В. КАГАНЪ

Прив.-доц. Новороссійскаго Университета

О ПРЕОБРАЗОВАНІИ МНОГОГРАННИКОВЪ

Докладъ, прочитанный въ Общемъ Собраніи Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

MATHESIS

ОДЕССА
1913

Тип. Акц. Южно-Русскаго
Общества Печатнаго Дѣла.
Одесса, Пушкинская, №18

§ 1. Постановка задачи.

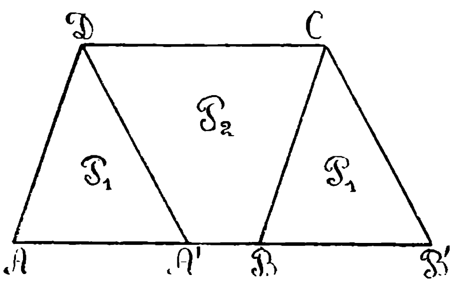
При доказательствѣ основной теоремы о равновеликости двухъ пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, геометрія искони прибѣгаетъ къ методу предѣловъ, разсматривая пирамиды, какъ предѣлы вписанныхъ и описанныхъ призмъ. Помимо дидактическихъ трудностей (учащіеся не даромъ назвали эту фигуру чертовой лѣстницей), появленіе здѣсь метода предѣловъ сначала представляется страннымъ по существу. Когда мы доказываемъ равновеликость прямолинейныхъ фигуръ въ планиметріи, мы не только не прибѣгаемъ къ предѣламъ, но, наоборотъ, пользуемся наиболѣе элементарными средствами. Именно, для этой цѣли примѣняются два пріема, изъ которыхъ одинъ въ нѣмецкой литературѣ принято называть *методомъ разложенія* (Zerlegungsmethode), а другой — *методомъ дополненія* (Ergänzungsmethode). Методъ разложенія заключается въ томъ, что для доказательства равновеликости двухъ фигуръ одну изъ нихъ разрѣзаютъ на части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можетъ быть составлена вторая фигура. Такъ, для доказательства равновеликости параллелограммовъ (Q) $ABCD$ и (Q') $A'B'CD$ (фиг. 1) мы первый разлагаемъ на треугольникъ P_1 и трапецію P_2, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи составляется второй параллелограммъ. Можно сказать, что методъ разложенія заключается въ томъ, что фигуры представляются, какъ суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей. Методъ дополненія заключается въ томъ, что къ обоимъ многоугольникамъ различнымъ образомъ присоединяются конгруэнтные многоугольники такъ, что въ результатѣ получаются конгруэнтныя фигуры. Чтобы доказать равновеликость параллелограммовъ Q ($ABCD$) и Q' ($A'B'CD$) (фиг. 2), къ нимъ присоединяютъ конгруэнтные треугольники ADA' и BCB' (P_1) и такимъ образомъ дополняютъ до трапеціи P ($AB'CD$); такъ что

$$P = P_1 + Q \quad \text{и} \quad P = P_1 + Q',$$

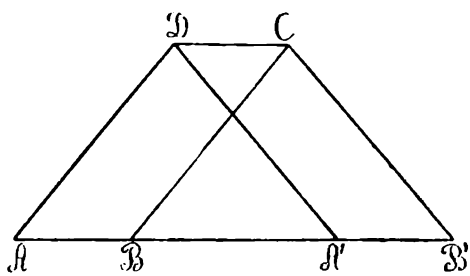
откуда

$$Q = P - P_1 \quad \text{и} \quad Q' = P - P_1.$$

Методъ дополненія заключается, слѣдовательно, въ томъ, что оба многоугольника представляются въ видѣ разности конгруэнтныхъ многоугольниковъ.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Очень часто комбинируются оба пріема: въ такомъ случаѣ дѣло сводится къ тому, что оба многоугольника представляются въ видѣ алгебраической суммы соотвѣтственно конгруэнтныхъ многоугольниковъ. Примѣненіе обоихъ пріемовъ даетъ обыкновенно лучшіе результаты въ томъ смыслѣ, что доказательства получаются наиболѣе простыя. Но, какъ оказывается, необходимости въ примѣненіи обоихъ пріемовъ нѣтъ.– Въ 1895 г. проф. Лацдери доказалъ *), что эквивалентность двухъ многоугольниковъ, когда таковая имѣетъ мѣсто, всегда можетъ быть доказана методомъ разложенія. Иными словами, проф. Лацдери добазалъ слѣдующую замѣчательную теорему.

Если два многоугольника равновелики, то любой изъ нихъ всегда можно разрѣзать на конечное число частей, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи можно составить второй многоугольникъ.

*) G. Lazzeri. „Sulla teoria della equivalenza geometrica". Periodico di matematica, 10, 1895. G. Sforza. „A proposito della nota del prof. Lazzeri sulla teoria dell'equivalenza geometrica". Ibidem.

Иначе: два равновеликихъ многоугольника всегда могутъ быть составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей, взятыхъ въ конечномъ числѣ.

Въ частности, каждый многоугольникъ можно такимъ путемъ превратить въ квадратъ, т. е. каждый многоугольникъ можно разрѣзать на такія части, изъ которыхъ при иномъ расположеніи ихъ составляется равновеликій этому многоугольнику квадратъ.

Доказательство проф. Лаццери отличается полной элементарностью, но за недостаткомъ времени я не имѣю возможности его здѣсь приводить; въ настоящемъ докладѣ я желалъ бы сосредоточить ваше вниманіе на другой сторонѣ дѣла — на доказательствахъ равновеликости многогранниковъ.

Казалось бы, что и здѣсь доказательство слѣдуетъ вести въ томъ же порядкѣ идей — методами разложенія и дополненія. И дѣйствительно, при доказательствѣ равновеликости многогранниковъ чаще всего и находятъ себѣ примѣненіе эти пріемы. Съ помощью ихъ мы доказываемъ равновеликость параллепипедовъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, а также равновеликость прямой и наклонной призмы при извѣстныхъ условіяхъ. Но, когда мы обращаемся къ доказательству равновеликости пирамидъ, имѣющихъ равновеликія основанія и равныя высоты, то эти пріемы отказываются служить: какъ я уже сказалъ, геометрія искони прибѣгаетъ здѣсь къ методу предѣловъ; мы находимъ его уже въ XII книгѣ Евклида.

Гдѣ источникъ этого затрудненія? Коренится ли оно въ существѣ дѣла или оно обусловливается тѣмъ, что мы не умѣемъ примѣнить здѣсь прежнихъ методовъ. Иначе говоря, можетъ ли теорема Лаццери быть распространена и на многогранники или нѣтъ? Если каждый многогранникъ можетъ быть путемъ разложенія или хотя бы путемъ разложенія и дополненія преобразованъ въ любой равновеликій ему многогранникъ, то нужно будетъ только указать, какъ это выполнить по отношенію къ трехграннымъ пирамидамъ, и предѣлы будутъ изъ этого отдѣла геометріи изгнаны. Если же обнаружится, что многогранники въ этомъ отношеніи кореннымъ образомъ отличаются отъ многоугольниковъ, т. е. если будетъ доказано, что существуютъ, скажемъ, равновеликія пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами, которыя не могутъ быть преобразованы одна въ другую разложеніемъ и дополненіемъ, то тогда станетъ ясно, что именно заставило ввести въ этомъ пунктѣ предѣлы.

Надъ разрѣшеніемъ этой задачи немало трудились, но безуспѣшно. Не только не удавалось доказать, что всякій многогранникъ можетъ быть преобразованъ въ любой другой равновеликій ему многогранникъ, но даже построить одну пирамиду, которую удалось бы разрѣзать на части такъ, чтобы изъ нихъ можно было составить кубъ, даже это оказалось задачей отнюдь не изъ легкихъ. Въ математическомъ кабинетѣ Гёттингенскаго университета имѣются только двѣ такія модели*), изъ которыхъ одна указана датскимъ математикомъ Джюлемъ, а другая — англійскимъ математикомъ Гилломъ.

Въ 1900 г. на I Международномъ Математическомъ Конгрессѣ профессоръ Гёттингенскаго университета Д. Гильбертъ произнесъ рѣчь подъ названіемъ „Математическія проблемы". Въ этой рѣчи онъ сконцентрировалъ рядъ задачъ, разрѣшеніе которыхъ поглотило уже не мало усилій, не давшихъ еще благопріятныхъ результатовъ. Онъ указалъ важнѣйшія изъ этихъ проблемъ, на которыхъ должно быть сосредоточено вниманіе математиковъ. Третья изъ этихъ 23 проблемъ и есть задача о преобразованіи многогранниковъ**). Задача поставлена здѣсь Гильбертомъ такъ: *можетъ ли всякій тетраэдръ быть преобразованъ въ любой равновеликій тетраэдръ методомъ разложенія?*

Черезъ два года ученикъ Гильберта М. Денъ, нынѣ профессоръ въ Мюнстерѣ, опубликовалъ въ журналѣ „Mathematische Annalen" статью, содержащую отвѣтъ на этотъ вопросъ***).

---

*) C. Juel. „Egalité par addition de quelques polyèdres". Kjobenhavn, Overs. Vid. Selsk, 1903. Небольшой рефератъ объ этой работѣ подъ заглавіемъ „Ueber das Volumen der Pyramide" помѣщенъ въ XII томѣ журнала „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung".

Hill. Proceedings of the London Math. Society. Vol. XXVII.

**) D. Hilbert. „Les problèmes mathématiques". Comptes Rendus du Congrès International Mathématique. Paris, 1900. См. также Göttingener Nachrichten, 1900.

***) M. Dehn. „Ueber raumgleiche Polyeder". Göttingener Nachrichten, 1900; „Ueber den Rauminhalt". Mathematische Annalen, 55. 1901.

Статья Дена содержитъ даже больше, чѣмъ одинъ только отвѣтъ на этотъ вопросъ. Онъ доказываетъ, что многогранники, могущіе быть преобразованными одинъ въ другой путемъ разложенія или дополненія, должны удовлетворять условію, заключающемуся въ слѣдующемъ.

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ суть двугранные углы одного многогранника, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ — двугранные углы второго многогранника, выраженные въ частяхъ прямого угла, то существуютъ такія цѣлыя положительныя числа $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и такое цѣлое (положительное или отрицательное) число k, что

$$(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \cdots + A_m\alpha_m) - (B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \cdots + B_n\beta_n) = 2kd. \qquad (1)$$

А такъ какъ, далѣе, существуютъ равновеликіе многогранники, для которыхъ условіе (1) не выполняется, то отсюда слѣдуетъ, что равновеликіе многогранники не всегда могутъ быть этимъ путемъ преобразованы другъ въ друга; напротивъ, какъ мы увидимъ ниже, возможность такого преобразованія является рѣдкимъ исключеніемъ.

Работа Дена написана крайне сжато и доступна только спеціалистамъ. Когда она появилась въ свѣтъ, я поручилъ одному изъ своихъ учениковъ, г. Рейтеру, изложить это изслѣдованіе въ болѣе доступной формѣ для опубликованія въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“. Я долженъ сказать, однако, что, лишь скрѣпя сердце, я помѣстилъ эту статью; она осталась мало доступной, хотя г. Рейтеръ несомнѣнно сдѣлалъ все возможное, чтобы изложить эти идеи возможно яснѣе.

Но въ виду фундаментальной важности теоремы Дена меня неотступно занимала мысль найти иное, болѣе простое доказательство этого предложенія. Черезъ два года мнѣ дѣйствительно удалось найти неизмѣримо болѣе простое доказательство теоремы Дена, основанное на совершенно иномъ принципѣ. Это доказательство было мною опубликовано въ 57 томѣ „Mathem. Annalen“ *). Но и послѣ этого я не разъ возвращался къ той же проблемѣ и внесъ въ нее значительныя упрощенія. Мнѣ кажется, что въ этомъ упрощенномъ видѣ мнѣ удастся изложить это доказательство и сдѣлать изъ него необходимые выводы.

---

*) B. Kagan. „Ueber die Transformation der Polyeder“. Leipzig, Mathematische Annalen, 1903.

§ 2. Нѣсколько словъ объ однородныхъ уравненіяхъ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ разсужденіямъ геометрическаго характера, мнѣ необходимо нѣсколько остановиться на системѣ линейныхъ однородныхъ уравненій.

Положимъ, что мы имѣемъ рядъ линейныхъ однородныхъ уравненій, связывающихъ n неизвѣстныхъ

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

именно:

$$\begin{aligned}
&a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0,\\
&b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots + b_nx_n = 0,\\
&c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n = 0,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \cdots + k_nx_n = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Если такая система имѣетъ рѣшенія, отличныя отъ нуля, точнѣе, если этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ значенія, которыя не всѣ сводятся къ нулю, то число независимыхъ уравненій въ этой системѣ меньше числа неизвѣстныхъ (n); остальныя же, если таковыя существуютъ, представляютъ собой слѣдствія предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы допустить, что среди уравненій (1) имѣется n независимыхъ, то они имѣли бы только одну систему рѣшеній и именно:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0.$$

Если, слѣдовательно, помимо нулевыхъ рѣшеній имѣются другія, которыя не сводятся всѣ къ нулю, то число h независимыхъ уравненій въ системѣ (1) меньше n.

Но отсюда слѣдуетъ далѣе, что такая система уравненій имѣетъ также безчисленное множество системъ ц ѣ л ы х ъ рѣшеній, если только коэффиціенты этихъ уравненій раціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, если среди уравненій (1) имѣется h независимыхъ уравненій, а остальныя представляютъ собой слѣдствія этихъ послѣднихъ, то изъ независимыхъ уравненій можно опредѣлить h неизвѣстныхъ x_1, x_2, $x_3, \ldots$, x_h въ зависимости отъ остальныхъ; получимъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_{h+1} + A_2 x_{h+2} + \cdots + A_{n-h} x_n, \\ x_2 &= B_1 x_{h+1} + B_2 x_{h+2} + \cdots + B_{n-h} x_n, \\ &\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ x_h &= G_1 x_{h+1} + G_2 x_{h+2} + \cdots + G_{n-h} x_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты $A, B, C, \ldots, G$ суть раціональныя числа. Теперь мы можемъ дать неизвѣстнымъ x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots, x_n$ произвольныя значенія, и тогда уравненія (2) опредѣлятъ значенія остальныхъ неизвѣстныхъ x_1, x_2, $\ldots$, x_h. Если мы дадимъ неизвѣстнымъ x_{h+1}, x_{h+2}, $\ldots$, x_n раціональныя значенія, то при раціональныхъ коэффиціентахъ и остальныя неизвѣстныя получатъ раціональныя значенія. Значенія всѣхъ неизвѣстныхъ мы можемъ привести къ одному знаменателю, такъ что получимъ:

$$x_1 = \frac{M_1}{M}, \quad x_2 = \frac{M_2}{M}, \ldots, \quad x_h = \frac{M_h}{M}, \ldots, \quad x_n = \frac{M_n}{M}. \qquad (3)$$

Но если однороднымъ уравненіямъ удовлетворяютъ нѣкоторыя значенія неизвѣстныхъ, то мы получимъ другія значенія, удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ, если помножимъ первыя на одно и то же число. Если помножимъ поэтому значенія (3) на M, то получимъ цѣлыя числа

$$x_1 = M_1, \quad x_2 = M_2, \ldots, x_n = M_n,$$

удовлетворяющія тѣмъ же уравненіямъ.

Но для насъ имѣетъ важное значеніе еще одна подробность. Уравненіямъ (1) можно удовлетворить ирраціональными, раціональными и цѣлыми значеніями для неизвѣстныхъ. Но если можно подобрать какую-либо систему рѣшеній, хотя бы даже ирраціональныхъ, но составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ (конечно, отличныхъ отъ нуля), то уравненія имѣютъ также систему цѣлыхъ рѣшеній, составленныхъ изъ положительныхъ же чиселъ (опять-таки, конечно, отличныхъ отъ нуля). Въ самомъ дѣлѣ, если уравненія имѣютъ систему раціональныхъ положительныхъ рѣшеній, то, умноживъ ихъ на общаго знаменателя, получимъ систему ц ѣ л ы х ъ п о л о ж и т е л ь н ы х ъ рѣшеній. Положимъ теперь, что уравненіямъ (1) удовлетворяютъ положительныя значенія

$$l_1, l_2, l_3, \ldots l_h, l_{h+1}, l_{h+2}, \ldots l_n, \qquad (4)$$

среди которыхъ имѣются и ирраціональныя. Это значитъ, если мы неизвѣстнымъ

$$x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$$

дадимъ значенія

$$l_{h+1}, l_{h+2}, \ldots, l_n, \qquad (5)$$

то неизвѣстныя

$$x_1, x_2, \ldots, x_h$$

изъ уравненій (2) получатъ значенія

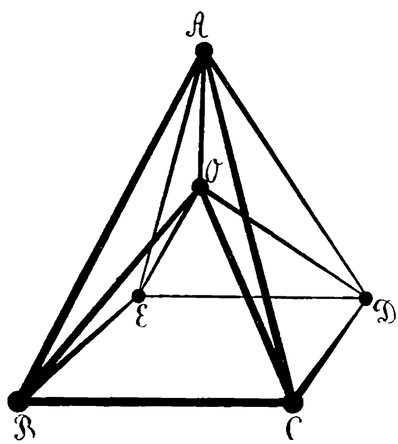
$$l_1, l_2, \ldots, l_h. \qquad (6)$$

Въ первой группѣ необходимо имѣются ирраціональныя значенія, такъ какъ иначе всѣ неизвѣстныя получили бы раціональныя значенія. Но формулы (2) обнаруживаютъ, что значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ измѣняются непрерывно, когда мы непрерывно измѣняемъ значенія неизвѣстныхъ x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots$, x_n. Если поэтому при положительныхъ значеніяхъ (5) неизвѣстныхъ x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots, x_n$ первыя неизвѣстныя $(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ получаютъ положительныя значенія, то мы получимъ другія положительныя же значенія для неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_h$, если возьмемъ для x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots, x_n$ иныя значенія, достаточно близкія къ числамъ (5). Но сколько угодно близко къ ирраціональному числу имѣются раціональныя числа: мы можемъ, слѣдовательно, второй группѣ неизвѣстныхъ дать раціональныя положительныя значенія, настолько мало отличающіяся отъ чиселъ (5), что остальныя неизвѣстныя сохранятъ положительныя значенія, хотя и станутъ раціональными. Получивъ же систему положительныхъ раціональныхъ рѣшеній, мы можемъ отъ нихъ перейти къ системѣ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

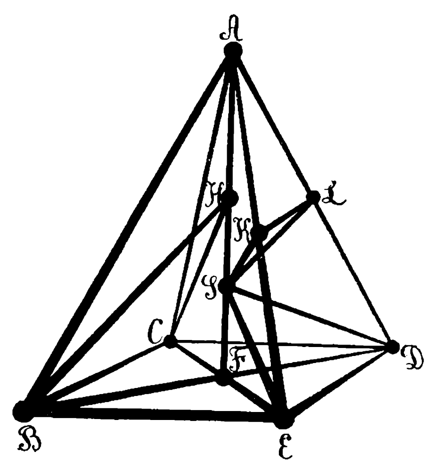
Итакъ, если система однородныхъ линейныхъ уравненій удовлетворяется значеніями, отличными отъ нуля, то она допускаетъ также системы цѣлыхъ рѣшеній. Если же она имѣетъ хоть одну систему рѣшеній, составленную исключительно изъ положительныхъ чиселъ, то она допускаетъ систему цѣлыхъ рѣшеній, также составленную изъ положительныхъ чиселъ.

§ 3. О скелетѣ разложенія.

Положимъ, что нѣкоторый многогранникъ какимъ-либо образомъ разбитъ на составляющіе многогранники; ребра этихъ послѣднихъ располагаются въ исходномъ многогранникѣ по отрѣзкамъ, совокупность которыхъ мы будемъ называть скелетомъ разложенія. Мы представляемъ себѣ этотъ скелетъ, какъ совокупность натянутыхъ и скрѣпленныхъ между собою проволокъ, которыя мы можемъ при желаніи отдѣлить какъ отъ исходнаго многогранника, такъ и отъ составляющихъ многогранниковъ. Поясним̆ъ это на примѣрахъ.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$, разложенная на четыре трехгранныя пирамиды ($OABC$, $OACD$, $OADE$, $OAEB$) и одну четырехгранную пирамиду ($OBCDE$), которыя имѣютъ общую вершину въ точкѣ O. Ребра составляющихъ пирамидъ располагаются по 13 отрѣзкамъ, изъ которыхъ 8 совпадаютъ съ ребрами исходной пирамиды, а остальные 5 сходятся въ точкѣ O и расположены внутри исходной пирамиды. Эти 13 отрѣзковъ изображены на чертежѣ; если себѣ представить, что нанесенныя на чертежѣ линіи реализованы въ видѣ безконечно тонкихъ, скрѣпленныхъ проволокъ, то скелетъ будетъ реализованъ: его можно будетъ отдѣлить отъ многогранниковъ, въ него можно вложить составляющіе многогранники, которые въ совокупности составятъ исходный многогранникъ.

На фигурѣ 4 изображена четырехгранная пирамида $ABCDE$. Она разложена на четыре трехгранныя пирамиды: $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, $AEBF$; изъ нихъ первая, въ свою очередь, разложена на двѣ трехгранныя пирамиды ($BACH$ и $BCHF$), а третья на три пирамиды, сходящіяся въ вершинѣ G ($GFED$, $GEKLD$, $GAKL$). Такимъ образомъ, всего получается 7 пирамидъ, на которыя разбивается наша исходная пирамида. Глядя на этотъ рисунокъ, мы представляемъ себѣ исходную и составляющія пирамиды. Но если мы отрѣшимся отъ тѣлесныхъ представленій и вообразимъ себѣ просто проволоки, натянутыя по всѣмъ линіямъ рисунка, то онѣ составятъ скелетъ разложенія.

Разсматривая эти скелеты, мы видимъ, что на ребрѣ составляющаго многогранника могутъ находиться вершины и другихъ составляющихъ многогранниковъ. Всѣ точки, въ которыхъ находятся вершины составляющихъ многогранниковъ, мы будемъ называть сочлененіями скелета: въ этихъ точкахъ должны быть скрѣплены наши воображаемыя проволоки, чтобы скелетъ представлялъ собою одно цѣлое. На нашихъ рисункахъ сочлененія отмѣчены буквами; въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 3, ихъ имѣется 6 (A, B, C, D, E, O), а въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 4, ихъ 10 (A, B, C, D, E, F, G, H, K, L).

Сочлененія разбиваютъ каждый отрѣзокъ скелета на части, которыя мы будемъ называть звеньями скелета. Въ разложеніи на фигурѣ 3 каждый отрѣзокъ образуетъ одно звено; въ разложеніи на фигурѣ 4 отрѣзокъ AF распадается на три звена (AH, HG, GF), отрѣзокъ AE распадается на два звена (AK и KE), отрѣзокъ AD — также на два звена (AL и LD). Весь скелетъ всегда состоитъ изъ звеньевъ, скрѣпленныхъ въ сочлененіяхъ.

Къ каждому звену скелета прилегаютъ ребра или части реберъ составляющихъ многогранниковъ. Въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 3, къ звену OA, скажемъ, прилегаютъ 4 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ звеньевъ OB, OC, OD, OE прилегаютъ по 3 составляющихъ многогранника, къ каждому изъ нижнихъ звеньевъ BC, CD, DE, EB и боковыхъ звеньевъ AB, AC, AD, AE прилегаютъ по 2 многогранника. Въ разложеніи, изображенномъ на фигурѣ 4, звено GH окружено 4 многогранниками; къ звену CH прилегаютъ ребра двухъ многогранниковъ, и въ то же время оно само лежитъ на грани (ACF) одного изъ составляющихъ многогранниковъ. Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что звенья могутъ быть различно расположены относительно составляющихъ многогранниковъ; сообразно этому мы ихъ разобьемъ на 3 типа.

Мы будемъ относить звено къ первому типу, если многогранники, ребра котораго къ нему прилегаютъ, окружаютъ это звено со всѣхъ сторонъ, такъ что прилегающіе къ нему двугранные углы составляютъ въ суммѣ $4d$. Таковы внутреннія звенья (OA, OB, OC, OD, OE) въ разложеніи 3; таковы звенья AH, HG и GF въ разложеніи 4.

Фигуры 5 и 6 предназначены для лучшаго выясненія условій, при которыхъ мы относимъ звено къ первому типу. Фигура 5 изображаетъ часть разложенія нѣкотораго многогранника на составляющіе многогранники, именно ту часть, которая прилегаетъ къ звену AB. Къ этому звену прилегаютъ своими ребрами 4 составляющихъ многогранника: передняя трехгранная призма $ADFCKG$, задняя трехгранная призма $AEBMPN$, съ правой стороны—трехгранная пирамида $BADE$, съ лѣвой стороны —трехгранная же пирамида $ACGL$. Чтобы это можно было отчетливѣе различить, на фигурѣ 6-ой изображено то же разложеніе, причемъ составляющіе многогранники раздвинуты. Внутри жирнымъ штрихомъ отмѣчена часть скелета и на немъ звено AB. Здѣсь отчетливо видны двугранные углы, прилегающіе къ этому звену и образующіе въ совокупности $4d$, какъ это и отмѣчено кружкомъ на фигурѣ 5-ой.

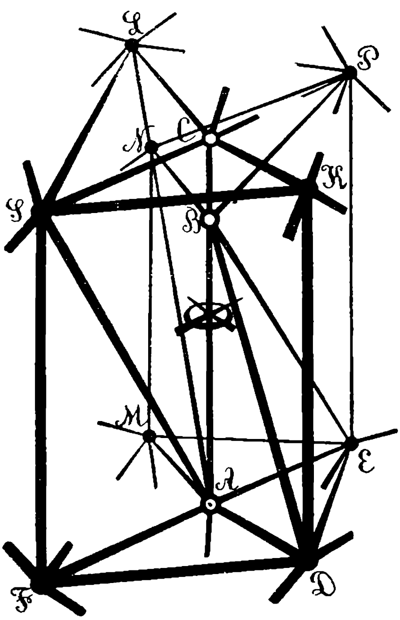
Относительно каждаго ребра перваго типа мы будемъ говорить, что оно имѣетъ а р г у м е н т ъ въ $4d$; это есть лишь иное выраженіе того факта, что облегающіе звено двугранные углы составляющихъ многогранниковъ образуютъ въ суммѣ $4d$.

Но иногда двугранные углы составляющихъ многогранниковъ, прилегая къ звену, образуютъ въ совокупности не $4d$, а только $2d$. Это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда звено лежитъ на грани составляющаго или исходнаго многогранника. Таковы на фигурѣ 4-ой звенья FB, FC, FD, FE, GE, GD и др.

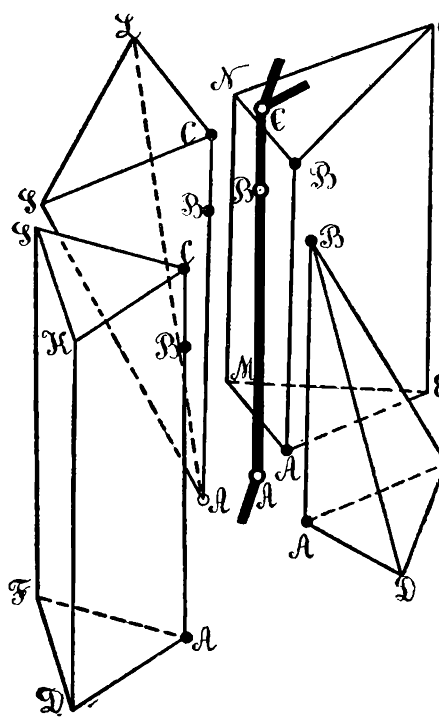
Такого рода звено AB изображено отдѣльно на фигурѣ 7-ой; къ нему прилегаетъ трехгранная пирамида $ABCD$ и двѣ трехгранныя призмы $AHKBCL$ и $AGFBDE$. Ихъ двугранные углы, прилегающіе къ звену AB, составляютъ въ суммѣ $2d$.

Въ этомъ случаѣ мы будемъ говорить, что звено принадлежитъ ко второму типу и имѣетъ аргументъ $2d$.

Наконецъ, звено можетъ лежать ни ребрѣ разлагаемаго многогранника. Если двугранный уголъ исходнаго многогранника при этомъ ребрѣ равенъ a, то сумма двугранныхъ угловъ составляющихъ многогранниковъ, прилегающихъ къ этому звену, также равна a. Такого рода звено BF изображено на фигурѣ 8-ой; къ нему прилегаютъ ребра двухъ составляющихъ призмъ, такъ что сумма двугранныхъ угловъ при этихъ ребрахъ равна двугранному углу a, образуемому заштрихованными гранями исходнаго многогранника.



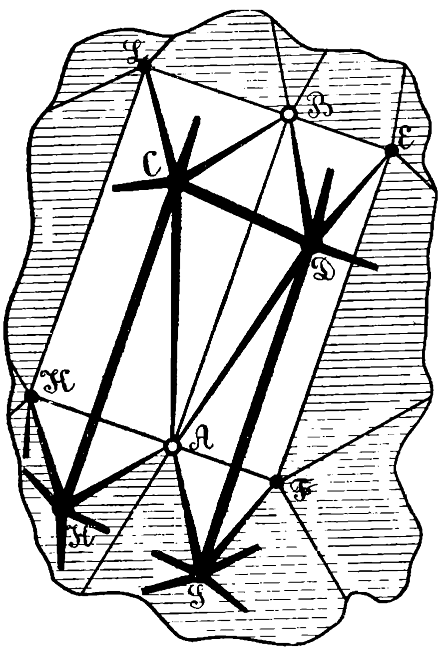
Фиг. 5.



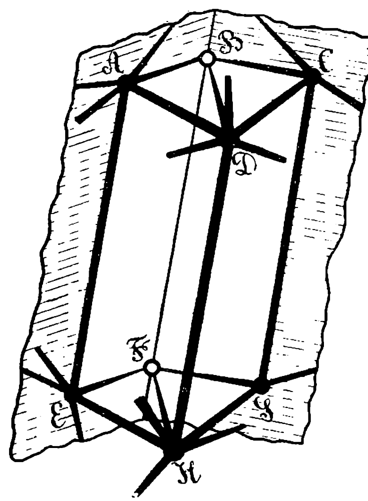
Фиг. 6.

Такого рода звенья мы будемъ относить къ третьему типу, и каждому такому звену мы отнесемъ аргументъ, равный двугранному углу a исходнаго многогранника, на ребрѣ котораго оно лежитъ.

Итакъ, звенья скелета разлагаются на три типа; звенья перваго типа имѣютъ аргументъ $4d$, звенья второго типа имѣютъ аргументъ $2d$, звенья третьяго типа имѣютъ аргументы, равные двуграннымъ угламъ исходнаго многогранника.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

§ 4. Объ отрѣзкахъ разложенія.

Ребра составляющихъ многогранниковъ прилегаютъ къ звеньямъ скелета. Иногда ребро цѣликомъ прилегаетъ къ одному звену, иногда же ребро разбивается сочлененіями на нѣсколько частей. Эти части мы будемъ называть **отрѣзками разложенія**. Нужно отчетливо уяснить себѣ разницу между звеньями и отрѣзками разложенія; звенья принадлежатъ скелету; каждый же отрѣзокъ разложенія лежитъ на одномъ изъ реберъ составляющаго многогранника. Если мы раздвинемъ составляющіе многогранники, то звенья останутся на скелетѣ, а отрѣзки разложенія отойдутъ вмѣстѣ съ ребрами. Это отчетливо видно на фигурѣ 6-ой. На скелетѣ ABC, отмѣченномъ жирнымъ штрихомъ, мы видимъ звенья AB и BC. Ребро AB правой пирамиды цѣликомъ примыкаетъ къ звену AB; это ребро содержитъ поэтому только одинъ отрѣзокъ разложенія. Ребро AC лѣвой пирамиды разлагается звеньями на 2 отрѣзка разложенія AB и BC. Точно такъ же ребро AC передней призмы состоитъ изъ двухъ отрѣзковъ разложенія, а ребро AB задней призмы имѣетъ только одинъ отрѣзокъ разложенія. Если мы сдвинемъ снова составляющіе многогранники, то къ звену AB на скелетѣ примкнутъ 4 равныхъ ему отрѣзка разложенія на четырехъ прилегающихъ къ этому звену многогранникахъ.

§ 5. О двухъ разложеніяхъ.

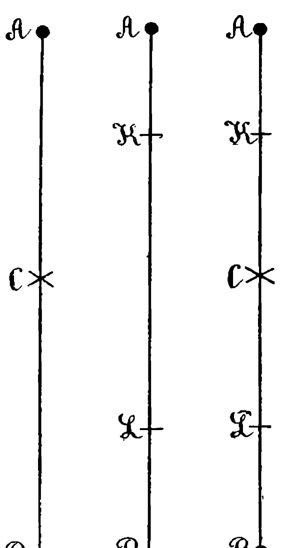
Положимъ теперь, что мы имѣемъ два многогранника, которые составлены изъ соотвѣтственно конгруэнтныхъ многогранниковъ. Выражаясь нагляднѣе, можно сказать, что второй многогранникъ составленъ изъ тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, что и первый, но только иначе расположенныхъ. Для большей простоты и наглядности мы будемъ называть наши два исходныхъ многогранника б о л ь ш и м и многогранниками, а тѣ многогранники, изъ которыхъ они составлены, м а л ы м и многогранниками.

Итакъ, оба большихъ многогранника различнымъ образомъ составлены изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждый изъ малыхъ многогранниковъ фигурируетъ, слѣдовательно, какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ разложеніи.

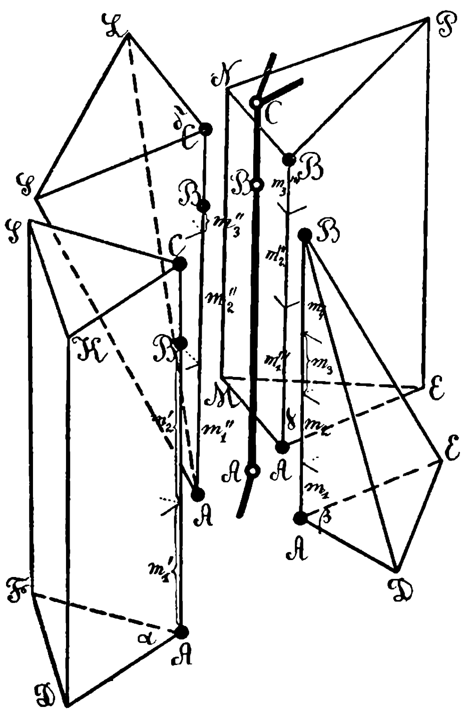
Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ; звенья каждаго изъ скелетовъ раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія. Возьмемъ какое-либо ребро AB одного изъ малыхъ многогранниковъ; оно фигурируетъ въ одномъ и въ другомъ разложеніи. Въ первомъ разложеніи это ребро раздѣляется звеньями, скажемъ, на два отрѣзка AC и CB (фиг. 9); въ другомъ разложеніи то же самое ребро раздѣляется на иное число частей, — скажемъ, на три (AK, KL и LB на фиг. 9). Нанесемъ теперь на ребрѣ точки дѣленія, соотвѣтствующія одному и другому разложенію, какъ это показано на 3-мъ отрѣзкѣ AB на фиг. 9. Тогда отрѣзки разобьются на болѣе мелкіе отрѣзки, которые мы будемъ называть э л е м е н т а р н ы м и отрѣзками. Эти элементарные отрѣзки опредѣляются уже не однимъ, а обоими разложеніями.

Мы представимъ себѣ теперь, что на каждомъ ребрѣ каждаго изъ малыхъ многогранниковъ нанесены элементарные отрѣзки, опредѣляемые на этомъ ребрѣ обоими разложеніями. Эти элементарные отрѣзки располагаются на ребрахъ малыхъ многогранниковъ въ одномъ и другомъ разложеніи, при чемъ въ обоихъ разложеніяхъ мы имѣемъ тѣ же элементарные отрѣзки.

Фигура 10 воспроизводитъ фигуру 6 съ тѣмъ различіемъ, что на отрѣзкѣ



Фиг. 9.



Фиг. 10.

разложенія AB каждаго изъ малыхъ многогранниковъ нанесены элементарные отрѣзки. На ребрѣ AB правой пирамиды мы видимъ четыре элементарныхъ отрѣзка. На передней призмѣ отрѣзокъ AB имѣетъ два элементарныхъ отрѣзка, а на каждомъ изъ остальныхъ многогранниковъ отрѣзокъ AB разбитъ на 3 элементарныхъ отрѣзка.

Каждому элементарному отрѣзку мы вновь припишемъ аргументъ; именно, подъ аргументомъ каждаго элементарнаго отрѣзка мы будемъ разумѣть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ онъ лежитъ. Всѣ элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ, именно двугранный уголъ при этомъ ребрѣ.

Но мы пойдемъ дальше и каждому элементарному отрѣзку отнесемъ нѣкоторое положительное число, которое мы будемъ называть массой этого элементарнаго отрѣзка. Эти положительныя числа мы выберемъ совершенно произвольно съ однимъ только условіемъ: если къ одному и тому же звену, въ томъ или другомъ разложеніи, прилегаютъ на одномъ отрѣзкѣ разложенія элементарные отрѣзки съ массами m_1, m_2, $m_3, \ldots$, m_i, на другомъ отрѣзкѣ разложенія — элементарные отрѣзки съ массами m_1', $m_2', \ldots$, m_j', на третьемъ отрѣзкѣ разложенія — элементарные отрѣзки съ массами m_1'', m_2'', $m_3'', \ldots$, m_k'' и т. д., то наше единственное требованіе будетъ заключаться въ томъ, чтобы были равны ихъ суммы:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_i = m_1' + m_2' + \cdots + m_j' = m_1'' + m_2'' + \cdots + m_k''. \quad (7)$$

Этой группѣ уравненій должны удовлетворять массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ одному звену; общее значеніе M этихъ суммъ мы примемъ за массу самого звена. Звено AB на фигурѣ 10 потребуетъ, такимъ образомъ, слѣдующихъ уравненій:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m_1' + m_2' = m_1'' + m_2'' + m_3'' = m_1''' + m_2''' + m_3'''; \quad (8)$$

общее же значеніе каждой изъ этихъ суммъ представитъ массу звена AB.

Каждому звену соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, группа уравненій вида (7). Такихъ группъ получится, слѣдовательно, столько, сколько есть звеньевъ въ обоихъ разложеніяхъ вмѣстѣ.

Уравненій получится много; можно ли всѣмъ этимъ уравненіямъ удовлетворить? Очевидно, возможно: для этого достаточно принять за массу каждаго элементарнаго отрѣзка его длину. Мы сдѣлаемъ, однако, другой выборъ. Согласно нашему требованію, массы должны удовлетворять только системамъ уравненій вида (7). Но это суть однородныя линейныя уравненія съ цѣлыми коэффиціентами; и разъ они удовлетворяются одной системой положительныхъ значеній, то имъ можно удовлетворить также **цѣлыми** положительными значеніями для неизвѣстныхъ (§ 2). Вотъ такую систему **цѣлыхъ положительныхъ значеній** мы примемъ за массы элементарныхъ отрѣзковъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ массы звеньевъ также выразятся **цѣлыми числами**.

Прежде чѣмъ перейти къ послѣдней и важнѣйшей части этихъ разсужденій, резюмируемъ установленные термины и положенія.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Каждому разложенію соотвѣтствуетъ свой скелетъ, составленный изъ звеньевъ. Каждому звену приписанъ аргументъ, равный $4d$, $2d$ или одному изъ двугранныхъ угловъ большого многогранника.

Звенья раздѣляютъ ребра малыхъ многогранниковъ на отрѣзки разложенія; соединяя дѣленія одного и того же ребра въ обоихъ разложеніяхъ, мы разбили эти отрѣзки на меньшіе, элементарные отрѣзки. Каждому элементарному отрѣзку мы приписали аргументъ; это есть двугранный уголъ при томъ ребрѣ, на которомъ этотъ элементарный отрѣзокъ лежитъ. Элементарные отрѣзки, лежащіе на одномъ и томъ же ребрѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же аргументъ.

Каждому элементарному отрѣзку мы также отнесли цѣлое положительное число, которое мы назвали его массой. Эти числа удовлетворяютъ слѣдующему условію: если къ одному и тому же звену прилегаютъ нѣсколько реберъ, то массы элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ этому звену, имѣютъ на одномъ ребрѣ такую же сумму, какъ на другомъ, третьемъ и т. д. Эту общую сумму, выражающуюся, конечно, также цѣлымъ положительнымъ числомъ, мы назвали массой звена.

Итакъ, каждое звено скелета имѣетъ массу и аргументъ.

§ 6. Основная теорема.

Мы введемъ еще одно — уже послѣднее — новое понятіе.

Подъ **вѣсомъ** элементарнаго отрѣзка или звена мы будемъ разумѣть произведеніе изъ его массы на аргументъ. Подъ вѣсомъ нѣсколькихъ отрѣзковъ или звеньевъ мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ этихъ отрѣзковъ или этихъ звеньевъ. Подъ вѣсомъ скелета мы будемъ разумѣть сумму вѣсовъ всѣхъ его звеньевъ.

Мы имѣемъ два большихъ многогранника, составленныхъ изъ однихъ и тѣхъ же малыхъ многогранниковъ. Моя основная теорема заключается въ томъ, что оба скелета имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Основная теорема. Если два многогранника составлены изъ однихъ и тѣхъ же составляющихъ многогранниковъ, то скелеты обоихъ разложенiй имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, мы покажемъ предварительно, что вѣсъ каждаго звена въ скелетѣ равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ.

Возьмемъ звено AB на фигурѣ 10-й; къ нему прилегаютъ 4 отрѣзка AB на ребрахъ четырехъ составляющихъ многогранниковъ. На ребрѣ правой пирамиды отрѣзокъ AB состоитъ изъ четырехъ элементарныхъ отрѣзковъ съ массами m_1, m_2, m_3, m_4 и общимъ аргументомъ β. Поэтому сумма вѣсовъ этихъ элементарныхъ отрѣзковъ равна:

$$m_1\beta + m_2\beta + m_3\beta + m_4\beta = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\,\beta = M\beta,$$

гдѣ M есть масса звена AB. Точно такъ же сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB и лежащихъ на ребрѣ передней призмы, равна:

$$m_1'\alpha + m_2'\alpha = (m_1' + m_2')\,\alpha = M\alpha.$$

Сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ тому же звену со стороны лѣвой пирамиды, равна $M\delta$, а сумма вѣсовъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB со стороны задней призмы равна $M\gamma$.

Такимъ образомъ, сумма вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ, прилегающихъ къ звену AB, равна:

$$M\alpha + M\beta + M\gamma + M\delta = M(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

гдѣ M есть масса звена, а сумма $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ равна $4d$, т. е. аргументу звена. Правая часть послѣдняго равенства представляетъ, такимъ образомъ, вѣсъ звена.

Совершенно ясно, что это разсужденiе носитъ общiй характеръ и можетъ быть примѣнено ко всякому звену. Но если вѣсъ звена равняется суммѣ вѣсовъ всѣхъ прилегающихъ къ нему элементарныхъ отрѣзковъ, то вѣсъ всего скелета равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ элементарныхъ отрѣзковъ этого разложенія.

Съ другой стороны, какъ мы видѣли выше, элементарные отрѣзки въ обоихъ разложеніяхъ одни и тѣ же, такъ какъ они опредѣляются совокупностью двухъ разложеній; при этомъ каждый элементарный отрѣзокъ имѣетъ въ обоихъ разложеніяхъ одну и ту же массу, одинъ и тотъ же аргументъ и, слѣдовательно, одинъ и тотъ же вѣсъ. Отсюда слѣдуетъ, что вѣса обоихъ скелетовъ могутъ быть представлены въ видѣ суммъ одинаковыхъ слагаемыхъ, а потому они равны между собой.

§ 7. Теорема Дена.

Теперь нетрудно видѣть, что теорема Дена, формулированная въ § 1-мъ, представляетъ собой прямое слѣдствіе доказаннаго предложенія; въ самомъ дѣлѣ, пусть α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_k будутъ двугранные углы перваго большого многогранника. Въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли въ § 3, звенья его скелета имѣютъ аргументами эти двугранные углы, а также $2d$ и $4d$. Пусть M_1 будетъ сумма массъ всѣхъ тѣхъ звеньевъ, которые имѣютъ аргументы α_1; пусть M_2 будетъ сумма массъ всѣхъ звеньевъ съ аргументомъ α_2 и т. д.: пусть, наконецъ, M_k будетъ суммой массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ α_k. Далѣе, черезъ M' обозначимъ сумму массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $2d$, а черезъ M'' сумму массъ тѣхъ звеньевъ, которыя имѣютъ аргументъ $4d$. Въ такомъ случаѣ вѣсъ скелета въ разложеніи этого многогранника равенъ:

$$M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \quad + M_k\alpha_k + 2M'd + 4M''d = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \cdots + M_k\alpha_k + 2Md,$$

гдѣ $M = M' + 2M''$. Здѣсь M_1, M_2, $\ldots$, M_k суть цѣлыя положительныя числа. Что касается числа M, то оно можетъ иногда обратиться и въ нуль, такъ какъ звеньевъ съ аргументами $2d$ и $4d$ иногда можетъ и не быть; напримѣръ, если мы разложимъ октаэдръ на 2 четырехугольныя пирамиды, то такихъ звеньевъ не будетъ.

Такимъ же образомъ вѣсъ скелета въ разложеніи второго многогранника выражается черезъ:

$$N_1\beta_1 + N_2\beta_2 + N_3\beta_3 + \cdots + N_l\beta_l + 2Nd,$$

гдѣ коэффиціенты $N_1, N_2, \ldots, N_l$ суть цѣлыя положительныя числа, а N есть цѣлое положительное число или нуль. Въ силу нашей основной теоремы отсюда слѣдуетъ, что

$$M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + \cdots + M_k\alpha_k + 2Md = N_1\beta_1 + N_2\beta_2 + \cdots + N_l\beta_l + 2Nd. \qquad (9)$$

Это и есть теорема Дена.

Итакъ, если два многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ могутъ быть составлены изъ однихъ и тѣхъ же многогранниковъ, т. е. могутъ быть преобразованы одинъ въ другой путемъ разрѣзанія и иного расположенія частей, то существуютъ цѣлыя положительныя числа $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и $N_1, N_2, \ldots, N_l$ и цѣлыя неотрицательныя числа M и N, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство (3). Если поэтому мы обнаружимъ, что двугранные углы нѣкоторыхъ двухъ многогранниковъ не могутъ быть связаны соотношеніемъ (9), то они не могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ многогранниковъ, хотя бы они и были равновелики.

§ 8. Преобразованіе тетраэдровъ методомъ разложенія.

Воспользуемся теперь доказанной теоремой для рѣшенія слѣдующаго вопроса. Можно ли правильный тетраэдръ и равновеликую ему прямоугольную призму составить изъ одинаковыхъ многогранниковъ? Иначе, можно ли правильный тетраэдръ разрѣзать на такія части, изъ которыхъ въ иномъ расположеніи получится равновеликая прямоугольная призма? Еще иначе, можно ли правильный тетраэдръ преобразовать въ прямоугольную призму методомъ разложенія?

Въ правильномъ тетраэдрѣ всѣ двугранные углы равны, а въ прямоугольной призмѣ они прямые. Поэтому уравненіе (9), выражающее необходимое условіе преобразованія, приметъ видъ:

$$m\alpha + 2m'd = nd + 2n'd,$$

гдѣ α есть двугранный уголъ тетраэдра, m и n — цѣлыя положительныя числа, m' и n' — цѣлыя неотрицательныя числа. Это уравненіе можно привести къ виду:

$$m\alpha = ld \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{l}{m} d \qquad (10)$$

Такъ какъ здѣсь m есть положительное число, то и l есть положительное число. Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Если правильный тетраэдръ можно преобразовать въ прямоугольную призму, то двугранный уголъ a правильнаго тетраэдра соизмѣримъ съ d.

Если мы поэтому обнаружимъ, что уголъ a несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ, то этимъ будетъ доказано, что правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ кубъ.

Какъ извѣстно, если a есть двугранный уголъ правильнаго тетраэдра, то

$$\cos a = \frac{1}{3}, \quad \sin a = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если бы имѣло мѣсто соотношеніе (10), то мы бы получили:

$$\cos a \pm i\sin a = \frac{1 \pm i2\sqrt{2}}{3} = \cos\frac{ld}{m} \pm i\sin\frac{ld}{m}.$$

Возвышая всѣ части этого равенства въ степень $2m$ и примѣняя къ послѣдней части формулу Муавра, получимъ:

$$(\cos a \pm i\sin a)^{2m} = \left(\frac{1 \pm i2\sqrt{2}}{3}\right)^{2m} = \left(\cos\frac{ld}{m} \pm i\sin\frac{ld}{m}\right)^{2m} = \cos 2ld \pm i\sin 2ld = 1.$$

Иными словами, каждое изъ чиселъ

$$\frac{1 + i2\sqrt{2}}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1 - i2\sqrt{2}}{3}$$

есть корень $2m$-ой степени изъ единицы, т. е. есть корень двучлена $x^{2m} - 1$. Но въ такомъ случаѣ двучленъ $x^{2m} - 1$ долженъ дѣлиться нацѣло на

$$\left(x - \frac{1 + i2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - i2\sqrt{2}}{3}\right) = x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \qquad (11)$$

Это есть такъ называемый приведенный раціональный дѣлитель двучлена $x^{2m} - 1$, т. е. дѣлитель съ раціональными коэффиціентами, въ которомъ старшій коэффиціентъ равенъ 1. Но хорошо извѣстно, что всякій приведенный дѣлитель двучлена $x^{2m} - 1$ имѣетъ исключительно цѣлые коэффиціенты. Поэтому трехчленъ (11) не можетъ быть дѣлителемъ двучлена $x^{2m} - 1$, а двугранный уголъ правильнаго тетраэдра несоизмѣримъ съ прямымъ угломъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано, что правильный тетраэдръ не можетъ быть преобразованъ въ равновеликую ему прямоугольную призму методомъ разложенія.

Теперь нетрудно обнаружить, что двѣ равновеликія трехгранныя пирамиды не всегда могутъ быть преобразованы одна въ другую методомъ разложенія даже и въ томъ случаѣ, если онѣ имѣютъ равныя высоты и равновеликія основанія. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что всякая трехгранная пирамида можетъ быть преобразована въ любую другую трехгранную пирамиду, имѣющую съ ней равновеликія основанія и равныя высоты. Возьмемъ правильный тетраэдръ $ABCD$ и равновеликую ему прямоугольную призму, имѣющую ту же высоту. Для этого достаточно за основаніе призмы взять третью часть основанія тетраэдра. Теперь изъ вершины A тетраэдра проведемъ его высоту AE. Тогда тетраэдръ разобьется на три равновеликія пирамиды $AEBC$, $AECD$, $AEDB$. Раздѣливъ сторону BC пополамъ въ точкѣ G, мы раздѣлимъ пирамиду $AEBC$ на двѣ трехгранныя пирамиды $AEBG$ и $AECG$. Такимъ же образомъ и каждую изъ двухъ другихъ пирамидъ $AECD$ и $AEDB$ мы также можемъ разбить на двѣ равновеликія пирамиды. Такимъ образомъ правильный тетраэдръ можетъ быть разложенъ на шесть равновеликихъ между собою трехгранныхъ пирамидъ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, изъ которыхъ каждая имѣетъ ту же высоту, что и тетраэдръ, а основаніемъ — шестую часть площади основанія тетраэдра.

Съ другой стороны, прямоугольная призма, какъ извѣстно, можетъ быть раздѣлена діагональной плоскостью на двѣ равновеликія трехгранныя призмы, а трехгранная призма можетъ быть разложена на три равновеликія трехгранныя пирамиды, имѣющія ту же высоту и то же основаніе *). Такимъ образомъ, вся прямо-

*) Трехгранная призма разлагается, впрочемъ, на три пирамиды ∇_1, ∇_2, ∇_3, изъ которыхъ только первыя двѣ имѣютъ съ призмой общія основанія и высоту; третья же пирамида ∇_3 лишь равновелика трехгранной пирамидѣ ∇_3', имѣющей съ призмой одинаковыя основанія и высоты. Однако, какъ извѣстно изъ доказательства этой теоремы, пирамиды ∇_3 и ∇_3' также имѣютъ, при иномъ выборѣ вершины, общую высоту и равновеликія основанія. Согласно сдѣланному допущенію, пирамида ∇_3 можетъ быть преобразована въ пирамиду ∇_3', и въ предыдущемъ разсужденіи ничто, по существу, не мѣняется.

угольная призма разобьется на шесть равновеликихъ между собою трехгранныхъ пирамидъ $_1$, $_2$, $_3$, $_4$, $_5$, $_6$, имѣющихъ съ пирамидами $_1, \dots, _6$ одинаковыя высоты и равновеликія основанія. Если бы поэтому каждая пирамида могла быть преобразована въ пирамиду , то правильный тетраэдръ могъ бы быть преобразованъ въ прямоугольную призму. А такъ какъ это невозможно, то не всякая трехгранная пирамида можетъ быть преобразована въ любую другую трехгранную пирамиду, имѣющую съ ней равновеликія основанія и равныя высоты.

§ 9. Методъ дополненія.

Изъ предыдущаго разсужденія вытекаетъ, что равновеликость трехгранныхъ пирамидъ, имѣющихъ равныя высоты и равновеликія оснонанія, не можетъ быть доказана методомъ разложенія. Но нельзя ли будетъ этого доказать методомъ дополненія?

Замѣтимъ, что невозможность осуществить требуемое доказательство методомъ разложенія имѣетъ своимъ источникомъ то обстоятельство, что двугранные углы двухъ многогранниковъ, которые могутъ быть другъ въ друга преобразованы, связаны соотношеніемъ (9). Поэтому, если мы докажемъ, что это соотношеніе остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда два многогранника могутъ быть дополнены до двухъ конгруэнтныхъ многогранниковъ или до двухъ равносоставленныхъ многогранниковъ, то вопросъ будетъ исчерпанъ. Это доказать нетрудно.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ системы многогранниковъ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ и $P_1', P_2', P_3', \dots, P_l'$, и что совокупность первыхъ многогранниковъ можетъ быть составлена изъ такихъ же составляющихъ многогранниковъ, какъ и совокупность вторыхъ, т. е. что существуетъ рядъ малыхъ многогранниковъ $p_1, p_2, \dots, p_m$, изъ которыхъ въ одномъ расположеніи можно составить всю совокупность многогранниковъ P, а въ другомъ расположеніи — всю совокупность многогранниковъ P'.

Ничего не измѣняя въ разсужденіяхъ §§ 3 — 6, но только примѣняя ихъ не къ двумъ многогранникамъ, а къ двумъ системамъ многогранниковъ, мы докажемъ, что скелетъ разложенія первой системы имѣетъ тотъ же вѣсъ, что и скелетъ разложенія второй системы. Отсюда же вытекаетъ, что равенство (9) остается въ силѣ, если подъ a_1, a_2, $a_3, \dots, a_k$ мы будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ многогранниковъ P, а подъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_l$ будемъ разумѣть двугранные углы всѣхъ многогранниковъ P'.

Теперь сдѣлаемъ еще одно дополненіе къ тѣмъ соглашеніямъ, которыми устанавливается масса элементарныхъ отрѣзковъ. Мы подчинили эти массы только тому требованію, чтобы это были цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія уравненіямъ (7) для всякаго отрѣзка разложенія. Это условіе мы теперь усилимъ еще однимъ требованіемъ, которое заключается въ слѣдующемъ: если какой-либо многогранникъ P имѣетъ ребро AB, равное по длинѣ и по прилежащему къ нему двугранному углу (AB) ребру $A'B'$ нѣкотораго многогранника P', то мы требуемъ, чтобы массы этихъ частей скелета AB и $A'B'$ были равны. Это требованіе сводится только къ усиленію системы уравненія (7) еще рядомъ уравненій того же самаго вида. А такъ этой обогащенной системѣ уравненій также можно удовлетворить, принимая массы равными длинамъ отрѣзковъ, то уравненія системы (7) остаются совмѣстными, и имъ можно удовлетворить цѣлыми положительными значеніями массъ.

Но если ребро AB входитъ какъ въ одно. такъ и въ другое разложеніе съ одинаковымъ двуграннымъ угломъ и съ одинаковой массой, то и вѣсъ этой части скелета будетъ одинъ и тотъ же въ обоихъ разложеніяхъ. А въ такомъ случаѣ въ равенствѣ (9) можно съ одной и съ другой стороны опустить часть суммы, соотвѣтствующую этому ребру.

Этотъ результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если въ двухъ разложеніяхъ разлагаемыхъ многогранниковъ имѣются ребра, равныя какъ по длинѣ, такъ и по двугранному углу, то прилегающія къ нимъ части скелета можно опустить въ обоихъ разложеніяхъ, и оставшіяся части все-таки будутъ имѣть одинаковый вѣсъ.

Пусть теперь P и P' будутъ два равновеликихъ многогранника съ двугранными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Допустимъ, что, присоединяя къ этимъ многогранникамъ конгруэнтные многогранники $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$, мы получимъ равносоставленные многогранники. Это значитъ, что системы многогранниковъ $(P, Q_1. Q_2, \ldots, Q_h)$ и $(P'. Q_1, Q_2, \ldots, Q_h)$ могутъ быть составлены изъ одинаковыхъ частей, и что два скелета разложенія имѣютъ одинаковый вѣсъ. Но при этомъ, какъ мы видѣли, части скелета, прилегающія къ ребрамъ многогранниковъ Q, могутъ быть изъ обоихъ разложеній опущены. Равенство вѣсовъ выразится поэтому тѣмъ же уравненіемъ (9).

Какъ уже было выяснено, изъ этого вытекаетъ, что правильный тетраэдръ и равновеликая ему прямоугольная призма не могутъ быть дополнены до равносоставленныхъ фигуръ, а потому равновеликость трехгранныхъ пирамидъ не можетъ быть доказана также методомъ дополненія.

Теперь ясно, почему для доказательства равновеликости трехгранныхъ пирамидъ понадобилась чертова лѣстница.

MATHESIS

Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, Стурдзовскій пер.

ЧИСТАЯ и ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.

АДЛЕРЪ, А. Теорія геометрическихъ построеній. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXVI+325 стр. 8°. Съ 179 рис. Ц. 2 р. 25 к.

АППЕЛЬ, П. проф. и **ДОТЕВИЛЛЬ, С.** проф. **Курсъ теоретической механики**. Введеніе въ изученіе физики и прикладной механики. Пер. съ фр. І. Левинтова подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Вып. І. (механика точки и геометрія массъ). XV+385 стр. 8°. Съ 136 черт. Ц. 2 р. 50 к.

Вып. ІІ (механика системы) XV+359 стр. 8° съ 87 черт. Ц. 2 р. 50 к.

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О квадратурѣ круга Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составлен. проф. **Ф. Рудіо.** *(Библ. класс.).* Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна.* VIII+155 стр. 8°. Съ 21 черт. Ц. 1 р. 20 к.

БОЛЬЦАНО, Б. Парадоксы безконечнаго. (*Библ. класс.*) Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII+120 стр. 8°. Съ 12 черт. Ц. 80 к.

БОРЕЛЬ Э. проф. **Элементарная математика.** Въ обработкѣ проф. *В. Штёккеля.* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополненіями прив.-доц. *В. Ф. Кагана*

Ч. І. Ариѳметика и Алгебра. LXIV+434 стр. 8°. Ц. 3 р.

Ч. ІІ. Геометрія. XXII+334 стр. 8°. Съ 403 черт. Ц. 2 р.

ВЕБЕРЪ, Г. проф. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, І** проф. **Энциклопедія элементарной математики.** Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Кагана.*

Томъ І. Элементарная алгебра и анализъ, * обраб. проф. *Веберомъ.* XXIV+666 стр. 8°. Съ 38 черт. *2-е изд.* Ц. 4 р.

Томъ ІІ. Элементарная геометрія, составленная *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ.*

Книга І. **Основанія геометріи.** * Составилъ *І. Вельштейнъ* XII+362 стр., больш. 8°. Съ 142 черт. и 5 рис. *2 изданіе.* Ц. 3 р.

Книга II и III. **Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія.** Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь.* VIII+321 стр. больш. 8° Съ 107 черт. Ц. 2 р. 50 к.

ГЕЙБЕРГЪ, І. проф. **Новое сочиненіе Архимеда.** *. Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. *(Библ. класс.).* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. Ц. 40 к.

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. **Непрерывность и ирраціональныя числа.** *. *(Библ. класс.).* Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго,* съ присоед. его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ". *2-е изд.* 40 стр. 8°. Ц. 40 к.

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. **Курсъ аналитической геометріи.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. проф. СПБ. высш. женск. курсовъ *Вѣры Шиффъ.*

Часть І. Аналитическая геометрія на плоскости. VIII+390 стр. 8°. Съ 87 черт. Ц. 2 р. 50 к.

Часть ІІ. Аналитическая геометрія въ пространствѣ VIII+356 стр. 8°. Съ 36 черт. Ц. 2 р. 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 черт. Ц. 35 к.

---

* *Изданія, отмѣченныя звѣздочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. подлежащими внесенію въ списокъ книгъ, заслуживающихъ вниманія при пополненіи уч. библіотекъ средн. учебн. заведеній.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?** * 72 стр. 16°. Ц. 40 к.

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. **Вопросы элементарной и высшей математики.** Лекціи, читанныя для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* XVI+486 стр. 8°. Ц. 3 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ.** *. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. Ц. 1 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+503 стр. 8°. Ц. 3 р. 50 к.

КУТЮРА, Л. Алгебра логики. Пер. съ франц съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ указаніями на методы преподованія) *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8°. Съ рис. Ц. 2 р. 50 к.

ЛИТЦМАННЪ, В. Теорема Пиѳагора съ приложеніемъ нѣкоторыхъ свѣдѣній о теоремѣ **Ферма.** *(Библ. элем. мат. I).* Пер. съ нѣм. подъ общей ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго* IV+80 стр. 16°. Съ 44 рис. Ц. 40 к.

МАРКОВЪ, А. акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стр. 8°. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. **Начала теоріи опредѣлителей.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+156 стр. 8°. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и методъ.** Пер. съ фр *И. Брусиловского* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16° Ц. 1 р. 50 к.

РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. Ц. 90 к.

Русская математическая библіографія. Списокъ сочиненій по чистой и прикл. математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.*

Вып I. За 1908 годъ. 76 стр. 8°. Ц. 60 к.

Вып. II. За 1909 годъ. XVI+92 стр. 8°. Ц. 75 к.

ФИЛИППОВЪ, А. О. Четыре ариѳметическія дѣйствія. Числа натуральныя. VIII+88 стр. 8°. Ц. 70 к.

ФУРРЕ, Е. Очеркъ исторіи элементарной геометріи *(Библ. элем. мат. II).* Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 48 стр. 16°. Съ 5 рис. Ц 30 к.

ФУРРЕ, Е. Геометрическія головоломки и курьезы. *(Библ. элем. мат. III).* Подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 52 стр. 16°. Съ 83 рис. Ц. 30 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 чер. Ц. 25 к.

ЧЕЗАРО, Э. проф. **Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленія безконечно-малыхъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б унив. *К. А. Поссе.* Часть I. XVIII+632 стр. 8°. Съ 26 черт. Ц. 5 р.

ШУБЕРТЪ, Г. проф. **Математическія развлеченія и игры.** Пер. съ нѣм. *Г. Левинтова,* подъ ред., съ прим. и доб. „В. О. Ф. и Элем. Мат“. XIV+358 стр. 16°. Со мног. табл. Ц. 1 р. 40 к.

ФИЗИКА.

АБРАГАМЪ, Г. проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ.*** Пер. съ франц подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: XVI+272 стр. 8°. Свыше 300 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. 50 к.

Часть II: 434+LXXV стр. 8°. Свыше 400 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р. 75 к.

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. **Царица міра и ея тѣнь.*** Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи** и **энтропіи.** Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8° *5-е изданіе.* Ц. 40 к.

БРАУНЪ, Ф. проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ.** Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступительной статьей переводчиковъ XXIV+92 стр. 16° Съ 25 рис. и портр. авт. Ц. 70 к.

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы.*** Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“* 37 стр. 16°. Ц. 25 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики*.** Пер. съ англійск. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ приложен. рѣчи *А. Бальфура.* **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+277 стр. 8°. Съ 5 порт. и 39 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р.

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники.*** IV+127 стр. 8°. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. Ц. 1 р.

ВИНЕРЪ, О. проф. **О цвѣтной фотографіи и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ.*** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣт табл. Ц. 60 к.

ГЕРНЕТЪ, В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. 16° Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ приложен. статьи *В. Ритца.* „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. Пер. съ нѣм. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектороскопіи *.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“.* 45 стр. 16° Ц 25 к.

КЛОССОВСКІЙ А. засл. проф. **Основы Метеорологіи*** XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. Ц. 4 р.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.*** 46 стр. 8°. 2-е изд. испр. и дополн. Ц. 40 к.

КОНЪ, Э проф. и **ПУАНКАРЕ, Г.** акад. **Пространство и время съ точки зрѣнія физики.** Пер. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“.* 81 стр. 16° Съ 11 рис. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я. Историческая физика.** * Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. и Эл. Мат.“.* Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рисунк. и 6 отд. цвѣтн. табл. Ц. 7 р. 50 к.

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣмецкаго *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8° Съ 30 рис. *Изд. распродано.*

ЛИНДЕРМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго уинверситета. 23 стр. 16°. *2-изд.* Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ, О проф. **Міровой эѳиръ** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова.* VI+216 стр. 16°. Съ 19 рис. Ц. 80 к.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики *.** Пер. съ нѣм. подъ ред. профессора *Н. П. Костерина.* Съ добавленіями автора къ русскому изданію.

Т I. VIII+356 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. *2-е изд.* Ц. 2 р. 75 к.

Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. Ц. 3 р. 75 к.

МАЙКЕЛЬСОНЪ, А. проф. **Свѣтовыя волны и ихъ примѣненія.** Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+189 стр. Съ 109 рис. и 3 цвѣтн. табл. Ц. 1 р. 50 к.

МИ, Г. проф. **Курсъ злектричества и магнитизма.** Пер. съ нѣмецк. Ѳ. Ѳ. Соколова подъ ред. засл. проф. *О. Д. Хвольсона.* Въ 2-хъ частяхъ. Около 50 печ. листовъ. Цѣна по подпискѣ 5 р.

МОРЕНЪ, Ш. Физическія состоянія вещества. Пер. съ фр. подъ ред. проф. *Л В. Писаржевскаго.* XIII+224 стр. 8°. Съ 21 рис. Ц. 1 р. 40 к.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. **Вращающійся волчокъ *.** Публ. лекція. Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната.* „Волчекъ и его будущее въ техникѣ“. Пер. съ англ. и нѣмецк. VIII+116 стр. 8°. Съ 73 рис. *3-е изд.* Ц. 60 к.

ПЛАНКЪ, М. проф. **Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.** Пер. съ нѣм. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 42 стр. 16°. Ц. 25 к.

ПОЙНТИНГЪ, ДЖ. проф. **Давленіе свѣта** Пер съ англ. подъ редакціей *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 128+II стр. 16°. Съ 42 рис. Ц 50 к.

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. Ц 25 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій.** * (Радіоактивность, іоны, электроны). Пер. съ 3 итал. изд. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. *2-е изд.* Ц. 90 к.

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи** * Вступительная лекція. Пер. съ итальянск. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 27 стр. 8°. *2 е изд.* Ц 30 к.

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СОДДИ, Ф. проф. **Радій и его разгадка.** * Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Хмырова.* XVI+185 стр. 8°. Съ 31 рис. Ц. 1 р. 25 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Пер. съ англ. *I. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. Ц. 1 р. 20 к.

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ. проф. **Добываніе свѣта.** * Общедоступная лекція для рабочихъ, прочитанная на собраніи Британской Ассоціаціи 1906. Пер. съ анг. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. Ц. 50 к.

Успѣхи физики. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"*.
Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8° Съ 41 рис. и 2 таб. *3-е изд.* Ц. 75 к.
Выпускъ II. IV+204 стр. 8°. Съ 50 рис. Ц 1 р. 20 к.

ХИМІЯ.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. **Стереохимія.** (Ученіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулѣ). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Г Меликова.* VIII+164 стр. 8°. Съ 58 рис. Ц. 1 р 20 к.

ПЁШЛЬ В. проф. **Введеніе въ коллоидную химію.** Очеркъ коллоидной химіи для учителей, врачей и студентовъ. Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго,* съ пред. проф. *П. Г. Меликова,* VIII+86 стр. 8° Ц. 75 к.

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+75 стр 16°. Ц. 40 к.

СМИТЪ, А. проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. Ц. 3 р. 50 к.

УСПѢХИ ХИМІИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени въ общедоступномъ изложеніи подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Элем. Мат."* Вып. I, VIII+240 стр. 8°. Съ 83 рис. Ц. 1 р. 50 к.

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. Г. Очерки по исторіи химіи. Популярно-научныя лекціи. XVI+318 стр 8°. Съ 83 рис. Ц. 2 р. 20 к.

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.* IV+191 стр. 8°. Съ 79 рис. *Изданіе распродано.*

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ,** прив.-доц. **Практическое руководство по количественному анализу.** Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив *А. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Пер. съ нѣм. VIII+173 стр. 8°. Съ 37 рис. Ц. 1 р. 20 к.

АСТРОНОМІЯ.

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ***. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. *2-е изд.* Ц. 1 р. 75 к.

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Физика неба***. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* VIII+250 стр. 8°. Съ 68 рис., 1 черт. и 1 спектр. табл. *Изданіе распродано.*

БОЛЛЪ, Р. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* IV+104 стр. 8° Съ 4 рис. и 1 табл. Ц. 75 к.

ВИХЕРТЪ. Э. проф. **Введеніе въ геодезію***. Перев. съ нѣм. IV+95 стр. 16°. Съ 41 рис. *2-е изд.* Ц. 35 к.

ГРАФФЪ, К. Комета Галлея*. Пер. съ нѣм. X+71 стр. 16° Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе испр. и дополн. Ц. 30 к.

Галеева комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ—О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями Ц. 12 к.

ЛОВЕЛЛЪ, П. проф. **Марсъ и жизнь на немъ.** Пер. съ англ. подъ ред. и съ пред прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XXI+272 стр. 8°. Со многими рис. и 1 цвѣтн. табл. Ц. 2 р.

НЬЮКОМЪ С. проф. **Астрономія для всѣхъ***. Пер. съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XX+288 стр. 8°. Съ порт. автора, 64 рис. и 1 табл. *2-е изд.* Ц. 1 р. 50 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса), 26 стр. 16°. *Изд. распродано.*

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. Два новыхъ міра. 1. Инфра-міръ. 2. Супра-міръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. Ц. 80 к.

БІОЛОГІЯ.

ВЕРИГО, Б. проф. **Единство жизненныхъ явленій.** *(Основы общей біологіи I.).* VIII+276 стр. 8°. Съ 81 рис. Ц. 2 р.

ВЕРИГО, Б. проф. **Біологія клѣтки, какъ основа ученій о зародышевомъ развитіи и размноженіи.** *(Основы общ. біологіи, II).* IV+336 стр. 8°. Съ 60 рис. Ц. 2 р. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+353 стр. 8°. Съ 64 рис. Ц. 2 р. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Жизнь.** Пер. съ нѣм. 30 стр. 8°. Ц. 30 к.

УСПѢХИ БІОЛОГІИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени. Вып. I. Подъ ред. проф *В. В. Завьялова.* IV+244 стр. 8°. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 50 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр 8°. Съ 34 черн. и цвѣтн. рис. на 15 отдѣльн. табл. Ц. 1 р. 50 к.

VARIA.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы*. Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм VIII+193 стр. 8°. Съ 64 рис. и 3 табл. Ц. 1 р. 20 к.

ГАССЕРТЪ, К. проф. **Изслѣдованіе полярныхъ странъ.*** Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. *Г. И. Танфильева.* XII+215 стр. 8°. Съ двумя цвѣт. картами. Ц. 1 р. 50 к.

ГРОТЪ, П. проф. **Введеніе въ химическую кристаллографію.** Перев. съ нѣм. I. Левинтова подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко.* VIII+104 стр. 8° Съ 6 черт. Ц. 80 к.

ДАННЕМАННЪ, Ф. проф. **Краткая исторія естествознанія.** Пер. съ нѣмецкаго подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *И. И. Боргмана.* IV+474 стр. 8°. Съ 87 рис. Ц. 3 р.

НИМФЮРЪ, Р. Воздухоплаваніе.* Научн. основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8°. Съ 52 рис. Ц. 90 к.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8° Съ 16 отд. портретами. Ц. 1 р. 50 к.

ТРЁЛЬСЪ-ЛУНДЪ, проф. **Небо и міровоззрѣніе въ кругозоротѣ временъ.** Пер. съ нѣм. IV+233 стр. 8°. Ц. 1 р. 50 к.