

А. П. КАРТАШЕВ,
Б. Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 288 с.

Книга посвящена теории обыкновенных дифференциальных уравнений и основным понятиям и простейшим задачам вариационного исчисления. Излагается также метод характеристик решения уравнений с частными производными первого порядка.

Изложение основано на широком использовании аппарата линейной алгебры и на единообразном рассмотрении дифференциальных уравнений произвольного порядка путем сведения их к системам первого порядка.

По своему содержанию книга отвечает программам вузов с повышенным уровнем преподавания математики и содержит ряд существенных дополнений: приближенные методы решения дифференциальных уравнений, краевую задачу, метод прогонки, линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и др.

В конце каждой главы приводятся задачи, расширяющие и дополняющие ее содержание.

Книга предназначена для студентов высших учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-----------------------	---

Глава 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

§ 1. Общие понятия, определения и примеры	7
§ 2. Геометрическая интерпретация нормальной системы дифференциальных уравнений. Задача Коши	13
§ 3. Некоторые интегрируемые случаи одного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной	16
Задачи	25

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений	26
§ 2. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка	39
§ 3. Метод исключения для линейной системы дифференциальных уравнений	43
§ 4. Приемы, упрощающие решение линейных дифференциальных уравнений	45
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с комплексными коэффициентами	47
§ 6. Преобразование линейных систем дифференциальных уравнений. Преобразование линейной системы с постоянной матрицей к линейной системе с треугольной матрицей	49
§ 7. Структура решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	52
§ 8. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами	57
§ 9. Линейные системы и линейные дифференциальные уравнения с постоянными действительными коэффициентами	64
§ 10. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	66
§ 11. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	76
Задачи	80

Глава 3

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.	Теоремы существования и единственности	83
§ 2.	Непродолжаемые решения	100
§ 3.	Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения	103
§ 4.	Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий	109
§ 5.	Приближенные методы решения задачи Коши	119
§ 6.	Поведение решений линейных однородных дифферен- циальных уравнений второго порядка	132
§ 7.	Первоначальные сведения о краевой задаче	137
Задачи		145

Глава 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1.	Динамические системы и их геометрическая интерпре- тация	148
§ 2.	Свойства решений динамических систем	149
§ 3.	Поведение траекторий динамических систем на пло- скости	154
§ 4.	Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с по- стоянными действительными коэффициентами	164
Задачи		177

Глава 5

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1.	Определения и примеры	179
§ 2.	Однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчи- вость решения $x \equiv 0$	181
§ 3.	Лемма Ляпунова	185
§ 4.	Теорема Ляпунова	188
§ 5.	Консервативная механическая система с одной степенью свободы	194
Задачи		196

Глава 6

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1.	Основные определения	198
§ 2.	Понятие характеристики квазилинейного уравнения	200
§ 3.	Задача Коши для уравнения с частными производ- ными первого порядка	203
§ 4.	Решение задачи Коши для квазилинейного уравнения	205
§ 5.	Линейное однородное уравнение с частными производ- ными первого порядка и первые интегралы динамиче- ских систем	212

§ 6. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка	219
Задачи	223

Глава 7

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Функционалы в линейном нормированном пространстве	225
§ 2. Функционалы вида $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$	234
§ 3. Функционалы вида $F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$	240
§ 4. Функционалы вида $F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy$	242
§ 5. Замечания о достаточных условиях экстремума функционала	246
§ 6. Условный экстремум	250
§ 7. О приближенных методах решения вариационных задач	259
Задачи	261

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 1. Некоторые сведения из линейной алгебры	264
§ 2. Комплексные функции действительного переменного и действия над ними	279
§ 3. Три леммы о вектор-функциях	280
Предметный указатель	285

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга написана на основе лекций, которые авторы читали в Московском инженерно-физическом институте. Она предназначена для студентов высших учебных заведений и в первую очередь для студентов физико-технических специальностей.

При изложении материала существенно используется аппарат линейной алгебры. Применение векторов и матриц позволяет значительно сократить изложение. Авторы предполагают, что студенты встречались ранее с основными понятиями и методами линейной алгебры, тем не менее в дополнении приводятся некоторые сведения, необходимые для понимания излагаемого материала.

Широкое внедрение в науку вычислительных методов, связанное с появлением вычислительных средств большой мощности, требует переоценки значения различных разделов математики и, в частности, разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящее время выросло значение методов качественного исследования решений дифференциальных уравнений, а также методов приближенного нахождения решений. В связи с этим мы приводим здесь некоторые сведения о численных методах решения задачи Коши, о краевой задаче и методе «прогонки». Большое внимание уделено теоремам существования и единственности, теоремам о непрерывной зависимости решения от параметров и начальных значений.

В конце каждой главы помещены задачи, иллюстрирующие рассматриваемые понятия и методы, а также содержащие дополнительные сведения, не вошедшие в основной текст книги.

В процессе работы над книгой авторы пользовались советами многих своих коллег из Московского инженерно-физического института. Особенно мы благодарны Д. А. Василькову, который прочел рукопись и сделал много критических замечаний. Мы также признательны С. Г. Селивановой за обсуждение содержания гл. 5.

Авторы

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В этой главе вводятся основные понятия, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Формулируется задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В конце главы рассматриваются простейшие дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах, т. е. такие уравнения, решения которых можно представить в виде конечных формул, содержащих операции интегрирования (квадратуры) и другие стандартные математические операции.

Все функции, встречающиеся в этой главе, будем считать действительными.

§ 1. Общие понятия, определения и примеры

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений изучаются уравнения и системы уравнений, в которых неизвестными являются функции одного действительного переменного, а в сами уравнения входят производные от неизвестных функций.

Будем обозначать независимое переменное буквой t , неизвестные функции — $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, а производные функции $x(t)$, как обычно, $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(m)}(t)$. Употребляются также обозначения

$$x'(t) = \dot{x}(t), \quad x''(t) = \ddot{x}(t) \quad \text{и} \quad x'''(t) = \dddot{x}(t).$$

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\mathcal{F}_i(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m_1)}, \dots, x_n, x'_n, \dots, x_n^{(m_n)}) = 0 \quad (1) \\ (i = 1, \dots, l),$$

где $\mathcal{F}_i$ — функции от указанных аргументов.

Наибольшее из чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ называется *порядком* системы уравнений (1).

Например, в систему дифференциальных уравнений первого порядка могут входить лишь переменное t , неизвестные функции $x_1, \dots, x_n$ и их первые производные $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$; в систему уравнений второго порядка входят еще вторые производные $x''_1, \dots, x''_n$.

О п р е д е л е н и е. Набор функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, определенных на некотором промежутке T (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом) оси t , имеющих на этом промежутке те производные, которые входят в уравнения (1), и удовлетворяющих этим уравнениям при всех $t \in T$, называется *решением* *) *системы* уравнений (1).

Очень многие физические процессы описываются дифференциальными уравнениями. Величины, характеризующие процесс, как правило, зависят от времени, поэтому, когда это удобно, мы будем интерпретировать независимое переменное t как время.

Для упрощения записи употребляются векторные обозначения. Так, набор функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ обозначается

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\},$$

при этом $\mathbf{x}(t)$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента t .

Производные вектор-функции определяются, как обычно:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \{\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)\},$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \{\ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t)\},$$

$$\dots \dots \dots$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathcal{F}_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, l), \quad (2)$$

которая в векторных обозначениях имеет вид

$$\mathcal{F}_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (i = 1, \dots, l), \quad (3)$$

*) Употребляется также термин *частное решение*.

занимает особое положение среди систем дифференциальных уравнений, так как к ней приводится произвольная система уравнений (1) (с помощью введения новых неизвестных функций и увеличения числа уравнений).

В самом деле, вводя в уравнения (1) $n' = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ новых неизвестных функций $y_1, y_2, \dots, y_{n'}$ по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, & y_2 &= x'_1, \dots, & y_{m_1} &= x_1^{(m_1-1)}, \\ y_{m_1+1} &= x_2, & y_{m_1+2} &= x'_2, \dots, & y_{m_1+m_2} &= x_2^{(m_2-1)}, \\ &\dots & & & & \\ y_{n'-m_n+1} &= x_n, & y_{n'-m_n+2} &= x'_n, \dots, & y_{n'} &= x_n^{(m_n-1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

мы получим вместо уравнений (1) уравнения первого порядка

$$\mathcal{F}_i(t, y_1, \dots, y_{m_1}, y'_{m_1}, \dots, y_{n'-m_n+1}, \dots, y_{n'}, y'_{n'}) = 0 \quad (5)$$

$$(i = 1, \dots, l).$$

Из формул (4) следует, что новые неизвестные функции удовлетворяют также следующим $n' - n$ уравнениям:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, & y'_2 &= y_3, \dots, & y'_{m_1-1} &= y_{m_1}, \\ &\dots & & & & \\ y'_{n'-m_n+1} &= y_{n'-m_n+2}, \dots, & y'_{n'-1} &= y_{n'}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему $n' - n + l$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. систему вида (2).

Если в (2) число уравнений равно числу неизвестных функций ($n = l$) и сами уравнения можно разрешить относительно $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$, то систему (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

или сокращенно

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Система дифференциальных уравнений вида (7) называется *нормальной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений. Число неизвестных функций n иногда называют *порядком* нормальной системы дифференциальных уравнений (7).

В качестве примера рассмотрим одно дифференциальное уравнение m -го порядка с одной неизвестной функцией $x(t)$:

$$\mathcal{F}(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0. \quad (8)$$

Это частный случай системы (1), когда $l = 1$, $n = 1$, $m_1 = m$. Вводя новые переменные

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad \dots, \quad y_m = x^{(m-1)},$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, \quad y'_2 = y_3, \quad \dots, \quad y'_{m-1} = y_m, \\ \mathcal{F}(t, y_1, \dots, y_m, \dot{y}_m) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $x = x(t)$ — какое-либо решение уравнения (8), то набор функций $y_1 = x(t)$, $y_2 = x'(t)$, $\dots$, $y_m = x^{(m-1)}(t)$ будет решением системы уравнений (9), и наоборот, если $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\dots$, $y_m(t)$ — решение системы (9), то функция $x = y_1(t)$ будет решением уравнения (8).

Таким образом, можно сказать, что уравнение (8) сводится к системе уравнений (9).

Если уравнение $\mathcal{F}(t, y_1, \dots, y_m, \dot{y}_m) = 0$ можно разрешить относительно $\dot{y}_m$, то вместо системы (9) получим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= y_{k+1} \quad (k = 1, \dots, m-1), \\ \dot{y}_m &= f(t, y_1, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (10)$$

При $m = 1$ уравнение (8) будет обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\mathcal{F}(t, x, \dot{x}) = 0,$$

а соответствующая ему нормальная форма имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Рассмотрим два примера, связанных с решением физических задач.

Примеры. 1. *Радиоактивный распад.* Пусть $m(t)$ — масса неустойчивого вещества в момент времени t , а $\alpha > 0$ — сечение распада. Согласно общему закону радиоактивного распада

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m. \quad (11)$$

Таким образом, соотношение (11) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Легко проверить, что при любой постоянной c функция $m(t) = ce^{-\alpha t}$ является решением уравнения (11); при этом c равно $m(0)$ — массе вещества в момент времени $t = 0$.

Время $t_0 = \ln 2/\alpha$ называется *периодом полураспада*:

$$m(t_0) = ce^{-\ln 2} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} m(0).$$

2. *Движение космического корабля вокруг Земли.* При рассмотрении движения космического корабля вокруг Земли на небольших расстояниях от нее обычно можно пренебречь притяжением Солнца и других планет Солнечной системы, а также движением Земли вокруг Солнца. В связи с этим выберем систему декартовых координат с началом в центре Земли, приблизительно неподвижную относительно звезд. Пренебрегая сопротивлением атмосферы Земли и рассматривая корабль как материальную точку, будем описывать его движение тремя функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ — координатами корабля в момент времени t .

В силу второго закона Ньютона сумма всех сил, действующих на космический корабль, должна быть равна вектору ускорения $\{\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3\}$, умноженному на массу космического корабля. Поэтому уравнения движения имеют вид

$$m(t) \ddot{x}_i = F_i + P_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12)$$

где $m(t)$ — масса космического корабля, $\dot{x}_i$ — компоненты скорости корабля, F_i — компоненты силы притяжения корабля Землей, P_i — компоненты силы тяги двигателей корабля.

Как известно,

$$F_i = -\frac{x_i}{r} g \frac{R^2}{r^2} m(t), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (13)$$

где R — радиус Земли. При работе реактивных двигателей уменьшается масса корабля; при этом иногда можно считать, что

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha P, \quad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}, \quad \alpha > 0. \quad (14)$$

Величина α зависит от вида топлива, направление силы $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ и ее величина в технически допустимых пределах произвольны и задаются программой полета. При заданной

силе тяги $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ определение движения корабля сводится к отысканию четырех неизвестных функций ($x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) и $m(t)$) из четырех дифференциальных уравнений (12), (14), которые образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка.

В простейшем случае пассивного движения корабля $\mathbf{P} = 0$ $m(t) = m = \text{const}$ и мы имеем дело с системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}_i = -\frac{x_i}{r^3} gR^2 \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad i = 1, 2, 3). \quad (15)$$

При пассивном движении корабль остается в плоскости, в которой лежат вектор скорости $\dot{\mathbf{x}} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\}$ и вектор ускорения $\frac{\mathbf{F}}{m} = -\left\{\frac{x_1}{r^3}, \frac{x_2}{r^3}, \frac{x_3}{r^3}\right\} gR^2$. Помещая координатные оси x_1 и x_2 в эту плоскость, получим систему двух уравнений ($x_3 = 0$):

$$\ddot{x}_i = -\frac{x_i}{r^3} gR^2 \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad i = 1, 2). \quad (16)$$

Умножив каждое из уравнений (16) на соответствующее $\dot{x}_i$ и суммируя по $i = 1, 2$, получим уравнение

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \ddot{x}_2 = -\frac{gR^2}{r^3} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2),$$

которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} \right) = -\frac{gR^2}{r^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) = gR^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mR^2 g}{r} \right) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) выражает закон сохранения энергии: сумма кинетической энергии корабля $V = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ и потенциальной энергии $U = -\frac{mR^2 g}{r}$ постоянна.

Из уравнения (17), как следствие, получаем одно дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{R^2 g}{r} = c = \text{const}. \quad (18)$$

Постоянная c может быть определена, если в какой-нибудь точке орбиты известны скорость корабля $v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$ и его расстояние r от центра Земли.

Соотношение (18) называют промежуточным интегралом системы уравнений (16).

Из соотношения (18) определяется, например, вторая космическая скорость, т.е. такая скорость v_0 на поверхности Земли ($r = R$), при которой корабль неограниченно удаляется от Земли. Согласно (18)

$$\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{R^2 g}{r} = \frac{v_0^2}{2} - Rg. \quad (19)$$

Переходя в соотношении (19) к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и предполагая, что при этом $r \rightarrow +\infty$, получим

$$\frac{v_0^2}{2} - Rg = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{R^2 g}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} \geq 0,$$

откуда следует, что $v_0^2 \geq 2Rg$ или $v_0 \geq \sqrt{2Rg} \approx 11,2$ км/с.

§ 2. Геометрическая интерпретация нормальной системы дифференциальных уравнений.

Задача Коши

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений имеют, как правило, бесконечное множество решений (см. примеры 1, 2). Поэтому важным является вопрос о том, какие условия однозначно выделяют конкретное решение из бесконечной совокупности решений. Изучением такого рода условий мы здесь и займемся.

Рассмотрим более подробно нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

где $x = \{x^1, \dots, x^n\}$, $f(t, x) = \{f^1(t, x), \dots, f^n(t, x)\}$, причем верхние индексы обозначают номера координат вектора.

Вектор-функцию $f(t, x)$ будем считать определенной на некотором открытом множестве G $(n+1)$ -мерного евклидова пространства переменных $t, x^1, \dots, x^n$.

Всякое решение

$$x = \varphi(t) \quad (x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

системы уравнений (1) определяет в $(n+1)$ -мерном пространстве переменных $t, x^1, \dots, x^n$ некоторую кривую. Например, при $n = 1$ уравнение (2) определяет

кривую, лежащую в плоскости переменных t , x^1 (рис. 1).

Кривая (2) называется *интегральной кривой* системы дифференциальных уравнений (1).

Пусть при $t = t_0$ решение (2) принимает некоторое значение x_0 или, что то же самое, интегральная кривая (2) проходит через точку (t_0, x_0) :

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (\varphi^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

В силу (1)

$$\dot{\varphi}(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, x_0). \quad (4)$$

Соотношение (4) означает, что касательный вектор $\{1, \dot{\varphi}(t_0)\}$ интегральной кривой (2) в каждой ее точке (t_0, x_0) равен вектору $\{1, f(t_0, x_0)\}$, направление которого указывает направление перемещения точки $(t, \varphi(t))$ интегральной кривой при возрастании параметра t .

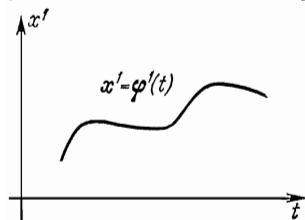


Рис. 1.

Итак, всякая нормальная система (1), определенная на множестве G , задает на этом множестве векторное поле

$$\{1, f(t, x)\}, \quad (t, x) \in G. \quad (5)$$

Решение или интегральная кривая системы (1) — это такая кривая $x = \varphi(t)$, у которой касательный вектор $\{1, \dot{\varphi}(t)\}$ в каждой ее точке $(t, \varphi(t))$ равен значению векторного поля (5) в этой точке.

Рассмотрим *задачу Коши*: задана точка (t_0, x_0) множества G , требуется найти решение $x = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее условиям

$$\varphi(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Условия (6) называются *начальными условиями*, величины t_0 и x_0 — *начальными значениями*.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в том, что ищется интегральная кривая системы уравнений (1), проходящая через заданную точку (t_0, x_0) области G .

Оказывается, что при некоторых предположениях относительно правых частей системы уравнений (1) эта задача всегда разрешима, и более того, решение единственно *).

Важность задачи Коши с физической точки зрения состоит в том, что начальные условия, присоединенные к системе дифференциальных уравнений, описывающих какой-либо процесс, делают задачу «физически определенной».

Например, начальное условие в задаче о радиоактивном распаде задает массу вещества $m(0)$ в начальный момент времени $t=0$, после чего по формуле

$$m(t) = m(0) e^{-at} \quad (7)$$

масса вещества вычисляется в любой момент времени.

Поясним введенные понятия на примере одного уравнения

$$\dot{x} = \frac{x}{t}. \quad (8)$$

Множество G в данном случае есть множество точек (t, x) , у которых $t \neq 0$, т. е. плоскость t, x с исключенной осью x .

Легко проверяется, что при любом k функция

$$x = kt \quad (9)$$

есть решение уравнения (8).

Пусть (t_0, x_0) ($t_0 \neq 0$) — произвольная точка множества G . Будем искать среди решений (9) решение, проходящее через точку (t_0, x_0) . Подставляя в (9) координаты точки (t_0, x_0) , находим $k = x_0/t_0$. Таким образом, получаем решение задачи Коши для уравнения (8) с начальными значениями t_0, x_0 :

$$x = \frac{x_0}{t_0} t, \quad (10)$$

где t изменяется в интервале $(0, +\infty)$, если $t_0 > 0$, и в интервале $(-\infty, 0)$, если $t_0 < 0$. Соответствующая интегральная кривая представляет собой полупрямую (соединяющую точки $(0, 0)$ и (t_0, x_0)), из которой выброшена точка $(0, 0)$.

*) Подробно эти вопросы будут рассмотрены в гл. 3.

Рассмотрим уравнение n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (11)$$

Как было показано в § 1, уравнение (11) сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \quad \dots, \quad \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n &= F(t, x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (12)$$

с n неизвестными функциями

$$x^1 = y, \quad x^2 = y', \quad \dots, \quad x^n = y^{(n-1)}.$$

Начальные условия для системы уравнений (12) имеют вид

$$x^1(t_0) = x_0^1, \quad \dots, \quad x^n(t_0) = x_0^n. \quad (13)$$

Условия (13) переходят в следующие условия для решения уравнения (11):

$$y(t_0) = x_0^1, \quad y'(t_0) = x_0^2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_0^n.$$

В связи с этим задача Коши для уравнения (11) ставится так: ищется решение $y = y(t)$ уравнения (11), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $(t_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ — произвольная фиксированная точка из области определения функции F .

§ 3. Некоторые интегрируемые случаи одного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

1. Самым простым случаем одного уравнения первого порядка является уравнение вида

$$\dot{x} = f(t), \quad (1)$$

где $f(t)$ — заданная функция, непрерывная на некотором интервале (a, b) . Задача нахождения решения

$x = x(t)$ в данном случае есть классическая задача математического анализа об отыскании функции по ее производной. Как известно, эта задача решается с помощью понятия первообразной:

$$x = \int f(t) dt.$$

Поскольку все первообразные отличаются одна от другой на постоянную, то любое решение можно записать в виде

$$x = C + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad (a_0 < t_0 < b), \quad (2)$$

так как C есть значение $x(t)$ при $t = t_0$. Решение (2) определено на всем интервале (a, b) .

Выражение (2) дает все первообразные функции для $f(t)$, поэтому формула (2) содержит все решения уравнения (1). В этом случае говорят, что (2) есть *общее* решение уравнения (1).

2. Уравнение вида

$$\dot{x} = f_1(t) f_2(x) \quad (f_2(x) \neq 0) \quad (3)$$

или

$$g(x) \dot{x} = f(t) \quad \left(g(x) = \frac{1}{f_2(x)}, \quad f(t) = f_1(t) \right) \quad (3')$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Функцию $f_1(t)$ будем предполагать непрерывной при $a < t < b$, а функцию $f_2(x)$ — непрерывной при $c < x < d$.

Фиксируем какие-либо значения $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (c, d)$ и рассмотрим функции

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi,$$

определенные соответственно на интервалах $a < t < b$ и $c < x < d$. Покажем, что уравнение

$$G(x) - F(t) = 0 \quad (4)$$

определяет x как неявную функцию t , являющуюся решением уравнения (3) и удовлетворяющую началь-

ному условию $x(t_0) = x_0$. Так как $G'(x) = g(x) = [f_2(x)]^{-1} \neq 0$, то существует обратная по отношению к $G(x)$ функция $h(z)$ и из уравнения (4)

$$x = x(t) = h(F(t)).$$

Эта сложная функция заведомо определена при всех t , достаточно близких к t_0 , так как $F(t_0) = 0$ и $h(z)$ определена на некоторой окрестности нуля. Выполнение начальных условий явствует из соотношений $F(t_0) = 0$, $G(x_0) = 0$. Вычислим производную функции $x(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= h'(F(t)) F'(t) = \frac{1}{G'(x(t))} \dot{f}(t) = \\ &= \frac{\dot{f}(t)}{g(x(t))} = \dot{f}_2(x(t)) \dot{f}_1(t). \end{aligned}$$

Таким образом, $x(t)$ — решение уравнения (3).

Хотя уравнение (4):

$$\int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - \int_{t_0}^t \dot{f}(\tau) d\tau = 0 \quad (5)$$

и не дает явного выражения для решения, тем не менее задача интегрирования дифференциального уравнения (3') считается выполненной, так как обращение функции $G(x)$ есть классическая задача математического анализа.

Пример. Формула Циолковского. Рассмотрим прямолинейное движение ракеты под действием силы тяги двигателей. Найдем скорость ракеты (пренебрегая силой тяготения и сопротивлением воздуха).

Обозначим массу ракеты в момент времени t через $m(t)$, а скорость $v(t)$, тогда закон сохранения импульса запишется в виде

$$d(mv) + (v_0 - v) dm = 0,$$

или

$$m dv + v_0 dm = 0,$$

где v_0 — скорость истечения продуктов горения. Это же уравнение можно получить из уравнений, описывающих движение космического корабля (см. пример 2 на стр. 11), в которых нужно положить $F_t = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, $P_2 = P_3 = 0$, $\alpha = 1/v_0$. Таким образом, для нахождения скорости мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его получим

$$v(m) = -v_0 \ln m + c.$$

Пусть в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса (с полным запасом топлива) M , тогда

$$v(M) = 0,$$

откуда следует, что $c = v_0 \ln M$ и

$$v(m) = v_0 \ln \frac{M}{m}.$$

Полученная формула называется *формулой Циолковского*.

3. К уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad (6)$$

в котором функция $f(y)$ предполагается заданной и непрерывной на некотором интервале $y_1 < y < y_2$ (таким образом, множество G в плоскости t, x представляет собой открытое множество, границу которого образуют прямые $x = y_1 t$ и $x = y_2 t$). Уравнение (6) называется *однородным* уравнением.

Произведем замену зависимого переменного x по формуле

$$x = yt, \quad (7)$$

где $y = y(t)$ — новая неизвестная функция. Дифференцируя (7) по t и подставляя полученное выражение в (6), получим

$$t\dot{y} = f(y) - y. \quad (8)$$

Уравнение (8) есть уравнение с разделяющимися переменными. Решая его указанным выше способом, получим

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C. \quad (9)$$

Следует отметить, что помимо решений, заданных формулой (9), уравнение (8) может иметь еще решения вида

$$y = y_0 = \text{const}, \quad (10)$$

где y_0 — корень уравнения $f(y) = y$. Решению (10) уравнения (8) отвечает решение $x = y_0 t$ уравнения (6).

К однородному уравнению приводится уравнение более общего вида

$$\dot{x} = f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \gamma}{\alpha x + \beta t + c}\right),$$

где $f(z)$ непрерывна на некотором интервале $z_1 < z < z_2$. Если $\alpha\beta - a\beta \neq 0$, то, производя замену зависимого и независимого переменных по формулам

$$y = \alpha x + \beta t + \gamma; \quad \tau = \alpha x + \beta t + c; \quad y = y(\tau),$$

получим однородное уравнение. Если $\alpha\beta - a\beta = 0$, то заменой $y = \alpha x + \beta t$ рассматриваемое уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

4. Уравнение вида

$$\dot{x} = a(t)x + g(t) \quad (11)$$

называется *линейным* уравнением, а уравнение

$$\dot{y} = a(t)y \quad (12)$$

— *однородным линейным* уравнением, соответствующим уравнению (11). Функции $a(t)$ и $g(t)$ предполагаются непрерывными при $t_1 < t < t_2$.

Решая уравнение (12) как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$y = Ce^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (13)$$

Решение неоднородного уравнения (11) будем искать в виде

$$x = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}, \quad (14)$$

т. е. в виде произведения некоторой функции $C(t)$ на решение соответствующего однородного уравнения. Такой метод нахождения решений неоднородных линейных уравнений с помощью решения однородного уравнения называется *методом вариации постоянной*. Константа C в решении (13) однородного уравнения (12) заменяется на функцию $C(t)$, и в таком виде ищется решение неоднородного уравнения (11).

Подставив (14) в (11), получим уравнение для $C(t)$:

$$\dot{C}(t) = g(t) e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}.$$

Функция $C(t)$ находится с помощью квадратуры:

$$C(t) = \int_{t_0}^t g(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(\tau) d\tau} d\xi + C_1, \quad (15)$$

где C_1 — новая произвольная постоянная. Подставляя (15) в (14), получим решение уравнения (11):

$$x(t) = \left[\int_{t_0}^t g(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(\tau) d\tau} d\xi + C_1 \right] e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (16)$$

Решим задачу Коши для уравнения (11). Пусть начальное условие имеет вид $x(t_0) = x_0$. Полагая в (16) $t = t_0$, получим $C_1 = x_0$. Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (11) дается формулой

$$x = \left[\int_{t_0}^t g(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(\tau) d\tau} d\xi + x_0 \right] e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}. \quad (17)$$

Пример. Пусть в некоторый объем за единицу времени вводится извне масса $g(t)$ неустойчивого вещества, $m(t)$ — масса вещества в этом объеме в момент времени t . Тогда для $m(t)$ имеем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m + g(t),$$

где $\alpha > 0$ — постоянная распада.

Пусть $g(t) = g_0 = \text{const}$, $m(0) = 0$. Тогда, согласно (17), имеем решение

$$m(t) = \frac{g_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Когда $t \rightarrow +\infty$, $m(t) \rightarrow \frac{g_0}{\alpha}$, т.е. процесс становится стационарным.

5. К линейному уравнению сводится *уравнение Бернулли*

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n \quad (n \neq 1, n \neq 0),$$

где $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на некотором интервале $t_1 < t < t_2$. Замена неизвестной функции

$$x^{1-n} = y$$

приводит уравнение Бернулли к линейному уравнению для y :

$$\frac{1}{1-n} \dot{y} = f(t)y + g(t).$$

6. Уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (18)$$

можно записать в виде

$$M(t, x) dt + N(t, x) dx = 0, \quad (19)$$

если функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ удовлетворяют условию

$$-\frac{M(t, x)}{N(t, x)} = f(t, x). \quad (20)$$

Пусть $M(t, x)$ и $N(t, x)$ определены на некотором открытом множестве D плоскости t, x и непрерывны на нем. Может случиться, что функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ удалось выбрать такими, что они удовлетворяют условию (20) и в то же время левая часть уравнения (19) является полным дифференциалом, т. е. существует такая функция $V(t, x)$, что на множестве D

$$dV(t, x) = M(t, x) dt + N(t, x) dx.$$

В этом случае уравнение (19) имеет вид

$$dV(t, x) = 0,$$

и потому формула

$$V(t, x) = C \quad (20')$$

определяет все решения уравнения (19). Уравнение (20') определяет неявную функцию $x(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения (19). Эта неявная функция зависит от C . Изменяя C , получаем множество всех решений уравнения (19).

Уравнение (19), левая часть которого является полным дифференциалом, называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Если производные $\frac{\partial M}{\partial x}$ и $\frac{\partial N}{\partial t}$ непрерывны на множестве D , то для того чтобы выражение $Mdt + Ndx$ было полным дифференциалом, необходимо условие

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (21)$$

Это следует из равенств

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

З а м е ч а н и е. Из курса математического анализа известно, что если D — односвязная область, то условие (21) достаточно для того, чтобы уравнение (19) было уравнением в полных дифференциалах.

Уравнение (19) может быть сведено к уравнению в полных дифференциалах, если удастся найти функцию $\mu(t, x) \neq 0$, непрерывную вместе с частными производными первого порядка, такую, что выражение $\mu(t, x) [M(t, x)dt + N(t, x)dx]$ будет полным дифференциалом. Такая функция называется *интегрирующим множителем уравнения* (19).

Применяя необходимые условия (21) к рассматриваемому случаю, получим, что интегрирующий множитель должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N), \quad (22)$$

или

$$M \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} - N \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (23)$$

Уравнение (22) или (23) является уравнением с частными производными. Решение этого уравнения — задача, вообще говоря, не более легкая, чем решение исходного уравнения (19). Более того, в процессе решения уравнения (23) приходится решать уравнение (19).

Однако в некоторых случаях удастся найти интегрирующий множитель подбором. При этом бывает полезна следующая

Теорема. Если $\mu(t, x)$ — интегрирующий множитель уравнения (19), т. е. $\mu M dt + \mu N dx = dV(t, x)$, то интегрирующим множителем является и функция $\varphi(V) \cdot \mu$, где $\varphi(z)$ — произвольная непрерывная функция, не равная нулю.

В самом деле, пусть $F(z)$ — первообразная для $\varphi(z)$: $F'(z) = \varphi(z)$. Тогда

$$\varphi(V) \mu [M dt + N dx] = \varphi(V) dV = F'(V) dV = dF(V).$$

Таким образом, $\varphi(V) \mu$ — интегрирующий множитель уравнения (19). Теорема доказана.

Пример. Известно, что состояние газа, находящегося в термодинамическом равновесии, характеризуется двумя термодинамическими параметрами. Пусть это будут удельный объем V и давление p . При адиабатическом процессе внутренняя энергия ε газа изменяется согласно второму закону термодинамики:

$$d\varepsilon + p dV = 0. \quad (24)$$

Внутренняя энергия ε зависит только от p и V . Уравнение (24) есть уравнение вида (19). Один из интегрирующих множителей уравнения (24) (задаваемый дополнительными условиями) обозначается $1/T$, величина T называется температурой. Итак,

$$\frac{1}{T} (d\varepsilon + p dV) = dS(p, V)$$

есть полный дифференциал некоторой функции $S(p, V)$, называемой *энтропией*.

Для идеального политропного газа с показателем адиабаты γ

$$\varepsilon = \frac{pV}{\gamma - 1}$$

и уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} p dV + \frac{1}{\gamma - 1} V dp = 0. \quad (25)$$

После умножения (25) на $\mu = \frac{1}{T} = \frac{R}{pV}$ (R — газовая постоянная) получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dV}{V} + \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dp}{p} = 0.$$

Левую часть этого уравнения запишем в виде

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dV}{V} + \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dp}{p} = d \ln \left(V^{\frac{\gamma R}{\gamma - 1}} p^{\frac{R}{\gamma - 1}} \right).$$

Итак,

$$S(p, V) = \ln \left(V^{\frac{\gamma R}{\gamma-1}} p^{\frac{R}{\gamma-1}} \right) + S_0.$$

Задачи

1. Показать, что решение задачи Коши для линейного уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + g(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ можно записать в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^t u(t, \tau) g(\tau) d\tau + x_0 u(t, t_0),$$

где $u(t, \tau)$ — решение однородного уравнения

$$\dot{y} = a(t)y, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию (при $t = \tau$)

$$u(\tau, \tau) = 1.$$

Решение $u(t, \tau)$ можно записать в виде $u(t, \tau) = \frac{v(t)}{v(\tau)}$, где $v(t)$ — любое нетривиальное решение однородного уравнения (1).

2. Уравнение Риккати

$$\dot{x} = f(t) + g(t)x + h(t)x^2$$

в общем случае не решается в квадратурах. Показать, что если известно его частное решение $x_1(t)$, то заменой переменных $x = x_1(t) + y$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли, которое уже может быть решено в квадратурах.

3. Доказать, что для того, чтобы уравнение

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0,$$

где $M(t, x)$, $N(t, x)$, $\frac{\partial M}{\partial x}$ и $\frac{\partial N}{\partial t}$ непрерывны в односвязной области D и $M \neq 0$ в D , допускало интегрирующий множитель, зависящий только от x , необходимо и достаточно, чтобы функция $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right)$ зависела только от x .

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе будут подробно изучены нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с действительными и комплексными коэффициентами, а также линейное дифференциальное уравнение n -го порядка. Отдельно будут рассмотрены линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с периодическими коэффициентами.

§ 1. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений

Нормальной системой линейных дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами называется система вида

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n f_j^i(t) x^j + g^i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

или более коротко

$$\dot{\mathbf{x}} = F(t) \mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (2)$$

где $F(t) = (f_j^i(t))$ — действительная матрица, а $\mathbf{g}(t) = \{g^1(t), \dots, g^n(t)\}$ — действительный вектор, определенные при $a \leq t \leq b$.

Однородной системой линейных уравнений, соответствующей системе (2), называется система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = F(t) \mathbf{x}. \quad (3)$$

Докажем несколько теорем, устанавливающих наиболее важные свойства решений систем линейных уравнений.

Теорема 1. *Линейная комбинация решений однородной линейной системы (3) также является решением этой системы.*

Доказательство этой теоремы следует из равенств

$$(ax)' = a\dot{x} = aF(t)x = F(t)(ax) \quad (a = \text{const}),$$

$$(x_1 + x_2)' = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = F(t)x_1 + F(t)x_2 = F(t)(x_1 + x_2),$$

где x , x_1 , x_2 — решения системы (3).

Теорема 2. *Разность любых двух решений неоднородной системы уравнений (2) есть решение однородной системы (3).*

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения системы (2). Тогда $\dot{x}_1 = F(t)x_1 + g(t)$, $\dot{x}_2 = F(t)x_2 + g(t)$. Вычитая из первого равенства второе, получим $(x_1 - x_2)' = F(t)(x_1 - x_2)$, т. е. $x_1 - x_2$ — решение системы (3).

Совершенно так же доказывается, что сумма любого (частного) решения неоднородной системы (2) и решения соответствующей однородной системы (3) есть решение неоднородной системы (2).

Сформулируем правило сложения решений линейных неоднородных систем уравнений, которое применяется при практическом нахождении решений неоднородных систем.

Теорема 3. *Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения систем уравнений*

$$\dot{x}_1 = F(t)x_1 + g_1(t),$$

$$\dot{x}_2 = F(t)x_2 + g_2(t)$$

соответственно, то

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

— решение системы уравнений

$$\dot{x} = F(t)x + g_1(t) + g_2(t).$$

Доказательство этой теоремы проводится простым вычислением.

Теорема 4. Пусть $x(t)$ ($a \leq t \leq b$) — решение системы уравнений (2), матрица $F(t)$ и вектор $g(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Пусть $\|F(t)\| \leq F$ (где $\|F\|$ означает норму матрицы F : $\|F\| = \sup_{|x| \leq 1} |Fx|$) и

$|g(t)| \leq g$. Тогда для $|x(t)|$ имеет место следующая оценка:

$$|x(t)| \leq [|x(t_0)| + g(b-a)] e^{F|t-t_0|}. \quad (4)$$

Доказательство. Решение $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau) x(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \quad (a \leq t_0, t \leq b).$$

Оценим сверху $|x(t)|$:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \left| \int_{t_0}^t F(\tau) x(\tau) d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right|.$$

Но $|F(\tau)x(\tau)| \leq F|x(\tau)|$, так как $\|F(t)\| \leq F$. Поэтому

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + g \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| + F \left| \int_{t_0}^t |x(\tau)| d\tau \right| = \\ &= |x(t_0)| + g|t-t_0| + F \left| \int_{t_0}^t |x(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq [|x(t_0)| + g(b-a)] + F \left| \int_{t_0}^t |x(\tau)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Применяя к неравенству

$$|x(t)| \leq [|x(t_0)| + g(b-a)] + F \left| \int_{t_0}^t |x(\tau)| d\tau \right|$$

лемму 3 из § 3 дополнения, получим ($A = |x(t_0)| + g(b-a)$, $F = K$)

$$|x(t)| \leq [|x(t_0)| + g(b-a)] e^{F|t-t_0|}.$$

Теорема доказана.

В частности, для линейной однородной системы (3) имеем оценку ($g=0$):

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| e^{F|t-t_0|}. \quad (5)$$

Теорема 5. Пусть матрица $F(t)$ системы (2) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $t_0 \in [a, b]$. Тогда ре-

шение системы (2) однозначно определяется на отрезке $[a, b]$ условием

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ — два решения системы (2), удовлетворяющие условию (6). Тогда их разность $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ является решением однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = F(t) \mathbf{x}$$

и удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 = 0.$$

Следовательно, $|\mathbf{x}(t_0)| = 0$. Применяя оценку (5), получим

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t_0)| e^{F|t-t_0|} = 0$$

или $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = 0$. Таким образом, $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$. Теорема доказана.

Итак, из оценки (5) вытекает единственность решения задачи Коши для линейной системы (2) с непрерывной матрицей $F(t)$. Из доказанных теорем 4 и 5 вытекают важные следствия.

Следствие 1. Пусть матрица $F(t)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $\|F(t)\| \leq F$ и для решения $\mathbf{x}(t)$ однородной системы (3) имеет место оценка

$$|\mathbf{x}(t_0)| e^{-F|t-t_0|} \leq |\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t_0)| e^{F|t-t_0|}. \quad (7)$$

Иначе говоря, рост функции $|\mathbf{x}(t)|$ ограничен экспонентой.

В самом деле, оценка сверху есть оценка (5). С другой стороны, та же оценка (5) имеет место для любых $t_0, t \in [a, b]$. Поэтому, заменяя t_0 на t , а t на t_0 , получим $|\mathbf{x}(t_0)| \leq |\mathbf{x}(t)| e^{F|t_0-t|}$, т. е.

$$|\mathbf{x}(t_0)| e^{-F|t-t_0|} \leq |\mathbf{x}(t)|,$$

что совпадает с левой частью неравенства (7).

Очевидно, что $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ есть решение однородной системы дифференциальных уравнений (3). Поэтому справедливо

Следствие 2. *Решение $\mathbf{x}(t)$ однородной линейной системы с непрерывной матрицей $F(t)$ тождественно равно нулю, если оно равно нулю в какой-либо точке отрезка $[a, b]$.*

Это следует как из оценки (7), так и из теоремы 5.

Начиная с этого момента матрица $F(t)$ и вектор $\mathbf{g}(t)$ предполагаются непрерывными на $[a, b]$.

Определение 1. Решения $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ однородной системы (3) называются *линейно независимыми на отрезке $[a, b]$* , если в каждой точке $t \in [a, b]$ векторы $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ линейно независимы.

Очевидно, что если m решений $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ линейно независимы, то $m \leq n$.

Пусть теперь задана система n решений $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ однородной системы (3), определенных на $[a, b]$:

$$\mathbf{x}_i = \{x_i^1(t), \dots, x_i^n(t)\} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Определение 2. **Определитель**

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_2^1(t) & \dots & x_n^1(t) \\ x_1^2(t) & x_2^2(t) & \dots & x_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n(t) & x_2^n(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} \quad (9)$$

называется *определителем Вронского* системы решений $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$.

Определение 3. Система из n решений однородной системы уравнений (3), линейно независимых на отрезке $[a, b]$, называется *фундаментальной*.

Теорема 6. *Определитель Вронского $W(t)$ фундаментальной системы (8) отличен от нуля во всех точках отрезка $[a, b]$, на котором система решений $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ фундаментальна.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $W(t_0) = 0$ в некоторой точке t_0 отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений относительно $c^1, \dots, c^n$:

$$\begin{aligned} c^1 x_1^1(t_0) + \dots + c^n x_n^1(t_0) &= 0, \\ c^1 x_1^2(t_0) + \dots + c^n x_n^2(t_0) &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c^1 x_1^n(t_0) + \dots + c^n x_n^n(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В векторной форме система уравнений (10) имеет вид

$$c^1 \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + c^n \mathbf{x}_n(t_0) = 0. \quad (11)$$

Так как определитель этой системы $W(t_0) = 0$, то существует нетривиальное решение $c^1, \dots, c^n$ системы уравнений (10). Это означает (в силу (11)) линейную зависимость векторов $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$, что противоречит определению фундаментальной системы решений. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть матрица $F(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда система решений (8) линейно независима на $[a, b]$, если в какой-либо точке t_0 отрезка $[a, b]$ векторы $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ линейно независимы.

Доказательство. Нам нужно доказать, что при каждом фиксированном t из отрезка $[a, b]$ равенство

$$c^1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c^n \mathbf{x}_n(t) = 0$$

выполняется лишь при $c^1 = \dots = c^n = 0$. Предположим противное. Пусть при некотором t_1 из $[a, b]$ существуют такие $c^1, \dots, c^n$, не все равные нулю, что

$$c^1 \mathbf{x}_1(t_1) + \dots + c^n \mathbf{x}_n(t_1) = 0.$$

Тогда линейная комбинация

$$\mathbf{x}(t) = c^1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c^n \mathbf{x}_n(t)$$

решений (8) есть решение системы (3), удовлетворяющее условию $\mathbf{x}(t_1) = 0$. Согласно следствию 2 из

теорем 4, 5 $x(t) \equiv 0$ на $[a, b]$. В частности, для $t = t_0$

$$0 = x(t_0) = c^1 x_1(t_0) + \dots + c^n x_n(t_0),$$

т. е. векторы $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему. Из этой теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Определитель Вронского $W(t)$ системы решений (8) отличен от нуля во всех точках отрезка $[a, b]$ (на котором эти решения определены), если он отличен от нуля хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$.*

Доказательство очевидно.

Можно и непосредственно показать, что определитель Вронского может обращаться в нуль лишь сразу на всем отрезке $[a, b]$. Для этого продифференцируем определитель Вронского $W(t)$, пользуясь правилом дифференцирования определителя:

$$\dot{W} = W_1 + \dots + W_n,$$

где W_k ($k = 1, \dots, n$) — определитель, отличающийся от W k -й строкой; вместо строки $x_1^k, \dots, x_n^k$ в нем стоит строка из производных $\dot{x}_1^k, \dots, \dot{x}_n^k$.

$$W_k = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \\ \dot{x}_1^k & \dots & \dot{x}_n^k \\ x_1^{k+1} & \dots & x_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Но в силу (3)

$$\dot{x}_1^k = \sum_{j=1}^n f_j^k(t) x_1^j, \dots, \dot{x}_n^k = \sum_{j=1}^n f_j^k(t) x_n^j, \quad (12)$$

т. е. k -я строка определителя W_k есть линейная комбинация строк самого определителя W . Вычитая из k -й строки определителя W_k линейную комбинацию первой, $\dots$, $(k-1)$ -й, $(k+1)$ -й, $\dots$, n -й строк с

коэффициентами $f_1^k(t), \dots, f_{k-1}^k(t), f_{k+1}^k(t), \dots, f_n^k(t)$ соответственно, получим, в силу (12),

$$W_k = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \\ f_k^k x_1^k & \dots & f_k^k x_n^k \\ x_1^{k+1} & \dots & x_n^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = f_k^k W.$$

Поэтому

$$\dot{W} = S(t) W, \quad (13)$$

где

$$S(t) = \sum_{k=1}^n f_k^k(t).$$

Функция $S(t)$ называется *следом матрицы* $F(t)$ и обозначается $\text{Tr } F(t)$.

Решая уравнение (13), как уравнение с разделяющимися переменными, получим формулу

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t S(\tau) d\tau},$$

которая называется *формулой Лиувилля*.

Из этой формулы следует, что если $W(t_0) = 0$ в некоторой точке t_0 , то $W(t) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Решая уравнение (13) методом разделения переменных:

$$\frac{dW}{W} = S(t)$$

и т. д., мы предполагаем, что $W(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Однако формула Лиувилля дает все решения уравнения (13), так как ее правая часть является решением при любом $W(t_0)$ (в частности, при $W(t_0) = 0$), а в силу теоремы 5 любое решение (13) однозначно определяется значением $W(t_0)$.

С л е д с т в и е 2. Любое решение $x(t)$ однородной системы уравнений есть линейная комбинация

решений фундаментальной системы решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

В самом деле, в точке t_0 вектор $x(t_0)$ можно записать как линейную комбинацию векторов $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$:

$$x(t_0) = c^1 x_1(t_0) + \dots + c^n x_n(t_0). \quad (14)$$

Рассмотрим два решения однородной системы уравнений (3) $x(t)$ и $c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t)$. В силу (14) эти два решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию при $t = t_0$. Следовательно, по теореме 5

$$x(t) = c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t)$$

при всех $t \in [a, b]$. Следствие 2 доказано.

Определение 4. *Общим решением* линейной системы уравнений (2) называется множество всех решений этой системы.

Теорема 8. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений однородной системы уравнений (3), тогда формула

$$x(t) = c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t), \quad (15)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — произвольные постоянные, дает общее решение этой системы. Множество всех решений однородной системы уравнений (3) образует n -мерное векторное пространство, базисом которого может служить любая фундаментальная система решений.

Доказательство. При любых $c^1, \dots, c^n$ формула (15) представляет собой решение однородной системы уравнений (3), а в силу следствия 2 любое решение системы уравнений (3) может быть записано в виде (15). Поэтому формула (15) дает общее решение системы уравнений (3). Сумма двух решений однородной системы уравнений (3) и произведение решения системы уравнений (3) на число есть снова решения этой системы. Кроме того, любая фундаментальная система решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ линейно независима и любое решение через нее линейно выражается. Следовательно, множество всех решений однородной системы уравнений (3) образует

n -мерное векторное пространство, базисом которого может служить любая фундаментальная система решений. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из теоремы существования (которая будет приведена в гл. 3) следует, что для любой однородной системы уравнений фундаментальная система решений всегда существует. Для ее построения достаточно задать произвольно n линейно независимых векторов $a_1, \dots, a_n$ и рассмотреть решения $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) однородной системы, удовлетворяющие условиям $x_i(t_0) = a_i$. В силу теоремы 7 система решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$ будет фундаментальной.

С л е д с т в и е. Пусть $x_0(t)$ — частное решение неоднородной системы уравнений (2), а $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений однородной системы уравнений (3), тогда формула

$$x(t) = x_0(t) + c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t), \quad (16)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — произвольные постоянные, дает общее решение неоднородной системы уравнений (2).

В самом деле, при любых $c^1, \dots, c^n$ формула (16) представляет собой решение системы уравнений (2). Наоборот, если $x(t)$ — какое-либо решение системы уравнений (2), то $x(t) - x_0(t)$ — решение однородной системы уравнений (3) и по теореме 8 может быть записано в виде

$$x(t) - x_0(t) = c^1 x_1(t) + \dots + c^n x_n(t).$$

Следовательно, любое решение $x(t)$ системы уравнений (2) представляется в виде (16). Следствие доказано.

Сейчас мы покажем, что интегрирование неоднородной системы (2) сводится к нахождению фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы (3). Именно, будет доказана следующая.

Теорема 9. Пусть на отрезке $[a, b]$ матрица $F(t)$ и вектор $g(t)$ непрерывны и пусть известна фундаментальная система решений для однородной системы уравнений (3). Тогда общее решение неоднородной системы уравнений (2) находится с помощью квадратур.

Доказательство. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений для уравнения (3), тогда

$$\dot{x}_i = F(t) x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

или, в матричной форме,

$$\dot{X}(t) = F(t) X(t), \quad (17)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_n^1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n(t) & \dots & x_n^n(t) \end{bmatrix}$$

— матрица, называемая *фундаментальной матрицей* системы уравнений (3). Определитель $|X(t)|$ фундаментальной матрицы есть, очевидно, определитель Вронского и потому отличен от нуля на отрезке $[a, b]$:

$$|X(t)| \neq 0.$$

Будем искать решение системы уравнений (2) в виде

$$x(t) = c^1(t) x_1(t) + \dots + c^n(t) x_n(t) = X(t) c(t), \quad (18)$$

где

$$c(t) = \{c^1(t), \dots, c^n(t)\}.$$

Подставляя выражение (18) в (2), получим

$$\dot{X}(t) c(t) + X(t) \dot{c}(t) = F(t) X(t) c(t) + g(t). \quad (19)$$

В силу (17) уравнение (19) примет вид

$$X(t) \dot{c}(t) = g(t). \quad (20)$$

Так как $|X(t)| \neq 0$ и матрица $X(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует непрерывная на $[a, b]$ обратная матрица $X^{-1}(t)$.

Умножая обе части уравнения (20) слева на $X^{-1}(t)$, получим

$$\dot{c}(t) = X^{-1}(t) g(t),$$

откуда

$$c(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau + c_0, \quad (21)$$

где $\mathbf{c}_0 = \{c_0^1, \dots, c_0^n\}$ — произвольный постоянный вектор. Подставляя найденное выражение (21) для $\mathbf{c}(t)$ в формулу (18), получим

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \mathbf{c}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Докажем, что формула (22) дает общее решение неоднородной системы уравнений (2).

Так как $\mathbf{c}_0$ — произвольный постоянный вектор, то, выбирая $\mathbf{c}_0 = 0$, получим частное решение

$$\mathbf{x}_0(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau$$

системы уравнений (2). С другой стороны,

$$X(t) \mathbf{c}_0 = c_0^1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_0^n \mathbf{x}_n(t),$$

и формулу (22) можно переписать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + c_0^1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_0^n \mathbf{x}_n(t). \quad (23)$$

В силу следствия из теоремы 8 формула (23), а следовательно и (22), дает общее решение неоднородной системы уравнений (2).

Покажем, как с помощью формулы (22) решается задача Коши для системы (2). Пусть ищется решение $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Полагая в формуле (22) $t = t_0$, получим

$$\mathbf{x}_0 = X(t_0) \mathbf{c}_0,$$

откуда

$$\mathbf{c}_0 = X^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0.$$

Таким образом, решение задачи Коши для системы (2) задается формулой

$$\mathbf{x}(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau.$$

Метод нахождения решения системы (2), использованный при доказательстве теоремы 9, называется *методом вариации постоянных* или *методом неопределенных коэффициентов Лагранжа*.

Этот метод уже был раньше использован при решении одного линейного уравнения первого порядка.

Практически удобно поступать следующим образом:

Уравнение (20) в развернутом виде представляет собой систему линейных уравнений относительно $\dot{c}^i(t)$:

$$x_1^1(t) \dot{c}^1(t) + \dots + x_n^1(t) \dot{c}^n(t) = g^1(t),$$

$$x_1^2(t) \dot{c}^1(t) + \dots + x_n^2(t) \dot{c}^n(t) = g^2(t),$$

$$\overset{\cdot}{x}_1^n(t) \overset{\cdot}{c}^1(t) + \dots + \overset{\cdot}{x}_n^n(t) \overset{\cdot}{c}^n(t) = g^n(t).$$

Решая эту систему относительно $\dot{c}^i(t)$ ($i=1, \dots, n$), получим $\dot{c}^i(t) = \varphi^i(t)$ или

$$c^i(t) = \int_{t_0}^t \varphi^i(\tau) d\tau + c_0^i.$$

Подставляя найденные выражения для $c^i(t)$ в (18), получим общее решение для системы (2).

Теорема 10. *Фундаментальная система решений однозначно определяет нормальную форму линейной однородной системы, т. е. матрицу $F(t)$. Иначе говоря, зная фундаментальную матрицу $X(t)$ системы, можно однозначно восстановить эту систему уравнений.*

Доказательство. Пусть задана фундаментальная матрица $X(t)$ однородной системы (3). Тогда в соответствии с (17)

$$\dot{X}(t) = F(t) X(t). \quad (24)$$

Умножая соотношение (24) справа на $X^{-1}(t)$, получим

$$F(t) = \dot{X}(t) X^{-1}(t). \quad (25)$$

Формула (25) однозначно определяет матрицу $F(t)$.
Теорема доказана.

Замечание. Общее решение неоднородной системы (2) однозначно определяет эту систему. В са-

мом деле, по фундаментальной матрице решений однородной системы определяется матрица $F(t)$. Выбирая какое-нибудь частное решение $x(t)$ системы (2), находим вектор $g(t) = \dot{x} - F(t)x$.

Поставим теперь вопрос о степени гладкости решения линейной неоднородной системы (2). По определению решение $x = x(t)$ является дифференцируемой вектор-функцией переменного t на всем отрезке $[a, b]$.

Может случиться, что решение обладает большей гладкостью.

Теорема 11. Пусть матрица $F(t)$ и вектор $g(t)$ обладают на отрезке $[a, b]$ k первыми производными. Тогда любое решение $x = x(t)$ системы уравнений (2) обладает $(k+1)$ первыми производными.

Доказательство. Так как $x(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то в правой части системы (2) при $k \geq 1$ стоит дифференцируемая вектор-функция. Поэтому $\ddot{x} = F(t)\dot{x} + \dot{F}(t)x + \dot{g}(t)$. Если $k \geq 2$, то в правой части снова стоит дифференцируемая вектор-функция и потому $\ddot{x}$ существует. Повторяя это рассуждение k раз, получим утверждение теоремы.

Замечание. Если матрица $F(t)$ и вектор $g(t)$ бесконечно дифференцируемы, т. е. имеют на $[a, b]$ производные всех порядков, то из доказанной теоремы следует, что и любое решение системы (2) бесконечно дифференцируемо.

§ 2. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \quad (1)$$

Действительные функции $a_1(t), \dots, a_n(t), g(t)$ предполагаются определенными на некотором отрезке $[a, b]$.

Введем функции $x^1 = y(t), \dots, x^n = y^{(n-1)}(t)$ (см. гл. 1, § 1). Легко видеть, что они удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных

Предположим, что функции $a_1(t), \dots, a_n(t), g(t)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$. При этих условиях существование решения задачи Коши для уравнения (1) при любом выборе начальных данных обеспечивается теоремой существования, которая будет доказана в гл. 3. Единственность решения задачи Коши вытекает из соответствующего предложения, относящегося к системам линейных уравнений (см. § 1, теорема 5). В самом деле, если бы при некоторых начальных данных существовали два различных решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ задачи Коши для уравнения (1), система уравнений (3) имела бы два различных решения $x_1^1 = y_1(t), x_1^2 = y_1'(t), \dots, x_1^n = y_1^{(n-1)}(t)$ и $x_2^1 = y_2(t), x_2^2 = y_2'(t), \dots, x_2^n = y_2^{(n-1)}(t)$, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, что невозможно.

Для уравнения (1) имеют место свойства, аналогичные свойствам, доказанным в теоремах 6, 7 (и следствиях из них) § 1, если ввести следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. Решения $y_1(t), \dots, y_m(t)$ однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (5)$$

называются *линейно независимыми на отрезке $[a, b]$* , если в каждой точке $t \in [a, b]$ векторы

$$\{y_1(t), \dots, y_1^{(n-1)}(t)\}, \dots, \{y_m(t), \dots, y_m^{(n-1)}(t)\}$$

линейно независимы.

О п р е д е л е н и е 2. *Определителем Вронского системы n решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$ уравнения (5) называется определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (6)$$

О п р е д е л е н и е 3. Система из n решений уравнения (5), линейно независимых на отрезке $[a, b]$, называется *фундаментальной*.

Для определителя Вронского имеет место формула Остроградского — Лиувилля

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau},$$

которая получается из формулы Лиувилля для однородной системы $\dot{x} = F(t)x$, если заметить, что по столбцам определителя Вронского стоят решения этой системы, а

$$S(t) = -a_1(t)$$

в силу (3).

Теорема (метод вариации постоянных для уравнения (1)). Пусть $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (5). Тогда

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c^i(t) y_i(t)$$

— решение неоднородного уравнения (1), если функции $c^i(t)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{c}^1(t) y_1(t) + \dots + \dot{c}^n(t) y_n(t) &= 0, \\ \dots & \\ \dot{c}^1(t) y_1^{(n-2)}(t) + \dots + \dot{c}^n(t) y_n^{(n-2)}(t) &= 0, \\ \dot{c}^1(t) y_1^{(n-1)}(t) + \dots + \dot{c}^n(t) y_n^{(n-1)}(t) &= g(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Система (7) однозначно разрешима относительно $\dot{c}^i(t)$, так как определитель этой системы есть определитель Вронского $W(t) \neq 0$. В силу определения 1, вектор-функции

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \{y_1(t), y_1'(t), \dots, y_1^{(n-1)}(t)\}, \\ \dots & \\ x_n(t) &= \{y_n(t), y_n'(t), \dots, y_n^{(n-1)}(t)\} \end{aligned} \quad (8)$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\dot{x} = F(t)x.$$

Как было показано в § 1, если $\dot{c}^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют уравнениям (7), то

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c^i(t) x_i(t) \quad (9)$$

типа (5), общее решение которого, как известно, имеет вид

$$x^i = \tilde{x}^i(t) \equiv x_0^i(t) + c^{i1}x_1^i(t) + \dots + c^{im_i}x_{m_i}^i(t), \quad (6)$$

где $x_1^i(t), \dots, x_{m_i}^i(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения типа (5). Однако это не означает, что в качестве решения $x = x(t)$ системы уравнений (1) можно выбрать вектор $\{\tilde{x}^1(t), \dots, \tilde{x}^n(t)\}$, где $\tilde{x}^i(t)$ — функции, определенные равенствами (6), а $c^{i1}, \dots, c^{im_i}$ — произвольные постоянные. В самом деле, каждое из уравнений системы (2) показывает, что функции $\tilde{x}^1(t), \dots, \tilde{x}^n(t)$ связаны между собой дифференциальными соотношениями и, следовательно, не являются произвольными решениями своих уравнений типа (5).

Для того чтобы из множества вектор-функций, определяемых формулами (6), выделить решения системы уравнений (1), нужно подставить их в систему уравнений (2). Потребовав, чтобы полученные в результате подстановки равенства были тождествами по t ($t \in [a, b]$), мы придем, очевидно, к системе линейных алгебраических уравнений относительно $c^{i1}, \dots, c^{im_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Найдя общее решение этой линейной системы уравнений и подставив его в (6), получим общее решение системы уравнений (1).

З а м е ч а н и е. Как было показано в § 1, общее решение системы дифференциальных уравнений (6) зависит от n произвольных постоянных. Поэтому система линейных алгебраических уравнений относительно $c^{i1}, \dots, c^{im_i}$ ($i = 1, \dots, n$) будет совместной и ее общее решение зависит от n произвольных постоянных.

Описанный здесь способ решения системы линейных дифференциальных уравнений (1) называется *методом исключения*.

§ 4. Приемы, упрощающие решение линейных дифференциальных уравнений

Укажем некоторые частные случаи, когда решение дифференциальных уравнений либо упрощается, либо сводится к квадратурам.

1. Рассмотрим линейное однородное уравнение n -го порядка

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \dots + a_n(t) x = 0. \quad (1)$$

Предположим, что известно частное решение $x = \varphi(t)$ этого уравнения, отличное от нуля на рассматриваемом отрезке $a \leq t \leq b$. Сделаем замену переменных

$$x = y \varphi(t).$$

Тогда получим следующее уравнение для y :

$$\begin{aligned} \varphi(t) y^{(n)} + b_1(t) y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(t) \dot{y} + \\ + (\varphi^{(n)} + a_1 \varphi^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi) y = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее слагаемое в (2) равно нулю, так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (1). Обозначая $\dot{y} = z$, получим линейное однородное уравнение $(n-1)$ -го порядка ($\varphi(t) \neq 0$):

$$\varphi(t) z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(t) z = 0.$$

2. Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений

$$\dot{x} = F(t) x + g(t) \quad (3)$$

с диагональной матрицей

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1^1(t) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_n^n(t) \end{bmatrix}.$$

В этом случае система распадается на n линейных уравнений первого порядка

$$\dot{x}^i = f_i^i(t) x^i + g^i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

и потому интегрируется в квадратурах.

3. Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений (3) с треугольной матрицей

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1^1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_1^2(t) & f_2^2(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n(t) & f_2^n(t) & f_3^n(t) & \dots & f_n^n(t) \end{bmatrix}.$$

В этом случае интегрирование системы (3) также сводится к квадратурам. В самом деле, первое уравнение системы

$$\dot{x}^1 = f_1^1(t) x^1 + g^1(t) \quad (4)$$

— линейное уравнение с одной неизвестной функцией x^1 , и его решения находятся с помощью квадратур. Второе уравнение системы, записанное в виде

$$\dot{x}^2 = f_2^2(t) x^2 + [g^2(t) + f_1^2(t) x^1(t)],$$

— также линейное уравнение относительно функции x^2 (функция $x^1(t)$ найдена из (4)) и т. д. Последовательно решая получающиеся линейные уравнения, мы получим решение системы уравнений (3) с треугольной матрицей $F(t)$.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с комплексными коэффициентами

Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}^j = \sum_{k=1}^n f_k^j(t) z^k + g^j(t) \quad (j=1, \dots, n), \quad (1)$$

где $f_k^j(t)$, $g^j(t)$ — комплексные функции действительного переменного t , непрерывные при $a \leq t \leq b$.

Решением системы (1) называется набор n комплексных функций $z^j = x^j(t) + iy^j(t)$, определенных при $a \leq t \leq b$, подстановка которых в систему (1) обращает ее в тождество.

Рассмотрим следующую задачу: заданы точка $t_0 \in [a, b]$ и n комплексных чисел z_0^j ($j=1, \dots, n$); требуется найти решение $z^j = z^j(t)$ ($j=1, \dots, n$) системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее условиям

$$z^j(t_0) = z_0^j \quad (j=1, \dots, n). \quad (2)$$

Сформулированная задача называется *задачей Коши*.

Покажем, что решение задачи Коши для системы уравнений (1) единственно.

В самом деле, пусть $z_0^j = x_0^j + iy_0^j$, а $z^j(t) = x^j(t) + iy^j(t)$ — решение задачи Коши для системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям (2). Представив комплексные функции $g^j(t)$ и $f_k^j(t)$ в виде

$$f_k^j(t) = u_k^j(t) + iv_k^j(t), \quad g^j(t) = w^j(t) + is^j(t)$$

и подставив эти выражения в уравнения (1), мы обнаружим, что вещественные функции $x^j(t)$ и $y^j(t)$ удовлетворяют следующей действительной системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= \sum_{k=1}^n (u_k^j(t) x^k - v_k^j(t) y^k) + w^j(t), \\ \dot{y}^j &= \sum_{k=1}^n (v_k^j(t) x^k + u_k^j(t) y^k) + s^j(t) \end{aligned} \quad (3)$$

и начальным условиям

$$x^j(t_0) = x_0^j, \quad y^j(t_0) = y_0^j.$$

Но для вещественной системы уравнений (3) задача Коши с начальными условиями $x^j(t_0) = x_0^j$, $y^j(t_0) = y_0^j$ имеет единственное решение. Поэтому решение задачи Коши для комплексной системы уравнений (1) единственно.

З а м е ч а н и е. Существование решения задачи Коши для системы (1) следует из существования решения задачи Коши для системы (3), что, в свою очередь, следует из теоремы существования (см. гл. 3).

Нетрудно проверить, что для систем линейных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами справедливы все теоремы § 1, если ввести следующее

О п р е д е л е н и е. Решения $z_1(t), \dots, z_m(t)$ однородной системы

$$\dot{z} = F(t)z,$$

где $F(t) = (f_{ij}^j(t))$, называются *линейно независимыми* на отрезке $[a, b]$, если в каждой точке $t \in [a, b]$, векторы $z_1(t), \dots, z_m(t)$ линейно независимы как векторы *комплексного* векторного пространства. (См. Дополнение, § 1.)

Все остальные определения остаются без изменений. В формулировке теоремы 8 постоянные $c^1, \dots, c^n$ следует считать комплексными.

Точно так же все результаты § 2 остаются верными и для уравнения n -го порядка

$$z^{(n)} + a_1(t) z^{(n-1)} + \dots + a_n(t) z = g(t)$$

с комплексными коэффициентами $a_1(t), \dots, a_n(t)$, $g(t)$, если ввести следующее

Определение. Решения $z_1(t), \dots, z_m(t)$ однородного уравнения

$$z^{(n)} + a_1(t) z^{(n-1)} + \dots + a_n(t) z = 0$$

называются *линейно независимыми* на отрезке $[a, b]$, если в каждой точке $t \in [a, b]$, векторы

$$\{z_1(t), \dots, z_1^{(n-1)}(t)\}, \dots, \{z_m(t), \dots, z_m^{(n-1)}(t)\}$$

линейно независимы как векторы *комплексного* векторного пространства.

§ 6. Преобразование линейных систем дифференциальных уравнений. Преобразование линейной системы с постоянной матрицей к линейной системе с треугольной матрицей

Мы рассмотрим такие преобразования линейных систем дифференциальных уравнений, при которых линейная система

$$\dot{z} = F(t)z + g(t) \quad (1)$$

снова переходит в линейную систему. Здесь $F(t)$ — комплексная квадратная матрица порядка n , а $g(t)$ — комплексная вектор-функция.

Введем вместо $z^1, \dots, z^n$ новые неизвестные функции $w^1, \dots, w^n$ посредством линейного преобразования

$$z^j = \sum_{k=1}^n r_k^j(t) w^k \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

$$|r_k^j(t)| \neq 0,$$

которое в матричной форме имеет вид

$$z = R(t)w, \quad (3)$$

где

$$R(t) = (r_k^j(t)).$$

Функции $r_k^j(t)$ ($j, k = 1, \dots, n$) будем предполагать дифференцируемыми.

Подставляя выражение (3) в (1), получим

$$\dot{R}(t) \boldsymbol{w} + R(t) \dot{\boldsymbol{w}} = F(t) R(t) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{g}(t). \quad (4)$$

Так как преобразование (2) — невырожденное, то для $R(t)$ существует обратная матрица $R^{-1}(t)$. Умножив обе части равенства (4) на $R^{-1}(t)$ слева, получим

$$\dot{\boldsymbol{w}} = G(t) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{h}(t), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G(t) &= R^{-1}(t) F(t) R(t) - R^{-1}(t) \dot{R}(t), \\ \boldsymbol{h}(t) &= R^{-1}(t) \boldsymbol{g}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, при линейном невырожденном преобразовании (2) линейная система (1) снова переходит в линейную систему (5).

Зная решение $\boldsymbol{w}(t)$ системы (5), можно сразу написать (в силу (3)) соответствующее решение системы (1):

$$\boldsymbol{z}(t) = R(t) \boldsymbol{w}(t).$$

Попытаемся найти такое невырожденное преобразование (3), чтобы преобразованная система уравнений (5) интегрировалась более просто.

Как было показано в § 4, система (5) легко интегрируется, если $G(t)$ — треугольная матрица.

Для сведения системы (1) к системе (5) с треугольной матрицей $G(t)$ необходимо найти невырожденную матрицу $R(t)$ из уравнения

$$R^{-1}(t) F(t) R(t) - R^{-1}(t) \dot{R}(t) = G(t),$$

или, после умножения на $R(t)$ слева,

$$\dot{R}(t) = F(t) R(t) - R(t) G(t). \quad (7)$$

В общем случае отыскание $R(t)$ из матричного уравнения (7) — задача не более легкая, чем интегрирование исходной системы (1). Однако, если

$F(t)$ — постоянная матрица, которую мы обозначим A , то, как показано в § 1 дополнения, существует подобная ей треугольная матрица B , т. е. можно указать такую постоянную невырожденную матрицу R , что $B = R^{-1}AR$ — треугольная матрица. К рассмотрению этого важного частного случая мы сейчас и переходим.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{z} = Az + g(t) \quad (8)$$

с постоянной комплексной матрицей A .

При невырожденном преобразовании

$$z = R w \quad (|R| \neq 0) \quad (9)$$

(R — постоянная комплексная матрица) в силу соотношений (5), (6) система (8) переходит в систему

$$\dot{w} = B w + h(t) \quad (B = R^{-1}AR, h = R^{-1}g) \quad (10)$$

с постоянной матрицей B . Подберем матрицу R так, чтобы матрица B была треугольной. Тогда интегрирование системы уравнений (8) сведется к интегрированию системы уравнений (10) с треугольной матрицей, которая уже легко интегрируется.

Отметим здесь один важный частный случай, когда у матрицы A существуют n линейно независимых собственных векторов $r_1, \dots, r_n$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно:

$$A r_j = \lambda_j r_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Пусть

$$r_j = \{r_j^1, \dots, r_j^n\} \quad (j = 1, \dots, n)$$

и

$$R = (r_j^k),$$

тогда, очевидно,

$$R e_j = r_j, \quad (12)$$

где $e_j = \{\delta_j^1, \dots, \delta_j^n\}$ — единичные векторы, а

$$\delta_j^k = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу $B = R^{-1}AR$. Используя равенства (11) и (12), получим

$Be_j = R^{-1}A(Re_j) = R^{-1}Ar_j = R^{-1}(\lambda_j r_j) = \lambda_j R^{-1}Re_j = \lambda_j e_j$, т. е. матрица B имеет диагональный вид

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

причем на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A .

Итак, в рассматриваемом частном случае существует преобразование (9), переводящее систему уравнений (8) с постоянной матрицей в систему уравнений (10) с диагональной матрицей.

§ 7. Структура решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть

$$\dot{z} = Az \quad (1)$$

— однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Из результатов § 6 и теоремы 3 из § 1 дополнения следует, что существует невырожденное преобразование

$$z = R\omega,$$

переводящее систему (1) в систему уравнений

$$\dot{\omega} = B\omega \quad (2)$$

с треугольной матрицей $B = R^{-1}AR$ вида

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_s & & \\ \hline & & & & \lambda_{s+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{array} \right]. \quad (2')$$

Система уравнений (2) легко интегрируется. Нас будет интересовать структура произвольного решения системы уравнений (1).

Лемма. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \lambda x + f_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + f_q(t) e^{\lambda_q t}, \quad (3)$$

где λ — некоторое комплексное число, $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ — попарно различные комплексные числа, $f_1(t), \dots, f_q(t)$ — многочлены степени $k_1, \dots, k_q$ соответственно.

Если λ не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, то любое решение уравнения (3) имеет вид

$$x = c_0 e^{\lambda t} + g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + g_q(t) e^{\lambda_q t}, \quad (4)$$

где c_0 — постоянное, $g_1(t), \dots, g_q(t)$ — многочлены степени $k_1, \dots, k_q$ соответственно.

Если $\lambda = \lambda_1$, то любое решение уравнения (3) имеет вид

$$x = g_1(t) e^{\lambda_1 t} + g_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + g_q(t) e^{\lambda_q t}, \quad (5)$$

где $g_1(t)$ — некоторый многочлен степени $k_1 + 1$, $g_2(t), \dots, g_q(t)$ — многочлены степени $k_2, \dots, k_q$ соответственно.

Доказательство. Будем решать линейное уравнение (3) методом вариации постоянной. Пусть λ не равно ни одному из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Подставляя выражение

$$x = c(t) e^{\lambda t} \quad (6)$$

в уравнение (3), получим

$$\dot{c}(t) = f_1(t) e^{(\lambda_1 - \lambda)t} + \dots + f_q(t) e^{(\lambda_q - \lambda)t}$$

и

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t f_1(\tau) e^{(\lambda_1 - \lambda)\tau} d\tau + \dots + \int_{t_0}^t f_q(\tau) e^{(\lambda_q - \lambda)\tau} d\tau. \quad (7)$$

В силу сделанного предположения ни одно из чисел $\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_q - \lambda$ не равно нулю. Очевидно, в этом

случае каждый из интегралов в правой части формулы (7) имеет вид

$$\int_{t_0}^t f_j(\tau) e^{(\lambda_j - \lambda)\tau} d\tau = g_j(t) e^{(\lambda_j - \lambda)t}, \quad (8)$$

где $g_j(t)$ — многочлен степени k_j . (Чтобы в этом убедиться, достаточно применить к этим интегралам формулу интегрирования по частям.)

Подставив выражение (8) в формулу (7), а формулу (7) — в (6), получим

$$x = c_0 e^{\lambda t} + g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + g_q(t) e^{\lambda_q t}.$$

Первое утверждение леммы доказано.

Пусть $\lambda = \lambda_1$. Подставляя выражение

$$x = c(t) e^{\lambda_1 t} \quad (9)$$

в уравнение (3), получим

$$\dot{c}(t) = f_1(t) + f_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + f_q(t) e^{(\lambda_q - \lambda_1)t}$$

и

$$\begin{aligned} c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t f_1(\tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t f_2(\tau) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} d\tau + \dots + \int_{t_0}^t f_q(\tau) e^{(\lambda_q - \lambda_1)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, $c(t)$ имеет вид

$$c(t) = g_1(t) + g_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + g_q(t) e^{(\lambda_q - \lambda_1)t},$$

где $g_1(t)$ — многочлен степени $k_1 + 1$, а $g_2(t), \dots, g_q(t)$ — многочлены степеней $k_2, \dots, k_q$ соответственно.

Подставляя полученное выражение в формулу (9), получим формулу (5). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть матрица A имеет m различных собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_m$ и s ($s \geq m$) линейно независимых собственных векторов. Тогда любое решение однородной системы уравнений (1) имеет вид

$$z = f_1(t) e^{\mu_1 t} + \dots + f_m(t) e^{\mu_m t}, \quad (10)$$

Доказательство. В силу рассуждений, приведенных в начале этого параграфа, теорему 1 достаточно доказать для системы уравнений (2), полученной из системы (1) заменой переменных $z = R\omega$. Последнюю запишем подробно:

(11)

Отметим, что на главной диагонали матрицы (2') встречается только m различных собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_m$ ($m \leq n$). Кроме того, среди первых s элементов главной диагонали каждое собственное значение μ_j встречается столько раз, сколько линейно независимых собственных векторов соответствует этому собственному значению, т. е. l_j раз.

$$w^n = c^n e^{\lambda_n t}.$$
$$w^{n-1} = f_{n-1}^{n-1}(t) e^{\lambda_{n-1}t} + f_n^{n-1}(t) e^{\lambda_n t},$$

где $f_{n-1}^{n-1}(t)$ — многочлен нулевой степени, а $f_n^{n-1}(t)$ — многочлен нулевой степени или тождественно равный

нулю (если $b_n^{n-1} = 0$). Если же $\lambda_{n-1} = \lambda_n$, то

$$\omega^{n-1} = f_n^{n-1}(t) e^{\lambda_n t},$$

где $f_n^{n-1}(t)$ — многочлен степени ≤ 1 .

Переходя последовательно к ω^{n-2} , ω^{n-3} и т. д. и применяя лемму, приходим к выводу, что

$$\omega^{s+1} = f_1^{s+1}(t) e^{\mu_1 t} + \dots + f_m^{s+1}(t) e^{\mu_m t},$$

где $f_j^{s+1}(t)$ ($j = 1, \dots, m$) — многочлен степени $\leq k_j - l_j - 1$, так как среди элементов $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ главной диагонали μ_j встречается $k_j - l_j$ раз.

При $k = 1, \dots, s$ получим

$$\omega^k = f_1^k(t) e^{\mu_1 t} + \dots + f_m^k(t) e^{\mu_m t},$$

где $f_j^k(t)$ ($j = 1, \dots, m$) — многочлен, степень которого не превосходит $k_j - l_j$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Доказанная теорема позволяет решать однородную систему (1) следующим способом. Ищем решение в виде (10), где координаты вектор-функций

$$f_j(t) = \{f_j^1(t), \dots, f_j^n(t)\} \quad (j = 1, \dots, m)$$

записаны в виде многочленов соответствующих степеней с неопределенными коэффициентами. Подставляем выражение (10) в систему уравнений (1) и требуем, чтобы полученные соотношения выполнялись тождественно по t . В результате получим некоторую систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов, определяющих многочлены $f_j^k(t)$ ($k = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$). В силу доказанной теоремы, полученная система линейных однородных уравнений будет совместной, а ее решение будет зависеть от n произвольных постоянных (так как общее решение любой линейной системы дифференциальных уравнений зависит от n произвольных постоянных).

2. Если матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов r_j ($j = 1, \dots, n$) с собственными-

ми значениями μ_j (среди которых могут быть одинаковые), то любое решение системы (1) имеет вид

$$z = c^1 e^{\mu_1 t} r_1 + \dots + c^n e^{\mu_n t} r_n, \quad (12)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — произвольные постоянные.

Это следует из того, что каждое из слагаемых, входящих в формулу (12), является решением системы (1) и все эти решения линейно независимы.

3. Если матрица A системы уравнений (1) обладает эрмитовой симметрией (т. е. $A = \bar{A}'$)*, то любое решение этой системы имеет вид (12), поскольку у всякой эрмитово-симметрической матрицы n -го порядка существует n линейно независимых собственных векторов.

§ 8. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = F(t) \quad (1)$$

— линейное уравнение n -го порядка с постоянными комплексными коэффициентами

$$a_1, \dots, a_n;$$

$F(t)$ — комплексная функция переменного t , заданная на некотором промежутке. Левая часть уравнения (1) называется *линейным дифференциальным оператором порядка n* и обозначается $L[z]$. Само уравнение (1) можно записать так:

$$L[z] = F(t). \quad (2)$$

Вначале рассмотрим однородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Однородное уравнение.

Каждому оператору

$$L[z] = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z$$

или однородному уравнению

$$L[z] = 0 \quad (3)$$

*) $\bar{A}'$ — матрица, комплексно сопряженная с транспонированной матрицей A' .

поставим в соответствие многочлен

$$D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad (4)$$

который называется *характеристическим многочленом оператора* $L[z]$ или уравнения (3).

Лемма 1. Какова бы ни была n раз дифференцируемая функция $f(t)$, имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)] &= \\ &= e^{\lambda t} \left(D(\lambda) f + \frac{D'(\lambda)}{1!} f' + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} f^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $L[z] = z^{(k)}$ ($0 \leq k \leq n$), тогда $D(p) = p^k$ и поскольку $D^{(l)}(\lambda) = 0$ при $l > k$:

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)] &= \frac{d^k}{dt^k} (e^{\lambda t} f(t)) = \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} (e^{\lambda t}) \cdot f^{(l)}(t) = \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{k(k-1) \dots (k-l+1)}{l!} \lambda^{k-l} e^{\lambda t} f^{(l)}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} (\lambda^k) f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{l=0}^n \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t). \end{aligned}$$

(Здесь использована формула Лейбница для нахождения k -й производной произведения двух функций.)

Итак, формула (5) доказана для частного случая $L[z] = z^{(k)}$. Справедливость формулы (5) в общем случае следует из того, что линейный оператор $L[z]$ представляется в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов вида $L[z] = z^{(k)}$ ($0 \leq k \leq n$). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть λ — корень характеристического многочлена $D(p)$ кратности k , тогда функции

$$z_1 = e^{\lambda t}, \quad z_2 = t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad z_k = t^{k-1} e^{\lambda t}$$

являются решениями однородного уравнения (3).

Доказательство. Поскольку λ — корень характеристического многочлена кратности k , то

$$D(\lambda) = D'(\lambda) = \dots = D^{(k-1)}(\lambda) = 0, \quad D^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Применяя формулу (5) к функции $z_{j+1} = t^j e^{\lambda t}$ ($0 \leq j \leq k-1$), получим

$$L[z_{j+1}] = L[e^{\lambda t} t^j] = \\ = e^{\lambda t} \left(\frac{D^{(k)}(\lambda)}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^j) + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^j) \right) = 0,$$

так как $\frac{d^l}{dt^l} (t^j) = 0$ при $l > j$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $L[t^r e^{\lambda t}]|_{t=0} = 0$ при $r = 0, 1, \dots, k-1$. Тогда λ — корень характеристического многочлена, имеющий кратность, не меньшую k .

Доказательство. В силу леммы 1,

$$L[t^r e^{\lambda t}]|_{t=0} = \\ = e^{\lambda t} \left(D(\lambda) t^r + \frac{D'(\lambda)}{1!} \frac{d}{dt} (t^r) + \dots + \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} \frac{d^r}{dt^r} (t^r) \right) \Big|_{t=0},$$

так как $\frac{d^k}{dt^k} (t^r) = 0$ при $k > r$. Кроме того,

$$\frac{d^k}{dt^k} (t^r) \Big|_{t=0} = 0 \text{ при } k < r, \text{ поэтому}$$

$$L[t^r e^{\lambda t}]|_{t=0} = e^{\lambda t} \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} r(r-1) \dots 1 \Big|_{t=0} = D^{(r)}(\lambda) = 0 \\ (r = 0, 1, \dots, k-1).$$

Следовательно, λ является корнем характеристического многочлена кратности, не меньшей k . Лемма доказана.

Вернемся теперь к однородному уравнению (3). Пусть характеристический многочлен $D(p)$ имеет m ($m \leq n$) различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Обозначим через $k_1, \dots, k_m$ их кратности. В силу леммы 2, функции

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\lambda_1 t}, & z_2 &= t e^{\lambda_1 t}, \dots, & z_{k_1} &= t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} &= e^{\lambda_2 t}, & z_{k_1+2} &= t e^{\lambda_2 t}, \dots, & z_{k_1+k_2} &= t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}, \\ &\dots & & & & \dots \\ z_{k_1+\dots+k_{m-1}+1} &= e^{\lambda_m t}, \dots, & z_{k_1+\dots+k_m} &= t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{aligned} \quad (6)$$

будут решениями однородного уравнения (3). Поскольку $k_1 + \dots + k_m = n$, формулы (6) определяют n решений $z_j(t)$ уравнения (3).

Лемма 4. Если $z_1, \dots, z_n$ — функции, определяемые равенствами (6), то

$$\begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \dots & z_n(0) \\ z'_1(0) & z'_2(0) & \dots & z'_n(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \dots & z_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что определитель (7) равен нулю. Тогда между его строками существует линейная зависимость:

$$b_0 z_j^{(n-1)}(0) + b_1 z_j^{(n-2)}(0) + \dots + b_{n-1} z_j(0) = 0 \quad (8) \\ (j = 1, \dots, n),$$

где не все коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ равны нулю. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_1[z] = b_0 z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z.$$

Ему соответствует характеристический многочлен

$$D_1(p) = b_0 p^{n-1} + \dots + b_{n-1},$$

степень которого не превосходит $n - 1$.

Пусть $j = 1, 2, \dots, k_1$, тогда соотношения (8) можно записать в виде

$$L_1[z_j]|_{t=0} = 0 \quad (j = 1, \dots, k_1)$$

или

$$L_1[t^r e^{\lambda_1 t}]|_{t=0} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, k_1 - 1; r = j - 1).$$

В силу леммы 3 число λ_1 является корнем характеристического многочлена $D_1(p)$, имеющим кратность, не меньшую k_1 . Совершенно так же, выбирая $j = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$, докажем, что λ_2 — корень многочлена $D_1(p)$ кратности, не меньшей k_2 , и т. д., λ_m — корень многочлена $D_1(p)$ кратности, не меньшей k_m . Таким образом, придем к выводу, что многочлен $D_1(p)$ имеет не менее $k_1 + \dots + k_m = n$ корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность. Но это невозможно, поскольку степень много-

члена $D_1(p)$ не выше $n - 1$. Противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. Любое решение однородного уравнения (3) может быть представлено в виде

$$z(t) = c^1 z_1(t) + \dots + c^n z_n(t),$$

где $c^1, \dots, c^n$ — некоторые постоянные, а $z_1(t), \dots, z_n(t)$ — решения, определяемые формулами (6).

Доказательство. В силу леммы 4, решения $z_1(t), \dots, z_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений, а тогда любое решение $z(t)$ уравнения (3) является их линейной комбинацией. Теорема доказана.

Замечания. 1. Если характеристический многочлен уравнения (3) имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то любое решение уравнения (3) имеет вид

$$z(t) = c^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c^n e^{\lambda_n t}.$$

2. Любое решение уравнения (3) имеет вид

$$z(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — попарно различные корни многочлена $D(p)$ соответственно кратности $k_1, \dots, k_m$, а $f_1(t), \dots, f_m(t)$ — многочлены, степени которых не превосходят $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_m - 1$ соответственно.

Условимся называть *квазимногочленом* всякую функцию вида $\sum_j p_j(t) e^{a_j t}$, где a_j — постоянные, а $p_j(t)$ — многочлены.

II. Неоднородное уравнение с квазимногочленом в правой части.

Рассмотрим неоднородное уравнение (1), правая часть которого представляет собой квазимногочлен

$$F(t) = f_1(t) e^{\mu_1 t} + \dots + f_m(t) e^{\mu_m t}. \quad (9)$$

Из общих свойств линейных уравнений следует, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$z = z_0(t) + \sum_{j=1}^n c^j z_j(t),$$

где $z_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) — фундаментальная система решений однородного уравнения (3), определяемая формулами (6), c^j — постоянные, а $z_0(t)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (1).

Поэтому задача интегрирования уравнения (1) сводится к нахождению частного решения этого уравнения.

Пусть известны частные решения $z_{0k}(t)$ каждого из уравнений

$$L[z] = f_k(t) e^{\mu_k t} \quad (k = 1, \dots, m),$$

тогда

$$z_0(t) = z_{01}(t) + \dots + z_{0m}(t)$$

будет, очевидно, частным решением уравнения

$$L[z] = F(t),$$

где $F(t)$ — квазимногочлен, определяемый равенством (9).

Таким образом, для интегрирования уравнения (1) с квазимногочленом в правой части достаточно уметь находить частные решения для неоднородных уравнений вида

$$L[z] = g(t) e^{\mu t}, \quad (10)$$

где $g(t)$ — многочлен степени r .

Теорема 2. Если постоянная μ в правой части неоднородного линейного уравнения (10) не является корнем характеристического многочлена $D(p)$, то уравнение (10) имеет решение вида

$$z = f(t) e^{\mu t}, \quad (11)$$

где $f(t)$ — некоторый многочлен той же степени r , что и многочлен $g(t)$. Если же μ — корень кратности k характеристического многочлена $D(p)$, то уравнение (10) имеет решение вида

$$z = t^k f(t) e^{\mu t}, \quad (12)$$

где $f(t)$ — некоторый многочлен степени r .

Доказательство. Подставляя (11) или (12) в уравнение (10), получим для $f(t)$ уравнение

$$L[e^{\mu t} t^k f(t)] = e^{\mu t} g(t) \quad (13)$$

(если в (10) подставляется (11), то $k = 0$).

Запишем многочлен $g(t)$ в следующем виде:

$$g(t) = a_0 t^r + g_1(t), \quad (14)$$

где $a_0 t^r$ — старший член многочлена, а $g_1(t)$ — многочлен степени не выше $r-1$. Точно так же запишем

$$f(t) = b_0 t^r + f_1(t). \quad (15)$$

Степень многочлена $f_1(t)$ не превосходит $r-1$.

Подставив выражения (14), (15) в (13), получим

$$L[e^{\mu t} b_0 t^{k+r}] + L[e^{\mu t} f_1(t) \cdot t^k] = e^{\mu t} a_0 t^r + e^{\mu t} g_1(t). \quad (16)$$

По условию теоремы

$$D(\mu) = \dots = D^{(k-1)}(\mu) = 0; \quad D^{(k)}(\mu) \neq 0 \quad (D^{(0)}(p) \equiv D(p)).$$

В самом деле, эти равенства означают, что число μ не является корнем характеристического многочлена $D(p)$ при $k=0$ и что μ — корень кратности k при $k > 0$. Применяя к первому слагаемому формулы (16) лемму 1, получим

$$\begin{aligned} e^{\mu t} \left[b_0 \frac{D^{(k)}(\mu)}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^{k+r}) + b_0 \frac{D^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (t^{k+r}) + \dots \right. \\ \left. \dots + b_0 \frac{D^{(n)}(\mu)}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{k+r}) \right] + L[e^{\mu t} t^k f_1(t)] = \\ = e^{\mu t} a_0 t^r + e^{\mu t} g_1(t). \quad (17) \end{aligned}$$

Соотношение (17) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{\mu t} b_0 \frac{D^{(k)}(\mu)}{k!} (k+r) \dots (r+1) t^r + L[e^{\mu t} t^k f_1] = \\ = e^{\mu t} a_0 t^r + e^{\mu t} \left[g_1 - b_0 \frac{D^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (t^{k+r}) - \dots \right. \\ \left. \dots - b_0 \frac{D^{(n)}(\mu)}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{k+r}) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при r -х степенях переменной t , обнаружим, что

$$b_0 = \frac{k! a_0}{D^{(k)}(\mu) (k+r) \dots (1+r)},$$

а уравнение (18) принимает следующий вид:

$$L[e^{\mu t} t^k f_1] = e^{\mu t} \tilde{g}_1(t), \quad (19)$$

где $\tilde{g}_1(t)$ — многочлен, стоящий в квадратных скобках формулы (18). Теперь степени многочленов $f_1(t)$ и $\tilde{g}_1(t)$ не превосходят $r-1$. Таким образом, в результате приведенных выше вычислений найден старший коэффициент b_0 многочлена $f(t)$, а вместо уравнения (13) получено аналогичное уравнение (19), в котором степень многочленов $f_1(t)$ и $\tilde{g}_1(t)$ уменьшилась по крайней мере на единицу. Из уравнения (19) найдем старший коэффициент многочлена $f_1(t)$, т. е. второй коэффициент многочлена $f(t)$. Продолжая действовать таким образом, найдем последовательно все коэффициенты многочлена $f(t)$. Теорема доказана.

§ 9. Линейные системы и линейные дифференциальные уравнения с постоянными действительными коэффициентами

До сих пор мы рассматривали системы линейных дифференциальных уравнений и линейные уравнения n -го порядка с постоянными комплексными коэффициентами и искали их комплексные решения. Однако решение многих практически важных задач приводит к нахождению действительных функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с постоянными действительными коэффициентами. Развита до сих пор теория позволяет найти все комплексные решения этих уравнений. Среди них, в частности, находятся интересующие нас действительные решения. Таким образом, мы приходим к следующей задаче: из совокупности всех комплексных решений заданной линейной системы или линейного уравнения выделить все действительные решения.

В качестве примера рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами, т. е. систему

$$\dot{z} = Az, \quad (1)$$

где A — действительная матрица.

Теорема. Если $z(t)$ — решение системы уравнений (1), то

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t), \quad y(t) = \operatorname{Im} z(t)$$

также являются ее решениями.

Доказательство. Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплексное решение системы уравнений (1). Тогда

$$\dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = A(x(t) + iy(t)) = Ax(t) + iAy(t).$$

Так как A — действительная матрица, то $Ax(t)$ и $Ay(t)$ представляют собой действительные вектор-функции. Отсюда следует, что

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \dot{y}(t) = Ay(t),$$

т. е. $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ — решения системы уравнений (1). Теорема доказана.

Очевидно, что любое действительное решение $x(t)$ системы уравнений (1) можно представить в виде $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ (в качестве $z(t)$ достаточно взять саму вектор-функцию $x(t)$).

Аналогичная теорема имеет место и для линейного однородного уравнения n -го порядка с постоянными действительными коэффициентами.

Пример. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = e^{-t} \sin t. \quad (2)$$

Сначала найдем все комплексные решения уравнения (2), а потом выделим среди них действительные. Правая часть уравнения (2) представляет собой квазимногочлен

$$e^{-t} \sin t = \frac{1}{2i} e^{(-1+i)t} - \frac{1}{2i} e^{-(1+i)t}.$$

Для нахождения частного решения уравнения (2) достаточно найти частные решения z_1 и z_2 уравнений

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = \frac{1}{2i} e^{(-1+i)t}, \quad (3)$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = -\frac{1}{2i} e^{-(1+i)t} \quad (4)$$

соответственно.

Характеристический многочлен $p^2 + 2p + 2$ однородного уравнения

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = 0 \quad (5)$$

имеет следующие корни: $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$.

Общее решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$z = c^1 e^{(-1+i)t} + c^2 e^{-(1+i)t}.$$

Согласно теореме 2 § 8 частное решение неоднородного уравнения (3) нужно искать в виде

$$z_1 = t A e^{(-1+i)t} \quad (6)$$

(в этом случае $r = 0$, $k = 1$, A — постоянная — многочлен нулевой степени).

Подставляя выражение (6) в уравнение (3), получим $A = -1/4$. Таким образом,

$$z_1 = -\frac{1}{4} t e^{(-1+i)t}.$$

Точно так же находим частное решение уравнения (4)

$$z_2 = -\frac{1}{4} t e^{-(1+i)t}.$$

Сумма найденных решений уравнений (3) и (4)

$$z_1 + z_2 = -\frac{1}{4} t [e^{(-1+i)t} + e^{-(1+i)t}] = -\frac{1}{2} t e^{-t} \cos t \quad (7)$$

будет решением уравнения (2). Общее решение уравнения (2) получается как сумма частного решения (7) и общего решения однородного уравнения (5)

$$z = -\frac{1}{2} t e^{-t} \cos t + c^1 e^{(-1+i)t} + c^2 e^{-(1+i)t}. \quad (8)$$

Формула (8) содержит все комплексные решения уравнения (2). Выделим действительные решения. Положим $c^1 = a^1 + ib^1$, $c^2 = a^2 + ib^2$, тогда

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-t} \cos t + e^{-t} [(a^1 + a^2) \cos t + (b^2 - b^1) \sin t].$$

Обозначая $a^1 + a^2 = A$, $b^2 - b^1 = B$, получим

$$x(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t} \cos t + e^{-t} [A \cos t + B \sin t].$$

Эта формула задает все действительные решения уравнения (2), если A и B — действительные числа.

§ 10. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы более подробно рассмотрим свойства решений дифференциального уравнения второго порядка

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = f(t), \quad (1)$$

где m , η и k — вещественные постоянные, $f(t)$ — вещественная функция.

Дифференциальные уравнения вида (1) применяются при описании и изучении многих процессов в физике, механике, технике.

Мы ограничимся здесь лишь одной интерпретацией уравнения (1).

Если $m > 0$, $\eta \geq 0$, $k \geq 0$, это уравнение описывает прямолинейное движение материальной точки с массой m вдоль оси x под действием силы трения $-\eta\dot{x}$, упругой силы $-kx$ и внешней силы $f(t)$.

В самом деле, уравнение (1), переписанное в виде

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - kx + f(t),$$

представляет собой запись второго закона Ньютона, при этом $x(t)$ — координата материальной точки в момент времени t , $\dot{x}(t)$ — скорость точки, $\ddot{x}(t)$ — ее ускорение, η — коэффициент трения, k — коэффициент упругости.

Мы будем рассматривать уравнение (1) и в случаях, когда величины η и k отрицательны, так как этот случай также встречается в физических приложениях. Уравнение (1) часто называют *уравнением колебаний*.

Наиболее естественной задачей для уравнения (1) (в рассматриваемой интерпретации) является задача Коши, когда ищется решение $x(t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad (2)$$

где x_0 — начальное положение (отклонение) точки, а v_0 — ее начальная скорость.

В дальнейшем будем считать, что для определения решения заданы начальные условия (2).

Встречаются математические и физические задачи, в которых под независимым переменным t в уравнении (1) понимается не время, а координата вдоль некоторой оси. В этом случае уравнение второго порядка удобно записывать в других обозначениях:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x) \quad (3)$$

и понимать под x — координату точки на оси, а под $y(x)$ — значение некоторой физической величины в этой точке. В такой интерпретации для уравнения (3) часто ставят следующую задачу: найти решение $y = y(x)$, определенное при $x_1 \leq x \leq x_2$ и удовлетворяющее *краевым условиям*

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Некоторые сведения о краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка изложены в § 7 гл. 3. Здесь же мы будем рассматривать уравнение колебаний (1), понимая под независимым переменным t время.

I. Однородное уравнение второго порядка (свободные колебания).

В отсутствие внешней силы ($f(t) \equiv 0$) уравнение колебаний

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

описывает *свободные колебания* материальной точки под действием силы трения и упругой силы.

Характеристический многочлен $D(p) = mp^2 + \eta p + k$ однородного уравнения (4) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4mk}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4mk}}{2m}. \quad (5)$$

При $\eta^2 > 4mk$ корни характеристического многочлена вещественные и различные. Общее решение уравнения (4) (см. § 8) имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6)$$

где c_1 и c_2 — произвольные вещественные постоянные.

При $\eta^2 < 4mk$ корни характеристического многочлена комплексно сопряженные: $\lambda_1 = -\gamma + i\omega_1$, $\lambda_2 = -\gamma - i\omega_1$ ($\gamma = \eta/2m$, $\omega_1 = \sqrt{4mk - \eta^2}/2m$). Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t). \quad (7)$$

($e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$, $e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$ являются соответственно действительной и мнимой частью комплексного решения $e^{\lambda_1 t}$ (или $e^{\lambda_2 t}$).)

При $\eta^2 = 4mk$ характеристический многочлен имеет единственный вещественный корень: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}. \quad (8)$$

Заметим, что постоянные c_1 и c_2 в формулах (7), (8) вещественные.

Переходим к анализу поведения решений уравнения колебаний (4). Пусть $m > 0$, $\eta = 0$, $k > 0$, т. е. отсутствует трение, а упругая сила направлена в сторону положения равновесия $x = 0$. Решение уравнения (4) в рассматриваемом случае имеет вид (7) (при $\eta = 0$). Материальная точка совершает незатухающие колебания с частотой $\omega_0 =$

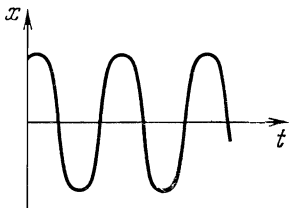


Рис. 2.

$= \sqrt{\frac{k}{m}}$. Амплитуда и фаза колебаний определяются из начальных условий (2). В процессе колебаний полная энергия $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ остается постоянной. (Это нетрудно проверить.) На рис. 2 показан график колебаний $x = x(t)$ для этого случая.

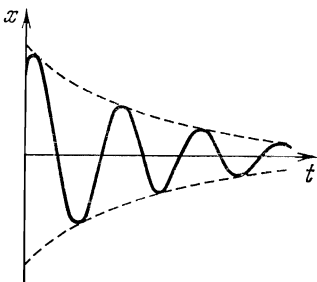


Рис. 3.

Пусть теперь $m > 0$, $\eta > 0$, $k > 0$, т. е. присутствует трение, а упругая сила направлена в сторону положения равновесия $x = 0$. При этих условиях, в зависимости от знака $\eta^2 - 4mk$, решение задается формулами (6), (7) или (8). Наличие трения приводит к затуханию колебаний, так как во всех трех случаях $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ и отклонение $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

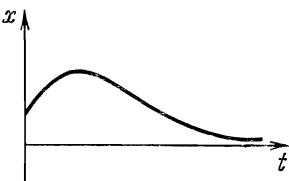


Рис. 4.

При небольшом трении ($\eta^2 < 4mk$) имеет место формула (7); график решения $x = x(t)$ представлен на рис. 3, где пунктиром показан амплитудный фактор $x = e^{-\gamma t} \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Иногда говорят, что затухание носит «периодический характер», так как решение $x = x(t)$ колеблется вокруг положения равновесия $x = 0$, причем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

При достаточно большом трении ($\eta^2 \geq 4mk$) имеют место формулы (6) или (8). В обоих случаях колебания затухают «аперiodически», как это показано на рис. 4. Решение $x = x(t)$ пересекает ось x не более одного раза, а при достаточно больших t стремление $x(t) \rightarrow 0$ монотонно.

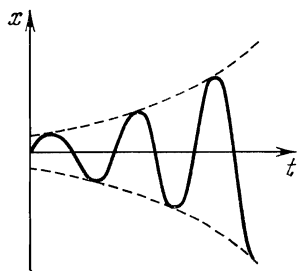


Рис. 5.

Итак, при наличии трения ($\eta > 0$) и $k > 0$ колебания всегда затухают и, как нетрудно проверить, энергия колебаний $E(t) = m \frac{\dot{x}^2}{2} + k \frac{x^2}{2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, как это и долж-

но быть вследствие потери энергии на трении. Эти потери выделяются в виде тепла.

Можно сказать, что при $\eta > 0$, $k > 0$ положение равновесия $x = 0$ устойчиво*), так как любое решение уравнения колебаний $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как при $\eta = 0$, $k > 0$ колебания сохраняют постоянную амплитуду, то отсюда следует, что трение оказывает стабилизирующее влияние на колебания.

Несколько слов о более редких случаях, когда $m > 0$, но $k < 0$ или $\eta < 0$ **).

Если $\eta < 0$, то в силу (5), действительная часть корня λ_1 положительна и при $c_1 \neq 0$ решение $x = x(t)$ неограничено при $t \rightarrow +\infty$ (см. формулы (6), (7), (8)). Один из возможных случаев изображен на

*) Более подробно вопросы устойчивости будут рассмотрены в гл. 5.

**) Уравнение (1) с $k < 0$ возникает, например, при рассмотрении отклонений материальной точки от положения неустойчивого равновесия.

рис. 5. Таким образом, «отрицательное трение» дестабилизирует положение равновесия $x = 0$.

Аналогичная картина имеет место и при $k < 0$, так как в этом случае $\lambda_1 > 0$ и при $c_1 \neq 0$ решение $x = x(t)$ неограничено (см. формулу (6)).

Можно сказать, что в последних двух случаях положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

II. Неоднородное уравнение второго порядка (вынужденные колебания).

Движения материальной точки, описываемые уравнением колебаний (1) при наличии внешней силы, называются *вынужденными колебаниями*.

Здесь мы рассмотрим лишь естественный случай $\eta \geq 0$, $k > 0$, $\eta^2 < 4mk$. Предположим, далее, что внешняя сила периодически зависит от времени:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (9)$$

где A , ω и α — некоторые постоянные.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения колебаний

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (10)$$

есть сумма общего решения однородного уравнения (4) (свободные колебания) и частного решения $x = x_0(t)$ неоднородного уравнения (10) (вынужденные колебания).

Решение $x = x_0(t)$ уравнения (10) будем искать в виде

$$x_0(t) = B \sin(\omega t + \beta), \quad (11)$$

где B и β — неизвестные пока постоянные.

Подставляя (11) в (10), получим соотношение для определения B и β :

$$\begin{aligned} B[(k - m\omega^2) \sin(\omega t + \beta) + \eta\omega \cos(\omega t + \beta)] = \\ = A \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя формулы сложения для тригонометрических функций, нетрудно проверить, что соотношение (12) выполняется тождественно (по t), когда

$$B = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}} \quad (13)$$

и α и β связаны равенствами

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}}, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}}\end{aligned}\quad (14)$$

(которые определяют β с точностью до целого кратного 2π).

При $\eta > 0$ и любом ω имеем $(k - m\omega^2)^2 + \eta^2\omega^2 > 0$, поэтому общее решение уравнения (10) для вынужденных колебаний имеет вид

$$x(t) = B \sin(\omega t + \beta) + e^{-\gamma t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t), \quad (15)$$

где B и β определены формулами (13), (14), $\gamma = \eta/2m$, $\omega_1 = \sqrt{4mk - \eta^2}/2m$, c_1 и c_2 — произвольные вещественные постоянные.

Распоряжаясь постоянными c_1 и c_2 , можно удовлетворить любым начальным условиям (2).

Очевидно, формула (15) дает решение уравнения (10) и в случае отсутствия трения ($\eta = 0$), если только $k \neq m\omega^2$, т. е. если частота ω внешней силы не совпадает с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ незатухающих свободных колебаний.

В этом последнем случае, когда $\eta = 0$ и $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, частное решение $x_0(t)$ уравнения (10) будем искать в виде:

$$x_0(t) = Bt \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (10) и учитывая, что $\eta = 0$, $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, получаем соотношение для определения B и β :

$$2m\omega_0 B \cos(\omega_0 t + \beta) = A \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

которое будет тождественно удовлетворено, если положить

$$B = \frac{A}{2m\omega_0}, \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (10) в случае, когда $\eta = 0$, $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ дается формулой

$$x(t) = \frac{At}{2m\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t. \quad (17)$$

Во всех остальных случаях общее решение уравнения (10) задается формулой (15).

Переходя к анализу вынужденных колебаний, рассмотрим сначала случай $\eta = 0$. Если при этом частота ω внешней силы совпадает с частотой ω_0 незатухающих свободных колебаний, то, как видно из формулы (17), амплитуда вынужденных колебаний (первое слагаемое в (17)) линейно растет с ростом t и может стать сколь угодно большой. Это явление называется *резонансом*; оно имеет очень большое значение в физике и технике. Для многих конструкций и приборов явление резонанса является вредным или даже разрушительным. Поэтому принимаются меры, чтобы избежать резонанса, т. е. совпадения частот ω и ω_0 .

Амплитуда вынужденных колебаний может быть очень большой и при $\omega \neq \omega_0$, если $|\omega - \omega_0|$ — малая величина. Это видно из формулы (13), в которой полагаем $\eta = 0$:

$$B = \frac{A}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \omega_0.$$

Явление *механического резонанса* возникает и при достаточно малом трении ($\sqrt{2km} > \eta > 0$). В самом деле, как нетрудно показать, амплитуда $B =$

$$= \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}}$$
 вынужденных колебаний достигает максимума $M_0(\eta) = \frac{2Am}{\eta\sqrt{4km - \eta^2}}$ при

$\omega = \sqrt{\frac{2km - \eta^2}{2m^2}}$. Очевидно, что при $\eta \rightarrow 0$ амплитуда $M_0(\eta) \rightarrow +\infty$; при этом $\omega \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$.

В заключение приведем пример решения задачи Коши для уравнения (10). Рассмотрим развитие вынужденных колебаний под действием внешней силы

(9) (в нерезонансном случае ($\omega \neq \omega_0$)), которая начинает действовать в момент времени $t_0 = 0$, а материальная точка при $t = 0$ находится в положении равновесия и обладает нулевой скоростью. Это значит, что мы ищем решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям (2) с $x_0 = v_0 = 0$, т. е.

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (18)$$

Сначала рассмотрим колебания без трения ($\eta = 0$). Тогда в силу формул (13), (14), (15) имеем: $\alpha = \beta$, $B = \frac{A}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$ и

$$x(t) = B \sin(\omega t + \alpha) + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Используя начальные условия (18), находим $c_1 = -B \sin \alpha$, $c_2 = -B \frac{\omega}{\omega_0} \cos \alpha$ и само решение

$$\begin{aligned} x(t) &= B \left[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha \cos \omega_0 t - \frac{\omega}{\omega_0} \cos \alpha \sin \omega_0 t \right] = \\ &= 2B \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t + \alpha \right) - \\ &\quad - B \frac{(\omega - \omega_0) \cos \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (19)$$

Если число $|\omega - \omega_0|$ достаточно мало, то первое слагаемое в (19) представляет собой гармоническое колебание с периодом $T_0 = \frac{4\pi}{\omega + \omega_0}$ и медленно меняющейся амплитудой

$$M(t) = 2B \left| \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \right| = \frac{2A}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left| \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \right|.$$

Амплитуда $M(t)$ изменяется от нуля до максимального значения $M_0 = \frac{2A}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$ периодически с периодом $T = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}$. Такие колебания называются *биениями*. Их график приведен на рис. 6.

Второе слагаемое в (19) представляет собой гармоническое колебание, амплитуда которого

$B \frac{|\omega - \omega_0| |\cos \alpha|}{\omega_0} = \frac{A |\cos \alpha|}{m \omega_0 (\omega + \omega_0)}$ при малом $|\omega - \omega_0|$ мала по сравнению с максимальной амплитудой M_0 биений.

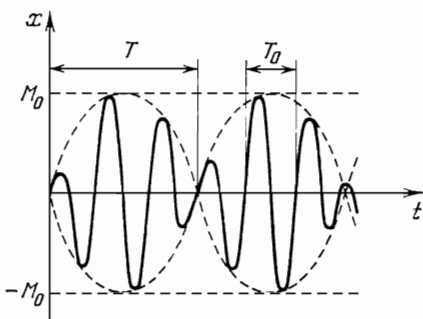


Рис. 6.

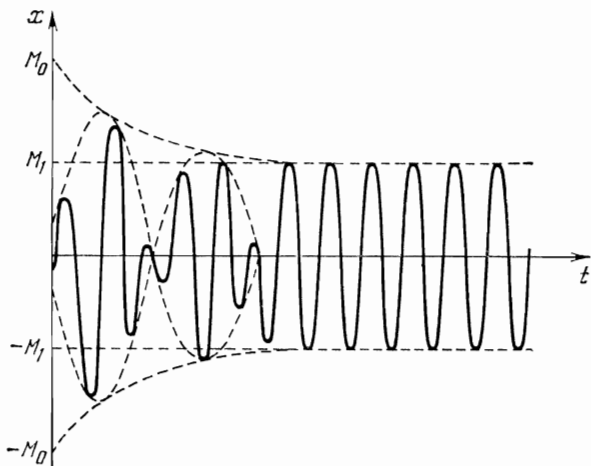


Рис. 7.

Аналогично (с более сложными выкладками) решается задача Коши (10), (18) и при наличии трения ($\eta > 0$). В этом случае второе слагаемое в формуле (15), т. е. свободные колебания, содержащие информацию о начальных условиях, затухают с ростом времени и устанавливаются вынужденные

колебания с частотой ω и амплитудой

$$M_1 = B = \frac{A}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} < \frac{M_0}{2}.$$

Процесс колебаний также начинается с биений, затем свободные колебания затухают и остаются лишь вынужденные колебания (рис. 7).

§ 11. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

I. Однородная линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = F(t)z \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (1)$$

где $F(t)$ — непрерывная периодическая матрица с периодом ω :

$$F(t + \omega) = F(t).$$

Пусть $z_1(t), \dots, z_n(t)$ — фундаментальная система решений для системы уравнений (1), определяемая начальными условиями

$$z_j(0) = e_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где $e_j = \{\delta_j^1, \dots, \delta_j^n\}$. Поскольку матрица $F(t)$ периодическая, функции $z_1(t + \omega), \dots, z_n(t + \omega)$ также образуют фундаментальную систему решений. В силу следствия 2 из теоремы 7 §1 каждая из функций $z_j(t + \omega)$ будет линейной комбинацией $z_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) с постоянными коэффициентами, поэтому

$$z_j(t + \omega) = \sum_{k=1}^n c_j^k z_k(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где c_j^k ($j, k = 1, \dots, n$) — постоянные. Последние соотношения можно записать в виде

$$Z(t + \omega) = Z(t)C, \quad (3)$$

где $Z(t)$ — фундаментальная матрица решений $z_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$), а $C = (c_j^k)$ — постоянная матрица.

В силу (1) и (2) матрица $Z(t)$ удовлетворяет условиям

$$\dot{Z} = F(t) Z, \quad Z(0) = E.$$

Полагая в равенстве (3) $t = 0$, получим

$$Z(\omega) = C.$$

Таким образом,

$$Z(t + \omega) = Z(t) Z(\omega). \quad (4)$$

Матрица $Z(\omega)$ называется *матрицей монодромии* системы уравнений (1). Очевидно, $|Z(\omega)| \neq 0$. Собственные значения матрицы $Z(\omega)$ называются *мультипликаторами системы уравнений* (1).

Отметим, что если матрица $F(t)$ действительная, то матрица монодромии также действительная, однако мультипликаторы будут, вообще говоря, комплексными числами.

Теорема 1. *Для того чтобы комплексное число ρ было мультипликатором системы уравнений (1), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое нетривиальное решение $\varphi(t)$ системы (1), для которого*

$$\varphi(t + \omega) = \rho \varphi(t). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть ρ — мультипликатор системы уравнений (1), тогда существует такой вектор $z_0 \neq 0$, что

$$Z(\omega) z_0 = \rho z_0.$$

Рассмотрим следующее нетривиальное решение системы уравнений (1):

$$\varphi(t) = Z(t) z_0.$$

В силу (4)

$$\begin{aligned} \varphi(t + \omega) &= Z(t + \omega) z_0 = Z(t) Z(\omega) z_0 = \\ &= Z(t) \rho z_0 = \rho Z(t) z_0 = \rho \varphi(t). \end{aligned}$$

Необходимость условия, сформулированного в теореме, доказана. Докажем достаточность. Из соотношения (5) при $t = 0$ получим

$$\varphi(\omega) = \rho \varphi(0). \quad (6)$$

В силу теоремы единственности

$$\varphi(t) = Z(t) \varphi(0), \quad (7)$$

причем $\varphi(0) \neq 0$, так как в противном случае решение $\varphi(t)$ было бы тривиальным. Из равенства (7) в силу (6) следует, что

$$Z(\omega) \varphi(0) = \varphi(\omega) = \rho \varphi(0).$$

Таким образом, $\varphi(0)$ — собственный вектор матрицы $Z(\omega)$, а ρ — мультипликатор системы уравнений (1). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает Следствие. *Линейная однородная система уравнений (1) имеет нетривиальное решение с периодом ω в том и только в том случае, когда один из ее мультипликаторов равен единице.*

З а м е ч а н и я. 1. Имеет место

Теорема Флоке. *Фундаментальная матрица $Z(t)$ допускает следующее представление:*

$$Z(t) = \Phi(t) e^{At *},$$

где $\Phi(t)$ — периодическая матрица с периодом ω , а A — постоянная матрица.

2. Легко видеть, что матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\dot{\Phi}(t) = F(t) \Phi(t) - \Phi(t) A,$$

откуда непосредственно следует, что замена переменных $z = \Phi(t) y$ переводит систему уравнений (1) в систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = Ay.$$

II. Неоднородная линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = F(t) z + g(t) \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (8)$$

*) Определение матрицы e^{At} см. на стр. 96.

где $F(t)$ — непрерывная периодическая матрица с периодом ω , $g(t)$ — непрерывная периодическая вектор-функция с периодом ω . Нас будут интересовать периодические решения этой системы уравнений с периодом ω .

Теорема 2. Пусть однородная система уравнений (1) (соответствующая неоднородной системе (8)) не имеет нетривиальных периодических решений с периодом ω (т. е. все ее мультипликаторы отличны от единицы). Тогда система уравнений (8) имеет единственное периодическое решение с периодом ω .

Доказательство. Как было показано ранее (см. § 1), любое решение системы уравнений (8) может быть представлено в виде

$$z(t) = Z(t) Z^{-1}(t_0) z_0 + Z(t) \int_{t_0}^t Z^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы уравнений (1). Выберем фундаментальную матрицу $Z(t)$ так, чтобы было

$$Z(0) = E.$$

В этом случае формула (9) примет вид (при $t_0 = 0$)

$$z(t) = Z(t) z_0 + Z(t) \int_0^t Z^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Потребуем, чтобы решение $z(t)$ имело период ω :

$$z(t + \omega) = z(t). \quad (11)$$

В частности, при $t = 0$

$$z(\omega) = z(0). \quad (12)$$

Оказывается, что если для некоторого решения $z(t)$ выполнено условие (12), то оно имеет период ω . В самом деле, $z(t + \omega)$ и $z(t)$ — два решения системы уравнений (8), удовлетворяющие в силу (12) одному и тому же начальному условию при $t = 0$. В силу теоремы единственности эти решения тождественно совпадают, т. е. имеет место соотношение (11). Таким образом, условие того, что решение $z(t)$

имеет период ω , можно записать в виде (12). В силу формулы (10) соотношение (12) примет вид

$$Z(\omega) z_0 + Z(\omega) \int_0^{\omega} Z^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau = z_0,$$

или

$$(Z(\omega) - E) z_0 = - Z(\omega) \int_0^{\omega} Z^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau. \quad (13)$$

По условию теоремы, все мультипликаторы системы (1) отличны от единицы. Поэтому $|Z(\omega) - E| \neq 0$ (характеристическое уравнение $|Z(\omega) - \rho E| = 0$ не имеет корня $\rho = 1$) и система уравнений (13) однозначно разрешима относительно z_0 .

Итак, единственное решение системы уравнений (8) с периодом ω определяется формулой (10) и найденным из (13) начальным значением z_0 . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае, когда однородная система уравнений (1) имеет нетривиальное периодическое решение с периодом ω , линейная неоднородная система уравнений (8) может или вообще не иметь периодических решений с периодом ω (если система уравнений (13) несовместна), или иметь несколько линейно независимых периодических решений с периодом ω (если система уравнений (13) имеет бесконечное множество решений).

Задачи

1. Пусть $y_1(t)$ — нетривиальное решение, а $y_2(t)$ — произвольное решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_1(t) \dot{y} + a_2(t) y = 0.$$

Используя формулу Остроградского — Лиувилля, доказать, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right) = \frac{c}{y_1^2(t)} e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}.$$

Таким образом, если известно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, то оно интегрируется в квадратурах. (См. также § 4, п. 1.)

2. Пусть функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ n раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка, для которого $y_1(t), \dots, y_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений.

Ответ:

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) & y \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Доказать, что частное решение неоднородного линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = g(t),$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

допускает следующее представление:

$$y(t) = \int_{t_0}^t u(t, \tau) g(\tau) d\tau,$$

где $u(t, \tau)$ — решение однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(\tau, \tau) = 0, \quad \dots, \quad u^{(n-2)}(\tau, \tau) = 0, \quad u^{(n-1)}(\tau, \tau) = 1$$

(дифференцирование функции $u(t, \tau)$ производится по первому аргументу).

4. Показать, что уравнение Эйлера

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t),$$

где $a_1, \dots, a_n$ — постоянные, сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $t = e^\tau$ при $t > 0$ и $t = -e^\tau$ при $t < 0$. (Или, более коротко, $\tau = \ln |t|$.)

5. Показать, что линейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (1)$$

где $f(t)$ — непрерывная периодическая функция с периодом ω , имеет единственное периодическое решение с периодом ω , если

$$a \neq \frac{2\pi k}{\omega} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

У к а з а н и е. Свести уравнение (1) к системе и применить теорему 2 из § 11.

6. Показать, что линейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a^2 x = \sin \frac{2\pi}{\omega} t$$

при $a \neq 2\pi k/\omega$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет единственное периодическое решение с периодом ω (см. задачу 5), при $a = \pm 2\pi/\omega$ не имеет периодических решений с периодом ω , а при $a = 2\pi k/\omega$ (k — любое целое число, не равное ± 1) все его решения — периодические с периодом ω .

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе доказываются основные теоремы, относящиеся к нормальным системам обыкновенных дифференциальных уравнений: теоремы существования и единственности, теоремы о зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Рассматриваются простейшие приближенные методы решения задачи Коши. Изучаются свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

§ 1. Теоремы существования и единственности

I. Сведение задачи Коши к интегральным уравнениям.

Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

состоит в отыскании решения $x = x(t)$, удовлетворяющего начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что функция $f(t, x)$ непрерывна на некотором открытом множестве G пространства переменных (t, x) и $(t_0, x_0) \in G$.

Покажем, что решение задачи Коши для системы (1) равносильно решению некоторого интегрального уравнения.

В самом деле, пусть $x(t)$ — решение системы уравнений (1), заданное на некотором интервале Δ ($t_0 \in \Delta$) и удовлетворяющее начальному условию (2). Тогда при $t \in \Delta$ имеет место тождество

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (3)$$

Интегрируя тождество (3) по t и учитывая равенство (2), получим

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (t \in \Delta).$$

Очевидно и обратное: если непрерывная функция $x(t)$ задана на некотором интервале Δ и удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (4)$$

то ввиду непрерывности $f(\tau, x)$

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

т. е. $x(t)$ есть решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию (2).

Таким образом, решение задачи Коши (1), (2) равносильно отысканию непрерывного решения интегрального уравнения (4).

II. Теорема единственности.

Говорят, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по векторному переменному x на множестве D пространства переменных (t, x) , если существует такое число K , что для любых двух точек (t, x) и (t, y) из множества D выполняется неравенство

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|.$$

Число K называется *постоянной Липшица*.

Теорема. Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна на некотором открытом множестве G пространства переменных (t, x) и удовлетворяет условию Липшица по x на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в G ; тогда, если $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ — два решения задачи Коши (1), (2), определенные на некоторых интервалах, то $\varphi(t) = \psi(t)$ для всех тех значений t , для которых оба решения одновременно определены.

Доказательство. Сначала докажем следующее утверждение: если в некоторой точке t_1 $\varphi(t_1) =$

$= \psi(t_1) = x_1$, то $\varphi(t) = \psi(t)$ в некоторой окрестности $|t - t_1| < h$ этой точки.

Действительно, поскольку $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения системы (1), то

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

$$\psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Вычитая из (5) равенство (6), получим

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_1}^t [f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))] d\tau. \quad (7)$$

Пусть цилиндр $|t - t_1| \leq h_1$, $|x - x_1| \leq r$ содержится в множестве G (так как множество G — открытое, такой цилиндр всегда существует). В силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ существует такое $h_2 > 0$, что при $|t - t_1| \leq h_2$

$$|\varphi(t) - x_1| \leq r, \quad |\psi(t) - x_1| \leq r. \quad (8)$$

Выберем $h = \min(h_1, h_2)$. Тогда цилиндр

$$|t - t_1| \leq h, \quad |x - x_1| \leq r \quad (9)$$

целиком содержится в множестве G и при $|t - t_1| \leq h$ имеют место неравенства (8). Переходя в равенстве (7) к абсолютным величинам (см. следствие из леммы 2 § 3 дополнения), получим

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left| \int_{t_1}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \right|. \quad (10)$$

В силу неравенств (8) точки $(\tau, \varphi(\tau))$ и $(\tau, \psi(\tau))$ заключены в цилиндре (9), являющемся замкнутым ограниченным множеством, поэтому для оценки разности, стоящей под знаком интеграла, можно воспользоваться условием Липшица

$$|f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| \leq K|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|. \quad (11)$$

В силу (11) из неравенства (10) получим

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq K \left| \int_{t_1}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \right|.$$

Применяя к функции

$$x(t) = \varphi(t) - \psi(t)$$

лемму 3 § 3 дополнения (с постоянными $A = 0$, $t_0 = t_1$), получим неравенство

$$|x(t)| \leq 0.$$

Таким образом,

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) \quad \text{при} \quad |t - t_1| < h,$$

т. е. утверждение доказано.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть решения $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ определены на интервале (a, b) и $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ при $t_0 \in (a, b)$. Докажем, что $\varphi(t) = \psi(t)$ на всем интервале (a, b) .

Предположим противное. Тогда существует такое $t_1 \in (a, b)$, что $\varphi(t_1) \neq \psi(t_1)$. Для определенности будем считать $t_1 > t_0$. Рассмотрим множество M точек $t < t_1$ интервала (a, b) , удовлетворяющих условию $\varphi(t) = \psi(t)$. Множество M замкнуто. Действительно, пусть t' — предельная точка множества M , а t_k — любая последовательность точек множества M , сходящихся к t' , тогда $\varphi(t_k) = \psi(t_k)$. В силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$,

$$\varphi(t') = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(t_k) = \psi(t').$$

Так как $t_k < t_1$, то $t' < t_1$ (равенство $t' = t_1$ невозможно, так как $\varphi(t_1) \neq \psi(t_1)$), следовательно, $t' \in M$. Итак, множество M замкнуто. По определению множества M оно ограничено сверху. Пусть $t^* = \sup M$. В силу замкнутости M , $t^* \in M$ и $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Согласно доказанному выше утверждению $\varphi(t) = \psi(t)$ в некоторой окрестности $|t - t^*| < \delta$ точки t^* , т. е. найдется такая точка $t_2 > t^*$, что $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$. Но это невозможно, так как t^* — точная верхняя грань множества M . Полученное противоречит доказываемой теореме.

З а м е ч а н и я. 1. В формулировке теоремы единственности требование выполнения условия Липшица в любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в множестве G , можно заменить более сильными условиями: дифференцируемости функции $f(t, x)$ по x на множестве G и ограниченности частных производных $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) на любой замкнутой ограниченной части G .

Эти условия выполняются, в частности, тогда, когда частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны на множестве G .

При доказательстве теоремы единственности мы пользовались лишь тем, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица в любом замкнутом ограниченном цилиндре, а не на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в G .

Покажем, что из ограниченности частных производных следует выполнение условий Липшица в любом замкнутом ограниченном цилиндре C , содержащемся в G .

В самом деле, пусть точки (t, x) и (t, y) лежат в C . Тогда отрезок прямой $(t, \xi(\lambda))$, $\xi(\lambda) = y + \lambda(x - y)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) также заключен в этом цилиндре (в силу выпуклости C).

По формуле Лагранжа имеем

$$\begin{aligned} f^i(t, x) - f^i(t, y) &= f^i(t, \xi(1)) - f^i(t, \xi(0)) = \\ &= \frac{\partial f^i(t, \xi(\lambda))}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(t, \xi(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} (x^k - y^k). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^k}$ ограничены на C ,

$$\left| \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \right| \leq L \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

то из равенств (12) получаем

$$\begin{aligned} |f^i(t, x) - f^i(t, y)| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n L |x^k - y^k| \leq \sum_{k=1}^n L |x - y| = nL |x - y| \end{aligned}$$

(так как $|x^k - y^k| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$) и

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| &= \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n [f^i(t, \mathbf{x}) - f^i(t, \mathbf{y})]^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n n^2 L^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \{n^3 L^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2\}^{1/2} = n^{3/2} L |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq K |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (K = n^{3/2} L)$$

и условие Липшица выполнено.

2. Приведем пример нарушения единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}. \quad (13)$$

Его правая часть $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ определена и непрерывна при всех t и x . Однако условие Липшица не выполнено в прямоугольниках, содержащих точки оси t .

В самом деле, если бы условие Липшица выполнялось, мы имели бы при $x \neq y$ неравенство

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{2(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})}{|x - y|} \leq K,$$

тогда как при $y = 0$ и $x \rightarrow 0$

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = \frac{2}{\sqrt{|x|}} \rightarrow +\infty.$$

Легко проверить, что существуют два решения уравнения (13), удовлетворяющие начальному условию $x(t_0) = 0$:

$$x_1(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2, & t \geq t_0, \\ -(t - t_0)^2, & t < t_0, \end{cases}$$

и

$$x_2(t) = 0.$$

Таким образом, одной непрерывности правых частей системы уравнений (1) недостаточно для того, чтобы задача Коши имела единственное решение.

III. Теорема существования.

Теорема. Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна на некотором открытом множестве G пространства переменных (t, x) и удовлетворяет условию Липшица по x на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в множестве G . Тогда, какова бы ни была точка $(t_0, x_0) \in G$, существует решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1), определенное в некоторой окрестности точки t_0 и удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Доказательство. Как было показано выше, решение задачи Коши для системы уравнений (1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ сводится к решению интегрального уравнения (4). Решение этого уравнения мы построим методом последовательных приближений Пикара.

В качестве нулевого приближения искомого решения возьмем функцию $\varphi_0(t) = x_0$, а последовательные приближения $\varphi_n(t)$ ($|t - t_0| \leq h$), где h — некоторое положительное число, которое будет выбрано ниже, определим рекуррентно по формуле

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(14)

Чтобы последовательность функций (14) была определена для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, необходимо, чтобы каждая из кривых $x = \varphi_n(t)$ при $|t - t_0| \leq h$ была заключена в множестве G (в противном случае интеграл в правой части (14) не будет определен).

Покажем, как можно добиться выполнения последнего условия. Выберем замкнутый цилиндр

$$C: |t - t_0| \leq h_1, \quad |x - x_0| \leq r,$$

целиком содержащийся в множестве G ; так как G — открытое множество, это всегда возможно. Будучи непрерывной на множестве G , функция $f(t, x)$ ограничена на цилиндре C :

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Выберем $h = \min\left(h_1, \frac{r}{M}\right)$ и рассмотрим другой цилиндр

$$C_1: |t - t_0| \leq h; \quad |x - x_0| \leq r,$$

который лежит внутри цилиндра C . Очевидно, кривая $x = \varphi_0(t) = x_0$ ($|t - t_0| \leq h$) заключена в цилиндре C_1 . Предположим, что кривая $x = \varphi_n(t)$ ($|t - t_0| \leq h$) лежит в этом цилиндре, т. е. $|\varphi_n(t) - x_0| \leq r$ при $|t - t_0| \leq h$, и покажем, что тогда и кривая $x = \varphi_{n+1}(t)$ ($|t - t_0| \leq h$) не выходит из цилиндра C_1 .

В самом деле,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t) - x_0| &= \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_n(\tau))| d\tau \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| = \\ &= M|t - t_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{r}{M} = r. \end{aligned}$$

Каждая из построенных функций $\varphi_n(t)$ будет, очевидно, непрерывной.

Итак, построена последовательность непрерывных кривых $x = \varphi_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), определенных при $|t - t_0| \leq h$; все они заключены в цилиндре C_1 .

Докажем, что последовательность $\varphi_n(t)$ сходится равномерно при $|t - t_0| \leq h$.

Рассмотрим модуль разности $\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)$. Из (14) следует, что

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_n(\tau)) - f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau))| d\tau \right|. \quad (15)$$

Для оценки правой части (15) воспользуемся условием Липшица

$$|f(\tau, \varphi_n(\tau)) - f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau))| \leq K |\varphi_n(\tau) - \varphi_{n-1}(\tau)|, \quad (16)$$

где K — постоянная Липшица, соответствующая цилиндру C_1 .

Подставляя неравенство (16) в (15), получим

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq K \left| \int_{t_0}^t |\varphi_n(\tau) - \varphi_{n-1}(\tau)| d\tau \right|. \quad (17)$$

Методом математической индукции докажем, что при $|t - t_0| \leq h$ имеют место неравенства

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq MK^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

При $n = 1$ неравенство (18) имеет место, так как

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq M |t - t_0|.$$

Пусть неравенство (18) имеет место при $n = k$

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq MK^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \quad (19)$$

Покажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. В самом деле, в силу (17) и (19)

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\varphi_k(\tau) - \varphi_{k-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq MK^k \left| \int_{t_0}^t \frac{|\tau - t_0|^k}{k!} d\tau \right| = MK^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Справедливость неравенств (18) доказана.

На отрезке $|t - t_0| \leq h$

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq MK^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq MK^{n-1} \frac{h^n}{n!} \quad (20)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} MK^{n-1} \frac{h^n}{n!} = \frac{M}{K} (e^{Kh} - 1)$$

сходится. Последовательность $\varphi_n(t)$ является последовательностью частичных сумм ряда

$$\varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + \dots + [\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] + \dots \quad (21)$$

В силу неравенств (20) ряд (21) сходится равномерно на отрезке $|t - t_0| \leq h$.

Таким образом, последовательность $\varphi_n(t)$ сходится равномерно на отрезке $|t - t_0| \leq h$ к некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенствах

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq r,$$

получим

$$|\varphi(t) - x_0| \leq r$$

при $|t - t_0| \leq h$, т.е. кривая $x = \varphi(t)$ заключена в цилиндре C_1 и интеграл $\int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$ имеет смысл при всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что функция $\varphi(t)$ является решением интегрального уравнения (4).

Сначала докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (22)$$

Функция $f(t, x)$, будучи непрерывной на множестве G , равномерно непрерывна на цилиндре C_1 .

Так как последовательность $\varphi_n(t)$ сходится равномерно на отрезке $|t - t_0| \leq h$, а функция $f(t, x)$ равномерно непрерывна на цилиндре C_1 , то и последовательность $f(t, \varphi_n(t))$ также сходится равномерно *) на

*) В самом деле, из равномерной непрерывности $f(t, x)$ в цилиндре следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(t, x) - f(t, y)| < \varepsilon$$

для любых точек (t, x) и (t, y) цилиндра C_1 , удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$. Поскольку $\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на отрезке $|t - t_0| \leq h$, для этого $\delta > 0$ найдется такое N , что при $n > N$ и при всех t ($|t - t_0| \leq h$) выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| < \delta.$$

Следовательно, при $n > N$ и $|t - t_0| \leq h$

$$|f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi_n(t))| < \varepsilon.$$

т.е. последовательность $f(t, \varphi_n(t))$ на отрезке $|t - t_0| \leq h$ сходится равномерно к функции $f(t, \varphi(t))$.

отрезке $|t - t_0| \leq h$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau &= \int_{t_0}^t f(\tau, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\tau)) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Соотношение (22) доказано.

Переходя теперь в равенстве (14) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

т. е. $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения (4), а следовательно, и решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Теорема доказана.

Коротко остановимся на значении доказанных теорем. Как уже отмечалось, системы дифференциальных уравнений далеко не всегда можно проинтегрировать в квадратурах. Однако важно знать, имеет ли данная система решения и сколько их. Доказанные теоремы существования и единственности показывают, что при некоторых предположениях относительно правых частей системы уравнений (1) можно гарантировать разрешимость задачи Коши для этой системы, причем решение этой задачи определяется начальными условиями единственным образом.

З а м е ч а н и я. 1. Можно доказать разрешимость задачи Коши в предположении лишь непрерывности функций $f^i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$) на множестве G . Однако в этом случае решение задачи Коши не обязательно единственно (см. приведенный выше пример).

2. Метод последовательных приближений Пикара обеспечивает существование решения $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) с начальными значениями t_0, x_0 на некотором отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Рассмотрим решение $x = \varphi_1(t)$ системы уравнений (1) (построенное методом Пикара) с начальными значениями $t_1 = t_0 + h, x_1 = \varphi(t_0 + h)$. Это решение

будет определено на некотором отрезке $[t_1 - h_1, t_1 + h_1]$. Рассмотрим функцию $x = \psi(t)$, определенную на отрезке $[t_0 - h, t_1 + h_1]$,

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 - h \leq t \leq t_0 + h, \\ \varphi_1(t), & t_0 + h < t \leq t_1 + h_1. \end{cases}$$

Очевидно, $x = \psi(t)$ будет решением системы уравнений (1) с начальными значениями t_0, x_0 . Таким образом, мы получили продолжение решения $x = \varphi(t)$ с отрезка $[t_0 - h, t_0 + h]$ на больший отрезок $[t_0 - h, t_1 + h_1]$.

Построив решение $x = \varphi_2(t)$ системы уравнений (1) с начальными значениями $t_2 = t_1 + h_1, x_2 = \varphi_1(t_1 + h_1)$, получим продолжение решения $x = \varphi(t)$ на еще больший отрезок $[t_0 - h, t_2 + h_2]$ и т. д.

Аналогичным образом решение $x = \varphi(t)$ продолжается в сторону убывания переменного t .

Можно показать, что в результате такого продолжения мы построим решение с начальными значениями t_0, x_0 , определенное на некотором максимальном интервале (a, b) . Это решение называется *непродолжаемым*. (Более подробно непродолжаемые решения и их свойства будут рассмотрены в § 2.)

3. Метод последовательных приближений Пикара, использованный при доказательстве теоремы существования, является хорошим приближенным методом решения задачи Коши. Обрывая процесс последовательных приближений на некотором значении n , мы получим приближенное решение $\varphi_n(t)$, тем более точное, чем больше n . (Приближенные методы решения задачи Коши будут рассмотрены в § 5.)

4. Переход от нормальной системы (1) к интегральному уравнению (4) позволяет ввести понятие обобщенного решения для системы (1).

Пусть функции $f^i(t, x)$ непрерывны по t и x , за исключением конечного числа значений t , ограничены и удовлетворяют условию Липшица по x на любом замкнутом, ограниченном, выпуклом множестве $\bar{G} \subset \subset G$. *Обобщенным* решением системы (1) с начальным значением (t_0, x_0) называется непрерывное ре-

шение интегрального уравнения (4). Точно так же, как это делалось при доказательстве теоремы существования и единственности, можно показать, что при сделанных предположениях такое решение существует и единственно *).

5. Для нормальной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t)x + g(t), \quad (23)$$

у которой матрица $F(t)$ и вектор-функция $g(t)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$, последовательные приближения

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [F(\tau)\varphi_n(\tau) + g(\tau)] d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_0(t) = x_0$$

равномерно сходятся на всем отрезке $[a, b]$.

В самом деле, из непрерывности матрицы $F(t)$ и вектор-функции $g(t)$ следует, что существуют такие положительные числа K и A , что

$$\|F(t)\| \leq K, \quad |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq A$$

при всех $t \in [a, b]$.

Точно так же, как доказывались неравенства (18), можно показать справедливость неравенств

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \leq AK^{n-1} \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при $t \in [a, b]$, из которых следует равномерная сходимость последовательности $\varphi_n(t)$ на всем отрезке $[a, b]$.

Поэтому в случае линейной системы уравнений (23) можно рассматривать решения, определенные сразу на всем отрезке $[a, b]$.

Пример. Применим метод последовательных приближений Пикара к линейной однородной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (24)$$

*) Подробнее об этом см.: Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954, т. 2.

Последовательные приближения в этом случае будут иметь вид

$$\varphi_0(t) = x_0,$$

$$\Phi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A\Phi_0(\tau) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t Ax_0 d\tau = x_0 + (t - t_0)Ax_0,$$

$$\Phi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A \Phi_1(\tau) d\tau = x_0 + (t - t_0)Ax_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2}A^2x_0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(t) &= x_0 + \frac{(t-t_0)}{1!} A x_0 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} A^2 x_0 + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n x_0 = \\ &= \left(E + \frac{(t-t_0)}{1!} A + \frac{(t-t_0)^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \right) x_0.\end{aligned}$$

Как отмечалось выше (см. замечание 5), для линейных систем уравнений последовательные приближения сходятся равномерно на любом отрезке $a \leq t \leq b$, где правая часть системы непрерывна. В рассматриваемом случае правая часть системы уравнений (24) не зависит от t . Поэтому последовательность (25) сходится к решению $x = \varphi(t)$ задачи Коши для системы уравнений (24), удовлетворяющему начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ при всех значениях t .

Введем обозначения

$$E + \frac{(t-t_0)}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n = B_n(t) = \left(b_{(n)}^j(t) \right). \quad (26)$$

Тогда формула (25) запишется в виде

$$\varphi_n(t) = B_n(t) \mathbf{x}_0.$$

Полагая $x_0 = e_i$ ($e_i = \{\delta_i^1, \dots, \delta_i^n\}$), получим, что существует предел

$$\mathbf{b}_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t) \mathbf{e}_i,$$

или, переходя к координатам

$$b_i^j(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{(n)}^j(t),$$

где $\mathbf{b}_i(t) = \{b_i^1(t), \dots, b_i^n(t)\}$.

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ каждый элемент матрицы $B_n(t)$ стремится к определенному пределу. В этом случае говорят, что существует предел последовательности матриц (26), который обозначают $e^{(t-t_0)A}$ и называют *экспоненциалом матрицы* $(t-t_0)A$. Итак,

$$e^{(t-t_0)A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{(t-t_0)}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n \right). \quad (27)$$

Соотношение (27) записывают также в виде ряда

$$e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \quad (A^0 = E). \quad (28)$$

Решение задачи Коши для системы уравнений (24) можно теперь записать в виде

$$x = e^{(t-t_0)A} x_0. \quad (29)$$

В силу быстрой сходимости ряда (28) из формулы (29) получается хороший приближенный метод решения задачи Коши для системы уравнений (24). Матрица $e^{(t-t_0)A}$ вычисляется приближенно по формуле

$$e^{(t-t_0)A} \approx E + \frac{(t-t_0)}{1!} A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n,$$

а формула (29) дает приближенное решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

6. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (30)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \quad (31)$$

в случае, когда правая часть $f(t, x)$ уравнения (30) — аналитическая функция в окрестности точки (t_0, x_0) , т. е. $f(t, x)$ раскладывается в степенной ряд по степеням $t - t_0$ и $x - x_0$: $f(t, x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} c_{jk} (t - t_0)^j (x - x_0)^k$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть функция $f(t, x)$ — аналитическая в окрестности точки (t_0, x_0) . Тогда задача Коши (30), (31) имеет единственное аналитическое решение $x = x(t)$, определенное в некоторой окрестности точки t_0 .

Сформулированная теорема позволяет искать решение задачи Коши (30), (31) в виде степенного ряда

$$x(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_k(t - t_0)^k + \dots, \quad (32)$$

где в силу (31), $c_0 = x_0$.

Разложив правую часть уравнения (30) в ряд по степеням $t - t_0$ и $x - x_0$ и подставив разложение (32) в уравнение (30), придем к системе линейных уравнений для определения коэффициентов c_k ($k = 1, 2, \dots$).

Эта система уравнений получается приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $t - t_0$, находящихся в правой и левой частях уравнения (30). В силу сформулированной выше теоремы, полученная система линейных уравнений имеет единственное решение.

Отметим, что ряд (32) определяет решение задачи Коши (30), (31) лишь для тех значений t , для которых он сходится.

Теорема, аналогичная сформулированной выше, имеет место и для уравнения n -го порядка

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (33)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

в случае, когда правая часть $f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ — аналитическая функция в окрестности точки $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)})$.

В приложениях часто встречаются линейные однородные дифференциальные уравнения вида

$$a_0(t) \ddot{x} + a_1(t) \dot{x} + a_2(t) x = 0 \quad (34)$$

с аналитическими коэффициентами, у которых

$$a_0(t_0) = 0.$$

Говорят, что t_0 является особой точкой уравнения (34), поскольку в окрестности такой точки уравнение (34) нельзя разрешить относительно $\ddot{x}$. В этом случае решения, представимого в виде степенного ряда, может и не существовать. Однако могут существовать решения, представимые в виде обобщенных степенных рядов:

$$x(t) = c_0(t - t_0)^r + c_1(t - t_0)^{r+1} + \dots + c_k(t - t_0)^{r+k} + \dots,$$

где r — некоторое (не обязательно целое) число.

Пример. Рассмотрим уравнение *)

$$t^2 \ddot{x} + \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) x = 0 \quad (35)$$

при $t > 0$.

Будем искать решение этого уравнения в виде обобщенного степенного ряда по степеням t ($t_0 = 0$):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k} \quad (c_0 \neq 0). \quad (36)$$

Подставляя ряд (36) в уравнение (35), получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (r+k)(r+k-1) t^{r+k} + \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{r+k} = 0. \quad (37)$$

Приравнявая коэффициент при t в наименьшей степени нулю, имеем

$$c_0 \left[r(r-1) + \frac{1}{4} \right] = 0,$$

откуда следует (поскольку $c_0 \neq 0$), что $r = 1/2$. Положив в (37) $r = 1/2$ и приведя подобные члены, придем к следующему равенству:

$$c_1 t^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=2}^{\infty} (c_k k^2 + c_{k-2}) t^{\frac{1}{2}+k} = 0,$$

из которого находим линейные уравнения, определяющие коэффициенты c_k :

$$c_1 = 0, \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2} \quad (k \geq 2). \quad (38)$$

Из соотношений (38) видно, что коэффициенты c_k с нечетными номерами равны нулю: $c_{2p-1} = 0$ ($p = 1, 2, \dots$). Для четных номеров (в силу (38))

$$\begin{aligned} c_{2p} &= -\frac{c_{2p-2}}{(2p)^2} - \frac{c_{2p-4}}{(2p)^2 (2p-2)^2} = \dots = \\ &= (-1)^p \frac{c_0}{(2p)^2 (2p-2)^2 \dots 2^2} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p} [p!]^2} \quad (p = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

*) Это уравнение получено из уравнения Бесселя нулевого порядка $\ddot{y} + \frac{1}{t} \dot{y} + y = 0$ заменой $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

Подставляя найденные значения для c_k в (36), получим

$$x(t) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+\frac{1}{2}}}{2^{2p} [p!]^2} = c_0 \sqrt{t} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{2^{2p} [p!]^2}. \quad (39)$$

Легко проверить (например, с помощью признака Даламбера), что ряд (39) сходится при всех $t \geq 0$.

§ 2. Непродолжаемые решения

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

для которой выполнены условия теорем существования и единственности на некотором открытом множестве G .

В силу теоремы существования для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ найдется решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) с начальными значениями (t_0, x_0) , определенное на некоторой окрестности точки t_0 . Покажем, что окрестность, в которой определено решение с начальными значениями (t_0, x_0) , может быть расширена до некоторого максимального открытого интервала.

Определение 1. Говорят, что решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1), определенное при $t_1 < t < t_2$, является *продолжением решения* $x = \psi(t)$, определенного при $t'_1 < t < t'_2$, если $t_1 \leq t'_1$, $t'_2 \leq t_2$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ при $t'_1 < t < t'_2$.

В частности, любое решение является своим собственным продолжением.

Определение 2. Решение называется *непродолжаемым*, если любое его продолжение совпадает с ним самим.

Докажем некоторые свойства непродолжаемых решений.

Свойство 1. Для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует непродолжаемое решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех решений системы уравнений (1), удовлетворяю-

щих условию $x(t_0) = x_0$. Каждое решение этой совокупности определено на некотором открытом интервале. Множество правых концов всех этих интервалов обозначим T_2 , а множество их левых концов — T_1 . Обозначим $\inf T_1 = m_1$, $\sup T_2 = m_2$; если T_1 не ограничено снизу, то полагаем $m_1 = -\infty$, если T_2 не ограничено сверху, то $m_2 = +\infty$. Построим решение $x = \varphi(t)$, удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$ и определенное на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Пусть t' — произвольная точка этого интервала. Согласно определению m_1 и m_2 существует решение $x = \psi(t)$, удовлетворяющее условию $\psi(t_0) = x_0$ и определенное на некотором интервале (t_1, t_2) , содержащем точку t' . Положим $\varphi(t') = \psi(t')$. Докажем, что значение $\varphi(t')$ не зависит от выбора решения $\psi(t)$. В самом деле, если $x = \psi_1(t)$ — какое-либо другое решение, удовлетворяющее условию $\psi_1(t_0) = x_0$ и определенное на интервале, содержащем точку t' , то $\psi(t') = \psi_1(t')$ по теореме единственности, так как $\psi(t_0) = \psi_1(t_0)$.

Итак, функция $x = \varphi(t)$ однозначно определена на всем интервале (m_1, m_2) и $\varphi(t_0) = x_0$. Она представляет собой решение системы уравнений (1), поскольку в окрестности любой точки t' ($m_1 < t' < m_2$) оно совпадает с некоторым решением системы. Таким образом, $x = \varphi(t)$ — решение системы уравнений (1), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$ и определенное на всем интервале (m_1, m_2) . Докажем, что $x = \varphi(t)$ — непродолжаемое решение. Пусть $x = \psi(t)$ ($t_1 < t < t_2$) — продолжение решения $x = \varphi(t)$, тогда $t_1 \leq m_1$, $m_2 \leq t_2$, $\psi(t_0) = x_0$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ при $m_1 < t < m_2$. Из самого построения решения $\varphi(t)$ вытекает, что $\varphi(t)$ служит продолжением решения $\psi(t)$, поэтому $m_1 \leq t_1$, и $t_2 \leq m_2$. Следовательно, $t_1 = m_1$, $t_2 = m_2$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ при $m_1 < t < m_2$, т. е. $\varphi(t)$ — непродолжаемое решение.

Свойство 2. Если $x = \varphi(t)$ — непродолжаемое решение, а $x = \psi(t)$ — некоторое решение системы уравнений (1) с одинаковыми начальными значениями (t_0, x_0) , то $x = \varphi(t)$ является продолжением решения $x = \psi(t)$.

Доказательство. Пусть решение $x = \varphi(t)$ определено при $t_1 < t < t_2$, а решение $x = \psi(t)$ —

при $t'_1 < t < t'_2$. В силу теоремы единственности решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают на общей части интервалов (t_1, t_2) и (t'_1, t'_2) . При $t'_2 > t_2$ функция

$$x = \begin{cases} \varphi(t), & t_1 < t \leq t_0, \\ \psi(t), & t_0 \leq t \leq t'_2, \end{cases}$$

была бы продолжением решения $x = \varphi(t)$, отличным от $\varphi(t)$, что невозможно, так как $\varphi(t)$ — непродолжаемое решение. Следовательно, $t'_2 \leq t_2$.

Точно так же доказывается, что $t_1 \leq t'_1$. Таким образом, $\varphi(t)$ — продолжение решения $\psi(t)$.

Свойство 3. Если $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ — непродолжаемые решения системы уравнений (1) с одинаковыми начальными значениями (t_0, x_0) , то они определены на одном и том же интервале и совпадают на нем.

Доказательство. Пусть решение $x = \varphi(t)$ определено на интервале (t_1, t_2) , а $x = \psi(t)$ на интервале (t'_1, t'_2) . В силу свойства 2 решение $x = \varphi(t)$ является продолжением решения $x = \psi(t)$, причем $t_1 \leq t'_1$, $t'_2 \leq t_2$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ при $t'_1 < t < t'_2$. Точно так же $x = \psi(t)$ — продолжение решения $x = \varphi(t)$. Поэтому $t'_1 \leq t_1$, $t_2 \leq t'_2$. Следовательно, $t'_1 = t_1$, $t_2 = t'_2$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ на интервале (t_1, t_2) .

Теорема. Пусть F — произвольное замкнутое ограниченное множество, содержащееся в открытом множестве G , $x = \varphi(t)$ — непродолжаемое решение, определенное при $m_1 < t < m_2$. Тогда существуют такие числа t_1 и t_2 ($m_1 < t_1 < t_2 < m_2$), что при $t < t_1$ и $t > t_2$ точка $(t, \varphi(t))$ лежит вне множества F .

Доказательство. Остановимся на доказательстве существования числа t_2 .

Случай 1. $m_2 = +\infty$. Так как множество F — ограниченное, то координаты точек, принадлежащих множеству F , ограничены. В частности, значение t первой их координаты не превосходит некоторого $T > 0$. Полагая $t_2 = T$, получим, что при $t > t_2$ точка $(t, \varphi(t))$ лежит вне множества F .

Случай 2. m_2 — конечное число. Поскольку F — замкнутое и ограниченное множество, то расстояние d от множества F до границы множества G положительно. Пусть F_1 — множество точек, расстояние которых от множества F не превосходит $d/2$. (Если $d = +\infty$, то в качестве $d/2$ берем 1.) Очевидно, F_1 — замкнутое ограниченное множество и $F \subset F_1 \subset G$.

Функция $f(t, x)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на F_1 :

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Если $h_1^2 + r^2 \leq d^2/4$ и $(t_0, x_0) \in F$, то цилиндр $|t - t_0| \leq h_1$, $|x - x_0| \leq r$ содержится в множестве F_1 . Выбрав $h = \min(h_1, r/M)$, получим цилиндр $|t - t_0| \leq h$, $|x - x_0| \leq r$, содержащийся в множестве F_1 .

Из доказательства теоремы существования следует, что существует решение системы уравнений (1) с начальным значением (t_0, x_0) , определенное на интервале $|t - t_0| < h$. Покажем, что число $t_2 = m_2 - h$ удовлетворяет условиям теоремы. В самом деле, если бы при некотором $t_0 > m_2 - h = t_2$ точка $(t_0, \varphi(t_0))$ принадлежала множеству F , то решение $\varphi(t)$ с начальными значениями $(t_0, \varphi(t_0))$ было бы определено по крайней мере на интервале $t_0 - h < t < t_0 + h$. Так как $x = \varphi(t)$ — непродолжаемое решение, то этот интервал должен содержаться в интервале (m_1, m_2) . В частности, $t_0 + h \leq m_2$ или $t_0 \leq m_2 - h$, что противоречит неравенству $t_0 > m_2 - h$. Теорема доказана.

§ 3. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Особые решения

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства решений одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1)$$

где функция $F(t, x, p)$ определена и непрерывна вместе с производными F'_x и F'_p на некотором открытом множестве G в пространстве переменных t, x и p .

1. Огибающая однопараметрического семейства кривых.

Пусть

$$f(t, x, c) = 0 \quad (2)$$

— уравнение однопараметрического семейства кривых на плоскости t, x ; c — параметр. Функцию f и производные f'_t, f'_x, f'_c будем предполагать непрерывными на некотором открытом множестве E пространства переменных t, x, c . Кроме того, предположим, что $(f'_t)^2 + (f'_x)^2 \neq 0$ на множестве E .

Определение. Гладкая кривая $t = \varphi(c)$, $x = \psi(c)$ (φ' и ψ' непрерывны и $(\varphi')^2 + (\psi')^2 \neq 0$ при $c_1 < c < c_2$) называется

огibaющей однопараметрического семейства кривых (2), если в каждой своей точке $(\varphi(c), \psi(c))$ она касается кривой семейства, соответствующей значению параметра c , и отлична от нее в любой окрестности этой точки (рис. 8).

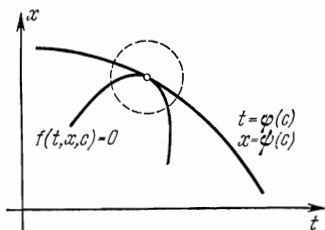


Рис. 8.

Теорема 1. Если кривая $t = \varphi(c)$, $x = \psi(c)$ ($c_1 < c < c_2$) — огибающая однопараметрического семейства кривых (2), то функции $t = \varphi(c)$ и $x = \psi(c)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} f(t, x, c) &= 0, \\ f'_c(t, x, c) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. По определению огибающей кривая однопараметрического семейства (2), соответствующая значению параметра c , проходит через точку $(\varphi(c), \psi(c))$ огибающей и касается ее в этой точке. Это означает, что при $c_1 < c < c_2$

$$f(\varphi(c), \psi(c), c) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = - \frac{f'_t(\varphi(c), \psi(c), c)}{f'_x(\varphi(c), \psi(c), c)} \quad (5)$$

(равенство (5) — условие касания огибающей и кривой семейства в гочке $(\varphi(c), \psi(c))$).

Соотношение (5) перепишем в виде

$$f'_t(\varphi, \psi, c)\varphi'(c) + f'_x(\varphi, \psi, c)\psi'(c) = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя (4) по c , получим

$$f'_t(\varphi, \psi, c)\varphi'(c) + f'_x(\varphi, \psi, c)\psi'(c) + f'_c(\varphi, \psi, c) = 0. \quad (7)$$

В силу (6) соотношение (7) принимает вид

$$f'_c(\varphi, \psi, c) = 0. \quad (8)$$

Равенства (4) и (8) показывают, что функции $t = \varphi(c)$, $x = \psi(c)$ удовлетворяют уравнениям (3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы доказали, что огибающая семейства кривых (2) удовлетворяет уравнениям (3). Однако, как показывают примеры, обратное неверно: не всякая кривая, удовлетворяющая уравнениям (3), будет огибающей. Поэтому для отыскания огибающей семейства кривых (3) находят все кривые, удовлетворяющие уравнениям (3), и проверяют, какие из них будут огибающими.

II. Особые решения.

О п р е д е л е н и е. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) называется *особым решением*, если через каждую его точку кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $x = \varphi(t)$, и отличное от него в любой окрестности этой точки. Интегральная кривая, соответствующая особому решению, называется *особой интегральной кривой* уравнения (1).

Т е о р е м а 2. Если $x = \varphi(t)$ — особое решение уравнения (1), то оно удовлетворяет уравнениям

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad F'_p(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x = \varphi(t)$ — решение уравнения (1), то

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = 0,$$

т.е. $\varphi(t)$ удовлетворяет первому из уравнений (9).

Пусть (t_0, x_0) , где $x_0 = \varphi(t_0)$, — произвольная точка особой интегральной кривой. Покажем, что

$$F'_p(t_0, \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) = 0.$$

Предположим противное, т. е.

$$F'_p(t_0, \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) \neq 0,$$

или

$$F'_p(t_0, x_0, p_0) \neq 0, \quad (10)$$

где $x_0 = \varphi(t_0)$, $p_0 = \dot{\varphi}(t_0)$. В этом случае по теореме с неявной функции уравнение

$$F(t, x, p) = 0$$

в окрестности точки (t_0, x_0, p_0) определяет p как неявную функцию от (t, x) :

$$p = f(t, x);$$

при этом функция $f(t, x)$ непрерывна по t, x , имеет непрерывную производную по x и $f(t_0, x_0) = p_0$.

Таким образом, в окрестности точки (t_0, x_0, p_0) уравнение (1) равносильно уравнению

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (11)$$

В силу теорем существования и единственности, существует единственная интегральная кривая уравнения (11), а следовательно, и уравнения (1), проходящая через точку (t_0, x_0) и имеющая в этой точке угловой коэффициент p_0 . Поэтому $x = \varphi(t)$ не может быть особым решением. Следовательно,

$$F'_p(t_0, \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) = 0.$$

Поскольку $(t_0, \varphi(t_0))$ — произвольная точка особой интегральной кривой, имеем тождество

$$F'_p(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Уравнения (9), вообще говоря, определяют одну или несколько кривых, которые называются *дискриминантными кривыми* уравнения (1). В силу доказанной теоремы каждое особое решение уравнения (1) является дискриминантной кривой этого уравнения. Обратное неверно: не всякая дискри-

минантная кривая является особым решением. Поэтому для нахождения особых решений нужно найти все дискриминантные кривые уравнения (1) и выделить среди них те, которые являются особыми интегральными кривыми.

Теорема 3. Пусть

$$\Phi(t, x, c) = 0 \quad (12)$$

— *однопараметрическое семейство решений уравнения (1), имеющее огибающую $x = \varphi(t)$ ($t_1 < t < t_2$). Тогда эта огибающая есть особая интегральная кривая уравнения (1).*

Доказательство. Покажем, что $x = \varphi(t)$ является решением уравнения (1). Пусть (t_0, x_0) , $x_0 = \varphi(t_0)$ — произвольная точка огибающей. По определению огибающей, через эту точку проходит решение

$$x = \psi(t)$$

из однопараметрического семейства решений (12), которое касается огибающей в этой точке. Таким образом,

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0), \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\psi}(t_0). \quad (13)$$

Так как $x = \psi(t)$ — решение уравнения (1), то

$$F(t_0, \psi(t_0), \dot{\psi}(t_0)) = 0. \quad (14)$$

В силу равенств (13) из (14) получим

$$F(t_0, \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) = 0. \quad (15)$$

Так как t_0 — произвольная точка интервала (t_1, t_2) , то соотношение (15) означает, что $x = \varphi(t)$ — решение уравнения (1).

Это решение — особое, так как по определению огибающей через каждую его точку проходит решение семейства (12), имеющее ту же касательную и отличное от решения $x = \varphi(t)$ в любой окрестности этой точки. Теорема доказана.

III. Уравнения Клеро и Лагранжа.

Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$x = t\dot{x} + \varphi(\dot{x}),$$

где $\varphi(p)$ — функция, определенная на некотором промежутке и имеющая непрерывную производную. Вводя новое переменное $p = \dot{x}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} dx &= p dt, \\ x &= tp + \varphi(p), \end{aligned} \tag{16}$$

равносильную уравнению Клеро. Подставляя второе из уравнений (16) в первое, получим

$$(t + \varphi'(p)) dp = 0.$$

Отсюда $p = c = \text{const}$ или $t = -\varphi'(p)$.

В первом случае

$$x = ct + \varphi(c). \tag{17}$$

Во втором случае

$$\begin{cases} t = -\varphi'(p), \\ x = -p\varphi'(p) + \varphi(p). \end{cases} \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что, если существует отличная от нуля вторая производная $\varphi''(p)$, кривая (18) является огибающей для однопараметрического семейства кривых (17) и, следовательно, будет особой интегральной кривой для уравнения Клеро.

Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$x = t\varphi(\dot{x}) + \psi(\dot{x}), \tag{19}$$

где функции $\varphi(p) \neq p$ и $\psi(p)$ непрерывно дифференцируемы.

Решается уравнение Лагранжа так же, как уравнение Клеро. Вводя новое независимое переменное $p = \dot{x}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} dx &= p dt, \\ x &= t\varphi(p) + \psi(p). \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$\varphi(p) dt + t\varphi'(p) dp + \psi'(p) dp = p dt,$$

или

$$\frac{dt}{dp} + t \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) является линейным дифференциальным уравнением относительно функции $t = t(p)$ и легко интегрируется. Если

$$t = \lambda(p, c)$$

— его общее решение, то в силу второго из уравнений (20)

$$x = \varphi(p) \cdot \lambda(p, c) + \psi(p).$$

Таким образом, найдено однопараметрическое семейство решений уравнения Лагранжа (19), заданное в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = \lambda(p, c), \\ x = \varphi(p) \lambda(p, c) + \psi(p). \end{cases}$$

§ 4. Зависимость решения задачи

Коши от параметров и начальных условий

При рассмотрении дифференциальных уравнений, описывающих какой-либо физический процесс, необходимо учитывать, что сами эти уравнения и начальные условия для разыскиваемых решений обычно бывают известны лишь приближенно.

Поэтому крайне важно выяснить, какое влияние на поведение решений задачи Коши оказывают малые изменения правых частей нормальной системы уравнений, а также малые изменения начальных данных. Для изучения этой зависимости будем считать, что правая часть нормальной системы уравнений непрерывно зависит от некоторого параметра μ .

Рассмотрим нормальную систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (1)$$

и пусть правая часть этой системы уравнений определена на некотором открытом множестве $\tilde{G}$ в пространстве переменных (t, x, μ) .

Теорема 1. Пусть функция $f(t, x, \mu)$ непрерывна на открытом множестве $\tilde{G}$ и удовлетворяет условию Липшица по аргументу x на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в $\tilde{G}$. Пусть (t_0, x_0, μ_0) — произвольная точка множества $\tilde{G}$ и $x = \varphi(t, \mu)$ ($\mu_0 - h < \mu < \mu_0 + h$) — семейство непродолжаемых решений системы уравнений (1), удовле-

творяющих начальным условием $\varphi(t_0, \mu) = x_0$. Пусть, далее, при $\mu = \mu_0$ решение $x = \varphi(t, \mu_0)$ задано на интервале $m_1 < t < m_2$ и $[a, b]$ — произвольный отрезок, заключенный в интервале (m_1, m_2) .

Тогда существует такое $\sigma > 0$, что при $|\mu - \mu_0| < \sigma$ решения $x = \varphi(t, \mu)$ определены при $a \leq t \leq b$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ ($0 < \delta \leq \sigma$), что при $|\mu - \mu_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| < \varepsilon$$

для всех $t \in [a, b]$, т. е. функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна по μ в точке $\mu = \mu_0$, притом равномерно относительно t на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим через F множество точек (t, x, μ) , удовлетворяющих следующим условиям:

$$a \leq t \leq b, \quad |\varphi(t, \mu_0) - x| \leq r, \quad |\mu - \mu_0| \leq \sigma. \quad (2)$$

Так как множество точек $(t, \varphi(t, \mu_0), \mu_0)$, где $a \leq t \leq b$, представляет собой замкнутое ограниченное множество, целиком лежащее в открытом множестве $\tilde{G}$, то при достаточно малых r и σ множество F будет заключено в $\tilde{G}$.

Будем считать, что r и σ уже выбраны так, что $F \subset \tilde{G}$. Очевидно, F — замкнутое, ограниченное множество. По условию теоремы, функция $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве F , т. е.

$$|f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)| \leq K |x_1 - x_2| \quad (3)$$

для любых двух точек (t, x_1, μ) , (t, x_2, μ) из F . (Константа K зависит от множества F и, следовательно, от r, σ .)

Оценим разность $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)|$ для тех значений t и μ , для которых функции $\varphi(t, \mu)$ и $\varphi(t, \mu_0)$ определены. Функции $\varphi(t, \mu)$ и $\varphi(t, \mu_0)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\varphi(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau,$$

$$\varphi(t, \mu_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0) d\tau.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| d\tau \right|. \quad (4)$$

Вначале оценим модуль разности под знаком интеграла

$$\begin{aligned} |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| &\leq \\ &\leq |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)| + \\ &+ |f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)|. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу неравенства (3)

$$\begin{aligned} |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu)| &\leq \\ &\leq K |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|. \end{aligned} \quad (6)$$

Из равномерной непрерывности функции $f(\tau, x, \mu)$ на ограниченном замкнутом множестве F следует, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что, каковы бы ни были точки (τ, x, μ) и (τ, x, μ_0) из F , удовлетворяющие условию $|\mu - \mu_0| < \sigma$, выполняется неравенство

$$|f(\tau, x, \mu) - f(\tau, x, \mu_0)| < \varepsilon_1.$$

Будем считать, что число σ в неравенствах (2) выбрано удовлетворяющим сформулированным условиям. (Каким нужно выбрать число ε_1 , будет указано ниже.)

В частности, тогда

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| < \varepsilon_1. \quad (7)$$

Из неравенства (5) в силу (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned} |f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu_0), \mu_0)| &< \varepsilon_1 + \\ &+ K |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя неравенство (8) в (4), получим

$$\begin{aligned} |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| &< \left| \int_{t_0}^t (\varepsilon_1 + K |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)|) d\tau \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 |t - t_0| + K \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)| d\tau \right| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 (b - a) + K \left| \int_{t_0}^t |\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu_0)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству лемму 3 из § 3 дополнения ($x(t) = \varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)$), получим при $|\mu - \mu_0| \leq \sigma$

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| \leq \varepsilon_1 (b - a) e^{K|t - t_0|} \leq \varepsilon_1 (b - a) e^{K(b - a)}. \quad (9)$$

По теореме, доказанной в § 2, непродолжаемое решение $x = \varphi(t, \mu)$ должно выйти за пределы множества F при возрастании (или убывании) t .

Обозначим через $t_1 = t_1(\mu)$ то значение $t > t_0$ (или $t < t_0$), при котором точка $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ ($|\mu - \mu_0| < \sigma$) впервые попадает на границу множества F . Пусть

$$\varepsilon_1 < \frac{r}{(b - a)e^{K(b - a)}},$$

тогда, в частности при $t = t_1$, из неравенства (9) получим

$$|\varphi(t_1, \mu) - \varphi(t_1, \mu_0)| < r \quad \text{при} \quad |\mu - \mu_0| < \sigma. \quad (10)$$

Однако, поскольку точка $(t_1, \varphi(t_1, \mu), \mu)$ лежит на границе множества F , то хотя бы одно из неравенств в (2) должно обращаться в равенство. В силу (10) это возможно только при $t_1 = b$ (или при $t_1 = a$, если $t_1 < t_0$). Следовательно, решение $x = \varphi(t, \mu)$ определено при всех $a \leq t \leq b$, если $|\mu - \mu_0| < \sigma$.

Если теперь в качестве ε_1 взять $\varepsilon_1 < \frac{\min\{\varepsilon, r\}}{(b - a)e^{K(b - a)}}$, где ε — произвольное положительное число, а соответствующее этому ε_1 число σ обозначить δ , то в силу

неравенства (9) получим

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\mu - \mu_0| < \delta.$$

Теорема доказана.

Следствие. Функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна на множестве $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$ по совокупности переменных (t, μ) .

Доказательство. Пусть (t_1, μ_1) — произвольная точка множества $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)| &\leq \\ &\leq |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)| + |\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)|. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу доказанной теоремы для любого $\varepsilon/2 > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_1)| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad |\mu - \mu_1| < \delta, \quad a \leq t \leq b. \quad (12)$$

Из непрерывности функции $\varphi(t, \mu_1)$ следует, что для любого $\varepsilon/2 > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $|t - t_1| < \delta_1$

$$|\varphi(t, \mu_1) - \varphi(t_1, \mu_1)| < \varepsilon/2. \quad (13)$$

Из неравенств (11), (12), (13) следует, что при $|t - t_1| < \delta_1$ и $|\mu - \mu_1| < \delta$

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_1, \mu_1)| < \varepsilon.$$

Таким образом, функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна в точке (t_1, μ_1) . Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть функции $f(t, \mathbf{x}, \mu)$, $\frac{\partial f}{\partial x^j}(t, \mathbf{x}, \mu)$, $(j=1, \dots, n)$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \mathbf{x}, \mu)$ непрерывны на множестве $\tilde{G}$. Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t, \mu)$ — решения системы уравнений (1), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(t_0, \mu) = \mathbf{x}_0$ и определенные при $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$.

Тогда не только $\varphi(t, \mu)$, но и ее частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(t, \mu)$ непрерывна при тех же значениях t и μ .

Доказательство. Из непрерывности производных $\frac{\partial f}{\partial x^j}$ ($j=1, \dots, n$) следует выполнение условия

Липшица на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в $\tilde{G}$. В силу следствия из предыдущей теоремы, $\varphi(t, \mu)$ непрерывна при $a \leq t \leq b$, $|\mu - \mu_0| < \sigma$.

Пусть μ — любое число из интервала $|\mu - \mu_0| < \sigma$, а δ — такое, что интервал $(\mu - \delta, \mu + \delta)$ содержится в интервале $|\mu - \mu_0| < \sigma$. Пусть $|\Delta\mu| < \delta$. Тогда

$$\dot{\varphi}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu),$$

$$\dot{\varphi}(t, \mu + \Delta\mu) = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu).$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] = \\ = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу леммы 1 из § 3 дополнения

$$\begin{aligned} f^i(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f^i(t, \varphi(t, \mu), \mu) = \\ = \sum_{j=1}^n F_j^i(t, \mu, \Delta\mu) [\varphi^j(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi^j(t, \mu)] + \\ + g^i(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\mu \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu) = \\ = F(t, \mu, \Delta\mu) [\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)] + \\ + g(t, \mu, \Delta\mu) \cdot \Delta\mu, \end{aligned} \quad (15)$$

где $F(t, \mu, \Delta\mu) = (F_j^i(t, \mu, \Delta\mu))$ — квадратная матрица, $g(t, \mu, \Delta\mu) = \{g^1(t, \mu, \Delta\mu), \dots, g^n(t, \mu, \Delta\mu)\}$ — вектор. Очевидно, F_j^i и g — непрерывные функции.

Вводя обозначение $\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu) = \Delta\varphi$ и используя равенство (15), запишем соотношение (14) в виде

$$\frac{d}{dt} (\Delta\varphi) = F(t, \mu, \Delta\mu) \Delta\varphi + g(t, \mu, \Delta\mu) \cdot \Delta\mu. \quad (16)$$

При $\Delta\mu \neq 0$ соотношение (16) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right) = F(t, \mu, \Delta\mu) \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + g(t, \mu, \Delta\mu). \quad (17)$$

Равенство (17) показывает, что при $\Delta\mu \neq 0$ функция $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ удовлетворяет нормальной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = F(t, \mu, \Delta\mu) \cdot y + g(t, \mu, \Delta\mu).$$

Пусть $y = \psi(t, \mu, \Delta\mu)$ — решение этой системы уравнений, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(t_0, \mu, \Delta\mu) = 0.$$

В силу теоремы 1 функция $\psi(t, \mu, \Delta\mu)$ непрерывна при

$$|t - t_0| < h, \quad \mu_0 - \sigma < \mu < \mu_0 + \sigma, \quad |\Delta\mu| < \delta.$$

Так как

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \Big|_{t=t_0} = \frac{\varphi(t_0, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t_0, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{x_0 - x_0}{\Delta\mu} = 0,$$

то в силу теоремы единственности при $\Delta\mu \neq 0$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \psi(t, \mu, \Delta\mu).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta\mu \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t, \mu) = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \psi(t, \mu, \Delta\mu) = \psi(t, \mu, 0).$$

Таким образом, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ существует и непрерывна при $|t - t_0| < h$, $\mu_0 - \sigma < \mu < \mu_0 + \sigma$, поскольку функция $\psi(t, \mu, 0)$ непрерывна. Теорема доказана.

Замечания. 1. Пусть $x = \varphi(t, \mu)$ — непродолжаемое решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(t_0, \mu) = x_0$. Фиксируем некоторое значение параметра $\mu = \mu_0$. Покажем, что производную $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}(t, \mu_0)$ можно найти, решая задачу Коши для некоторой системы линейных дифференциальных уравнений. В самом деле, дифференцируя тождество

$$\dot{\varphi}(t, \mu) = f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$$

по μ и полагая $\mu = \mu_0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} (t, \mu_0) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} (t, \Phi(t, \mu_0), \mu_0) \cdot \frac{\partial \Phi^j}{\partial \mu} (t, \mu_0) + \\ + \frac{\partial f}{\partial \mu} (t, \Phi(t, \mu_0), \mu_0), \end{aligned}$$

откуда следует, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} (t, \mu_0)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\dot{y} = A(t)y + b(t), \quad (18)$$

где

$$A(t) = \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^j} (t, \Phi(t, \mu_0), \mu_0) \right), \quad b(t) = \frac{\partial f}{\partial \mu} (t, \Phi(t, \mu_0), \mu_0).$$

Кроме того, поскольку $\Phi(t_0, \mu) = x_0$, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} (t_0, \mu_0) = \frac{\partial}{\partial \mu} (\Phi(t_0, \mu)) \Big|_{\mu=\mu_0} = \frac{\partial x_0}{\partial \mu} = 0.$$

Следовательно, для нахождения производной $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} (t, \mu_0)$ нужно решить задачу Коши для уравнения (18) с начальными условиями

$$y(t_0) = 0.$$

Таким образом, для нахождения производной $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} (t, \mu_0)$ нет необходимости искать решение $\Phi(t, \mu)$ для переменного μ и потом дифференцировать его по μ .

Система уравнений (18) называется *системой уравнений в вариациях* для системы (1) при $\mu = \mu_0$.

2. Если в теореме 2 потребовать непрерывность всех смешанных производных

$$\frac{\partial^q f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n} \partial \mu^\beta} \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta = q \leq p)$$

функции $f(t, x, \mu)$ по всем x^j ($j = 1, \dots, n$) и μ до p -го порядка включительно, то решение $x = \Phi(t, \mu)$ имеет p непрерывных производных по переменному μ в прямоугольнике

$$a \leq t \leq b, \quad |\mu - \mu_0| < \sigma,$$

и, следовательно, разлагается по степеням параметра μ по формуле Тейлора

$$\varphi(t, \mu) = \psi_0(t) + \mu\psi_1(t) + \dots + \mu^p\psi_p(t) + o(\mu^p). \quad (18')$$

Для нахождения функций $\psi_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, p$) нужно подставить разложение (18') в систему уравнений (1) и, разложив правую часть по степеням параметра μ , приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ . В результате получим систему дифференциальных уравнений, из которой последовательно находятся $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\dots$, $\psi_p(t)$. Начальные условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\psi_0(t_0) = x_0, \quad \psi_1(t_0) = 0, \quad \dots, \quad \psi_p(t_0) = 0,$$

так как в силу (18')

$$x_0 = \psi_0(t_0) + \mu\psi_1(t_0) + \dots + \mu^p\psi_p(t_0) + o(\mu^p).$$

3. Доказанные теоремы 1 и 2 очевидным образом обобщаются на случай, когда правая часть системы уравнений (1) зависит от нескольких параметров

$$f(t, x, \mu) = f(t, x, \mu^1, \dots, \mu^k).$$

В заключение параграфа покажем, что вопрос о зависимости решений задачи Коши от начальных данных сводится к исследованию зависимости решения некоторой системы уравнений от параметров, входящих в ее правую часть.

В самом деле, пусть

$$x = \varphi(t, s, \xi) \quad (19)$$

— непродолжаемое решение системы уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (20)$$

удовлетворяющее начальным условиям (при $t = s$)

$$\varphi(s, s, \xi) = \xi. \quad (21)$$

Введем новое независимое переменное $\tau = t - s$ и новую неизвестную функцию

$$y(\tau, s, \xi) = x(\tau + s) - \xi, \quad (22)$$

тогда

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{x}(\tau + s) = f(\tau + s, x(\tau + s)) = f(\tau + s, y(\tau) + \xi).$$

Если в качестве $x(t)$ взять решение (19) системы уравнений (20), удовлетворяющее начальным условиям (21), то соответствующая функция (22) будет решением системы уравнений

$$\frac{dy}{d\tau} = f(\tau + s, y + \xi), \quad (23)$$

удовлетворяющим начальным условиям (при $\tau = 0$)

$$y(0, s, \xi) = 0, \quad (24)$$

поскольку в силу (21)

$$y(0, s, \xi) = \varphi(s, s, \xi) - \xi = 0.$$

Таким образом, исследование зависимости решения системы уравнений (20) от начальных данных (s, ξ) сведено к исследованию зависимости решения задачи Коши (23), (24) от параметров s и ξ .

В силу замечания 3 к теореме 2 имеет место следующая

Теорема 3. Пусть правая часть $f(t, x)$ системы уравнений (20) непрерывна на открытом множестве G пространства переменных (t, x) и удовлетворяет условию Липшица по аргументу x на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в G . Пусть (s_0, ξ_0) — произвольная точка множества G и $x = \varphi(t, s, \xi)$ — семейство непродолжаемых решений системы уравнений (20), удовлетворяющих начальному условию $\varphi(s, s, \xi) = \xi$. Пусть, далее, при $s = s_0$, $\xi = \xi_0$ решение $x = \varphi(t, s_0, \xi_0)$ задано на интервале $m_1 < t < m_2$, и $[a, b]$ — произвольный отрезок, заключенный в (m_1, m_2) .

Тогда существует такое $\sigma > 0$, что при $|s - s_0| < \sigma$, $|\xi - \xi_0| < \sigma$ решения $x = \varphi(t, s, \xi)$ определены при $a \leq t \leq b$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ ($0 < \delta \leq \sigma$), что при $|s - s_0| < \delta$, $|\xi - \xi_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(t, s, \xi) - \varphi(t, s_0, \xi_0)| < \varepsilon$$

для всех $t \in [a, b]$, т. е. функция $\varphi(t, s, \xi)$ непрерывна по s и ξ в точке $s = s_0$, $\xi = \xi_0$, притом равномерно относительно t на отрезке $[a, b]$.

Точно так же, как и выше, доказывается, что функция $\varphi(t, s, \xi)$ непрерывна на множестве

$$a \leq t \leq b, \quad |s - s_0| < \sigma, \quad |\xi - \xi_0| < \sigma$$

по совокупности переменных (t, s, ξ) .

Имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Теорема 4. Пусть функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial f}{\partial x^i}(t, x)$ ($j = 1, \dots, n$) непрерывны на множестве G пространства переменных (t, x) . Пусть $x = \varphi(t, s, \xi)$ — решения системы уравнений (20), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(s, s, \xi) = \xi$ и определенные при $a \leq t \leq b, |s - s_0| < \sigma, |\xi - \xi_0| < \sigma$.

Тогда не только $\varphi(t, s, \xi)$, но и частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j}$ ($j = 1, \dots, n$) непрерывны при тех же значениях (t, s, ξ) .

§ 5. Приближенные методы решения задачи Коши

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые приближенные методы решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что выполнены условия теорем существования и единственности решения задачи Коши (1), (2).

Задачу приближенного решения системы уравнений (1) при условии (2) можно понимать по-разному. Мы будем понимать ее как задачу построения на заданном отрезке $[t_0, T]$ функции $y(t)$, которая «близка» к решению $x(t)$ задачи Коши (1), (2) с заданной точностью ε в том смысле, что

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (3)$$

При этом необходимо, чтобы для построения функции $y(t)$ требовалось конечное число простейших математических операций (таких, как сложение,

вычитание, умножение, деление и некоторые логические операции). Сами операции выполняются приближенно с заданной степенью точности.

Как правило, при этом оказывается достаточным указать значения функции $y(t)$ в некоторых точках $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, если интерполяция этой функции в промежутках (t_0, t_1) , (t_1, t_2) , $\dots$, (t_{N-1}, T) не нарушает условия (3).

Поскольку точность ε может меняться от задачи к задаче, то от алгоритма приближенного решения естественно требовать, чтобы функцию $y(t)$ можно было определить с произвольно заданной точностью $\varepsilon > 0$.

В § 1 (см. замечание 3 на стр. 94) было отмечено, что метод последовательных приближений Пикара является хорошим приближенным методом решения задачи Коши. Недостатком этого метода является сложность вычислений, связанная с необходимостью вычислять для каждого последующего приближения интеграл вида

$$\int_{t_0}^t f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi.$$

Тем не менее в некоторых случаях (как, например, для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами) метод Пикара приводит к удобным вычислительным формулам (см. пример на стр. 95).

Теперь рассмотрим подробнее два часто встречающихся метода решения задачи Коши (1), (2).

1. Метод Эйлера *).

Будем рассматривать равномерную сетку $\{t_k\}$

$$\tau = t_{k+1} - t_k = \text{const}$$

и зададим следующий алгоритм:

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_k, y_k); \quad y_0 = x_0. \quad (4)$$

*) Его называют также *методом ломаных* или *методом ломаных Эйлера*.

Он основан на приближенных равенствах

$$\begin{aligned} x(t_k) &\approx y_k, & x(t_{k+1}) &\approx y_{k+1}, \\ f(t_k, x(t_k)) &\approx f(t_k, y_k), & \dot{x}(t_k) &\approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau}. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (4) получаются, если в системе уравнений (1) при $t = t_k$ левую и правую части заменить соответствующими приближенными значениями (5). Иначе говоря, пользуясь методом Эйлера, мы заменяем функцию $f(t, x(t))$ кусочно-постоянной функцией, значение которой на промежутке (t_k, t_{k+1}) постоянно и равно $f(t_k, y_k)$.

Формулу (4) сравним с формулой

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\xi, x(\xi)) d\xi \quad (6)$$

(где $x_k = x(t_k)$), вытекающей из системы уравнений (1). Вычитая из (6) равенство (4), получим

$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k - y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k)] d\xi. \quad (7)$$

Будем предполагать, что функция $f(t, x)$ задана на открытом выпуклом множестве G , имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным и что точки (t_k, y_k) , (t_k, x_k) не выходят за пределы множества G .

Предположим, кроме того, что

$$\left| \frac{\partial f^i}{\partial t} \right| \leq F, \quad \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right| \leq F \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Оценим величину $f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k)$, стоящую под знаком интеграла в формуле (7). Для этой цели применим лемму 1 из § 3 дополнения и следствия из этой леммы. При этом заметим, что мы выделили особо один аргумент функции $f(t, x)$, именно t . Поэтому под векторами x и y в лемме 1 здесь следует понимать векторы

$$\{\xi, x^1(\xi), \dots, x^n(\xi)\} = \{\xi, x(\xi)\}$$

и

$$\{t_k, y_k^1, \dots, y_k^n\} = \{t_k, y_k\}.$$

Таким образом, мы имеем здесь дело с вектор-функцией $f = \{f^1, \dots, f^n\}$, зависящей от $(n+1)$ аргумента. На основании указанной леммы существует такая матрица $F(\xi)$ из n строк и $(n+1)$ столбцов, что

$$f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k) = F(\xi) \{\xi - t_k, x(\xi) - y_k\}. \quad (9)$$

В силу следствия из леммы 1 норма $\|F(\xi)\|$ матрицы $F(\xi)$ ограничена числом $\sqrt{n(n+1)}F$, поэтому из (9) получаем

$$\begin{aligned} |f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k)| &\leq \\ &\leq \sqrt{n(n+1)}F |\{\xi - t_k, x(\xi) - y_k\}| \leq \\ &\leq (n+1)F (|\xi - t_k| + |x(\xi) - y_k|) \leq \\ &\leq (n+1)F (|\xi - t_k| + |x(\xi) - x(t_k)| + \\ &\quad + |x(t_k) - y_k|). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть на множестве G $|f(t, x)| \leq f$, тогда $|\dot{x}(t)| \leq f$. Поэтому в силу следствия из леммы 2 дополнения

$$|x(\xi) - x(t_k)| \leq f |\xi - t_k|.$$

Подставляя последнее неравенство в (10), получим

$$\begin{aligned} |f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k)| &\leq \\ &\leq (n+1)F (|\xi - t_k| + f|\xi - t_k| + |x_k - y_k|) \leq \\ &\leq (n+1)F (1+f)\tau + (n+1)F |x_k - y_k| \quad (|\xi - t_k| \leq \tau). \end{aligned}$$

Обозначив $C = (n+1)F$, $D = (n+1)F(1+f)$, получим окончательно

$$|f(\xi, x(\xi)) - f(t_k, y_k)| \leq C |x_k - y_k| + D\tau. \quad (11)$$

Из (7), в силу неравенства (11), следует, что

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - y_{k+1}| &\leq |x_k - y_k| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (C |x_k - y_k| + D\tau) d\xi = \\ &= (1 + C\tau) |x_k - y_k| + D\tau^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $|x_k - y_k| = \rho_k$ и рассмотрим монотонно возрастающую последовательность z_k , определяемую соотношениями

$$z_{k+1} = z_k + C\tau z_k + D\tau^2, \quad z_0 = 0.$$

Используя (12), с помощью метода математической индукции легко доказываются неравенства $z_k \geq \rho_k$.

Запишем теперь последние формулы в виде

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} = Cz_k + D\tau, \quad z_0 = 0. \quad (13)$$

Обозначим $z(t)$ решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} = Cz + D\tau, \quad z(t_0) = 0.$$

Очевидно,

$$z(t) = \frac{D\tau}{C} [e^{C(t-t_0)} - 1].$$

Покажем, что $z(t_k) \geq z_k$. Для этого применим метод математической индукции. При $k=0$ неравенство очевидно. Пусть $z(t_k) \geq z_k$. Тогда, в силу монотонности $z(t)$ и равенств (13),

$$\begin{aligned} z(t_{k+1}) - z(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dz}{dt} dt = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (Cz + D\tau) dt \geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} (Cz(t_k) + D\tau) dt \geq \\ &\geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} (Cz_k + D\tau) dt = (Cz_k + D\tau)\tau = z_{k+1} - z_k. \end{aligned}$$

Таким образом, $z(t_{k+1}) \geq z_{k+1} + z(t_k) - z_k$ и $z(t_{k+1}) \geq z_{k+1}$, поскольку по предположению $z(t_k) \geq z_k$.

Итак,

$$z(t_k) \geq z_k \geq \rho_k = |x_k - y_k|$$

и

$$|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{y}_k| = |\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| \leq z(t_k) = \frac{D\tau}{C} [e^{C(t_k - t_0)} - 1].$$

В частности,

$$|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{y}_k| \leq \frac{D\tau}{C} [e^{C(\tau - t_0)} - 1]. \quad (14)$$

Последняя формула показывает, что при $\tau \rightarrow 0$ $|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{y}_k| \rightarrow 0$. По этой формуле можно вычислить шаг τ , который достаточно применить в алгоритме (4), чтобы выдержать заданную точность ε .

При уменьшении τ погрешность схемы уменьшается линейно по τ , поэтому схему Эйлера (4) называют *схемой первого порядка точности*.

Пример. Применяя метод Эйлера для решения задачи Коши

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1 \quad (15)$$

на отрезке $[0, 1]$, получим следующие формулы:

$$y_{k+1} = (1 + \tau)y_k, \quad y_0 = 1 \quad \left(\tau = \frac{1}{N}\right),$$

откуда следует, что

$$y_k = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^k.$$

Сравним полученное приближенное решение с точным решением $x(t) = e^t$. Наибольшая погрешность $|x_k - y_k|$ будет в точке $t = 1$ при $k = N$.

Покажем, что имеет место оценка

$$0 < x(1) - y_N = e - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N < \frac{e}{2N}.$$

В самом деле, из неравенств $\frac{1}{N} > \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) > \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2}$ следует, что

$$\begin{aligned} e &> \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N > e^{1 - \frac{1}{2N}} = \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2!(2N)^2} - \dots\right) > e \left(1 - \frac{1}{2N}\right), \end{aligned}$$

т. е.

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N < \frac{e}{2N}.$$

Таким образом,

$$|x_k - y_k| \leq |x_N - y_N| < \frac{e}{2N} = \frac{e\tau}{2} \quad (k=0, 1, \dots, N): \quad (16)$$

Из полученных неравенств видно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = 0 \quad (k=0, 1, \dots, N).$$

Поэтому можно оценить число N точек сетки, при котором ошибка приближенного решения будет заведомо меньше назначенной точности ε . Из требования $|x_k - y_k| < \varepsilon$ теперь легко получаем $N \geq \left[\frac{e}{2\varepsilon} \right] + 1$. Так, например, при $\varepsilon = 10^{-2}$ имеем $N \geq 136$, при $\varepsilon = 10^{-3}$ $N \geq 1360$.

Отметим, наконец, что оценка (14) ошибки метода Эйлера довольно груба. Так, для рассматриваемой задачи Коши (15) имеем $t_0 = 0$, $T = 1$, $F = 1$, $f = e$, $n = 1$; поэтому $C = 2$, $D = 2(e + 1)$ и

$$|x_k - y_k| < (e + 1)\tau(e^2 - 1).$$

Коэффициент при τ (в сравнении с формулой (16)) завышен в $\frac{2}{e}(e + 1)(e^2 - 1)$ раз, т. е. примерно в 17 раз. Поэтому, пользуясь подобной «теоретической» оценкой точности схемы, вычислитель может взять шаг τ в 17 раз меньше, чем требуется реально для достижения заданной точности. Это в 17 раз увеличит общий объем вычислительной работы!

З а м е ч а н и я. 1. Приведенный пример хорошо иллюстрирует общее положение с теоретическими оценками точности приближенных решений дифференциальных уравнений. За редким исключением они всегда сильно завышают ошибку метода, и по этой причине с их помощью нельзя достаточно точно определить максимальный шаг τ . В связи с этим приходится пользоваться самими результатами численного решения для оценки точности. Например, можно провести два расчета с шагами τ и 2τ . Если результаты отличаются друг от друга в пределах заданной точности, то для сходящегося метода (т. е. метода, для которого доказано, что $|x_k - y_k| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$) это служит характеристикой реальной точности алгоритма.

2. Если правую часть $f(t, x(t))$ системы уравнений (1), рассматриваемой на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, заменить на $f(t_{k+1}, y_{k+1})$, то для приближенного решения

задачи Коши (1), (2) (так же, как это делалось для метода Эйлера) получим следующие формулы:

$$y_{k+1} = y_k + \tau f(t_{k+1}, y_{k+1}), \quad y_0 = x_0.$$

В отличие от алгоритма (4), полученные формулы, вообще говоря, не позволяют явно выразить y_{k+1} через y_k и редко используются. Такие схемы называются *неявными*.

2. Схема «предиктор - корректор».

Эту схему можно представить формулами

$$y_{k+1}^* = y_k + \tau f(t_k, y_k), \quad y_0 = x_0, \quad (17)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\tau}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^*)], \quad (18)$$

где y_{k+1}^* — некоторые вспомогательные векторы.

После того как величина y_k вычислена, вычисляют y_{k+1}^* по формуле (17). Это первое вычисление называют «предиктором» *). Затем по более точной формуле (18) вычисляют y_{k+1} . Это вычисление называется «корректором».

Подставляя формулу (17) в (18), получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\tau}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \tau f(t_k, y_k))]. \quad (19)$$

Для оценки погрешности метода (17), (18), аналогично предыдущему, нужно оценить величину

$$\begin{aligned} x_{k+1} - y_{k+1} = & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[f(\xi, x(\xi)) - \frac{1}{2} f(t_k, y_k) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} f(t_{k+1}, y_k + \tau f(t_k, y_k)) \right] d\xi + x_k - y_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Подобно тому, как это делалось выше при рассмотрении метода Эйлера, можно показать, что

$$|x_k - y_k| = O(\tau)$$

) От английского слова to predict — предсказывать. Формулы (17) дают предварительные значения y_{k+1}^ , которые затем корректируются по формуле (18).

(последняя запись означает, что $|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k|$ имеет порядок не ниже, чем τ).

Применив к интегралу в (20) более точную оценку, можно показать, что на самом деле $|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| = O(\tau^2)$. Для этого разложим функции $f(\xi, \mathbf{x}(\xi))$ и $f(t_{k+1}, \mathbf{y}_k + \tau f(t_k, \mathbf{y}_k))$ по формуле Тейлора *):

$$\begin{aligned} f(\xi, \mathbf{x}(\xi)) &= f(t_k + (\xi - t_k), \mathbf{y}_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + (\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_k)) = \\ &= f(t_k, \mathbf{y}_k) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, \mathbf{y}_k)(\xi - t_k) + \\ &\quad + \nabla f(t_k, \mathbf{y}_k)[(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + (\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_k)] + O(\tau^2), \\ f(t_{k+1}, \mathbf{y}_k + \tau f(t_k, \mathbf{y}_k)) &= f(t_k, \mathbf{y}_k) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, \mathbf{y}_k) \cdot \tau + \\ &\quad + \nabla f(t_k, \mathbf{y}_k) \cdot f(t_k, \mathbf{y}_k) \cdot \tau + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (21)$$

В первую из формул (21) подставим разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_k &= f(t_k, \mathbf{y}_k)(\xi - t_k) + O(\tau^2) = \\ &= f(t_k, \mathbf{y}_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k))(\xi - t_k) + O(\tau^2) = \\ &= f(t_k, \mathbf{y}_k)(\xi - t_k) + O(\tau^2); \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} f(\xi, \mathbf{x}(\xi)) &= f(t_k, \mathbf{y}_k) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, \mathbf{y}_k)(\xi - t_k) + \\ &\quad + \nabla f \cdot f \cdot (\xi - t_k) + \nabla f \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим формулу (22) и вторую из формул (21) в (20). Воспользовавшись соотношением

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\xi - t_k - \frac{\tau}{2} \right) d\xi = 0,$$

*) Начиная отсюда и до конца параграфа, мы будем опускать некоторые несложные промежуточные вычисления, чтобы избежать громоздкости изложения.

придем к выражениям

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1} &= \\
 &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \left(\xi - t_k - \frac{\tau}{2} \right) + \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} \left(\xi - t_k - \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \nabla \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + O(\tau^2) \right] d\xi + \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k = \\
 &= \tau \nabla \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} O(\tau^2) d\xi + \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k = \\
 &= \tau \nabla \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) + O(\tau^3) + \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Если норма матрицы $\nabla \mathbf{f}$ ограничена:

$$\|\nabla \mathbf{f}\| \leq C,$$

то из формулы (23), так же как и выше, получим оценку

$$|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1}| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| + C\tau |\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| + O(\tau^3).$$

Дифференциальное уравнение для мажоранты $z(t)$ имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = Cz + O(\tau^2), \quad z(t_0) = 0. \quad (24)$$

Из (24) находим

$$z(t) = O(\tau^2) [e^{C(t-t_0)} - 1]$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k| \leq O(\tau^2) [e^{C(t_k-t_0)} - 1].$$

Таким образом, схема «предиктор-корректор» есть схема второго порядка точности.

Пример. Применим схему (19) второго порядка точности для приближенного решения задачи Коши (15). Для нее формулы (19) принимают вид

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= (1 + \tau + 0,5\tau^2) y_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \\
 y_0 &= 1.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$y_k = (1 + \tau + 0,5\tau^2)^k \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Ошибка $|x_k - y_k| \leq e - y_N$ оценивается аналогично предыдущему. Используя неравенство

$$\ln(1 + \tau + 0,5\tau^2) > \tau(1 + 0,5\tau) - \frac{\tau^2(1 + 0,5\tau)^2}{2},$$

получаем ($\tau = 1/N$)

$$(1 + \tau + 0,5\tau^2)^N > e^{1 - 0,5\tau^2(1 + 0,25\tau)},$$

$$|x_k - y_k| \leq e - y_N < e \cdot 0,5\tau^2(1 + 0,25\tau) = \frac{e}{2N^2} \left(1 + \frac{1}{4N}\right).$$

Задаваясь точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, находим отсюда, что $N \geq 12$; при $\varepsilon = 10^{-3}$ имеем $N \geq 38$. Напомним, что для метода Эйлера соответствующее число точек значительно больше: $N \geq 136$ и $N \geq 1360$!

Этот пример показывает, что применение схемы второго порядка точности может существенно сократить число точек N и общий объем вычислительной работы по сравнению с методом Эйлера.

В рассмотренных выше схемах при вычислении y_{k+1} использовалось лишь одно значение y_k из вычисленных $y_0, \dots, y_k$. Поэтому эти схемы называют *двухточечными*. Покажем, что порядок точности схемы можно повысить и за счет увеличения числа точек, входящих в формулы для вычисления y_{k+1} .

В разложении

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \dot{x}(t_k)\tau + \ddot{x}(t_k)\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \quad (25)$$

используем приближенные формулы

$$x(t_k) \approx y_k, \quad x(t_{k+1}) \approx y_{k+1},$$

$$\dot{x}(t_k) = f(t_k, x(t_k)) \approx f(t_k, y_k),$$

$$\ddot{x}(t_k) \approx \frac{\dot{x}(t_k) - \dot{x}(t_{k-1})}{\tau} \approx \frac{f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})}{\tau}.$$

Подставив эти формулы в (25) и отбросив член $O(\tau^3)$, получим трехточечную схему второго порядка точности

$$y_{k+1} = y_k + \frac{3}{2}\tau f(t_k, y_k) - \frac{1}{2}\tau f(t_{k-1}, y_{k-1}) \quad (26)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Схема (26) имеет весьма существенный недостаток: для вычисления по ней недостаточно одного лишь начального значения $y_0 = x_0$, необходимо знать

также y_1 . Это значение не может быть вычислено из самой схемы (26); оно должно быть получено из других формул. При этом очень существенно, чтобы значение y_1 было вычислено также с точностью до членов порядка $O(\tau^3)$, иначе мы потеряем точность, которой обладает схема (26). (Значение y_1 может быть вычислено, например, по схеме «предиктор-корректор» (19).)

Итак, многоточечные разностные схемы обладают общим недостатком: для них необходимо отдельно рассчитывать «начальные значения» по совершенно другому алгоритму. Это приводит к излишней работе, в частности, это более чем удваивает работу по программированию.

Другой недостаток многоточечных разностных схем состоит в том, что изменение шага τ в процессе счета требует специальной процедуры — «смены шага». Суть этой процедуры состоит в том, что при изменении шага τ в процессе счета приходится (применяя специальный алгоритм) заново рассчитывать «начальные значения».

Многоточечные разностные схемы, как правило, имеют решения, поведение которых даже качественно не похоже на поведение решений дифференциальных уравнений, которые они аппроксимируют.

Например, для схемы (26) в применении к задаче Коши (15) имеем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{3}{2} \tau y_k - \frac{1}{2} \tau y_{k-1}.$$

Будем искать решения вида $y_k = Aq^k$, где A и q — постоянные. Тогда для q получим квадратное уравнение

$$q^2 - (1 + 1,5\tau)q + 0,5\tau = 0,$$

корни которого

$$q_1 = 0,5 + 0,75\tau + 0,5\sqrt{1 + \tau + 2,25\tau^2},$$

$$q_2 = 0,5 + 0,75\tau - 0,5\sqrt{1 + \tau + 2,25\tau^2}.$$

При малых τ $q_1 = 1 + \tau + 0,5\tau^2 + O(\tau^3) \approx e^\tau$, $q_2 = O(\tau)$. Тем самым решения $y_k = Aq_2^k$ убывают по модулю с ростом k , что совершенно неестественно для решений дифференциального уравнения $\dot{x} = x$ (растущих с ростом t).

Приведенные схемы (4), (19), с одной стороны, и многоточечная схема (26) демонстрируют два раз-

личных подхода к составлению разностной схемы для дифференциального уравнения (1).

Первый подход носит название *метода Рунге — Кутты* и состоит в том, что при вычислении y_{k+1} используется лишь одна величина y_k из сосчитанных величин $y_1, \dots, y_k$. Аппроксимация уравнения и повышение порядка точности схемы достигаются в методе Рунге — Кутта за счет вычисления правой части уравнения (1) — функции $f(t, x)$ в ряде точек (t_k^i, y_k^i) ($i = 1, \dots, m$), зависящих явно лишь от y_k . Если используются m точек, то при правильном подборе коэффициентов разностной схемы можно достичь m -го порядка точности разностной схемы*). Таковы схемы метода Эйлера (4) и схема «предиктор-корректор» (19), для которых соответственно $m = 1$ и $m = 2$.

Второй подход называют *методом Адамса*. В отличие от метода Рунге — Кутта, в нем используется несколько значений $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}$ для вычисления значений правой части $f(t_k, y_k), f(t_{k-1}, y_{k-1}), \dots, f(t_{k-m+1}, y_{k-m+1})$ системы уравнений (1). Эти значения затем используются в разностной схеме.

Таковы, например, схема метода Эйлера (4), для которой $m = 1$, и трехточечная схема (26), для которой $m = 2$. Правильно подобрав коэффициенты разностной схемы, можно достичь m -го порядка точности.

Как мы уже видели выше, схемы, получаемые по методу Адамса, при $m > 1$ обладают рядом существенных недостатков по сравнению с методами Рунге — Кутта. Неудивительно поэтому, что наибольшее распространение в практике вычислений и особенно при вычислениях на ЭВМ получили схемы, основанные на методе Рунге — Кутта.

Широкое распространение получила схема Рунге — Кутта четвертого порядка точности; она реализована в виде стандартных программ для ЭВМ. Некоторые стандартные программы имеют автоматический выбор шага τ , достаточного для достижения заданной точности ε . В методе Рунге — Кутта каждый

*) Это верно при $m = 1, 2, 3, 4, 6$. При $m = 5$ не существует схемы Рунге — Кутта пятого порядка точности.

новый шаг по времени не зависит от предыдущего, поэтому в процессе счета легко менять шаг.

Приведем без вывода формулы того варианта метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности, который реализован в большинстве стандартных программ. Они имеют следующий вид в применении к задаче Коши (1), (2):

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{\tau}{6} (a_k + 2b_k + 2c_k + d_k), \\ a_k &= f(t_k, y_k), \\ b_k &= f(t_k + 0,5\tau, y_k + 0,5\tau a_k), \\ c_k &= f(t_k + 0,5\tau, y_k + 0,5\tau b_k), \\ d_k &= f(t_k + \tau, y_k + \tau c_k) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, N - 1). \end{aligned} \quad (27)$$

§ 6. Поведение решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка часто встречаются при решении самых различных задач физики.

Здесь мы рассмотрим простейшие свойства решений линейного однородного уравнения

$$\ddot{x} + a_1(t) \dot{x} + a_2(t) x = 0, \quad (1)$$

связанные с частотой перемен знака функции $x(t)$.

Пусть функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\dot{a}_1(t)$ непрерывны на некотором интервале $\alpha < t < \beta$. Вместо $x(t)$ введем новую неизвестную функцию $y(t)$ по формуле

$$x(t) = y(t) e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}, \quad (2)$$

тогда для $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + B(t) y = 0, \quad (3)$$

где $B(t) = a_2(t) - \frac{a_1^2(t)}{4} - \frac{\dot{a}_1(t)}{2}$ — непрерывная на интервале (α, β) функция.

Отметим, что в силу (2) функции $x(t)$, $y(t)$ меняют знак при одних и тех же значениях t . Поэтому в дальнейшем будем считать, что уравнение (1) приведено к виду (3).

Точку t_0 , в которой $y(t_0) = 0$, будем, как обычно, называть нулем функции $y(t)$.

Лемма. Пусть $y(t)$ — нетривиальное, т. е. не равное нулю тождественно, решение уравнения (3). Тогда множество нулей решения $y(t)$, содержащееся на любом замкнутом промежутке $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \beta)$, конечно.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует бесконечная последовательность $t_k \subset [t_1, t_2]$ нулей решения $y(t)$. Из ограниченной последовательности t_k можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $t_{n_k} \rightarrow t_0 \in [t_1, t_2]$.

В силу непрерывности решения $y(t)$

$$y(t_0) = y(\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(t_{n_k}) = 0.$$

По определению производной

$$\dot{y}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y(t_{n_k}) - y(t_0)}{t_{n_k} - t_0} = 0.$$

Таким образом, $y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$. Но тогда по теореме единственности $y(t) \equiv 0$, что противоречит предположению относительно $y(t)$.

Из доказанной леммы непосредственно получаем следующее.

Следствие. Если нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (3) имеет больше одного нуля на (α, β) и если $y(t_0) = 0$, то существует такой нуль $t_1 \neq t_0$ решения $y(t)$, что интервал (t_0, t_1) не содержит других нулей этого решения. Такие точки t_0, t_1 называют последовательными нулями решения $y(t)$.

Рассмотрим теперь два уравнения

$$\ddot{y} + B_1(t)y = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{z} + B_2(t)z = 0, \quad (5)$$

где $B_1(t)$ и $B_2(t)$ непрерывны на интервале (α, β) .

Теорема Штурма. Пусть $B_1(t) \leq B_2(t)$ на (α, β) и t_0, t_1 — два последовательных нуля нетриви-

ального решения $y = y(t)$ уравнения (4). Тогда любое решение уравнения (5) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. По условию теоремы $y(t_0) = y(t_1) = 0$ и на интервале (t_0, t_1) функция $y(t)$ сохраняет знак.

Без ограничения общности можно считать $y(t) > 0$ на интервале (t_0, t_1) , так как в противном случае можно было бы рассмотреть решение

$$y = -y(t).$$

Пусть $z(t)$ — произвольное решение уравнения (5). Допустим, что $z(t)$ не имеет нулей на $[t_0, t_1]$, и будем считать функцию $z(t)$ положительной на этом отрезке.

Умножив уравнение (4) на $z(t)$, а (5) — на $y(t)$ и вычитая одно из другого, получим

$$\dot{y}z - \dot{z}y = (B_2(t) - B_1(t)) yz. \quad (6)$$

Равенство (6) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}z - \dot{z}y) = (B_2(t) - B_1(t)) yz. \quad (7)$$

Проинтегрировав соотношение (7) в пределах от t_0 до t_1 и воспользовавшись равенством $y(t_0) = y(t_1) = 0$, получим

$$\dot{y}(t_1)z(t_1) - \dot{y}(t_0)z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (B_2(t) - B_1(t)) y(t)z(t) dt.$$

Так как $y(t) > 0$ на (t_0, t_1) , то $\dot{y}(t_0) \geq 0$. Равенство $\dot{y}(t_0) = 0$ исключено, так как иначе $y(t)$ было бы тождественно равно нулю.

Таким образом, $\dot{y}(t_0) > 0$. Точно так же можно показать, что $\dot{y}(t_1) < 0$.

Так как $z(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_1]$, в частности, $z(t_0) > 0$, $z(t_1) > 0$ и $B_2(t) - B_1(t) \geq 0$ по условию, то приходим к противоречию:

$$0 > \dot{y}(t_1)z(t_1) - \dot{y}(t_0)z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (B_2 - B_1) yz dt \geq 0.$$

Следствие 1. Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — линейно независимые решения уравнения

$$\ddot{y} + B(t)y = 0.$$

Если t_0 , t_1 — два последовательных нуля решения $y_1(t)$, то решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_0, t_1) в точности один нуль.

Доказательство. Вначале докажем, что на интервале (t_0, t_1) имеется хотя бы один нуль решения $y_2(t)$. В самом деле, пусть уравнения (4) и (5) из теоремы Штурма совпадают и $B_1(t) = B_2(t) = B(t)$, тогда решение $y_2(t)$ имеет на отрезке $[t_0, t_1]$ хотя бы один нуль (в силу теоремы Штурма). Но ни t_0 , ни t_1 не могут быть нулями $y_2(t)$, так как в противном случае определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{vmatrix}$$

обращался бы в нуль при $t = t_0$ или при $t = t_1$ и решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ были бы линейно зависимы.

Итак, решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_0, t_1) по крайней мере один нуль. Обозначим его t'_0 .

Докажем теперь, что других нулей у решения $y_2(t)$ на интервале (t_0, t_1) нет. Допустим, что решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_0, t_1) более одного нуля. Тогда в силу следствия из леммы, доказанной в начале этого параграфа, в интервале (t_0, t_1) существует такой нуль t'_1 решения $y_2(t)$, что между t'_0 и t'_1 других нулей уже нет, т. е. t'_0 и t'_1 — последовательные нули решения $y_2(t)$. Но тогда по теореме Штурма между t'_0 и t'_1 должен быть хотя бы один нуль решения $y_1(t)$, а это противоречит тому, что t_0 и t_1 — последовательные нули функции $y_1(t)$.

Следствие 2. Если $B(t) \leq 0$ на интервале (α, β) , то всякое нетривиальное решение уравнения

$$\ddot{y} + B(t)y = 0 \tag{8}$$

имеет на (α, β) не более одного нуля.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется нетривиальное решение $y(t)$ уравне-

ния (8), имеющее более одного нуля на (α, β) . Пусть t_0 и t_1 — последовательные нули этого уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} = 0, \quad (9)$$

для которого $B_2(t) = 0 \geq B(t)$.

По теореме Штурма любое решение $z(t)$ уравнения (9) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_0, t_1]$. Однако это не так: решение $z(t) = 1$ уравнения (9) вообще не имеет нулей. Противоречие доказывает следствие 2.

Пример. На интервале $0 < t < +\infty$ рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\ddot{x} + \frac{1}{t} \dot{x} + x = 0. \quad (10)$$

Заменяя неизвестную функцию $x(t)$ по формуле (2):

$$x(t) = y(t) e^{-\frac{1}{2} \int_1^t \frac{d\tau}{\tau}} = \frac{y(t)}{\sqrt{t}},$$

для $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) y = 0. \quad (11)$$

Одним из решений уравнения (10) является функция Бесселя нулевого порядка

$$x = J_0(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} [k!]^2}.$$

Соответствующее решение уравнения (11) имеет вид

$$y(t) = \sqrt{t} J_0(t). \quad (12)$$

Уравнение (11) сравним с уравнением

$$\ddot{z} + z = 0.$$

Решение $z = \sin t$ этого уравнения имеет на интервале $(0, +\infty)$ бесконечное множество нулей $t_k = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$).

По теореме Штурма решение (12) уравнения (11), а следовательно и функция $J_0(t)$, имеет на каждом из отрезков $[k\pi, (k+1)\pi]$ ($k = 1, 2, \dots$) по крайней мере один нуль.

§ 7. Первоначальные сведения о краевой задаче

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a(t) \dot{x} + b(t) x = f(t). \quad (1)$$

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ определены и непрерывны на некотором отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$.

Будем искать решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) - \alpha_0 x(t_0) &= \alpha_1, \\ \dot{x}(t_1) - \beta_0 x(t_1) &= \beta_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где α_0 , α_1 , β_0 , β_1 — постоянные.

Условия (2) называются *краевыми* или *граничными условиями*, а сама задача (1), (2) — *краевой задачей*.

Условия (2) не позволяют найти одновременно значение $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ ни при $t = t_0$, ни при $t = t_1$. Поэтому краевая задача (1), (2) не сводится к задаче Коши.

Для краевой задачи (1), (2) может осуществляться любая из трех возможностей: она может иметь единственное решение, бесконечное множество решений и вообще не иметь решений.

Пример. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (3)$$

общее решение которого имеет вид

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad (4)$$

рассмотрим следующие три краевые задачи с граничными условиями:

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1; \quad (5)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 1; \quad (6)$$

$$\ddot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 0. \quad (7)$$

Краевая задача (3), (5) имеет единственное решение, так как из формулы (4), в силу условий (5), получаем

$$c_1 = -\frac{1}{\sin 1}, \quad c_2 = 0.$$

Краевая задача (3), (6) не имеет решений, так как из формулы (4), в силу (6), следует что

$$1 = -c_1 \sin \pi = 0,$$

что невозможно.

Краевая задача (3), (7) имеет бесконечное множество решений:

$$x = c_1 \cos t,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Рассмотрим три способа решения задачи (1), (2), причем будем предполагать, что решение этой задачи существует и единственно.

1. Метод «стрельбы».

Пусть $x_0(t)$ — частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_0(t_0) = \alpha, \quad \dot{x}_0(t_0) = \alpha_0 x_0(t_0) + \alpha_1,$$

где α — произвольно выбранное число; $y_0(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_0(t_0) = \gamma, \quad \dot{y}_0(t_0) = \alpha_0 y_0(t_0)$$

(γ — произвольно выбранное число).

Тогда при любом c функция

$$x(t) = x_0(t) + c y_0(t) \quad (8)$$

есть решение уравнения (1), удовлетворяющее первому из краевых условий (2).

Константу c подбираем так, чтобы решение (8) удовлетворяло второму краевому условию из (2):

$$\dot{x}_0(t_1) + c \dot{y}_0(t_1) - \beta_0 [x_0(t_1) + c y_0(t_1)] = \beta_1;$$

отсюда находим

$$c = \frac{\beta_1 - \dot{x}_0(t_1) + \beta_0 x_0(t_1)}{\dot{y}_0(t_1) - \beta_0 y_0(t_1)}. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что $\dot{y}_0(t_1) - \beta_0 y_0(t_1) \neq 0$, так как в противном случае краевая задача (1), (2) либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений. Мы же рассматриваем случай, когда задача (1), (2) имеет единственное решение.

Итак, метод «стрельбы» состоит в том, чтобы из однопараметрического семейства решений (8) уравнения (1), удовлетворяющих первому из краевых условий (2), выделить то, которое удовлетворяет второму краевому условию.

При численном решении краевой задачи метод «стрельбы» имеет существенный недостаток. Константа c , вычисляемая по формуле (9), находится с ошибкой. Если $y_0(t)$ — быстро растущее решение типа e^{kt} ($k > 0$), то решение (8) будет найдено с большой погрешностью. В самом деле, если $x_0(t)$, $y_0(t)$ и c вычислены с погрешностями Δx_0 , Δy_0 , Δc соответственно, то, в силу (8), ошибка вычисления $x(t)$ есть

$$\Delta x = \Delta x_0 + c \Delta y_0 + y_0 \Delta c + \Delta y_0 \cdot \Delta c.$$

Из этой формулы видно, что погрешность $|\Delta x|$ может быть весьма большой за счет слагаемого

$$y_0 \Delta c \approx \Delta c e^{kt} \quad (k > 0).$$

Рассмотрим другой метод решения краевой задачи, как правило, свободный от этого недостатка.

II. Метод «прогонки» (или факторизации).

Запишем уравнение (1) в виде

$$\left[\frac{d}{dt} + \mu(t) \right] \left[\frac{d}{dt} + \nu(t) \right] x = f(t). \quad (10)$$

Для этого функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ нужно подобрать так, чтобы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + [\mu(t) + \nu(t)] \dot{x} + [\dot{\nu}(t) + \mu(t) \cdot \nu(t)] x &\equiv \\ &\equiv \ddot{x} + a(t) \dot{x} + b(t) x, \end{aligned}$$

т. е. функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \mu(t) + \nu(t) &= a(t), \\ \dot{\nu}(t) + \mu(t) \nu(t) &= b(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнений (11) получаем

$$\begin{aligned} \mu(t) &= a(t) - \nu(t), \\ \dot{\nu}(t) + a(t) \nu(t) - \nu^2(t) &= b(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Положим $\nu(t_0) = -\alpha_0$, тогда для нахождения $\nu(t)$ имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) + a(t) \nu(t) - \nu^2(t) &= b(t), \\ \nu(t_0) &= -\alpha_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим $\dot{x} + v(t)x = z$, тогда, в силу первого граничного условия из (2),

$$z(t_0) = \dot{x}(t_0) + v(t_0)x(t_0) = \dot{x}(t_0) - \alpha_0 x(t_0) = \alpha_1$$

и для нахождения $z(t)$ (в силу (10) и (12)) получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}\dot{z} + [a(t) - v(t)]z &= f(t), \\ z(t_0) &= \alpha_1.\end{aligned}\tag{14}$$

Для нахождения $x(t)$ нужно решить задачу Коши

$$\begin{aligned}\dot{x} + v(t)x &= z(t), \\ x(t_1) &= x_1,\end{aligned}\tag{15}$$

причем $x(t_1) = x_1$ находится из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_1) - \beta_0 x(t_1) &= \beta_1, \\ \dot{x}(t_1) + v(t_1)x(t_1) &= z(t_1).\end{aligned}$$

Легко видеть, что, решая последовательно задачи Коши (13), (14) и (15), получим решение $x(t)$ краевой задачи (1), (2).

З а м е ч а н и я. 1. Решение задачи Коши (14) называется *прямой прогонкой*, а задачи Коши (15) — *обратной прогонкой*.

2. Можно показать, что при решении краевой задачи методом прогонки не происходит потери точности, характерной для метода «стрельбы».

3. Встречаются краевые задачи с несколько более общими граничными условиями, чем (2), а именно

$$\begin{aligned}\alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= \alpha_2, \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= \beta_2,\end{aligned}$$

причем $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ и $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$.

III. Решение краевой задачи с помощью функции Грина.

Для уравнения

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)\tag{16}$$

рассмотрим краевую задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned}\alpha_0 \dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) &= 0 \quad (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0), \\ \beta_0 \dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) &= 0 \quad (\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0).\end{aligned}\quad (17)$$

Как и раньше, будем предполагать, что рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение.

Пусть $x = x_1(t)$ — какое-либо нетривиальное решение однородного уравнения

$$\ddot{x} + a(t) \dot{x} + b(t) x = 0, \quad (18)$$

удовлетворяющее первому из граничных условий (17),

$$\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0) = 0,$$

а $x = x_2(t)$ — нетривиальное решение уравнения (18), удовлетворяющее второму граничному условию

$$\beta_0 \dot{x}_2(t_1) + \beta_1 x_2(t_1) = 0.$$

Тогда $x_1(t)$ не удовлетворяет второму граничному условию, так как в противном случае при любой постоянной c функции $x = cx_1(t)$ были бы решениями краевой задачи (18), (17), и наша исходная краевая задача (16), (17) имела бы бесконечное множество решений. Точно так же доказывается, что $x_2(t)$ не удовлетворяет первому граничному условию. Итак,

$$\begin{aligned}\beta_0 \dot{x}_1(t_1) + \beta_1 x_1(t_1) &\neq 0, \\ \alpha_0 \dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0) &\neq 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Построенные решения $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ линейно независимы, так как в противном случае они были бы пропорциональны и потому удовлетворяли бы одним и тем же граничным условиям, что невозможно.

Решение неоднородного уравнения (16) будем искать методом вариации постоянных. Записывая решение $x(t)$ в виде

$$x(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t), \quad (20)$$

для определения функций $\dot{c}_1(t)$ и $\dot{c}_2(t)$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t) x_1(t) + \dot{c}_2(t) x_2(t) &= 0, \\ \dot{c}_1(t) \dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t) \dot{x}_2(t) &= f(t).\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t) &= -\frac{x_2(t) f(t)}{w(t)}, \\ \dot{c}_2(t) &= \frac{x_1(t) f(t)}{w(t)},\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

— определитель Вронского, составленный для линейно независимых решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Интегрируя соотношения (21), получим

$$\begin{aligned}c_1(t) &= -\int_{t_1}^t \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + \gamma_1 = \int_t^{t_1} \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + \gamma_1, \\ c_2(t) &= \int_{t_0}^t \frac{x_1(s) f(s)}{w(s)} ds + \gamma_2,\end{aligned}$$

где γ_1 и γ_2 — постоянные.

Подставляя найденные выражения для $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в (20), получим общее решение уравнения (16)

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1(t) \int_t^{t_1} \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + \\ &+ x_2(t) \int_{t_0}^t \frac{x_1(s) f(s)}{w(s)} ds + \gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t).\end{aligned}\tag{22}$$

Дифференцируя (22) по t , имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{x}_1(t) \int_t^{t_1} \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + \\ &+ \dot{x}_2(t) \int_{t_0}^t \frac{x_1(s) f(s)}{w(s)} ds + \gamma_1 \dot{x}_1(t) + \gamma_2 \dot{x}_2(t).\end{aligned}\tag{23}$$

Потребуем теперь, чтобы решение (22) удовлетворяло граничным условиям (17). Подставляя выражения (22), (23) в первое из граничных условий (17), получим (так как $\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0) = 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0)) \int_t^{t_1} \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + \\ &+ \gamma_1 (\alpha_0 \dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0)) + \gamma_2 (\alpha_0 \dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0)) = \\ &= \gamma_2 (\alpha_0 \dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0)). \end{aligned}$$

В силу неравенств (19) это возможно только при $\gamma_2 = 0$.

Подобным же образом доказывается, что $\gamma_1 = 0$. Итак, решение краевой задачи (16), (17) можно представить в виде

$$x(t) = x_1(t) \int_t^{t_1} \frac{x_2(s) f(s)}{w(s)} ds + x_2(t) \int_{t_0}^t \frac{x_1(s) f(s)}{w(s)} ds,$$

или

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, s) f(s) ds, \quad (24)$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_1(s) x_2(t)}{w(s)}, & t_0 \leq s \leq t, \\ \frac{x_1(t) x_2(s)}{w(s)}, & t \leq s \leq t_1; \\ \frac{x_1(t) x_2(s)}{w(s)}, & t_0 \leq t \leq s, \\ \frac{x_2(t) x_1(s)}{w(s)}, & s \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (25)$$

Построенная функция $G(t, s)$ называется *функцией Грина* краевой задачи (16), (17). Таким образом, если функция Грина найдена, то решение краевой задачи (16), (17) задается формулой (24). Сама функция Грина от $f(t)$ не зависит (она определяется решениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ однородного уравнения (18)).

Легко проверить, что функция Грина $G(t, s)$ при

любом фиксированном s обладает следующими свойствами:

1) при $t \neq s$ $G(t, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (18);

2) при $t = t_0$ и $t = t_1$ $G(t, s)$ удовлетворяет соответственно первому и второму граничным условиям (17);

3) при $t = s$ $G(t, s)$ непрерывна;

4) при $t = s$ производная $G'_t(t, s)$ имеет скачок, равный 1:

$$G'_t|_{t=s+0} - G'_t|_{t=s-0} = 1.$$

Свойства 1)–3) проверяются совсем просто. Докажем свойство 4). В силу (25)

$$G'_t = \begin{cases} \frac{\dot{x}_1(t) x_2(s)}{w(s)}, & t_0 \leq t \leq s, \\ \frac{\dot{x}_2(t) x_1(s)}{w(s)}, & s \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$G'_t|_{t=s+0} - G'_t|_{t=s-0} = \frac{\dot{x}_2(s) x_1(s) - \dot{x}_1(s) x_2(s)}{w(s)} = 1.$$

Можно показать (здесь мы этого делать не будем), что свойства 1)–4) однозначно характеризуют функцию Грина, т. е. что любая функция $G(t, s)$, обладающая свойствами 1)–4), имеет вид (25).

З а м е ч а н и е. Использование функции Грина особенно удобно в тех случаях, когда приходится многократно решать краевую задачу (16), (17) для различных правых частей $f(t)$.

П р и м е р. Построим функцию Грина для краевой задачи

$$\ddot{x} - \dot{x} = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения $\ddot{x} - \dot{x} = 0$ имеет вид $x = c_1 + c_2 e^t$, откуда находим $x_1(t) = 1 - e^t$ (нетривиальное решение, удовлетворяющее первому граничному условию), $x_2(t) = 1$ (нетривиальное решение, удовлетворяющее второму

граничному условию), $w(t) = \begin{vmatrix} 1 - e^t & 1 \\ -e^t & 0 \end{vmatrix} = e^t$. В силу формулы (25)

$$G(t, s) = \begin{cases} (1 - e^t) e^{-s}, & 0 \leq t \leq s, \\ e^{-s} - 1, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Задачи

1. Показать, что решение уравнения $\dot{x} = x^2$, удовлетворяющее начальному условию $x(1) = 1$, нельзя продолжить до решения, определенного на всей оси t , несмотря на то, что правая часть этого уравнения — гладкая функция во всей плоскости t, x .

2. Показать, что уравнение Лагранжа

$$x = t - \frac{4}{9} \dot{x}^2 + \frac{8}{27} \dot{x}^3 \quad (1)$$

имеет однопараметрическое семейство решений

$$t = \frac{4}{9} p^2 + c, \quad x = \frac{8}{27} p^3 + c$$

(или, исключая p , $(t - c)^3 = (x - c)^2$), а также решение $x = t - 4/27$, которое будет особым, в чем можно убедиться, построив графики соответствующих кривых.

3. Показать, что дискриминантная кривая уравнения Лагранжа (1) распадается на пару прямых: $x = t$ и $x = t - 4/27$. Особым решением будет лишь вторая из них.

4. Показать, что система уравнений для нахождения огибающей однопараметрического семейства кривых

$$(t - c)^3 = (x - c)^2$$

имеет два решения: $x = t$, $x = t - 4/27$, причем огибающей будет лишь вторая прямая.

5. Найти производную по параметру μ : $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ от решения следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = x + \mu(t + x^2), \quad x(0) = 1 + \mu^2.$$

У к а з а н и е. Производная $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = y(t)$ является решением линейного уравнения $\left. \frac{dy}{dt} = y + t + x^2 \right|_{\mu=0}$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 0$ (так как $y(0) = \left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} (x|_{t=0}) \right|_{\mu=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \mu} (1 + \mu^2) \right|_{\mu=0} = 0$).

$= 0$), причем функция $x|_{\mu=0}$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1.$$

Ответ: $\frac{\partial x}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = e^{2t} - t - 1.$

6. Разложить решение задачи Коши

$$\dot{x} = -x^2 + \frac{6\mu}{t}, \quad x(1) = 1 + 3\mu$$

по степеням параметра μ до второго порядка включительно.

Ответ:

$$x = \frac{1}{t} + 3\mu + \mu^2 \left(\frac{3}{t^2} - 3t \right) + o(\mu^2).$$

7. Показать, что если в уравнение n -го порядка

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

не входит явно t , то его порядок может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $x' = p(x)$. (Здесь $p(x)$ — новая неизвестная функция.)

У к а з а н и е. Имеют место формулы

$$x'' = p'(x) \cdot p, \quad x''' = p''(x) p^2 + [p'(x)]^2 \cdot p, \dots$$

8. Показать, что если в уравнении n -го порядка

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

функция $F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$ однородна относительно аргументов $x, x', \dots, x^{(n)}$, т. е.

$$F(t, kx, kx', \dots, kx^{(n)}) = k^p F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$$

(p — некоторая постоянная), то его порядок можно понизить на единицу заменой переменных

$$x = e^{\int z dt},$$

где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция.

У к а з а н и е. Имеют место формулы

$$x' = e^{\int z dt} \cdot z, \quad x'' = e^{\int z dt} (z^2 + z'), \dots$$

$$\dots, x^{(k)} = e^{\int z dt} \cdot \Phi(z, z', \dots, z^{(k-1)}),$$

где $\Phi(z, z', \dots, z^{(k-1)})$ — многочлен.

9. Показать, что схема Рунге — Кутта (см. § 5) имеет четвертый порядок точности.

У к а з а н и е. Разложив все встречающиеся в (27) величины в ряды Тейлора в окрестности точки (t_k, y_k) , с точностью до $O(\tau^4)$, показать, что $|x_k - y_k| = O(\tau^4)$.

10. Оценить точность решения задачи Коши (15) из § 5 по схеме Рунге — Кутта. Оценить шаг τ , гарантирующий достижение точности $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 10^{-3}$.

У к а з а н и е. Применить оценку

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

справедливую при $|x| < 1$.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Эта глава посвящена важному классу нормальных систем дифференциальных уравнений — динамическим системам.

Вначале рассматриваются общие свойства решений динамических систем, а затем подробно изучается поведение траекторий динамических систем на плоскости.

§ 1. Динамические системы и их геометрическая интерпретация

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

правая часть которой не зависит от переменного t .

Системы дифференциальных уравнений вида (1) называются *динамическими* или *автономными*.

Заметим, что если задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x),$$

то, вводя новую неизвестную функцию $x^{n+1} = t$, ее можно записать в виде динамической системы в пространстве переменных $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}$:

$$\dot{x} = f(x^{n+1}, x),$$

$$\dot{x}^{n+1} = 1.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на некотором открытом множестве D пространства переменных $x^1, \dots, x^n$ и удовлетворяет условию Липшица в любом замкнутом ограниченном множестве, целиком содержащемся в D . Тогда, в силу теорем

существования и единственности, для любого действительного числа t_0 и для любой точки $x_0 \in D$ будет существовать единственное решение

$$x = \varphi(t)$$

системы уравнений (1), удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

В пространстве переменных $x^1, \dots, x^n$ любое решение $x = \varphi(t)$ динамической системы (1) определяет кривую. Эту кривую с заданным на ней параметром t будем называть *траекторией*. Само пространство переменных $x^1, \dots, x^n$ называется *фазовым пространством*.

В каждой точке $x \in D$ определен вектор $f(x)$, т. е. динамическая система (1) определяет векторное поле на множестве D .

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение системы (1), определенное на некотором интервале $a < t < b$, и пусть $a < t_0 < b$. Обозначим $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда

$$\dot{\varphi}(t_0) = f(\varphi(t_0)) = f(x_0). \quad (2)$$

Трактуя t как время, можно придать соотношению (2) следующий геометрический смысл: кривая $x = \varphi(t)$ в множестве D является траекторией системы (1) тогда и только тогда, когда в каждой ее точке $x_0 = \varphi(t_0)$ скорость $\dot{\varphi}(t_0)$ равна значению векторного поля $f(x)$ в этой точке.

§ 2. Свойства решений динамических систем

1. Если $x = \varphi(t)$ — решение динамической системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

то, какова бы ни была постоянная c , $x = \varphi(t + c)$ также является решением.

Доказательство следует из равенств

$$\frac{d}{dt} \varphi(t + c) = \dot{\varphi}(t + c) = f(\varphi(t + c)).$$

2. Если $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ — два решения системы (1) и $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, то $\psi(t) = \varphi(t + c)$, где $c =$

$= t_1 - t_2$. Иначе говоря, если траектории $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ имеют общую точку, то эти траектории совпадают.

Доказательство. В силу свойства 1, $x = \varphi(t + c)$ ($c = t_1 - t_2$) — решение системы (1), а в силу равенства $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$,

$$\varphi(t_2 + c) = \varphi(t_1) = \psi(t_2).$$

Таким образом, решения $x = \varphi(t + c)$ и $x = \psi(t)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям при $t = t_2$ и, в силу теоремы единственности, совпадают, т. е.

$$\varphi(t + c) = \psi(t).$$

Свойство 2 доказано.

3. Решения динамической системы обладают групповым свойством: если $x = \varphi(t, x_0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$, то

$$\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t + s, x_0).$$

Доказательство. Положим $x_1 = \varphi(s, x_0)$. Тогда $\varphi_1(t) = \varphi(t, x_1)$ — решение системы (1) и, в силу свойства 1, $\varphi_2(t) = \varphi(t + s, x_0)$ также является решением (1); при этом

$$\varphi_1(0) = \varphi(0, x_1) = x_1,$$

$$\varphi_2(0) = \varphi(s, x_0) = x_1.$$

Таким образом, решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ системы уравнений (1) удовлетворяют одинаковым начальным условиям. В силу теоремы единственности $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ или

$$\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(s + t, x_0).$$

Свойство 3 доказано.

Решение системы (1) вида $x = a$, где a — постоянный вектор, называется *положением равновесия* (или *точкой покоя*).

Очевидно, что если $x = a$ — положение равновесия, то $f(a) = 0$, и наоборот, если $f(a) = 0$, то $x = a$ — положение равновесия.

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение динамической системы (1), определенное при $-\infty < t < +\infty$. Число c называется *периодом решения* $x = \varphi(t)$, если $\varphi(t+c) = \varphi(t)$ при всех t .

Обозначим F множество всех периодов решения $x = \varphi(t)$ (это множество непусто, так как $0 \in F$).

Докажем следующие свойства множества F .

1. Если $c \in F$, то $-c \in F$.

Доказательство. Так как c — период, то $\varphi(t+c) = \varphi(t)$. Заменяя в этом равенстве t на $t-c$, получим $\varphi(t) = \varphi(t-c)$, т. е. $-c$ является периодом.

2. Если $c_1 \in F$, $c_2 \in F$, то $c_1 + c_2 \in F$.

Доказательство следует из равенств

$$\varphi(t+c_1+c_2) = \varphi(t+c_1) = \varphi(t).$$

3. F — замкнутое множество.

Доказательство. Пусть c_n — сходящаяся последовательность периодов и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_0$. Тогда в силу непрерывности $\varphi(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t+c_0) &= \varphi(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t+c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Таким образом, $c_0 \in F$ и, следовательно, F — замкнутое множество.

Теорема. Пусть траектория $x = \varphi(t)$ динамической системы (1) сама себя пересекает. Тогда решение $\varphi(t)$ может быть продолжено на интервал $-\infty < t < +\infty$ и имеет место одна из следующих возможностей:

1) $\varphi(t) = a$, т. е. решение $\varphi(t)$ является положением равновесия;

2) существует такое число $T > 0$, что $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ при всех t , но при $0 < |t_1 - t_2| < T$ $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

В случае 2) решение $x = \varphi(t)$ называется *периодическим*, а его траектория — *замкнутой траекторией* или *циклом*.

Доказательство. Пусть решение $x = \varphi(t)$ определено при $a < t < b$. По предположению траек-

тория решения сама себя пересекает, т. е. существуют такие числа $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in (a, b)$ ($t_1 > t_2$), что

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

В силу свойства 2 решений динамических систем,

$$\varphi(t) = \varphi(t + c), \quad (2)$$

где $c = t_1 - t_2 > 0$.

Функция $x = \varphi(t + c)$ является решением системы (1), определенным при $a - c < t < b - c$, и, кроме того, в силу (2), эти решения совпадают на общей части их областей определения, т. е. при $a < t < b - c$. Следовательно, решение

$$x = \psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & a < t < b, \\ \varphi(t + c), & a - c < t \leq a, \end{cases}$$

является продолжением решения $x = \varphi(t)$ на интервал $(a - c, b)$. Последовательно повторяя описанную процедуру, получим продолжение решения $x = \varphi(t)$, определенное на интервале $(-\infty, b)$.

С помощью равенства $\varphi(t) = \varphi(t - c)$, которое получается из (2) заменой t на $t - c$, получим продолжение решения $x = \varphi(t)$ с интервала $(-\infty, b)$ на всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$.

Итак, решение $x = \varphi(t)$ можно считать определенным при $-\infty < t < +\infty$, причем, как явствует из самого способа продолжения, постоянная $c = t_1 - t_2 > 0$ является периодом этого решения.

Пусть F — множество периодов решения $x = \varphi(t)$. Могут представиться две возможности:

а) F содержит сколь угодно малые положительные числа,

б) в F найдется наименьшее положительное число T .

В случае а) существует сходящаяся к нулю последовательность положительных периодов c_n .

Пусть t — произвольное действительное число. Дробные части

$$\alpha_n = \frac{t}{c_n} - \left[\frac{t}{c_n} \right]$$

чисел $\frac{t}{c_n}$ образуют ограниченную последовательность, а так как $c_n \rightarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ t - \left[\frac{t}{c_n} \right] c_n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n c_n) = 0.$$

Числа $\left[\frac{t}{c_n} \right] c_n$, будучи целыми кратными периодов c_n , сами являются периодами решения $\varphi(t)$. Поэтому

$$\varphi(t) = \varphi\left(t - \left[\frac{t}{c_n} \right] c_n\right). \quad (3)$$

Переходя в равенстве (3) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(t - \left[\frac{t}{c_n} \right] c_n\right) = \\ &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(t - \left[\frac{t}{c_n} \right] c_n\right)\right) = \varphi(0). \end{aligned}$$

Таким образом, решение $x = \varphi(t)$ в случае а) является положением равновесия.

В случае б)

$$\varphi(t + T) = \varphi(t).$$

Покажем, что $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ при $0 < |t_1 - t_2| < T$. Предположим противное. Тогда найдутся такие t_1, t_2 ($0 < |t_1 - t_2| < T$), что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. В силу свойства 2, $\varphi(t) = \varphi(t + c)$, где $c = t_1 - t_2 \neq 0$. Таким образом, $c = t_1 - t_2$ служит периодом решения $\varphi(t)$. В силу свойства 1 множества F , положительное число $|t_1 - t_2| = \pm c$ также является периодом, а это противоречит предположению, что T — наименьший положительный период решения $\varphi(t)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно получаем следующее

С л е д с т в и е. *Траектория любого непродолжаемого решения динамической системы (1) может быть либо положением равновесия, либо замкнутой траекторией, либо траекторией без самопересечений.*

§ 3. Поведение траекторий динамических систем на плоскости

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= f^1(x^1, x^2), \\ \dot{x}^2 &= f^2(x^1, x^2),\end{aligned}\tag{1}$$

в которой функции $f^1(x^1, x^2)$ и $f^2(x^1, x^2)$ определены и непрерывны на всей плоскости x^1, x^2 и удовлетворяют условию Липшица в любом замкнутом ограниченном множестве.

Пусть L — отрезок прямой, обладающий тем свойством, что, какова бы ни была точка $x \in L$, вектор $f(x)$ не параллелен L . Заметим, что $f(x) \neq 0$ в точках отрезка L . В силу непрерывности вектор-функции $f(x)$ через любую точку x , не являющуюся положением равновесия, можно провести такой отрезок достаточно малой длины.

Запишем уравнение отрезка L в виде

$$x = \psi(u) = a + u(b - a) \quad (0 < u < 1).\tag{2}$$

Для удобства дальнейшего изложения концы a и b не будут причисляться к L .

Фиксируем произвольную точку $x = \psi(u)$ ($0 < u < 1$) отрезка L и рассмотрим траекторию $x = \varphi(t)$ динамической системы (1), проходящую через эту точку. Пусть при некотором значении $t = t_1$ $\varphi(t_1) = \psi(u)$. Может случиться, что при некоторых $t > t_1$ наша траектория снова пересечет отрезок L . Пусть t_2 ($t_2 > t_1$) — ближайшее к t_1 значение параметра*), при котором это происходит: $\varphi(t_2) = \psi(U) \in L$ ($0 < U < 1$). Очевидно, что значение U зависит только от выбора u , т. е. $U = \chi(u)$.

Таким образом, на некотором подмножестве интервала $0 < u < 1$ определена функция $U = \chi(u)$, которая называется *функцией последования*.

Остановимся на некоторых свойствах функции последования:

*) Если допустить что $\varphi(t)$ попадает на L при t , сколь угодно близких к t_1 , то окажется, что вектор $\dot{\varphi}(t_1)$, а, следовательно, и вектор $f(\varphi(t_1)) \neq 0$ коллинеарны L .

1. Если функция $\chi(u)$ определена при $u = u_0$, то она определена и непрерывна в некоторой окрестности $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ точки u_0 .

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{y})$ — решение динамической системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Уравнение траектории, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 = \psi(u_0)$, можно записать в виде $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$.

Предположим, что эта траектория вновь пересекает отрезок L в точке $U_0 = \chi(u_0)$, тогда $\mathbf{x}_1 = \psi(U_0)$, где $U_0 = \chi(u_0)$, и имеет место равенство

$$\varphi(t_0, \psi(u_0)) - \psi(U_0) = 0.$$

Рассмотрим векторное уравнение

$$\varphi(t, \psi(u)) - \psi(U) = 0 \quad (3)$$

как систему двух уравнений относительно переменных t, u, U :

$$\begin{aligned} \varphi^1(t, \psi(u)) - \psi^1(U) &= 0, \\ \varphi^2(t, \psi(u)) - \psi^2(U) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим левые части уравнений (4) через F^1 и F^2 соответственно и, используя (2), вычислим якобиан

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial U} & \frac{\partial F^2}{\partial U} \\ \frac{\partial F^1}{\partial t} & \frac{\partial F^2}{\partial t} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\frac{d\psi^1}{dU} & -\frac{d\psi^2}{dU} \\ \dot{\varphi}^1(t, \psi(u)) & \dot{\varphi}^2(t, \psi(u)) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a^1 - b^1 & a^2 - b^2 \\ f^1(\varphi(t, \psi(u))) & f^2(\varphi(t, \psi(u))) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a} = \{a^1, a^2\}, \mathbf{b} = \{b^1, b^2\}.$$

При $U = U_0, u = u_0, t = t_0$ получим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial U} & \frac{\partial F^2}{\partial U} \\ \frac{\partial F^1}{\partial t} & \frac{\partial F^2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 - b^1 & a^2 - b^2 \\ f^1(\mathbf{x}_1) & f^2(\mathbf{x}_1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку вектор $f(\mathbf{x})$ не параллелен отрезку L для $\mathbf{x} \in L$.

По теореме о неявной функции уравнение (3) можно однозначно разрешить относительно U (и t) на некотором интервале $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$:

$$U = \chi(u),$$

причем $U_0 = \chi(u_0)$ и функция $\chi(u)$ непрерывна.

Свойство 1 доказано.

2. *Функция $U = \chi(u)$ строго монотонна.*

Доказательство. Так как вектор $\dot{f}(x)$ не параллелен L при $x \in L$, то все векторы $\dot{f}(x)$ направлены в одну сторону от отрезка L ; в противном случае в силу непрерывности $\dot{f}(x)$ на L нашлась бы точка x_0 , в которой вектор $\dot{f}(x_0)$ был бы параллелен L .

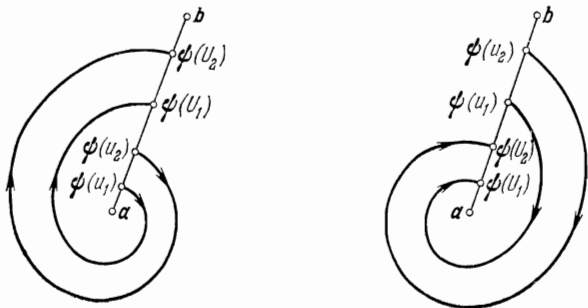


Рис. 9.

Если $u_2 > u_1$, то траектория, соединяющая точки $\psi(u_2)$ и $\psi(U_2)$, не может пересечь траекторию, соединяющую точки $\psi(u_1)$ и $\psi(U_1)$. Поэтому $U_2 > U_1$ или $\chi(u_2) > \chi(u_1)$, т. е. $\chi(u)$ — строго возрастающая функция (см. рис. 9; стрелки указывают направление движения точки на траектории при возрастании t).

Рассмотренный случай соответствует возрастанию параметра u в направлении от a к b . Если изменить направление отрезка L (т. е. поменять a и b местами), то функция $\chi(u)$ будет строго убывающей. Свойство 2 доказано.

Замечание. Изменив в случае необходимости направление отрезка L , всегда можно добиться того,

чтобы функция последования была строго возрастающей.

Теорема 1. Для того чтобы через точку $x_0 = \psi(u_0)$ отрезка L проходила замкнутая траектория динамической системы (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\chi(u)$ была определена при $u = u_0$ и чтобы $\chi(u_0) = u_0$.

Доказательство необходимости. Пусть $x = \varphi(t)$ — замкнутая траектория, проходящая через

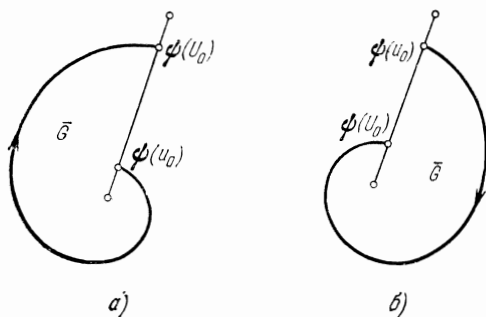


Рис. 10.

точку $x_0 = \psi(u_0)$, и пусть $\chi(u_0) \neq u_0$. Тогда могут представиться два случая (рис. 10).

Возьмем замкнутую ограниченную область $\bar{G}$ с границей, состоящей из куска траектории, соединяющего точки $\psi(u_0)$ и $\psi(U_0)$ ($U_0 = \chi(u_0)$), и отрезка прямой $(\psi(u_0), \psi(U_0))$.

Для определенности рассмотрим подробно случай, изображенный на рис. 10, а.

Как было отмечено выше, векторы $f(x)$ ($x \in L$) направлены в одну сторону от отрезка прямой L . Поэтому все траектории, проходящие через отрезок $(\psi(u_0), \psi(U_0))$, с ростом t покидают множество $\bar{G}$. Сама траектория $x = \varphi(t)$, пройдя точку $\psi(U_0)$, покинет $\bar{G}$ (так как сама себя она пересечь не может, а через отрезок $(\psi(u_0), \psi(U_0))$ траектории покидают $\bar{G}$) и, следовательно, не может попасть в точку $\psi(u_0)$, т. е. не будет замкнутой. Однако это противоречит условию теоремы.

Точно так же при убывании t траектория $x = \varphi(t)$ попадает во внутренность $\bar{G}$ и не может попасть в точку $\psi(u_0)$. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Если $\chi(u_0) = u_0$, то траектория, проходящая через точку $x_0 = \psi(u_0)$, сама себя пересекает и, в силу следствия из теоремы § 2, является замкнутой или положением равновесия. Последнее, однако, невозможно, так как в этом случае вектор $f(x_0)$ равнялся бы нулю и был бы параллелен отрезку L , что невозможно. Теорема доказана.

Определение. Замкнутая траектория $K: x = \varphi(t)$ называется *предельным циклом* динамической системы (1), если в множестве траекторий, проходящих через точки, достаточно близкие к K , нет замкнутых (кроме самой K).

Теорема 2. *Для того чтобы через точку $x_0 = \psi(u_0)$ проходил предельный цикл динамической системы (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\chi(u)$ была определена при $u = u_0$, $\chi(u_0) = u_0$ и чтобы уравнение $\chi(u) = u$ при достаточно малом $|u - u_0|$ имело единственное решение $u = u_0$.*

Доказательство необходимости. Предположим, что через точку $x_0 = \psi(u_0)$ проходит замкнутая траектория $K: x = \varphi(t)$. Если каково бы ни было $\delta > 0$ уравнение $\chi(u) = u$ имеет решение на интервале $|u - u_0| < \delta$, отличное от $u = u_0$, то, в силу теоремы 1, через точки, как угодно близкие к K , проходят замкнутые траектории динамической системы (1). Поэтому K не будет предельным циклом.

Доказательство достаточности. Если условия, сформулированные в теореме, выполнены, то в силу равенства $\chi(u_0) = u_0$, траектория $K: x = \varphi(t)$, проходящая через точку $\psi(u_0)$, замкнута. Что касается траекторий, отличных от K , но проходящих через точки, достаточно близкие к K , то они не будут замкнуты. В самом деле, в противном случае, в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий, замкнутые траектории пересекали бы отрезок L в точках, как угодно близких к точке $\psi(u_0)$. Так как функция $\chi(u)$ непрерывна и строго монотонна, то этим траекториям отвечали бы корни уравнения

$\chi(u) = u$, сколь угодно близкие к $u = u_0$. А это противоречит условиям теоремы. Теорема доказана.

Пусть $x = \varphi(t)$ — предельный цикл динамической системы (1). Через произвольную точку $x_0 = \varphi(t_0)$ проведем прямолинейный отрезок L , заданный уравнением вида (2), так, чтобы вектор $f(x)$ не был параллелен L при $x \in L$; это возможно в силу того, что функция $f(x)$ непрерывна и $f(x_0) \neq 0$, поскольку предельный цикл не является положением равновесия.

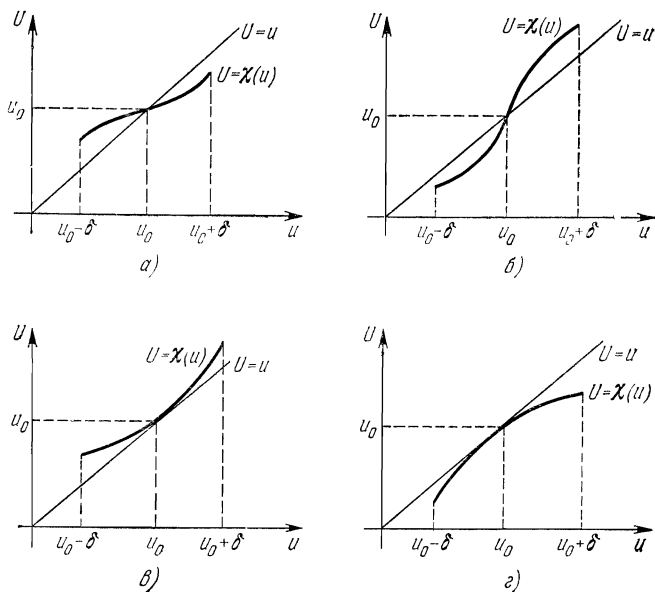


Рис. 11.

Пусть $x_0 = \psi(u_0)$ и $\chi(u)$ — функция последования, которую без ограничения общности можно считать строго возрастающей.

В силу теоремы 2, при достаточно малом $\delta > 0$ на интервале $|u - u_0| < \delta$ существует единственное решение $u = u_0$ уравнения $\chi(u) = u$. Поэтому имеет место одна из четырех возможностей взаимного рас-

положения графиков функций $U = u$ и $U = \chi(u)$ (рис. 11).

Остановимся подробнее на случае, изображенном на рис. 11, а.

Пусть $u_0 - \delta < u_1 < u_0$. Положим $u_2 = \chi(u_1)$, $u_3 = \chi(u_2)$, ..., $u_n = \chi(u_{n-1})$. Как следует из рис. 11, а, $u_1 < \chi(u_1) < u_0$, т. е. $u_1 < u_2 < u_0$, и потому значение $\chi(u_2)$ определено. Точно так же $u_2 < \chi(u_2) < u_0$, т. е. $u_2 < u_3 < u_0$, и определено значение $\chi(u_3)$. Продолжая таким же образом, получим, что $u_{n-1} < u_n < u_0$ при всех n . Итак, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — возрастающая ограниченная последовательность, поэтому она сходится.

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$. В самом деле, так как $u_0 - \delta < u_n < u_0$, то $u_0 - \delta < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq u_0$. Допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u'_0 < u_0$. Тогда, переходя к пределу в равенстве $u_n = \chi(u_{n-1})$, в силу непрерывности $\chi(u)$, получим $u'_0 = \chi(u'_0)$, т. е. $u = u'_0$ — решение уравнения $\chi(u) - u = 0$ на интервале $|u - u_0| < \delta$, отличное от $u = u_0$, что невозможно. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$.

Эти соображения показывают, что если $K_1: x = \varphi_1(t)$ — траектория, проходящая через точку $\psi(u_1)$, и t_n — значение параметра t , при котором K_1 проходит через точку $\psi(u_n)$, то, в силу непрерывности функции $\psi(u)$, последовательность точек $\varphi_1(t_n)$ ($= \psi(u_n)$) сходится к $\psi(u_0) = x_0$. При этом $t_n \rightarrow +\infty$, так как непродолжаемое решение при $t \geq 0$ не выходит за пределы замкнутого ограниченного множества, границей которого служит предельный цикл $x = \varphi(t)$. Таким образом, траектория $x = \varphi_1(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет вид спирали и приближается к предельному циклу $x = \varphi(t)$ изнутри. Точно так же показывается, что траектория, начинающаяся в некоторой точке $\psi(u'_1)$ ($u_0 < u'_1 < u_0 + \delta$), приближается к предельному циклу извне. В этом случае предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 12).

Аналогичные рассуждения показывают, что в случае, изображенном на рис. 11, б, траектории, начинающиеся вблизи предельного цикла, приближаются

к нему при $t \rightarrow -\infty$ и удаляются от него при $t \rightarrow +\infty$. Такой предельный цикл называется *неустойчивым*.

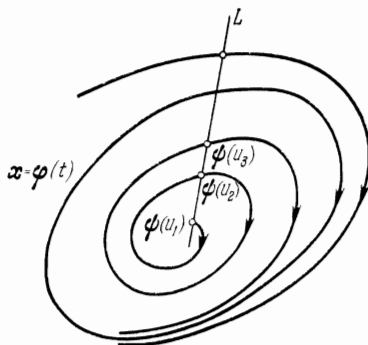


Рис. 12.

Для предельных циклов, соответствующих рис. 11, в и г, траектории, начинающиеся вблизи предельного цикла, приближаются к нему при $t \rightarrow +\infty$ (соответственно при $t \rightarrow -\infty$) изнутри, а при $t \rightarrow -\infty$ (соответственно при $t \rightarrow +\infty$) извне. Такие предельные циклы называются *полуустойчивыми*.

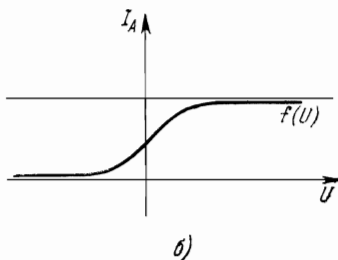
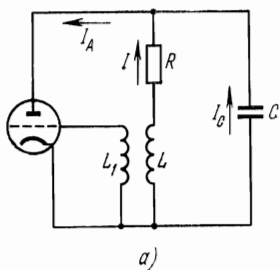


Рис. 13.

Пример. Рассмотрим простейший ламповый генератор (рис. 13, а). Работа триода характеризуется функцией $I_A = f(U)$, где I_A — ток, идущий через лампу, а U — сеточное напряжение. Функция $f(U)$ (рис. 13, б) называется *характеристикой триода*. Составим дифференциальное уравнение, описывающее работу лампового генератора. Пусть I — ток, идущий через сопро-

тивление R , а I_C — ток, идущий через конденсатор C ; тогда

$$I_A = I + I_C. \quad (5)$$

Поскольку сумма падений напряжений в контуре, содержащем R , L и C , равна нулю, приходим к уравнению

$$L\dot{I} + RI - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I_C dt = 0.$$

Дифференцируя его, получим

$$L\ddot{I} + R\dot{I} - \frac{1}{C} I_C = 0. \quad (6)$$

Из соотношения (5) находим

$$I_C = I_A - I = f(U) = I, \quad (7)$$

причем

$$U = k\dot{I}, \quad (8)$$

где $-k$ ($k > 0$) — коэффициент взаимной индукции между индуктивностями L_1 и L . Подставляя формулы (7) и (8) в (6), приходим к дифференциальному уравнению

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \frac{1}{C} f(k\dot{I}), \quad (9)$$

которое описывает работу лампового генератора.

После замены переменного $x = I - f(0)$ из уравнения (9) получаем

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}), \quad (10)$$

где

$$2\delta = \frac{R}{L} > 0 \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad g(\dot{x}) = \frac{1}{LC} [f(k\dot{x}) - f(0)].$$

Вводя новое переменное $y = \dot{x}$, вместо уравнения (10) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2\delta y + g(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что при определенных соотношениях между R , L , L_1 , C и характеристикой триода $f(U)$ система (11) имеет периодическое решение. Ламповый генератор в этом случае будет источником периодических электрических колебаний.

Остановимся на случае *), когда $g(y) = \omega^2 a \operatorname{sgn} y$ ($a > 0$). Система уравнений (11) при $y > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2\delta y + \omega^2 a, \end{aligned} \quad (12)$$

*) Этот случай был рассмотрен А. А. Андроновым. Им же впервые было составлено дифференциальное уравнение (9). Более подробное исследование свойств уравнения (9) можно найти в книге: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

а при $y < 0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2\delta y - \omega^2 a.\end{aligned}\quad (13)$$

Предположим, что корни характеристического многочлена $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2$ линейной однородной системы уравнений, соответствующей системе (12) или (13), — комплексные. Тогда $\omega > \delta$.

Решения систем уравнений (12), (13) имеют соответственно следующий вид:

$$x = e^{-\delta t} (c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t) + a,$$

$$y = \dot{x};$$

$$x = e^{-\delta t} (c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t) - a,$$

$$y = \dot{x}.$$

где $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$.

Будем искать периодические решения системы уравнений (11). Для этого построим функцию последования $U = \chi(u)$. Рассмотрим траекторию системы уравнений (11), проходящую при $t = 0$ через произвольную точку $(u, 0)$ оси x . Легко видеть, что при возрастании t траектория попадет в полуплоскость $y < 0$ и ее уравнение будет иметь вид

$$x = e^{-\delta t} (u + a) \left(\cos \sigma t + \frac{\delta}{\sigma} \sin \sigma t \right) - a \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sigma} \right),$$

$$y = \dot{x}.$$

При $t > \pi/\sigma$ траектория попадет в полуплоскость $y > 0$ и ее уравнение запишется в виде

$$x = -e^{-\delta \left(t - \frac{\pi}{\sigma} \right)} (\tilde{u} - a) \left(\cos \sigma t + \frac{\delta}{\sigma} \sin \sigma t \right) + a \quad \left(\frac{\pi}{\sigma} \leq t \leq \frac{2\pi}{\sigma} \right),$$

$$y = \dot{x},$$

где $\tilde{u} = -e^{-\delta \frac{\pi}{\sigma}} (u + a) - a$. При $t = 2\pi/\sigma$ траектория вновь пересекает ось x в точке

$$U = \chi(u) = -e^{-\delta \frac{\pi}{\sigma}} (\tilde{u} - a) + a = e^{-2\delta \frac{\pi}{\sigma}} u + \left(1 + e^{-\delta \frac{\pi}{\sigma}} \right)^2 a.$$

Итак, функция последования найдена.

Уравнение $\chi(u) = u$ имеет единственное решение

$$u_0 = \frac{1 + e^{-\delta \frac{\pi}{\sigma}}}{1 - e^{-\delta \frac{\pi}{\sigma}}} a,$$

которому соответствует единственное периодическое решение системы уравнений (11). Построив графики функции $U = \chi(u)$ и $U = u$, легко убедиться (рис. 11, а), что найденное периодическое решение представляет собой устойчивый предельный цикл системы уравнений (11).

Таким образом, в рассматриваемом случае ламповый генератор будет источником периодических незатухающих электрических колебаний.

§ 4. Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными действительными коэффициентами

Рассмотрим поведение траекторий однородной системы уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \\ \dot{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2,\end{aligned}\tag{1}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$ — действительная матрица.

Заметим, что $\mathbf{x} = 0$ представляет собой положение равновесия динамической системы (1).

Поскольку матрица A — действительная, могут представиться три случая: 1) собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A — действительные и различные, 2) собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A — комплексно сопряженные (различные) и 3) матрица A имеет единственное действительное собственное значение λ_1 .

Сначала рассмотрим так называемые невырожденные случаи.

А. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — действительные, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. В этом случае у матрицы A существуют два линейно независимых (действительных) собственных вектора $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ с собственными значениями λ_1 и λ_2 соответственно. Общее решение системы уравнений (1) имеет вид

$$\mathbf{x} = c^1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + c^2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{h}_2.$$

Обозначая y^1 и y^2 координаты вектора x относительно базиса h_1 и h_2 *), получим

$$y^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad y^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2)$$

Заметим, что достаточно исследовать поведение траекторий при $c^1 \geq 0$ и $c^2 \geq 0$, так как наряду с траекторией (2) система уравнений (1) имеет также следующие траектории:

$$\begin{aligned} y^1 &= -c^1 e^{\lambda_1 t}, & y^1 &= -c^1 e^{\lambda_1 t}, & y^1 &= c^1 e^{\lambda_1 t}, \\ y^2 &= c^2 e^{\lambda_2 t}, & y^2 &= -c^2 e^{\lambda_2 t}, & y^2 &= -c^2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

которые расположены соответственно во втором, третьем и четвертом квадрантах.

1) Пусть λ_1 и λ_2 — одного знака. Можно считать, не нарушая общности, что

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \quad (3)$$

а) Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то, согласно (3), $\lambda_1 > \lambda_2$. При $c^1 > 0$ и $c^2 > 0$

$$\begin{aligned} y^1 &\rightarrow 0, & y^2 &\rightarrow 0, & \text{когда } t &\rightarrow +\infty, \\ y^1 &\rightarrow +\infty, & y^2 &\rightarrow +\infty, & \text{когда } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{dy^2}{dy^1} = \frac{c^2 \lambda_2}{c^1 \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0,$$

когда $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ траектория «входит» в начало координат и в пределе касается оси y^1 , а при $t \rightarrow -\infty$ удаляется от начала координат, оставаясь в первом квадранте системы координат y^1, y^2 .

При $c^1 = c^2 = 0$ траектория представляет собой положение равновесия $x = 0$ ($y^1 = y^2 = 0$).

При $c^1 = 0$, $c^2 > 0$ траектория совпадает с положительной полуосью оси y^1 . Схематическое расположение траекторий представлено на рис. 14 (стрелки показывают направление движения точки по траектории при возрастании параметра t). Такое расположение траекторий вблизи $x = 0$ называется *устойчивым узлом*.

*) Векторы h_1 и h_2 образуют лишь аффинный базис, они, вообще говоря, не ортогональны.

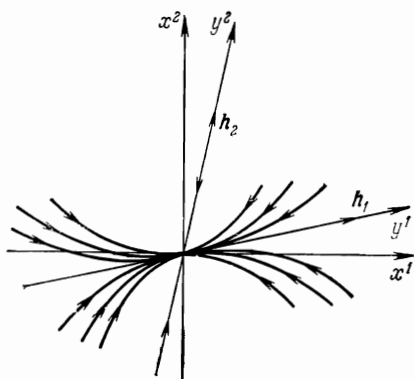


Рис. 14.

б) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то $\lambda_1 < \lambda_2$. При $c^1 > 0$, $c^2 > 0$

$$\begin{aligned} y^1 &\rightarrow 0, & y^2 &\rightarrow 0, & \text{когда } t &\rightarrow -\infty, \\ y^1 &\rightarrow +\infty, & y^2 &\rightarrow +\infty, & \text{когда } t &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Расположение траекторий остается таким же, как в случае а), но изменяется направление движения точки при возрастании параметра t (рис. 15). Такое расположение траекторий вблизи $x = 0$ называется *неустойчивым узлом*.

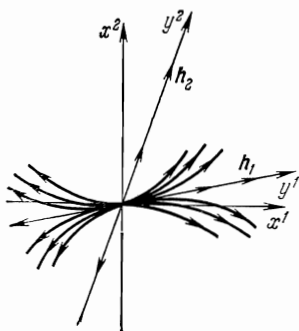


Рис. 15.

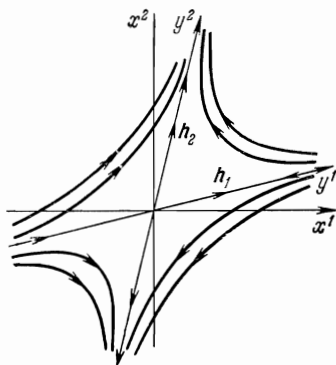


Рис. 16.

2) λ_1 и λ_2 имеют разные знаки. Достаточно рассмотреть случай $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. В этом случае при $c^1 > 0$ и $c^2 > 0$

$$\begin{aligned} y^1 &\rightarrow 0, & y^2 &\rightarrow +\infty, & \text{когда } t &\rightarrow +\infty, \\ y^1 &\rightarrow +\infty, & y^2 &\rightarrow 0, & \text{когда } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

В данном случае расположение траекторий называется *седлом* (рис. 16).

В. λ_1 и λ_2 — комплексно-сопряженные: $\lambda_1 = \mu + iv$, $\lambda_2 = \mu - iv$, $v \neq 0$.

Матрица A имеет комплексный собственный вектор $\mathbf{h} = (1/2)(\mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2)$ с собственным значением λ_1 (векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ — действительные). Кроме того, очевидно, $\bar{\mathbf{h}} = (1/2)(\mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2)$ — собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ линейно независимы, так как в противном случае были бы линейно зависимы векторы $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$, что невозможно, поскольку $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$ соответствуют различным собственным значениям.

Любое комплексное решение системы уравнений (1) можно записать в виде

$$\mathbf{z} = c^1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h} + c^2 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\mathbf{h}}, \quad (4)$$

где c^1 и c^2 — комплексные константы.

Любое действительное решение, как было показано в гл. 2, имеет вид

$$\mathbf{x} = \operatorname{Re} \mathbf{z}.$$

В силу (4), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \operatorname{Re} \mathbf{z} &= \frac{1}{2} (\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}) = \\ &= \frac{1}{2} (c^1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h} + c^2 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\mathbf{h}}) + \frac{1}{2} (\bar{c}^1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\mathbf{h}} + \bar{c}^2 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}) = \\ &= \frac{1}{2} (c^1 + \bar{c}^2) e^{\lambda_1 t} \mathbf{h} + \frac{1}{2} (\bar{c}^1 + c^2) e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

Пусть $\frac{1}{2}(c^1 + \bar{c}^2) = c$, тогда $\frac{1}{2}(\bar{c}^1 + c^2) = \bar{c}$ и

$$\mathbf{x} = c e^{\lambda_1 t} \mathbf{h} + \bar{c} e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\mathbf{h}}. \quad (5)$$

Запишем число c в тригонометрической форме:

$$c = R (\cos \alpha + i \sin \alpha) = R e^{i\alpha}.$$

Тогда $\bar{c} = Re^{-i\alpha}$ и из соотношения (5) получим

$$\begin{aligned} x &= Re^{i\alpha} e^{(\mu + i\nu)t} \frac{1}{2}(\mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2) + Re^{-i\alpha} e^{(\mu - i\nu)t} \frac{1}{2}(\mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2) = \\ &= Re^{\mu t} \frac{e^{i(\alpha + \nu t)} + e^{-i(\alpha + \nu t)}}{2} \mathbf{h}_1 - iRe^{\mu t} \frac{e^{i(\alpha + \nu t)} - e^{-i(\alpha + \nu t)}}{2} \mathbf{h}_2 = \\ &= Re^{\mu t} \cos(\alpha + \nu t) \mathbf{h}_1 + Re^{\mu t} \sin(\alpha + \nu t) \mathbf{h}_2. \end{aligned}$$

Обозначая y^1 и y^2 координаты вектора x относительно базиса $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, получим

$$y^1 = Re^{\mu t} \cos(\alpha + \nu t), \quad y^2 = Re^{\mu t} \sin(\alpha + \nu t).$$

1) Если $\mu < 0$, то при $R = 0$ получается положение равновесия, а при $R > 0$

$$\begin{aligned} y^1 &\rightarrow 0; & y^2 &\rightarrow 0, & \text{когда } t &\rightarrow +\infty, \\ (y^1)^2 + (y^2)^2 &\rightarrow +\infty, & & \text{когда } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Траектория представляет собой спираль. Расположение траекторий в данном случае называется *устойчивым фокусом* (рис. 17).

2) Если $\mu > 0$, то при $R > 0$

$$\begin{aligned} (y^1)^2 + (y^2)^2 &\rightarrow +\infty, & \text{когда } t &\rightarrow +\infty, \\ y^1 &\rightarrow 0, & y^2 &\rightarrow 0, & \text{когда } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Расположение траекторий изображено на рис. 18 и называется *неустойчивым фокусом*.

3) Если $\mu = 0$, то $(y^1)^2 + (y^2)^2 = R^2$ и траектория представляет собой эллипс с центром в начале координат. В данном случае расположение траекторий называется *центром* и изображено на рис. 19.

Перейдем к вырожденным случаям. Из перечисленных в начале этого параграфа возможностей остается рассмотреть случай, когда одно из двух различных собственных значений λ_1, λ_2 матрицы A равно нулю, а также случай $\lambda_1 = \lambda_2$.

С. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$. В этом случае, как и в случае **A**, существуют два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ с собственными значениями λ_1 и 0 соответственно. Общее решение системы уравнений (1) имеет вид

$$x = c^1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{h}_1 + c^2 \mathbf{h}_2.$$

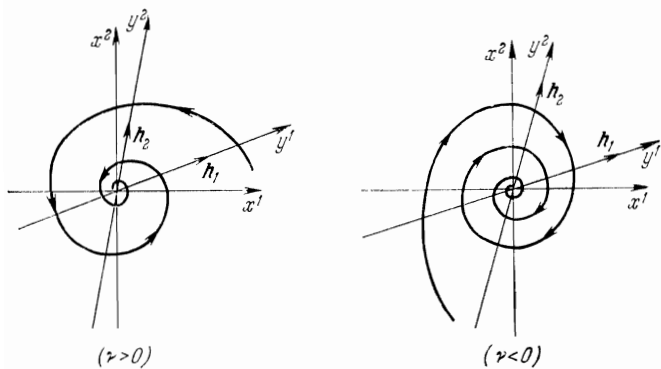


Рис. 17.

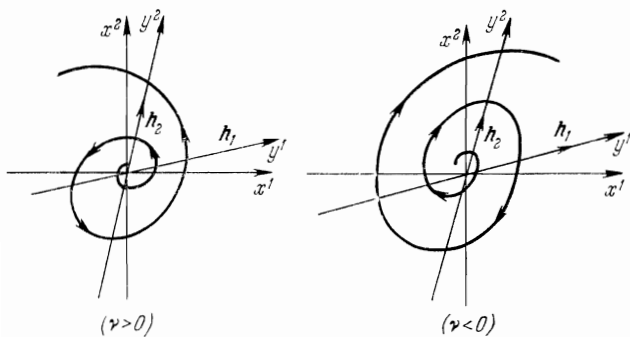


Рис. 18.

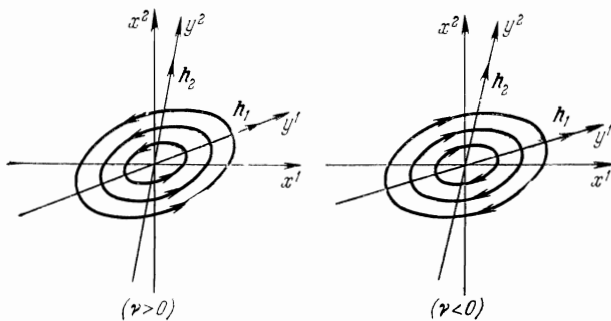


Рис. 19.

Обозначая y^1 и y^2 координаты вектора x относительно базиса h_1 и h_2 , получим

$$y^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad y^2 = c^2.$$

Траекториями в этом случае будут полупрямые, параллельные оси y^1 , оканчивающиеся на оси y^2 . Все точки оси y^2 будут положениями равновесия. Поведение траекторий изображено на рис. 20.

Д. Матрица A имеет единственное собственное значение λ_1 . В этом случае существует хотя бы один действительный собственный вектор h_1 с собственным

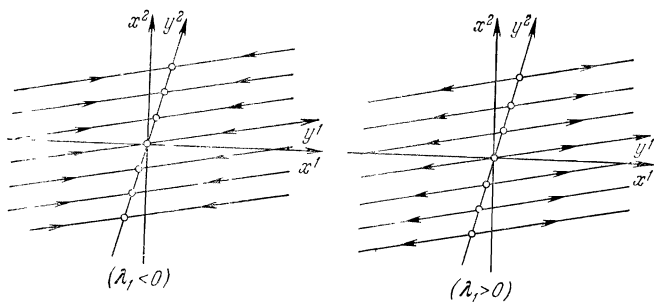


Рис. 20.

значением λ_1 : $Ah_1 = \lambda_1 h_1$. Дополняя h_1 произвольно вектором h_2 до базиса и полагая

$$x = y^1 h_1 + y^2 h_2,$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{y}^1 h_1 + \dot{y}^2 h_2 &= \dot{x} = Ax = A(y^1 h_1 + y^2 h_2) = \\ &= y^1 \lambda_1 h_1 + y^2 (\mu h_1 + \nu h_2) = (\lambda_1 y^1 + \mu y^2) h_1 + \nu y^2 h_2, \end{aligned}$$

где

$$Ah_2 = \mu h_1 + \nu h_2.$$

Таким образом,

$$\dot{y}^1 = \lambda_1 y^1 + \mu y^2, \quad \dot{y}^2 = \nu y^2. \quad (6)$$

Характеристический многочлен матрицы системы (6) имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \mu \\ 0 & \nu - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\nu - \lambda).$$

Но в рассматриваемом случае матрица A имеет единственное собственное значение λ_1 . Следовательно, $\nu = \lambda_1$, и система уравнений (6) принимает вид

$$\dot{y}^1 = \lambda_1 y^1 + \mu y^2, \quad \dot{y}^2 = \lambda_1 y^2. \quad (7)$$

1) Если $\mu = 0$, то имеем следующую систему:

$$\dot{y}^1 = \lambda_1 y^1, \quad \dot{y}^2 = \lambda_1 y^2.$$

Ее общее решение

$$y^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad y^2 = c^2 e^{\lambda_1 t}.$$

При $\lambda_1 \neq 0$ траектории представляют собой либо полупрямые, выходящие из начала координат, либо по-

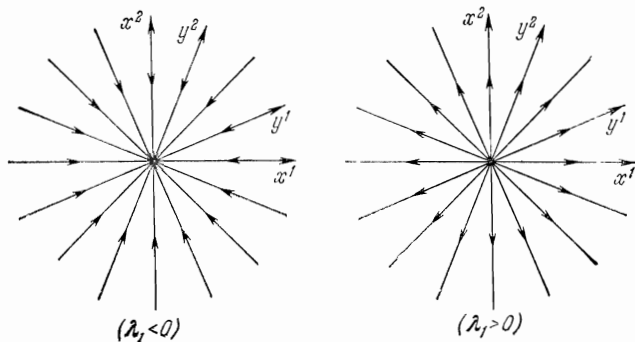


Рис. 21.

ложение равновесия $y^1 = y^2 = 0$ при $c^1 = c^2 = 0$ (см. рис. 21). Такое расположение траекторий называется *дискритическим узлом*.

При $\lambda_1 = 0$ каждая траектория $y^1 = c^1$, $y^2 = c^2$ представляет собой положение равновесия. Другими словами, вся фазовая плоскость заполнена точками покоя. При этом, очевидно, A есть нулевая матрица.

2) $\mu \neq 0$. В качестве базиса возьмем векторы $H_1 = \mu h_1$ и $H_2 = h_2$. Тогда

$$AH_1 = \lambda H_1, \quad AH_2 = H_1 + \lambda_1 H_2.$$

Полагая $x = y^1 H_1 + y^2 H_2$, вместо (7) получим

$$\dot{y}^1 = \lambda_1 y^1 + y^2, \quad \dot{y}^2 = \lambda_1 y^2. \quad (8)$$

Общее решение системы уравнений (8) имеет вид

$$y^1 = (c^1 + c^2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad y^2 = c^2 e^{\lambda_1 t}.$$

а) $\lambda_1 < 0$. При $c^2 = 0$

$$y^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad y^2 = 0.$$

Траектория представляет собой полуось $y^1 > 0$ (при $c^1 > 0$), $y^1 < 0$ (при $c^1 < 0$) или положение равновесия при $c^1 = 0$.

Если $c^2 \neq 0$, то

$$y^1 = c^2 \left(\frac{c^1}{c^2} + t \right) e^{\lambda_1 t} =$$

$$= c^2 \tau e^{\lambda_1 \left(\tau - \frac{c^1}{c^2} \right)},$$

$$y^2 = c^2 e^{\lambda_1 t} = c^2 e^{\lambda_1 \left(\tau - \frac{c^1}{c^2} \right)}.$$

Здесь $\tau = t + c^1/c^2$. Обо-

значая $c^2 e^{-\lambda_1 \frac{c^1}{c^2}} = a$, получим

$$y^1 = a \tau e^{\lambda_1 \tau}, \quad y^2 = a e^{\lambda_1 \tau}.$$

Рис. 22.

На рис. 22 изображен график функции $y^1 = a \tau e^{\lambda_1 \tau}$ при $a > 0$. В точке $\tau = -1/\lambda_1$ функция y^1 имеет максимум. При $a < 0$ график получается зеркальным отражением относительно оси τ . Очевидно,

$$y^2 \rightarrow 0, \quad \text{когда} \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$y^2 \rightarrow +\infty, \quad \text{когда} \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

Кроме того,

$$\frac{dy^2}{dy^1} = \frac{a \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}}{a e^{\lambda_1 \tau} (1 + \lambda_1 \tau)} \rightarrow 0,$$

когда $\tau \rightarrow +\infty$.

Расположение траекторий в этом случае называется *устойчивым вырожденным узлом* (рис. 23).

б) При $\lambda_1 > 0$ из аналогичных соображений получается картина, изображенная на рис. 24. Такое расположение траекторий называется *неустойчивым вырожденным узлом*.

с) При $\lambda_1 = 0$

$$y^1 = c^1 + c^2 t, \quad y^2 = c^2.$$

Если $c^2 \neq 0$, то траектории представляют собой прямые, параллельные оси y^1 . При $c^2 = 0$ все точки оси y^1 будут положениями равновесия (рис. 25).

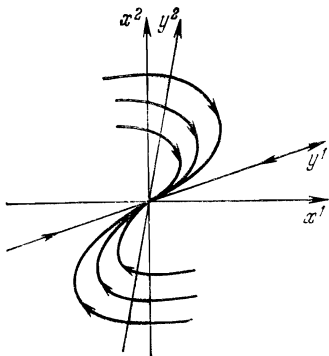


Рис. 23.

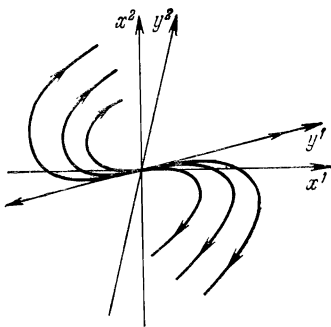


Рис. 24.

Пример. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0,$$

где $m > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$.

Это уравнение описывает прямолинейное движение материальной точки с массой m вдоль оси x под действием силы трения $-\alpha\dot{x}$ и упругой силы $-\beta x$.

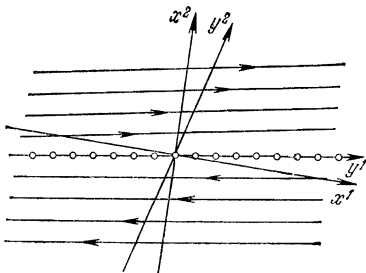


Рис. 25.

Перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0,$$

где $a_1 = \frac{\alpha}{m} \geq 0$, $a_2 = \frac{\beta}{m} > 0$.

Вводя новые неизвестные функции $x^1 = x$, $x^2 = \dot{x}$, сведем наше уравнение к линейной однородной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -a_2 x^1 - a_1 x^2,\end{aligned}\tag{9}$$

матрица A которой имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения λ_1 , λ_2 матрицы A являются корнями характеристического многочлена

$$D(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 \\ -a_2 & -a_1 - p \end{vmatrix} = p^2 + a_1 p + a_2$$

и следующим образом выражаются через коэффициенты a_1 и a_2 :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

При $\frac{a_1^2}{4} > a_2$ корни вещественные различные, причем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Расположение траекторий системы уравнений (9) представляет собой устойчивый узел.

При $t \rightarrow +\infty$ материальная точка приближается к началу координат (так как $x = x^1 \rightarrow 0$).

При $\frac{a_1^2}{4} < a_2$ корни комплексные сопряженные, причем $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \leq 0$.

Если $a_1 > 0$, то расположение траекторий представляет собой устойчивый фокус. Материальная точка совершает затухающие колебания около начала координат $x = 0$.

Если $a_1 = 0$ (трение отсутствует), то расположение траекторий представляет собой центр. Материальная точка совершает незатухающие колебания около начала координат.

При $\frac{a_1^2}{4} = a_2$ корни характеристического многочлена вещественны и совпадают, причем $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} < 0$. Можно показать, что в этом случае расположение траекторий представляет собой устойчивый вырожденный узел.

З а м е ч а н и я. 1. Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= f^1(x^1, x^2), \\ \dot{x}^2 &= f^2(x^1, x^2),\end{aligned}\tag{10}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = f(x).$$

Пусть a — положение равновесия этой системы уравнений. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$ (этого всегда можно добиться за счет переноса начала координат в точку a).

Предположим, что правая часть системы уравнений (10) допускает представление

$$f(x) = Ax + F(x) \quad (F(0) = 0),$$

где $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix}$ — постоянная матрица и $|F(x)| \leq M |x|^{1+\alpha}$ при достаточно малом $|x|$; M и α — некоторые положительные постоянные.

Если, кроме того, матрица A такова, что ее собственные значения λ_1 и λ_2 различны и их действительные части отличны от нуля, то в достаточно малой окрестности начала координат расположение траекторий динамической системы (10) будет таким же, как у линейной однородной системы уравнений $\dot{x} = Ax^*$.

Так, например, в случае, когда λ_1 и λ_2 вещественны, отрицательны и $\lambda_1 > \lambda_2$, имеются две траектории системы уравнений (9), входящие в начало координат (при $t \rightarrow +\infty$) по направлению собственного вектора матрицы A с собственным значением λ_1 , и две траектории, входящие в начало координат (при $t \rightarrow +\infty$) по направлению собственного вектора с собственным значением λ_2 . Все остальные траектории (начинающиеся вблизи начала координат) приближаются к началу координат (при $t \rightarrow +\infty$) по направлению собственного вектора с собственным значением λ_1 .

Если же λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные и $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$, то все траектории, начинающиеся

*) Линейная однородная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$ называется *линеаризацией* системы уравнений (9).

вблизи начала координат, наматываются на положение равновесия как спирали при $t \rightarrow +\infty$ *).

2. Наряду с системой уравнений (10) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{f^2(x^1, x^2)}{f^1(x^1, x^2)}. \quad (11)$$

Покажем, что всякая интегральная кривая уравнения (11) определяет траекторию системы уравнений (10). В самом деле, пусть $x^2 = x^2(x^1)$ — интегральная кривая уравнения (11). Тогда вдоль нее $f^1(x^1, x^2(x^1)) \neq 0$ (так как в противном случае правая часть уравнения (11) не определена). Выберем на интегральной кривой новый параметр $t = t(x^1)$ так, чтобы

$$\frac{dt}{dx^1} = \frac{1}{f^1(x^1, x^2(x^1))}. \quad (12)$$

Соотношение $t = t(x^1)$ можно разрешить относительно x^1 : $x^1 = x^1(t)$, поскольку функция $t = t(x^1)$ монотонна (так как $\frac{dt}{dx^1} = \frac{1}{f^1(x^1, x^2(x^1))} \neq 0$).

Теперь интегральная кривая задается параметрически:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(t), \\ x^2 &= x^2(x^1(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (11) и (12)

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{dx^2}{dx^1} \frac{dx^1}{dt} = f^2(x^1, x^2).$$

Уравнение (12) можно записать в виде

$$\frac{dx^1}{dt} = f^1(x^1, x^2).$$

Таким образом, интегральная кривая уравнения (11) определяет траекторию (13) системы уравнений (10).

Точки плоскости x^1, x^2 , в которых одновременно $f^1(x^1, x^2) = 0$ и $f^2(x^1, x^2) = 0$, называются *особыми точками уравнения* (11). Им соответствуют положения равновесия системы уравнений (10).

*) Подробнее см. в книге: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

Задачи

1. Решение $x = \varphi(t, x_0)$ ($\varphi(0, x_0) = x_0$) динамической системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

у которой правая часть определена во всем пространстве переменных $x^1, \dots, x^n$, задает при каждом фиксированном t отображение пространства переменных $x^1, \dots, x^n$ в себя. Полученное однопараметрическое семейство преобразований называется *фазовым потоком*, соответствующим динамической системе (1).

Пусть Ω_0 — замкнутая ограниченная область в пространстве переменных $x^1, \dots, x^n$. Обозначим Ω_t образ Ω_0 при отображении $x = \varphi(t, x_0)$. Пусть $V(t)$ — объем области Ω_t . Доказать следующую формулу (*теорему Лиувилля*):

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega_t} \dots \int (\operatorname{div} f) dx^1 \dots dx^n,$$

предполагая, что $f(x)$ — векторное поле класса C^1 .

У к а з а н и е. Показать, что

$$V(t) = \int_{\Omega_t} \dots \int dx^1 \dots dx^n = \int_{\Omega_0} \dots \int |J| dx_0^1 \dots dx_0^n,$$

где J — якобиан преобразования $x = \varphi(t, x_0)$ и

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\operatorname{div} f) J.$$

2. Система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $H = H(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n)$ — некоторая функция, называется *системой канонических уравнений Гамильтона*. Считая H функцией класса C^2 и используя теорему Лиувилля (см. задачу 1), показать, что соответствующий фазовый поток сохраняет объем.

3. Перейдя к полярным координатам (r, φ) , показать, что система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - y, \\ \dot{y} &= y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + x\end{aligned}$$

имеет единственное положение равновесия $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$. Все остальные траектории этой системы незамкнуты.

Указание. В полярных координатах исследуемая система уравнений имеет вид

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой главе вводятся важные понятия устойчивости решения нормальной системы дифференциальных уравнений по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Приводятся необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Доказывается теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

§ 1. Определения и примеры

В § 4 гл. 3 показано, что решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

непрерывно зависит от начальных условий, когда t изменяется на отрезке $[a, b]$, если правая часть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условиям теорем существования и единственности.

В этой главе будет исследоваться зависимость решения задачи Коши от начальных условий, когда t изменяется на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$.

Будем предполагать, что для системы уравнений (1) выполнены условия теорем существования и единственности на множестве таких точек $(t, \mathbf{x})$, что $\alpha < t < +\infty$ и $\mathbf{x} \in C$, где C — открытое множество в пространстве переменного $\mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t)$ — решение системы уравнений (1), определенное при $t \geq t_0$.

Определение. Решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого

вектора x_0 , подчиненного условию

$$|\varphi(t_0) - x_0| < \delta,$$

решение $x = \psi(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(t_0) = x_0,$$

определено при всех $t \geq t_0$ и имеет место неравенство

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$

Если, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0,$$

то решение $x = \varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = kx \quad (k = \text{const}).$$

Решение этого уравнения с начальными значениями (t_0, x_0) имеет вид

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (2)$$

При $k \leq 0$ решение (2) будет устойчивым по Ляпунову, так как при всех $t \geq t_0$

$$|x_1 e^{k(t-t_0)} - x_0 e^{k(t-t_0)}| = e^{k(t-t_0)} |x_1 - x_0| \leq |x_1 - x_0| < \varepsilon,$$

когда скоро $|x_1 - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Если $k < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{k(t-t_0)} |x_1 - x_0| = 0$$

и, следовательно, решение асимптотически устойчиво.

Если $k = 0$, то при $x_1 \neq x_0$ разность $|x_1 - x_0|$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, т. е. решение $x = x_0$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво.

При $k > 0$ и $x_1 \neq x_0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_1 - x_0| e^{k(t-t_0)} = +\infty$$

и, следовательно, решение $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ неустойчиво.

2. Рассмотрим линейную однородную систему двух уравнений с постоянными коэффициентами (см. гл. 4, § 4).

В случаях устойчивого узла и устойчивого фокуса решение $x \equiv 0$ будет, очевидно, асимптотически устойчивым. В случае центра решение $x \equiv 0$ будет устойчивым по Ляпунову, но не будет асимптотически устойчивым. В случае седла решение $x \equiv 0$ неустойчиво.

Исследование устойчивости решения $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) может быть сведено к исследованию устойчивости решения, тождественно равного нулю, т. е. некоторого положения равновесия другой нормальной системы.

В самом деле, введем новую неизвестную функцию

$$y(t) = x(t) - \varphi(t). \quad (3)$$

Очевидно, она удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\dot{y} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi) \equiv f_1(t, y), \quad (4)$$

где $f_1(t, 0) = 0$. При этом устойчивость (по Ляпунову или асимптотическая) решения $x = \varphi(t)$ равносильна устойчивости решения $y \equiv 0$ системы уравнений (4).

В дальнейшем будем считать, что замена (3) уже сделана. Тогда система уравнений (1) имеет решение $x \equiv 0$, т. е. $f(t, 0) = 0$.

§ 2. Однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Устойчивость решения $x \equiv 0$

Рассмотрим линейную однородную систему из n дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad (5)$$

где A — постоянная действительная матрица.

Пусть

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad (k = 1, \dots, m, m \leq n)$$

— собственные значения матрицы A .

Лемма 1. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то для любого решения $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) существуют такие положительные постоянные α , R , что при $t \geq 0$

$$|\varphi(t)| \leq Re^{-\alpha t}.$$

Доказательство. Как было показано в гл. 2 § 7, любое решение $x = \varphi(t)$ системы уравнений (1) имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^m g_k(t) e^{\lambda_k t}, \quad (2)$$

где $g_k(t)$ — вектор-функция, каждая координата которой есть некоторый многочлен.

По условию леммы $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ($k = 1, \dots, m$). Пусть $\alpha > 0$ таково, что

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \mu_k < -\alpha < 0. \quad (3)$$

Из соотношения (2) следует, что

$$|\varphi(t)| \leq \sum_{k=1}^m |g_k(t)| |e^{(\mu_k + i\nu_k)t}| = \sum_{k=1}^m |g_k(t)| e^{\mu_k t}. \quad (4)$$

Умножая неравенство (4) на $e^{\alpha t}$, получим

$$|\varphi(t)| e^{\alpha t} \leq \sum_{k=1}^m |g_k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t}. \quad (5)$$

В силу неравенства (3),

$$\mu_k + \alpha < 0$$

и, следовательно, поскольку каждая координата вектора $g_k(t)$ представляет собой многочлен,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m |g_k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t} = 0. \quad (6)$$

Из равенства (6) следует, что при $t \geq 0$ функция

$\sum_{k=1}^m |g_k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t}$ ограничена. Если

$$\sum_{k=1}^m |g_k(t)| e^{(\mu_k + \alpha)t} \leq R,$$

то, в силу (5),

$$|\varphi(t)| e^{\alpha t} \leq R,$$

т. е. при $t \geq 0$

$$|\varphi(t)| \leq R e^{-\alpha t}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то для решения $\Phi(t, x_0)$ системы уравнений (1), удовлетворяющего начальному условию $\Phi(0, x_0) = x_0$, существуют такие постоянные $r > 0$ и $\alpha > 0$, что при $t \geq 0$

$$|\Phi(t, x_0)| \leq r |x_0| e^{-\alpha t}.$$

Доказательство. Пусть $x = \Phi_j(t)$ — решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию

$$\Phi_j(0) = e_j,$$

где e_j — единичный координатный вектор $\{\delta_j^1, \delta_j^2, \dots, \delta_j^n\}$.

По теореме единственности

$$\Phi(t, x_0) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(t) x_0^j, \quad (7)$$

где $x_0 = \{x_0^1, \dots, x_0^n\}$. Действительно, в правой части формулы (7) стоит решение системы уравнений (1), удовлетворяющее при $t = 0$ тому же начальному условию, что и $\Phi(t, x_0)$.

В силу леммы 1, существуют такие R_j ($j = 1, \dots, n$) и $\alpha > 0$, что при $t \geq 0$

$$|\Phi_j(t)| \leq R_j e^{-\alpha t}.$$

Положим $R = \max \{R_1, \dots, R_n\}$, тогда при $t \geq 0$

$$|\Phi_j(t)| \leq R e^{-\alpha t} \quad (j = 1, \dots, n).$$

В силу (7)

$$|\Phi(t, x_0)| \leq \sum_{j=1}^n |\Phi_j(t)| |x_0^j| \leq \sum_{j=1}^n R e^{-\alpha t} |x_0^j| = nR |x_0| e^{-\alpha t}.$$

Обозначая $nR = r$, получим для $t \geq 0$

$$|\Phi(t, x_0)| \leq r |x_0| e^{-\alpha t}.$$

Лемма 2 доказана.

Установим теперь необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы уравнений (1).

Теорема. Для того чтобы положение равновесия $x = 0$ системы уравнений (1) было асимптотически

устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A имели отрицательные действительные части.

Доказательство достаточности. Пусть ε — произвольное положительное число, а $x = \psi(t) = \varphi(t, x_0)$ — решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальному условию $\psi(0) = x_0$. В силу леммы 2 существуют такие $r > 0$, $\alpha > 0$, что для $t \geq 0$

$$|\psi(t)| \equiv |\varphi(t, x_0)| \leq r |x_0| e^{-\alpha t}.$$

Положим $\delta = \varepsilon/r$, тогда при $|x_0| < \delta$ для $t \geq 0$

$$|\psi(t)| < r \frac{\varepsilon}{r} e^{-\alpha t} \leq \varepsilon,$$

т. е. положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Очевидно, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)| = 0$, так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0$.

Следовательно, положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство необходимости. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет неотрицательную действительную часть, то положение равновесия $x = 0$ не может быть устойчивым по Ляпунову.

В самом деле, если, например, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 \geq 0$ и $h \neq 0$ — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_1 , то

$$x = \operatorname{Re}(h e^{\lambda_1 t})$$

— решение системы уравнений (1).

Пусть $h = h_1 + i h_2$; тогда

$$x = \operatorname{Re} \{ (h_1 + i h_2) e^{(\mu_1 + i \nu_1) t} \} = e^{\mu_1 t} (h_1 \cos \nu_1 t - h_2 \sin \nu_1 t)$$

при $t \rightarrow +\infty$ не стремится к нулю.

Этим же свойством, очевидно, обладает любое решение

$$x = c \operatorname{Re}(h e^{\lambda_1 t}) \quad (c \neq 0). \quad (8)$$

При достаточно малом c решение (8) в момент $t = 0$ сколь угодно близко к положению равновесия $x = 0$, но при $t \rightarrow +\infty$ оно не стремится к нулю. Следовательно, положение равновесия $x = 0$ не будет асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Для устойчивости по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ системы уравнений (1) необходимо (но не достаточно), чтобы все собственные значения матрицы A имели неположительные действительные части.

§ 3. Лемма Ляпунова

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1)$$

Будем предполагать, что $x \equiv 0$ — решение этой системы. Такое предположение, как было показано в § 1, не нарушает общности. Из него, в частности, следует, что $f(t, 0) = 0$.

Лемма Ляпунова. Пусть правая часть системы уравнений (1) определена на множестве C : $|x| < r$; $t \geq t_0$. Предположим, что выполнены условия теорем существования и единственности и, кроме того, при $|x| < r$ определена такая неотрицательная функция $V(x)$ класса C^1 , обращающаяся в нуль только при $x = 0$, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i \leq 0$$

на множестве C . Тогда решение $x \equiv 0$ системы уравнений (1) устойчиво по Ляпунову.

Если, кроме того, на множестве C

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i \leq -W(x),$$

где $W(x) \geq 0$ — некоторая непрерывная функция, обращающаяся в нуль только при $x = 0$, то решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть ε — любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon < r$. Обозначим S_ε поверхность шара $|x| \leq \varepsilon$ и пусть

$$V_\varepsilon = \min_{x \in S_\varepsilon} V(x). \quad (2)$$

Выберем δ таким образом, чтобы при $|\mathbf{x}| \leq \delta$ выполнялось неравенство

$$V(\mathbf{x}) < V_\varepsilon. \quad (3)$$

Такое δ существует, поскольку функция $V(\mathbf{x})$ непрерывна при $|\mathbf{x}| \leq \varepsilon$ и $V(0) = 0$.

Покажем, что всякое решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$, для которого $|\varphi(t_0)| < \delta$, определено при всех $t \geq t_0$ и имеет место неравенство

$$|\varphi(t)| < \varepsilon,$$

т. е. решение $\mathbf{x} \equiv 0$ будет устойчивым по Ляпунову.

В самом деле, пусть непродолжаемое решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ определено на интервале (m_1, m_2) , где $m_2 < +\infty$. Тогда по теореме из § 2 гл. 3 это возможно только в том случае, когда траектория $\mathbf{x} = \varphi(t)$ пересекает поверхность S_ε (так как в противном случае при всех $t_0 \leq t < m_2$ выполняется неравенство $|\varphi(t)| < \varepsilon$ и график решения $\mathbf{x} = \varphi(t)$ не может выйти за пределы замкнутого ограниченного множества $|\mathbf{x}| \leq \varepsilon$; $t_0 \leq t \leq m_2$).

Таким образом, траектория $\mathbf{x} = \varphi(t)$ пересекает поверхность S_ε . Пусть t_1 ($t_1 > t_0$) — наименьшее значение параметра t , при котором траектория впервые достигает поверхности S_ε .

Рассмотрим сложную функцию $V(\varphi(t))$. В силу условий леммы,

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i}(\varphi) \dot{\varphi}^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i}(\varphi) f^i(t, \varphi) \leq 0,$$

т. е. функция $V(\varphi(t))$ не возрастает. Но тогда, в силу (2) и (3),

$$V_\varepsilon > V(\varphi(t)) \geq V(\varphi(t_1)) \geq V_\varepsilon,$$

что невозможно. Следовательно, решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ определено при всех $t \geq t_0$ и его траектория не может достигать поверхности S_ε , т. е. при всех $t \geq t_0$

$$|\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$ задано произвольно. Выберем δ так же, как это дела-

лось выше. Тогда для любой траектории $x = \varphi(t)$, для которой $|\varphi(t_0)| < \delta$, имеет место неравенство $|\varphi(t)| < \varepsilon$.

Рассмотрим снова сложную функцию $V(\varphi(t))$. Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0.$$

В самом деле, допустив противное, мы придем к заключению, что у невозрастающей неотрицательной функции $V(\varphi(t))$ существует положительный предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = A > 0; \quad (4)$$

кроме того, $V(\varphi(t)) \geq A$ при $t \geq t_0$. Но тогда существует такое $\sigma > 0$, что

$$|\varphi(t)| \geq \sigma \quad \text{при всех } t \geq t_0,$$

так как иначе, в противоречии с (4), нашлась бы такая последовательность $t_k \geq t_0$, что $|\varphi(t_k)| \rightarrow 0$ и $V(\varphi(t_k)) \rightarrow 0$, поскольку $V(0) = 0$. Итак, мы получили неравенства

$$\sigma \leq |\varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

По условию леммы на замкнутом ограниченном множестве $\sigma \leq |x| \leq \varepsilon$ функция $W(x)$ строго положительна, поэтому существует такое $\alpha > 0$, что $W(x) \geq \alpha$ на этом множестве и

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i}(\varphi) f^i(t, \varphi) \leq -W(\varphi) \leq -\alpha. \quad (5)$$

Интегрируя неравенство (5) в пределах от t_0 до t , получим $V(\varphi(t)) - V(\varphi(t_0)) \leq -\alpha(t - t_0)$. Отсюда следует, что при $t \rightarrow +\infty$

$$V(\varphi(t)) \rightarrow -\infty,$$

хотя функция $V(x)$ неотрицательна. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0. \quad (6)$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0.$$

Предположим противное, тогда найдется такое $\eta > 0$ и такая последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, что $|\varphi(t_n)| \geq \eta$. На замкнутом ограниченном множестве $\eta \leq |x| \leq \varepsilon$ функция $V(x)$ строго положительна, поэтому существует такое число $\beta > 0$, что $V(x) \geq \beta > 0$ и тогда $V(\varphi(t)) \geq \beta > 0$, что противоречит равенству (6). Итак, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$, т.е. положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Для облегчения последующих вычислений заметим, что каково бы ни было решение $x = x(t)$ системы уравнений (1), имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i}(x(t)) f^i(t, x(t)) = \frac{d}{dt} V(x(t)).$$

П р и м е р. Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy^4, \\ \dot{y} &= -x^2y. \end{aligned}$$

Положим $V(x, y) = x^2 + y^4$, тогда $V(x, y) \geq 0$ и обращается в нуль только при $x = y = 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial V}{\partial x} xy^4 - \frac{\partial V}{\partial y} x^2y = -2x^2y^4 \leq 0.$$

В силу леммы Ляпунова, положение равновесия $(0, 0)$ рассматриваемой системы устойчиво по Ляпунову.

§ 4. Теорема Ляпунова

Пусть $x \equiv 0$ — положение равновесия нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

правая часть которой удовлетворяет условиям теорем существования и единственности и имеет вид

$$f(t, x) = A(t)x + F(t, x),$$

где $A(t)$ — матрица, причем

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|F(t, x)|}{|x|} = 0.$$

Линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x$$

называется *первым приближением* или *линеаризацией* исходной системы уравнений (1).

Заметим, что, согласно предположениям,

$$F(t, 0) = 0$$

и

$$A(t) = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t, 0) \right].$$

Рассмотрим частный случай, когда матрица $A(t)$ постоянна.

Теорема Ляпунова. Пусть имеется нормальная система уравнений

$$\dot{x} = Ax + F(t, x) \quad (F(t, 0) = 0), \quad (2)$$

где A — постоянная матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части, и при $t \geq t_0$ и достаточно малом $|x|$

$$|F(t, x)| \leq M|x|^{1+\alpha},$$

где α и M — положительные постоянные. Тогда положение равновесия $x = 0$ системы уравнений (2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ — решение системы уравнений (2). Введем вспомогательную (вообще говоря, комплексную) вектор-функцию $y(t)$ посредством равенства

$$x(t) = Ry(t),$$

где R — невырожденная постоянная матрица. Очевидно,

$$\dot{y} = By + G(t, y), \quad (3)$$

где

$$B = R^{-1}AR, \quad G(t, y) = R^{-1}F(t, Ry).$$

Как показано в § 1 дополнения, матрицу R (вообще говоря, комплексную) можно подобрать так, чтобы

матрица B имела вид

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A , а элементы b_j^i ($i < j$) по модулю меньше заданного числа $b > 0$.

В силу условий теоремы,

$$\begin{aligned} |G(t, y)| &\leq \|R^{-1}\| |F(t, Ry)| \leq \|R^{-1}\| \cdot M \cdot |Ry|^{1+\alpha} \leq \\ &\leq \|R^{-1}\| \cdot M \cdot \|R\|^{1+\alpha} |y|^{1+\alpha} = M_1 |y|^{1+\alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$M_1 = \|R^{-1}\| \cdot M \cdot \|R\|^{1+\alpha}.$$

Рассмотрим функцию

$$V(x) = \sum_{i=1}^n y^i \bar{y}^i = \sum_{i=1}^n |y^i|^2 = |y|^2,$$

где $\bar{y}^i$ — число, комплексно-сопряженное с y^i , а $y = R^{-1}x$. Очевидно, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $V(0) = 0$. В самом деле, если $x \neq 0$, то $y = R^{-1}x \neq 0$ и $V(x) = |y|^2 > 0$.

Для вычисления $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i$ воспользуемся замеча-

нием, сделанным в конце § 3, и тем обстоятельством, что через любую точку (t, x) можно провести интегральную кривую $x = x(t)$ системы уравнений (2) (в силу теоремы существования и единственности):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i &= \frac{d}{dt} V(x) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n y^i \bar{y}^i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dy^i}{dt} \bar{y}^i + y^i \frac{d\bar{y}^i}{dt} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (3) и (4),

$$\begin{aligned}\frac{dy^i}{dt} &= \lambda_i y^i + \sum_{i < j} b_{ij}^i y^j + G^i, \\ \frac{d\bar{y}^i}{dt} &= \bar{\lambda}_i \bar{y}^i + \sum_{i < j} \bar{b}_{ij}^i \bar{y}^j + \bar{G}^i.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i y^i \bar{y}^i + \bar{\lambda}_i y^i \bar{y}^i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (b_{ij}^i y^j \bar{y}^i + \bar{b}_{ij}^i \bar{y}^j y^i) + \sum_{i=1}^n (G^i \bar{y}^i + \bar{G}^i y^i) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) y^i \bar{y}^i + \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (b_{ij}^i y^j \bar{y}^i + \bar{b}_{ij}^i \bar{y}^j y^i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (G^i \bar{y}^i + \bar{G}^i y^i).\end{aligned}\quad (8)$$

Так как по условию теоремы $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, существует такое $a > 0$, что $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -a$ и

$$\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 2 \operatorname{Re} \lambda_i \leq -2a \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть $|b_{ij}^i| = |\bar{b}_{ij}^i| \leq b$. В силу (5),

$$|G^i| = |\bar{G}^i| \leq |\mathbf{G}| \leq M_1 |\mathbf{y}|^{1+a}.$$

Из равенства (8) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i &\leq \sum_{i=1}^n -2a |y^i|^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (|b_{ij}^i| y^j |\bar{y}^i| + |\bar{b}_{ij}^i| \bar{y}^j |y^i|) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (|G^i| |\bar{y}^i| + |\bar{G}^i| |y^i|) \leq -2aV +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} 2b |y|^2 + 2 \sum_{i=1}^n M_i |y|^{2+\alpha} = \\
& = -2aV + 2b \frac{n(n-1)}{2} |y|^2 + 2M_1 \cdot n |y|^{2+\alpha} = \\
& = -2aV + n(n-1)bV + 2nM_1 V^{1+\frac{\alpha}{2}}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Матрицу R подберем так, чтобы

$$b \leq \frac{a}{2n(n-1)},$$

а $|x|$ будем считать настолько малым, что $V^{\alpha/2} \leq \leq \frac{a}{4M_1 n}$. Тогда из неравенства (9) получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i \leq -2aV + \frac{a}{2} V + \frac{a}{2} V = -aV. \quad (10)$$

В силу леммы Ляпунова, из (10), где роль функции $W(x)$ играет $-aV(x)$, следует асимптотическая устойчивость положения равновесия системы уравнений (2). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений вида (2):

$$\dot{x} = -x - y + \frac{xy}{1+t},$$

$$\dot{y} = 2x - 3y + \frac{y^2}{1+t^2}.$$

При $t \geq 0$ все условия теоремы Ляпунова, очевидно, выполнены (матрица $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$). Поэтому положение равновесия $x = y = 0$ будет асимптотически устойчивым.

Замечания. 1. Имеет место следующая

Теорема о неустойчивости. Пусть задана нормальная система уравнений (2), где A — постоянная матрица, имеющая хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, и при $t \geq t_0$ и достаточно малом $|x|$

$$|F(t, x)| \leq M |x|^{1+\alpha},$$

где α и M — положительные постоянные. Тогда положение равновесия $x = 0$ системы уравнений (2) неустойчиво.

2. При исследовании устойчивости положения равновесия по первому приближению важно иметь возможность установить тот факт, что все собственные значения действительной матрицы A , т. е. все корни характеристического многочлена, имеют отрицательные действительные части. Известна следующая теорема Гурвица, которую мы приведем без доказательства:

Для того чтобы у многочлена

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

с действительными коэффициентами все корни имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

(где $a_k = 0$, если $k > n$) были положительными, т. е. чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} \cdot a_n > 0.$$

Последнее условие можно заменить условием $a_n > 0$. Для многочлена второй степени $z^2 + a_1 z + a_2$ получаются следующие условия: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, а для многочленов третьей степени $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ — такие:

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

§ 5. Консервативная механическая система с одной степенью свободы

Консервативная механическая система с одной степенью свободы (без трения) описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{x} = f(x). \quad (1)$$

Пусть $f(x)$ — функция класса C^1 на некотором интервале (a, b) . Функция

$$U(x) = - \int_c^x f(\xi) d\xi \quad (a < c < b) \quad (2)$$

называется *потенциальной энергией* механической системы. Уравнение второго порядка (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U'(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Непрерывность производной $f'(x)$ обеспечивает, в силу теорем существования и единственности (см. гл. 3, § 1), существование и единственность решения задачи Коши для системы уравнений (3). Положению равновесия $x = x_0$ уравнения (1) соответствует положение равновесия $x = x_0, p = 0$ системы уравнений (3).

Положение равновесия $x = x_0$ уравнения (1) является стационарной точкой потенциальной энергии $U(x)$. В самом деле, если $x = x_0$ — положение равновесия, то $f(x_0) = 0$ и, в силу (2), $U'(x_0) = -f(x_0) = 0$.

В случае, когда x_0 является точкой строгого экстремума потенциальной энергии $U(x)$, имеет место следующая.

Теорема. Пусть $f(x)$ — функция класса C^2 на интервале (a, b) . Тогда, если $x = x_0$ — точка строгого минимума потенциальной энергии $U(x)$, то положение равновесия $x = x_0, p = 0$ системы уравнений (3) устойчиво по Ляпунову; если $x = x_0$ — точка строгого максимума потенциальной энергии $U(x)$ и $f'(x_0) > 0$,

то положение равновесия $x = x_0$, $p = 0$ системы уравнений (3) неустойчиво.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$ (этого можно добиться за счет замены переменных $y = x - x_0$).

Пусть $x = 0$ — точка строгого минимума потенциальной энергии; тогда в некоторой окрестности точки 0 $U(x) > U(0)$ при $x \neq 0$. Построим функцию $V(x, p) = U(x) - U(0) + p^2/2$ (полная энергия механической системы). Очевидно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} p + \frac{\partial V}{\partial p} (-U'(x)) = 0,$$

и тогда, в силу леммы Ляпунова (см. § 3), положение равновесия $x = 0$, $p = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пусть $x = 0$ — точка строгого максимума потенциальной энергии $U(x)$ и $f'(0) > 0$; тогда $U'(0) = 0$, $U''(0) = -f'(0) < 0$. Систему уравнений (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U''(0)x + F(x), \end{aligned} \quad (4)$$

причем при достаточно малых x

$$|F(x)| \leq M|x|^2,$$

так как по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} U'(x) &= U'(0) + U''(0)x + \frac{1}{2} U'''(\theta x)x^2 = \\ &= U''(0)x - \frac{1}{2} f''(\theta x)x^2 \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

и

$$F(x) = \frac{1}{2} f''(\theta x)x^2.$$

Линеаризация системы уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p, \\ \dot{p} &= -U''(0)x. \end{aligned}$$

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -U''(0) & 0 \end{bmatrix}$$

имеет действительные собственные значения $\lambda = \pm \sqrt{-U''(0)}$, одно из которых положительно. В силу теоремы, сформулированной на стр. 192, положение равновесия $x = 0$, $p = 0$ неустойчиво. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как видно из доказательства, первое утверждение теоремы остается справедливым в случае, когда $f(x)$ — функция класса C^1 . Можно показать, что и второе утверждение теоремы остается верным при этих предположениях.

З а д а ч и

1. Доказать, что любое решение линейной неоднородной системы уравнений

$$\dot{x} = F(t)x + g(t)$$

($F(t)$ и $g(t)$ непрерывны при $t_0 \leq t < +\infty$) устойчиво по Ляпунову (асимптотически) тогда и только тогда, когда устойчиво по Ляпунову (асимптотически) тривиальное решение $x \equiv 0$ соответствующей однородной системы уравнений

$$\dot{x} = F(t)x.$$

2. Доказать, что устойчивость по Ляпунову тривиального решения $x \equiv 0$ однородной системы уравнений $\dot{x} = F(t)x$ эквивалентна ограниченности при $t \geq t_0$ любого решения этой системы.

3. Доказать, что асимптотическая устойчивость тривиального решения $x \equiv 0$ однородной системы уравнений $\dot{x} = F(t)x$ эквивалентна стремлению к нулю при $t \rightarrow +\infty$ любого решения этой системы.

4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $U = U(x)$ — функция класса C^1 , имеющая строгий минимум в начале координат. Применив лемму

Ляпунова (см. § 3), показать, что тривиальное решение $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Указание. В качестве функции $V(x)$ взять разность $U(x) - U(0)$.

5. Показать, что для уравнения физического маятника

$$\ddot{x} = -\sin x$$

положения равновесия $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) устойчивы по Ляпунову, а положения равновесия $x = (2k + 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) неустойчивы.

Указание. См. § 5.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этой главе изучаются уравнения с частными производными первого порядка. Излагается метод характеристик решения задачи Коши для квазилинейных уравнений. Устанавливается связь между решениями линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка и первыми интегралами динамических систем. В конце главы рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим уравнение вида

$$F\left(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x) \equiv u(x^1, \dots, x^n)$ — неизвестная функция.

При этом будем рассматривать случай, когда функция $F(x, u, p) \equiv F(x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_n)$ дифференцируема по переменным $p_1, \dots, p_n$ на некотором открытом множестве G пространства переменных x, u, p ($p = \{p_1, \dots, p_n\}$) и на этом множестве

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Если перечисленные условия выполнены, то уравнение (1) называется *дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка*, а любая дифференцируемая функция $u = u(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, — его решением. Если $u(x)$ — решение, то поверхность $u = u(x)$ в пространстве переменных x, u называется *интегральной поверхностью* уравнения (1).

В общем случае уравнение (1) называется *нелинейным уравнением с частными производными первого порядка*. Если же функция $F(x, u, p)$ линейна относительно переменных $p_1, \dots, p_n$, то уравнение (1) называется *квазилинейным*.

Итак, квазилинейное уравнение — это уравнение вида

$$\sum_{i=1}^n a^i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(x, u). \quad (2)$$

Если в уравнении (2) коэффициенты a^i не зависят от u , т. е. $a^i = a^i(x)$, то уравнение называется *полулинейным* и имеет вид

$$\sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(x, u). \quad (3)$$

Если в уравнении (3) правая часть $b(x, u)$ — линейная функция относительно u , то уравнение называется *линейным* и имеет вид

$$\sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = c(x)u + d(x). \quad (4)$$

Уравнение (2) можно записать в виде скалярного произведения вектора $a = \{a^1, \dots, a^n\}$ и градиента

$\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n} \right\}$ функции u :

$$(a, \nabla u) = b,$$

или

$$\left(\frac{a}{|a|}, \nabla u \right) = \frac{b}{|a|}. \quad (5)$$

Выражение, стоящее в левой части формулы (5), есть производная функции $u = u(x)$ в направлении вектора a . Поэтому решениями уравнения (2) будут такие функции $u = u(x)$, производная которых в каждой точке x множества, на котором определена функция $u(x)$, по направлению вектора $a(x, u(x))$ равна $\frac{b(x, u(x))}{|a|}$.

§ 2. Понятие характеристики квазилинейного уравнения

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n a^i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(\mathbf{x}, u), \quad (1)$$

и пусть функции $a^i(\mathbf{x}, u)$ ($i = 1, \dots, n$), $b(\mathbf{x}, u)$ принадлежат к классу C^1 на некотором открытом множестве G пространства переменных $\mathbf{x}, u$, причем на этом множестве

$$\sum_{i=1}^n [a^i(\mathbf{x}, u)]^2 \neq 0.$$

Пусть $u = u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (1), определенное в некоторой области D пространства переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ — кривая, лежащая в D . Тогда, рассматривая решение $u = u(\mathbf{x})$ на этой кривой, получим функцию $U(\tau) = u(\mathbf{x}(\tau))$.

Подберем кривую $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ так, чтобы ее касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ в каждой точке был равен $\mathbf{a}(\mathbf{x}(\tau), U(\tau))$. Для этого должны выполняться уравнения

$$\frac{dx^i}{d\tau} = a^i(\mathbf{x}(\tau), U(\tau)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Дифференцируя функцию $U(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}(\tau)) \cdot \frac{dx^i}{d\tau} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}(\tau)) a^i(\mathbf{x}(\tau), U(\tau)) = b(\mathbf{x}(\tau), U(\tau)); \end{aligned}$$

последнее равенство имеет место в силу того, что $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (1).

Следовательно, искомая кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ в пространстве $\mathbf{x}$ должна быть такой, чтобы уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau), \quad u = U(\tau)$$

определяли траекторию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{d\tau} &= a^i(\mathbf{x}, u) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{du}{d\tau} &= b(\mathbf{x}, u).\end{aligned}\tag{2}$$

Система уравнений (2) называется *характеристической системой* уравнения (1), а ее траектории в пространстве переменных $\mathbf{x}, u$ — *характеристиками* уравнения (1).

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что параметр τ на характеристике уравнения (1) определен лишь с точностью до постоянного слагаемого.

Согласно нашим предположениям, функции $a^i(\mathbf{x}, u)$ ($i = 1, \dots, n$), $b(\mathbf{x}, u)$ принадлежат классу C^1 на множестве G , поэтому для системы уравнений (2) выполнены условия теорем существования и единственности.

Теорема 1. Если поверхность $S: u = u(\mathbf{x})$ класса C^1 в пространстве переменных $\mathbf{x}, u$ такова, что, какова бы ни была точка $(\mathbf{x}_0, u_0) \in S$, характеристика уравнения (1), проходящая через $(\mathbf{x}_0, u_0)$, касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью уравнения (1).

Доказательство. Пусть $(\mathbf{x}_0, u_0)$, $u_0 = u(\mathbf{x}_0)$ — произвольная точка поверхности S . Рассмотрим характеристику

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau), \quad u = U(\tau)$$

уравнения (1), проходящую через эту точку; таким образом, при некотором $\tau = \tau_0$

$$\mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0, \quad U(\tau_0) = u_0.$$

Касательная плоскость к поверхности S в точке $(\mathbf{x}_0, u_0)$ имеет уравнение

$$u - u_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)(x^i - x_0^i).$$

По условию теоремы, характеристика касается поверхности S в точке $(\mathbf{x}_0, u_0)$. Это означает, что

касательный к характеристике вектор $\{\dot{x}^1(\tau_0), \dots, \dot{x}^n(\tau_0), \dot{U}(\tau_0)\}$ лежит в указанной плоскости, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) \dot{x}^i(\tau_0) = \dot{U}(\tau_0). \quad (3)$$

Так как $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, $u = U(\tau)$ — решение системы (2), то

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(\tau_0) &= a^i(\mathbf{x}(\tau_0), U(\tau_0)) = a^i(\mathbf{x}_0, u_0), \\ \dot{U}(\tau_0) &= b(\mathbf{x}(\tau_0), U(\tau_0)) = b(\mathbf{x}_0, u_0). \end{aligned} \quad (4)$$

В силу (4) равенство (3) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^n a^i(\mathbf{x}_0, u_0) \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0) = b(\mathbf{x}_0, u_0),$$

т. е. функция $u = u(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (1) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Так как $(\mathbf{x}_0, u_0)$ — произвольная точка поверхности S , то $u = u(\mathbf{x})$ представляет собой решение уравнения (1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u = u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (1), определенное в некоторой области D , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, $u = U(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) — решение системы (2). Если при этом кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) лежит в D и $U(\tau_0) = u(\mathbf{x}(\tau_0))$, то

$$u(\mathbf{x}(\tau)) \equiv U(\tau).$$

Доказательство. Пусть $v(\tau) = u(\mathbf{x}(\tau))$, тогда, поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, $u = U(\tau)$ — решение системы уравнений (2),

$$\frac{dv}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}(\tau)) \frac{dx^i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(\mathbf{x}(\tau)) a^i(\mathbf{x}(\tau), U(\tau)). \quad (5)$$

Так как $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (1), то, в силу (2), из равенства (5) получим

$$\frac{dv}{d\tau} = b(\mathbf{x}(\tau), U(\tau)) = \frac{dU}{d\tau},$$

откуда следует, что

$$v(\tau) = U(\tau) + c.$$

Но $U(\tau_0) = u(x(\tau_0))$, т. е. $v(\tau_0) = U(\tau_0)$. Следовательно, $c = 0$ и $v(\tau) \equiv U(\tau)$. Теорема доказана.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Пусть $u = u(x)$ — интегральная поверхность уравнения (1), кривая $x = x(\tau)$, $u = U(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) — характеристика уравнения (1). Условие $U(\tau_0) = u(x(\tau_0))$ означает, что точка $(x(\tau_0), U(\tau_0))$ характеристики находится на интегральной поверхности $u = u(x)$. Теорема утверждает, что при этом вся характеристика лежит на интегральной поверхности.

Таким образом, любая интегральная поверхность уравнения (1) образована некоторым семейством характеристик.

Примеры. 1. Для линейного уравнения $\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0$ характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx^1}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx^2}{d\tau} = 1, \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Характеристиками в этом случае будут прямые $x^1 = \tau + c^1$, $x^2 = \tau + c^2$, $u = c$.

2. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} + u \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0.$$

Характеристическая система в этом случае имеет вид

$$\frac{dx^1}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx^2}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Интегрируя ее, получим

$$x^1 = \tau + c^1, \quad x^2 = c\tau + c^2, \quad u = c.$$

Характеристики образуют некоторое семейство прямых, параллельных плоскости x^1, x^2 .

§ 3. Задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка

Так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения с частными производными первого порядка имеют бесконечное множество решений. Для однозначного выделения решения из бесконечной совокупности решений добавляются так называемые начальные условия.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right) = 0. \quad (1)$$

Пусть $S: x = \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ — регулярная $n-1$ -мерная поверхность класса C^1 *) без самопересечений в пространстве переменных $x^1, \dots, x^n$. На этой поверхности определена функция $u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$. Ищется решение $u = u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(\xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})) = u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}). \quad (2)$$

При $n=2$ задача Коши имеет простой геометрический смысл. Уравнение $x = \xi(\tau^1)$ определяет кривую на плоскости x^1, x^2 , а уравнения $x = \xi(\tau^1), u = u_0(\tau^1)$ — кривую в пространстве x^1, x^2, u . Условие (2) в рассматриваемом случае имеет вид

$$u(\xi(\tau^1)) = u_0(\tau^1)$$

и геометрически означает следующее: интегральная поверхность $u = u(x^1, x^2)$ проходит через кривую

$$x = \xi(\tau^1), \quad u = u_0(\tau^1).$$

Таким образом, при $n=2$ задача Коши состоит в том, что ищется интегральная поверхность $u = u(x^1, x^2)$ уравнения

$$F\left(x^1, x^2, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\right) = 0,$$

проходящая через заданную начальную кривую

$$x = \xi(\tau^1), \quad u = u_0(\tau^1).$$

*) S называется *регулярной поверхностью класса C^1* , если функции $\frac{\partial \xi}{\partial \tau^k}$ ($k=1, \dots, n-1$) непрерывны и при любых фиксированных значениях $\tau^1, \dots, \tau^{n-1}$ векторы $\frac{\partial \xi}{\partial \tau^k}$ ($k=1, \dots, n-1$) линейно независимы.

§ 4. Решение задачи Коши для квазилинейного уравнения

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i=1}^n a^i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(\mathbf{x}, u). \quad (1)$$

Пусть $S: \mathbf{x} = \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ — регулярная $n-1$ -мерная поверхность класса C^1 без самопересечений, параметры $(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ изменяются в некоторой области T , $u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ — функция класса C^1 на T .

Будем решать задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(\xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})) = u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}). \quad (2)$$

Геометрический смысл задачи Коши (1), (2) состоит в том, чтобы в пространстве переменных $\mathbf{x}, u$ через $n-1$ -мерную поверхность $\tilde{S}$:

$$\mathbf{x} = \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}),$$

$$u = u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$$

провести интегральную поверхность $u = u(\mathbf{x})$ уравнения (1).

В силу теоремы 2 из § 2, всякая характеристика уравнения (1), проходящая через любую точку поверхности $\tilde{S}$, лежит на искомой интегральной поверхности $u = u(\mathbf{x})$. Проведем через каждую точку поверхности $\tilde{S}$ характеристику уравнения (1). Параметр τ на ней выберем так, чтобы при $\tau = 0$ она проходила через точку поверхности $\tilde{S}$. Уравнения этих характеристик можно записать в виде

$$x^i = \varphi^i(\tau, \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}), u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})), \quad (3)$$

$$u = U(\tau, \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}), u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})). \quad (4)$$

Здесь

$$x^i = \varphi^i(\tau, \mathbf{x}_0, u_0) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u = U(\tau, \mathbf{x}, u_0)$$

— непродолжаемые решения характеристической системы

$$\frac{dx^i}{d\tau} = a^i(\mathbf{x}, u) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\frac{du}{d\tau} = b(\mathbf{x}, u)$$

уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi^i(0, \mathbf{x}_0, u_0) = x_0^i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$U(0, \mathbf{x}_0, u_0) = u_0.$$

Уравнения (3), (4) определяют в пространстве переменных $\mathbf{x}, u$ некоторую поверхность S' (вообще говоря, n -мерную).

З а м е ч а н и е. Может случиться, что построенная поверхность (3), (4) имеет сложное строение. Во-первых, S' может оказаться $n-1$ -мерной поверхностью в пространстве $n+1$ измерений. Во-вторых, она может сама себя пересекать, так как характеристика, пройдя при $\tau=0$ через некоторую точку (ξ, u_0) поверхности $\tilde{S}$, может с изменением τ вновь пересечь поверхность $\tilde{S}$. В-третьих, при проектировании этой поверхности на гиперплоскость $u=0$ различные точки этой поверхности могут проектироваться в одну, т. е. поверхность (3), (4), вообще говоря, нельзя задать уравнением вида $u=u(\mathbf{x})$ для всех допустимых значений $\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}$. Для того чтобы поверхность (3), (4) допускала такое представление, необходимо и достаточно, чтобы любым различным допустимым системам значений $\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}$ отвечали различные системы значений $x^1, \dots, x^n$, определяемые формулами (3). Иначе говоря, уравнения (3) должны быть однозначно разрешимы относительно $\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}$ при всех допустимых значениях этих переменных.

Теорема. Пусть при $\alpha < \tau < \beta$ ($\alpha < 0, \beta > 0$) и при всех $(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \in T$ уравнения (3) однозначно разрешимы относительно $\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}$, причем полученные функции $\tau = \tau(\mathbf{x}), \tau^i = \tau^i(\mathbf{x})$ ($i =$

$= 1, \dots, n-1)$ принадлежат классу C^1 . Тогда функция

$$u = u(x) \equiv U(\tau(x), \xi(\tau^1(x), \dots, \tau^{n-1}(x)), u_0(\tau^1(x), \dots, \tau^{n-1}(x))) \quad (5)$$

будет решением задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием (2).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что уравнения (3) и (4) при $\alpha < \tau < \beta$ и всех $(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \in T$ задают поверхность (5) в параметрической форме. Поэтому поверхность $u = u(x)$ образована характеристиками уравнения (1), проходящими через поверхность $\tilde{S}$. В силу теоремы 1 из § 2, $u = u(x)$ будет интегральной поверхностью уравнения (1). При $\tau = 0$ из уравнений (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} x^i &= \xi^i(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \\ u &= u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}), \end{aligned}$$

т. е. интегральная поверхность (5) проходит через поверхность $\tilde{S}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Предположим, что поверхность $\tilde{S}$ такова, что ни одна из характеристик, проходящих через точки поверхности $\tilde{S}$, не касается $\tilde{S}$ в этих точках. Пусть $u = u(x)$ — решение задачи Коши (1), (2). Тогда поверхность (3), (4) совпадает с интегральной поверхностью $u = u(x)$ в некоторой окрестности поверхности $\tilde{S}^*$). В этом смысле (при сделанных предположениях) задача Коши имеет единственное решение.

В самом деле, поскольку характеристики, проходящие через точки поверхности $\tilde{S}$, не касаются $\tilde{S}$, поверхность (3), (4), образованная характеристиками, проходящими через $\tilde{S}$, будет n -мерной. Кроме того, в силу теоремы 2 из § 2, кусок характеристики, проходящей через поверхность $\tilde{S}$, лежит на интегральной поверхности $u = u(x)$. Следовательно, поверхность (3), (4) и $u = u(x)$ совпадают в некоторой окрестности поверхности $\tilde{S}$.

*) Под окрестностью поверхности $\tilde{S}$ здесь подразумевается область, содержащая поверхность $\tilde{S}$.

2. В случае, когда поверхность $\tilde{S}$ состоит из характеристик, задача Коши имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Тогда поверхность $\tilde{S}$ представляет собой кривую

$$x = \xi(\tau^1), \quad u = u_0(\tau^1).$$

Предположим, что кривая $\tilde{S}$ — характеристика, и l — такая кривая класса C^1 , пересекающая $\tilde{S}$, что ни одна характеристика, проходящая через точки кривой l , не касается l в этих точках. Рассмотрим поверхность, образованную характеристиками, проходящими через точки кривой l , и предположим, что ее уравнение можно записать в виде $u = u(x)$, где $u(x)$ — функция класса C^1 . Тогда (по теореме 1 из § 2) $u = u(x)$ — решение задачи Коши (1), (2). Так как существует бесконечное множество кривых, пересекающих $\tilde{S}$, то задача Коши имеет в рассматриваемом случае бесконечное множество решений.

Пример. Решим задачу Коши для уравнения

$$-x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (y > 0) \quad (6)$$

со следующим начальным условием:

$$u(x, y) = y, \quad x + y = 1. \quad (7)$$

Выбирая на кривой (7) $y = s$ в качестве параметра, получим следующую кривую в пространстве переменных x, y, u :

$$x = 1 - s, \quad y = s, \quad u = s. \quad (8)$$

Характеристическая система, соответствующая уравнению (6), имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = -x, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{u}{2y}, \quad \frac{du}{d\tau} = u.$$

Решая ее, получим

$$x = c_1 e^{-\tau}, \quad y = \sqrt{c e^{\tau} + c_2}, \quad u = c e^{\tau}. \quad (9)$$

Интегральная поверхность, дающая решение задачи Коши (6), (7), образована кусками характеристик, проходящих при $\tau = 0$ через кривую (8). Полагая в уравнениях (9) $\tau = 0$ и используя (8), придем к соотношениям

$$c_1 = 1 - s, \quad \sqrt{c + c_2} = s, \quad c = s,$$

откуда

$$c_2 = s^2 - s.$$

Подставляя найденные значения c_1 , c_2 и c в (9), получим решение задачи Коши (6), (7), заданное в параметрической форме:

$$x = (1 - s) e^{-\tau}, \quad y = \sqrt{se^{\tau} + s^2 - s}, \quad u = se^{\tau}. \quad (10)$$

Исключая из уравнений (10) параметры s и τ , получим

$$u = \frac{y^2}{1 - x}. \quad (11)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция (11) является решением задачи Коши (6), (7).

В приложениях часто встречается задача Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^i(t, \mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(t, \mathbf{x}, u) \quad (12)$$

со следующим начальным условием:

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad (13)$$

(т. е. начальная функция задается на гиперплоскости $t = 0$ пространства переменных $t, \mathbf{x}, u$).

Нам известно, что интегральная поверхность $u = u(t, \mathbf{x})$, дающая решение задачи Коши (12), (13), образована характеристиками, проходящими при $\tau = 0$ через поверхность

$$t = 0, \quad x^i = \tau^i, \quad u = u_0(\tau^1, \dots, \tau^n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

в пространстве переменных $t, \mathbf{x}, u$ (в качестве параметров на поверхности выбраны сами x^i).

Уравнению (12) соответствует характеристическая система

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} = a^i(t, \mathbf{x}, u), \\ \frac{du}{d\tau} &= b(t, \mathbf{x}, u) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, для системы уравнений (15) нужно решить задачу Коши с начальными условиями

$$t|_{\tau=0} = 0, \quad x^i|_{\tau=0} = \tau^i, \quad u|_{\tau=0} = u_0(\tau^1, \dots, \tau^n) \quad (16)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Из первого уравнения системы (15) и начального условия $t|_{\tau=0} = 0$ находим $t = \tau$.

Оставшиеся уравнения системы (15) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt} &= a^i(t, \mathbf{x}, u) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{du}{dt} &= b(t, \mathbf{x}, u),\end{aligned}\tag{17}$$

а начальные условия (16) — в виде

$$\begin{aligned}x^i|_{t=0} &= \tau^i \quad (i = 1, \dots, n), \\ u|_{t=0} &= u_0(\tau^1, \dots, \tau^n).\end{aligned}\tag{18}$$

Решив задачу Коши (17), (18), получим

$$\begin{aligned}x^i &= x^i(t, \tau^1, \dots, \tau^n), \quad (i = 1, \dots, n), \\ u &= U(t, \tau^1, \dots, \tau^n).\end{aligned}\tag{19}$$

Если первые n уравнений (19) однозначно разрешимы относительно $\tau^1, \dots, \tau^n$, то, в силу доказанной выше теоремы, формулы (19) определяют решение задачи Коши (12), (13).

Пример. Рассмотрим для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

задачу Коши со следующим начальным условием:

$$u(0, x) = u_0(x) \in C^1 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Соотношения (17), (18) имеют в данном случае вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{du}{dt} = 0, \\ x|_{t=0} &= \xi, \quad u|_{t=0} = u_0(\xi).\end{aligned}\tag{20}$$

Решая задачу Коши (20), получим

$$u = u_0(\xi), \quad x = tu_0(\xi) + \xi.\tag{21}$$

Уравнения (21) определяют решение рассматриваемой задачи Коши, вообще говоря, не для всех значений переменного t .

В самом деле, если при некотором $t = t_1$ второе уравнение (21) разрешимо относительно ξ не единственным образом, т. е. найдутся такие $\xi_1 \neq \xi_2$, что

$$t_1 u_0(\xi_1) + \xi_1 = t_1 u_0(\xi_2) + \xi_2,\tag{22}$$

то уравнения (21) не определяют при $t = t_1$ никакой однозначной функции $u = u(t, x)$ и при $t = t_1$ решение задачи Коши не определено.

Геометрический смысл равенства (22) состоит в том, что при $t = t_1$ проекции на плоскость t, x двух характеристик (21), соответствующих значениям ξ_1 и ξ_2 , пересекаются в точке с координатами

$$t = t_1, \quad x = t_1 u(\xi_1) + \xi_1.$$

В частном случае, когда

$$u_0(x) = \alpha x \quad (\alpha > 0),$$

из уравнений (21) получаем

$$u = \alpha \xi, \quad x = \alpha t \xi + \xi, \quad (23)$$

откуда

$$u = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}.$$

Полученная функция определяет решение задачи Коши лишь при $t > -1/\alpha$, так как при $t = -1/\alpha$ проекции характеристик (23) на плоскость t, x пересекаются.

З а м е ч а н и я. 1. Для полулинейного уравнения

$$\sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = b(x, u) \quad (24)$$

характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx^i}{d\tau} = a^i(x) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\frac{du}{d\tau} = b(x, u).$$

Первые n уравнений этой системы

$$\frac{dx^i}{d\tau} = a^i(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (25)$$

представляют собой динамическую систему в пространстве переменных x^i ($i = 1, \dots, n$). Траектории этой системы, очевидно, являются проекциями характеристик уравнения (24) на гиперплоскость $u = 0$. Часто траектории динамической системы (25) также называют *характеристиками уравнения (24)*.

2. Понятие характеристики может быть определено и для системы квазилинейных уравнений с

«одинаковой главной частью»:

$$\sum_{j=1}^n a^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = b^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (26)$$

$$(\mathbf{u} = \{u^1, \dots, u^m\}).$$

Характеристиками в этом случае называются траектории динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{dx^j}{d\tau} &= a^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & (j = 1, \dots, n), \\ \frac{du^i}{d\tau} &= b^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (27)$$

в пространстве переменных $\mathbf{x}, \mathbf{u}$. Имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 из § 2.

Теорема 1'. Если n -мерная поверхность $S: \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ класса C^1 в $n + m$ -мерном пространстве переменных $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m$ такова, что, какова бы ни была точка $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \in S$, характеристика системы уравнений (27), проходящая через $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью системы уравнений (26).

Теорема 2'. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение системы уравнений (26), определенное в некоторой области D , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, $\mathbf{u} = \mathbf{U}(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) — решение системы уравнений (27). Если при этом кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ заключена в D и $\mathbf{U}(\tau_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau_0))$, то при всех $\tau \in (\alpha, \beta)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau)) \equiv \mathbf{U}(\tau).$$

§ 5. Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка и первые интегралы динамических систем

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

правая часть которой $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f^1(\mathbf{x}), \dots, f^n(\mathbf{x})\}$ является функцией класса C^1 на некотором открытом множестве G пространства переменных $x^1, \dots, x^n$.

Определение. Функция $u(\mathbf{x})$ класса C^1 , определенная на некотором открытом множестве D , содержащемся в G , называется *первым интегралом системы* (1), если на любой траектории $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$ этой системы, заключенной в D , функция $u(\boldsymbol{\varphi}(\tau))$ постоянна.

Теорема 1. Для того чтобы функция $u(\mathbf{x})$ была первым интегралом динамической системы (1), необходимо и достаточно, чтобы она была решением уравнения

$$\sum_{i=1}^n f^i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \quad (2)$$

Доказательство необходимости. Пусть $u(\mathbf{x})$ — первый интеграл системы уравнений (1). Рассмотрим характеристическую систему уравнения (2):

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{d\tau} &= f^i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{du}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ее решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau), \quad u = c, \quad (4)$$

где $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$ — решение системы уравнений (1).

Пусть характеристика (4) проходит через точку, лежащую на поверхности $u = u(\mathbf{x})$, т. е. при некотором $\tau = \tau_0$ $c = u(\boldsymbol{\varphi}(\tau_0))$. Тогда, поскольку $u(\mathbf{x})$ — первый интеграл, $u(\boldsymbol{\varphi}(\tau))$ не зависит от τ и $u(\boldsymbol{\varphi}(\tau)) = u(\boldsymbol{\varphi}(\tau_0))$. Следовательно, характеристика (4) лежит на поверхности $u = u(\mathbf{x})$. По теореме 1 из § 2 поверхность $u = u(\mathbf{x})$ будет интегральной поверхностью уравнения (2).

Доказательство достаточности. Пусть $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (2). Для любого решения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$ системы уравнений (1), траектория которого заключена в D ,

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tau), \quad u = u(\boldsymbol{\varphi}(\tau_0))$$

будет решением характеристической системы (3); здесь τ_0 — произвольное число из интервала, на

котором определено решение $x = \varphi(\tau)$. В силу теоремы 2 § 2 имеет место равенство

$$u(\varphi(\tau)) = u(\varphi(\tau_0)) = \text{const},$$

т.е. $u(x)$ представляет собой первый интеграл системы (1).

З а м е ч а н и е. Если динамическая система (1) описывает поведение некоторой физической системы (параметр τ рассматривается как время), то любой ее первый интеграл, не равный тождественно постоянной, определяет некоторый закон сохранения: с изменением времени τ параметры $x^1, \dots, x^n$, задающие состояние системы, меняются, а функция $u(x)$ сохраняет постоянное значение.

П р и м е р. Пусть тело массы m свободно падает под действием силы тяжести $F = mg$. Тогда его движение описывается следующей динамической системой уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -g,$$

где v — скорость тела, x — расстояние тела от поверхности Земли. В силу теоремы 1, функция $u(x, v) = mgx + \frac{mv^2}{2}$ является первым интегралом рассматриваемой динамической системы и, следовательно, постоянна на любой траектории этой системы:

$$mgx + \frac{mv^2}{2} = \text{const}.$$

Полученное равенство представляет собой закон сохранения энергии.

Пусть динамическая система (1) определена в некоторой окрестности точки a , не являющейся положением равновесия; это условие означает, что $f(a) \neq 0$.

Пусть $u_1(x), \dots, u_k(x)$ — первые интегралы системы (1), определенные в окрестности точки a .

О п р е д е л е н и е. Первые интегралы $u_1(x), \dots, u_k(x)$ называются *независимыми в точке a* , если ранг матрицы $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x^i}(a) \right] \quad (i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k)$ равен k .

Т е о р е м а 2. В достаточно малой окрестности точки $a = \{a^1, \dots, a^n\}$, не являющейся положением

равновесия динамической системы (1), существуют $n-1$ независимых (в точке $\mathbf{a}$) первых интегралов. Кроме того, если $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{n-1}(\mathbf{x})$ — независимые первые интегралы, а $u(\mathbf{x})$ — произвольный первый интеграл, то

$$u(\mathbf{x}) = w(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{n-1}(\mathbf{x})),$$

где $w(y_1, \dots, y_{n-1})$ — некоторая функция класса C^1 , определенная в окрестности точки $y_1 = u_1(\mathbf{a}), \dots, y_{n-1} = u_{n-1}(\mathbf{a})$.

Доказательство. Поскольку $f(\mathbf{a}) \neq 0$, то без ограничения общности можно считать $f^n(\mathbf{a}) \neq 0$.

Определим первый интеграл $u_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, n-1$) как решение задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием

$$u_k|_{x^n=a^n} = x^k \quad (k = 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи Коши нужно (см. § 4) найти решение

$$x^i = \varphi^i(\tau, \mathbf{x}_0) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u = u_0$$

характеристической системы (3) уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi^i(0, \mathbf{x}_0) = x_0^i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u = u_0,$$

и составить следующие уравнения:

$$x^i = \varphi^i(\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}, a^n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u_k = \tau^k. \quad (6)$$

Легко видеть, что при $\tau = 0, \tau^1 = a^1, \dots, \tau^{n-1} = a^{n-1}$ якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial \tau^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial \tau^{n-1}} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial \tau} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial \tau^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial \tau^{n-1}} & \frac{\partial \varphi^n}{\partial \tau} \end{vmatrix},$$

составленный для функций, стоящих в правых частях первых n уравнений (6), равен

$$\begin{vmatrix} 1 & & 0 & f^1(a) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & f^{n-1}(a) \\ 0 & & 0 & f^n(a) \end{vmatrix} = f^n(a) \neq 0.$$

По теореме о неявных функциях первые n уравнений (6) однозначно разрешимы относительно переменных $\tau^1, \dots, \tau^{n-1}$ (и τ) в окрестности точки $\tau^1 = a^1, \dots, \tau^{n-1} = a^{n-1}, \tau = 0$:

$$\tau^k = v^k(x) \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

В силу теоремы из § 4, каждая из функций $u_k = v^k(x)$ ($k = 1, \dots, n-1$) будет решением задачи Коши (2), (5), а следовательно, и первым интегралом системы (1) (в силу теоремы 1).

Построенные первые интегралы независимы, так как матрица

$$\left[\frac{\partial u_k}{\partial x^j}(a) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x^n}(a) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x^n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x^n}(a) \end{bmatrix}$$

имеет ранг $n-1$. Итак, в достаточно малой окрестности точки a существуют $n-1$ независимых в точке a первых интегралов.

Пусть $u(x)$ — произвольный первый интеграл, а $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ — независимые первые интегралы, тогда имеем следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$\sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \quad (7)$$

Так как $f(a) \neq 0$, то $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a . В этой окрестности уравнения (7) можно рассматривать как систему n однородных линейных уравнений относительно n неизвестных $f^1(x), \dots, f^n(x)$. Поскольку $f(x) \neq 0$, то эта система имеет нетривиальное решение и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial u}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x^n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

в рассматриваемой окрестности точки a .

По теореме о функциональной зависимости существует такая функция $\omega(y_1, \dots, y_{n-1})$, определенная в окрестности точки $y_1 = u_1(a), \dots, y_{n-1} = u_{n-1}(a)$, что для всех x , достаточно близких к a ,

$$u(x) = \omega(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)). \quad (8)$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f(a) \neq 0$, любое решение $u = u(x)$ уравнения (2) в некоторой окрестности точки a имеет вид (8), где $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ — независимые (в точке a) первые интегралы системы (1).

Примеры. 1. Найдём первые интегралы динамической системы

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x, \quad \frac{dz}{d\tau} = y. \quad (9)$$

Записав ее в виде

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{y} = d\tau,$$

замечаем, что вдоль любой траектории этой динамической системы

$$x dx + y dy = 0, \quad dx - dz = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0, \quad d(x - z) = 0,$$

откуда следует, что

$$u_1 = x^2 + y^2, \quad u_2 = x - z$$

— первые интегралы системы (9).

Матрица первых частных производных функций u_1, u_2 по x, y, z имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, ранг этой матрицы равен 2 при $x^2 + y^2 > 0$, и, следовательно, при $x^2 + y^2 > 0$ первые интегралы u_1 и u_2 независимы. В силу доказанной выше теоремы, любой первый интеграл системы (9) в окрестности произвольной точки (x_0, y_0, z_0) ($x_0^2 + y_0^2 > 0$) представляется в виде

$$u(x, y, z) = w(x^2 + y^2, x - z),$$

где $w(y_1, y_2)$ — произвольная функция класса C^1 .

2. Для уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

решим задачу Коши со следующим начальным условием:

$$u|_{x=1} = y^2. \quad (11)$$

Решением уравнения (10) будут первые интегралы динамической системы

$$\frac{dx}{d\tau} = x, \quad \frac{dy}{d\tau} = y. \quad (12)$$

Записывая систему (12) в виде

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = d\tau,$$

найдем ее первый интеграл

$$u_1(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Решение задачи Коши (10), (11) ищем в виде

$$u(x, y) = w\left(\frac{y}{x}\right), \quad (13)$$

где $w(y_1)$ — функция класса C^1 .

Полагая в (13) $x = 1$ и используя начальное условие (11), получим

$$w(y) = y^2;$$

таким образом,

$$u(x, y) = w\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2}$$

— решение рассматриваемой задачи Коши.

§ 6. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения

$$F(x^1, \dots, x^n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}) = 0, \quad (1)$$

где $F(x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_n)$ — функция класса C^2 , определенная на некотором открытом множестве в пространстве переменных $x^1, \dots, x^n, u, p_1, \dots, p_n$, с начальным условием

$$u(\xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})) = u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}). \quad (2)$$

Здесь $x = \xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ — некоторая $n-1$ -мерная регулярная поверхность S класса C^2 без самопересечений, а $u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$ — начальная функция класса C^2 , определенная на поверхности S .

Пусть функция $u = u(x)$ класса C^2 есть решение задачи Коши (1), (2). Подставив это решение в (1), получим тождество, которое продифференцируем по x^i :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Поскольку $\frac{\partial p_j}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial p_i}{\partial x^j}$, равенства (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Из этих уравнений видно, что функции p_i удовлетворяют системам квазилинейных уравнений с «одинаковой главной частью»

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x^i} = -\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4)$$

Рассмотрим решение $u = u(\mathbf{x})$ вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^j}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Соотношения (4) в этом случае можно записать так:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Воспользовавшись соотношением (5), вычислим

$$\frac{du}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_k} p_k. \quad (7)$$

Итак, если $u = u(\mathbf{x})$ решение задачи Коши (1), (2), то вдоль любой траектории системы уравнений (5) функции $u = u(\mathbf{x})$ и $p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$ ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют уравнениям (6) и (7).

Система из $2n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений (5), (6) и (7) называется *характеристической системой уравнения* (1), а ее траектории в пространстве переменных $\mathbf{x}$, u , $\mathbf{p}$ — *характеристиками* этого уравнения.

Опишем способ решения задачи Коши (1), (2). Считая, что $u = u(\mathbf{x})$ — решение рассматриваемой задачи Коши, и дифференцируя (2) по τ^k ($k = 1, \dots, n - 1$), получим

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \xi^i}{\partial \tau^k} = \frac{\partial u_0}{\partial \tau^k} \quad (k = 1, \dots, n - 1). \quad (8)$$

Кроме того, функции $u(\mathbf{x})$ и p_i должны удовлетворять уравнению

$$F(\xi(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}), u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}), p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (9)$$

(поскольку $u(\mathbf{x})$ — решение задачи Коши (1), (2)).

Предположим, что

$$p_i = \eta_i(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10)$$

— такое непрерывное решение системы уравнений (8), (9), что на поверхности S определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \tau^1} & \cdots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \tau^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \tau^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \tau^{n-1}} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Далее решаем задачу Коши для характеристической системы (5), (6) и (7) со следующими начальными условиями:

$$x^i|_{\tau=0} = \xi^i(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u|_{\tau=0} = u_0(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}),$$

$$p_j|_{\tau=0} = \eta_j(\tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Решение этой задачи Коши существует, единственно и имеет вид

$$x^i = x^i(\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u = u(\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}), \quad (11)$$

$$p_j = p_j(\tau, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Первые две группы уравнений из (11) определяют решение задачи Коши (1), (2) (заданное параметрически) в некоторой окрестности поверхности S , и это решение единственно, если выбраны функции $\eta_i(\tau^1, \dots, \tau^{n-1})$.

З а м е ч а н и я. 1. Система уравнений (8), (9), вообще говоря, неоднозначно разрешима относительно $p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, поэтому и задача Коши (1), (2) может иметь более одного решения.

2. В приложениях часто встречается задача Коши для нелинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x).$$

В этом случае уравнения (8), (9) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) + \varphi(0, x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(0, x)) = 0.$$

Очевидно, эти уравнения однозначно разрешимы относительно $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x}(0, x)$, и поэтому решение рассматриваемой задачи Коши единственно.

Если функция φ не зависит от u , то решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

сводится к решению некоторого квазилинейного уравнения. В самом деле, функция $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ удовлетворяет следующему квазилинейному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi'_{u_x}(t, x, v) \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi'_x(t, x, v) = 0.$$

Пример. Решим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 1 = 0 \quad (12)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \frac{1}{2} \alpha x^2 \quad (\alpha \geq 0). \quad (13)$$

Обозначая $\frac{\partial u}{\partial t} = p$, $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, получим следующую характеристическую систему, отвечающую уравнению (12):

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = q, \quad \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad \frac{dq}{d\tau} = 0, \quad \frac{du}{d\tau} = p + q^2. \quad (14)$$

Поверхность S в рассматриваемом случае — прямая $t = 0$. Ее уравнения можно записать в виде

$$t = 0, \quad x = \tau^1,$$

где τ^1 — параметр.

Начальные условия для p и q имеют вид (см. (8), (9))

$$q|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau^1}(0, \tau^1) = \alpha \tau^1, \quad p|_{\tau=0} = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau^1)^2.$$

Таким образом, для системы уравнений (14) нужно решить задачу Коши со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} t|_{\tau=0} = 0, \quad x|_{\tau=0} = \tau^1, \quad p|_{\tau=0} = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau^1)^2, \\ q|_{\tau=0} = \alpha \tau^1, \quad u|_{\tau=0} = \frac{\alpha (\tau^1)^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя систему (14), получим

$$t = \tau + c_1, \quad x = c_4 \tau + c_2, \quad p = c_3, \quad q = c_4, \quad u = (c_3 + c_4^2) \tau + c_5,$$

откуда, в силу (15),

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \tau^1, \quad c_3 = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau^1)^2, \quad c_4 = \alpha \tau^1, \quad c_5 = \frac{\alpha (\tau^1)^2}{2}.$$

Решение задачи Коши (12), (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} t &= \tau, \\ x &= \tau^1 (\alpha \tau + 1), \\ u &= \left[1 + \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau^1)^2 \right] \tau + \frac{\alpha}{2} (\tau^1)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из уравнений (16) параметры τ и τ^1 , получим

$$u = t + \frac{\alpha}{2} \frac{x^2}{at + 1}. \quad (17)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что формула (17) дает решение задачи Коши (12), (13).

Заметим, что это решение определено в полуплоскости $t > -1/\alpha$ ($\alpha > 0$). При $t < -1/\alpha$ получается также решение уравнения (12), но оно не удовлетворяет начальному условию (13), так как область определения этого решения не содержит прямую $t = 0$.

Задачи

1. Решить задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad (a = \text{const})$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$.

$$\text{Ответ: } u = u_0(x - at) + \int_0^t f(\xi, x - at + a\xi) d\xi.$$

2. Составить уравнение конической поверхности $z = z(x, y)$ в трехмерном пространстве с вершиной в начале координат. Для полученного уравнения решить следующую задачу Коши: на окружности $x^2 + y^2 = 1$ $z(x, y) = x + 1$.

У к а з а н и е. Если $z = f(x, y)$ — уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат, то при любом t

$$f(tx, ty) = tf(x, y),$$

откуда при $t = 1/x$ получим

$$f(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (g(u) = f(1, u)).$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение конической поверхности, нужно вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = xg\left(\frac{y}{x}\right)$ и, исключая $g\left(\frac{y}{x}\right)$ и $g'\left(\frac{y}{x}\right)$, найти зависимость между z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

О т в е т: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$. Решение задачи Коши $z = x + \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Доказать, что функции H (класса C^1), определяющая систему канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

является ее первым интегралом.

4. Решить задачу Коши для нелинейного уравнения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$$

с начальным условием: $u = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$.

У к а з а н и е. Система (8), (9) (стр. 220) в рассматриваемом случае имеет два непрерывных решения.

О т в е т: Задача Коши имеет два решения:

$$u = \pm (1 - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В ряде задач математики и физики приходится иметь дело с функциями, определенными на некотором множестве, элементами которого также являются функции одного или нескольких переменных.

Функции, определенные на множестве, элементами которого являются функции, называются *функционалами*.

В вариационном исчислении рассматриваются задачи нахождения наибольшего или наименьшего значения функционалов.

§ 1. Функционалы в линейном нормированном пространстве

Напомним определение линейного пространства.

Определение 1. *Линейным пространством* называется множество E (элементы которого будем обозначать $x, y, z, \dots$), в котором определены операции сложения и умножения на действительные числа, удовлетворяющие следующим условиям:

1° $x + y = y + x$ для любых $x, y \in E$.

2° $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых $x, y, z \in E$.

3° Существует такой элемент $0 \in E$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in E$.

4° Для любого $x \in E$ найдется такой элемент $-x \in E$, что

$$x + (-x) = 0.$$

5° $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ для любого $x \in E$ и любых действительных чисел λ и μ .

6° $1 \cdot x = x$ для любого $x \in E$.

7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ для любого $x \in E$ и любых действительных чисел λ и μ .

8° $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ для любых $x, y \in E$ и любого действительного числа λ .

З а м е ч а н и я. 1. Элемент $0 \in E$ будем обозначать так же, как действительное число, не вводя для него специального обозначения.

2. Так же, как в случае конечномерных векторных пространств, легко доказывается, что элементы 0 и $(-x)$ определены единственным образом и имеют место соотношения $0 \cdot x = 0$ и $-x = (-1)x$ для любого $x \in E$.

П р и м е р ы л и н е й н ы х п р о с т р а н с т в.

1. **Векторное пространство E_n .** Элементами E_n являются упорядоченные наборы из n действительных чисел $x = \{x^1, \dots, x^n\}$. Операции сложения и умножения на число определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x + y &= \{x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n\}, \\ \lambda x &= \{\lambda x^1, \dots, \lambda x^n\}, \end{aligned}$$

где $x = \{x^1, \dots, x^n\}$, $y = \{y^1, \dots, y^n\}$.

Легко проверяется, что введенные операции удовлетворяют условиям 1°–8°. Пространство E_n — конечномерное: векторы $e_i = \{\delta_i^1, \dots, \delta_i^n\}$ ($i = 1, \dots, n$) образуют в нем базис. Здесь

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

2. **$C([a, b])$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$** Операции сложения функций и умножения функций на число определяются естественным образом и представляют собой непрерывные функции. Условия 1°–8°, очевидно, выполнены. Пространство $C([a, b])$ бесконечномерно. В самом деле, любое конечное число членов последовательности функций

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (a \leq x \leq b)$$

линейно независимо, так как в противном случае нашлись бы такие числа $a_0, a_1, \dots, a_n, a_n \neq 0$, что $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ для любых $x \in [a, b]$.

Последнее, однако, невозможно, так как многочлен n -й степени имеет не более n корней (здесь же

все точки отрезка $[a, b]$ являются корнями многочлена $a_0 + \dots + a_n x^n$.

3. $D_1([a, b])$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе со своей производной. Очевидно, что сумма двух функций с непрерывной производной будет снова функцией с непрерывной производной. Точно так же функция с непрерывной производной, умноженная на число, имеет непрерывную производную. Требования 1°—8°, очевидно, выполнены. Поэтому пространство $D_1([a, b])$ является линейным пространством. Имеет место вложение $D_1([a, b]) \subset C([a, b])$.

Определение 2. *Линейным нормированным пространством* называется линейное пространство E , в котором каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое *нормой* элемента x , при этом выполняются следующие условия:

1° $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

для любых $x, y \in E$ и любого действительного числа λ .

Замечание. В линейном нормированном пространстве E можно следующим образом определить расстояние $\rho(x, y)$ между двумя точками x, y :

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Из свойств нормы 1°—3° непосредственно следует, что расстояние $\rho(x, y)$ обладает такими свойствами:

1° $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3° $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Примеры линейных нормированных пространств.

1. В пространстве E_n можно ввести норму следующим образом:

$$\|x\| = |x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2},$$

где $x = \{x^1, \dots, x^n\}$. Условия 1°—3°, очевидно, выполняются. Таким образом, пространство E_n становится линейным нормированным пространством. Для вычисления расстояния $\rho(x, y)$ получаем формулу

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2},$$

где

$$x = \{x^1, \dots, x^n\}, \quad y = \{y^1, \dots, y^n\}.$$

2. В пространстве $C([a, b])$ норма вводится следующим образом:

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|.$$

Условия 1°, 2°, очевидно, выполняются. Проверим условие 3°. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — две функции из пространства $C([a, b])$, тогда

$$\begin{aligned} |y_1(x) + y_2(x)| &\leq |y_1(x)| + |y_2(x)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_2(x)| = \|y_1\| + \|y_2\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|y_1 + y_2\| = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) + y_2(x)| \leq \|y_1\| + \|y_2\|.$$

Таким образом, введенная норма обладает свойством 3°.

3. В пространстве $D_1([a, b])$ обычно рассматривают норму

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y(x)|, |y'(x)|\},$$

$\max \{|y(x)|, |y'(x)|\}$ представляет собой сокращенное обозначение числа $\max_{a \leq x \leq b} \{ \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|, \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)| \}$.

Легко проверить, что условия 1°—3° выполнены.

Определение 3. *Функционалом* в линейном нормированном пространстве E называется функция, принимающая действительные значения и определенная на всем E^*).

*) Функции, принимающие действительные значения и определенные на некотором множестве $M \subset E$, также называют *функционалами*.

Так, например, длина дуги $l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

кривой $y = y(x)$ — функционал в линейном нормированном пространстве $D_1([a, b])$.

Определение 4. Функционал F называется *непрерывным в точке* $y_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех y , удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon.$$

Если функционал F непрерывен в каждой точке пространства E , то говорят, что F — *непрерывный функционал на E* .

Пример. В пространстве E_n непрерывная функция $F(x^1, \dots, x^n)$ является, очевидно, непрерывным на E_n функционалом.

Определение 5. Функционал F называется *линейным*, если для любых y, y_1, y_2 из E и любого действительного числа λ выполняются следующие свойства:

$$1^\circ F(y_1 + y_2) = F(y_1) + F(y_2);$$

$$2^\circ F(\lambda y) = \lambda F(y).$$

Примеры. 1. В пространстве $C([a, b])$ рассмотрим функционал

$$F(y) = y(x_0),$$

где $y(x) \in C([a, b])$ ($a \leq x_0 \leq b$). Покажем, что этот функционал — линейный и непрерывный. Линейность функционала следует из равенств

$$F(y_1 + y_2) = y_1(x_0) + y_2(x_0) = F(y_1) + F(y_2),$$

$$F(\lambda y) = \lambda y(x_0) = \lambda F(y),$$

а непрерывность — из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= |y(x_0) - y_0(x_0)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - y_0(x)| = \|y - y_0\|. \end{aligned}$$

Задав произвольно $\varepsilon > 0$ и выбрав $\delta = \varepsilon$, получим

$$|F(y) - F(y_0)| \leq \|y - y_0\| < \varepsilon$$

при $\|y - y_0\| < \delta$.

2. Пусть

$$F(y) = \int_a^b f(\xi) y(\xi) d\xi, \quad y \in C([a, b])$$

$f(\xi)$ — функция, непрерывная при $a \leq \xi \leq b$. Очевидно, $F(y)$ — линейный функционал на $C([a, b])$. Покажем, что он непрерывен. Поскольку функция $f(\xi)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она ограничена:

$$|f(\xi)| \leq M.$$

Пусть $y, y_0 \in C([a, b])$; тогда

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_a^b f(\xi) [y(\xi) - y_0(\xi)] d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(\xi)| \cdot |y(\xi) - y_0(\xi)| d\xi \leq \int_a^b M \max_{a \leq \xi \leq b} |y(\xi) - y_0(\xi)| d\xi = \\ &= M \|y - y_0\| (b - a). \end{aligned}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon / M(b - a)$, тогда при $\|y - y_0\| < \delta$ получим в силу последнего неравенства

$$|F(y) - F(y_0)| \leq M(b - a) \|y - y_0\| < \varepsilon,$$

т. е. функционал $F(y)$ непрерывен в пространстве $C([a, b])$.

Замечание. В бесконечномерном пространстве E могут быть линейные, но не непрерывные функционалы. Построить пример такого функционала довольно сложно.

Определение 6. Множество $S_r(y_0) = \{y \in E, \|y - y_0\| < r\}$ называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке y_0 . (Иначе говоря, $S_r(y_0)$ — множество таких точек из E , расстояние которых $\rho(y, y_0) = \|y - y_0\|$ до точки y_0 меньше r .)

Определение 7. Говорят, что функционал F имеет в точке y_0 *относительный минимум* (максимум), если существует такой шар $S_r(y_0)$, что для всех $y \in S_r(y_0)$

$$F(y) \geq F(y_0) \quad (F(y) \leq F(y_0)).$$

Определение 8. Пусть F — функционал, определенный в линейном нормированном пространстве E . Если в некоторой точке $y_0 \in E$ функция $F(y_0 + th)$

переменного t дифференцируема при $t = 0$ для любого $h \in E$, то ее производная

$$\frac{d}{dt}F(y_0 + th)|_{t=0}$$

называется *вариацией функционала F в точке y_0* и обозначается

$$\delta F(y_0, h).$$

З а м е ч а н и е. Вариация $\delta F(y_0, h)$ есть снова функционал в пространстве E ($h \in E$).

Т е о р е м а. Пусть точка $y_0 \in E$ является точкой относительного экстремума функционала F и в этой точке существует вариация $\delta F(y_0, h)$, тогда

$$\delta F(y_0, h) = 0 \quad \text{для любого } h \in E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $h = 0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $h \neq 0$. Докажем теорему в предположении, что y_0 — точка относительного минимума. (В случае относительного максимума достаточно вместо функционала F рассмотреть функционал $-F$, который имеет в точке y_0 относительный минимум.)

В силу определения относительного минимума найдется такой шар $S_r(y_0)$, что $F(y) \geq F(y_0)$ для любого $y \in S_r(y_0)$. Пусть $|t| < r/\|h\|$, тогда $y_0 + th \in S_r(y_0)$ (поскольку $\|y_0 + th - y_0\| = \|th\| = |t|\|h\| < r$) и

$$F(y_0 + th) \geq F(y_0).$$

Таким образом, при $t = 0$ функция $F(y_0 + th)$ имеет относительный минимум и дифференцируема при $t = 0$ (функционал F имеет вариацию в точке y_0). Следовательно, по известной теореме анализа

$$\delta F(y_0, h) = \frac{d}{dt}F(y_0 + th)|_{t=0} = 0$$

при любом $h \in E$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть F — функционал. Точка $y \in E$ называется *стационарной точкой* функционала, если вариация $\delta F(y, h)$ определена в этой точке и $\delta F(y, h) = 0$ при любом $h \in E$.

Замечание. Итак, точки относительного экстремума, в которых определена вариация, являются стационарными. Обратное, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка является точкой относительного экстремума.

Определение 10. Подмножество $E' \subset E$ называется *линейным многообразием* пространства E , если для любых двух точек $y_1 \in E$, $y_2 \in E$ все точки $y_1 + t(y_2 - y_1)$, $-\infty < t < +\infty$, принадлежит E' .

Другими словами, вместе с любыми двумя точками из E' множеству E' принадлежит вся прямая, соединяющая эти точки.

Все проведенные до сих пор построения без изменения переносятся на несколько более общий случай, где вместо линейного нормированного пространства E рассматривается линейное многообразие E' пространства E .

Примеры линейных многообразий.

1. В пространстве E_3 любая плоскость или прямая представляют собой линейное многообразие.

2. В пространстве $C([a, b])$ рассмотрим множество

$$E' = \{y \in C([a, b]); \quad y(a) = A, \quad y(b) = B\}$$

(E' — множество кривых, соединяющих точки (a, A) и (b, B)). Покажем, что E' — линейное многообразие. Пусть $y_1 \in E'$ и $y_2 \in E'$, тогда $y_1(a) = y_2(a) = A$, $y_1(b) = y_2(b) = B$ и

$$[y_1 + t(y_2 - y_1)]_{x=a} = y_1(a) + t(y_2(a) - y_1(a)) = A,$$

$$[y_1 + t(y_2 - y_1)]_{x=b} = y_1(b) + t(y_2(b) - y_1(b)) = B,$$

т. е. $y_1 + t(y_2 - y_1) \in E'$ при $-\infty < t < +\infty$. Следовательно, E' — линейное многообразие в $C([a, b])$.

При нахождении стационарных точек функционалов в функциональных пространствах (как, например, $D_1([a, b])$) используется

Основная лемма вариационного исчисления. Если функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) непре-

рывна и для любой непрерывной функции $h(x)$ ($a \leq x \leq b$)

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f(x) \not\equiv 0$, тогда существует такая точка x_0 ($a < x_0 < b$), что $f(x_0) \neq 0$. Будем, для определенности, считать, что $f(x_0) > 0$. Существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$, в которой $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Пусть $h(x)$ — такая непрерывная на $[a, b]$ функция, что $h(x) \geq 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $h(x_0) > 0$ и $h(x) = 0$ вне $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, тогда

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) h(x) dx > \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x) dx > 0,$$

что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанная лемма остается верной, если считать $h(x)$ функцией класса C^k (или даже C^∞), удовлетворяющей некоторым граничным условиям, например, $h(a) = h(b) = 0$ (т. е. соотношение

$\int_a^b f(x) h(x) dx = 0$ может выполняться для более

узкого класса функций $h(x)$, чем класс непрерывных функций). Так, если считать $h(x)$ функцией класса C^1 , удовлетворяющей граничным условиям $h(a) = h(b) = 0$, то при доказательстве леммы можно рассмотреть следующую функцию $h(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi(x - x_0)}{\delta}, & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ 0, & x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \end{cases}$$

Аналогичная лемма имеет место для функций двух и более переменных, при этом интегрирование производится по некоторой замкнутой ограниченной области G .

§ 2. Функционалы вида $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$

1. Рассмотрим функционал

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

где $f(x, y, y')$ — функция, имеющая непрерывные производные первого порядка на множестве $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y' < +\infty$ в пространстве $D_1([a, b])$. Найдем вариацию функционала (1). По определению

$$\begin{aligned} \delta F(y, h) &= \left. \frac{d}{dt} F(y + th) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) dx \right|_{t=0} = \\ &= \left. \int_a^b [f'_y(x, y + th, y' + th')h + f'_{y'}(x, y + th, y' + th')h'] dx \right|_{t=0} = \\ &= \int_a^b [f'_y(x, y, y')h + f'_{y'}(x, y, y')h'] dx. \end{aligned}$$

(Здесь произведено дифференцирование интеграла по параметру t .)

Итак,

$$\delta F(y, h) = \int_a^b [f'_y h + f'_{y'} h'] dx. \quad (2)$$

2. Уравнение Эйлера. Предположим, что функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно на множестве $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y' < +\infty$. Рассмотрим линейное нормированное пространство $D_2([a, b])$ — пространство функций, имеющих непрерывные производные первого и второго порядка, со следующей нормой:

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y(x)|, |y'(x)|, |y''(x)|\}.$$

(Легко проверить, что $D_2([a, b])$ обладает всеми свойствами линейного нормированного пространства.)

Пусть

$$E' = \{y \in D_2([a, b]); y(a) = A, y(b) = B\}$$

— линейное многообразие в $D_2([a, b])$.

Будем искать стационарные точки функционала (1) (которые называются также *экстремалами*) на линейном многообразии E' , т. е. такие функции $y(x)$ из пространства $D_2([a, b])$, удовлетворяющие условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, для которых $\delta F(y, h) = 0$.

Так как функционал рассматривается на линейном многообразии E' , приращение $h(x)$ должно удовлетворять условиям

$$h(a) = h(b) = 0. \quad (3)$$

В самом деле, поскольку $y, y + h \in E'$,

$$y(a) = A, \quad y(a) + h(a) = A,$$

$$y(b) = B, \quad y(b) + h(b) = B,$$

откуда и получаются условия (3).

Вариация функционала (1) вычисляется по формуле (2). Преобразуем интеграл от второго слагаемого в выражении (2) с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_{y'} h' dx &= f'_{y'} h(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f'_{y'} h(x) dx = \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dx} f'_{y'} h(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

(Здесь использованы условия (3).) Подставляя равенство (4) в (2), получим

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right] h(x) dx.$$

Для стационарных точек должно выполняться равенство

$$\int_a^b \left[f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} \right] h(x) dx = 0 \quad (5)$$

для любого допустимого h . В силу основной леммы вариационного исчисления из (5) следует, что

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0, \quad (6)$$

или

$$f'_y - f''_{xy'} - f''_{yy'} y' - f''_{y'y} y'' = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) (или (7)) называется *уравнением Эйлера* для функционала (1) при $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Итак, для нахождения экстремалей рассматриваемой задачи нужно искать решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Полученная краевая задача для уравнения (6) не всегда имеет решение. Если же решение существует, то оно может быть не единственным (см. далее пример 2 на стр. 237).

3. Рассмотрим частные случаи, когда уравнение Эйлера допускает понижение порядка.

1) Пусть функция f не зависит от y : $f = f(x, y')$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0,$$

откуда получаем $f'_{y'} = c$ — уравнение первого порядка.

2) Пусть функция f не зависит от x : $f = f(y, y')$. Тогда уравнение Эйлера (7) имеет вид

$$f'_y - f''_{yy'} y' - f''_{y'y} y'' = 0, \quad (8)$$

так как $f'_x = 0$.

Уравнение (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{dx} (f - y' f'_{y'}) = 0,$$

откуда $f - y' f'_{y'} = c$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

Примеры. 1. Пусть $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) — гладкая кривая на плоскости x, y . Длина дуги

$$l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

есть функционал, определенный на множестве гладких кривых $y(x)$ ($a \leq x \leq b$).

Для функционала $l(y)$ рассмотрим следующую задачу: найти кривую, соединяющую точки (a, A) , (b, B) , для которой функционал $l(y)$ принимает наименьшее значение, т. е. найти кратчайший путь, соединяющий точки (a, A) и (b, B) (рис. 26).

Функционал $l(y)$ рассматривается на линейном многообразии $E' = \{y \in D_2([a, b]); y(a) = A, y(b) = B\}$. Функция $f = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$ не зависит от y , поэтому уравнение Эйлера в данном случае сведется к уравнению $f'_{y'} = c$ или

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + [y']^2}} = c. \quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что

$$y' = c_1,$$

где c_1 — некоторая постоянная (зависящая от c). Отсюда

$$y = c_1 x + c_2.$$

Из условий $y(a) = A$ и $y(b) = B$ находим

$$c_1 = \frac{A - B}{a - b}, \quad c_2 = \frac{aB - bA}{a - b}.$$

Таким образом, в линейном многообразии E' содержится единственная экстремаль функционала $l(y)$:

$$y = \frac{(A - B)x + aB - bA}{a - b},$$

представляющая собой отрезок прямой, соединяющей точки (a, A) , (b, B) . Можно доказать, что на этой экстремали достигается относительный минимум функционала $l(y)$.

2. Функционал

$$S(y) = 2\pi \int_{-a}^a y \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx,$$

определенный для гладких кривых $y(x)$ ($-a \leq x \leq a$), представляет собой площадь поверхности, образованной вращением

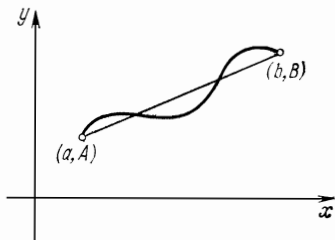


Рис. 26.

дуги $y = y(x)$ ($-a \leq x \leq a$) вокруг оси x . Для этого функционала рассмотрим такую задачу: среди кривых $y = y(x)$, соединяющих точки $(-a, A)$, (a, A) ($A > 0$), найти ту, на которой функционал $S(y)$ достигает наименьшего значения. Иначе говоря, ищется поверхность вращения наименьшей площади, проходящая через две окружности (радиусов A) с общей осью (рис. 27).

Таким образом, функционал $S(y)$ рассматривается на линейном многообразии $E' = \{y \in D_2([a, b]); y(a) = A, y(-a) = A\}$. Функция $f = 2\pi y \sqrt{1 + [y']^2}$ не зависит от x , поэтому решение уравнения Эйлера в данном случае сводится к решению уравнения $f - y' f'_{y'} = \tilde{c}$, т. е.

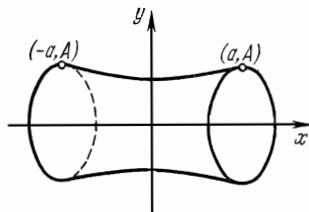


Рис. 27.

$$\frac{y}{\sqrt{1 + [y']^2}} = \frac{\tilde{c}}{2\pi} = c. \quad (10)$$

В уравнении (10) сделаем замену $y = c \operatorname{ch} t$, тогда

$$y' = \operatorname{sh} t.$$

Для нахождения x получаем следующее уравнение:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = c dt,$$

откуда

$$x = ct + c_1.$$

Таким образом, решение уравнения (10) имеет вид

$$x = ct + c_1, \quad y = c \operatorname{ch} t.$$

Исключая из этих уравнений параметр t , получим

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x - c_1}{c}.$$

Из условий $y(-a) = y(a) = A$ следует, что

$$\operatorname{ch} \frac{a - c_1}{c} = \operatorname{ch} \frac{-a - c_1}{c}. \quad (11)$$

Равенство (11) возможно либо при $\frac{a - c_1}{c} = \frac{-a - c_1}{c}$, т. е. при $a = 0$, либо при $\frac{a - c_1}{c} = \frac{a + c_1}{c}$, т. е. при $c_1 = 0$.

Случай $a = 0$ тривиален (функционал $S \equiv 0$). Рассмотрим случай $c_1 = 0$. Тогда экстремали находятся среди однопараметрического семейства кривых

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c}$$

(рис. 28).

В зависимости от положения точек $(-a, A)$, (a, A) линейное многообразие E' может содержать одну экстремаль функционала $S(y)$ (точки M_1 и N_1), две экстремали (точки M_2 и N_2) или ни одной (точки M_3 и N_3).

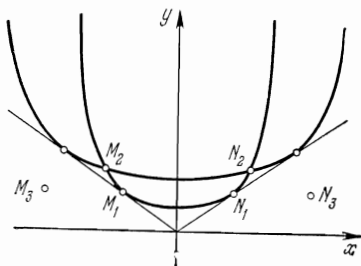


Рис. 28.

З а м е ч а н и е. Функционалы вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) dx$$

рассматриваются в линейном нормированном пространстве $D_1^{(n)}([a, b])$ вектор-функций $\mathbf{y}(x) = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$, имеющих непрерывную производную $\mathbf{y}'(x)$. Норма в $D_1^{(n)}([a, b])$ определяется по формуле $\|\mathbf{y}\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y_1(x)|, \dots, |y_n(x)|, |y'_1(x)|, \dots, |y'_n(x)|\}$.

Вариация функционала $F(y)$ имеет вид

$$\delta F = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} h_n + \frac{\partial f}{\partial y'_1} h'_1 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\partial f}{\partial y'_n} h'_n \right\} dx$$

(предполагается, что функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка).

Для нахождения экстремалей функционала $F(y)$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{y}(a) = \mathbf{A}$, $\mathbf{y}(b) = \mathbf{B}$, получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

(предполагается, что сама экстремаль $y = y(x)$ имеет непрерывные производные $y'(x)$ и $y''(x)$, а функция f имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков).

§ 3. Функционалы вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

Функционалы вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (1)$$

где функция $f(x, y, \dots, y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам, определены на множестве функций $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), имеющих непрерывные производные до n -го порядка включительно. Множество таких функций превращается в линейное нормированное пространство, если норму определить следующим образом:

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y(x)|, |y'(x)|, \dots, |y^{(n)}(x)|\}.$$

Построенное пространство обозначается $D_n([a, b])$.

Найдем вариацию функционала (1). По определению

$$\begin{aligned} \delta F(y, h) &= \left. \frac{d}{dt} F(y + th) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, y(x) + th(x), \dots, y^{(n)}(x) + th^{(n)}(x)) dx \right|_{t=0} = \\ &= \int_a^b [f'_y(x, y + th, \dots, y^{(n)} + th^{(n)}) h + \dots \\ &\quad \dots + f'_{y^{(n)}}(x, y + th, \dots, y^{(n)} + th^{(n)}) h^{(n)}] dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_a^b [f'_y(x, y, \dots, y^{(n)}) h + f'_{y'}(x, y, \dots, y^{(n)}) h' + \dots \\ &\quad \dots + f'_{y^{(n)}}(x, y, \dots, y^{(n)}) h^{(n)}] dx. \end{aligned}$$

Итак,

$$\delta F(y, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} h + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} h^{(n)} \right] dx. \quad (2)$$

Предположим, что функция f имеет непрерывные частные производные до порядка $n+1$ включительно, а функция $y = y(x)$ — непрерывные производные до порядка $2n$ включительно.

Будем искать экстремали функционала (1), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} y(a) &= A_0, \quad y'(a) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ y(b) &= B_0, \quad y'(b) = B_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1}$ — некоторые постоянные.

Покажем, что все такие экстремали являются решениями следующего уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) + \dots \\ \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В самом деле, преобразуем интеграл от $k+1$ -го слагаемого в формуле (2) с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}(x, y, \dots, y^{(n)}) h^{(k)} dx &= - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) h^{(k-1)} dx = \\ &= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) h^{(k-2)} dx = \dots \\ \dots &= (-1)^k \int_a^b \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) h dx \quad (k=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

(Здесь были использованы равенства

$$\begin{aligned} h(a) &= h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0, \\ h(b) &= h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(b) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которые непосредственно следуют из условий (3)).

Подставляя каждое из выражений (5) в (2) и приравнявая вариацию к нулю, получаем

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) \right] h dx = 0 \quad (7)$$

для любой n раз непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям (6). В силу основной леммы вариационного исчисления, из (7) вытекает равенство (4). Таким образом, экстремали функционала (1), удовлетворяющие условиям (3), являются решениями уравнения Эйлера (4).

§ 4. Функционалы вида

$$F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy$$

1. Рассмотрим функционалы вида

$$F(u) = \iint_G f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy, \quad (1)$$

определенные на множестве функций $u = u(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области G . Множество таких функций превращается в линейное нормированное пространство, если норму ввести следующим образом:

$$\|u\| = \max_{(x, y) \in G} \left\{ |u(x, y)|, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \right\}.$$

Построенное пространство будем обозначать $D_1(G)$. Относительно функции f предположим, что она имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам.

Найдем вариацию функционала (1) (произведя дифференцирование по t под знаком интеграла):

$$\begin{aligned}\delta F(u, h) &= \frac{d}{dt} F(u + th) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \iint_G f(x, y, u(x, y) + th(x, y), u'_x(x, y) + \\ &\quad + th'_x(x, y), u'_y(x, y) + th'_y(x, y)) dx dy \Big|_{t=0} = \\ &= \iint_G [f'_u(x, y, u + th, u'_x + th'_x, u'_y + th'_y) h + \\ &\quad + f'_{u'_x}(x, y, u + th, u'_x + th'_x, u'_y + th'_y) h'_x + \\ &\quad + f'_{u'_y}(x, y, u + th, u'_x + th'_x, u'_y + th'_y) h'_y] dx dy \Big|_{t=0} = \\ &= \iint_G [f'_u(x, y, u, u'_x, u'_y) h + f'_{u'_x}(x, y, u, u'_x, u'_y) h'_x + \\ &\quad + f'_{u'_y}(x, y, u, u'_x, u'_y) h'_y] dx dy.\end{aligned}$$

Итак,

$$\delta F(u, h) = \iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u'_x} h'_x + \frac{\partial f}{\partial u'_y} h'_y \right) dx dy. \quad (2)$$

2. Уравнение Эйлера — Остроградского. Предположим, что функция $f(x, y, u, u'_x, u'_y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. Рассмотрим линейное нормированное пространство $D_2(G)$ — пространство функций $u = u(x, y)$, имеющих в G непрерывные частные производные до второго порядка включительно, со следующей нормой:

$$\|u\| = \max_{(x, y) \in G} \{|u|, |u'_x|, |u'_y|, |u''_{xx}|, |u''_{xy}|, |u''_{yy}|\}.$$

Пусть на границе Γ замкнутой области G задана функция $\varphi(x, y)$. Рассмотрим линейное многообразие

$$E' = \{u \in D_2(G); u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)\}.$$

Будем искать стационарные точки функционала (1), лежащие на линейном многообразии E' .

Поскольку функционал рассматривается на линейном многообразии E' , приращение $h(x, y)$ должно удовлетворять условию

$$h(x, y)|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

В самом деле, если $u, u + h \in E'$, то

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y),$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} + h(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y),$$

откуда следует равенство (3).

Вариация функционала (1) вычисляется по формуле (2), которую можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta F(u, h) = & \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) \right] h \, dx \, dy + \\ & + \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} h \right) \right] dx \, dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Для вычисления второго интеграла в (4) применим формулу Грина:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy.$$

Полагая здесь $P = -\frac{\partial f}{\partial u'_y} h$, $Q = \frac{\partial f}{\partial u'_x} h$, получим

$$\begin{aligned} \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} h \right) \right] dx \, dy = \\ = \int_{\Gamma} -\frac{\partial f}{\partial u'_y} h \, dx + \frac{\partial f}{\partial u'_x} h \, dy = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

так как $h(x, y)|_{\Gamma} = 0$. В силу (5) выражение (4) для вариации функционала (1) примет вид

$$\delta F(u, h) = \iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) \right] h \, dx \, dy.$$

Для стационарных точек должно выполняться равенство

$$\iint_G \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) \right] h \, dx \, dy = 0$$

для любого допустимого h . В силу основной леммы вариационного исчисления,

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *уравнением Эйлера — Остроградского*. Итак, для нахождения стационарных точек функционала (1), лежащих на линейном многообразии E' , нужно искать решения уравнения в частных производных второго порядка (6), удовлетворяющие граничному условию $u(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y)$.

Примеры. 1. Площадь гладкой поверхности $u = u(x, y)$ ($(x, y) \in G$):

$$S(u) = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy$$

есть функционал, заданный на множестве функций класса C^1 , определенных в некоторой замкнутой ограниченной области G .

Для функционала $S(u)$ можно поставить следующую задачу: среди поверхностей, проходящих через замкнутый контур C , найти поверхность наименьшей площади, т. е. найти поверхность $u = u(x, y)$, проходящую через контур C , на которой функционал $S(u)$ принимает наименьшее значение.

Уравнение Эйлера — Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u'_x}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u'_y}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение поверхностей, средняя кривизна которых равна нулю. Такие поверхности называются *минимальными*. Физически минимальные поверхности реализуются мыльными пленками, натянутыми на контур C .

2. *Уравнение продольных колебаний стержня.* Упругий стержень длины l расположен в состоянии равновесия между точками 0 и l на оси x . Пусть плотность стержня ρ и модуль упру-

гости k зависят только от x : $\rho = \rho(x)$, $k = k(x)$. Колебания стержня характеризуются смещением $u(x, t)$ вдоль оси x сечения, соответствующего абсциссе x . Будем считать, что внешние силы отсутствуют и концы стержня закреплены, $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Легко видеть, что кинетическая энергия стержня выражается интегралом

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

а потенциальная — интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Функционал Гамильтона в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - k(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt.$$

Записав для функционала Гамильтона уравнение Эйлера — Остроградского, получим уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

З а м е ч а н и е. Во всех рассмотренных здесь примерах вариация $\delta F(y, h)$ функционала F представляла собой линейный непрерывный функционал относительно h . В общем случае это не так. Существуют примеры функционалов, у которых вариация не будет линейным функционалом.

§ 5. Замечания о достаточных условиях экстремума функционала

В § 1 было показано, что если функционал F в линейном нормированном пространстве E имеет в точке экстремума y_0 вариацию $\delta F(y_0, h)$, то $\delta F(y_0, h) = 0$ для любого $h \in E$. Обращение вариации в ноль является необходимым условием экстремума, но не достаточным.

Для получения простейших достаточных условий нужно ввести понятие второй вариации функционала. Сформулируем необходимые определения.

Определение 1. Функционал F , определенный в линейном нормированном пространстве E , называется *дифференцируемым в точке* $y_0 \in E$, если его приращение $F(y_0 + h) - F(y_0)$ можно представить в виде

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = L(y_0, h) + r(y_0, h), \quad (1)$$

где $L(y_0, h)$ — линейный непрерывный функционал (по h), а остаток $r(y_0, h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|h\|$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$

$$|r(y_0, h)| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Покажем, что если функционал F дифференцируем в точке y_0 , то в этой точке существует вариация $\delta F(y_0, h)$ и

$$\delta F(y_0, h) = L(y_0, h). \quad (2)$$

В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число и $h \neq 0$ (при $h = 0$ равенство (2), очевидно, имеет место). В силу дифференцируемости функционала F в точке y_0 по числу $\varepsilon_1 = \varepsilon / \|h\|$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $\|h_1\| < \delta$

$$|r(y_0, h_1)| \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|} \|h_1\|. \quad (3)$$

Полагая в неравенстве (3) $h_1 = th$, получим, что при $|t| < \delta / \|h\|$

$$\left| \frac{r(y_0, th)}{t} \right| \leq \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(y_0, th)}{t} = 0. \quad (4)$$

В силу (1) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \delta F(y_0, h) &= \frac{d}{dt} F(y_0 + th) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + th) - F(y_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(y_0, th) + r(y_0, th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tL(y_0, h) + r(y_0, th)}{t} = \\ &= L(y_0, h) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(y_0, th)}{t} = L(y_0, h). \end{aligned}$$

Равенство (2) доказано.

Определение 2. Функционал $Q(h)$ называется *квадратичным*, если существует такой билинейный функционал $B(h_1, h_2)$ (т. е. функционал, линейный по h_1 и h_2), что

$$Q(h) = B(h, h).$$

Определение 3. Пусть функционал F дифференцируем в точке y_0 , а остаток $r(y_0, h)$ допускает следующее представление:

$$r(y_0, h) = \frac{1}{2} Q(y_0, h) + r_1(y_0, h),$$

где $Q(y_0, h)$ — квадратичный непрерывный функционал (по h), а $r_1(y_0, h)$ — бесконечно малая высшего порядка, по сравнению с $\|h\|^2$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|h\| < \delta$

$$|r_1(y_0, h)| \leq \varepsilon \|h\|^2.$$

Тогда функционал F называется *дважды дифференцируемым*, а квадратичный функционал $Q(y_0, h)$ — *второй вариацией*, которая обозначается $\delta^2 F(y_0, h)$.

Сформулируем теперь достаточное условие существования относительного экстремума дважды дифференцируемого функционала.

Пусть функционал F дважды дифференцируем в стационарной точке $y_0 \in E$, тогда для того чтобы точка y_0 была точкой относительного минимума (максимума), достаточно, чтобы существовало такое $A > 0$ ($A < 0$), что при всех $h \in E$ выполняется неравенство

$$\delta^2 F(y_0, h) \geq A \|h\|^2 \quad (\delta^2 F(y_0, h) \leq A \|h\|^2).$$

Замечания. 1. Все проведенные в этом параграфе построения естественным образом переносятся на функционалы, определенные на линейном многообразии $E' \subset E$.

2. Понятие дифференцируемого функционала есть обобщение понятия дифференцируемой функции, определенной в векторном пространстве E_n на случай, когда функция F определена на линейном нормированном пространстве E .

В самом деле, если в определении дифференцируемого функционала в качестве E взять E_n с обычной нормой

$$\|x\| = |x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2},$$

то

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = L(y_0, h) + r(y_0, h). \quad (5)$$

Пусть $h = h^1 e_1 + \dots + h^n e_n$, где $e_1, \dots, e_n$ — единичные векторы координатных осей, тогда (поскольку $L(y_0, h)$ — линейный функционал)

$$L(y_0, h) = h^1 L(y_0, e_1) + \dots + h^n L(y_0, e_n),$$

или

$$\begin{aligned} L(y_0, h) &= A_1 h^1 + \dots + A_n h^n, \\ A_i &= L(y_0, e_i) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Теперь равенство (5) имеет вид

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = A_1 h^1 + \dots + A_n h^n + r(y_0, h).$$

Здесь $r(y_0, h)$ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с h . Таким образом, мы получили обычное определение дифференцируемой функции в точке y_0 .

Сформулированное выше достаточное условие существования относительного экстремума дважды дифференцируемого функционала часто оказывается слишком грубым и трудно проверяемым. Имеются более тонкие достаточные условия, в которых используется конкретный вид рассматриваемого функционала. Так, например, для функционала вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

можно доказать следующее достаточное условие Вейерштрасса.

Пусть экстремаль $y = y_0(x)$ можно включить в однопараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, \lambda)$ ($|\lambda| < \alpha$), $y(x, 0) = y_0(x)$, причем функция $y(x, \lambda)$ дифференцируема по λ , $\frac{\partial y}{\partial \lambda} > 0$, и кривые $y(x, \lambda)$ при $a \leq x \leq b$ и при разных значениях λ не пересекаются. Тогда, если для всех x и y на множе-

стве, покрытом экстремальями $y = y(x, \lambda)$, при любом p выполняется неравенство

$$f''_{y'y'}(x, y, p) > 0 (< 0),$$

то экстремаль $y = y_0(x)$ реализует относительный минимум (максимум) функционала $F(y)$ в пространстве $D_1([a, b])$.

Пример. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$F(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2} dx \quad (6)$$

со следующими граничными условиями: $y(a) = A$, $y(b) = B$. Как было показано раньше (см. пример 1, стр. 237), имеется единственная экстремаль рассматриваемой задачи:

$$y = \frac{(A - B)x + aB - bA}{a - b}. \quad (7)$$

С помощью критерия Вейерштрасса покажем, что на прямой (7) функционал (6) имеет относительный минимум. В самом деле, экстремаль (7) можно включить в поле экстремалей:

$$y = \frac{(A - B)x + aB - bA}{a - b} + \lambda \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 1 > 0 \right).$$

Кроме того, $f''_{y'y'} = \frac{1}{(1 + [y']^2)^{3/2}}$ и, следовательно, при любом p

$$\frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}} > 0.$$

Таким образом, достаточное условие Вейерштрасса выполнено.

§ 6. Условный экстремум

Пусть $F(y)$ и $G(y)$ — дифференцируемые функционалы в линейном нормированном пространстве E .

Рассмотрим следующую задачу: найти экстремум функционала $F(y)$ при условии, что $G(y) = c_0$, где c_0 — некоторая постоянная. Поставленная задача называется задачей на *условный экстремум* *).

Лемма 1. Если функционал $F(y)$ достигает экстремума в точке y_0 при условии $G(y) = c_0$ и y_0 не является стационарной точкой функционала $G(y)$ ($\delta G(y_0, h) \neq 0$), то для любого $h \in E$, удовлетворяю-

*) Иногда такие задачи называют *изопериметрическими*.

щего условию $\delta G(y_0, h) = 0$, имеет место равенство $\delta F(y_0, h) = 0$.

Доказательство. Пусть $h \in E$ такой элемент, что $\delta G(y_0, h) = 0$. В силу условий леммы ($\delta G(y_0, h) \neq 0$) существует такой элемент $h_0 \in E$, что $\delta G(y_0, h_0) \neq 0$. Рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned} u(t, s) &\equiv F(y_0 + th + sh_0), \\ v(t, s) &\equiv G(y_0 + th + sh_0) - c_0. \end{aligned}$$

Из того, что функционал $F(y)$ достигает экстремума в точке y_0 при условии $G(y) = c_0$, следует, что функция $u(t, s)$ достигает экстремума в точке $t = 0, s = 0$ при условии $v(t, s) = 0$. Покажем, что при достаточно малых t и s уравнение $v(t, s) = 0$ определяет функцию $s = s(t)$, удовлетворяющую условиям

$$s(0) = 0, \quad \frac{ds}{dt}(0) = 0. \quad (1)$$

В самом деле, по определению вариации

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(0, 0) &= \delta G(y_0 + sh_0, h) \Big|_{s=0} = \delta G(y_0, h) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial s}(0, 0) &= \delta G(y_0 + th, h_0) \Big|_{t=0} = \delta G(y_0, h_0) \neq 0, \end{aligned}$$

откуда по теореме о неявной функции следует существование функции $s = s(t)$, удовлетворяющей условию $s(0) = 0$ (так как $v(0, 0) = G(y_0) - c_0 = 0$), причем

$$\frac{ds}{dt}(0) = - \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(0, 0)}{\frac{\partial v}{\partial s}(0, 0)} = 0.$$

Очевидно, функция $w(t) = u(t, s(t))$ имеет экстремум при $t = 0$. Поэтому $\frac{dw}{dt}(0) = 0$. С другой стороны, в силу (1)

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt}(0) &= \frac{d}{dt} F(y_0 + th + s(t)h_0) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F(y_0 + th + s(t)h_0) \Big|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial s} F(y_0 + th + s(t)h_0) \Big|_{t=0} \frac{ds}{dt}(0) = \\ &= \delta F(y_0 + s(t)h_0, h) \Big|_{t=0} = \delta F(y_0, h). \end{aligned}$$

Таким образом, $\delta F(y_0, h) = \frac{dw}{dt}(0) = 0$. Лемма доказана.

Следующая лемма относится к произвольным линейным непрерывным функционалам в E .

Лемма 2. Если линейный функционал $L_1(h)$ обращается в нуль на любом элементе, на котором обращается в нуль линейный функционал $L(h)$, то

$$L_1(h) = \lambda L(h),$$

где λ — некоторое число.

Доказательство. Если $L(h) \equiv 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $L(h) \not\equiv 0$; тогда найдется такой элемент h_0 , что $L(h_0) \neq 0$. Рассмотрим элемент $h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0$. Очевидно, $L\left(h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0\right) = 0$. По условию леммы тогда и $L_1\left(h - \frac{L(h)}{L(h_0)} h_0\right) = 0$, откуда следует, что $L_1(h) = \frac{L_1(h_0)}{L(h_0)} L(h)$. Таким образом, $L_1(h) = \lambda L(h)$, где $\lambda = \frac{L_1(h_0)}{L(h_0)}$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть y_0 — точка экстремума функционала $F(y)$ при условии $G(y) = c_0$, причем y_0 не является стационарной точкой функционала $G(y)$ ($\delta G(y_0, h) \neq 0$); тогда y_0 будет стационарной точкой функционала $F - \lambda G$, где λ — некоторое число.

Доказательство. В силу леммы 1 равенство $\delta F(y_0, h) = 0$ имеет место для всех $h \in E$, для которых $\delta G(y_0, h) = 0$. Отсюда в силу леммы 2 $\delta F(y_0, h) = \lambda \delta G(y_0, h)$ для любого $h \in E$. Последнее равенство можно переписать в виде $\delta(F - \lambda G)(y_0, h) = 0$. Таким образом, y_0 является стационарной точкой функционала $F - \lambda G$ при некотором λ . Теорема доказана.

Итак, в силу доказанной теоремы точки условного экстремума функционала $F(y)$ при условии $G(y) = c_0$ находятся либо среди стационарных точек функционала $F - \lambda G$, либо среди стационарных точек функционала $G(y)$.

Замечания. 1. Доказанная теорема имеет место и в том случае, когда функционалы $F(y)$ и $G(y)$ определены на некотором линейном многообразии $E' \subset E$.

2. Рассмотрим более общую задачу на условный экстремум: найти экстремум дифференцируемого функционала $F(y)$ при условиях $G_1(y) = c_1, \dots, G_n(y) = c_n$, где $G_1(y), \dots, G_n(y)$ — дифференцируемые функционалы на $E' \subset E$. Имеет место следующая

Теорема. Если функционал $F(y)$ достигает экстремума в точке y_0 при условиях $G_1(y) = c_1, \dots, G_n(y) = c_n$, причем y_0 не является стационарной точкой ни одного из функционалов $G_i(y)$ ($i = 1, \dots, n$) и функционалы $\delta G_i(y, h)$ ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы, то y_0 будет стационарной точкой функционала $F - \lambda_1 G_1 - \dots - \lambda_n G_n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — некоторые числа.

Пример. Решим следующую задачу: найти такую кривую $y = y(x)$, $y(a) = y(b) = 0$ заданной длины $l_0 > b - a$, которая вместе с отрезком $a \leq x \leq b$ ограничивает фигуру наибольшей площади.

Сформулированная задача сводится к нахождению наибольшего значения функционала $F(y) = \int_a^b y(x) dx$ (площадь искомой

фигуры) при условии $G(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = l_0$ (длина кривой $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$)). Интересующие нас экстремали содержатся среди экстремалей функционала

$$F(y) - \lambda G(y) = \int_a^b (y - \lambda \sqrt{1 + [y']^2}) dx. \quad (2)$$

Уравнение Эйлера для функционала (2) допускает понижение порядка (см. § 2, п. 3). Поэтому экстремали функционала (2) удовлетворяют уравнению

$$f - y' f_{y'} = c,$$

где $f = y - \lambda \sqrt{1 + [y']^2}$, которое после несложных преобразований примет вид $y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + [y']^2}} = c$ или

$$\frac{(y - c) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - c)^2}} = \pm dx \quad (\lambda \neq 0). \quad (3)$$

(При $\lambda = 0$ наша задача, очевидно, не имеет решений.)

Решая уравнение (3), получим

$$(x - c_1)^2 + (y - c)^2 = \lambda^2,$$

Таким образом, экстремали функционала (3) представляют собой дуги всевозможных окружностей. Среди них нужно выделить дуги, проходящие через точки $(a, 0)$, $(b, 0)$ и имеющие

заданную длину $l_0 = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2} dx$. Из геометрических сооб-

ражений ясно, что все эти условия можно удовлетворить за счет выбора постоянных c_1 , c и λ .

З а м е ч а н и е. Ряд задач механики приводит к следующей задаче на условный экстремум: найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (4)$$

при наличии условий

$$\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m; m < n) \quad (5)$$

и

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (6)$$

Функции $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, m$) предполагаются гладкими и независимыми по переменным $y_1, \dots, y_n$. Имеет место следующая

Т е о р е м а. Если $y = y_0(x)$ — экстремаль функционала (4), удовлетворяющая условиям (5), (6), то она удовлетворяет уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$G(y) = \int_a^b \left(f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i \right) dx,$$

где $\lambda_i = \lambda_i(x)$ — соответствующим образом подобранные функции.

Таким образом, экстремали функционала (4) и функции $\lambda_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) должны удовлетворять уравнениям

$$\tilde{f}'_{y_k} - \frac{d}{dx} \tilde{f}'_{y'_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\varphi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

где $\tilde{f} = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i$, а также условиям (6).

Примеры. 1. *Геодезические линии на поверхности.* Пусть $\Phi(x, y, z) = 0$ — гладкая регулярная*) поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Будем искать гладкую кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, соединяющую точки (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) , лежащие на поверхности, и являющуюся экстремалью функционала длины дуги

$$F(x, y, z) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (7)$$

Такая линия называется *геодезической линией* поверхности $\Phi(x, y, z) = 0$. Итак, нам нужно найти экстремали функционала (7), которые удовлетворяют условиям

$$\Phi(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} x(a) &= x_0, & y(a) &= y_0, & z(a) &= z_0, \\ x(b) &= x_1, & y(b) &= y_1, & z(b) &= z_1. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу сформулированной выше теоремы, для нахождения экстремалей функционала (7), удовлетворяющих условиям (8), (9), нужно составить вспомогательный функционал

$$G(x, y, z) = \int_a^b (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda \Phi(x, y, z)) dt$$

и для него выписать уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \lambda \Phi'_x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= 0, \\ \lambda \Phi'_y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= 0, \\ \lambda \Phi'_z - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда искомая экстремаль, т. е. геодезическая линия поверхности (8), является решением уравнений (8), (10), удовлетворяющим краевым условиям (9).

Заметим, что длина дуги (7) не зависит от выбора параметра на кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Выберем в качестве t длину дуги этой кривой; тогда

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1. \quad (11)$$

*) Поверхность $\Phi(x, y, z) = 0$ называется *гладкой регулярной* поверхностью, если функция $\Phi(x, y, z)$ непрерывна на некоторой области D вместе со своими первыми производными и, кроме того, $(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 + (\Phi'_z)^2 \neq 0$.

Уравнения (10) в этом случае примут вид

$$\ddot{x} - \lambda \varphi'_x = 0, \quad \ddot{y} - \lambda \varphi'_y = 0, \quad \ddot{z} - \lambda \varphi'_z = 0. \quad (12)$$

Таким образом, любая геодезическая линия поверхности (8) (если в качестве параметра на ней выбрана длина дуги) является решением системы уравнений (8), (11), (12).

Найдем геодезические на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (13)$$

Уравнения (12) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\ddot{x} - 2\lambda x = 0, \quad \ddot{y} - 2\lambda y = 0, \quad \ddot{z} - 2\lambda z = 0. \quad (14)$$

Дифференцируя уравнение (13) дважды по t и используя уравнение (11), получим

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -1,$$

откуда в силу (13) и (14)

$$\lambda = -\frac{1}{2R^2} < 0.$$

Решая линейные уравнения (14), найдем

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \frac{t}{R} + b_1 \sin \frac{t}{R}, \\ y &= a_2 \cos \frac{t}{R} + b_2 \sin \frac{t}{R}, \\ z &= a_3 \cos \frac{t}{R} + b_3 \sin \frac{t}{R}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \\ &+ \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) \cos 2\frac{t}{R} + \\ &+ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \sin 2\frac{t}{R} = R^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = R^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = R^2,$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

или

$$|\mathbf{a}| = R, \quad |\mathbf{b}| = R, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Уравнения (15) можно переписать в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \frac{t}{R} + \mathbf{b} \sin \frac{t}{R}, \quad (17)$$

где $r = \{x, y, z\}$. Легко видеть, что формулы (16), (17) задают окружность радиуса R , лежащую в плоскости, проходящей через начало координат параллельно векторам a и b . Таким образом, геодезические на сфере — дуги окружностей, которые получаются в результате пересечения сферы (13) произвольной плоскостью, проходящей через начало координат.

Найдем геодезические на цилиндре

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (18)$$

Уравнения (12) для цилиндра имеют вид

$$\ddot{x} - 2\lambda x = 0, \quad \ddot{y} - 2\lambda y = 0, \quad \ddot{z} = 0. \quad (19)$$

Из последнего уравнения находим z :

$$z = ct + c_1, \quad (20)$$

причем $|c| \leq 1$, так как в силу (11)

$$1 - c^2 = 1 - \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \geq 0.$$

Дифференцируя уравнение (18) дважды по t , получим

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0,$$

откуда в силу (11) и (19)

$$1 - \dot{z}^2 + 2\lambda(x^2 + y^2) = 0.$$

В силу (18) и (20), последнее соотношение примет вид

$$1 - c^2 + 2\lambda R^2 = 0.$$

Итак, $\lambda = \frac{c^2 - 1}{2R^2}$, $|c| \leq 1$.

Пусть $|c| = 1$; тогда $\lambda = 0$. Решая уравнение (19), найдем

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2, \quad z = \pm t + c_1. \quad (21)$$

Подставив (21) в (18), получим соотношения

$$a_1 = a_2 = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 = R^2.$$

Таким образом, при $c = \pm 1$ геодезическими на цилиндре будут прямые

$$x = b_1, \quad y = b_2, \quad z = \pm t + c_1 \quad (b_1^2 + b_2^2 = R^2).$$

Пусть $|c| < 1$; тогда $\lambda < 0$. Решая в этом случае уравнения (19), найдем

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \sqrt{-2\lambda} t + b_1 \sin \sqrt{-2\lambda} t, \\ y &= a_2 \cos \sqrt{-2\lambda} t + b_2 \sin \sqrt{-2\lambda} t \quad \left(\lambda = \frac{c^2 - 1}{2R^2} \right), \\ z &= ct + c_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив (22) в (18), получим

$$\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) \cos 2\sqrt{-2\lambda} t + \\ + (a_1 b_1 + a_2 b_2) \sin 2\sqrt{-2\lambda} t = R^2$$

откуда следует, что

$$a_1^2 + a_2^2 = R^2, \quad b_1^2 + b_2^2 = R^2, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0. \quad (23)$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае геодезические, определяемые уравнениями (22), (23), будут винтовыми линиями (если $c \neq 0$) или окружностями (если $c = 0$).

2. Покажем, что траекториями движения по инерции материальной точки с массой m при наличии единственной связи

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (24)$$

являются геодезические поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$.

В силу вариационного принципа Гамильтона, траектория движения материальной точки должна быть экстремалью функционала

$$F(x, y, z) = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (25)$$

при условии (24), где $L = T - U$ — разность кинетической энергии T и потенциальной энергии U .

Чтобы найти экстремали функционала (25) при условии (24), для функционала

$$G(x, y, z) = \int_{t_0}^{t_1} (L + \lambda \varphi) dt$$

записываем уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку в нашем случае $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, $U = 0$ (движение происходит по инерции), то уравнения (26) имеют вид

$$\ddot{x} - \frac{\lambda}{m} \varphi'_x = 0, \quad \ddot{y} - \frac{\lambda}{m} \varphi'_y = 0, \quad \ddot{z} - \frac{\lambda}{m} \varphi'_z = 0. \quad (27)$$

Вдоль траектории $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 = \text{const}$, так как в силу (27) и (24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) &= 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \\ &= 2\frac{\lambda}{m}(\Phi'_x\dot{x} + \Phi'_y\dot{y} + \Phi'_z\dot{z}) = 2\frac{\lambda}{m}\frac{d}{dt}\Phi(x(t), y(t), z(t)) = 0. \end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что любое решение системы уравнений (24), (27) удовлетворяет уравнениям (10), где λ нужно заменить на $\frac{\lambda}{mv_0}$. Таким образом, траектория движения материальной точки будет геодезической линией поверхности (24).

§ 7. О приближенных методах решения вариационных задач

Дифференциальные уравнения, которые возникают при решении вариационных задач, редко удается проинтегрировать. В связи с этим возникает необходимость приближенного решения вариационных задач. Методы приближенного решения вариационных задач называют *прямыми методами*.

Здесь мы рассмотрим один довольно часто применяемый метод — метод Ритца. Для определенности будем рассматривать следующую вариационную задачу: найти функцию $y(x) \in E' = \{y(x) \in D_1([a, b]); y(a) = y(b) = 0\}$, на которой функционал $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ принимает наибольшее (наименьшее) значение.

На отрезке $[a, b]$ построим полную последовательность*) функций $\varphi_i(x) \in E'$ ($i = 1, 2, \dots$). Функции $\varphi_i(x)$, в частности, удовлетворяют граничным условиям $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$). Будем

*) Последовательность $\varphi_i(x)$ называется *полной* в E' , если для любой функции $y(x) \in E'$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая конечная линейная комбинация функций $\varphi_i(x)$, что $\left\| y(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) \right\| < \varepsilon$ ($\|\dots\|$ — норма в $D_1([a, b])$).

теперь рассматривать функционал $F(y)$ на всевозможных конечных линейных комбинациях

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

При n фиксированном $F(y_n(x)) = \omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ представляет собой функцию от n переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ подберем так, чтобы функция $\omega_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ достигала наибольшего (наименьшего) значения. Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

При некоторых ограничениях, наложенных на функционал $F(y)$ и функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$), последовательность $y_n(x)$ сходится к решению рассматриваемой вариационной задачи. В этом случае, выбирая n достаточно большим, можно найти решение с любой степенью точности.

Практически поступают следующим образом: для выбранного n составляют систему уравнений (2). Решают ее относительно λ_i ($i = 1, \dots, n$) и найденные значения подставляют в формулу (1), которая дает приближенное решение рассматриваемой задачи.

Замечания. 1. Если рассматривается вариационная задача с неоднородными граничными условиями, то, вводя новую неизвестную функцию $z(x) = y(x) - \varphi_0(x)$, где $\varphi_0(x)$ — функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям, мы приходим к вариационной задаче с однородными граничными условиями.

2. Успех применения метода Ритца в значительной степени зависит от выбора последовательности $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$).

3. Метод Ритца с соответствующими изменениями можно применять для решения вариационных задач, связанных с функционалами, зависящими от нескольких неизвестных функций или от функций нескольких переменных.

4. Решение системы уравнений (2) представляет собой довольно сложную задачу. Однако для функцио-

налов вида
$$F(y) = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + r(x)y] dx,$$

которые часто встречаются в приложениях, система уравнений (2), будет линейной относительно λ_i и поэтому довольно просто решается. Для этих функционалов при условии, что функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны и $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на $[a, b]$, доказана сходимость последовательности $y_n(x)$ к решению $y(x)$ ($y(a) = y(b) = 0$) соответствующей вариационной задачи и имеются различные оценки погрешности $\max_{[a, b]} |y(x) - y_n(x)|$.

Задачи

1. Найти экстремали функционала

$$F(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{y(1 + (y')^2)} dx,$$

удовлетворяющие условиям

$$y(-1) = y(1) = A > 0.$$

Ответ: $(x + c_1)^2 = 4c_2(y - c_2)$.

При $A > 1$ имеются две экстремали ($c_1 = 0$, $c_2 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 1}}{2}$).

При $A = 1$ имеется единственная экстремаль ($c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$).

При $A < 1$ экстремалей нет.

2. *Вариационный принцип Гамильтона.* Рассмотрим систему из N материальных точек с массами m_i ($i = 1, \dots, N$), находящихся в потенциальном силовом поле. Траектории движения этих точек определяются системой $3N$ дифференциальных уравнений Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} \\ (i = 1, \dots, N),$$

где $U = U(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, z_1, \dots, z_N)$ — потенциал.

Показать, что любое решение системы уравнений Ньютона $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) определяет экстремаль функционала Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

где $L = T - U$ — функция Лагранжа, а $T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ — кинетическая энергия системы.

3. Показать, что экстремали функционала

$$F(u) = \iint_G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u f(x, y) \right] dx dy$$

являются решениями уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

4. Найти форму равновесия гибкой, однородной, нерастяжимой нити, находящейся в поле силы тяжести. Нить длины L подвешена за два конца в точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Сила тяжести направлена параллельно оси y .

Указание. В положении равновесия потенциальная энергия нити

$$U = g\mu \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

(g — ускорение силы тяжести, μ — линейная плотность нити) минимальна. Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функционала

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

при условии $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$.

О т в е т. Экстремалами будут кривые (цепные линии)

$$y = \lambda + c \operatorname{ch} \frac{x - c_1}{c}.$$

Постоянные c , c_1 и λ находятся из условий

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} = L.$$

§ 1. Некоторые сведения из линейной алгебры

I. Упорядоченная совокупность $z = \{z^1, \dots, z^n\}$ из n комплексных чисел называется (комплексным) *вектором*. Числа $z^1, \dots, z^n$ называются *координатами* вектора z .

Два вектора $z_1 = \{z_1^1, \dots, z_1^n\}$ и $z_2 = \{z_2^1, \dots, z_2^n\}$ считаются *равными* в том и только в том случае, когда $z_1^1 = z_2^1, \dots, z_1^n = z_2^n$.

Сложение векторов и умножение вектора на комплексное число λ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \{z_1^1, \dots, z_1^n\} + \{z_2^1, \dots, z_2^n\} &= \{z_1^1 + z_2^1, \dots, z_1^n + z_2^n\}, \\ \lambda \{z^1, \dots, z^n\} &= \{\lambda z^1, \dots, \lambda z^n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Легко проверяется, что для любых векторов z_1, z_2, z_3, z и комплексных чисел λ, μ введенные операции (1) обладают свойствами:

- 1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- 2° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- 3° $z + 0 = z$, где $0 = \{0, \dots, 0\}$ *);
- 4° $z + (-z) = 0$, где $z = \{z^1, \dots, z^n\}$
 $-z = \{-z^1, \dots, -z^n\}$;
- 5° $1 \cdot z = z$;
- 6° $\lambda(\mu z) = (\lambda\mu)z$;
- 7° $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$;
- 8° $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$.

Множество всевозможных комплексных векторов с определенными выше сложением и умножением на комплексные числа называется *комплексным векторным пространством* и обозначается C_n , число n называется *размерностью* комплексного пространства C_n .

*) Элемент $\{0, \dots, 0\}$ будем обозначать так же, как число 0.

Векторы

$$\operatorname{Re} z = \{\operatorname{Re} z^1, \dots, \operatorname{Re} z^n\}$$

и

$$\operatorname{Im} z = \{\operatorname{Im} z^1, \dots, \operatorname{Im} z^n\}$$

называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью комплексного вектора $z = \{z^1, \dots, z^n\}$.

Вектор z называется *действительным*, если $\operatorname{Im} z = 0$, т. е. если координаты вектора — действительные числа.

Вектор $\bar{z}$ называется *комплексно-сопряженным* с вектором z , если $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$, $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$. Очевидно, вектор z будет действительным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$.

Векторы $z_1, \dots, z_r$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие комплексные числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, не все равные нулю, что

$$\lambda^1 z_1 + \dots + \lambda^r z_r = 0;$$

В противном случае векторы $z_1, \dots, z_r$ называются *линейно независимыми*.

Как обычно, доказывается, что в векторном пространстве C_n существуют n линейно независимых векторов (называемых *базисом* пространства C_n) и что любой вектор является их линейной комбинацией.

Например, действительные векторы

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\},$$

$$e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, e_n = \{0, 0, \dots, 1\}$$

образуют базис в C_n ; система векторов

$$ie_1 = \{i, 0, \dots, 0\},$$

$$ie_2 = \{0, i, \dots, 0\}, \dots, ie_n = \{0, 0, \dots, i\}$$

также служит базисом.

II. Приведем некоторые сведения, относящиеся к линейным операторам.

1. Пусть L — линейный оператор в C_n , $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис в C_n , тогда

$$Le_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}^k e_k \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Матрица $A = (a_{ij}^k)$ называется матрицей линейного оператора L относительно базиса $e_1, \dots, e_n$.

Каждому линейному оператору L в C_n (относительно фиксированного базиса $e_1, \dots, e_n$) соответствует некоторая матрица $A = (a_{ij}^k)$, называемая матрицей линейного оператора L . Наоборот, если $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис в C_n и $A = (a_{ij}^k)$ — произвольная квадратная матрица порядка n , то формулы (2) определяют некоторый линейный оператор L в C_n .

Пусть $r_1, \dots, r_n$ — другой базис в C_n , связанный с базисом $e_1, \dots, e_n$ посредством формул

$$r_j = \sum_{k=1}^n u_j^k e_k \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $U = (u_j^k)$ — невырожденная матрица. Тогда матрица B оператора L относительно базиса $r_1, \dots, r_n$ следующим образом выражается через матрицу A :

$$B = U^{-1}AU.$$

Определение. Вектор $z \neq 0$ называется *собственным вектором* оператора L , если

$$Lz = \lambda z,$$

где λ — некоторое комплексное число, называемое *собственным значением* оператора L .

2. Собственными значениями оператора L служат корни характеристического многочлена матрицы A (оператора L относительно некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$) и только они; характеристический многочлен есть

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

(E означает единичную матрицу).

3. Любой линейный оператор L в комплексном векторном пространстве C_n имеет хотя бы одно собственное значение и, следовательно, хотя бы один собственный вектор.

4. Квадратные матрицы A и B (порядка n) называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица T (порядка n), что $B = T^{-1}AT$. При этом

$$|B - \lambda E| = |A - \lambda E|,$$

т. е. подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены.

5. Всякая квадратная матрица $A = (a_k^j)$ порядка n определяет в C_n линейный оператор L , который переводит произвольный вектор $z = \{z^1, \dots, z^n\} \in C_n$ в вектор $w = \{w^1, \dots, w^n\}$ с координатами

$$w^j = \sum_{k=1}^n a_k^j z^k \quad (j = 1, \dots, n).$$

Последние равенства можно записать в матричной форме

$$w = Az,$$

причем векторы z и w рассматриваются как матрицы-столбцы.

Рассматриваемый оператор L иногда обозначают той же буквой A . Собственные векторы этого оператора называют собственными векторами матрицы A .

III. Докажем три теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = (a_j^k)$ — квадратная матрица порядка n . Тогда существует такая невырожденная матрица T , что матрица $B = T^{-1}AT$ будет треугольной:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_n^2 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

причем $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A .

Доказательство теоремы 1 проведем методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для любых матриц порядка $n - 1$. Докажем, что в таком случае она верна для матриц порядка n . В векторном

пространстве C_n выберем некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ и рассмотрим оператор L , имеющий в этом базисе матрицу A . Пусть r_1 — какой-либо собственный вектор оператора L с собственным значением λ_1 . Выберем векторы $r_2, \dots, r_n$ так, чтобы вместе с r_1 они образовывали базис в C_n . Обозначим через $U = (u_j^k)$ матрицу перехода от базиса $r_1, \dots, r_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$

$$r_j = \sum_{k=1}^n u_j^k e_k \quad (j = 1, \dots, n).$$

Тогда матрица C оператора L относительно базиса $r_1, \dots, r_n$ имеет вид

$$C = U^{-1}AU. \quad (4)$$

Поскольку r_1 — собственный вектор оператора L , матрица C имеет следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ 0 & \boxed{} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \boxed{} \end{bmatrix},$$

где C_1 — некоторая квадратная матрица порядка $n - 1$.

Перейдем к новому базису $h_1, \dots, h_n$ посредством преобразования

$$h_j = \sum_{k=1}^n v_j^k r_k \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $V = (v_j^k)$ — невырожденная матрица вида

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \boxed{} \end{bmatrix}.$$

Здесь V_1 — невырожденная матрица порядка $n - 1$. Относительно базиса $h_1, \dots, h_n$ матрица B опера-

тора L , очевидно, имеет вид

$$B = V^{-1}CV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ 0 & \boxed{V_1^{-1}C_1V_1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}. \quad (5)$$

По предположению индукции существует такая невырожденная матрица V_1 , что матрица $V_1^{-1}C_1V_1$ будет треугольной:

$$V_1^{-1}C_1V_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & b_3^2 & \dots & b_n^2 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & b_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда и матрица B будет треугольной матрицей:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1^2 & \dots & b_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

В силу (4) и (5)

$$B = V^{-1}U^{-1}AUV = (UV)^{-1}AUV = T^{-1}AT, \quad (6)$$

где $T = UV$. На главной диагонали матрицы B , очевидно, стоят ее собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Все λ_i ($i = 1, \dots, n$) будут собственными значениями матрицы A , так как в силу (6) матрицы A и B подобны и, следовательно, имеют одинаковые характеристические многочлены. Теорема доказана.

На языке операторов доказанная теорема формулируется так: если L — линейный оператор в комплексном векторном пространстве C_n , то в C_n существует такой базис, что матрица оператора L относительно этого базиса будет иметь треугольный вид (3).

В самом деле, пусть A — матрица оператора L относительно какого-либо базиса $e_1, \dots, e_n$. В силу теоремы 1 существует такая невырожденная матрица T , что матрица $B = T^{-1}AT$ имеет треугольный вид (3). Пусть $T = (t_j^k)$. Рассмотрим новый базис $r_1, \dots, r_n$,

связанный со старым посредством формул

$$\mathbf{r}_j = \sum_{k=1}^n t_j^k \mathbf{e}_k \quad (j = 1, \dots, n).$$

Относительно нового базиса $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ оператор L задается матрицей $T^{-1}AT = B$, имеющей треугольный вид (3).

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ij}^k)$ — квадратная матрица порядка n . Тогда существует такая невырожденная матрица T , что матрица $B = T^{-1}AT$ будет треугольной, а ее элементы b_k^j ($j < k$) будут по модулю меньше заданного числа $b > 0$.

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы 1 существует такая невырожденная матрица T_1 , что

$$C = T_1^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Возьмем матрицу

$$R = \begin{bmatrix} c_1 & & \mathbf{0} \\ & \cdot & \\ \mathbf{0} & & \cdot \\ & & c_n \end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_n \neq 0,$$

тогда

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & & \mathbf{0} \\ & \cdot & \\ \mathbf{0} & & \cdot \\ & & \frac{1}{c_n} \end{bmatrix}$$

и

$$B = R^{-1}CR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \frac{c_2}{c_1}c_2^1 & \dots & \frac{c_{n-1}}{c_1}c_{n-1}^1 & \frac{c_n}{c_1}c_n^1 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \frac{c_{n-1}}{c_2}c_{n-1}^2 & \frac{c_n}{c_2}c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \frac{c_n}{c_{n-1}}c_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Выбираем $c_n \neq 0$ произвольно. Взяв достаточно большим c_{n-1} , можно сделать элемент $\frac{c_n}{c_{n-1}} c_n^{n-1}$ по модулю меньше b . Вообще, коль скоро $c_{k+1}, \dots, c_n$ выбраны, можно за счет выбора c_k сделать элементы матрицы (8), стоящие в k -й строке, по модулю меньше b .

Кроме того, в силу (7) и (8)

$$B = R^{-1}CR = R^{-1}T_1^{-1}AT_1R = (T_1R)^{-1}AT_1R = T^{-1}AT,$$

где $T = T_1R$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть у матрицы $A = (a_j^k)$ ($j, k = 1, \dots, n$) имеется s линейно независимых собственных векторов. Тогда существует такая невырожденная матрица T , что матрица $B = T^{-1}AT$ имеет вид

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_s & & \\ \hline & & & & \lambda_{s+1} & * \\ & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & \mathbf{0} & \ddots \\ & & & & & \ddots & \lambda_n \end{array} \right], \quad (9)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A , а на местах, отмеченных *, стоят элементы, вообще говоря, отличные от нуля.

Доказательство. В векторном пространстве C_n выберем некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ и рассмотрим оператор L , имеющий в этом базисе матрицу A . Пусть $r_1, \dots, r_s$ — линейно независимые собственные векторы с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ соответственно, а $r_{s+1}, \dots, r_n$ — произвольные векторы, дополняющие $r_1, \dots, r_s$ до базиса. При переходе от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $r_1, \dots, r_n$

$$r_j = \sum_{k=1}^n u_j^k e_k \quad (j = 1, \dots, n),$$

матрица A оператора L переходит в матрицу

$$C = U^{-1}AU, \quad (10)$$

где $U = (u_j^k)$.

Поскольку $r_1, \dots, r_s$ — собственные векторы оператора L , матрица C имеет следующий вид:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_s \\ \hline & \mathbf{0} & & C_1 \end{array} \right],$$

где C_1 — квадратная матрица порядка $n - s$.

Перейдем к новому базису $h_1, \dots, h_n$ посредством преобразования

$$h_j = \sum_{k=1}^n v_j^k r_k \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $V = (v_j^k)$ — невырожденная матрица вида

$$V = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ \hline & \mathbf{0} & & V_1 \end{array} \right],$$

а V_1 — невырожденная матрица порядка $n - s$. При переходе к новому базису $h_1, \dots, h_n$ матрица C оператора L , очевидно, переходит в матрицу

$$B = V^{-1}CV = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_s \\ \hline & \mathbf{0} & & V_1^{-1}C_1V_1 \end{array} \right]. \quad (11)$$

По теореме 1 матрицу V_1 можно выбрать так, чтобы матрица $V_1^{-1}C_1V_1$ имела треугольный вид. Та-

ким образом, матрица B будет иметь нужный вид (9) и, кроме того, в силу (10) и (11),

$$B = V^{-1}U^{-1}AUV = (UV)^{-1}AUV = T^{-1}AT,$$

где $T = UV$. Все λ_i ($i = 1, \dots, n$) будут собственными значениями матрицы A , так как матрицы A и B подобны и, следовательно, имеют одинаковые характеристические многочлены. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведем без доказательства теорему более общую, чем теорема 1.

Т е о р е м а. Пусть $A = (a_{ij}^k)$ — квадратная матрица порядка n , тогда существует такая невырожденная матрица T , что матрица $B = T^{-1}AT$ имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{J_p} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где J_l ($l = 1, \dots, p$) — некоторая квадратная матрица порядка n_l ($n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$) вида

$$J_l = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_l \end{bmatrix}, \quad (12')$$

а $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (среди которых могут быть одинаковые) — собственные значения матрицы A .

Матрица вида (12) называется *жордановой матрицей*, а матрица вида (12') — *жордановой клеткой*.

IV. В пространстве C_n введем скалярное произведение векторов $z_1 = \{z_1^1, \dots, z_1^n\}$, $z_2 = \{z_2^1, \dots, z_2^n\}$ как комплексное число (z_1, z_2) , вычисляемое по следующему правилу:

$$(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^n z_1^i \bar{z}_2^i, \quad (13)$$

где $\bar{z}_2^i$ — число, комплексно-сопряженное с z_2^i .

Легко проверяется, что для любых векторов z_1, z_2, z_3, z и любого комплексного числа λ выполняются соотношения:

$$1^\circ (z_1, z_2) = \overline{(z_2, z_1)};$$

$$2^\circ (z_1, z_2 + z_3) = (z_1, z_2) + (z_1, z_3);$$

$$3^\circ (\lambda z_1, z_2) = \lambda (z_1, z_2);$$

$$4^\circ (0, 0) = 0; (z, z) \geq 0 \text{ при } z \neq 0.$$

Из 1° и 3° , в частности, следует, что

$$(z_1, \lambda z_2) = \bar{\lambda} (z_1, z_2).$$

Вещественное число $|z| = \sqrt{(z, z)}$ называется *длиной* или *нормой* вектора z .

Для любых двух векторов z_1 и z_2 из C_n имеет место неравенство Коши — Буняковского:

$$|(z_1, z_2)| \leq |z_1| |z_2|. \quad (14)$$

В координатной форме это неравенство выглядит так:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_1^i \bar{z}_2^i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_1^i|^2 \sum_{j=1}^n |z_2^j|^2. \quad (15)$$

Доказательство: Если $(z_1, z_2) = 0$, неравенство очевидно. Пусть теперь $(z_1, z_2) = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = |(z_1, z_2)| > 0$. В силу свойства 4° , при любом действительном ξ

$$(\xi z_1 + e^{i\varphi} z_2, \xi z_1 + e^{i\varphi} z_2) \geq 0. \quad (16)$$

Пользуясь свойствами $1^\circ - 3^\circ$ скалярного произведения, запишем неравенство (16) в виде

$$\xi^2 (z_1, z_1) + \xi e^{i\varphi} (z_2, z_1) + \xi e^{-i\varphi} (z_1, z_2) + (z_2, z_2) \geq 0.$$

Так как $(z_1, z_2) = \rho e^{i\varphi}$, $(z_2, z_1) = \rho e^{-i\varphi}$, то мы приходим к квадратному трехчлену с действительными коэффициентами

$$\xi^2 (z_1, z_1) + 2\xi\rho + (z_2, z_2) \geq 0.$$

Его дискриминант должен удовлетворять условию

$$\rho^2 - (z_1, z_1)(z_2, z_2) \leq 0. \quad (17)$$

Полученное неравенство равносильно неравенству Коши — Буняковского (14).

V. Пусть $A = (a_j^k)$ — квадратная матрица порядка n . Линейный оператор в C_n , определяемый формулами

$$w^j = \sum_{k=1}^n a_k^j z^k \quad (j = 1, \dots, n), \quad (18)$$

будем обозначать той же буквой A . В матричной форме соотношения (18) записываются так:

$$w = Az,$$

где векторы w и z рассматриваются как матрицы-столбцы.

Определение. Оператор B называется *сопряженным* или *эрмитово-сопряженным* с оператором A , если

$$(Bz_1, z_2) = (z_1, Az_2) \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in C_n.$$

Очевидно, что B сопряжен с A , то и A сопряжен с B .

Теорема 4. Если $A = (a_k^j)$ и $B = (b_k^j)$ — матрицы двух сопряженных операторов, то

$$b_k^j = \bar{a}_j^k \quad (k, j = 1, \dots, n),$$

или, короче,

$$B = \bar{A}',$$

где A' — транспонированная матрица, а $\bar{A}'$ — матрица, комплексно-сопряженная с A' .

Доказательство. Векторы Bz_1 и Az_2 имеют j -е координаты, соответственно равные

$$(Bz_1)^j = \sum_{k=1}^n b_k^j z_1^k, \quad (Az_2)^j = \sum_{k=1}^n a_k^j z_2^k.$$

По определению скалярного произведения

$$(Bz_1, z_2) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_k^j z_1^k \bar{z}_2^j, \quad (19)$$

$$(z_1, Az_2) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{a}_k^j \bar{z}_2^k z_1^j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_j^k z_1^k \bar{z}_2^j. \quad (20)$$

Сравнивая соотношения (19) и (20), получим

$$b_k^j = \bar{a}_j^k,$$

т. е. $B = \bar{A}'$. Теорема доказана.

Замечание. Матрицы A и B , связанные условием $\bar{A}' = B$, называются *эрмитово-сопряженными*.

Теорема 5. Если z_1 — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_1 , а z_2 — собственный вектор сопряженной матрицы $\bar{A}'$, соответствующий собственному значению λ_2 , причем $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$, то z_1 и z_2 ортогональны, т. е. $(z_1, z_2) = 0$.

Доказательство. В самом деле, по условию теоремы

$$Az_1 = \lambda_1 z_1, \quad \bar{A}' z_2 = \lambda_2 z_2. \quad (21)$$

В то же время

$$(Az_1, z_2) = (z_1, \bar{A}' z_2). \quad (22)$$

Подставляя равенства (21) в (22), получим

$$\lambda_1 (z_1, z_2) = \bar{\lambda}_2 (z_1, z_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) (z_1, z_2) = 0.$$

Следовательно, $(z_1, z_2) = 0$, так как $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$.

Замечание. Иногда вектор $\bar{A}' z$ обозначают символом zA и говорят, что матрица A умножена на вектор z слева. В этом случае собственные векторы матрицы $\bar{A}'$ называются *левыми* собственными векторами матрицы A .

VI. *Нормой* оператора (или матрицы) A называется действительное число

$$\|A\| = \sup_{|z| \leq 1} |Az|. \quad (23)$$

Функция $|Az|$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $M = \{z; |z| \leq 1\}$ и по теореме Вейерштрасса достигает своего наибольшего значения. Поэтому норма определена для любого оператора A .

Для любого $z \in C_n$ имеет место неравенство

$$|Az| \leq \|A\| |z|. \quad (24)$$

В самом деле, если $z = 0$, то неравенство (24), очевидно, выполняется. Пусть $z \neq 0$. Рассмотрим вектор

$$w = \frac{z}{|z|}. \quad (25)$$

Очевидно $|w| = 1$. В силу (23)

$$|Aw| \leq \|A\|.$$

Подставляя в это неравенство выражение (25), получим

$$\left| A \frac{z}{|z|} \right| \leq \|A\|,$$

или

$$\frac{1}{|z|} |Az| \leq \|A\|.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству (24).

З а м е ч а н и е. Пусть для всех $z \in C_n$

$$|Az| \leq K|z| \quad (K \geq 0), \quad (26)$$

тогда

$$\|A\| \leq K.$$

В самом деле, в силу неравенства (26) при любом $z \in C_n$, удовлетворяющем условию $|z| \leq 1$,

$$|Az| \leq K,$$

откуда следует, что

$$\|A\| = \sup_{|z| \leq 1} |Az| \leq K.$$

Пусть оператор A задается матрицей (a_k^j) и $|a_k^j| \leq a$ ($k, j = 1, \dots, n$); тогда справедлива следующая оценка для нормы оператора A :

$$\|A\| \leq na. \quad (27)$$

Действительно, пусть $(Az)^j$ — j -я координата вектора Az , тогда

$$(Az)^j = \sum_{k=1}^n a_k^j z^k$$

и, в силу неравенства (15),

$$\begin{aligned} |Az|^2 &= \sum_{j=1}^n |(Az)^j|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k^j z^k \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_k^j|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |\bar{z}^k|^2 \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_k^j|^2 \right) |z|^2 \leq n^2 a^2 |z|^2, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (27).

Заметим, что *любое собственное значение λ оператора A не превосходит по модулю нормы оператора*:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Действительно, пусть z — один из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ :

$$Az = \lambda z.$$

Тогда

$$|\lambda| |z| = |\lambda z| = |Az| \leq \|A\| |z|$$

и, так как $|z| \neq 0$,

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

VII. Если $A = (a_k^j)$ — прямоугольная матрица с m строками и n столбцами, то формулы

$$w^j = \sum_{k=1}^n a_k^j z^k \quad (j = 1, \dots, m)$$

определяют линейный оператор (обозначим его также A), отображающий n -мерное комплексное векторное пространство C_n в m -мерное пространство C_m . В самом деле, любому вектору $z = \{z^1, \dots, z^n\} \in C_n$ ставится в соответствие вектор $w = \{w^1, \dots, w^m\} \in C_m$, при этом, очевидно,

$$A(z_1 + z_2) = Az_1 + Az_2 \quad \text{и} \quad A(\lambda z) = \lambda Az.$$

Норма $\|A\|$ определяется так же, как для оператора, отображающего C_n само в себя *).

*) $\|A\| = \sup_{|z| \leq 1} |Az|$, где $|z|$ вычисляется в пространстве C_n , а $|Az|$ — в пространстве C_m .

Заметим, что для $\|A\|$ справедлива оценка, подобная (17); если $|a_k^j| \leq a$ ($j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, n$), то

$$\|A\| \leq \sqrt{mn} a. \quad (28)$$

В самом деле, если $w = Az$, то, в силу неравенства (15)

$$\begin{aligned} |w|^2 &= \sum_{j=1}^m |w^j|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^n a_k^j z^k \right|^2 \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n |a_k^j|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |\bar{z}^k|^2 \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_k^j|^2 \right) |z|^2 \leq mna^2 |z|^2, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (28).

Из (28) следует, в частности, оценка (27), когда $m = n$.

§ 2. Комплексные функции действительного переменного и действия над ними

Здесь будут сформулированы правила обращения с комплексными функциями, которые понадобятся при решении дифференциальных уравнений.

Комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t ставит в соответствие каждому t из области определения функции $f(t)$ комплексное число $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, где $f_1(t) = \operatorname{Re} f(t)$, $f_2(t) = \operatorname{Im} f(t)$ — действительные функции.

Простейшие арифметические операции с комплексными функциями производятся так же, как операции с комплексными числами.

Комплексная функция $f(t)$ называется *дифференцируемой*, если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ дифференцируемы. При этом функция $f'(t) = f'_1(t) + if'_2(t)$ называется *производной* функции $f(t)$.

Имеют место обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух комплексных функций действительного переменного.

Первообразной комплексной функции $f(t)$, заданной на некотором промежутке, называется такая комплексная функция $F(t)$, что $F'(t) = f(t)$ для всех t из этого промежутка. Очевидно, $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$, где $F_1(t)$, $F_2(t)$ — первообразные функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно.

Если $z = x + iy$ — комплексное число, то имеет место формула Эйлера

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Равенство (1) может служить определением показательной функции e^z для любого комплексного z .

Пусть $\alpha = \mu + i\nu$ — комплексное число, тогда

$$\begin{aligned} (e^{\alpha t})' &= (e^{\mu t} e^{i\nu t})' = [e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t)]' = \\ &= (e^{\mu t} \cos \nu t)' + i (e^{\mu t} \sin \nu t)' = \\ &= (\mu + i\nu) e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t) = \alpha e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Таким образом, при комплексном множителе α сохраняется обычное правило дифференцирования $e^{\alpha t}$.

§ 3. Три леммы о вектор-функциях

Докажем три леммы, неоднократно используемые в книге. Все встречающиеся в этом параграфе вектор-функции будем считать действительными.

Лемма 1. Пусть

$$\varphi(x) = \{\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x)\}$$

— функция векторного аргумента $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ класса C^1 на некотором открытом, выпуклом *) множестве G . Тогда для любых двух точек $x, y \in G$ существует такая прямоугольная матрица

$$F(x, y) = (f_j^i(x, y)) \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n),$$

что

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x, y)(x - y), \quad (1)$$

*) Множество G называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x и y этого множества ему принадлежит также отрезок прямой, соединяющий эти точки (т. е. $tx + (1-t)y \in G$ при всех $t \in [0, 1]$). В частности, поэтому, выпуклое множество связно, а открытое выпуклое множество является областью.

причем элементы матрицы $F(x, y)$ непрерывны и

$$F(x, x) = \left(\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x^j} \right).$$

Доказательство. Уравнение отрезка прямой соединяющего точки x и y , можно записать в виде

$$\xi = y + \lambda(x - y) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \psi^i(\lambda) &= \varphi^i(y + \lambda(x - y)) = \\ &= \varphi^i(y^1 + \lambda(x^1 - y^1), \dots, y^n + \lambda(x^n - y^n)) \\ &\quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

В силу выпуклости множества G эти функции определены при $0 \leq \lambda \leq 1$.

Разность $\varphi^i(x) - \varphi^i(y)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi^i(x) - \varphi^i(y) &= \psi^i(1) - \psi^i(0) = \int_0^1 \frac{d\psi^i(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(y + \lambda(x - y)) \frac{\partial \xi^j}{\partial \lambda} d\lambda = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(y + \lambda(x - y)) d\lambda \right] (x^j - y^j). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(y + \lambda(x - y)) d\lambda &= f_j^i(x, y) \\ (i &= 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2)$$

получим

$$\varphi^i(x) - \varphi^i(y) = \sum_{j=1}^n f_j^i(x, y) (x^j - y^j),$$

или в матричной форме

$$\varphi(x) - \varphi(y) = F(x, y)(x - y), \quad (3)$$

где

$$F(x, y) = (f_j^i(x, y)).$$

В силу равенства (2)

$$F(x, x) = (f_j^i(x, x)) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) \right).$$

Очевидно, $f_j^i(x, y)$ — непрерывные функции. Лемма доказана.

Следствие. Если в дополнение к условиям леммы 1 потребовать ограниченность частных производных на множестве G : $\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right| \leq f$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), то будет иметь место оценка

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sqrt{mn} \cdot f |x - y|.$$

Доказательство. В силу неравенств $\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right| \leq f$ и формулы (2)

$$|f_j^i(x, y)| \leq f.$$

Применив к матрице $F(x, y)$ оценку (28) из § 1, получим

$$\|F(x, y)\| \leq \sqrt{mn} f. \quad (4)$$

Из равенства (3) и оценки (4) следует

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|F(x, y)\| \cdot |x - y| \leq \sqrt{mn} f |x - y|.$$

Следствие доказано.

Лемма 2. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ ($t_1 > t_0$), $F'(t) = \varphi(t)$ и $G'(t) = |\varphi(t)|$. Тогда $|F(t_1) - F(t_0)| \leq G(t_1) - G(t_0)$.

Доказательство. Если $F(t_1) - F(t_0) = 0$, то неравенство очевидно, поскольку $G(t_1) \geq G(t_0)$, так как $G'(t) = |\varphi(t)| \geq 0$. Если $F(t_1) - F(t_0) \neq 0$, то через e обозначим вектор $\frac{F(t_1) - F(t_0)}{|F(t_1) - F(t_0)|}$ и рассмотрим функцию

$$f(t) = (F(t), e) - G(t).$$

Ее производная

$$\begin{aligned} f'(t) &= (F'(t), e) - G'(t) = \\ &= (\varphi(t), e) - |\varphi(t)| \leq |\varphi(t)| |e| - |\varphi(t)| = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f(t)$ — невозрастающая, поэтому

$$(F(t_0), e) - G(t_0) \geq (F(t_1), e) - G(t_1),$$

или

$$(F(t_1) - F(t_0), e) \leq G(t_1) - G(t_0).$$

С другой стороны,

$$|F(t_1) - F(t_0)| = (F(t_1) - F(t_0), e) \leq G(t_1) - G(t_0).$$

Лемма доказана.

Следствие. Если $\varphi(t)$ — непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функция, то существует вектор-функция

$$\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

координаты которой, по определению, равны

$$\int_{t_0}^t \varphi^i(\tau) d\tau \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для модуля этой функции имеет место оценка

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)| d\tau.$$

Доказательство. Пусть $F(t) = \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau$, $G(t) = \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)| d\tau$; тогда $F(t_0) = 0$, $G(t_0) = 0$, $F'(t) = \varphi(t)$, $G'(t) = |\varphi(t)|$ и, в силу леммы 2,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right| &= |F(t) - F(t_0)| \leq G(t) - G(t_0) = \\ &= G(t) = \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ при всех $t, t_0 \in [a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A + K \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{x}(\tau)| d\tau \right|, \quad (5)$$

где A и K — некоторые неотрицательные постоянные. Тогда

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A e^{K|t-t_0|}.$$

Доказательство. Для определенности положим $t > t_0$. Пусть $M = \max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{x}(t)|$. Тогда из неравенства (5) получим

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A + K \int_{t_0}^t M d\tau = A + KM(t - t_0). \quad (6)$$

Подставляя в правую часть неравенства (5) оценку (6), получим

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &\leq A + K \int_{t_0}^t [A + KM(\tau - t_0)] d\tau = \\ &= A + AK(t - t_0) + K^2 M \frac{(t - t_0)^2}{2!}. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученную оценку подставим опять в правую часть неравенства (5). Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &\leq A + K \int_{t_0}^t \left[A + AK(\tau - t_0) + K^2 M \frac{(\tau - t_0)^2}{2} \right] d\tau = \\ &= A + AK(t - t_0) + AK^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + K^3 M \frac{(t - t_0)^3}{3!}. \end{aligned}$$

Повторив эту операцию s раз, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t)| &\leq A \left(1 + K(t - t_0) + \dots + \frac{1}{s!} K^s (t - t_0)^s \right) + \\ &\quad + K^{s+1} M \frac{(t - t_0)^{s+1}}{(s+1)!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя в неравенстве (8) к пределу при $s \rightarrow \infty$, получим

$$|\mathbf{x}(t)| \leq A e^{K|t-t_0|}.$$

Лемма доказана.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Базис векторного пространства 265
Биекция 74

Вариация функционала 231
— вторая 248

Векторное пространство комплексное 264

Вектор собственный оператора 266

Вектор-функции 8, 280

Векторы комплексно-сопряженные 265

— комплексные 264

— линейно зависимые 265

— независимые 265

Генератор ламповый 161

Зависимость решения от начальных условий 109

Задачи Коши 14, 47, 203, 205

— краевая 137

Задачи изопериметрические 250

Значения начальные 14

— собственные оператора 266

Интегрирующий множитель 23

Квазимногочлен 61

Клетка жорданова 273

Колебания вынужденные 71

— свободные 68

Кривая дискриминантная 106

— интегральная 14

— начальная 204

Лемма вариационного исчисления основная 232

— Ляпунова 185

Линеаризация системы уравнений 189

Линии геодезические на поверхности 255

— — — сфере 257

— — — цилиндре 257

Максимум функционала относительный 230

Матрица жорданова 273

— линейного оператора 266

— монодромии 77

— фундаментальная 36

Матрицы подобные 267

— эрмитово сопряженные 276

Метод Адамса 131

— вариации постоянных 20, 37, 42

— исключения 43

— неопределенных коэффициентов Лагранжа 37

— последовательных приближений Пикара 89

— «прогонки» 139

— Рунге 259

— Рунге—Кутты 131

— «стрельбы» 138

— факторизация 139

— Эйлера 120

Методы приближенные решения вариационных задач 259

— — — задачи Коши 119

— прямые решения вариационных задач 259

Минимум функционала относительный 230

Многообразие линейное 232

Множество выпуклое 280

Мультипликатор 77

Непродолжаемые решения 94, 100

Неравенство Коши—Буняковского 274

Норма вектора 274

— матрицы 276

— оператора 276

— элемента в линейном нормированном пространстве 227

Нуль функции 133

Обобщенное решение 94

Огибающая 104

Оператор линейный дифференциальный 57

— сопряженный 275

— эрмитово-сопряженный 275

Определитель Вронского 30, 41

Особые решения 105

Первые интегралы независимые 214

Первый интеграл 213

Период полураспада 11
 — решения 151
 Поверхность минимальные 245
 Поверхность интегральная 198
 — регулярная 204
 Положение равновесия 150
 Порядок системы дифференциальных уравнений 8, 10
 Последовательность функций полная 259
 Поток фазовый 177
 Принцип Гамильтона вариационный 261
 Прогонка обратная 140
 — прямая 140
 Продолжение решения 100
 Произведение скалярное в C_n 273
 Пространство линейное 225
 — нормированное 227
 — фазовое 149
 — $\bar{C}([a, b])$ 226
 — $D_1([a, b])$ 227
 — $D_2([a, b])$ 234
 — $D_n([a, b])$ 240
 — $D_1(G)$ 242
 — $D_2(G)$ 243
 — E_n 226

Радиоактивный распад 11
 Размерность комплексного векторного пространства 264
 Резонанс 73
 — механический 73
 Решение асимптотически устойчивое 180
 — задачи Коши для квазилинейного уравнения 205
 — — — нелинейного уравнения с частными производными первого порядка 219
 — обобщенное 94
 — общее 34
 — периодическое 151
 — системы дифференциальных уравнений 8
 — устойчивое по Ляпунову 179
 Решения линейно независимые 30, 41, 48, 49
 — непродолжаемые 94, 100
 — особые 105

Седло 167
 Система автономная 148
 — динамическая 148
 — на плоскости 154
 — дифференциальных уравнений 7
 — — — в вариациях 116
 — — — линейная однородная 26
 — — — линейных 26
 — — — нормальная 10
 — — — характеристическая 201, 220
 — канонических уравнений Гамильтона 177
 — механическая консервативная с одной степенью свободы 194

Система решений фундаментальная 30, 41
 След матрицы 33
 Собственное значение оператора 266
 Собственный вектор оператора 266
 Схема второго порядка точности 128
 — двухточечная 129
 — первого порядка точности 124
 — «предиктор-корректор» 126

Теорема Гурвица 193
 — единственности 84
 — Лиувилля 177
 — Ляпунова 188
 — о неустойчивости 192
 — существования 89
 — Флоке 78
 — Штурма 133
 Точка покоя 150
 Точки уравнения особые 176
 — функционала стационарные 231
 Траектория динамической системы 149
 — замкнутая 151

Узел вырожденный неустойчивый 172
 — — устойчивый 172
 — дикритический 171
 — неустойчивый 166
 — устойчивый 165
 Уравнение Бернулли 22
 — Бесселя 99, 136
 — в полных дифференциалах 23
 — дифференциальное линейное 20
 — — — второго порядка 66
 — — — однородное 19, 20
 — — — с комплексными коэффициентами 47
 — — — периодическими коэффициентами 76
 — — — n -го порядка 39
 — — — — с постоянными коэффициентами 57
 — Клеро 107
 — колебаний 67
 — Лагранжа 108
 —, не разрешенное относительно производной 103
 — продольных колебаний стержня 245
 — с разделяющимися переменными 17
 — — частными производными первого порядка 198
 — — — — квазилинейное 199
 — — — — линейное 199
 — — — — однородное 212
 — — — — нелинейное 199
 — — — — полулинейное 199
 — Эйлера 82, 236
 — Эйлера—Остроградского 245
 Условие Вейерштрасса достаточное 249
 — Липшица 84
 Условия граничные 137
 — краевые 68, 137

Условия начальные 14
 — экстремума функционала достаточные 246
 Устойчивость линейных однородных систем 181

Фазовое пространство 149
 Фокус неустойчивый 168
 — устойчивый 168
 Формула Лиувилля 33
 — Остроградского — Лиувилля 42
 — Циолковского 19
 Функции комплексные 279
 Функционал 228
 — дважды дифференцируемый 248
 — дифференцируемый 247
 — квадратичный 248
 — линейный 229
 — непрерывный 229
 Функция Грина 143
 — последования 154

Характеристика квазилинейного уравнения 201

Характеристика нелинейного уравнения 220
 — триода 161
 Характеристики системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью 212
 Характеристический многочлен 58

Центр 168
 Цикл 151
 — предельный 158
 — — неустойчивый 161
 — — полуустойчивый 161
 — — устойчивый 160

Шар открытый 230

Экспоненциал матрицы 96
 Экстремали функционала 235
 Экстремум условный 250
 Энергия потенциальная 194
 Энтропия 24

Алексей Павлович К а р т а ш е в,
Борис Леонидович Р о ж д е с т в е н с к и й

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

М., 1980 г., 288 стр. с илл.

Редактор И. Е. М о р о з о в а
Техн. редактор Е. В. М о р о з о в а
Корректор Е. В. С и д о р к и н а

ИБ № 11633

Сдано в набор 24.08.79. Подписано к печати 25.03.80. Бумага 84×108^{1/32}, тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 14,67. Тираж 29 000 экз. Заказ № 349. Цена книги 50 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типо-графия № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29