_0']$ прямой $x=0$ представляет собой дугу характеристики, на которой нет особых точек. Характеристика C_2, близкая к этому сегменту, определяет голоморфное соотношение между x_1 и x_1', абсциссами точек пересечения C с прямыми $\eta z=\pm 1$. Следовательно, $x_1'=x_1h(x_1)$, где $h(x_1)$ — функция голоморфная при $x=0$ и $h(0)\neq 0$.

3°. *Функция соответствия между* x_1 *и* x_1' *в случае, когда уравнение* (137) *имеет особые точки на оси* $x=0$.

Рассмотрим теперь случай, опущенный в 2°. Предположим, что уравнение (137) имеет одну или несколько особых точек на оси $x=0$ между прямыми $\eta z = \pm 1$. Вне этого отрезка на оси $x=0$ нет других особых точек уравнения (137). Разделим сегмент $[\Delta_0, \Delta_0']$ на части так, чтобы в каждом из полученных отрезков лежала бы только одна особая точка. Пусть $z=\alpha_i+l_i$ и $z=\alpha_i-l_i'$, прямые перпендикулярные к $x=0$, ограничивающие сегмент, содержащий особую точку $x=0$, $z=\alpha_i$. Зависимость, которая существует между x_1 и x_1', будет результирующей зависимостью между абсциссами x точек пересечения характеристики C_2 с различными прямыми $z=\alpha_i+l_i$, $z=\alpha_i-l_i'$, где i принимает значения $1, 2, \ldots, p$, соответствующие числу особых точек уравнения (137), лежащих на оси $x=0$. Найдем вид этих соотношений, приняв во внимание, что $x=0$, $z=\alpha_i$ — особая точка того же характера, что и точка $x=0$, $y=0$ для уравнения (135).

Если положить $z=\alpha_i+y_1$, то уравнение в переменных x и y_1 не будет иметь характеристик, оканчивающихся в точке $x=0$, $y_1=0$ и расположенных со стороны положительных x, так как такие характеристики соответствовали бы характеристикам уравнения (135), оканчивающимся в точке $x=0$, $y=0$. Уравнение в переменных x и y_1 имеет, так же как и уравнение (135), решение $x=0$. Чтобы установить зависимость, которая существует в плоскости x, y_1 между абсциссами точек пересечения характеристики C_2 с прямыми $y_1=l_1$ и $y_1=-l_1'$, будем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые были проделаны для уравнения в переменных x и y при получении соотношения между абсциссами точек пересечения характеристики C с прямыми $y=l$ и $y=-l'$. Если, положив $y_1=xz_1$, получим дифференциальное уравнение в переменных x и z, не имеющее особых точек на конечной части прямой $x=0$, то зависимость между абсциссами рассматриваемых точек получим так же, как и в 2°. Если уравнение в переменных x и z_1 имеет особые точки на конечной части оси $x=0$, то повторим рассуждения 3°.

Продолжая эти преобразования далее, придем к уравнению в переменных x и z_q, не имеющему особых точек на конечной части оси $x=0$. Действительно, последовательные выполнения указанных замен переменных приводят к уравнениям, имеющим решения $y(x)$ (мнимые, если x положительное) такие, что y/x, y_1/x, ...

стремятся к конечному пределу, когда x стремится к нулю [1]). Известно, что, выполняя указанные преобразования, будем получать элементарные особые точки до тех пор, пока не остановимся на уравнении в переменных x и z_q, не имеющем особых точек на оси $x=0$. Сформулированное утверждение справедливо, ибо если придем к уравнению в переменных x и y_n, имеющему элементарную особую точку $x=0$, $y_n=0$, то у полученного уравнения будет существовать по крайней мере одна характеристика, расположенная со стороны положительных x и оканчивающаяся в точке $x=0$, $y_n=0$. Этой характеристике будет соответствовать характеристика C, расположенная со стороны положительных x и оканчивающаяся в точке $x=0, y=0$, что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, проводя указанные преобразования переменных, непременно придем к случаю 2°.

Применим теперь изложенный метод к нахождению функции соответствия между x_1 и x_1'. Рассмотрим серию промежуточных параметров x_i ($i=1, 2, \ldots, p$), которые будут абсциссами точек пересечения характеристики C с кривыми, проходящими через точку $x=0$, $y=0$ и заключенными в угле между прямыми $\eta y = \pm x$. Полагая $x_{i+1} = x_i'$, получим серию соотношений между двумя последовательными значениями x_i и x_{i+1}, где i принимает значения 1, 2, ..., p. Эти соотношения будут голоморфными или соотношениями, соответствующими прохождению характеристики в окрестности элементарной особой точки.

Заключение. В случае, когда к уравнению (137) применимы рассуждения 2° или 3°, приходим к заключению. *Прохождение характеристики вблизи особой точки эквивалентно, в смысле функции соответствия, последовательному прохождению характеристики в окрестности некоторого числа элементарных особых точек.*

Если, например, предположить, что для уравнения (136) особая точка $t=0$, $y=0$ — седло и что у урав-

[1]) Конечные пределы, которые получаются для отношений y/x, y_1/x, ..., будут действительными, поскольку рассматриваются только действительные особые точки, расположенные на оси $x=0$, но решения, соответствующие этим пределам, обязательно будут мнимыми для положительных значений x, так как не существует характеристик, расположенных со стороны положительных x и оканчивающихся в точке $x=0$, $y=0$.

нения (137) нет особых точек на оси $x=0$, то будем иметь соотношения

$$x = ax_1^{\lambda}[1+F(x_1)]; \quad x_1' = bx'^{\lambda'}[1+G(x')];$$
$$x_1 = cx_1'\left[1+H(x_1')\right],$$

где a, b, c, λ, λ' — постоянные, $\lambda\cdot\lambda'=1$, F и G — полурегулярные функции, равные нулю при нулевых значениях аргументов, H — голоморфная функция, равная нулю при $x_1'=0$. Исключая последовательно x_1' и x_1 из этих соотношений, получим

$$x = kx'[1+K(x')],$$

где k — постоянная, K — полурегулярная функция, равная нулю при $x'=0$. В частном случае K может быть рядом по целым степеням x', но, вообще говоря, K — полурегулярная функция, представляющая собой ряд по степеням x', x'^{λ}, $x'^{\lambda'}$, а также $x'\ln x'$, если λ — рациональное. Если все особые точки, встречающиеся при применении к уравнениям (136) и (137) указанного метода, будут седла, то соотношения между x и x' имеют вид $x=kx'[1+K(x')]$, где функция $K(x')$ — полурегулярная и равная нулю при $x'=0$. Это утверждение распространяется, только с некоторыми ограничениями, на случай, когда некоторые из рассматриваемых особых точек будут исключительные особые точки. Так следует заметить, что если одна из этих исключительных точек проходится в направлении uv, то другая будет проходится в направлении vu (см. § 34).

З а м е ч а н и е. Метод, который был применен при получении функции соответствия в случае особой точки рассматриваемого типа, распространяется, в частности, на случай полуособой точки (§ 5). Если две дуги характеристики, оканчивающиеся в полуособой точке $x=0$, $y=0$ есть ветви кривой, для которой $x=0$, $y=0$ — регулярная точка, то с помощью замены переменного, приняв эту кривую за ось $x=0$, можно применить метод, указанный далее, для произвольной особой точки.

§ 47. Изменения, вводимые при исследовании приводимого случая

В § 46 было введено ограничение, состоящее в том, что при исследовании интегралов уравнения (135), проходящих через точку $x=0$, $y=0$, не может встретиться приводимый случай. Неявно такое же ограничение было введено и в 3° для интегралов (проходящих через особые точки) различных уравнений, получаемых из (135) заменами переменных. Освободимся теперь от этого ограничения.

Чтобы избавиться от затруднений, которые встречаются при изучении приводимого случая, подберем такое r, что подстановкой $x = u^r$ уравнение (135) преобразуется в уравнение в переменных u и y, для которого приводимый случай уже не имеет места. Целесообразно r подобрать так, чтобы приводимый случай не имел бы места ни для одного интеграла (135), которому соответствует характеристика такая, что на ней отношение x/y стремится к нулю при x и y, стремящихся к нулю. Для уравнения в переменных u и y случай приводимости не будет иметь места для всех характеристик, на которых отношение y/u^r неограниченно растет, когда u и y стремятся к нулю, оставаясь на этой характеристике. Замена переменного $x = u^r$ характеристике C уравнения (135) ставит в соответствие характеристику Г уравнения в переменных u и y. Уравнение (135) после такой замены приводится к виду

$$u[A(u, y) + X(u, y)]dy + [B(u, y) + Y(u, y)]du = 0, \tag{138}$$

где A и B — однородные полиномы наименьшей степени в коэффициентах при dy и du. Если получим зависимость между значениями u, соответствующими точкам пересечения характеристики Г с прямой $y = l$, и кривой $y = l'u^r$, где l, l' — постоянные, то тем самым будет получена зависимость между значениями x, соответствующих точкам пересечения характеристики C с прямыми $y = l$ и $y = l'x$. Таким образом, можно освободиться от ограничений, сделанных в § 46, при установлении зависимости между значениями x и x_1.

Если положить $u = ty$, то уравнение (138) преобразуется к виду

$$t[A(t, 1) + B(t, 1) + X^*(t, y)]dy + \\ + y[B(t, 1) + Y^*(t, y)]dt = 0, \tag{139}$$

где $X^*(t, 0) = 0$, $Y^*(t, 0) = 0$. Для интегралов уравнения (138), проходящих через точку $u = 0$, $y = 0$ и касающихся в ней оси $u = 0$, случай приводимости не будет иметь места. Известно (§ 45), что $t=0, y=0$ есть элементарная особая точка для уравнения (136). Перенесем на уравнение (139) рассуждения, проведенные для уравнения (136). Подберем $\eta_1 > 0$ такое, чтобы выражение $A(t, 1)+B(t, 1)$ не обращалось в нуль при $-\eta_1 < t < \eta_1$, за исключением быть может $t=0$. Рассмотрим в плоскости t, y характеристику Γ', соответствующую характеристике C. Характеристика Γ' пересекает прямую $y=l$ в точке с параметром u и прямую $t=\eta_1$ в точке с параметром u_1. Зависимость между u и u_1 известна и определяется типом особой точки $t=0$, $y=0$. Следовательно, найдем и зависимость между абсциссами точек пересечения характеристики Γ с прямыми $y=l$ и $\eta_1 y=u$.

Положив теперь в (138) $y=y_1 u$, получим

$$u[A(1, y_1)+X^{**}(u, y_1)]dy_1 + \\ + [y_1 A(1, y_1)+B(1, y_1)+Y^{**}(u, y_1)]du=0. \quad (140)$$

Если это уравнение имеет на оси $u=0$ особые точки с положительными ординатами, то обозначим через l_1 наибольшее положительное число, меньшее всех ординат этих точек. Пусть характеристике Γ_1 уравнения (140) соответствует характеристика Γ уравнения (138). Применяя к уравнению (140) рассуждения, проведенные для уравнения (137) (§ 46, 3°), получим зависимость между значениями u, соответствующими точкам пересечения характеристики Γ_1 с прямыми $\eta_1 y=1$ и $y_1=l_1$, которая в свою очередь позволит установить зависимость между значениями u, отвечающими точкам пересечения характеристики Γ с прямыми $y=l$ и $y=l_1 u$. Если у уравнения (140) нет особых точек с положительными ординатами, лежащих на оси $u=0$, то, положив $\eta_1 l_1=1$, найдем зависимость между значениями u и u_1, определяющими абсциссы точек пересечения характеристики Γ с прямыми $y=l$ и $y=l_1 u$.

Применим теперь к уравнению (140) рассуждения, проведенные для уравнения (138), и найдем зависимость между значениями, отвечающими точкам пересечения Γ_1 с прямыми $y_1=l_1$ и $y_1=l_2 u$, где число l_2 играет такую же роль, как и l_1 в (138). Таким образом, может быть получена зависимость между последовательными точками пересечения характеристики Γ с кривыми $y=l$, $y=l_1 u$, $y=l_2 u^2$, ... Продолжая этот процесс, получим ряд соотношений между точками пересечения характеристики Г с $y=l$, $y=l_1u$, $y=l_2u^2$, ..., $y=l_ru^r$.

Если в этих соотношениях заменить u на $x^{1/r}$, то получим зависимость между абсциссами точек пересечения характеристики C уравнения (135) с прямыми $y=l$ и $y=l'x$, где $l_r=l'$.

Рассмотрим различные формы соотношений, которые получим, применив метод § 46 для значений u и u', соответствующих точкам пересечения характеристики Г с двумя последовательными прямыми $y=l_iu$ и $y=l_{i+1}u$. Все эти соотношения легко найти, заменяя u на $x^{1/r}$ и u' на $x'^{1/r}$.

Если есть зависимость

$$u'=au^{\lambda}[1+F(u)],$$

где a и λ — положительные постоянные и $F(u)$ — полурегулярная функция, равная нулю при $u=0$, то после замены будем иметь

$$u'^r=a^r u^{\lambda r}[1+F(u)]^r;\ x'=\alpha x^{\lambda}[1+\varphi(x)],$$

где α — постоянная и $\varphi(x)$ — полурегулярная функция, равная нулю при $x=0$.

Если же полученная зависимость имеет вид

$$u'=au^b e^{\frac{p(u)}{u^n}}[1+F(u)],$$

где a — положительная постоянная, n — целое, $p(u)$ — многочлен степени не выше n, то получаем

$$x'=\alpha x^b e^{\frac{rp(x^{1/r})}{x^{n/r}}}[1+\varphi(x)],$$

где $\varphi(x)$, так же как и функция $F(u)$, — полурегулярная и равная нулю при нулевом значении аргумента.

Эти соотношения могут быть использованы для получения функции соответствия, так же как и те, из которых они получены. В частности, сохраняется свойство, доказанное в § 34 о характеристиках, проходящих последовательно в окрестности двух исключительных особых точек, одну из которых проходят в направлении uv, другую в направлении vu.

§ 48. Функция соответствия в одном частном случае

Установим функцию соответствия для области отталкивания сложной особой точки при следующих предположениях:

1. $O(x=0,\ y=0)$ — особая точка. В этой точке наряду с другими оканчивается характеристика $x=0$ и характеристика Г, касающаяся в O оси Ox со стороны положительных x.

2. Характеристика Г и положительная часть оси Oy ограничивают сектор отталкивания R особой точки O. В области, расположенной справа от оси Oy и выше Г, нет характеристик, оканчивающихся в O.

3. Если положить $y = y_n x^n$, где n — натуральное число, то y_n стремится к нулю при x, стремящемся к нулю по характеристике Г. Кроме того, для дифференциального уравнения в переменных x и y_n точка $x=0$, $y_n=0$ будет элементарной особой точкой.

Напишем рассматриваемое дифференциальное уравнение в уже знакомой нам форме (135)

$$x[P(x, y) + X(x, y)]dy + [Q(x, y) + Y(x, y)]dx = 0. \tag{141}$$

Возьмем на положительной части оси Oy точку M_0 и на характеристике Г точку M_0' так, чтобы на дугах характеристик M_0O и OM_0', которые в совокупности обозначим через C_0, не было особых точек, отличных от O. Через точку M_0 проведем дугу S, например прямую $y = l_0$. Через точку M_0' проведем дугу S', например прямую $x = l'$. Пусть C — характеристика уравнения (141), проходящая через точку M, расположенную на дуге S и имеющую абсциссу, равную x_0. Легко доказать (рассуждая так же как в лемме § 46), что если x_0 достаточно мало, то характеристика C, начинающаяся в точке M и следующая в надлежащем направлении, пересечет дугу S' в точке M', так же достаточно близкой к M_0'.

Этот результат также вытекает из работы Бендиксона (стр. 23). Пусть v — длина дуги $M_0'M'$, определяющей положение точки M'.

Выражение $xP(x, y) + Q(x, y)$ не может быть тождественным нулем, так как точка O не может быть дикритической. Среди действительных или мнимых прямых, полученных приравниванием этого выражения к нулю, имеется некоторое число прямых с положительными угловыми коэффициентами.

Пусть a, b, c, ..., k — эти коэффициенты, записанные в порядке убывания. Обозначим через $OD_1, OD_2, \ldots$ ..., OD_q полупрямые, расположенные со стороны положительных x и имеющие положительные угловые коэффициенты a_1, b_1, ..., k_1, l_1 такие, что

$$0 < l_1 < k < k_1 < \ldots < b_1 < a < a_1.$$

В секторе, заключенном между двумя последовательными прямыми OD_i и OD_{i+1}, лежит одна прямая $y = mx$, угловой коэффициент которой удовлетворяет уравнению $P(1, m) + Q(1, m) = 0$. Если x_0 достаточно мало, то точка M лежит над прямой OD_1 и точка M' лежит под прямой OD_q. Достаточно нарисовать чертеж, чтобы увидеть, что дуга MM' характеристики C пересекает все прямые OD_i. Пусть x_i есть абсцисса точки M_i — точки пересечения характеристики C с полупрямой OD_i. Для нахождения зависимости между параметрами x_0 и v, определяющими положение точек M и M', найдем:

1) зависимость между x_i и x_{i+1};

2) зависимость между x_0 и x_1;

3) зависимость между x_q и v.

1. *Зависимость между x_i и x_{i+1}.* Установим, например, зависимость между x_1 и x_2. Положим $y = x(a + z)$. Согласно сделанным предположениям особая точка $x = 0$, $z = 0$ уравнения в переменных x и z обладают следующими свойствами:

а) уравнение имеет характеристику $x = 0$;

б) уравнение не имеет характеристик, расположенных со стороны положительных x и оканчивающихся в точке $x = 0$, $z = 0$.

Следовательно, имеем случай, разобранный в § 46. Если обозначить через C' характеристику уравнения в переменных x и z, соответствующую характеристике C, то x_1 и x_2 будут абсциссами точек пересечения характеристики C' с прямыми $z = a_1 - a$ и $z = b_1 - a$. На части характеристики $x = 0$, заключенной между этими прямыми, нет других особых точек, отличных от точки $x = 0$, $z = 0$. Поэтому в силу § 47 известна зависимость между x_1 и x_2 и вообще между x_i и x_{i+1}.

2. *Зависимость между* x_0 *и* x_1. Положим $x = ty$, тогда получим уже знакомое уравнение вида (136)

$$t[P(t, 1) + Q(t, 1) + X^*(t, y)]dy +$$
$$+ y[Q(t, 1) + Y^*(t, y)]dt = 0. \quad (142)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $t = 0$, $y = 0$ — элементарная особая точка.

Пусть C'' — характеристика уравнения (142), которой соответствует характеристика C уравнения (141). Значения x_0 и x_1 — абсцисс точек пересечения характеристики C с прямыми $y = l_0$ и $a_1x = 1$ — определяют положение точек пересечения характеристики C'' с прямыми $y = l_0$ и $a_1t = 1$. Уравнение (142) имеет две характеристики: $t = 0$ и $y = 0$. На отрезках этих характеристик, отсекаемых прямыми $y = l_0$ и $a_1t = 1$, есть только одна особая точка $t = 0$, $y = 0$, которую будем считать элементарной; тогда известна зависимость между x_0 и x_1.

Чтобы освободиться от предположения, что $t = 0$, $y = 0$ есть элементарная особая точка уравнения (142), нужно провести такие же рассуждения, как и в § 47.

3. *Зависимость между* x_q *и* v. Положим $y = y_1x$; тогда получим уравнение

$$x[P(1, y_1) + X^{**}(x, y_1)]dy_1 +$$
$$+ [P(1, y_1)y_1 + Q(1, y_1) + Y^{**}(x, y_1)]dx = 0, \quad (143)$$

имеющее особую точку $x = 0$, $y_1 = 0$. Через эту точку проходит характеристика $x = 0$ и дуга характеристики Γ_1, соответствующая дуге характеристики Γ уравнения (137). Область, расположенная справа от $x = 0$ и выше Γ_1, есть область отталкивания. Характеристике C уравнения (141) соответствует характеристика C_1 уравнения (143). Кривая C пересекает прямую $y = l_1x$ в точке M_q с абсциссой x_q и прямую $x = l'$ в точке M' такой, что $M_0'M' = v$. Эти параметры определяют положение точек пересечения характеристики C_1 с прямыми $y_1 = l_1$ и $x = l'$ в плоскости xy_1. Если $x = 0$, $y_1 = 0$ будет элементарной особой точкой уравнения (143), то зависимость между v и x_q определяется непосредственно. Действительно, на кривой, образованной отрезком оси $x = 0$, заключенным между прямыми $y_1 = l$ и $y_1 = 0$ и дугой характеристики Γ_1, заключенной между $x = 0$ и $x = l'$, нет особых точек, отличных от $x = 0$, $y_1 = 0$.

Предположим теперь, что $x=0$, $y_1=0$ не будет элементарной особой точкой. Уравнение (143) удовлетворяет всем свойствам, перечисленным вначале § 47, нужно только заменить Γ на Γ_1, y на y_1 и x^n на x^{n-1}. Следовательно, к уравнению (143) применимы рассуждения, относящиеся к уравнению (141). Обозначим через l_2 число, играющее для уравнения (143) такую же роль, как l_1 в (141), и получим зависимость между точками пересечения C с прямыми $y_1=l_1$ и $y_1=l_2x$. Продолжив такие замены далее, положим, наконец, $y_{q-1}=$ $=xy_q$ и, обозначив C_q — характеристику, которая в плоскости x, y_q соответствует характеристике C, найдем зависимость между абсциссами точек пересечения характеристики C_q с прямыми $y_q=l_q$ и $y_q=l_{q+1}x$. Из этой зависимости найдем соотношения, связывающие точки пересечения характеристики C с последовательностью кривых $y=l_qx^q$ ($q=0, 1, 2, \ldots$) в плоскости xy. Когда после замен придем к уравнению в переменных x и y_n, причем, по предположению, для этого уравнения точка $x=0$, $y_n=0$ будет элементарной особой точкой, получим зависимость между абсциссой точки пересечения C с кривой $y=l_nx^n$ и параметром v, определяющим положение точки пересечения C с прямой $x=l$.

З а к л ю ч е н и е. Зависимость между значениями x_0 и v, определяющими положение точек пересечения характеристики с двумя прямыми S и S', получается в результате использования соотношений, установленных в пп. 1, 2, 3. Эти соотношения имеют такую же форму, как та, которая встречается при рассмотрении характеристик, проходящих в окрестности элементарных особых точек. Таким образом, приходим к заключению, что *прохождение характеристики в окрестности рассматриваемой особой точки эквивалентно с точки зрения функции соответствия прохождению характеристики последовательно в окрестности некоторого числа элементарных особых точек.*

З а м е ч а н и е. Установлена функция соответствия между точками пересечения характеристики C с прямыми $y=l_0$ и $x=l'$. Однако эта функция будет абсолютно той же самой, если прямую $y=l_0$ заменить кривой S, определяемой уравнением $y=\varphi(x)$ и пересекающей ось $x=0$ в такой точке, что на части оси $x=0$, заключенной между S и $y=l_0$ нет особых точек уравнения (141). Пусть $\varphi(x)$ голоморфна при $x=0$, тогда между абсциссами x_0 и x'_0 точек пересечения C с $y=l_0$ и S существует голоморфное соотношение

$$x'_0 = a x_0 [1 + h(x_0)],$$

где a — постоянная и $h(x_0)$ — голоморфная функция, равная нулю при $x_0=0$.

§ 49. Функция соответствия для области отталкивания особой точки произвольного вида

Пусть C_1 и C_2 — две дуги характеристики, оканчивающиеся в особой точке O и ограничивающие сектор отталкивания этой точки.

Обозначим OT_1 и OT_2 полупрямые, касающиеся C_1 и C_2 в точке O. Если существует отрезок OD такой, что он целиком лежит внутри рассматриваемого сектора, то *углом этого сектора* назовем наименьший угол, на который нужно повернуть OT_1, чтобы он совпал с OT_2, пройдя предварительно через OD. Этот угол может быть равным 2π, если OT_1 и OT_2 совпадают.

Если никакого сегмента OD с указанными свойствами не существует, то угол сектора будем считать равным нулю. Такой случай имеет место, если область отталкивания ограничена двумя дугами характеристики, для которых O — точка возврата. Если угол сектора отталкивания меньше π, то можно предполагать, что внутри этого угла не проходит ось Oy и что ни OT_1, ни OT_2 не совпадают с Oy. Этого всегда можно достигнуть заменой координатных осей. Можно также предполагать, что рассматриваемый сектор расположен в полуплоскости $x>0$. Если угол сектора больше π, то можно считать, что полупрямые OT_1 и OT_2 расположены в области $x>0$.

Рассмотрим прямую $x=l$, пересекающую C_1 и C_2 в точках M_1 и M_2. Предположим, что на дугах OM_1 и OM_2 кривых C_1 и C_2 нет особых точек, отличных от O. Характеристика C, достаточно близкая к C_1 и C_2, пересекает $x=l$ в точках N_1 и N_2, близких соответственно к M_1 и M_2. Найдем функцию соответствия между N_1 и N_2, т. е. форму зависимости между расстояниями

$$M_1N_1 = v_1 \quad \text{и} \quad M_2N_2 = v_2.$$

Напишем дифференциальное уравнение, имеющее особую точку $x = 0$, $y = 0$ в виде

$$[A(x, y) + X(x, y)]dy + [B(x, y) + Y(x, y)]dx = 0, \quad (144)$$

где A и B — однородные полиномы степени n, представляющие собой совокупность членов наинизшей степени в коэффициентах при dx и dy. Пусть

$$R(x, y) = yA(x, y) + xB(x, y).$$

Оставим на время в стороне случай, когда $R(x, y)$ равно тождественно нулю и точка $x = 0$, $y = 0$ дикритическая. Чтобы найти функцию соответствия, рассмотрим различные случаи.

1. *Угол сектора отталкивания меньше* π *и больше* 0. Рассмотрим все полупрямые, удовлетворяющие однородному уравнению $R(x, y) = 0$ и расположенные внутри сектора отталкивания. Пусть OT'_i эти полупрямые, занумерованные в том порядке, как они встречаются, начиная от OT'_1 при описывании угла сектора отталкивания. Индекс i принимает значения $1, 2, \ldots, q-1$. Внутри каждого угла $T_1OT'_1, \ldots, T'_iOT_{i+1}, \ldots, T'_{q-1}OT_2$ проведем одну полупрямую. Допустим, что полупрямые OD_i занумерованы в том же порядке, что и прямые OT_i. Обозначим α_i угловой коэффициент полупрямой OD_i. Индекс i принимает значения $1, 2, \ldots$ $\ldots, q$.

Аналогично тому, как это было сделано в лемме § 46, покажем, что если характеристика C, проходящая внутри области отталкивания, встречает прямую $x = l$ в точке N_1, достаточно близкой к M_1, то она встречает каждую из прямых OD_i в точке Q_i. Положение этих точек будет вполне определяться абсциссами x_i.

Чтобы найти зависимость между x_i, положим $y = zx$. Уравнение (144) преобразуется к виду

$$x[A(1, z) + X^*(x, z)]dz + [R(1, z) + Y^*(x, z)]dx = 0, \quad (145)$$

где $X^*(0, z) = 0$ и $Y^*(0, z) = 0$. Кривой C соответствует в плоскости xz характеристика C', прямой OD_i соответствует прямая $z = \alpha_i$, сектору между прямыми OD_i и OD_{i+1} соответствует часть плоскости xz, где $x > 0$, заключенная между $z = \alpha_i$ и $z = \alpha_{i+1}$. Уравнение (145) имеет характеристику $x = 0$. На отрезке оси $x = 0$, заключенном между прямыми $z=\alpha_i$ и $z=\alpha_{i+1}$, есть только одна особая точка. Ни одна из характеристик, расположенных со стороны положительных x, не оканчивается в этой точке. Следовательно, имеем случай, изученный в § 46, и поэтому известно, как найти зависимость, которая существует между абсциссами x_i и x_{i+1} точек пересечения C с $z=\alpha_i$ и $z=\alpha_{i+1}$. Из леммы § 46 следует, что если одна из этих точек существует, то обязательно есть и другая.

Чтобы получить функцию соответствия для области M_1OM_2, достаточно найти функцию соответствия между точками N_1 и Q_1, в которых характеристика C пересекает прямые $x=l$ и OD_1, поскольку функция соответствия между N_2 и Q_q (точками пересечения C с $x=l$ и OD_q) получается таким же образом. Вернемся к замене переменного $y=zx$. Сепаратрисе C_1 в плоскости xz соответствует сепаратриса C'_1, пересекающая прямую $x=l$ в точке M'_1, а $x=0$ в точке A_1, ордината z которой равна угловому коэффициенту полупрямой OT_1. Полупрямая OD_1 переводится в $z=\alpha_1$. Характеристика C', соответствующая C, пересекает прямые $x=l$ и $z=$ $=\alpha_1$ в точках N'_1 и Q'_1, соответствующих N_1 и Q_1. Если A_1 есть элементарная особая точка уравнения (145), то, как и в общем случае, имеем функцию соответствия между x_1, абсциссой точки Q_1 и длиной отрезка $v=$ $=M'_1N'_1=M_1N_1$. Следовательно, получаем функцию соответствия между Q_1 и N_1. Если A_1 — не элементарная особая точка, то предположим вначале, что при исследовании сепаратрисы C_1 имеет место нормальный случай (§ 41), и сделаем замену переменного, чтобы прийти к случаю, рассмотренному в § 48. По доказанному в § 41 известно, что существует целое число m и полином $g(x)$ степени не выше m такой, что если сделать замену переменного

$$z=g(x)+y_m x^m,$$

то будут выполнены следующие условия:

а) y_m и x^m стремятся к нулю одновременно, когда, перемещаясь по C'_1, приближаемся к точке A_1;

б) для уравнения в переменных x и y_m точка $x=0$, $y_m=0$ — элементарная особая точка.

Следовательно, если положить $z=g(x)+y_0$, то получится дифференциальное уравнение в переменных x

и y_0, для которого особая точка $x=0$, $y_0=0$ будет удовлетворять трем предположениям, указанным в начале § 48. Используем также замечания § 48 о форме зависимости между v и x_1. Таким образом, функция соответствия между N_1 и N_2 может быть получена в результате использования уже установленных соотношений. Изучим теперь опущенный случай.

2. *Угол сектора отталкивания по-прежнему заключен между* 0 *и* π, *но точка* A_1, *рассмотренная в* 1), *не будет элементарной особой точкой и при исследовании сепаратрисы* C_1 *не может быть нормального случая.* Поскольку сепаратриса C_1 отлична от $x=0$, то известно (§ 44), что если не встретится нормальный случай, то будет иметь место случай приводимости. Существует целое число r такое, что, полагая $x=u^r$, придем к нормальному случаю, и сепаратрисе C_1 плоскости xy соответствует характеристика Γ_1 в плоскости uy. Характеристике C соответствует характеристика Γ.

В §§ 49 и 47 было получено соотношение между параметром v, определяющим пересечение Γ с $u=e^{1/r}$, и параметром u, определяющим пересечение Γ с $y=\alpha_1 x$. Заменяя в полученном соотношении u на $x^{1/r}$, найдем функцию соответствия между Q_1 и N_1.

3. *Угол сектора отталкивания равен нулю.* Две полукасательные OT_1 и OT_2 совпадают и расположены в области $x>0$, так же как и область отталкивания.

Известно, что характеристики C_1 и C_2 можно разделить (§ 43) при помощи замены переменного $y=\varphi(x)+y_r x^r$, которая устанавливает соответствие характеристики C характеристике Γ и сепаратрис C_1 и C_2 сепаратрисам Γ_1 и Γ_2, ограничивающим в плоскости переменных x и y_r область отталкивания особой точки $x=0$, $y_r=0$. Рассуждая так же, как и в 1 и 2, установим функцию соответствия между точками пересечения v_1 и v_2 кривой Γ с $x=l$, следовательно, найдем соотношение между длинами отрезков M_1N_1 и M_2N_2.

4. *Угол сектора отталкивания больше* π. Две полупрямые OT_1 и OT_2 могут совпадать и угол сектора может быть равен 2π. К полупрямым, удовлетворяющим уравнению $R(x, y)=0$ и расположенным в угле сектора, добавим полупрямые, образованные из оси Oy точкой O. (Две полуоси Oy.) Приведем, как и в 1, между этими полупрямыми, к которым добавлены OT_1 и OT_2, полупрямые OD_i. Сохраним все обозначения 1. Чтобы

получить функцию соответствия между N_1 и N_2, достаточно вспомнить все, что было сказано в 1 и дополнительно показать, как получается функция соответствия между точками пересечения C с двумя полупрямыми OD_s и OD_{s+1}, ограничивающими сектор, содержащий часть оси Oy. Пусть $x-\alpha y=0$ и $x+\beta y=0$ уравнения OD_s и OD_{s+1}, где α и β положительны. Положим $x=ty$; тогда получим дифференциальное уравнение в переменных t и y, имеющее характеристику $y=0$:

$$[R(t, 1)+X^*(t, y)]dy+y[B(t, 1)+Y^*(t, y)]dt=0. \qquad (146)$$

Если $R(0, 1)\neq 0$, то уравнение (146) не имеет особых точек, расположенных на $y=0$ между прямыми $t=\alpha$ и $t+\beta=0$, соответствующими OD_s и OD_{s+1}. Характеристике C соответствует в плоскости ty характеристика C', пересекающая $t-\alpha=0$ и $t+\beta=0$ в точках Q'_s и Q'_{s+1}, соответствующих Q_s и Q_{s+1}. Следовательно, может быть найдено голоморфное соотношение между координатами y_s и y_{s+1} точек Q_s и Q_{s+1}. Полагая

$$\rho_i=OQ_i,$$

получим голоморфное соотношение

$$\rho_{s+1}=a\rho_s[1+h(\rho_s)]$$

между ρ_s и ρ_{s+1}. Если

$$R(0,\ 1)=0,$$

то

$$t=0, \qquad y=0$$

есть особая точка (146). В этой точке не оканчивается никакая характеристика (кроме $y=0$). Таким образом, этот случай аналогичен тому, который рассматривался в § 46. Известно, как найти функцию соответствия между ρ_s и ρ_{s+1}.

Введя параметры ρ_i вместо параметров x_i, рассмотренных в 1 при получении функции соответствия между Q_i и Q_{i+1}, избавимся от необходимости введения отрицательных параметров.

§ 50. Функция соответствия в области отталкивания для дикритической точки

В § 37 (замечание) было указано, в каких случаях существует область отталкивания в дикритической точке. Если рассмотрим необычное направление $y=ax$ в дикритической точке $x=0$, $y=0$ и если положим

$y = zx$, то для дифференциального уравнения в переменных x и z точка $A(x = 0,\ z = a)$ будет обыкновенной точкой. Через нее проходит характеристика Γ_0, касающаяся оси $x = 0$ в A и не пересекающая в этой точке прямую $x = 0$. Характеристики Γ, близкие к Γ_0, расположенные в области, ограниченной кривой Γ_0 и не содержащей точек оси $x = 0$, близких к A, также не будут пересекать ось $x = 0$ в окрестности точки A. Кривой Γ_0 соответствует характеристика C_0 уравнения в переменных x и y. Для кривой C_0 точка $x = 0$, $y = 0$ есть точка возврата. Характеристикам Γ соответствуют характеристики C, заключенные между ветвями C_0; они не могут оканчиваться в O. Область, ограниченная ветвями C_0, есть область отталкивания.

Рассмотрим прямую $x = l$, пересекающую обе ветви C_0 в точках M_1 и M_2 таким образом, чтобы на дуге M_1OM_2 кривой C_0 не было особых точек, отличных от O. Характеристика C пересекает $x = l$ в точках N_1 и N_2. Функцию соответствия между N_1 и N_2 получить легко. Действительно, точкам N_1 и N_2 в плоскости xz соответствуют точки N_1' и N_2', которые лежат на пересечении Γ с $x = l$. Прямая $x = l$ пересекает Γ_0 в точках M_1' и M_2' так, что на дуге $M_1'AM_2'$ нет особых точек. Поэтому существует голоморфное соответствие между параметрами

$$v_1 = M_1'N_1', \quad v_2 = M_2'N_2'.$$

Следовательно, существует голоморфное соответствие между длинами отрезков M_1N_1 и M_2N_2, пропорциональных v_1 и v_2.

§ 51. Характеристики, близкие к циклу, проходящему через сложную особую точку

Подведем итог предыдущим рассуждениям; допустим, что дана область отталкивания, ограниченная двумя сепаратрисами C_1 и C_2, оканчивающимися в сложной особой точке. Прямая $x = l$ пересекает C_1 и C_2 соответственно в точках M_1 и M_2. Рассмотрим характеристику C, пересекающую $x = l$ в точках N_1 и N_2. Полагая $z_1 = M_1N_1$ и $z_2 = M_2N_2$, найдем функцию соответствия между z_1 и z_2. В самом общем случае с помощью серии замен переменных придем к рассмотрению точек пересечения

C с серией кривых S_i, проходящих через особую точку внутри области отталкивания. Получим соотношения, связывающие точки пересечения C с двумя последовательными кривыми S_i. Некоторые из этих соотношений будут голоморфными, другие, получаемые в окрестности элементарной особой точки при помощи вспомогательных уравнений, будут иметь форму, зависящую от природы этой особой точки: седла или исключительной особой точки.

Очевидно, что с точки зрения функции соответствия прохождение характеристики в окрестности сложной особой точки эквивалентно прохождению C в окрестности нескольких элементарных особых точек в определенной последовательности.

Если эти элементарные особые точки — седла, то соотношение между z_1 и z_2 может быть разрешено либо относительно z_1, либо относительно z_2. Например,

$$z_2 = az_1^{\nu}[1 + F(z_1)],$$

где a и ν — положительные постоянные, $F(z_1)$ — функция, полурегулярная и равная нулю при $z_1 = 0$. Можно утверждать, что если рассматривать только главный член правой части az_1^{ν}, то прохождение C в окрестности сложной особой точки эквивалентно прохождению в окрестности одного седла.

Существенно упрощается и определение показателя ν в функции $F(z_1)$[1].

Если среди элементарных особых точек, появляющихся в связи с применением изложенного метода, найдутся сложные особые точки, то этот метод также может быть применен. Например (§ 34), если проходятся две исключительные особые точки одна в смысле uv, другая в смысле vu. Следует также заметить, что полученные результаты не позволяют утверждать, что соотношение между z_1 и z_2 можно разрешить или относительно z_1 или относительно z_2. Зависимость между z_1 и z_2 получается из промежуточных соотношений между точками пересечения характеристики C с вспомогательными кривыми S_i.

---

[1]) Нетрудно доказать, что показатель ν равен отношению показателей сепаратрис C_1 и C_2. Эти показатели для уравнения с элементарной особой точкой получаются непосредственно (см. мемуар Дюлака [3]).

На основании рассуждений предыдущих параграфов и § 35 ясно, что результаты, относящиеся к случаю особого цикла, проходящего только через элементарные особые точки, распространяются и на особые циклы, проходящие и через особые точки произвольного вида. *В области, ограниченной циклом C_0, в котором рассматриваются характеристики, близкие к C_0, существует кольцевая область R, примыкающая к C_0 и такая, что в ней возможны только два случая*:

1. *Ни одна из характеристик, лежащих в R, не будет циклом.*
2. *Все характеристики в R — циклы.*

ЧАСТЬ 4

ДОПОЛНЕНИЯ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ

§ 52. Характеристики, близкие к особой точке, в которой ни одна характеристика не оканчивается с определенной касательной

Покажем, что на этот случай можно распространить все предыдущие рассуждения, если точку O рассматривать как выродившийся цикл. *Все характеристики в окрестности такой точки либо циклы, окружающие ее, либо спирали, приближающиеся к O в одном направлении.*

Чтобы установить этот результат, примем особую точку O за начало координат и уже рассмотренное ранее дифференциальное уравнение (144) запишем в виде

$$[A(x,\ y)+X(x,\ y)]dy+[B(x,\ y)+Y(x,\ y)]dx=0. \qquad (147)$$

Выражение $R(x,\ y)=yA(x,\ y)+xB(x,\ y)$ может, как и в § 49, иметь линейные действительные множители $ax+by$, но не существует ни одной характеристики, проходящей через O и касающейся в этой точке прямой $ax+by=0$.

Рассмотрим, как и в § 49, полупрямые, удовлетворяющие уравнению $R(x,\ y)=0$, и присоединим к ним две полупрямые, совпадающие с двумя полуосями Oy. Пусть OT_i эти полупрямые, занумерованные в одном и том же порядке вращения вокруг O, начиная с одной из них. Индекс i принимает значения $1,\ 2,\ \ldots,\ r-1$. Проведем между двумя последовательными полупрямыми OT_i и OT_{i+1} полупрямые OD_1, OD_2, ..., OD_r. Полупрямая OD_r тождественна с OD_1. Если положим $y=xz$ и рассмотрим уравнение (145), тогда характеристике Г этого уравнения соответствует характеристика C уравнения (144), и рассуждениями, подобными тем, что проделаны в лемме § 46, покажем, что если C пересекает прямую OD_i в точке M_i, достаточно близкой к O, то она пересечет и OD_{i+1} в точке M_{i+1}, которая также будет близка к O. Характеристика C, пересекающая OD_1 в M_1, вновь пересечет OD_1, совпадающую с OD_r, в точке M_r. Характеристики, близкие к C, будут циклами, если M_r совпадает с M_1, и спиралями, если M_1 и M_r различны.

Чтобы различить, какой из этих случаев будет иметь место, заметим, что, рассуждая как и в § 49, получим зависимость между ρ_i и ρ_{i+1}, где $\rho_i = OM_i$. На основании полученных результатов между величинами ρ_1 и ρ_r, определяющими положение двух последовательных точек пересечения C с OD_1, получается соотношение такой же природы, как и соотношение между параметрами, определяющими последовательные точки пересечения кривой S с характеристикой C, близкой к C_0. Заключение § 51 применимо и в этом случае. В общем случае *характеристики C, близкие к O, есть спирали, которые в определенном направлении приближаются к O.*

Если же выполняются дополнительные условия, одни алгебраические, другие трансцендентные, то все характеристики, близкие к O, будут циклы, окружающие O. Пусть дан круг с центром в точке O и достаточно малым радиусом, тогда существует бесконечно много циклов внутри этого круга. В *первом случае точка O — фокус, во втором — центр.*

§ 53. Бесконечно удаленные точки

Хотя выражение «цикл» и «замкнутая кривая» кажутся неприменимыми к характеристикам, имеющим бесконечные ветви, однако результаты предыдущих глав можно распространить и на случай характеристик, имеющих бесконечно удаленные точки. Действительно, гомографическим преобразованием можно установить соответствие такой характеристики с кривой, не имеющей точек на бесконечности. Изучение характеристик, имеющих бесконечно удаленные точки, ничем не отличаются от характеристик, которые остаются в конечной части плоскости. При этом имеется в виду не простое перенесение рассуждений на бесконечно удаленные точки. Чтобы доказать, что существует конечное число предельных циклов для уравнения

$$X(x, y)dy + Y(x, y)\, dx = 0, \qquad (148)$$

где X и Y — многочлены по x и y, необходимо рассмотреть и характеристики, проходящие через бесконечно удаленные точки.

Будем предполагать, что X и Y — полиномы степени n. Члены степени n в этих многочленах обозначим через X_n и Y_n, а члены степени $n-1$ пусть будут X_{n-1} и Y_{n-1}. Положим

$$R(x, y) = yX_n(x, y) + xY_n(x, y).$$

Для исследования бесконечно удаленных точек в направлении оси Oy положим

$$y = 1/u, \quad x = v/u.$$

Уравнение (148) примет вид

$$u[Y_n(v, 1) + X^*]dv = [R(v, 1) + Y^*]du, \qquad (149)$$

где $X^*(v, 0) = 0$, $Y^*(v, 0) = 0$. У этого уравнения нужно исследовать точку $u = 0$, $v = 0$.

Чтобы изучить бесконечно удаленные точки в направлении, отличном от Ox, положим $x = 1/u$, $y = z/u$, тогда уравнение (148) сведется к виду

$$u[X_n(1, z) + X^{**}]dz = [R(1, z) + Y^{**}]du, \qquad (150)$$

где $X^{**}(0, z) = 0$ и $Y^{**}(0, z) = 0$. Для исследования бесконечно удаленной точки в направлении $y = ax$ положим $z = a + v$ и рассмотрим точку $u = 0$, $v = 0$.

Уравнения (149) и (150) различны, если $R(x, y) \neq 0$. Если же $R(x, y) = 0$, то положим

$$X_n(x, y) = xA(x, y), \quad Y_n(x, y) = -xA(x, y),$$

$$B(x, y) = yX_{n-1}(x, y) + xY_{n-1}(x, y);$$

тогда уравнения (149) и (150) преобразуются к виду

$$[-A(v, 1) + U(v, u)]dv = [B(v, 1) + V(v, u)]du, \qquad (151)$$

$$[A(1, z) + U^*(z, u)]dz = [B(z, 1) + V^*(z, u)]du, \qquad (152)$$

где $U^*(z, 0) = U(v, 0) = 0$ и $V^*(z, 0) = V(v, 0) = 0$.

Точку на бесконечности будем называть «обыкновенной», «особой», «седлом», «узлом» и т. д., если соответствующая ей точка $u = 0$, $v = 0$ для уравнений (149) и (151) или точка для уравнений (150) и (152) будет «обыкновенной» точкой, «особой» точкой, «седлом», «узлом» и т. д.

Очевидно, что если $R(x, y) \neq 0$, то уравнение в переменных u и v имеет характеристику $u = 0$, поэтому соответствующая точка на бесконечности будет или обыкновенной, и через нее будет проходить единственная характеристика $u = 0$, или особой, но тогда она не может быть ни центром, ни фокусом. Для того чтобы бесконечно удаленная точка в направлении $\beta x - \alpha y = 0$ была особой, необходимо и достаточно, чтобы $R(\alpha, \beta) = 0$.

Если $R(x, y) \equiv 0$, то из уравнений (151) и (152) следует, что бесконечно удаленная точка в направлении $\beta x - \alpha y = 0$ будет особой в том и только том случае, если

$$A(\alpha, \beta) = 0, \quad B(\alpha, \beta) = 0.$$

Эта особая точка не интересна для дальнейшего.

Рассмотрим уравнение в переменных u и v и исследуем точку $u = 0$, $v = 0$. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две дуги характеристики, оканчивающиеся в $u = 0$, $v = 0$ и образующие или две ветви одной характеристики Γ, проходящих через обыкновенную точку $u = 0$, $v = 0$, или ограничивают область отталкивания особой точки $u = 0$, $v = 0$. Характеристики Γ_1 и Γ_2 будут в обоих случаях продолжением одна другой. Этим двум характеристикам Γ_1 и Γ_2 соответствуют в плоскости xy две бесконечные ветви C_1 и C_2 характеристик, которые, естественно, будем рассматривать как продолжение одна другой и считать, что они образуют одну характеристику C.

Предположим вначале, что точка $u=0$, $v=0$, которую в дальнейшем будем обозначать w, есть обыкновенная точка. Возьмем в плоскости uv две дуги кривых Σ_1 и Σ_2, пересекающих Γ_1 и Γ_2 соответственно в точках μ_1 и μ_2. Эти точки будут таковы, что на дуге $\mu_1 w \mu_2$ характеристики Γ нет особых точек. За Σ_1 и Σ_2 можно всегда взять прямые $v = \pm l$, или $u = \pm l'$. Если в плоскости uv рассмотрим характеристику Γ', близкую к Γ, то между точками пересечения μ_1' и μ_2' характеристики Γ' с дугами Σ_1 и Σ_2 будет существовать голоморфное соотношение. Характеристике Γ' соответствует в плоскости xy характеристика C', которую будем называть характеристикой, близкой к C. Дугам Σ_1 и Σ_2 соответствуют кривые S_1 и S_2, точкам μ_1' и μ_2' — точки M_1' и M_2'. Параметры, которые определяют положение μ_1' и μ_2', а следовательно, M_1' и M_2', будут связаны голоморфным соотношением. В этом случае будем говорить, что имеется голоморфное соответствие между точками пересечения C' с S_1 и S_2. Если характеристика Г не касается в точке w прямой $u = 0$ или если она касается $u = 0$, пересекая ее в этой точке, то кривая C' имеет две ветви на бесконечности.

Если Г касается в точке w прямой $u = 0$ и не пересекает ее в этой точке, то характеристики C', расположенные по одну сторону от C, будут иметь две ветви на бесконечности, а характеристики C', расположенные с другой стороны C, не имеют бесконечных ветвей вблизи бесконечных ветвей C.

Предположим теперь, что w — особая точка, и пусть Γ_1 и Γ_2 — две сепаратрисы, ограничивающие область отталкивания этой точки. Рассмотрим характеристику Γ', близкую к Г и расположенную в области отталкивания, ограниченной Г. Проведем, как и выше, кривые Σ_1 и Σ_2, пересекающие Γ_1 и Γ_2 в точках μ_1 и μ_2 так, что на дуге $\mu_1 w \mu_2$ кривой Г нет других особых точек, отличных от w. Форма зависимости между параметрами, определяющими положение точек пересечения μ_1' и μ_2' характеристики Γ' с дугами Σ_1 и Σ_2, известна. Рассматривая на плоскости xy характеристику C', соответствующую Γ', получим функцию соответствия между точками пересечения M_1' и M_2' кривой C с S_1 и S_2, соответствующим Σ_1 и Σ_2.

Из предыдущего следует, что «циклом» можно назвать характеристику, имеющую две бесконечные ветви, при условии, что если, удаляясь в бесконечность по одной ветви кривой, переходя затем в бесконечности на характеристику, которая является продолжением данной бесконечной ветви, перемещаясь все время в одном и том же направлении, возвращаемся в исходную точку, не пересекая при этом узловых областей особых точек.

В частности, можно рассматривать особые циклы, имеющие точки на бесконечности. Эти точки на бесконечности могут быть либо обыкновенными, либо особыми. В последнем случае на цикле может лежать часть бесконечной прямой.

Рассмотрим особый цикл C_0 и характеристики C, близкие к C_0. Если кривая S пересекает C_0 в точке M_0 и характеристику C последовательно в двух точках M и M', то соотношение между точками M и M' в силу предыдущих рассуждений имеет одну и ту же формулу независимо от того, имеет ли C_0 точки на бесконечности, или она лежит полностью в конечной части плоскости. В результате этого все рассуждения предыдущих глав применимы и к обобщенному понятию цикла.

§ 54. О конечности числа предельных циклов

Как известно (Бендиксон, стр. 16) внутри каждого цикла лежит по крайней мере одна особая точка. С другой стороны, число особых точек уравнения (148), где X и Y — многочлены, конечно. Чтобы показать, что число предельных циклов конечно, достаточно доказать, что конечно число предельных циклов, окружающих особую точку P.

Проведем через точку P прямую PL, на которой не лежит ни одна конечная или бесконечно удаленная особая точка, исключая точку P. Если существует бесконечно много предельных циклов, окружающих P, то их точки пересечения с PL имеют по крайней мере одну предельную точку M, лежащую на конечном расстоянии или бесконечно удаленную. Следовательно, на PL существует сегмент MM_1 такой, что через точки M', достаточно близкие к M, проходят предельные циклы. Покажем, что это невозможно.

Обозначим C характеристику, выходящую из M' и продолженную в произвольно выбранном направлении. Известно (Бендиксон, стр. 17), что тогда возможен один из следующих случаев:

1. *C — цикл, не проходящий через особые точки.*

2. *C неограниченно приближается к замкнутой кривой, не проходящей через особые точки.*

3. *C оканчивается в особой точке и характеристики, выходящие из точек отрезка MM_1, близких к M, также оканчиваются в этой точке.*

4. *C оканчивается в особой точке; характеристики, выходящие из точек отрезка MM_1, близких к M, не оканчиваются в этой особой точке.*

Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

1. *C — цикл.* Если рассмотрим характеристику C', проходящую через точку M' отрезка MM_1, достаточно близкую к M, то эта характеристика вновь пересечет отрезок MM_1 в точке M'', близкой к M, и будет существовать голоморфная зависимость между длинами отрезков MM' и MM''. Поэтому *или все характеристики C' есть циклы, или ни одна из них не будет предельным циклом.*

Чтобы обойти затруднения, которые могут возникнуть в случае, когда PL касается кривой C в точке M, достаточно заметить (Бендиксон, стр. 11), что можно описать вокруг точки M (как центра) круг такого малого радиуса, чтобы каждая характеристика C', проходящая через внутренние точки этого круга, пересекала нормаль MN_1, проведенную к кривой C в точке M. Каждая характеристика C', проходящая через точку M', достаточно близкую к M, пересекает нормаль в точке N'. Возникшие затруднения будут обойдены, если предыдущие рассуждения провести для точки N' отрезка MN'.

2. *Спирали, неограниченно приближающиеся к замкнутой кривой K.* Известно (Бендиксон, стр. 15), что в этом случае всегда можно окружить точку M кругом такого малого радиуса, что все характеристики, проходящие через внутренние точки этого круга, будут спиралями, неограниченно приближающимися к K. В этом круге лежат точки отрезка MM_1, близкие к M, и поэтому невозможно, чтобы через эти точки проходили циклы, в частности предельные циклы.

3. Поскольку характеристики C', выходящие из точек M' отрезка MM_1, близких к M, так же как и C, оканчиваются в особой точке, то они не могут быть предельными циклами.

4. Известно, что если характеристика C оканчивается в точке P_1, а характеристика C', проходящая через точку M' отрезка MM', близкую к M, не оканчивается в P_1, то характеристику C можно продолжить через точку P_1 при помощи характеристики C_1 так, что C' будут близки и к C_1. На совокупность кривых C и C_1 можно перенести рассуждения, относящиеся к C. Если при этом получим случай 2 или 3, то по доказанному не существует характеристик, которые будут предельными циклами. Если же для C_1 снова будем иметь случай 4, то рассмотрим характеристику C_2, представляю-

щую собой продолжение C_1 через точку P_2, в которой оканчивается C_1, и так далее.

Если встретится случай 2 или 3, то доказано, что предельных циклов нет, случай же 4 не может повторяться неограниченно потому, что число особых точек конечно, а следовательно, конечно и число сепаратрис; поэтому, если не встретится случай 2 или 3, то необходимо вернемся в исходную точку. Характеристика C и ее продолжения $C_1, C_2, \ldots$ образуют особый цикл. Из предыдущего ясно, что в этом случае характеристики C', проходящие через точку M', лежащую на MM_1 и близкую к M, или все замкнуты или среди них нет ни одного цикла. В обоих случаях предельных циклов нет. Эти рассуждения, опираясь на § 53, можно перенести и на случай, когда предельная точка M находится в бесконечности.

Можно предполагать, чтобы избежать осложнений, отмеченных в случае 1, что прямая PL не касается характеристики C в точке M, находящейся на бесконечности.

Если же предельная точка M совпадает с P, тогда будет иметь место один из следующих случаев.

1. *Существует по крайней мере одна характеристика, оканчивающаяся в P с определенной касательной.*

2. *Ни одна характеристика не оканчивается в P с определенной касательной.*

В первом случае, очевидно, не существует циклов, проходящих вблизи P и окружающих точку P. Во втором случае, как это было показано в § 59, или все характеристики C' — близкие к P циклы, или ни одна из них не замкнута. Ни в одном из этих случаев нет предельных циклов. Поэтому можно сформулировать теорему:

Дифференциальное уравнение

$$X(x, y)dy + Y(x, y)dx = 0, \tag{153}$$

где X и Y — полиномы, имеет конечное число предельных циклов (или нуль).

Предположение о том, что X и Y — полиномы, было использовано в трех пунктах, которые позволили утверждать, что:

1. Можно исследовать особые точки, лежащие в конечной части плоскости, в предположении, что X и

Y — голоморфные функции в окрестности каждой из этих точек;

2. Можно исследовать каждую точку на бесконечности, сводя их изучение к исследованию уравнения

$$P(u, v)\ dv + Q(u, v) du = 0,$$

где P и Q — голоморфные функции в окрестности точки $u = 0$, $v = 0$;

3. Число особых точек в конечной части плоскости и на бесконености конечно.

Все эти заключения распространяются и на случай, когда X и Y — непрерывные функции переменных x и y, если эти функции таковы, что выполняются три свойства, указанные выше. Все заключения о циклах, в частности о предельных циклах, переносятся на плоскую область R такую, что внутри и на границе этой области лежит конечное число особых точек и при условии, что в окрестности каждой точки области R и на ее границе функции X и Y голоморфны.

СПИСОК РАБОТ ДЮЛАКА (DULAC H.)

1. Sur les séries de Mac Laurin à plusieurs variables. Acta Math. 31, 1909.
2. Sur les points singuliers d'une équation différentielle. Ann. Fac. Sci. Toulouse. s. 3, t. 1, 1909.
3. Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de conditions initiales singulières quelconques. Ann. Univ. Grenoble, t. 17, 1905.
4. Remarques sur les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes. Bull. Soc. Math. France, t. 36, 1908.
5. Sur les intégrales passant par équation différentielle. Bull. Soc. Math. France, t. 36, 1908.
6. Solution d'ordre imaginaire d'une équation différentielle. Bull. Soc. Math. France, t. 39, 1911.
7. Solution d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. Bull. Soc. Math. France, t. 40, 1912.
8. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France, t. 51, 1923.
9. Determination et intégration d'une certaine classe d'éguations différentielles ayant pour point singulier un centre. Bull. Sci. Math. s. 2, t. 32, 1908.
10. Sur une forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle dans le voisinage de certaines valeurs singluliers. Bull. Sci. Math. t. 37, 1913.
11. Sur les cols des équations différentielles. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 129, 1889.
12. Sur les intégrales annalytiques des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de conditions initiales singulières. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 34, 1901.
13. Sur les intégrales analytiques dans le premier ordre et de degré quelconque dans le voisinage de certaines valeurs singuliéres. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 133, 1901.

14. Sur les fonctions de *n* variables represéntées par séries de polynomes homogènes, C. R. Acad. Sci Paris, t. 137, 1903.
15. Sur les intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point dicritique, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 142, 1906.
16. Sur quelques propriétés des intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 145, 1907.
17. Sur les cycles limites. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 169, 1919.
18. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. J. Ec. polyt. Paris, s. 2, c. 9, 1904.
19. Sur les points dicritiques. J. Math. pures appl. s. 6, t. 2, 1906.
20. Intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle. C. R. Circ. math. Palermo, t. 27, 1909.

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Дюлак

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ

М., 1980 г., 160 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*
Техн. редактор *Н. В. Вершинина*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11571

Сдано в набор 24.09.79. Подписано к печати 23.05.80. Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 2. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 7,55. Тираж 6000 экз. Заказ № 726. Цена книги 75 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, МОСКВА, В-71, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, МОСКВА, В-71, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15