

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS

John B. Garnett

**Department of Mathematics
University of California, Los Angeles
Los Angeles, California**

1981

Academic Press

**A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers
New York London Toronto Sydney San Francisco**

Дж. Гарнетт

**ОГРАНИЧЕННЫЕ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ
ФУНКЦИИ**

Перевод с английского
Е. М. Дынькина
под редакцией
В. П. Хавина

МОСКВА «МИР» 1984

ББК 22.161.5
Г 20
УДК 517.53—517.55

Гарнетт Дж.

Г 20 **Ограниченные аналитические функции. Пер. с англ. —**
М.: Мир, 1984. 469 с., ил.

Монография известного американского ученого отражает обширный круг вопросов современного комплексного анализа. Особое внимание уделено функциям ограниченной средней осцилляции, теореме о короне и интерполяционным последовательностям. Излагаемые в книге новые методы находят применение не только в теории функций, но и в смежных дисциплинах.

Для математиков различных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

Г $\frac{1702050000-273}{041(01)-84}$ 21—84, ч. 1

ББК 22.161.5
517

Редакция литературы по математическим наукам

Содержание этой книги существенно шире ее названия. Она охватывает большúю область современного анализа, которую трудно четко определить, но которая, тем не менее, объективно существует как некое единство — на первый взгляд, довольно причудливое. Представление об этой области можно попытаться создать с помощью набора «ключевых слов», и в этот набор войдут не только «аналитические функции» (и уж тем более не только «ограниченные аналитические функции»), но и «классы Харди» (в том числе и современные «вещественные классы Харди»), и «ВМО», и «интерполяция аналитическими функциями», и «теорема о короне», и «равномерные алгебры», и «двойственность экстремальных задач». Эта область соприкасается и с теорией сингулярных интегральных операторов, и с максимальными функциями. Нелегко сказать, что именно объединяет все эти темы. Но факт остается фактом: аналитик, который занимается одной из них, живо интересуется и остальными. И как раз с этими темами связаны большие достижения последних десяти — пятнадцати лет.

Богатство материала, изложенного в настоящей монографии, проявляется не только в тематическом разнообразии, но и в интересных и неожиданных связях между отдельными темами.

Остановимся для примера на задаче описания интерполяционных последовательностей (т. е. подмножеств единичного круга D , с которых всякую ограниченную функцию можно продолжить до функции, ограниченной и аналитической в D , кроме — до функции класса H^∞). Этой задаче посвящена глава VII и некоторые разделы других глав. Читатели старшего поколения еще помнят время, когда само существование бесконечных интерполяционных последовательностей составляло проблему. Полное же их описание, данное Карлесоном (теорема VII.1.1 этой книги), воспринималось как итог непростого развития — и идейного, и технического. Сегодня, после «детского» доказательства этой теоремы (в части (a) $\Leftrightarrow$ (b)), данного П. Джонсом (оно занимает всего несколько строк, добавленных нами в конце гл. VII), ясно, что значение результата Карлесона состоит не столько в описании интерполяционных последовательностей, сколько в открытии новых понятий, живущих ныне самостоятельной жизнью и работающих в отдаленных от интерполяции разделах анализа. Под влиянием теоремы Кар-

лесона сложилось целое направление, которое наряду с интерполяционными задачами охватывает и многое другое: меры Карлесона, безусловные базисы, анализ различных «условий разделимости» точечных множеств и связанных с ними функций (для примера можно указать на изучение линейных комбинаций ядер Пуассона в разд. 3 и 4 гл. X).

Еще один пример результата, суть которого совсем не в том, чем он кажется на первый взгляд, доставляет «теорема о короне» (одна из основных тем книги). Начнем с того, что это теорема не столько о короне, сколько о ее отсутствии. Название ее объясняется тем, что она явилась решением «проблемы короны». При постановке этой проблемы «коронной» именовалась (гипотетическая) разность между пространством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов банаховой алгебры H^∞ и замыканием круга D в $\mathfrak{M}$. Эта разность оказалась пустой, но слово «корона» прочно пристало к теореме. В действительности только что описанная абстрактная формулировка лишь маскирует существо задачи, мало чем помогая ее решению. Элементарно звучащая постановка «проблемы короны» такова.

Нетрудно показать, что для любых функций $f_1, \dots, f_n$, аналитических в замкнутом круге $\{|z| \leq 1\}$ и не имеющих в нем общих нулей, можно подобрать множители $g_1, \dots, g_n$, аналитические в том же круге и такие, что $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n \equiv 1$. Вопрос состоит в следующем: можно ли функции g_j выбрать так, чтобы $\max\{|g_j(z)| : 1 \leq j \leq n, |z| \leq 1\}$ не превосходил величины, зависящей лишь от $\min\{\max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)| : |z| \leq 1\}$ и $\max\{|f_j(z)| : 1 \leq j \leq n, |z| \leq 1\}$?

Положительный ответ на этот вопрос был дан Карлесоном в 1962 г. с помощью весьма нетривиальной и принципиально новой методики (разд. 5 гл. VIII): Недавно выяснилось, однако, что сама по себе «проблема короны» в этой методике не нуждается: совсем простое доказательство теоремы о короне нашел Т. Волф (теорема VIII.2.1 и упр. 5 к гл. VIII). Но доказательство Карлесона и само по себе есть результат. Оно содержит, в частности, глубокий и тонкий анализ строения уровней модуля ограниченной аналитической функции. Быть может, подлинное значение «теоремы о короне» — не в оценке множителей g_j , о которых говорилось выше (и, конечно, не в отсутствии некоего «нароста» при переходе от круга D к пространству $\mathfrak{M}$), а именно в этом «анализе уровней».

Книгу Гарнетта можно рассматривать и как учебник (так охарактеризовать ее позволяет содержание первых семи глав), и как монографию, подытоживающую некоторые совсем недавние исследования. Как учебник она продолжает и дополняет замечательную книгу К. Гофмана «Банаховы пространства аналитических функций» (опубликованную у нас в 1963 г. изда-

тельством ИЛ), которая и сегодня оставалась бы отличным введением в предмет, не будь она библиографической редкостью. Да и к тому же истекшие двадцать лет принесли очень много нового. В предлагаемом читателю переводе книги Гарнетта впервые на русском языке будут в систематической форме изложены важные, уже прочно вошедшие в анализ вещи: двойственность ВМО и H^1 , «вещественное» описание классов Харди, «условие A_p » Макенхаупта, алгебры Дугласа и теорема о короне с сопутствующим ей техническим арсеналом. Правда, естественная область действия и фактического появления многих из этих понятий — это $\mathbb{R}^n$, а не $\mathbb{R}$, что не отражено в книге. Кроме того, эти понятия и связанные с ними результаты допускают важное и интересное истолкование в теории линейных операторов и в гармоническом анализе. С такими трактовками, не нашедшими места в книге, читатель может познакомиться по монографии Н. К. Никольского «Лекции об операторе сдвига» («Наука», 1980).

Книга написана в свободной, непринужденной манере, в стиле неформальной беседы у доски после семинара. Этот стиль, несомненно, имеет свою прелесть. Следует, однако, предупредить читателя, что такая непринужденность — при отсутствии возможности переспросить своего собеседника — создает и определенные трудности. Формальное «причесывание» некоторых мест книги (главным образом, в последних трех главах) требует известного напряжения.

Переводчик и редактор порой пасовали перед языковыми трудностями, вызванными неформальной манерой автора. Примером может служить наш тусклый перевод заглавия гл. VIII, которое в подлиннике звучит так: «The Corona Construction».

Область, которой посвящена книга, продолжает развиваться. Стремясь помочь читателю быть в курсе событий, мы составили дополнительную библиографию. Но даже после этого библиография остается минимальной и пригодна лишь для грубой первоначальной ориентации.

Мы признательны автору, приславшему нам список замеченных им неточностей и опечаток. Все они исправлены при переводе.

В. П. Хавин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная цель этой книги — научить технике; методам мы оказываем предпочтение перед общностью. Многие понятия, которые мы введем, от субгармоничности и максимальных функций до интегралов Литтлвуда — Пэли, мер Карлесона и моментов остановки, естественно, распространяются на евклидово пространство и еще дальше, но ради единства и простоты изложения мы ограничиваемся только случаем одного измерения. Некоторые из этих понятий более полно исследованы в книгах Стейна [1970] и Стейна и Вейсса [1971].

Наша вторая цель — дать замкнутое изложение современной теории ограниченных аналитических функций в единичном круге. Поэтому мы подробно описываем такие понятия, как конформная инвариантность, субгармоничность $\log|f|$, двойственные экстремальные задачи и особенно произведения Бляшке, которые процесс обобщения еще не выделил из их классического окружения. Следует предупредить читателей, интересующихся высшими размерностями или многосвязными областями, что хуже всего поддаются обобщению именно те доказательства, которые связаны с произведениями Бляшке и двойственными экстремальными задачами. Освободить одномерные доказательства от этих понятий — значило бы решить некоторые из самых трудных сегодняшних проблем для единичного шара в $\mathbb{C}^n$.

С другой стороны, читатели, склонные удовольствоваться одной комплексной переменной, будут вознаграждены гораздо более разветвленной теорией. Например, основной вопрос об операторе сопряжения ведет к функциям ограниченной средней осцилляции, к мерам Карлесона и, далее, через произведения Бляшке или двойственность, к интерполяционным последовательностям и теореме о короне. В этой цепи не поддается обобщению только последнее звено. Доказательство двойственности H^1 — ВМО и конструкция, стоящая за теоремой о короне, — они пригодны и для высших размерностей — сливаясь, приводят к замечательному описанию замкнутых алгебр между H^∞ и L^∞ в терминах произведений Бляшке.

Эта книга как по методам, так и по материалу, выражает частную точку зрения; это не энциклопедия. Некоторые темы — такие, как интерполяционные задачи и теорема о короне — занимают много места, в то время как применения теории банаховых алгебр или широкое взаимодействие между H^∞ и теорией операторов сведены к минимуму. (По поводу связей с теорией операторов мы рекомендуем превосходные книги Дугласа [1972] и Сарасона [1979]¹⁾). Везде, где это возможно, мы пользуемся конформной инвариантностью и техникой теории функций ве-

¹⁾ См. также Никольский [1980*] — Прим. ред.

вещественного переменного. За прошедшие двадцать лет возобновление интереса к H^∞ вызывалось, в основном, функционально-аналитическими вопросами, но я полагаю, что решение самых трудных стоящих перед нами проблем потребует возвращения к кругу и окружности и более конструктивных доказательств.

Чтение этой книги предполагает знакомство с вводным курсом вещественного и комплексного анализа; вполне достаточно будет первых одиннадцати глав учебника Рудина [1974].

В гл. I мы излагаем некоторые вводные сведения, не всегда присутствующие в университетских курсах.

Главы II—V составляют введение в теорию пространств Харди, включающее сопряженные функции, двойственные экстремальные задачи и некоторые свойства H^∞ как равномерной алгебры. Мы опираемся на максимальные функции и субгармоничность (другие подходы см. в книгах Гофмана [1962a] и Дьюрена [1970]).

Главы VI—X развивают идеи, связанные с теоремой Джона — Ниренберга, геометрией интерполяционных последовательностей и теоремой о короне. Читатель, уже знакомый с предметом, заметит, что содержание этих глав выросло, в основном, из двух работ Карлесона [1958, 1962a]. Большая часть материала последних пяти глав до сих пор в монографиях не излагалась.

Изложение в книге замкнуто, и первая ее половина, в сущности, служит введением ко второй. Однако первые разделы глав VI—VIII содержат существенные вопросы классической теперь теории пространств H^p , а в гл. IV проникли некоторые весьма специальные проблемы. Лекции Кусиса [1980] дают более элементарный и менее сжатый очерк некоторых тем, рассматриваемых нами.

Предложения в книге нумеруются лексикографически в пределах каждой главы, так что «теорема 1.3» — это третье предложение в разд. I данной главы, а «теорема 1.3 гл. I» или «теорема I.1.3» находится в разд. I гл. I. Формулы нумеруются так же — например, «(1.10) из гл. I». В тексте 31 рисунок. Разобравшись в рисунках, вы разберетесь и в книге.

Каждая глава кончается библиографическими замечаниями и разделом «Упражнения и дальнейшие результаты». Одни упражнения рассчитаны на начинающих, а другие — это и есть «дальнейшие результаты» — являются теоремами, помещенными вне основного текста. Они обычно содержат литературные ссылки, что служит дополнительным указанием на возможную неэлементарность упражнения. К некоторым упражнениям даются развернутые указания, и на такие упражнения мы иногда ссылаемся в дальнейшем. Особенно важные упражнения помечены одной, двумя или тремя звездочками *; они принесут особое удовлетворение тому, кто их выполнит.

БЛАГОДАРНОСТИ

Без помощи и поддержки многих друзей эта книга никогда не была бы окончена. Мне посчастливилось иметь двух учеников — Дональда Маршалла и Питера Джонса, и когда я писал эту книгу, каждый из них стремился склонить меня в свою сторону. Я благодарен им за многочисленные улучшения в тексте и за ту математику, которой они меня научили. Долгие годы я находил совет и ободряющую поддержку у Теда Гамелина, Пола Кусиса и Николаса Варопулоса. Ирвин Гликсберг, оставаясь по сей день моим учителем, бомбардировал меня математическими и стилистическими исправлениями. Если бы не он, то эту книгу было бы гораздо труднее читать. Другие, кто внес ценные замечания по поводу текста книги и по существу предмета, — это Энтони Карбери, Леннарт Карлесон, Дэвид Дрейсин, Джон Фегарасон, Мишель Фразье, Грегори Джигбонс, Лесли Кей, Стивен Кранц, Роберт Лэттер, Робин Оуэнс, Дональд Сарасон, Аллен Шилдс.

Рукопись, содержащую мириад неразборчивых поправок, перепечатала Дебора Реметч, которой помогала Сара Реметч.

Хочу поблагодарить персонал издательства «Академик Пресс» за терпение.

Я чрезвычайно признателен Университету Калифорнии в Лос-Анджелесе, с его приятной атмосферой, квалифицированными сотрудниками, близкими мне по духу коллегами и любознательными студентами, за предоставленную мне профессиональную свободу. Большая часть книги была написана в университете Paris-Sud, где я был адъюнкт-профессором и где мне были предоставлены великолепная библиотека, возможность участия в захватывающих семинарах и еще большая профессиональная свобода. Я благодарен его отделу гармонического анализа за восхитительный год.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для начала мы обсудим три темы из вещественного и комплексного анализа, проходящие через всю книгу.

Наша первая тема — лемма Шварца в инвариантной форме. Она, естественно, приводит к псевдогиперболической метрике, удобной при изучении ограниченных аналитических функций. Мы демонстрируем силу леммы Шварца, доказывая теорему Пика о разрешимости конечной интерполяционной задачи:

$$f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad |f(z)| \leq 1.$$

Наша вторая тема относится к вещественному анализу. Это круг идей, связывающих интегралы Пуассона с максимальными функциями.

Глава кончается кратким введением в теорию субгармонических функций и гармонических мажорант. Это наша третья тема.

1. Лемма Шварца

Пусть $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех аналитических в D функций f , таких, что $f(D) \subset D$, т. е. $|f(z)| \leq 1$, если $f \in \mathcal{B}$. Леммой Шварца называется следующее простое, но удивительно сильное предложение.

Лемма 1.1. Если $f \in \mathcal{B}$ и $f(0) = 0$, то

$$(1.1) \quad \begin{aligned} |f(z)| &\leq |z|, \quad |z| < 1; \\ |f'(0)| &\leq 1. \end{aligned}$$

Равенство (при каком-нибудь z) имеет место тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{i\varphi} z$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Для доказательства достаточно заметить, что для аналитической функции $g(z) = f(z)/z$ по принципу максимума должно выполняться неравенство $|g| \leq 1$.

Нам будет нужна инвариантная форма леммы Шварца, принадлежащая Пикау. Преобразование Мёбиуса называется любое конформное отображение круга D на себя. Каждое такое преобразование имеет вид

$$\tau(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

где φ вещественно и $|z_0| < 1$. Ясно, что $z_0 = \tau^{-1}(0)$.

Лемма 1.2. Если $f \in \mathcal{B}$, то

$$(1.2) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|, \quad z \neq z_0,$$

$$(1.3) \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Равенство при некотором z имеет место тогда и только тогда, когда f — преобразование Мёбиуса.

Для доказательства нужно применить лемму 1.1 к аналитической функции $(f(z) - f(z_0))/(1 - \overline{f(z_0)} f(z))$ от новой независимой переменной $\tau(z)$. Устремляя в (1.2) z к z_0 , получим (1.3).

Определим теперь *псевдогиперболическое расстояние* в круге D формулой

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|.$$

Согласно лемме 1.2, все аналитические отображения D в D удовлетворяют условию Липшица относительно ρ :

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w).$$

При преобразованиях Мёбиуса — по той же лемме — расстояние ρ не меняется:

$$\rho(\tau(z), \tau(w)) = \rho(z, w).$$

Рассмотрим неевклидов круг

$$K(z_0, r) = \{z: \rho(z, z_0) < r\}, \quad 0 < r < 1.$$

Сужения функций из $\mathcal{B}$ на $K(z_0, r)$ устроены так же, как их сужения на круг $K(0, r) = \{|w| < r\}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно ввести в $K(z_0, r)$ новую независимую переменную $w = \tau(z) = (z - z_0)/(1 - \overline{z_0} z)$ и заметить, что $\mathcal{B}$ инвариантно при такой замене. Так, например, хотя производные функций из $\mathcal{B}$ не образуют конформно-инвариантного семейства, выражение

$$(1.4) \quad |f'(z)| (1 - |z|^2)$$

уже является конформно-инвариантным. Для доказательства применим важное тождество

$$(1.5) \quad 1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \overline{z_0} z|^2} = (1 - |z|^2) |\tau'(z)|.$$

(Это (1.3) для $f = \tau$, т.е. в случае равенства.) Если теперь $f(z) = g(\tau(z)) = g(w)$, то

$$|f'(z)| (1 - |z|^2) = |g'(w)| |\tau'(z)| (1 - |z|^2) = |g'(w)| (1 - |w|^2),$$

и (1.4) в самом деле конформно-инвариантно.

Ясно, что неевклидов круг $K(z_0, r)$, $0 < r < 1$, есть прообраз круга $\{|\omega| < r\}$ при отображении

$$\omega = \tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Поэтому $K(z_0, r)$ — это обычный евклидов круг $\Delta(c, R) = \{z: |z - c| < R\}$, но с центром

$$(1.6) \quad c = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 |z_0|^2} z_0$$

и радиусом

$$(1.7) \quad R = r \frac{1 - |z_0|^2}{1 - r^2 |z_0|^2}.$$

Формулы для c и R проверяются прямым вычислением, но мы сейчас выведем их геометрически. Поскольку прямая, проведенная через 0 и z_0 , τ -инвариантна, окружность $\partial K(z_0, r) = \tau^{-1}(\{|\omega| = r\})$ должна быть ортогональна к этой прямой. Ее диаметр — прообраз отрезка $[-rz_0/|z_0|, rz_0/|z_0|]$. Так как $z = (\omega + z_0)/(1 + \bar{z}_0 \omega)$, этот диаметр совпадает с отрезком

$$(1.8) \quad [\alpha, \beta] = \left[\frac{|z_0| - r}{1 - r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|}, \frac{|z_0| + r}{1 + r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|} \right].$$

Концы диаметра $[\alpha, \beta]$ — точки из $\overline{K(z_0, r)}$ с наименьшим и наибольшим модулем. Поэтому $c = (\alpha + \beta)/2$, $R = (|\beta| - |\alpha|)/2$, и мы получили (1.6) и (1.7).

Отметим, что при фиксированном r евклидов радиус круга $K(z_0, r)$ сравним с $1 - |z_0|$ при $|z_0| \rightarrow 1$.

Следствие 1.3. Если $f \in \mathcal{H}$, то

$$(1.9) \quad |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}.$$

Доказательство. По лемме 1.2 $\rho(f(z), f(0)) \leq |z|$, и поэтому $f(z) \in \overline{K(f(0), |z|)}$. Теперь (1.8) дает нужную оценку для $|f(z)|$. Заметим, что равенство в (1.9) возможно, только если f — преобразование Мёбиуса и $\arg z = \arg f(0)$ при $f(0) \neq 0$. $\square$

Псевдогоиперболическое расстояние ρ является метрикой на D . Неравенство треугольника для ρ содержится в следующей лемме.

Лемма 1.4. Для любых трех точек $z_0, z_1, z_2 \in D$

$$(1.10) \quad \frac{\rho(z_0, z_2) - \rho(z_2, z_1)}{1 - \rho(z_0, z_2)\rho(z_2, z_1)} \leq \rho(z_0, z_1) \leq \frac{\rho(z_0, z_2) + \rho(z_2, z_1)}{1 + \rho(z_0, z_2)\rho(z_2, z_1)}.$$

Доказательство. Так как ρ инвариантно, мы можем считать, что $z_2 = 0$. Тогда (1.10) превращается в неравенство

$$(1.11) \quad \frac{|z_0| - |z_1|}{1 - |z_0||z_1|} \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right| \leq \frac{|z_0| + |z_1|}{1 + |z_0||z_1|}.$$

Пусть $|z_1| = r$. Точка $z = (z_1 - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z_1)$ лежит на границе неевклидова круга $K(-z_0, r)$, и поэтому ее модуль заключен между $|\alpha|$ и $|\beta|$ из (1.8). Тем самым (1.11) доказано. Разумеется, оценку (1.10) и особенно (1.11) легко получить и непосредственно. $\square$

Преобразование Мёбиуса, которое переводит z_0 в w_0 , можно записать в виде

$$\frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

откуда

$$(1.12) \quad |\omega'(z_0)| = \frac{1 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

Мы уже встречали это тождество как случай равенства в (1.3). Согласно (1.12), выражение

$$(1.13) \quad ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

конформно-инвариантно в D . Мы можем с его помощью определить гиперболическую длину спрямляемой кривой γ в D по формуле

$$\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

а затем определить метрику Пуанкаре $\psi(z_1, z_2)$ как точную нижнюю грань гиперболических длин всех дуг в D , соединяющих z_1 и z_2 . Такое расстояние $\psi(z_1, z_2)$ конформно-инвариантно. В частности, легко проверить, что при $r > 0$

$$\psi(0, r) = 2 \int_0^r \frac{dx}{1 - |x|^2} = \log \frac{1+r}{1-r}.$$

Но любую пару точек z_1 и z_2 можно подходящим преобразованием Мёбиуса перевести в 0 и $\rho(z_1, z_2) = |(z_1 - z_2)/(1 - \bar{z}_1 z_2)|$. Поэтому

$$\psi(z_1, z_2) = \log \frac{1 + \rho(z_1, z_2)}{1 - \rho(z_1, z_2)} \quad \text{и} \quad \rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \operatorname{th} \psi(z_1, z_2).$$

Очевидно, что радиус является кратчайшим путем от 0 до r . Поэтому все геодезические, т. е. кратчайшие пути, в метрике Пуанкаре являются образами диаметра D при всевозможных преобразованиях Мёбиуса. Это диаметры D и круговые дуги, ортогональные к единичной окружности ∂D . Если назвать их прямыми, то мы получим модель гиперболической геометрии Лобачевского.

В этой книге мы в основном работаем с псевдогиперболической метрикой ρ , а не с ψ , хотя геодезические иногда помогают нашей интуиции.

Гиперболическая геометрия выглядит чуть проще в верхней полуплоскости $\mathcal{H} = \{z = x + iy: y > 0\}$. В $\mathcal{H}$

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|,$$

а гиперболический элемент длины есть $ds = |dz|/y$. Геодезическими являются вертикальные прямые и дуги окружностей, ортогональные к вещественной оси. Конформные отображения $\mathcal{H}$ на себя с неподвижной точкой ∞ очень просты:

$$\tau(z) = az + x_0, \quad a > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Горизонтальные прямые $\{y = y_0\}$ при таких отображениях переходят друг в друга. Для окружностей $\{|z| = r\}$ в D это не так. В $\mathcal{H}$ любые два квадрата

$$\{x_0 < x < x_0 + h, \quad h < y < 2h\}$$

конгруэнтны в неевклидовой геометрии. Соответствующие конгруэнтные фигуры в круге сложнее. По этим и другим причинам бывает удобнее использовать в качестве основной области $\mathcal{H}$, а не D .

2. Теорема Пика

Конечным произведением Бляшке называется функция вида

$$B(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad |z_j| < 1.$$

Степенью произведения Бляшке называется число n его нулей. Таким образом, произведение Бляшке степени 0 — это постоянная, по модулю равная 1.

Очевидно, что

- (i) B непрерывно вплоть до ∂D ,
- (ii) $|B| = 1$ на ∂D ,
- (iii) B имеет конечное число нулей в круге D .

Эти три свойства определяют B с точностью до множителя $e^{i\varphi}$. В самом деле, если аналитическая функция f удовлетворяет (i), (ii) и (iii), а B — конечное произведение Бляшке с теми же нулями, то $|f/B| \leq 1$ и $|B/f| \leq 1$ в D по принципу максимума, и f/B постоянно.

Теорема 2.1 (Каратеодори). Если $f \in \mathcal{A}$, то существует последовательность $\{B_k\}$ конечных произведений Бляшке, поточечно сходящаяся к f в D .

Доказательство. Пусть

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

Применив индукцию, мы построим произведение Бляшке степени не выше n , у которого первые n коэффициентов будут те же, что у f :

$$B_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + d_n z^n + \dots$$

Ясно, что такое построение доказывает теорему. Так как $|c_0| \leq 1$, мы можем положить

$$B_0(z) = \frac{z + c_0}{1 + \bar{c}_0 z}$$

(если $|c_0| = 1$, то $B_0 = c_0$ — произведение Бляшке степени 0). Предположим, что произведение Бляшке B_{n-1} уже построено для любой функции $g \in \mathcal{B}$. Положим

$$g(z) = \frac{1}{z} \frac{f(z) - f(0)}{1 - \bar{f}(0) f(z)},$$

и пусть $\tilde{B}_{n-1}$ — соответствующее g произведение Бляшке степени не выше $n-1$. Положим теперь

$$B_n(z) = \frac{z \tilde{B}_{n-1}(z) + f(0)}{1 + \bar{f}(0) z \tilde{B}_{n-1}(z)}.$$

Ясно, что B_n — конечное произведение Бляшке и его степень равна степени $z \tilde{B}_{n-1}(z)$, т. е. не превосходит n . Но

$$\begin{aligned} f(z) - B_n(z) &= \frac{zg(z) + f(0)}{1 + \bar{f}(0)zg(z)} - \frac{z\tilde{B}_{n-1}(z) + f(0)}{1 + \bar{f}(0)z\tilde{B}_{n-1}(z)} = \\ &= \frac{(1 - |f(0)|^2)z(g(z) - \tilde{B}_{n-1}(z))}{(1 + \bar{f}(0)zg(z))(1 + \bar{f}(0)z\tilde{B}_{n-1}(z))}. \end{aligned}$$

Поскольку $g - \tilde{B}_{n-1}$ имеет нуль порядка $n-1$ в начале координат, $f - B_n$ имеет там нуль порядка n . $\square$

Последовательности коэффициентов $\{c_0, c_1, \dots\}$ функций из $\mathcal{B}$ были полностью описаны Шуром [1917]. Здесь же мы докажем теорему Пика [1916], а не теорему Шура. Пусть $\{z_1, \dots, z_n\}$ — данные различные точки D . Пик определил, для каких $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ конечная интерполяционная задача

$$(2.1) \quad f(z_j) = \omega_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет решение $f \in \mathcal{B}$.

Теорема 2.2. Функция $f \in \mathcal{B}$, удовлетворяющая (2.1), существует тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j, k=1}^n \frac{1 - \omega_j \bar{\omega}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

неотрицательна, $Q_n \geq 0$. Если $Q_n \geq 0$, то существует решение (2.1), которое является произведением Бляшке степени не выше n .

Конечно, из теоремы Пика сразу следует теорема Каратеодори, сама же теорема Пика доказывается труднее.

При $n = 2$ необходимое и достаточное условие разрешимости интерполяционной задачи дается неравенством (1.2). Поэтому $Q_2 \geq 0$ тогда и только тогда, когда $|w_1| \leq 1$ и (1.2) выполняется. Эту связь легко проверить и непосредственно, так как $Q_2 \geq 0$ тогда и только тогда, когда $|w_1| \leq 1$ и определитель Q_2 неотрицателен:

$$\frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{|1 - \bar{w}_1 w_2|^2} \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}.$$

Ввиду (1.5) последнее неравенство можно переписать в виде

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|,$$

что совпадает с (1.2).

Доказательство теоремы. Мы применим индукцию по n . Случай $n = 1$ очевиден, поскольку преобразования Мёбиуса действуют в D транзитивно.

Предположим, что $n > 1$. Если задача (2.1) разрешима, то $|w_n| \leq 1$, а при $|w_n| = 1$ функция f должна быть постоянной и $w_j = w_n$, $1 \leq j \leq n$. Если же $Q_n \geq 0$, то, полагая $t_n = 1$, $t_j = 0$, $j < n$, мы получим $|w_n| \leq 1$. При $|w_n| = 1$ подстановка $t_j = 0$, $j \neq n$, k , и разобранный выше случай $n = 2$ дают $w_k = w_n$ при всех k . Поэтому постоянная w_n — произведение Бляшке степени 0 — является решением задачи (2.1), и теорема становится тривиальной.

Итак, мы можем считать, что $|w_n| < 1$. Переведем теперь z_n и w_n в начало координат. Положим

$$z'_j = \frac{z_j - z_n}{1 - \bar{z}_n z_j}, \quad w'_j = \frac{w_j - w_n}{1 - \bar{w}_n w_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Пусть g связано с f по формуле

$$(2.2) \quad g(z) = \left(f\left(\frac{z + z_n}{1 + \bar{z}_n z}\right) - w_n \right) / \left(1 - \bar{w}_n f\left(\frac{z + z_n}{1 + \bar{z}_n z}\right) \right).$$

Ясно, что $f \in \mathcal{B}$ является решением (2.1) тогда и только тогда, когда $g \in \mathcal{B}$ является решением интерполяционной задачи

$$(2.3) \quad g(z'_j) = w'_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Кроме того, f и g одновременно являются или не являются произведениями Бляшке степени n . С другой стороны, форма

Q'_n , отвечающая точкам $\{z'_1, \dots, z'_{n-1}, 0\}$ и $\{w'_1, \dots, w'_{n-1}, 0\}$, тесно связана с Q_n . В самом деле,

$$\begin{aligned}\frac{1 - z'_j \bar{z}'_k}{1 - z_j \bar{z}_k} &= \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - \bar{z}_n z_j)(1 - z_n \bar{z}_k)} = \alpha_j \bar{\alpha}_k, \\ \frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - w_j \bar{w}_k} &= \frac{1 - |w_n|^2}{(1 - \bar{w}_n w_j)(1 - w_n \bar{w}_k)} = \beta_j \bar{\beta}_k, \\ \frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} t_j \bar{t}_k &= \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} \left(\frac{\beta_j}{\alpha_j} t_j \right) \left(\frac{\bar{\beta}_k}{\bar{\alpha}_k} \bar{t}_k \right),\end{aligned}$$

откуда

$$(2.4) \quad Q'_n(t_1, \dots, t_n) = Q_n\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} t_1, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n} t_n\right).$$

Стало быть, $Q'_n \geq 0$ тогда и только тогда, когда $Q_n \geq 0$. Итак, мы можем считать, что $z_n = w_n = 0$ и, согласно (2.1), $f(0) = 0$.

Положим $g(z) = f(z)/z$. Очевидно, что $f \in \mathcal{B}$ решает (2.1) тогда и только тогда, когда $g \in \mathcal{B}$ решает интерполяционную задачу

$$(2.5) \quad g(z_j) = w_j/z_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Кроме того, f и g одновременно являются или не являются произведениями Бляшке степеней n и $n-1$ соответственно.

По предположению индукции задача (2.5) разрешима, если и только если квадратичная форма

$$\tilde{Q}_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{j, k=1}^{n-1} \frac{1 - (w_j/z_j)(\bar{w}_k/\bar{z}_k)}{1 - z_j \bar{z}_k} s_j \bar{s}_k$$

неотрицательна. Теперь теорема сводится к тому, чтобы доказать, что $Q_n \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$, в предположении, что $z_n = w_n = 0$. Но при $z_n = w_n = 0$

$$\begin{aligned}Q_n(t_1, \dots, t_n) &= |t_n|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} t_n \bar{t}_j + \sum_{j, k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k = \\ &= \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right|^2 + \sum_{j, k=1}^{n-1} \left(\frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} - 1 \right) t_j \bar{t}_k.\end{aligned}$$

Однако

$$\frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} - 1 = \frac{z_j \bar{z}_k - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} = \frac{1 - (w_j/z_j)(\bar{w}_k/\bar{z}_k)}{1 - z_j \bar{z}_k} z_j \bar{z}_k$$

и, окончательно,

$$(2.6) \quad Q_n(t_1, \dots, t_n) = \left| \sum_{j=1}^n t_j \right|^2 + \tilde{Q}_{n-1}(z_1 t_1, \dots, z_{n-1} t_{n-1}).$$

Стало быть, если $Q_{n-1} \geq 0$, то и $Q_n \geq 0$, а подстановка $t_n = -\sum_{j=1}^{n-1} t_j$ показывает, что и, обратно, $Q_{n-1} \geq 0$ при $Q_n \geq 0$. $\square$

Следствие 2.3. Пусть $Q_n \geq 0$. Решение $f \in \mathcal{R}$ задачи (2.1) единственно тогда и только тогда, когда $\det Q_n = 0$. Если $\det Q_n = 0$ и $m < n - \text{ранг } Q_n$, то f является произведением Бляшке степени m . Обратно, если среди решений (2.1) есть произведение Бляшке степени $m < n$, то Q_n имеет ранг m .

Доказательство. Так как при $|\omega_n| = 1$ мы имеем $Q_n \equiv 0$, $m = 0$ и $f \equiv \omega_n$, то можно считать, что $z_n = \omega_n = 0$. Далее, по (2.4) Q_n и Q'_n имеют одинаковый ранг, а по (2.2) решения задач (2.1) и (2.3) одновременно единственны или не единственны. Кроме того, решения (2.1) и (2.3) одновременно являются или не являются произведениями Бляшке степени m .

Итак, мы можем считать, что $z_n = \omega_n = 0$. Решение задачи (2.1) единственно одновременно с решением (2.5), и оно является произведением Бляшке степени m тогда и только тогда, когда решение (2.5) является произведением Бляшке степени $m - 1$. Поэтому по индукции нам достаточно установить, что

$$(2.7) \quad \text{rank } Q_n = 1 + \text{rank } Q_{n-1}.$$

Но если (a_{jk}) — матрица Q_{n-1} , то матрица Q_n есть

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 + a_{jk} z_j \bar{z}_k & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Вычитая последнюю строку из всех предыдущих, а затем проделывая ту же операцию с последним столбцом (что не меняет ранга), мы приведем матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{jk} z_j \bar{z}_k & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Очевидно, что ранг этой матрицы равен $1 + \text{rank}(a_{jk})$. $\square$

Следствие 2.4. Пусть $Q_n \geq 0$ и $\det Q_n > 0$. Пусть далее $z \in D$ и $z \neq z_j$, $j = 1, \dots, n$. Множество значений

$$W = \{f(z) : f \in \mathcal{R}, f(z_j) = \omega_j, j = 1, \dots, n\}$$

есть невырожденный замкнутый круг, целиком лежащий в D . Если f — решение задачи (2.1), то $f(z) \in \partial W$ тогда и только тогда, когда f — произведение Бляшке степени n . Если $w \in \partial W$, то задача (2.1) имеет только одно решение $f \in \mathcal{R}$, такое, что $f(z) = w$.

Доказательство. Мы опять предположим, что $z_n = w_n = 0$. По (2.7) $\det Q_{n-1} > 0$. По предположению индукции

$$\mathcal{W} = \{g(z) : g \in \mathcal{R}, g(z_j) = w_j/z_j, j = 1, \dots, n-1\}$$

есть невырожденный замкнутый круг в D . Но тогда $W = \{z\xi : \xi \in \mathcal{W}\}$ — тоже замкнутый круг в D . Поскольку $w \in \partial W$ тогда и только тогда, когда $w/z \in \partial \mathcal{W}$, все остальные утверждения также следуют по индукции. $\square$

К теме настоящего раздела мы еще вернемся в гл. IV.

3. Интеграл Пуассона

Пусть u — непрерывная функция в замкнутом единичном круге $\bar{D}$. Если u гармонична в открытом круге D , т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

то по теореме о среднем

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Пусть теперь $z_0 = re^{i\theta_0}$ — произвольная точка круга D . Для значения $u(z_0)$ можно написать аналогичную интегральную формулу, если перевести z_0 преобразованием Мёбиуса в начало координат. В самом деле, пусть $\tau(z) = (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$. Поскольку единичная окружность ∂D τ -инвариантна, мы можем написать $\tau(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$, и дифференцирование дает

$$(3.1) \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \theta_0) + r^2} = P_{z_0}(\theta).$$

Функция $P_{z_0}(\theta)$ называется ядром Пуассона (представляющим точку z_0). Функция $u(\tau^{-1}(z))$ снова непрерывна в $\bar{D}$ и гармонична в D и по теореме о среднем

$$u(z_0) = u(\tau^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) P_{z_0}(\theta) d\theta.$$

Это равенство называется *интегральной формулой Пуассона*. Заметим далее, что

$$P_z(\theta) = \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z},$$

и поэтому при фиксированном θ ядро Пуассона есть гармоническая функция от z . Следовательно, функция

$$(3.2) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int P_z(\theta) f(\theta) d\theta$$

гармонична в D при любом $f \in L^1(\partial D)$. Так как, кроме того, $P_z(\theta)$ непрерывно по θ , то, заменяя в (3.2) $f(\theta) d\theta$ произвольной конечной мерой $d\mu(\theta)$ на ∂D , мы снова получим гармоническую в D функцию. Далее, из (3.1) ясно, что формулу Пуассона можно интерпретировать как свертку:

$$P_{z_0}(\theta) = P_r(\theta_0 - \theta),$$

и (3.2) принимает вид

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta_0 - \theta) f(\theta) d\theta = (P_r * f)(\theta_0).$$

Это отражение того факта, что пространство гармонических в D функций инвариантно относительно вращений.

Теперь отображим D на верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$ по формуле $w \rightarrow z(w) = i(1-w)/(1+w)$. Пусть $w_0 \in D$ и $z_0 = z(w_0)$ — его образ в $\mathcal{H}$. Так как наше отображение переводит ∂D в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, то для $w = e^{i\theta} \in \partial D$, $w \neq -1$, имеем $z(w) = t \in \mathbb{R}$ и дифференцирование дает

$$\frac{1}{2\pi} P_{w_0}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2} = P_{z_0}(t), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

$P_{z_0}(t)$ называется *ядром Пуассона* для верхней полуплоскости. Отметим, что $P_{z_0}(t) = P_{y_0}(x_0 - t)$ (это обозначение не приводит к путанице, потому что z_0 — точка из $\mathcal{H}$, а y_0 — нет). Делая замену переменной $w \rightarrow z$ в формуле Пуассона, мы сразу получаем

$$(3.3) \quad u(z) = \int P_z(t) u(t) dt = \int P_y(x - t) u(t) dt,$$

если функция u непрерывна в $\overline{\mathcal{H}} \cup \{\infty\}$ и гармонична в $\mathcal{H}$. Так как

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{t - z},$$

то при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ ядро Пуассона есть гармоническая в $\mathcal{H}$ функция от z . Из определения ясно, что $P_z(t) \leq c_z/(1 +$

$+t^2$), где c_z — зависящая от z постоянная. Поэтому $P_z \in L^q(\mathbb{R})$ при любом q , $1 \leq q \leq \infty$, и функция

$$(3.4) \quad u(z) = \int P_z(t) f(t) dt$$

будет гармонической в $\mathcal{H}$ для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Поскольку $P_z(t)$ — непрерывная функция от t , функция (3.4) останется гармонической, если заменить $f(t)dt$ произвольной конечной мерой $d\mu(t)$ на $\mathbb{R}$ и даже произвольной бесконечной положительной мерой $d\mu(t)$, для которой

$$\int \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) < \infty$$

(так что интеграл Пуассона $\int P_z(t) d\mu(t)$ сходится).

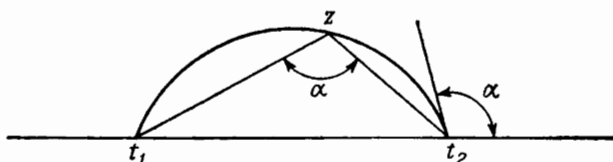


Рис. I. 1. Линия уровня функции $\omega(z)$.

Пусть теперь f — характеристическая функция интервала $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$. Возникающая гармоническая функция

$$\omega(z) = \int_{t_1}^{t_2} P_z(t) dt$$

называется гармонической мерой этого интервала (представляющей точку z). Ее можно вычислить явно:

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \arg \frac{z - t_2}{z - t_1} = \frac{\alpha}{\pi},$$

где α — угол, под которым интервал (t_1, t_2) виден из точки z (см. рис. I. 1). Для всех точек круговой дуги, проходящей через t_1 , t_2 и z , этот угол одинаков и равен углу между вещественной осью и касательной к этой дуге. В упр. 3 дается аналогичная геометрическая интерпретация гармонической меры для единичного круга D .

Ясно, что формула Пуассона для верхней полуплоскости снова имеет вид свертки:

$$u(z) = \int P_y(x - t) f(t) dt = (P_y * f)(x).$$

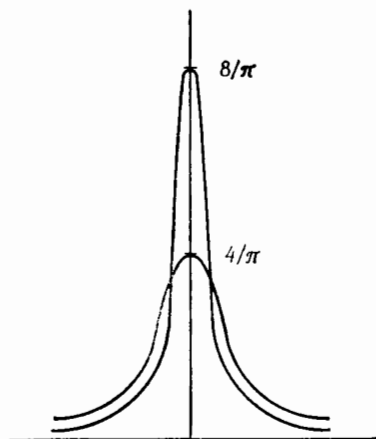
В этом проявляется инвариантность пространства гармонических в $\mathcal{H}$ функций относительно сдвигов $z \rightarrow z + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Оно инвариантно также относительно растяжений $z \rightarrow az, a > 0$, и из-за этого

$$P_y(t) = \frac{1}{y} P_1(t/y),$$

т. е. $P_y(t)$ — однородная функция степени -1 .

Рис. 1.2. Ядра Пуассона $P_{1/4}$ и $P_{1/8}$.



Перечислим важнейшие свойства ядра Пуассона (иллюстрируемые рис. 1.2):

- (i) $P_y(t) \geq 0, \quad \int P_y(t) dt = 1;$
- (ii) $P_y(t)$ четна, $P_y(t) = P_y(-t);$
- (iii) $P_y(t)$ убывает при $t > 0;$
- (iv) $P_y(t) \leq \frac{1}{\pi y};$
- (v) $\sup_{|t| > \delta} P_y(t) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0)$ при любом $\delta > 0;$
- (vi) $\int_{|t| > \delta} P_y(t) dt \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0)$ при любом $\delta > 0.$

Кроме того, $\{P_y\}$ является полугруппой относительно свертки:

$$(vii) \quad P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1 + y_2}.$$

Первые шесть свойств $P_y(t)$ следуют из определений (свойства (iv) — (vi) можно вывести и из однородности P_y). Свойство (vii) означает, что для гармонической функции (3.4) $u(z + iy_1)$ является сверткой P_{y_2} и $u(t + iy_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Для доказательства

(vii) рассмотрим функцию $u(x + iy) = P_{y+y_1}(x)$. Она гармонична в $\mathcal{H}$, непрерывно продолжается на $\overline{\mathcal{H}} \cup \{\infty\}$ и по (3.3)

$$P_{y_1+y_2}(x) = \int P_{y_2}(x-t) u(t) dt = (P_{y_1} * P_{y_2})(x).$$

При изучении интегралов типа (3.4) нам будет полезно *интегральное неравенство Минковского*:

Если μ и ν — две σ -конечные меры, $1 \leq p < \infty$ и $F(x, t) \nu \times \mu$ -измерима, то

$$\left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x).$$

Докажем неравенство Минковского, следуя доказательству его частного случая для сумм. При $p=1$ это просто теорема Фубини. При $p>1$ мы можем считать функцию $F(x, t)$ неотрицательной и простой, так что оба интеграла сходятся. Пусть

$$G(t) = \left(\int F(x, t) d\nu(x) \right)^{p-1}.$$

Тогда при $q = p/(p-1)$

$$\|F\|_{L^q(\mu)} = \left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^{p-1},$$

и по теореме Фубини и неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^p &= \int G(t) d\mu(t) \int F(x, t) d\nu(x) = \\ &= \int d\nu(x) \int G(t) F(x, t) d\mu(t) \leq \int \|G(t)\|_{L^q(\mu)} \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x) = \\ &= \|G\|_{L^p(\mu)} \int \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x). \end{aligned}$$

Сокращая на $\|G\|_{L^p(\mu)}$, получаем неравенство Минковского.

Применяя неравенство Минковского к (3.4), получаем

$$(3.5) \quad \left(\int |u(x, y)|^p dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

если $u(x, y) = P_y * f(x)$, $f \in L^p$. Аналогично

$$(3.6) \quad \int |u(x, y)| dx \leq \int |d\mu|,$$

если $u(x, y) = (P_y * \mu)(x) = \int P_y(x-t) d\mu(t)$, μ — конечная мера на $\mathbb{R}$. При $p = \infty$ оценка (3.5) тоже справедлива и вытекает из свойства (i) ядра Пуассона.

Теорема 3.1. (a) Если $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, то $\|P_y * f - f\|_p \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$).

(b) Если $f \in L^\infty$, то $P_y * f$ сходится при $y \rightarrow 0$ к f в слабой L^1 -топологии пространства L^∞ .

(c) Если μ — конечная мера на $\mathbb{R}$, то меры $(P_y * \mu)(x) dx$ сходятся при $y \rightarrow 0$ к μ в слабой топологии пространства мер.

(d) Если f ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то $P_y * f$ при $y \rightarrow 0$ сходится к f равномерно.

Утверждение (b) означает, что для всех $g \in L^1$

$$\int g(x) (P_y * f)(x) dx \rightarrow \int g(x) f(x) dx, \quad y \rightarrow 0.$$

Аналогично утверждение (c) означает, что

$$\int g(x) (P_y * \mu)(x) dx \rightarrow \int g(x) d\mu(x), \quad y \rightarrow 0,$$

для всех $g \in C_0(\mathbb{R})$ (т. е. для всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, равных нулю в бесконечности).

Согласно теореме 3.1, функция $f \in L^p$ однозначно определяется гармонической функцией $u(z) = (P_y * f)(x)$ — ее интегралом Пуассона, и то же самое верно для меры μ . Кроме того, из (a) или (b) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|P_y * f\|_p = \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Заметим, что ввиду (3.5) и (vii) функция $y \rightarrow \|P_y * f\|_p$ монотонна.

Доказательство теоремы 3.1 опирается на неравенство Минковского и на непрерывность сдвигов в L^p , $1 \leq p < \infty$: если $f_x(t) = f(t - x)$, то $\|f_x - f\|_p \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) (чтобы это установить, достаточно приблизить f по L_p -норме функцией из $C_0(\mathbb{R})$). Ни в L^∞ , ни в пространстве конечных мер сдвиги уже не будут непрерывными; поэтому предложения (b) и (c) несколько слабее. В пространстве равномерно непрерывных функций сдвиги, конечно, непрерывны по норме; по этой причине выполняется (d).

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, причем для $p = \infty$ будем дополнительно считать, что функция f равномерно непрерывна. Тогда

$$\|P_y * f - f\|_p = \left\| \int P_y(t) [f(x-t) - f(x)] dt \right\|_p \leq \int P_y(t) \|f_t - f\|_p dt.$$

При любом $\delta > 0$

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \int_{|t| < \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt + \int_{|t| > \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt.$$

Но сдвиги непрерывны в L^p , а $\int_{|t| < \delta} P_y(t) dt \leq \int P_y(t) dt = 1$,

и поэтому $\int_{|t| < \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt$ сколь угодно мал при достаточно малом δ .
С другой стороны, при любом $\delta > 0$

$$\int_{|t| > \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt \leq 2 \|f\|_p \int_{|t| > \delta} P_y(t) dt \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0)$$

ввиду свойства (vi) ядер Пуассона. Следовательно, $\|P_y * f - f\| \rightarrow 0$, и предложения (a) и (d) доказаны. Предложения (b) и (c) следуют из (a) и (d) по соображениям двойственности. $\square$

Следствие 3.2. Если f ограничена и равномерно непрерывна и если

$$u(x, y) = \begin{cases} (P_y * f)(x), & y > 0, \\ f(x), & y = 0, \end{cases}$$

то функция $u(x, y)$ гармонична в $\mathcal{H}$ и непрерывна в $\overline{\mathcal{H}}$.

Это следствие вытекает из предложения (d). Локальный вариант следствия 3.2 дается следующей леммой.

Лемма 3.3. Пусть $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, и $u(x, y) = (P_y * f)(x)$. Если f непрерывна в точке x_0 , то

$$\lim_{(x, y) \rightarrow x_0} u(x, y) = f(x_0).$$

Доказательство. При любом $\delta > 0$

$$|u(x, y) - f(x_0)| \leq \int_{|t| < \delta} P_y(t) |f(x-t) - f(x_0)| dt + \int_{|t| > \delta} \dots$$

Но $\int_{|t| > \delta} P_y(t) dt$ стремится к 0 при $y \rightarrow 0$ при каждом δ , а $\int_{|t| < \delta} P_y(t) dt$ сколь угодно мал при достаточно малых δ и $|x - x_0|$. $\square$

Отметим, что сходимость будет равномерной на любом подмножестве $E \subset \mathbb{R}$, на котором f ограничена и в точках которого непрерывность f равномерна.

Мы скоро увидим, что неравенства (3.5), (3.6) полностью характеризуют интегралы Пуассона L^p -функций и мер. Для доказательства этого важного факта нам нужна следующая лемма.

Лемма 3.4. Если $u(z)$ гармонична в $\mathcal{H}$ и ограничена и непрерывна в $\overline{\mathcal{H}}$, то

$$u(z) = \int P_y(x-t) u(t) dt.$$

Доказательство. Заметим, что u может не быть непрерывной в ∞ , поэтому лемма нетривиальна.

Пусть

$$U(z) = u(z) - \int P_y(x-t) u(t) dt.$$

Функция U гармонична в $\mathcal{H}$, ограничена и непрерывна в $\overline{\mathcal{H}}$ и по лемме 3.3 $U \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. Положим

$$V(z) = \begin{cases} U(z), & y \geq 0, \\ -U(\bar{z}), & y < 0. \end{cases}$$

Функция V ограничена и непрерывна во всей плоскости. Значение V в любой точке z_0 равно ее среднему значению по окружности с центром z_0 и достаточно малым радиусом (для точек $\mathbb{R}$ это очевидно по определению, а для остальных вытекает из гармоничности U). Поэтому функция V гармонична во всей плоскости и по теореме Лиувилля должна быть постоянной, $V(z) \equiv V(0) = 0$. Следовательно, $U \equiv 0$. $\square$

Теорема 3.5. Пусть u — гармоническая функция в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. Тогда

(а) u является интегралом Пуассона функции из L^p , $1 < p \leq \infty$, в том и только том случае, когда

$$(3.7) \quad \sup_y \|u(x, y)\|_{L^p(dx)} < \infty.$$

(б) u является интегралом Пуассона конечной меры в том и только том случае, когда

$$(3.8) \quad \sup_y \|u(x, y)\|_{L^1(dx)} < \infty.$$

(с) u положительна в том и только том случае, когда

$$u(z) = cy + \int P_y(x-t) d\mu(t),$$

где $c \geq 0$ и μ — положительная мера на $\mathbb{R}$, для которой

$$\int \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty.$$

Доказательство. Мы уже отмечали необходимость условий (3.7) и (3.8). Пусть теперь (3.7) или (3.8) выполняется. Покажем, что

$$(3.9) \quad |u(z)| \leq \left(\frac{2}{\pi y}\right)^{1/p} \sup_{\eta > 0} \|u(x, \eta)\|_{L^p(dx)}.$$

По неравенству Гёльдера при $\zeta = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \frac{1}{\pi y^2} \left| \iint_{\Delta(z, y)} u(\zeta) d\xi d\eta \right| \leq \left(\frac{1}{\pi y^2} \iint_{\Delta(z, y)} |u(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi y^2} \int_0^{2y} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi + i\eta)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq \left(\frac{2}{\pi y} \right)^{1/p} \sup_{\eta > 0} \|u(x, \eta)\|_{L^p(dx)}. \end{aligned}$$

Ввиду (3.9) наша функция u ограничена во всякой полуплоскости $y > y_n > 0$ и по лемме 3.4

$$u(z + iy_n) = \int P_y(x - t) u(t + iy_n) dt.$$

Пусть теперь $y_n \searrow 0$. Последовательность функций $f_n(t) = u(t + iy_n)$ ограничена в L^p . При $1 < p \leq \infty$ по теореме Банаха — Алаоглу (замкнутый единичный шар пространства, сопряженного к банахову пространству, компактен в слабой топологии) последовательность $\{f_n\}$ имеет слабую предельную точку $f \in L^p$. Но все ядра Пуассона лежат в сопряженном пространстве L^q , $q = p/(p-1)$, и поэтому

$$u(z) = \lim_n u(z + iy_n) = \lim_n \int P_y(x - t) f_n(t) dt = \int P_y(x - t) f(t) dt.$$

Тем самым (а) доказано. Доказательство (b) точно такое же, но теперь уже меры $u(t + iy_n) dt$ слабо сходятся к некоторой конечной мере μ .

Для доказательства (с) мы перейдем в круг D и воспользуемся там аналогом предложения (b). Если гармоническая функция $u(z)$ в D положительна, то

$$\frac{1}{2\pi} \int |u(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int u(re^{i\theta}) d\theta = u(0) < \infty,$$

и, согласно (b) (точнее, согласно аналогу (b) для круга с тем же доказательством), функция u есть интеграл Пуассона в D некоторой положительной конечной меры ν на ∂D (положительной, так как ν — слабый предел положительных мер $u(r_n e^{i\theta}) d\theta$). Таким образом, аналог предложения (с) для круга доказан. Теперь отображим D на $\mathcal{H}$ по формуле $w \rightarrow z(w) = i(1 - w)/(1 + w)$. Если u — функция в $\mathcal{H}$ из предложения (с), то функция $u(z(w))$ будет положительной и гармонической в D и, следовательно, интегралом Пуассона положительной меры ν на ∂D . Если мера ν целиком сосредоточена в точке $w = -1$, то

$$\begin{aligned} u(z(w)) &= \nu(\{-1\}) P_w(-1) = \nu(\{-1\}) \frac{1 - |w|^2}{|1 + w|^2} = \\ &= \nu(\{-1\}) \operatorname{Im} z = \nu(\{-1\}) y. \end{aligned}$$

Если же, напротив, $\nu(\{-1\}) = 0$, то при отображении $w \rightarrow z$ ν перейдет в конечную положительную меру $\tilde{\nu}$ на $\mathbb{R}$, а так как при $t = z(e^{i\theta})$

$$P_w(\theta) = \pi(1 + t^2) P_z(t),$$

то

$$u(z) = \int P_y(x - t) d\mu(t),$$

где $\mu = \pi(1 + t^2)\tilde{\nu}$. Общий случай есть сумма двух рассмотренных. $\square$

Все результаты этого раздела справедливы и в круге D , где их несколько легче доказать. Большинство результатов останется в силе, если заменить семейство $\{P_y(t)\}_{y>0}$ какой-нибудь другой аппроксимативной единицей. Пусть семейство $\{\varphi_y(t)\}_{y>0}$ интегрируемых функций на $\mathbb{R}$ таково, что

$$(a) \int \varphi_y(t) dt = 1,$$

$$(b) \|\varphi_y\|_{L^1} \leq M < \infty,$$

$$(c) \lim_{y \rightarrow 0} \sup_{|t| > \delta} |\varphi_y(t)| = 0 \text{ для любого } \delta > 0,$$

$$(d) \lim_{y \rightarrow 0} \int_{|t| > \delta} |\varphi_y(t)| dt = 0 \text{ для любого } \delta > 0.$$

Читатель легко проверит, что теорема 3.1 и ее следствия остаются в силе, если $\{P_y * f\}$ заменить на $\{\varphi_y * f\}$.

4. Максимальная функция Харди — Литтлвуда

С каждой функцией f на $\mathbb{R}$ мы свяжем две вспомогательные функции. Первая измеряет величину f , а вторая — поведение ее интеграла Пуассона. Первую вспомогательную функцию можно определить для измеримой функции f на произвольном пространстве с мерой (X, μ) . Это *функция распределения*

$$m(\lambda) = \mu(\{x \in X: |f(x)| > \lambda\}),$$

определенная при $\lambda > 0$. Функция распределения $m(\lambda)$ — убывающая функция от λ — определяет L^p -нормы f . Если $f \in L^\infty$, то $m(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq \|f\|_\infty$ и $m(\lambda) > 0$ при $\lambda < \|f\|_\infty$, так что

$$\|f\|_\infty = \sup\{\lambda: m(\lambda) > 0\}.$$

Лемма 4.1. Если (X, μ) — пространство с мерой, $f(x)$ измерима и $0 < p < \infty$, то

$$(4.1) \quad \int |f|^p d\mu = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\lambda) d\lambda.$$

Доказательство. Мы можем считать, что f обращается в 0 вне множества σ -конечной меры, так как иначе обе части (4.1) бесконечны. Тогда теорема Фубини показывает, что обе части (4.1) равны мере подграфика $\{(x, \lambda): 0 < \lambda < |f(x)|^p\}$, а именно

$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu &= \int \int_0^{|f|} p\lambda^{p-1} d\lambda d\mu = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mu\{|f| > \lambda\} d\lambda = \\ &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\lambda) d\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

Нам еще понадобится простая оценка $m(\lambda)$, известная как *неравенство Чебышева*. Пусть $f \in L^p$, $0 < p < \infty$, и

$$E_\lambda = \{x \in X: |f(x)| > \lambda\},$$

так что $\mu(E_\lambda) = m(\lambda)$. Неравенство Чебышева гласит:

$$m(\lambda) \leq \|f\|_p^p / \lambda^p,$$

Оно вытекает из следующего наблюдения:

$$\lambda^p \mu(E_\lambda) \leq \int_{E_\lambda} |f|^p d\mu \leq \|f\|_p^p.$$

Функция f , такая, что $m(\lambda) \leq A/\lambda^p$, называется *функцией из слабого пространства L^p* . Таким образом, неравенство Чебышева утверждает, что всякая L^p -функция будет и функцией из слабого L^p . Функция $|x \log x|^{-1}$ на $[0, 1]$ не входит в L^1 , но для нее $m(\lambda) = o(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$, и, значит, это функция из слабого L^1 .

Другую вспомогательную функцию мы определим только для функций на $\mathbb{R}$. Напомним теорему Лебега о том, что если $f(x)$ локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$(4.2) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{h+k} \int_{x-h}^{x+k} f(t) dt = f(x)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Чтобы сделать теорему Лебега количественным утверждением, заменим в (4.2) предел точной верхней гранью и введем под знак интеграла абсолютную величину $|f|$. Длину интервала I будем обозначать через $|I|$. *Максимальная функция Харди — Литтлвуда* для локально интегрируемой функции f на $\mathbb{R}$ — это

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt.$$

Если $f \in L^p$, $p \geq 1$, то $Mf(x) < \infty$ почти всюду. Это следует из теоремы Лебега, но скоро мы увидим и другое доказательство в теореме 4.3. Важное свойство Mf состоит в том, что она мажорирует многие другие функции, связанные с f .

Теорема 4.2. Для $\alpha > 0$ и $t \in \mathbb{R}$ пусть $\Gamma_\alpha(t)$ — сектор в $\mathcal{H}$ с вершиной t и углом раствора $2 \arctg \alpha$, изображенный на рис. 1.3:

$$\Gamma_\alpha(t) = \{(x, y): |x - t| < \alpha y, 0 < y < \infty\}.$$

Пусть $f \in L^1(dt/(1+t^2))$, и пусть $u(x, y)$ — интеграл Пуассона для f ,

$$u(x, y) = \int P_y(s) f(x - s) ds.$$

Тогда

$$(4.3) \quad \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(x, y)| \leq A_\alpha Mf(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где A_α — постоянная, зависящая только от α .

Условие $f \in L^1(dt/(1+t^2))$ гарантирует сходимость интеграла $\int P_y(s) f(x-s) ds$.

Доказательство. Мы можем считать, что $t = 0$. Рассмотрим сначала точки $(0, y)$ на оси сектора $\Gamma_\alpha(0)$. Тогда

$$u(0, y) = \int P_y(s) f(s) ds,$$

причем ядро $P_y(s)$ — положительная четная функция, убывающая при положительных s . Это означает, что $P_y(s)$ является

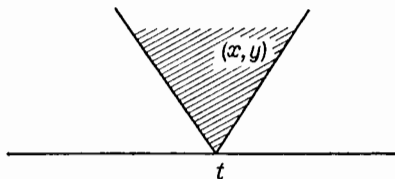


Рис. I.3. Сектор $\Gamma_\alpha(t)$, $\alpha = 2/3$.

выпуклой комбинацией площадок $(1/2h)\chi_{(-h, h)}(s)$, которые входят в определение Mf . Выберем ступенчатые функции $h_n(s)$, тоже неотрицательные, четные и не возрастающие при $s > 0$ так, чтобы $h_n(s)$ с ростом n стремились, возрастая, к $P_y(s)$. Тогда $h_n(s)$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^N a_j \chi_{(-x_j, x_j)}(s),$$

где $a_j \geq 0$ и $\int h_n ds = \sum_j 2a_j x_j \leq 1$. См. рис. I.4. Стало быть,

$$\begin{aligned} \left| \int h_n(s) f(s) ds \right| &\leq \int h_n(s) |f(s)| ds \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N 2a_j x_j \frac{1}{2x_j} \int_{-x_j}^{x_j} |f(s)| ds \leq Mf(0). \end{aligned}$$

Ввиду монотонной сходимости

$$|u(0, y)| \leq \int P_y(s) |f(s)| ds \leq Mf(0).$$

Фиксируем теперь $(x, y) \in \Gamma_\alpha(0)$. Тогда $|x| < \alpha y$ и $P_y(x-s)$ мажорируется положительной четной функцией $\psi(s)$, убываю-

шей при $s > 0$ и такой, что

$$\int \psi(s) ds \leq A_a = 1 + \frac{2a}{\pi}.$$

Эта функция есть $\psi(s) = \sup \{P_y(x-t) : |t| > s\}$. Приближая $\psi(s)$ снизу ступенчатыми функциями $h_n(s)$, мы имеем, как и раньше,

$$\int \psi(s) |f(s)| ds \leq A_a Mf(0),$$

$$|u(x, y)| \leq \int \psi(s) |f(s)| ds \leq A_a Mf(0),$$

а это и есть (4.3). $\square$

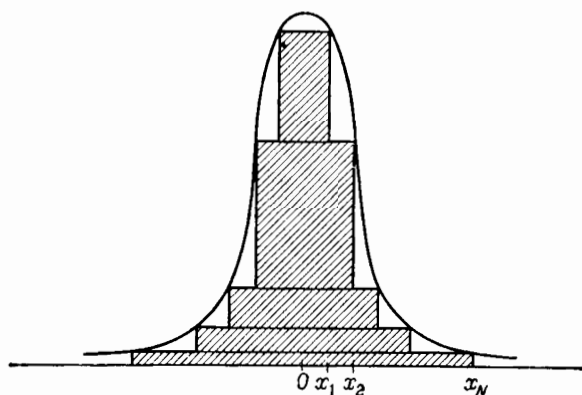


Рис. I. 4. Ядро $P_y(s)$ и его приближение $h_n(s)$ положительной комбинацией площадок $(1/2x_j)\chi_{(-x_j, x_j)}(s)$.

Теорема 4.2 с тем же доказательством остается в силе и для интегралов Пуассона функций на ∂D , когда сектор заменяется областью

$$\Gamma_a(e^{i\varphi}) = \left\{ z : \frac{|e^{i\varphi} - z|}{1 - |z|} < a, |z| < 1 \right\}, \quad a > 1,$$

которая при $z \rightarrow e^{i\varphi}$ асимптотически близка к углу с вершиной $e^{i\varphi}$. Это весьма общая теорема. Ее доказательство показывает, что $P_y(x-s)$ можно заменить любым ядром $\varphi_y(x-s)$, ограниченным положительной четной функцией $\psi(s)$, зависящей от (x, y) , убывающей при $s > 0$ и такой, что $\int \psi(s) ds \leq A_a$ при $(x, y) \in \Gamma_a(t)$ (см. Стейн [1970]).

Максимальная теорема Харди — Литтлвуда — это следующее утверждение.

Теорема 4.3. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то $Mf(t)$ почти всюду конечна.

(а) Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то Mf из слабого L^1 ,

$$|\{t \in \mathbb{R}: Mf(t) > \lambda\}| \leq (2/\lambda) \|f\|_1, \lambda > 0.$$

(б) Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq \infty$, то $Mf \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

где A_p зависит только от p .

В (а) мы обозначили через $|E|$ меру Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$. Тот факт, что $Mf < \infty$ почти всюду, следует из (а) или (б). Условие (а) означает, что оператор M — слабого типа $(1-1)$. Неравенство слабого типа в (а) — наилучший возможный результат для Mf при $f \in L^1$. Заметим, что Mf не может лежать в L^1 для $f \not\equiv 0$, потому что при больших x

$$Mf(x) \geq \frac{1}{4x} \int_{-x}^{3x} |f(t)| dt \geq \frac{c}{x},$$

если $\|f\|_1 \neq 0$. Если функция f сосредоточена на конечном интервале I , то

$$\int_I Mf(t) dt < \infty \text{ тогда и только тогда, когда } \int_I |f| \log^+ |f| dt < \infty;$$

доказательство мы оставляем в качестве упражнения. Полагая $f(t) = (1/h) \chi_{(0, h)}(t)$, $h \rightarrow 0$, легко видеть, что постоянную в (а) нельзя улучшить.

Доказательство теоремы 4.3 использует две дополнительные теоремы: в части (а) — лемму Витали о покрытиях и в части (б) — интерполяционную теорему Марцинкевича.

Лемма 4.4. Пусть μ — положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$ и $\{I_1, \dots, I_n\}$ — конечное семейство открытых интервалов в $\mathbb{R}$. Существует его подсемейство $\{J_1, \dots, J_m\}$, такое, что J_j попарно не пересекаются и

$$\sum_{j=1}^m \mu(J_j) \geq \frac{1}{2} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right).$$

Доказательство. По индукции можно заменить семейство $\{I_1, \dots, I_n\}$ таким его подсемейством с тем же самым объединением, что никакой интервал I_k не содержится в объединении остальных. Пусть I_k в этом подсемействе имеет вид (α_k, β_k) ; перенумеруем эти интервалы так, чтобы

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n.$$

Тогда $\beta_{k+1} > \beta_k$, так как в противном случае $I_{k+1} \subset I_k$. Кроме того, $\alpha_{k+1} > \beta_{k-1}$, так как иначе $I_k \subset I_{k-1} \cup I_{k+1}$. Значит, интервалы с четными и интервалы с нечетными номерами образуют подсемейства без попарных пересечений. Но

$$\sum_{k \text{ четно}} \mu(I_k) + \sum_{k \text{ нечетно}} \mu(I_k) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right),$$

и в качестве $\{J_i\}$ мы выбираем интервалы с четными или нечетными номерами, смотря по тому, какая из сумм больше. $\square$

Доказательство теоремы 4.3(a). Пусть $f \in L^1$ и $\lambda > 0$. Множество $E_\lambda = \{t: Mf(t) > \lambda\}$ открыто и, следовательно, измеримо. Для любого $t \in E_\lambda$ найдется открытый интервал I , содержащий t , для которого

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f| ds > \lambda,$$

и это то же самое, что

$$(4.4) \quad |I| < \frac{1}{\lambda} \int_I |f| ds.$$

Пусть K — компактное подмножество множества E_λ ; покроем K конечным числом интервалов $I_1, \dots, I_n$, удовлетворяющих (4.4). Применение леммы 4.4 к $\{I_1, \dots, I_n\}$ даст нам попарно непересекающиеся интервалы $J_1, \dots, J_m$, удовлетворяющие (4.4) и такие, что

$$\left| \bigcup_{k=1}^n I_k \right| \leq 2 \sum_{j=1}^m |J_j|.$$

Теперь

$$|K| \leq \left| \bigcup_{k=1}^n I_k \right| \leq 2 \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{J_j} |f| ds \leq \frac{2}{\lambda} \int |f| ds.$$

Заставляя $|K|$, возрастая, стремиться к $|E_\lambda|$, мы получим (a). $\square$

Доказательство части (b) основано на интерполяционной теореме Марцинкевича.

Теорема 4.5. Пусть (X, μ) и (Y, ν) — пространства с мерой, $1 < p_1 \leq \infty$. Предположим, что T — отображение $L^1(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ в множество ν -измеримых функций, такое, что

$$(i) \quad |T(f+g)(y)| \leq |Tf(y)| + |Tg(y)|;$$

$$(ii) \quad \nu\{y: |Tf(y)| > \lambda\} \leq (A_0/\lambda) \|f_1\|, \quad f \in L^1;$$

$$(iii) \quad \nu\{y: |Tf(y)| > \lambda\} \leq ((A_1/\lambda) \|f\|_{p_1})^{p_1}, \quad f \in L^{p_1}$$

(при $p_1 = \infty$ мы предполагаем, что $\|Tf\|_\infty \leq A_1 \|f\|_\infty$).

Тогда при $1 < p < p_1$

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad f \in L^p.$$

где A_p зависит только от A_0, A_1, p_1 и p .

Предположение, что область определения отображения T есть $L^1(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$, нужно только для уверенности в том, что Tf определено при всех $f \in L^p$, $1 \leq p \leq p_1$. Для $f \in L^p$ положим $f = f\chi_{\{|f|>1\}} + f\chi_{\{|f|\leq 1\}} = f + f_1$. Тогда $|f_0| \leq |f|^p \in L^1$ и $|f_1| \leq |f|^{p/p_1} \in L^{p_1}$.

Прежде чем доказывать нашу теорему, докажем с ее помощью оставшуюся часть (b) максимальной теоремы Харди — Литтлвуда.

Доказательство теоремы 4.3 (b). В этом случае оба пространства с мерой суть $(\mathbb{R}, dx)$. Ясно, что оператор M удовлетворяет условию субаддитивности (i). Условие (ii) мы доказали как часть (a) теоремы Харди — Литтлвуда. Возьмем $p_1 = \infty$; условие (iii) будет выполнено с $A_1 = 1$. Теперь теорема Марцинкевича утверждает, что

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad 1 < p \leq \infty,$$

что и сказано в части (b) теоремы 4.3. Конечно, отсюда следует, что $Mf < \infty$ почти всюду. $\square$

Доказательство теоремы 4.5. Зафиксируем $f \in L^p$, $1 < p < p_1$, и $\lambda > 0$. Пусть $E_\lambda = \{y: |Tf(y)| > \lambda\}$. Мы получим сильную оценку для $\nu(E_\lambda)$ и затем воспользуемся леммой 4.1, чтобы оценить $\|Tf\|_p$. Остроумная идея Марцинкевича состоит в том, чтобы расщепить f на уровне $\lambda/2A_1$. Положим

$$f_0 = f\chi_{\{|f(x)| > \lambda/2A_1\}}, \quad f_1 = f\chi_{\{|f(x)| \leq \lambda/2A_1\}}.$$

Тогда $|Tf(y)| \leq |Tf_0(y)| + |Tf_1(y)|$, $E_\lambda \subset B_\lambda \cup C_\lambda$, где

$$B_\lambda = \{y: |Tf_0(y)| > \lambda/2\}, \quad C_\lambda = \{y: |Tf_1(y)| > \lambda/2\}.$$

Теперь по (ii)

$$\nu(B_\lambda) \leq 2 \frac{A_0}{\lambda} \|f_0\|_1 \leq 2 \frac{A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/2A_1} |f| d\mu.$$

Чтобы оценить $\nu(C_\lambda)$, рассмотрим два случая. Если $p_1 = \infty$, то $\|f\|_\infty < \lambda/2A_1$ и по (iii) $C_\lambda = \emptyset$. (Это объясняет появление A_1 в определении f_0 и f_1). Если $p_1 < \infty$, то по (iii)

$$\nu(C_\lambda) \leq \left(\frac{2}{\lambda} A_1 \|f_1\|_{p_1} \right)^{p_1} \leq \frac{(2A_1)^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{|f| \leq \lambda/2A_1} |f|^{p_1} d\mu.$$

Теперь учтем, что $v(E_\lambda) \leq v(B_\lambda) + v(C_\lambda)$, и применим лемму 4.1. Случай $p_1 = \infty$ легкий:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} v(E_\lambda) d\lambda \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left(\frac{2A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/2A_1} |f| d\mu \right) d\lambda \leq \\ &\leq 2A_0 p \int |f| \int_0^{2A_1|f|} \lambda^{p-2} d\lambda d\mu = 2^p \frac{A_0 A_1^{p-1} p}{p-1} \int |f|^p d\mu, \end{aligned}$$

потому что $p-2 > -1$. Стало быть, $Tf \in L^p$. Если $p_1 < \infty$, то появится дополнительный вклад от $v(C_\lambda)$:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left(\frac{2A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/2A_1} |f| d\mu \right) d\lambda + \\ &+ \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \frac{(2A_1)^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{|f| \leq \lambda/2A_1} |f|^{p_1} d\mu d\lambda. \end{aligned}$$

Первый интеграл мы уже оценили в доказательстве случая $p_1 = \infty$. Второй интеграл равен

$$(2A_1)^{p_1} p \int |f|^{p_1} \int_{2A_1|f|}^\infty \lambda^{p-p_1-1} d\lambda d\mu = \frac{(2A_1)^{p_1} p}{p_1 - p} \int |f|^{p_1} d\mu,$$

так как $p - p_1 - 1 < -1$. Вместе эти оценки дают

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \text{ где } A_p \leq 2^p A_1^{p-1} \left(\frac{A_0 p}{p-1} + \frac{A_1 p}{p_1 - p} \right),$$

что доказывает теорему. $\square$

Интересно, что при $p \rightarrow 1$ $A_p \leq A/(p-1)$ при некотором A , и если $p_1 = \infty$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p \leq A_1$. Для максимальной функции мы получаем $A_p^p \leq p 2^{p+1}/(p-1)$.

Другие разбиения $f = f_0 + f_1$ дают более точные оценки зависимости A_p от A_0 и A_1 (см. Зигмунд [1968], гл. XII).

5. Некасательная максимальная функция и теорема Фату

Пусть $\alpha > 0$; рассмотрим секторы

$$\Gamma_\alpha(t) = \{z \in \mathcal{H}: |x - t| < \alpha y\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Некасательной максимальной функцией для гармонической в $\mathcal{H}$ функции u называется функция

$$u^*(t) = \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Значение u^* зависит от параметра α , но, поскольку α фиксировано, мы будем пренебрегать этим обстоятельством.

Теорема 5.1. Пусть $u(z)$ гармонична в $\mathcal{H}$ и $1 \leq p < \infty$. Пусть

$$\sup_y \int |u(x + iy)|^p dx < \infty.$$

Если $p > 1$, то $u^*(t) \in L^p$ и

$$(5.1) \quad \|u^*\|_p^p \leq B_p \sup_y \int |u(x + iy)|^p dx.$$

Если $p = 1$, то u^* входит в слабое L^1 и

$$(5.2) \quad |\{t: |u^*(t)| > \lambda\}| \leq \frac{B_1}{\lambda} \sup_y \int |u(x + iy)| dx.$$

Постоянные B_p зависят только от p и α .

Доказательство. Пусть $p > 1$. Тогда $u(z)$ есть интеграл Пуассона некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$\|f\|_p \leq \sup_y \left(\int |u(x + iy)|^p dx \right)^{1/p}.$$

По теореме 4.2 $u^*(t) \leq A_\alpha Mf(t)$ и теорема Харди — Литтлвуда дает (5.1).

Если $p = 1$, то мы знаем только, что $u(z)$ — интеграл Пуассона конечной меры μ на $\mathbb{R}$ и что

$$\int |d\mu| \leq \sup_y \int |u(x + iy)| dx,$$

так как μ является слабым пределом мер $u(x + iy)dx$ при $y \rightarrow 0$. Положим

$$M(d\mu)(t) = \sup_{t \in I} \frac{|\mu|(I)}{|I|}.$$

Доказательство теоремы 4.2 показывает, что $u^*(t) \leq A_\alpha M(d\mu)(t)$. А доказательство теоремы 4.3(a) показывает, что $M(d\mu)(t)$ есть функция из слабого L^1 и

$$|\{t: M(d\mu)(t) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int |d\mu|.$$

Значит, (5.2) выполняется в случае $p = 1$. $\square$

Некасательная максимальная функция u^* будет важнее для нас, чем максимальная функция Харди — Литтлвуда Mf . Следующее предложение приведено для того, чтобы подчеркнуть силу теоремы 5.1.

Следствие 5.2. Если $u(z)$ гармонична в $\mathcal{H}$, а $p > 1$, то

$$\int \sup_y |u(x + iy)|^p dx \leq B_p \sup_y \int |u(x + iy)|^p dx.$$

Отметим, что следствие 5.2 при $p = 1$ неверно. Пусть $u(x, y) = P_y * f(x)$, $f \in L^1$, $f \geq 0$. Тогда $\sup_y |u(x, y)| \geq Mf(x)$, но $Mf \notin L^1$.

Теорема 5.3 (Фату). Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в $\mathcal{H}$ и $1 \leq p \leq \infty$. Предположим, что

$$\sup_y \|u(x + iy)\|_{L^p(dx)} < \infty.$$

Тогда при почти всех t существует некасательный предел

$$\lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \rightarrow t} u(z) = f(t).$$

Если $p > 1$, то $u(z)$ есть интеграл Пуассона своих граничных значений $f(t)$ и при $1 < p < \infty$

$$\|u(x + iy) - f(x)\|_p \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

Если $p = 1$, то $u(z)$ есть интеграл Пуассона конечной меры μ на $\mathbb{R}$, связанной с граничным значением $f(t)$ формулой $d\mu = f(t)dt + dv$, где dv сингулярна относительно меры Лебега.

Доказательство. Пусть сначала $1 \leq p < \infty$, и пусть $u(z)$ — интеграл Пуассона функции $f \in L^p$. Мы покажем, что $u(z)$ имеет некасательный предел $f(t)$ при почти всех t . Можно считать функцию f вещественной. Положим

$$\Omega_f(t) = \overline{\lim}_{z \rightarrow t} u(z) - \lim_{z \rightarrow t} u(z), \quad z \in \Gamma_\sigma(t).$$

По максимальной теореме $\Omega_f(t) \leq 2u^*(t) \leq 2A_\alpha Mf(t)$, и как Ω_f , так и верхний и нижний пределы в отдельности конечны почти всюду. Функция $\Omega_f(t)$ представляет собой некасательное колебание функции u в точке t , и u имеет некасательный предел в t тогда и только тогда, когда $\Omega_f(t) = 0$.

По теореме 5.1 и неравенству Чебышева при $p > 1$

$$(5.3) \quad |\{t: \Omega_f(t) > \varepsilon\}| \leq B_p \left(\frac{2}{\varepsilon} \|f\|_p \right)^p.$$

Если теперь $g \in L^p$ и, кроме того, $g \in C_0(\mathbb{R})$, то по теореме 3.1 $\Omega_g = 0$ при всех t и, стало быть, $\Omega_f = \Omega_{f+g}$. Выберем такое $g \in C_0(\mathbb{R})$, чтобы $\|f + g\|_p \leq \varepsilon^2$. Тогда

$$|\{t: \Omega_f(t) > \varepsilon\}| = |\{t: \Omega_{f+g}(t) > \varepsilon\}| \leq B_p \left(\frac{2}{\varepsilon} \|f + g\|_p \right)^p \leq c_p \varepsilon^p.$$

Следовательно, $\Omega_f(t) = 0$ почти всюду и u имеет некасательный предел почти всюду. Этот предел почти всюду совпадает с $f(t)$.

потому что $u(x+iy)$ сходится к $f(x)$ в L^p . Это доказывает теорему в случае $1 < p < \infty$, а также и в случае $p = 1$ при условии, что $u(z)$ есть интеграл Пуассона функции из L^1 .

Пусть $p = \infty$, а $u(z) = (P_y * f)(x)$, $f \in L^\infty$. Пусть $A > 0$ и $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_2 = 0$ на $(-A, A)$ и $f_1 \in L^1$. Тогда $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_j(z) = (P_y * f_j)(x)$, $j = 1, 2$. Уже было доказано, что $u_1(z)$ почти всюду имеет некасательный предел $f_1(t)$, а по лемме 3.3 $f_2(t) = 0$ всюду на $(-A, A)$ является пределом $u_2(z)$. Устремляя A к ∞ , мы получим нужный результат для $p = \infty$.

Наконец, пусть $p = 1$ и $\sup_y \|u(x+iy)\|_{L^1(dx)} < \infty$. Тогда $u(z)$ есть интеграл Пуассона конечной меры μ на $\mathbb{R}$. Пусть $d\mu = f(t)dt + dv$, где dv сингулярна относительно меры Лебега. Положим $u_1(z) = (P_y * f)(x)$, $u_2(z) = (P_y * v)(x)$. Тогда $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$. Выше было показано, что $u_1(z)$ почти всюду имеет некасательный предел $f(t)$. Так как v сингулярна, то следующая лемма показывает, что $u_2(z)$ имеет почти всюду некасательный предел 0, что и заканчивает доказательство. $\square$

Лемма 5.4. Если v — сингулярная конечная мера на $\mathbb{R}$, то $(P_y * v)(x)$ почти всюду некасательно стремится к 0.

Доказательство. Можно считать, что $v \geq 0$. Так как v сингулярна, то

$$(5.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v((t-h, t+h))}{2h} = 0$$

для почти всех t по мере Лебега. В самом деле, если (5.4) неверно, то можно выбрать компактное множество K , такое, что $|K| > 0$, $v(K) = 0$ и

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{v((t-h, t+h))}{2h} > a > 0, \quad t \in K.$$

Покроем K конечным числом интервалов I_j так, чтобы $v(\cup I_j) < \varepsilon$ и $v(I_j) > a|I_j|$. По лемме о покрытиях 4.4 из $\{I_j\}$ можно выбрать непересекающиеся интервалы $\{J_i\}$ так, чтобы

$$|K| \leq 2 \sum |J_i| < \frac{2}{a} \sum v(J_i) < \frac{2\varepsilon}{a},$$

что невозможно при достаточно малом ε .

Пусть теперь (5.4) выполняется для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Пусть $z \in \Gamma_\alpha(t)$, и для простоты пусть $\operatorname{Re} z = t$. Так как $v \geq 0$, то

$$(P_y * v)(t) = \int_{|s-t| < Ay} P_y(t-s) dv(s) + \int_{|s-t| \geq Ay} P_y(t-s) dv(s).$$

Второй интеграл не превосходит $(\pi A^2 y)^{-1} \int dv$. Если мы при-

близим $P_y(s)\chi_{\{|s| < Ay\}}(s)$ снизу четными ступенчатыми функциями, как в доказательстве теоремы 4.2, то увидим, что

$$\int_{|s-t| < Ay} P_y(t-s) dv(s) \leq \sup_{h < Ay} \frac{v((t-h, t+h))}{2h}.$$

Выбирая $A = A(y)$ так, чтобы при $y \rightarrow 0$ было $Ay \rightarrow 0$, но $A^2y \rightarrow \infty$, мы получим $P_y * v(t) \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$). Оценки в случае $|x-t| < \alpha y$ совершенно такие же, и мы оставляем их читателю. $\square$

Положительная мера σ на $\mathcal{H}$ называется *мерой Карлесона*, если существует такая постоянная $N(\sigma)$, что

$$(5.5) \quad \sigma(Q) \leq N(\sigma)h$$

для всех квадратов

$$Q = \{x_0 < x < x_0 + h, 0 < y < h\}.$$

Наименьшая такая постоянная $N(\sigma)$ называется *нормой Карлесона* меры σ .

Лемма 5.5. Пусть σ — положительная мера на $\mathcal{H}$ и $\alpha > 0$. Мера σ является мерой Карлесона тогда и только тогда, когда существует такое число $A = A(\alpha)$, что

$$(5.6) \quad \sigma\{|u(z)| > \lambda\} \leq A|\{t: u^*(t) > \lambda\}|, \quad \lambda > 0,$$

для любой гармонической функции $u(z)$ в $\mathcal{H}$. Здесь $u^*(t)$ — некасательная максимальная функция для $u(z)$ по сектору $\{|x-t| < \alpha y\}$. Если A — наименьшая постоянная, для которой выполняется (5.6), то

$$c_1(\alpha)A \leq N(\sigma) \leq c_2(\alpha)A.$$

Доказательство. Выберем $\alpha = 1$; для других α доказательство такое же. Пусть σ — мера Карлесона. Открытое множество $\{t: u^*(t) > \lambda\}$ есть объединение последовательности непересекающихся открытых интервалов $\{I_j\}$ с центрами $c(I_j)$. Пусть T_j — «домик»:

$$T_j = \{z: |x - c(I_j)| + y < |I_j|/2\},$$

т. е. равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой I_j . Если $|u(z)| > \lambda$, то $u^*(t) > \lambda$ на интервале $\{|t-x| < y\}$, который содержится в одном из I_j . См. рис. I.5. Следовательно,

$$\{z: |u(z)| > \lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j.$$

В силу (5.5)

$$\sigma\{z: |u(z)| > \lambda\} \leq \sum_j \sigma(T_j) \leq N(\sigma) \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = N(\sigma) |\{t: u^*(t) > \lambda\}|,$$

и (5.6) выполняется.

Обратно, пусть $I = \{x_0 < t < x_0 + h\}$ и $u(z) = P_y * f(x)$, где $f(x) = 4\lambda \chi_I(x)$. Тогда $u(z) > \lambda$ в квадрате Q с основанием I , и по (5.6) и максимальной теореме

$$\sigma(Q) \leq A |\{t: u^*(t) > \lambda\}| \leq (AC/\lambda) \|f\|_1 \leq Ach,$$

т. е. σ — мера Карлесона. $\square$

Теорема 5.6 (Карлесон). Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, и пусть $u(z)$ обозначает интеграл Пуассона функции f . Если σ — положительная

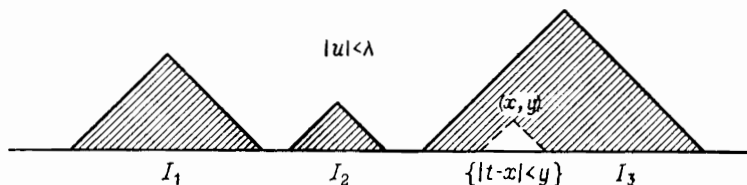


Рис. 1.5.

мера на верхней полуплоскости, то следующие утверждения эквивалентны.

- (а) σ — мера Карлесона.
- (б) При $1 < p < \infty$ $u(z) \in L^p(\sigma)$ для всех $f \in L^p(\mathbb{R})$.
- (с) При $1 < p < \infty$

$$\int |u(z)|^p d\sigma \leq C_p \int |f|^p dt, \quad f \in L^p.$$

- (д) Для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\sigma\{z: |u(z)| > \lambda\} \leq \frac{C_1}{\lambda} \int |f| dt, \quad \lambda > 0.$$

Если (б) или (с) выполняются для какого-нибудь одного значения p , $1 < p < \infty$, то выполняется (а). Постоянные C_p зависят только от p и от постоянной $N(\sigma)$ из (5.5); в действительности можно взять $C_p = B_p N(\sigma)$, где B_p — постоянная из теоремы 5.1 ($\alpha = 1$). Если (с) или (д) выполняются, то (5.5) выполняется с $N(\sigma) \leq 4^p C_p$.

Доказательство. Если (а) выполнено, то по (5.6) и теореме 5.1 выполняются (с) и (д). Очевидно, что (с) влечет за собой (б); если же (б) выполняется при некотором p , то по теореме о замкнутом графике для банаховых пространств выполняется и (с) (при том же p).

Пусть теперь выполнено (д) или (с) при некотором p , $1 < p < \infty$. Как в доказательстве леммы 5.5, положим $I =$

$= \{x_0 < t < x_0 + h\}$, $f(t) = 4\chi_I(t)$, $u(z) = P_y * f(x)$. Тогда $\|f\|_p = 4h^{1/p}$ и $u(z) > 1$ на $Q = I \times (0, h)$. Стало быть,

$$\sigma(Q) \leq \sigma(\{|u(z)| > 1\}) \leq C_p \int |f|^p dt = 4^p C_p h$$

и (5.5) выполняется¹⁾. $\square$

6. Субгармонические функции

Пусть Ω — открытое множество на плоскости. *Субгармонической функцией* в Ω называется такая функция $v: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$, что

(a) v полунепрерывна сверху

$$v(z_0) \geq \lim_{z \rightarrow z_0} v(z), \quad z_0 \in \Omega;$$

(b) для каждого $z_0 \in \Omega$ найдется $r(z_0) > 0$, такое, что круг $\Delta(z_0, r(z_0)) = \{z: |z - z_0| < r(z_0)\}$ содержится в Ω и для любого $r < r(z_0)$

$$(6.1) \quad v(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z - z_0| < r} v(z) dx dy.$$

Полунепрерывность гарантирует, что v измерима и ограничена сверху на каждом компактном подмножестве множества Ω , так что интеграл в (6.1) или сходится, или расходится к $-\infty$.

Каждая гармоническая функция является и субгармонической, но главный наш пример субгармонической функции — это $v(z) = \log |f(z)|$, где f — аналитическая функция в Ω . Ясно, что v полунепрерывна сверху. Условие (6.1) тривиально, если $f(z_0) = 0$. Если же $f(z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности z_0 выделяется однозначная ветвь $\log f(z)$, и $v(z) = \operatorname{Re}(\log f(z))$ гармонична в этой окрестности. Значит, при $f(z_0) \neq 0$ (6.1) выполняется со знаком равенства.

Лемма 6.1 (неравенство Йенсена). Пусть (X, μ) — пространство с вероятностной мерой, т. е. $\mu(X) = 1$. Пусть $v \in L^1(\mu)$ — вещественная функция, а $\varphi(t)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi\left(\int v d\mu\right) \leq \int \varphi(v) d\mu.$$

¹⁾ Прямое доказательство оценки (с) теоремы 5.6 (и тем самым теоремы 4.3 в части (b)) при $p = 2$, не опирающееся на леммы о покрытиях и на интерполяционные теоремы, дал С. А. Виноградов (см. Никольский [1980*], стр. 195—200). Это доказательство пригодно и для $\mathbb{R}^n$. О связи между теоремами 4.3 и 5.6 см. Карлесон [1967] (стр. 75 и 118 русского перевода). — Прим. ред.

Доказательство. Выпуклость функции φ означает, что она является верхней огибающей линейных функций:

$$\varphi(t_0) = \sup \{at_0 + b: at + b \leq \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Если $at + b \leq \varphi(t)$, то

$$a \left(\int v d\mu \right) + b = \int (av + b) d\mu \leq \int \varphi(v) d\mu,$$

а точная верхняя грань левой части этого неравенства есть $\varphi \left(\int v d\mu \right)$. $\square$

Неравенство Йенсена верно и при $\int v d\mu = -\infty$, если предположить, что φ определена при $t = -\infty$ и возрастает на $[-\infty, \infty]$. В этом случае доказательство тривиально.

Теорема 6.2. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в Ω , а $\varphi(t)$ — возрастающая выпуклая функция на $[-\infty, \infty)$, непрерывная при $t = \infty$. Тогда функция $\varphi \circ v$ субгармонична в Ω .

Доказательство. φ непрерывна на $[-\infty, \infty)$, поскольку каждая выпуклая функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Значит, $\varphi \circ v$ полунепрерывна сверху. Функция φ возрастает, поэтому при $z_0 \in \Omega$ и $r < r(z_0)$

$$\varphi(v(z_0)) \leq \varphi \left(\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(z_0, r)} v(z) dx dy \right).$$

Теперь по неравенству Йенсена

$$\varphi(v(z_0)) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta(z_0, r)} \varphi(v(z)) dx dy,$$

а это и есть (6.1) для $\varphi \circ v$. $\square$

Например, для аналитической в Ω функции $f(z)$ функция $|f(z)|^p = \exp(p \log |f(z)|)$ субгармонична при $0 < p < \infty$. Функция $\log^+ |f(z)| = \max(\log |f(z)|, 0)$ также субгармонична в Ω . Для гармонических функций ситуация иная — функция $|u|^p$ субгармонична только при $p \geq 1$ (по неравенству Гёльдера).

Теорема 6.3. Пусть функция $v: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ полунепрерывна сверху. Она субгармонична в Ω тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если $u(z)$ — функция, гармоническая на ограниченном открытом подмножестве $W \subset \Omega$, и

$$\overline{\lim}_{W \ni z \rightarrow \zeta} (v(z) - u(z)) \leq 0$$

для всех $\zeta \in \partial W$, то

$$v(z) \leq u(z), \quad z \in W.$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ субгармонична, а $u(z)$ и W такие, как указано выше. Тогда $V(z) = v(z) - u(z)$ субгармонична в W и $\lim_{W \ni z \rightarrow \zeta} V(z) \leq 0$ для всех $\zeta \in \partial W$.

Сейчас мы покажем, как при обычном доказательстве принципа максимума, что $V \leq 0$ в W . Можно считать, что W связно. Предположим, что $a = \sup_W V(z) > 0$. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность в W , такая, что $V(z_n) \rightarrow a$. Поскольку $a > 0$, то z_n не могут сгущаться к ∂W ; стало быть, существует их предельная точка $z \in W$. Ввиду полунепрерывности $V(z) = a$ и множество

$$E = \{z \in W: V(z) = a\}$$

непусто. Множество E замкнуто, так как V полунепрерывна сверху и a — ее максимальное значение.

Так как $V(z) \leq a$ на W , то при $z_0 \in E$ неравенство для среднего (6.1) показывает, что $V(z) = a$ почти всюду в $\Delta(z_0, r)$ при некотором $r > 0$. Значит, E плотно в $\Delta(z_0, r)$. Так как E замкнуто, то $\Delta(z_0, r) \subset E$ и E открыто. Но W предполагалось связным. Мы пришли к противоречию и должны заключить, что $a \leq 0$.

Обратно, пусть $z_0 \in \Omega$ и $\overline{\Delta(z_0, r)} \subset \Omega$. В силу полунепрерывности v найдутся непрерывные функции $u_n(z)$, которые, убывая с ростом n , стремятся на $\partial\Delta(z_0, r)$ к $v(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $U_n(z)$ — гармоническая функция в $\Delta(z_0, r)$ с граничными значениями $u_n(z)$. Функцию U_n можно получить из u_n при помощи интегральной формулы Пуассона для единичного круга после надлежащей замены переменных. Мы знаем из разд. 3, что U_n непрерывны на $\overline{\Delta(z_0, r)}$. По предположению $v(z_0) \leq U_n(z_0)$ и

$$v(z_0) \leq \lim_n \frac{1}{2\pi} \int u_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

по теореме о монотонной сходимости. Усредняя это неравенство по мере $r dr$, получаем (6.1), и $v(z)$ оказывается субгармонической. $\square$

Проведенное доказательство показывает, что если $v(z)$ субгармонична в Ω , то (6.1) выполняется при всех $r > 0$, для которых $\overline{\Delta(z_0, r)} \subset \Omega$. Кроме того, мы можем заменить в (6.1) среднее по площади круга средним по окружности, так что условие

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < r(z_0),$$

эквивалентно (6.1).

Следствие 6.4. Если Ω — открытое связное множество, $v(z)$ субгармонична в Ω и $v(z) \not\equiv -\infty$, то при $\overline{\Delta(z_0, r)} \subset \Omega$

$$\frac{1}{2\pi} \int v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta > -\infty.$$

Доказательство. Пусть $u_n(z)$ — непрерывные функции, которые, убывая, сходятся к $v(z)$ на $\partial\Delta(z_0, r)$, а $U_n(z)$ — их гармонические продолжения в $\Delta(z_0, r)$. Если

$$\frac{1}{2\pi} \int v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = -\infty,$$

то, так как v ограничена сверху, а ядра Пуассона положительны и ограничены, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int P_z(\theta) v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = -\infty, \quad |z| < 1.$$

Следовательно, $U_n(z) \rightarrow -\infty$ при всех $z \in \Delta(z_0, r)$, и по теореме 6.3 $v = -\infty$ в $\Delta(z_0, r)$. Непустое множество $\{z \in \Omega: v(z) = -\infty \text{ в окрестности } z\}$ оказывается открытым и замкнутым, что приводит к противоречию. $\square$

Теорема 6.5. Пусть v — субгармоническая функция в единичном круге D и $v(z) \not\equiv -\infty$. Для $0 < r < 1$ положим

$$v_r(z) = \begin{cases} v(z), & |z| \geq r, \\ \frac{1}{2\pi} \int P_{z/r}(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta, & |z| < r. \end{cases}$$

Тогда $v_r(z)$ субгармонична в D и гармонична при $|z| < r$, $v_r(z) \geq v(z)$, $z \in D$, и $v_r(z)$ — возрастающая функция от r .

Доказательство. Мы знаем из следствия 6.4 и из разд. 3, что функция $v_r(z)$ конечна и гармонична в $\Delta(0, r) = \{|z| < r\}$. Для проверки полунепрерывности $v_r(z)$ в точке $z_0 \in \partial\Delta(0, r)$ нам нужно показать, что

$$v(z_0) \geq \overline{\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < r}} v_r(z)}.$$

Это следует из аппроксимационных свойств ядра Пуассона и полунепрерывности функции v . Пусть $z_0 = re^{i\theta_0}$. Для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что $v(re^{i\theta}) < v(z_0) + \varepsilon$ при $|\theta - \theta_0| < \delta$. Тогда, если $|z| < r$ и $|z - z_0|$ мало, то

$$\begin{aligned} v_r(z) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \delta} P_{z/r}(\theta) (v(z_0) + \varepsilon) d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} (\sup_{\theta} v(re^{i\theta})) \int_{|\theta - \theta_0| > \delta} P_{z/r}(\theta) d\theta \leq v(z_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, v_r полунепрерывна сверху.

Если мы снова рассмотрим непрерывные функции $u_n(z)$, стремящиеся, убывая, к $v(z)$ на $\partial\Delta(0, r)$, то мы получим, как в доказательстве следствия 6.4, $v(z) \leq v_r(z)$. Так как v субгармонична, то это неравенство показывает, что $v_r(z)$ удовлетворяет (6.1) при всех z_0 , $|z_0| = r$. Следовательно, $v_r(z)$ субгармонична в D .

Если $r > s$, то $v_r = (v_s)_r$, и так как $v_r \geq v$ для любой субгармонической функции v , то функции $v_r(z)$ возрастают вместе с r . $\square$

Следствие 6.6. Если $v(z)$ — субгармоническая функция в D , то

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int v(re^{i\theta}) d\theta$$

— возрастающая функция от r .

Субгармоническая функция $v(z)$ в Ω имеет гармоническую мажоранту, если существует гармоническая функция $U(z)$, такая, что $v(z) \leq U(z)$ в Ω . Если Ω связно, $v(z) \not\equiv -\infty$ и $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту, то процесс Перрона для решения задачи Дирихле даст наименьшую гармоническую мажоранту $u(z)$. Это гармоническая функция, мажорирующая $v(z)$ и такая, что $u(z) \leq U(z)$ для любой другой гармонической мажоранты $U(z)$ функции $v(z)$ (см. Альфорс [1966] или Цудзи [1959]). Поскольку нас интересуют только односвязные области, то мы не нуждаемся для получения гармонических мажорант в замечательном процессе Перрона, а можем вместо него использовать ядро Пуассона.

Теорема 6.7. Субгармоническая в D функция $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту тогда и только тогда, когда

$$\sup_r \frac{1}{2\pi} \int v(re^{i\theta}) d\theta = \sup_r v_r(0) < \infty.$$

В этом случае ее наименьшая гармоническая мажоранта равна

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \int P_{z/r}(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta / 2\pi = \lim_{r \rightarrow 1} v_r(z).$$

Доказательство. Если $\sup_r v_r(0) < \infty$, то по теореме Гарнака функции $v_r(z)$, возрастая, сходятся к конечной гармонической функции $u(z)$ в D . Поскольку $v(z) \leq v_r(z)$, она будет гармонической мажорантой $v(z)$. Обратно, если $U(z)$ гармонична и $v(z) \leq U(z)$ в D , то по теореме 6.3 $U(z) \geq v_r(z)$ при всех r . Следовательно, $\sup_r v_r(0) < \infty$, и снова $u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} v_r(z)$ конечна и гармонична. Так как $v_r(z) \leq U(z)$, то $u(z) \leq U(z)$ и, значит, $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта. $\square$

Поскольку по непрерывности $u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} u(rz)$, то наименьшая гармоническая мажоранта функции $v(z)$ может быть записана в виде

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \int P_z(\theta) v(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

В частности, если $v(z) \geq 0$ и если $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту, то ее наименьшая гармоническая мажоранта есть интеграл Пуассона слабого предела ограниченных положительных мер $v(re^{i\theta}) d\theta/2\pi$.

Теорема 6.8. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. Если

$$\sup_y \int |v(x + iy)| dx = M < \infty,$$

то $v(z)$ имеет в $\mathcal{H}$ гармоническую мажоранту вида

$$u(z) = \int P_y(x - t) d\mu(t),$$

где μ — конечная вещественная мера на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Неравенство

$$(6.2) \quad v(z) \leq \frac{2}{\pi y} \sup_{\eta} \int |v(\xi + i\eta)| d\xi, \quad z = x + iy, \quad y > 0,$$

доказывается так же, как аналогичное неравенство (3.9) в начале доказательства теоремы 3.5. Пусть $y_0 > 0$; рассмотрим функцию

$$u(z) = u_{y_0}(z) = \int P_{y-y_0}(x-t) v(t, y_0) dt,$$

гармоническую в полуплоскости $\{y > y_0\}$. Мы проверим, что $v(z) \leq u(z)$ при $y > y_0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $A > 0$ достаточно велико. Пусть $u_n(t)$ — непрерывные функции, сходящиеся, убывая, к $v(t + iy_0)$ на $[-A, A]$. Положим

$$U_n(z) = \int_{-A}^A P_{y-y_0}(x-t) u_n(t) dt, \quad y > y_0.$$

Функция

$$V(z) = v(z) - \varepsilon \log|z + i| - U_n(z)$$

субгармонична при $y > y_0$. При каждом ε мы имеем $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = -\infty$ в силу (6.2), и $\overline{\lim}_{z \rightarrow (t, y_0)} V(z) \leq 0$ для $t \geq |A|$ при достаточно большом A . Если $|t| < A$, то $\overline{\lim}_{z \rightarrow (t, y_0)} V(z) \leq v(t, y_0) - u_n(t) \leq 0$. По теореме 6.3 (после конформного отображения) $V(z) \leq 0$ при $y > y_0$. Устремляя последовательно $n \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, по-

лучаем $v(z) \leq u(z)$ при $y > y_0$. Меры $v(t, y_0) dt$ ограничены при $y_0 \rightarrow 0$ и имеют слабую предельную точку $d\mu(t)$, так что

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} u_{y_0}(z) = \int P_y(x-t) d\mu(t)$$

является гармонической мажорантой функции $v(z)$. $\square$

На самом деле $u(z)$ будет даже наименьшей гармонической мажорантой функции $v(z)$, но этот факт нам не потребуется.

Замечания

Дальнейшие приложения леммы Шварца см. в книгах Альфорса [1973] и Каратеодори [1954, т. II] и в статье Неванлинны [1929].

Пик [1916] изучал конечную интерполяционную задачу (2.1) для функций, отображающих верхнюю полуплоскость в себя. Теорема 2.2 легко выводится из работы Пика при помощи конформного отображения (см. Неванлинна [1919]). Доказательство в тексте взято у Маршалла [1976с], который до этого [1974] опубликовал несколько иное доказательство. Теоретико-операторные подходы к этой теореме см. у Сарасона [1967], Секефальви-Надя и Кораньи [1956] и Донохью [1974].

Последовательности коэффициентов функций в D с положительной вещественной частью были описаны Каратеодори [1911] и Тёплицем [1911]. Теорема Шура [1917] утверждает, что функция $f \in \mathcal{B}$ с разложением

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + O(z^{n+1})$$

существует тогда и только тогда, когда неотрицательно определена матрица $I_n - A_n^* A_n$, где I_n — единичная $(n+1) \times (n+1)$ -матрица и

$$A_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство намечено в упр. 21 гл. IV. См. у Цудзи [1959] вывод теоремы Шура из результата Каратеодори — Тёплица. Теоремы Пика и Шура вместе содержатся в недавнем результате Кантора [1981], который нашел матричное условие, необходимое и достаточное для интерполяции функцией из $\mathcal{B}$ с конечным числом производных в конечном числе точек¹⁾.

¹⁾ В связи с леммой Шварца и ее обобщениями укажем книгу Жюлиа [1935*]. О задаче Пика и о других классических интерполяционных задачах см. Ахнезер [1961*], Уолш [1960], Сарасон [1967], Никольский [1980*], Крейн и Нудельман [1973*]. — Прим. ред.

Максимальную функцию ввели Харди и Литтлвуд [1930], но ее важность была понята значительно позже. В своем доказательстве Харди и Литтлвуд использовали перестановки функций. Лемма 4.4 взята из книги Гарсиа [1970], где она приписывается У. Г. Юнгу. См. также у Стейна [1970] другую лемму о покрытиях, справедливую и в $\mathbb{R}^n$, и более общее обсуждение максимальных функций и аппроксимативных единиц.

Книги Зигмунда [1968] и Стейна и Вейсса [1971] содержат дальнейшую информацию о теореме Марцинкевича и других теоремах об интерполяции операторов.

Теорема Фату содержится в его классической статье [1906], написанной вскоре после введения интеграла Лебега. Теореме 5.6 см. у Карлесона [1958, 1962а]. Приведенное доказательство леммы 5.5 принадлежит Е. М. Стейну.

Мы лишь слегка коснулись обширной теории субгармонических функций. Среди большого числа важных работ отметим книги Цудзи [1959] и Хеймана и Кеннеди [1976], которые могут служить путеводителями по литературе.

Некоторые авторы называют неравенством Йенсена неравенство

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

и другие родственные неравенства, но мы сохраняем это название за неравенством из леммы 6.1. Поскольку логарифм вогнут, эти два кандидата на название «неравенство Йенсена» нацелены в разные стороны.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Пусть $f(z) \in \mathcal{B}$, $f(0) = 0$, $|f'(0)| = \delta > 0$. Если $|z| < \eta < \delta$, то

$$|f(z)| \geq \left(\frac{\delta - \eta}{1 - \eta\delta} \right) |z|,$$

и в круге $\{|z| < \eta\}$ функция $f(z)$ принимает каждое значение w ,

$$|w| < \left(\frac{\delta - \eta}{1 - \eta\delta} \right) \eta,$$

ровно один раз. (Указание. Если $g(z) = f(z)/z$, то $\rho(g(z), f'(0)) \leq |z|$.)

2. Пусть $f \in \mathcal{B}$.

(а) Если f имеет в D две неподвижные точки, то $f(z) = z$.

(б) Пусть $\varepsilon > 0$; предположим, что $\rho(f(z_1), z_1) < \varepsilon$ и $\rho(f(z_2), z_2)$ для двух различных точек z_1 и z_2 из D . Если z лежит на гиперболической геодезической дуге, соединяющей z_1 и z_2 , то

$$\rho(f(z), z) \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

с абсолютной постоянной C . (Указание. Можно считать, что $z=0$, $z_1=-r<0$, $z_2=s>0$ и $f(z_1)=z_1$. Тогда $f(0)\in K(z_1, r)\cap K(z_2, s+\varepsilon)$ и евклидово описание кругов $K(z_1, r)$ и $K(z_2, s+\varepsilon)$ дает верхнюю границу для $|f(0)|=\rho(f(0), 0)$.)

(с) Пусть $e^{i\theta}$ и $e^{i\varphi}$ — различные точки окружности ∂D . Предположим, что $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ — две последовательности в D , такие, что $z_n \rightarrow e^{i\theta}$, $w_n \rightarrow e^{i\varphi}$, $\rho(f(z_n), z_n) \rightarrow 0$ и $\rho(f(w_n), w_n) \rightarrow 0$. Тогда f оставляет неподвижными все точки на дуге геодезической, соединяющей $e^{i\theta}$ с $e^{i\varphi}$, и поэтому $f(z)=z$.

Этот результат появится снова в упр. 9 гл. X.

3. Пусть $I=(\theta_1, \theta_2)$ — дуга единичной окружности ∂D . Тогда

$$\omega(z) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_z(\theta) d\theta / 2\pi, \quad z \in D,$$

— гармоническая мера дуги I . Докажите, что $\omega(z) = \alpha/\pi$ — $-(\theta_2 - \theta_1)/2\pi$, где $\alpha = \arg((e^{i\theta_2} - z)/(e^{i\theta_1} - z))$, как это пока-

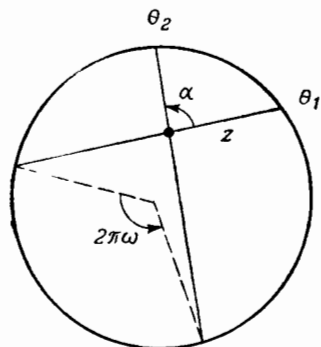


Рис. I. 6.

зано на рис. I. 6 (см. Каратеодори [1954] или Неванлинна [1953]).

4. Для $z, w \in D$ определим расстояние Глисона

$$d(z, w) = \sup \{ |f(z) - f(w)| : f \in \mathcal{R} \}$$

и расстояние Гарнака

$$H(z, w) = \sup \left\{ \frac{u(z)}{u(w)} : u \text{ гармонична в } D, u > 0 \right\}.$$

Тогда

$$(i) \quad H(z, w) = \frac{1 + \rho(z, w)}{1 - \rho(z, w)},$$

$$(ii) \quad \frac{4d(z, w)}{4 + d^2(z, w)} = \rho(z, w),$$

где $\rho(z, w) = |(z - w)/(1 - \bar{w}z)|$. Для доказательства (i) сравните ядра Пуассона; для доказательства (ii) рассмотрите

$(f(z) - f(w))/(1 - \overline{f(w)}f(z))$, $f \in \mathcal{B}$. Родственное равенство

$$\|P_z - P_w\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int |P_z(\theta) - P_w(\theta)| d\theta = 2 - \frac{4}{\pi} \arccos \rho(z, w)$$

следует из упр. 3 и конформной инвариантности. См. по этому поводу Кёниг [1969] или Бэр [1970]

5. Если $g(z)$ ограничена и аналитична в угле

$$\Gamma = \left\{ z \in D: \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\}, \quad \alpha > 1,$$

и если $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = a$, то в любом меньшем угле Γ'

$$\lim_{\Gamma' \ni z \rightarrow 1} g(z) = a.$$

(Указание. Нормальные семейства.)

6 (лемма Жюлиа). Область

$$W_k = \left\{ \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} < k \right\}, \quad k > 0,$$

представляет собой круг в D , который касается ∂D в точке $z = 1$. Он называется *орициклом*. Пусть $f \in \mathcal{B}$; предположим, что существует последовательность $\{z_n\}$ в D , такая, что $z_n \rightarrow 1$, $f(z_n) \rightarrow 1$ и

$$\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \rightarrow A < \infty.$$

Тогда $f(W_k) \subset W_{Ak}$ для $k > 0$, или, что то же самое,

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq A \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}, \quad z \in D.$$

В частности, $A > 0$. (Указание. Выберите r_n так, чтобы $(1-|z_n|)/(1-r_n) \rightarrow k$. Неевклидовы круги $K(z_n, r_n)$ сходятся к W_k , а неевклидовы круги $K(f(z_n), r_n)$ сходятся к W_{Ak} . По лемме Шварца $f(K(z_n, r_n)) \subset K(f(z_n), r_n)$. См. Жюлиа [1920] и Каратеодори [1929])

*7 (угловая производная). Положим для $f \in \mathcal{B}$

$$B = \sup_{z \in D} \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} / \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}.$$

(а) Пусть $B = \infty$. Если $z_n \rightarrow 1$, то по лемме Жюлиа

$$\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z} = \infty$$

в любом угле

$$\Gamma = \left\{ z \in D: \frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \right\}, \quad \alpha > 1.$$

(b) Пусть $B < \infty$. Тогда $B > 0$ и по лемме Жюлиа

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geq B.$$

Возьмем вещественные $z_n = x_n \rightarrow 1$. Тогда

$$|1-f(x_n)|^2 \leq B(1-|f(x_n)|^2) \frac{1-x_n}{1+x_n},$$

и $f(x_n) \rightarrow 1$. Более того, неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n} \frac{1+x_n}{1+|f(x_n)|} &\leq \frac{|1-f(x_n)|}{1+|f(x_n)|} \frac{1-|f(x_n)|}{1-|f(x_n)|} \frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} \leq \\ &\leq \frac{|1-f(x_n)|^2}{1-|f(x_n)|^2} \frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} \end{aligned}$$

показывают, что

$$\overline{\lim} \frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n} = B.$$

Значит, для $z_n = x_n$ предположения леммы Жюлиа выполняются с $A = B$. Далее,

$$\begin{aligned} B = \lim \frac{1-|f(x_n)|}{1-x_n} &\leq \underline{\lim} \frac{|1-f(x_n)|}{1-x_n} \leq \overline{\lim} \frac{|1-f(x_n)|}{1-x_n} \leq \\ &\leq B^{1/2} \lim \left\{ \frac{1-|f(x_n)|^2}{1-x_n^2} \right\}^{1/2} = B, \end{aligned}$$

так что

$$\left| \frac{1-f(x_n)}{1-x_n} \right| \rightarrow B, \quad \frac{1-|f(x_n)|}{1-|f(x_n)|} \rightarrow 1.$$

Отсюда следует, что $\arg(1-f(x)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$ и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-|f(x)|}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|1-f(x)|}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-f(x)}{1-x} = B.$$

(c) Снова пусть $B < \infty$. В любом угле $\Gamma = \{|1-z|/(1-|z|) < \alpha\}$

$$\left| \frac{1-f(z)}{1-z} \right| \leq 2B\alpha.$$

Пользуясь упражнением 5, заключаем, что

$$\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = B, \quad \lim_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} f'(z) = B$$

для любого угла Γ .

(d) Существует и другое доказательство, использующее интегральное представление Пуассона положительных гармониче-

ских функций. Пусть $F(z) = (1 + f(z))/(1 - f(z))$. Тогда

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} > 0$$

и найдется положительная мера μ , такая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta) &= \mu(\{0\}) \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu_0(\theta), \end{aligned}$$

где μ_0 уже не имеет нагрузки в 0. Очевидно, что $B \geq 1/\mu(\{0\})$ и $B = \infty$ при $\mu(\{0\}) = 0$. Далее

$$\frac{1 - |f(z)|^2}{|1 - f(z)|^2} / \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \mu(\{0\}) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1 - z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu_0(\theta),$$

и если $z \rightarrow 1$ внутри угла Γ , то последний интеграл стремится к 0. Следовательно, $B = 1/\mu(\{0\})$. Так как

$$\frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} = \frac{1 + z}{1 - z} \mu(\{0\}) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_0(\theta) + ic,$$

то похожее рассуждение дает

$$\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} \frac{1 - z}{1 - f(z)} = \frac{1}{2} \lim_{\Gamma \ni z \rightarrow 1} \frac{(1 - z)(1 + f(z))}{1 - f(z)} = \mu(\{0\}).^1)$$

8. Предположим, что отображение $f: D \rightarrow D$ таково, что для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 из D найдется функция $g \in \mathcal{R}$ (зависящая от z_1, z_2, z_3), для которой

$$g(z_j) = f(z_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда f — аналитическая функция. (Используйте теорему Пика или непосредственно покажите, что f удовлетворяет уравнениям Коши — Римана.)

9. Пусть $u(z)$ — вещественная гармоническая функция в D . Покажите, что $u(z)$ есть разность двух положительных гармонических функций тогда и только тогда, когда

$$\sup_r \int |u(re^{i\theta})| d\theta < \infty,$$

т. е. тогда и только тогда, когда $u(z)$ — интеграл Пуассона конечной вещественной меры на ∂D . Дайте пример гармонической функции, которая не является разностью двух положительных гармонических функций.

¹⁾ В связи с упр. 5—7 см. Жюлиа [1935*]. — Прим. ред.

10. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ компактно, $|E| = 0$. Существуют гармонические функции $v_n(z)$ на $\mathcal{H}$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$(i) \quad v_n(z) \geq 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{\mathcal{H} \ni z \rightarrow t} v_n(z) = \infty, \quad t \in E,$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) = 0, \quad z \in \mathcal{H}.$$

11. (а) Будем писать $f \in L^1_{\text{loc}}$, если f измерима и $|f|$ интегрируема на каждом компактном множестве. Если $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, то почти всюду

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

Множество тех x , для которых это верно, называется *лебеговским множеством* для f . (Указание. Доказательство теоремы 5.3 показывает, что почти всюду

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Заменяя f на $|f - c|$, где c рационально, получаем нужный результат.)

(б) Пусть $\varphi(x) \in L^1$, $\int \varphi(x) dx = 1$, и пусть $\psi(x)$ — наименьшая четная убывающая мажоранта $|\varphi(x)|$:

$$\psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\varphi(t)|.$$

Если $\psi \in L^1$, то оператор

$$M_{\varphi} f(x) = \sup_{y > 0} \left| \frac{1}{y} \int \varphi\left(\frac{x-t}{y}\right) f(t) dt \right|$$

будет слабого типа $(1, 1)$,

$$|\{x: M_{\varphi} f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

и будет ограничен в L^p , $1 < p \leq \infty$,

$$\|M_{\varphi} f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Если $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, то почти всюду

$$(E.1) \quad f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int \varphi\left(\frac{x-t}{y}\right) f(t) dt.$$

Точнее, (E.1) выполняется в каждой точке лебеговского множества функции f (которое не зависит от φ).

(с) Сформулируйте и докажите подобный результат для некасательной сходимости и некасательной максимальной функции.

12. Если $f(x)$ сосредоточена на ограниченном интервале I ,

то $\int Mf(x) dx < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int |f| |\log^+ f| dx < \infty$ (Е. М. Стейн [1969]).

13. Пусть μ — положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$, конечная на компактах. Положим

$$M_\mu f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu.$$

Покажите, что

$$\mu \{M_\mu f(x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \int |f| d\mu$$

и что

$$\int |M_\mu f|^p d\mu \leq C_p \int |f|^p d\mu, \quad 1 < p < \infty.$$

Выведите отсюда, что для μ -почти всех x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(x-h, x+h)} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| d\mu(t) = 0, \quad f \in L^1(\mu).$$

14. Если μ — положительная сингулярная мера на $\mathbb{R}$, то μ -почти везде

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu((x-h, x+h))}{2h} = \infty. \quad 1)$$

15. Пусть $v(z)$ — положительная субгармоническая функция в единичном круге и

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta.$$

Тогда $\log m(r)$ — возрастающая выпуклая функция от $\log r$, т. е. если $\log r = t \log r_1 + (1-t) \log r_2$, $0 < t < 1$, то

$$\log m(r) \leq t \log m(r_1) + (1-t) \log m(r_2).$$

16. Если $\varphi(z)$ принадлежит классу C^2 в окрестности замкнутого круга $\Delta(z_0, R) = \{z: |z - z_0| \leq R\}$, то по теореме Грина

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta(z_0, R)} \log \left| \frac{R}{z - z_0} \right| \Delta \varphi(z) dx dy.$$

*17. Пусть $v(z) \not\equiv -\infty$ полунепрерывна сверху в плоской области Ω .

(а) Если $v \in C^2$ и $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \geq 0$, то v субгармонична в Ω (см. упражнение 16).

¹⁾ Это теорема Валле-Пуссена. См. Сакс [1949*], стр. 190—195. — *Прим ред.*

(b) Пусть $\chi(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ таково, что

$$\chi \geq 0; \chi(z) = 0, |z| > 1; \int \chi(z) dx dy = 1.$$

Предположим, что функция χ радиальна, $\chi(z) = \chi(|z|)$, и положим $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2} \chi(z/\varepsilon)$. Тогда

$$v * \chi_\varepsilon(w) = \int v(z) \chi_\varepsilon(w - z) dx dy$$

принадлежит C^∞ в $\Omega_\varepsilon = \{w \in \Omega: \text{dist}(w, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Докажите, что v субгармонична в Ω тогда и только тогда, когда $\Delta(v * \chi_\varepsilon) \geq 0$ в Ω_ε при всех $\varepsilon > 0$. В таком случае $v * \chi_\varepsilon$, убывая, сходятся к v в Ω .

(с) Пусть $C_0^\infty(\Omega)$ означает пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, лежащими в Ω . Если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $f \in C^2(\Omega)$, то

$$\iint_{\Omega} f \Delta \varphi dx dy = \iint_{\Omega} \varphi \Delta f dx dy$$

(снова теорема Грина). Если

$$\iint_{\Omega} f \Delta \varphi dx dy \geq 0 \quad \text{при} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0,$$

то f субгармонична в Ω (возьмите $\varphi(z) = \chi_\varepsilon(z_0 - z)$).

Слабым лапласианом функции $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ называется функционал

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \rightarrow \iint_{\Omega} v \Delta \varphi dx dy.$$

Если v полунепрерывна сверху и ее слабый лапласиан неотрицателен (т. е.

$$\iint_{\Omega} v \Delta \varphi dx dy \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0),$$

то $v * \chi_\varepsilon$ субгармонична при всех $\varepsilon > 0$ и, стало быть, v субгармонична. Значит, $v(z)$ субгармонична тогда и только тогда, когда ее слабый лапласиан неотрицателен.

(d) Слабый лапласиан функции $\log|z - z_0|$, $z_0 \in \Omega$, — это часто встречающаяся мера. Найдите ее.

(е) Если $v(z)$ субгармонична в Ω , то по теореме Рисса о представлении ее слабый лапласиан есть положительная борелевская мера, конечная на компактных подмножествах множества Ω . Обозначим ее через Δv . Тогда в Ω_ε

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\varepsilon} \log \frac{1}{|z - w|} d\Delta v(w) + h_\varepsilon(z),$$

где $h_\varepsilon(z)$ гармонична в Ω_ε . Это — разложение Рисса субгармонической функции $v(z)$. (См. Ф. Рисс [1926].)

Классическая теория пространств Харди H^p представляет собой смесь вещественного и комплексного анализа. Вторая глава является кратким введением в эту теорию, с ударением на тех результатах и той технике, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Вот три краеугольных камня теории:

- (i) некасательные максимальные функции;
- (ii) субгармоничность $|f|^p$ и $\log|f|$ для аналитической функции f ;
- (iii) использование произведений Бляшке для сведения задач к случаю аналитических функций без нулей.

Существуют две H^p -теории — одна для круга, а другая для полуплоскости. Это теории-близнецы; мы вводим их одновременно.

1. Определения

Пусть $0 < p < \infty$ и $f(z)$ — аналитическая функция в D . Мы скажем, что $f \in H^p = H^p(D)$, если

$$\sup_r \frac{1}{2\pi} \int |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \|f\|_{H^p}^p < \infty.$$

При $p = \infty$ мы скажем, что $f \in H^\infty$, если $f(z)$ — ограниченная аналитическая функция в D , и будем писать

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Таким образом, единичный шар в H^∞ , т. е. $\{f \in H^\infty: \|f\|_\infty \leq 1\}$, — это класс $\mathcal{B}$, изучавшийся в первых разделах гл. I. Замечания о субгармонических функциях из гл. I показывают, что $f \in H^p$ тогда и только тогда, когда субгармоническая функция $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту; $\|f\|_{H^p}^p$ для $p < \infty$ — это значение наименьшей гармонической мажоранты в $z = 0$. Это второе определение H^p в терминах гармонических мажорант конформно-инвариантно. Оно используется для определения H^p в произвольных плоских областях или на римановых поверхностях. Однако пространства H^p в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ имеют специальное определение, которое не является кон-

формно-инвариантным. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в $\mathcal{H}$. При $0 < p < \infty$ мы скажем, что $f \in H^p = H^p(dt)$, если

$$\sup_y \int |f(x + iy)|^p dx = \|f\|_{H^p}^p < \infty.$$

При $p = \infty$ мы обозначаем через H^∞ пространство ограниченных аналитических функций в $\mathcal{H}$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{\mathcal{H}} |f(z)|$.

Отметим, что в определении $H^p(dt)$ участвуют все y , $0 < y < \infty$, а не только малые значения y . Например, если

$$g(z) = \frac{e^{-iz/p}}{(z+i)^{2/p}},$$

то $\int |g(x + iy)|^p dx = \pi e^y (1+y)^{-1}$, и $g(z) \notin H^p(dt)$.

Пусть $z = \tau(w) = i(1-w)/(1+w)$ — конформное отображение круга D на $\mathcal{H}$. Ясно, что $f \circ \tau \in H^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда $f \in H^\infty(dt)$. Однако при $p < \infty$, к сожалению, $H^p(D)$ и $H^p(dt)$ не переходят друг в друга. Например, $H^p(D)$ содержит ненулевые постоянные, а $H^p(dt)$ — нет. Чтобы изучать $H^p(D)$ и $H^p(dt)$ вместе, мы докажем две простые леммы.

Лемма 1.1. Если $0 < p < \infty$, а $f \in H^p(dt)$, то субгармоническая функция $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту и в $\mathcal{H}$, такую, что $u(i) \leq (1/\pi) \|f\|_{H^p}^p$.

Доказательство. Это вытекает из теоремы 6.8 гл. I. $\square$

Лемма 1.1 показывает, что если $f \in H^p(dt)$, то $g(w) = f(\tau(w)) \in H^p(D)$ и $\|g\|_{H^p} \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/p} \|f\|_{H^p}$.

Лемма 1.2. Если $0 < p < \infty$ и f — такая аналитическая функция в верхней полуплоскости, что $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту, то

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z+i)^{2/p}} \hat{f}(z)$$

лежит в $H^p(dt)$ и

$$(1.1) \quad \|F\|_{H^p}^p \leq u(i),$$

где $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $|f(z)|^p$.

Доказательство. Пусть $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $|f(z)|^p$. Положительная гармоническая функция $u(z)$ имеет вид

$$(1.2) \quad u(z) = cy + \int P_y(x-t) d\mu(t),$$

где $c \geq 0$, а μ — положительная мера на $\mathbb{R}$, для которой

$$\int (1+t^2)^{-1} d\mu(t) < \infty.$$

Следовательно,

$$|F(z)|^p = \frac{1}{\pi(x^2 + (1+y)^2)} |f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} u(z),$$

и по (1.2) и теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int |F(x+iy)|^p dx &\leq cy + \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{1+x^2} \int P_y(x-t) d\mu(t) dx = \\ &= cy + \int P_{1+y}(t) d\mu(t) = -c + u((1+y)i). \end{aligned}$$

Стало быть, $F(z) \in H^p(dt)$. Доказательство теоремы 1.6 показывает, что $\int |F(x+iy)|^p dx$ — убывающая функция y . Значит,

$$\|F\|_{H^p}^p = \lim_{y \rightarrow 0} \int |F(x+iy)|^p dx,$$

$$\|F\|_{H^p}^p = -c + \lim_{y \rightarrow 0} u((1+y)i) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\mu(t)}{1+t^2} \leq u(t). \quad \square$$

Лемма 1.2 показывает, что если $g(w) \in H^p(D)$, то

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z+i)^{2/p}} g(w(z)) \in H^p(dt),$$

где $w(z) = \tau^{-1}(z)$, $\|F\|_{H^p}^p \leq \|g\|_{H^p}^p$. Мы увидим в разд. 3, что обратное утверждение к лемме 1.2 также верно и $\|F\|_{H^p}^p = \|g\|_{H^p}^p$. Отметим, что $(z+i)^{-2/p}$ в $\mathcal{H}$ не обращается в 0, и поэтому множество нулей функции из $H^p(D)$ под действием τ снова переходит в множество нулей функции из $H^p(dt)$.

При $p \geq 1$ H^p — нормированное линейное пространство.

При $p < 1$ неравенство

$$|z_1 + z_2|^p \leq |z_1|^p + |z_2|^p$$

показывает, что H^p — метрическое пространство с метрикой

$$d(f, g) = \|f - g\|_{H^p}^p.$$

Теорема 1.3. При $0 < p \leq \infty$ H^p полно.

Доказательство. Можно считать, что $p < \infty$. Мы дадим доказательство для полуплоскости; в круге оно почти такое же. Ключевое неравенство

$$(1.3) \quad |f(x+iy)| \leq \left(\frac{2}{\pi y}\right)^{1/p} \|f\|_{H^p}, \quad y > 0,$$

следует из (6.2) гл. I. Оно показывает, что любая последовательность Коши $\{f_n\}$ из H^p поточечно сходится в $\mathcal{H}$ к аналити-

ческой функции f . Но лемма Фату дает

$$\begin{aligned} \int |f(x+iy) - f_n(x+iy)|^p dx &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int |f_m(x+iy) - f_n(x+iy)|^p dx \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{H^p}^p. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f - f_n\|_{H^p}^p \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{H^p}^p$, и H^p полно. $\square$

2. Произведения Бляшке

Мы покажем сейчас, что нули $\{z_n\}$ ненулевой функции из H^p в круге удовлетворяют условию Бляшке

$$(2.1) \quad \sum (1 - |z_n|) < \infty.$$

Замечательно, что (2.1) не зависит от p . Если же (2.1) выполнено, мы построим специальные функции из H^∞ — произведения Бляшке — с множеством нулей $\{z_n\}$. Произведения Бляшке будут играть большую и все возрастающую роль в дальнейших главах этой книги.

Теорема 2.1. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в круге, $f(z) \not\equiv 0$ и $\{z_n\}$ — нули функции $f(z)$. Если $\log|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту, то

$$\sum (1 - |z_n|) < \infty.$$

Если $f(0) \neq 0$ и $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log|f(z)|$, то

$$\sum (1 - |z_n|) \leq u(0) - \log|f(0)|.$$

Доказательство. Заменяя при необходимости $f(z)$ на $f(z)/z^N$, мы можем считать, что $f(0) \neq 0$. Тогда по теореме 1.6.7

$$\sup_r \int \log|f(re^{i\theta})| d\theta/2\pi = u(0),$$

где u — наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log|f|$.

Выберем $r < 1$ так, чтобы $|z_n| \neq r$ для всех n ; пусть $z_1, \dots, z_n$ — все нули с $|z_j| < r$. Функция $f(rz)$ аналитична в замкнутом круге и имеет нули $z_1/r, \dots, z_n/r$. Пусть

$$B_r(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j/r)/(1 - \bar{z}_j z/r)$$

— конечное произведение Бляшке с теми же нулями, и пусть $g(z) = f(rz)/B_r(z)$. Функция g аналитична в $\bar{D}$ и не обращается в нуль, а потому

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int \log|g(e^{i\theta})| d\theta.$$

Так как $|g(e^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|$, мы получаем известную формулу Иенсена:

$$\log |f(0)| + \sum_{|z_j| < r} \log \frac{r}{|z_j|} = \frac{1}{2\pi} \int \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Устремляя r к 1, находим, что

$$\sum \log \frac{1}{|z_j|} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = u(0) - \log |f(0)|.$$

Но $1 - |z_j| \leq \log(1/|z_j|)$, и теорема доказана. $\square$

Если $f \in H^p(D)$, то $\log |f| \leq (1/p) |f|^p$ и $\log |f|$ имеет гармоническую мажоранту. Значит, если $f \in H^p(D)$ или (по лемме 1.1) если $f(w) = F(z(w))$, где $F \in H^p(dz)$, то $\sum (1 - |z_n|) < \infty$.

Теорема 2.2. Пусть $\{z_n\}$ — такая последовательность точек круга D , что

$$\sum (1 - |z_n|) < \infty.$$

Пусть m — число z_n , равных 0. Тогда произведение Бляшке

$$(2.2) \quad B(z) = z^m \prod_{|z_n| \neq 0} \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}$$

сходится в D . Функция $B(z)$ принадлежит $H^\infty(D)$, а ее нули суть в точности $\{z_n\}$, причем каждый нуль имеет кратность, равную числу его появлений в последовательности $\{z_n\}$. Кроме того, $|B(z)| \leq 1$ и

$$|B(e^{i\theta})| = 1$$

почти всюду.

По определению произведением Бляшке в D называется функция вида (2.2).

Доказательство. Можно считать, что $|z_n| > 0$ при всех n . Положим

$$b_n(z) = \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}.$$

Произведение $\prod b_n$ сходится в D к аналитической функции с нулями $\{z_n\}$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum |1 - b_n(z)|$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве круга D . Но

$$|1 - b_n(z)| = \frac{|z_n + z| |z_n|}{|z_n| |1 - \bar{z}_n z|} (1 - |z_n|) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |z_n|),$$

и сходимость следует из (2.1).

Поскольку $|b_n(z)| \leq 1$, то очевидно, что $B(z) \in H^\infty$ и $|B(z)| \leq 1$. Ограниченная гармоническая функция $B(z)$ почти всюду имеет некасательные граничные значения $B(e^{i\theta})$, $|B(e^{i\theta})| \leq 1$. Чтобы доказать, что почти всюду $|B(e^{i\theta})| = 1$, положим $B_n(z) = \prod_{k=1}^n b_k(z)$. Тогда $B(z)/B_n(z)$ тоже будет произведением Бляшке и

$$\left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|B(e^{i\theta})|}{|B_n(e^{i\theta})|} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

Полагая $n \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int |B(e^{i\theta})| d\theta \geq 1,$$

так что $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду. $\square$

Множители $-\bar{z}_n/|z_n|$ введены с целью сделать сходящимся ряд $\sum \arg b_n(z)$. Для лучшего их запоминания стоит отметить, что при таком выборе $b_n(0) > 0$.

По теоремам 2.1 и 2.2 аналитическая функция $f(z)$ допускает факторизацию

$$f(z) = B(z)g(z), \quad z \in D,$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, а $g(z)$ не имеет нулей в D , тогда и только тогда, когда $\log|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту.

В верхней полуплоскости условие (2.1) заменяется на

$$(2.3) \quad \sum \frac{y_n}{1 + |z_n|^2} < \infty, \quad z_n = x_n + iy_n,$$

а произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$ есть

$$B(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^m \prod_{z_n \neq i} \frac{|z_n^2 + 1|}{z_n^2 + 1} \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}.$$

Если модули $|z_n|$ ограничены, то (2.3) принимает вид $\sum y_n < \infty$, а множители сходимости в произведении Бляшке не нужны, так как $\prod \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}$ уже само сходится.

Теорема 2.3 (Ф. Рисс). Пусть $0 < p < \infty$. Пусть $f(z) \in H^p(D)$, $f \not\equiv 0$, $\{z_n\}$ — нули функции f и $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$. Тогда функция $g(z) = f(z)/B(z)$ принадлежит $H^p(D)$ и $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Доказательство. Как отмечалось выше, произведение $B(z)$ сходится для $f \in H^p$. Пусть B_n — конечное произведение

Бляшке с нулями $z_1, \dots, z_n$, а $g_n = f/B_n$. По теореме 1.6.6 при $r < 1$

$$\int |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{R \rightarrow 1} \int \frac{|f(Re^{i\theta})|^p}{|B_n(Re^{i\theta})|^p} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Если $1 - R$ мало, то $|B_n(Re^{i\theta})| > 1 - \varepsilon$ и

$$\int |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{R \rightarrow 1} \int |f(Re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_{H^p}^p.$$

Так как $|g_n|$, возрастая, стремятся к $|g|$, а $|g| \geq |f|$, то $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. $\square$

Теорема 2.3 справедлива и для $H^p(dt)$, потому что из доказательства теоремы 1.6.8 следует

$$\sup_y \int |f(x + iy)|^p dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int |f(x + iy)|^p dx.$$

Произведения Бляшке допускают простое описание в терминах гармонических мажорант.

Теорема 2.4. Пусть $f \in H^\infty(D)$, $\|f\|_{H^\infty} \leq 1$. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) $f(z) = \lambda B(z)$, где λ — постоянная, $|\lambda| = 1$, а $B(z)$ — произведение Бляшке.

(b) $\lim_{r \rightarrow 1} \int \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = 0$.

(с) Наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log |f(z)|$ есть 0.

Доказательство. Эквивалентность (b) и (с) доказывается теоремой 1.6.7.

Предположим, что $f(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$; пусть $\varepsilon > 0$. Мы можем поделить $f(z)$ на такое конечное произведение Бляшке $B_n(z)$, что $|(f/B_n)(0)| > 1 - \varepsilon$. Но B_n непрерывно в $\bar{D}$ и $|B_n(e^{i\theta})| = 1$, откуда

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r \rightarrow 1} \int \log \left| \frac{f}{B_n}(re^{i\theta}) \right| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Так как $\log |f/B_n|$ — субгармоническая и отрицательная функция, то

$$\log(1 - \varepsilon) \leq \int \log \left| \frac{f}{B_n}(re^{i\theta}) \right| \frac{d\theta}{2\pi} \leq 0.$$

Стало быть, (b) выполняется.

Пусть теперь выполняется (с). Положим $g(z) = f(z)/B(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по нулям функции $f(z)$. Тогда

$$\log |f(z)| \leq \log |g(z)| \leq 0,$$

так как $\|f\|_\infty \leq 1$. Поскольку $\log|g(z)|$ является гармонической мажорантой функции $\log|f(z)|$, то по условию (с) $\log|g(z)| = 0$. Значит, $g(z) = \lambda$, где λ — постоянная, $|\lambda| = 1$, и (а) выполнено. $\square$

3. Максимальные функции и граничные значения

Пусть $f(z) \in H^p(dt)$. Если $p > 1$, то мы знаем из гл. I, что некасательная максимальная функция $f^*(t)$ входит в L^p и что $f(z)$ некасательно стремится к L^p -функции $f(t)$ почти всюду. Важное свойство пространств H^p состоит в том, что такое поведение сохраняется при всех p , $0 < p \leq \infty$.

Теорема 3.1. Пусть $0 < p < \infty$, и пусть $f(z)$ — функция из $H^p(dt)$. При любом $\alpha > 0$ некасательная максимальная функция

$$f^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |f(z)|$$

входит в $L^p(\mathbb{R})$ и

$$(3.1) \quad \|f^*\|_p^p \leq A_\alpha \|f\|_{H^p}^p,$$

где A_α зависит только от α . Далее, при почти всех $t \in \mathbb{R}$ $f(z)$ имеет некасательный предел $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, причем

$$(3.2) \quad \int |f(t)|^p dt = \|f\|_p^p = \|f\|_{H^p}^p$$

$$(3.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \|f(t + iy) - f(t)\|_p^p = 0.$$

Доказательство. Случай $p > 1$ нашей теоремы доказан в разд. 5 гл. I (кроме независимости A_α от p). Чтобы охватить p , меньшие 1, мы используем теорему 2.3. Пусть $f \in H^p$, $f \neq 0$, пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с теми же нулями, и пусть $g(z) = f(z)/B(z)$. Тогда $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$, и так как $|f(z)| \leq |g(z)|$, то $|f^*(t)| \leq |g^*(t)|$. Пусть $p_1 > 1$. Так как g не имеет нулей и $g \in H^p$, то аналитическая функция g^{p/p_1} принадлежит H^{p_1} . Следовательно, $(g^*)^{p/p_1} = (g^{p/p_1})^* \in L^{p_1}$, и по теореме I.5.1

$$\|g^*\|_p^p = \|(g^*)^{p/p_1}\|_{p_1}^{p_1} \leq B_{p_1} \|g\|_{H^p}^p.$$

Выбирая $p_1 = 2$, мы видим, что (3.1) выполняется с постоянной, не зависящей от p (ведь $f^* \leq g^*$).

Далее, $G(z) = g(z)^{p/p_1}$ имеет почти всюду некасательный предел $G(t)$. Выбирая p_1 так, чтобы $p_1/p = m$ было целым числом, мы видим, что $g(z) = G(z)^m$ тоже имеет некасательный предел.

Поскольку $B(z)$ почти всюду имеет граничные значения, мы заключаем, что и $f(z)$ почти всюду их имеет. Теперь из (3.1) и теоремы об ограниченной сходимости вытекает, что $f \in L^p(\mathbb{R})$ и что выполняются (3.2) и (3.3). $\square$

Равенство (3.2) устанавливает изометрию между $H^p(dt)$ и замкнутым подпространством пространства $L^p(\mathbb{R})$. При $p < 1$, хотя L^p и не является банаховым пространством, оно является, как и H^p , полным метрическим пространством с метрикой $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$. При $p \geq 1$ это пространство граничных значений функций из H^p допускает простое описание.

Следствие 3.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$. Функция $f(t)$ почти всюду совпадает с некасательным пределом функции из $H^p(dt)$ тогда и только тогда, когда ее интеграл Пуассона $f(z) = P_y * f(x)$ является аналитической функцией в $\mathcal{H}$. Этот интеграл Пуассона $f(z)$ и есть соответствующая функция из H^p .

Доказательство. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$ и $f(z) = P_y * f(x)$ аналитична, то, согласно гл. I, $f(z) \in H^p(dt)$ и $f(z)$ некасательно сходится к $f(t)$. Обратно, предположим, что $f(z)$ — произвольная функция из $H^p(dt)$. Если $p > 1$, то по теореме I.5.3 $f(z)$ имеет некасательные пределы $f(t)$ и $f(z) = P_y * f(x)$. Случай $p = 1$ покрывается теоремой 3.1. Если $f \in H^1$, то по (1.3) и лемме I.3.4

$$f(z + i\varepsilon) = \int P_z(t) f(t + i\varepsilon) dt, \quad \varepsilon > 0.$$

Согласно (3.3), это значит, что $f(z)$ есть интеграл Пуассона своей граничной функции $f(t)$. $\square$

Некоторые дальнейшие характеристики граничных значений функций из H^p см. в упр. 2. Ввиду (3.2) мы можем отождествить $f(z) \in H^p$ с ее граничным значением $f(t)$ ¹⁾. Однако мы не указываем какого-либо метода восстановления $f(z)$ по $f(t)$ при $p > 1$.

Конечно, теорема 3.1 остается в силе и для круга. Равенство (3.2) для соответствия $f(z) \rightarrow f(e^{i\theta})$ показывает, что $H^p(D)$ изометрично замкнутому подпространству в $L^p(d\theta/2\pi)$. При $p < 1$ функция $f(z)$ есть интеграл Пуассона от $f(e^{i\theta})$. Аналог (3.3),

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = 0,$$

вместе с тем очевидным фактом, что $f(rz)$, $r < 1$, является суммой своего равномерно сходящегося ряда Тейлора, показывает нам, что пространство граничных значений функций из $H^p(D)$

¹⁾ И мы пишем $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{H^p}$.

при $p < \infty$ совпадает с замыканием в $L^p(d\theta/2\pi)$ аналитических полиномов. Далее, если последовательность полиномов $p_n(e^{i\theta})$ сходится к $f(e^{i\theta})$ в L^p , то по (3.2) $\|p_n - f\|_{H^p}^p \rightarrow 0$. Поскольку $H^p(D) \subset H^1(D)$, $p \geq 1$, то при $p \geq 1$ граничные значения функций из $H^p(D)$ имеют ряды Фурье

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

с одними лишь неотрицательными показателями. Коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

совпадают с коэффициентами Тейлора функции $f(z) = \sum a_n z^n$. Таким образом, теория пространств H^p образует мост между гармоническим и комплексным анализом.

В случае верхней полуплоскости мы выводим из (3.3), что равномерно непрерывные ограниченные функции плотны в H^p . Действительно, если $f \in H^p$, то

$$|f(x + iy)| \leq \left(\frac{2}{\pi y}\right)^{1/p} \|f\|_{H^p}, \quad y > 0,$$

и

$$|f'(x + iy)| \leq \frac{2}{y} \left(\frac{4}{\pi y}\right)^{1/p} \|f\|_{H^p}, \quad y > 0,$$

в силу предыдущего неравенства и леммы Шварца, примененной к кругу $\Delta(z, y/2)$. Нам понадобятся также некоторые классы более гладких аналитических функций, которые плотны в $H^p(dt)$ и будут играть роль полиномов. Пусть N — положительное целое число, и пусть $\mathfrak{A}_N$ обозначает семейство функций из $H^p(dt)$, таких, что

(i) $f(z)$ непрерывна в $\bar{\mathcal{H}}$ и бесконечно дифференцируема, $f \in C^\infty$;

(ii) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^N |f(z)| = 0$, $z \in \bar{\mathcal{H}}$.

Следствие 3.3. Пусть N — целое положительное число. При $0 < p < \infty$ класс $\mathfrak{A}_N$ плотен в $H^p(dt)$. Если же $f(z) \in H^\infty$, то найдутся такие функции $f_n \in \mathfrak{A}_N$, что $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ и $f_n(t) \rightarrow f(t)$ почти всюду.

Доказательство. Если бы не условия убывания (ii), то мы могли бы приблизить f гладкими функциями $f(z + i/n)$, которые сходятся к f в H^p при $p < \infty$ и ограниченно сходятся к $f(t)$ почти всюду при $p = \infty$.

Но существуют такие специальные функции $g_k(z)$, что

$$(a) \quad g_k(z) \in \mathfrak{A}_N,$$

$$(b) \quad |g_k(z)| \leq 1, \quad z \in \bar{\mathcal{H}},$$

$$(c) \quad g_k(z) \rightarrow 1, \quad z \in \bar{\mathcal{H}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Заметим перед тем, как строить g_k , что функции

$$f_n(z) = g_n(z)f(z + 1/n)$$

лежат в $\mathfrak{A}_N$ и дают нужное приближение к f .

Сердцевину доказательства — построение $g_k(z)$ — мы дадим для единичного круга, имея в виду, что $w = -1$ соответствует $z = \infty$. Пусть $\alpha_k < 1$, $\alpha_k \rightarrow 1$. Функция

$$h_k(w) = \left(\frac{w + \alpha_k}{1 + \alpha_k w} \right)^{N+1}$$

имеет в точке $-\alpha_k$ нуль кратности $N+1$. Эти $h_k(w)$ ограничены по модулю единицей и при фиксированном N сходятся к 1 равномерно на компактных множествах, лежащих в $\bar{D} \setminus \{1\}$. Значит, функции

$$g_k(z) = h_k(\alpha_k w), \quad w = \frac{i-z}{i+z},$$

удовлетворяют условиям (a) — (c). $\square$

Теперь мы можем до конца выяснить соотношение между $H^p(dt)$ и $H^p(D)$.

Следствие 3.4. Пусть $0 < p < \infty$, $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости и

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z+i)^{2/p}} f(z).$$

Функция $|f(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту тогда и только тогда, когда $F \in H^p$. В этом случае

$$(3.4) \quad \|F\|_{H^p}^p = u(i),$$

где $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $|f(z)|^p$.

Доказательство. Пусть $g(w) = f(z)$, $z = i(1-w)/(1+w)$. Следствие утверждает, что $g \in H^p(D)$ тогда и только тогда, когда $F \in H^p(dt)$, и $\|g\|_p = \|F\|_p$. Если $N > 2/p$ и $F \in \mathfrak{A}_N$, то соответствующая функция $g(w)$ ограничена в D и, поскольку $d\theta/2\pi$ соответствует $dt/\pi(1+t^2)$, то

$$\int |g(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int |F(t)|^p dt.$$

Но $\mathfrak{A}_N$ плотно в H^p , и из (3.2) следует, что $g \in H^p(D)$ при $F \in H^p(dt)$ и $\|g\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}$. Так как по лемме 1.2 $F \in H^p(dt)$ при $g \in H^p(D)$, доказательство закончено. $\square$

Тот факт, что вместо неравенства (1.1) справедливо равенство (3.4), означает, что в формуле (1.2) для наименьшей гармонической мажоранты функции $|f(z)|^p$ всегда $c = 0$. Мы увидим в разд. 4, что наименьшей гармонической мажорантой служит интеграл Пуассона суммируемой функции $|f(t)|^p$.

Следующее утверждение заслуживает внимания, поскольку недавно было установлено обратное к нему при $p \leq 1$. Оно будет доказано в гл. III.

Следствие 3.5. Пусть $0 < p < \infty$, и пусть $u(z)$ — вещественная гармоническая функция в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. Если $u(z)$ является вещественной частью функции $f(z) \in H^p$, то

$$u^*(t) = \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)|$$

принадлежит $L^p(\mathbb{R})$.

Доказательство тривиально ввиду теоремы 3.1.

Вернемся теперь к изучению граничных значений в случае $p = 1$. Если гармоническая функция $u(z)$ такова, что

$$\sup_y \int |u(x + iy)| dx < \infty,$$

то она не обязана быть интегралом Пуассона своих граничных значений $u(t)$. Мы можем сказать только, что $u(z)$ есть интеграл Пуассона конечной меры. Однако если $u(z)$ вдобавок аналитична, то эта мера абсолютно непрерывна и ее плотность совпадает с $u(t)$. Это происходит потому, что максимальная функция $u^*(t)$ теперь интегрируема.

Теорема 3.6. Если $f(t) \in H^1(dt)$, то $f(z)$ является интегралом Пуассона своих граничных значений:

$$(3.5) \quad f(z) = \int P_y(x - t) f(t) dt.$$

Обратно, если μ — конечная комплексная мера на $\mathbb{R}$ и интеграл Пуассона $f(z) = P_y * \mu(x)$ является аналитической функцией в $\mathcal{H}$, то μ абсолютно непрерывна и $d\mu = f(t)dt$, где $f(t)$ — граничное значение интеграла Пуассона $f(z)$.

Доказательство. Если $f(z) \in H^1$, то мы уже получили (3.5) при доказательстве следствия 3.2. Обратно, если $f(z) = P_y * \mu(x)$ — аналитическая функция, то по неравенству Минковского для интегралов она будет H^1 -функцией и, следовательно, интегралом Пуассона своих граничных значений.

Разность мер $d\mu(t) - f(t)dt = dv(t)$ имеет нулевой интеграл Пуассона, и, стало быть, $v = 0$ по теореме I.3.1. $\square$

Лемма 3.7. Пусть $f(z) \in H^1$. Тогда

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i s t} dt = 0$$

при всех $s \leq 0$.

Доказательство. Соответствие $f \rightarrow \hat{f}$ непрерывно, и мы можем считать, что $f \in \mathcal{A}_N$. Тогда $F(z) = \hat{f}(z) e^{-2\pi i s z}$ при $s \leq 0$ тоже принадлежит $\mathcal{A}_N$. Теперь лемма вытекает из теоремы Коши, так как

$$\int_0^\pi |F(Re^{i\theta})| R d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \quad \square$$

Отметим, что

$$(3.6) \quad P_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right).$$

Отметим также, что при $f \in H^1(dt)$ лемма 3.7 в применении к $(t-\bar{z})^{-1}f(t)$ дает

$$\int \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt = 0, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Теорема 3.8. Пусть $d\mu(t)$ — конечная комплексная мера на $\mathbb{R}$, такая, что

$$(a) \quad \int \frac{d\mu(t)}{t-z} = 0, \quad \operatorname{Im} z < 0,$$

или

$$(b) \quad \hat{\mu}(s) = \int e^{-2\pi i s t} d\mu(t) = 0, \quad s \leq 0.$$

Тогда $d\mu$ абсолютно непрерывна и $d\mu = f(t) dt$, где $f \in H^1$.

Доказательство. Если выполняется (a), то ввиду (3.6) функция $f(z) = P_y * \mu(x)$ аналитична, и наш результат вытекает из теоремы 3.6.

Пусть выполняется (b). Преобразование Фурье ядра Пуассона $P_y(t)$ равно

$$\int e^{-2\pi i s t} P_y(t) dt = e^{-2\pi |s| y},$$

потому что $\bar{P}_y(-s) = \overline{P_y(s)}$ из-за вещественности P_y , а $e^{-2\pi i s z}$ при $s \leq 0$ является ограниченной гармонической функцией с граничными значениями $e^{-2\pi i s t}$. Пусть $\hat{f}_y(x) = P_y * \mu(x)$. По теореме Фубини

$$\hat{f}_y(s) = \begin{cases} e^{-2\pi s y} \hat{\mu}(s), & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Поскольку $f_y \in L^1$, то имеем по формуле обращения

$$f_y(x) = \int e^{2\pi i x s} \hat{f}_y(s) ds = \int_0^\infty e^{2\pi i (x+iy)s} \hat{\mu}(s) ds.$$

Дифференцирование под знаком интеграла показывает, что $\hat{f}(z) = \hat{f}_y(x)$ аналитична, а тогда по теореме 3.6 $\hat{f}(z) \in H^1$. $\square$

Аналог теоремы 3.6 или, что то же самое, теорема 3.8 для круга — это половина знаменитой теоремы Ф. и М. Риссов. Вторая половина утверждает, что если $\hat{f}(z) \in H^1$ и $\hat{f}(z) \not\equiv 0$, то $|\hat{f}(t)| > 0$ почти всюду. Это — следствие более сильного результата, который мы докажем в следующем разделе.

Теорема I.5.6 о карлесоновых мерах также распространяется на пространства H^p при $0 < p \leq 1$, потому что ключевой оценкой в ее доказательстве служит максимальная теорема.

Теорема 3.9 (Карлесон). Пусть σ — положительная мера в верхней полуплоскости. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) σ — мера Карлесона, т. е. при некотором $N(\sigma)$

$$\sigma(Q) \leq N(\sigma)h$$

для всех квадратов

$$Q = \{x_0 < x < x_0 + h, 0 < y < h\};$$

(b) при всех p , $0 < p < \infty$,

$$\int |f|^p d\sigma \leq A \|f\|_{H^p}^p, \quad f \in H^p;$$

(с) при некотором p , $0 < p < \infty$, $f \in L^p(\sigma)$ для всех $f \in H^p$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы I.5.6, из (3.1) и леммы I.5.5 вытекает, что (а) влечет за собой (b). Очевидно, что (b) влечет за собой (с). С другой стороны, если (с) выполняется, то и (b) выполняется при том же значении $p < \infty$. Это следует из теоремы о замкнутом графике, которая здесь верна даже при $p < 1$ (см. Данфорд и Шварц [1958]). Можно и непосредственно убедиться, что если $f_n \in H^p$, $\|f_n\|_p = 1$ и $\int |f_n|^p d\sigma \rightarrow \infty$, то функция $\sum \alpha_n f_n$ при подходящих α_n будет опровергающим примером к утверждению (с).

Итак, пусть выполняется (b) при некотором $p > 0$. Пусть Q — квадрат $\{x_0 < x < x_0 + y_0, 0 < y < y_0\}$ и

$$f(z) = \left(\frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right)^{1/p}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Тогда $f \in H^p$, $\|f\|_p^p = \int P_{z_0}(t) dt = 1$. Но $|f(z)|^p \geq (5\pi y_0)^{-1}$, $z \in Q$, и потому $\sigma(Q) \leq \sigma\{z: |f(z)|^p \geq (5\pi y_0)^{-1/p}\} \leq 5\pi A y_0$. Следовательно, выполнено (а). $\square$

4. $(1/\pi) \int (\log |f(t)|/(1+t^2)) dt > -\infty$

Условие в заголовке этого раздела выделяет модули H^p -функций среди всех положительных функций в L^p . Этот факт — фундаментальный результат теории пространств H^p . Для круга он принадлежит Сегё при $p=2$ и Ф. Риссу при остальных p . Йенсен [1899] первым отметил приведенное ниже неравенство (4.1) для функций, аналитических вплоть до ∂D , поэтому оно часто называется неравенством Йенсена. Мы предпочитаем называть так неравенство для средних с выпуклыми функциями из теоремы I.6.1.

В этом разделе важно, что для функции $f \in H^p$ субгармоническая функция

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{p} |f(re^{i\theta})|^p$$

мажорируется положительной суммируемой функцией от θ . В начале нам будет проще работать с кругом.

Теорема 4.1. Если $0 < p \leq \infty$ и $f(z) \in H^p(D)$, $f(z) \not\equiv 0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int \log |f(e^{i\theta})| d\theta > -\infty.$$

Если $f(0) \neq 0$, то

$$(4.1) \quad \log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Вообще, если $f(z_0) \neq 0$, то

$$(4.2) \quad \log |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \log |f(e^{i\theta})| P_{z_0}(\theta) d\theta.$$

Доказательство. По теореме I.6.7 и в силу субгармоничности функции $\log |f|$

$$\log |f(z)| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int \log |f(re^{i\theta})| P_z(\theta) d\theta.$$

Но $\log |f(re^{i\theta})| \rightarrow \log |f(e^{i\theta})|$ почти всюду, и все эти функции ограничены сверху интегрируемой функцией $(1/p) |f^*(\theta)|^p$, где f^* — максимальная функция. Значит,

$$\int \log^+ |f(re^{i\theta})| P_{z_0}(\theta) d\theta \rightarrow \int \log^+ |f(e^{i\theta})| P_{z_0}(\theta) d\theta.$$

К отрицательным частям можно применить лемму Фату и получить

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int \log |f(re^{i\theta})| P_{z_0}(\theta) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Это доказывает (4.1) и (4.2). Оставшееся неравенство получается удалением нулей из начала координат. $\square$

Заметим, что тот же результат для верхней полуплоскости

$$(4.3) \quad \log |f(z_0)| \leq \int \log |f(t)| P_{z_0}(t) dt, \quad f \in H^p,$$

получается заменой переменной из теоремы 4.1 и леммы 1.1.

Следствие 4.2. Если $f \in H^p$ и $f(t) = 0$ на множестве положительной меры, то $f \equiv 0$.

Следствие 4.2 составляет вторую половину теоремы Ф. и М. Риссов. Если $d\mu(t)$ — конечная мера, а $P_y * \mu(x)$ аналитична, то не только $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно dt , но и dt абсолютно непрерывна относительно $d\mu$.

Следствие 4.3. Пусть $0 < p, r \leq \infty$. Если $f \in H^p$ и если граничная функция $f(t)$ принадлежит L^r , то $f \in H^r$.

Часто это следствие записывается так:

$$H^p \cap L^r \subset H^r.$$

Доказательство. Применение неравенства Йенсена с выпуклой функцией $\varphi(s) = e^{rs}$ и вероятностной мерой $P_y(x - t)dt$ к неравенству (4.3) дает

$$|f(z)|^r \leq \int |f(t)|^r P_y(x - t) dt.$$

Интегрированием по x получаем $f \in H^r$. $\square$

Теорема 4.4. Пусть $h(t)$ — неотрицательная функция из $L^p(\mathbb{R})$. Функция $f(z) \in H^p(dt)$, такая, что $|f(t)| = h(t)$ почти всюду, существует тогда и только тогда, когда

$$(4.4) \quad \int \frac{\log h(t)}{1+t^2} dt > -\infty.$$

Доказательство. Необходимость условия (4.4) уже была доказана. Для доказательства достаточности заметим, что $\log h \leq (1/p) |h|^p$ и (4.4) равносильно включению $\log h \in L^1(dt/(1+t^2))$. Пусть $u(z)$ — интеграл Пуассона от $\log h(t)$, а $v(z)$ — функция, гармонически сопряженная с $u(z)$ (т. е. функция $u(z) + iv(z)$ аналитична; такая функция $v(z)$ существует, потому что полуплоскость $\mathcal{H}$ односвязна; она единственна с точностью до аддитивной постоянной). Мы получим функцию

$$f(z) = e^{u(z) + iv(z)},$$

аналитическую в $\mathcal{H}$. При $p < \infty$ неравенство Йенсена дает

$$|f(z)|^p \leq \int P_y(x - t) |h(t)|^p dt,$$

и потому $f \in H^p$. При $p = \infty$ функция $u(z)$ ограничена сверху, и потому $f \in H^\infty$. $\square$

Неравенство (4.4) особенно важно при $p = \infty$. Пусть $h \geq 0$, $h \in L^\infty$ и, кроме того, $h^{-1} \in L^\infty$. Тогда $f = e^{u+iv} \in H^\infty$ и также

$$1/f = e^{-(u+iv)} \in H^\infty.$$

Иными словами, f — обратимая функция в H^∞ . Мы будем писать $f \in (H^\infty)^{-1}$. Чтобы подчеркнуть этот факт, мы сформулируем его отдельно, полагая $g = \log h$, так что $g \in L^\infty$ тогда и только тогда, когда $h \in L^\infty$ и $1/h \in L^\infty$.

Теорема 4.5. *Каждая вещественная функция $g \in L^\infty$ имеет вид $\log |f|$, где $f \in (H^\infty)^{-1}$ — обратимая функция из H^∞ .*

На языке теории равномерных алгебр теорема 4.5 утверждает, что H^∞ является строго логмодулярной (strongly logmodular) подалгеброй алгебры L^∞ . Она также и логмодулярная (logmodular) подалгебра алгебры L^∞ ; это значит, что множество

$$\log | (H^\infty)^{-1} | = \{ \log |f(t)| : f \in H^\infty, 1/f \in H^\infty \}$$

плотно в пространстве $L^\infty_{\mathbb{R}}$ вещественных функций из L^∞ . Свойства H^∞ как банаховой алгебры мы будем обсуждать ниже, а сейчас хотим только сказать, что теорема 4.4 — мощное средство для построения H^p -функций.

Пусть $h(t) \geq 0$ и

$$\int \frac{|\log h(t)|}{1+t^2} dt < \infty.$$

Функция $f(z) = e^{u(z)+iv(z)}$, где

$$(4.5) \quad u(z) = P_y * (\log h)(x),$$

а $v(z)$ — гармоническая сопряженная функция, называется *внешней функцией*. Внешняя функция $f(z)$ определяется по $h(t)$ однозначно с точностью до унимодулярного постоянного множителя. Он возникает из-за неоднозначности в определении гармонически сопряженной функции $v(z)$. Функция $|f(z)|$ почти всюду имеет граничные значения $h(t)$, и неравенство Йенсена вместе с (4.5) показывает, что $f(z) \in H^p$ тогда и только тогда, когда $f(t) \in L^p$. Внешние функции из H^p можно описать по-разному.

Теорема 4.6. *Пусть $0 < p \leq \infty$ и $f(z) \in H^p$, $f(z) \not\equiv 0$. Следующие условия эквивалентны:*

(а) f — внешняя функция;

(б) для всех $z \in \mathcal{H}$ в (4.3) имеет место равенство, т. е.

$$(4.6) \quad \log |f(z)| = \int \log |f(t)| P_y(x-t) dt;$$

(с) (4.6) выполняется для некоторого $z_0 \in \mathcal{H}$;

(d) если $g(z) \in H^p$ и $|g(t)| = |f(t)|$ почти всюду, то $|g(z)| \leq |f(z)|$, $z \in \mathcal{H}$;

(е) $f(z)$ не имеет нулей в $\mathcal{H}$, и гармоническая функция $\log|f(z)|$ есть интеграл Пуассона такой функции $k(t)$, что

$$\int \frac{|k(t)|}{1+t^2} dt < \infty, \quad e^{k(t)} \in L^p.$$

Доказательство. Прежде всего, (е) — это просто переформулировка определения внешней функции — ведь функция без нулей всегда имеет вид $f(z) = e^{u(z)+iv(z)}$, $u = \log|f|$. Таким образом, (а) и (е) эквивалентны.

(а) влечет за собой (b) по определению. Если (b) выполняется, то выполняется и (d), что мы увидим, применяя (4.3) к функции $g(z)$. Далее, если (d) выполнено и $g(z)$ — внешняя функция, определенная по функции $\log|f(t)|$, то аналитическая функция $f(z)/g(z)$ должна быть по модулю равна 1, откуда $f = \lambda g$, $|\lambda| = 1$, и f — внешняя функция. Значит, (а), (b), (d) и (е) эквивалентны.

(b), очевидно, влечет за собой (с). Пусть теперь выполнено (с), и снова пусть g — внешняя функция, определенная по функции $\log|f(t)|$. Тогда $|f(z)/g(z)| \leq 1$ и (с) вместе с принципом максимума показывает, что $|f/g| = 1$, т. е. f — внешняя функция. $\square$

Функция $S(z) = e^{iz}$ не имеет нулей в верхней полуплоскости и $S \in H^\infty$, но S не является внешней функцией, так как $\log|S(z)| = -y$ не является интегралом Пуассона.

Следствие 4.7. Если $f \in H^p$ и $1/f \in H^r$ при некотором $r > 0$, то f — внешняя функция.

В самом деле, f удовлетворяет условию (4.6).

Следствие 4.8. Пусть $f \in H^p$. При любом из двух следующих условий f будет внешней функцией:

(а) $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, $z \in \mathcal{H}$;

(b) существует дуга Γ класса C^1 с концом в 0, такая, что $f(\mathcal{H}) \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Доказательство. Если выполняется (а), то $f + \varepsilon$ будет внешней функцией при любом $\varepsilon > 0$ (так как $(f + \varepsilon)^{-1} \in H^\infty$). Тогда

$$\int \log|f(t) + \varepsilon| P_y(x-t) dt \rightarrow \int \log|f(t)| P_y(x-t) dt, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

по теореме об ограниченной сходимости на множестве $\{t: |f(t)| \geq 1/2\}$ и по теореме о монотонной сходимости на множестве $\{t: |f(t)| < 1/2\}$. Значит, (4.6) справедливо и f — внешняя функция.

Приведенное рассуждение показывает, что $f(z)$ будет внешней функцией, если $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $|f(z)| < 1$. Предположим, что выполнено (b). Заменяя $f(z)$ на $\lambda f(z)$, $|\lambda| = 1$, мы можем считать, что Γ имеет касательный вектор $(-1, 0)$ при $z = 0$. Значит, при достаточно малом δ у аналитической функции $g(z) = (f(z)/\delta)^{1/5}$ будет $\operatorname{Re} g(z) > 0$ при $|g(z)| < 1$. Следовательно, $g(z)$ внешняя и $f = \delta^5 g^5$ тоже. $\square$

5. Класс Неванлинны

В этом разделе мы по-прежнему используем тот факт, что $\log|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту для $f \in H^p$, но теперь для нас будет важно, что наименьшая гармоническая мажоранта является интегралом Пуассона.

Аналитическая функция $f(z)$ в D или $\mathcal{H}$ называется функцией класса Неванлинны, $f \in N$, если субгармоническая функция $\log^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту. Это определение конформно-инвариантно, так что классы Неванлинны в D и $\mathcal{H}$ совпадают, но легче обсуждать класс N в круге, где он описывается условием

$$(5.1) \quad \sup_r \int \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta / 2\pi < \infty.$$

Ясно, что $H^p \subset N$, поскольку $\log^+ |f(z)| \leq \frac{1}{p} |f(z)|^p$ ($p > 0$).

Теорема 5.1. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в D , $f(z) \not\equiv 0$. Функция f принадлежит классу Неванлинны тогда и только тогда, когда наименьшей гармонической мажорантой функции $\log|f|$ служит интеграл Пуассона некоторой конечной меры на ∂D .

Доказательство. Если

$$\log|f(z)| \leq \int P_z(\theta) d\mu(\theta)$$

для некоторой конечной меры μ , то

$$\log^+ |f(z)| \leq \int P_z(\theta) d\mu^+(\theta),$$

где μ^+ — положительная часть меры μ ; стало быть, $\log^+|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту.

Обратно, если $f \in N$, то $\log^+|f(z)|$ мажорируется некоторой положительной гармонической функцией $U(z)$. Так как $\log|f(z)| \leq \log^+|f(z)|$, то $\log|f(z)|$ имеет наименьшую гармоническую мажоранту $u(z)$, такую, что $u(z) \leq U(z)$. Значит, $u(z) = U(z) - (U(z) - u(z))$ есть разность двух положительных

гармонических функций, т. е. $u(z)$ совпадает с интегралом Пуассона конечной меры. $\square$

Доказательство теоремы 5.1 в действительности показывает, что субгармоническая функция $v(z)$ мажорируется интегралом Пуассона тогда и только тогда, когда $v^+ = \max(v, 0)$ имеет гармоническую мажоранту; в этом случае наименьшая гармоническая мажоранта функции $v(z)$ также является интегралом Пуассона.

Лемма 5.2. Пусть $f(z) \in N$, $f \not\equiv 0$, и $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по нулям функции $f(z)$. Оно сходится и $g(z) = f(z)/B(z) \in N$. Кроме того, $\log|g(z)|$ — наименьшая гармоническая мажоранта $\log|f(z)|$.

Доказательство. Поскольку $\log|f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту, то $B(z)$ сходится (см. разд. 2). Пусть $u(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта для $\log|f(z)|$. Поскольку $|B(z)| \leq 1$, то $u(z) \leq \log|g(z)|$. С другой стороны,

$$\log|B(z)| = \log|f(z)| - \log|g(z)| \leq u(z) - \log|g(z)|.$$

По теореме 2.4 это означает, что $0 \leq u(z) - \log|g(z)|$ и, стало быть, $u(z) = \log|g(z)|$. Конечно, тогда и $g \in N$. $\square$

Теорема 5.3. Пусть $f \in N$, $f \not\equiv 0$. Тогда $f(z)$ почти всюду имеет некасательные пределы $f(e^{i\theta})$, причем

$$(5.2) \quad \log|f(e^{i\theta})| \in L^1(d\theta).$$

Наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log|f(z)|$ имеет вид $\int P_z(\theta) d\mu(\theta)$, где

$$(5.3) \quad d\mu(\theta) = \log|f(e^{i\theta})| d\theta/2\pi + d\mu_s(\theta),$$

а $d\mu_s$ сингулярна относительно $d\theta$.

Доказательство. Пусть $g(z) = f(z)/B(z)$, где $B(z)$ имеет те же нули, что и $f(z)$. Из теоремы 5.1 и леммы 5.2 мы знаем, что

$$(5.4) \quad \log|g(z)| = \int P_z(\theta) d\mu(\theta).$$

Пусть $d\mu = k(\theta)d\theta/2\pi + d\mu_s$, где мера μ_s сингулярна относительно $d\theta$. Ввиду (5.4) и теоремы I.5.3 $\log|g(z)|$ имеет почти всюду некасательный предел $k(\theta)$. Но $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, значит, и $\log|f(z)|$ имеет почти всюду некасательный предел $k(\theta)$. Следовательно, (5.2) и (5.3) будут доказаны, если мы докажем существование некасательных пределов у $f(z)$.

В силу (5.4) $\log|g(z)|$ является разностью двух положительных гармонических функций, $\log|g| = u_1 - u_2$, $u_i \geq 0$. Пусть

$v_j(z)$ гармонически сопряжена с $u_j(z)$. Так как круг односвязен, то $v_j(z)$ определены корректно, а при условии $v_j(0) = 0$ — однозначно. Теперь

$$\log g(z) = (u_1 + iv_1) - (u_2 + iv_2) + ic, \quad c \in \mathbb{R},$$

откуда

$$g(z) = \frac{e^{ic} e^{-(u_2 + iv_2)}}{e^{-(u_1 + iv_1)}}.$$

Ограниченные функции $e^{-(u_j + iv_j)}$ почти всюду имеют некасательные пределы, которые не могут обращаться в 0 на множестве положительной меры. Значит, и $g(z)$, а с ней и $f(z) = B(z)g(z)$ имеют некасательные пределы. $\square$

Если $f \in N$, $f \not\equiv 0$, то, согласно (5.2),

$$\int \log |f(\theta)| d\theta > -\infty.$$

Однако более точное неравенство

$$(5.5) \quad \log |f(z)| \leq \int \log |f(\theta)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

которое для H^p -функций было доказано в разд. 4, уже не обязательно верно для $f \in N$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \exp \frac{1+z}{1-z}.$$

Тогда $\log |g(z)| = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = P_z(1)$, $g \in N$, и мера, соответствующая $\log |g(z)|$, — это единичная нагрузка в точке $e^{i\theta} = 1$. Но

$$\log |g(0)| = 1 > 0 = \int \log |g(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi}$$

и для $g(z)$ (5.5) не верно.

Этот контрпример содержит единственную причину, по которой (5.5) может нарушаться для функции из N . Правая часть (5.5) есть гармоническая функция; она мажорирует $\log |f(z)|$ тогда и только тогда, когда она больше наименьшей гармонической мажоранты $\log |f(z)|$, т. е. интеграла Пуассона меры $d\mu$ из (5.3). Сравнивая (5.3) и (5.5), мы видим, что (5.5) выполняется для функции $f \in N$ тогда и только тогда, когда сингулярное слагаемое $d\mu_s$ в (5.3) неположительно.

Те функции $f \in N$, для которых $d\mu_s \leq 0$, образуют подкласс $N^+ \subset N$. Вот его классическое определение¹⁾: пусть $f \in N$; тогда

¹⁾ Класс N^+ был введен В. И. Смирновым; его часто обозначают буквой D и называют *классом Смирнова* (см., например, Привалов [1950]). — Прим. ред.

$f \in N^+$, если

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Теорема 5.4. Пусть $f \in N$, $f \not\equiv 0$. Следующие условия равносильны:

- (а) $f \in N^+$;
 (б) наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log^+ |f(z)|$ есть

$$\int \log^+ |f(\theta)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi};$$

- (с) для всех $z \in D$

$$\log |f(z)| \leq \int \log |f(\theta)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi};$$

- (д) наименьшая гармоническая мажоранта функции $\log |f(z)|$ есть интеграл Пуассона меры

$$d\mu = \log |f(\theta)| d\theta/2\pi + d\mu_s,$$

где $d\mu_s \perp d\theta$ и $d\mu_s \leq 0$.

Доказательство. Мы уже доказали, что (с) и (д) эквивалентны. Если $f \in N$, то $\log^+ |f(z)|$ имеет наименьшую гармоническую мажоранту

$$U(z) = \int P_z(\theta) d\nu(\theta),$$

где положительная мера $d\nu$ является слабым пределом мер

$$\log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta/2\pi$$

согласно теореме I.6.7 и последующим замечаниям. По лемме Фату

$$\int \log^+ |f(\theta)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int \log^+ |f(re^{i\theta})| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \int P_z(\theta) d\nu(\theta).$$

Значит,

$$(5.6) \quad \log^+ |f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \leq d\nu$$

(ведь мера определяется своим интегралом Пуассона). По определению $f \in N^+$ тогда и только тогда, когда обе части (5.6) имеют равные интегралы. То есть $f \in N^+$ тогда и только тогда, когда

$$\log^+ |f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} = d\nu,$$

и (а) и (б) эквивалентны.

Наконец, сравнение наименьших гармонических мажорант $\log|f(z)|$ и $\log^+|f(z)|$, как в доказательстве теоремы 5.1, показывает эквивалентность (b) и (d). $\square$

Из (b) или (c) вытекает, что $N \supset N^+ \supset H^p$, $p > 0$, а также что $f \in H^p$ тогда и только тогда, когда $f \in N$ и $f(e^{i\theta}) \in L^p$. Этот факт обобщает следствие 4.3, имеет такое же доказательство (неравенство Йенсена и (c)) и может быть записан в виде $N^+ \cap L^p = H^p$, $p > 0$. Пример перед теоремой 5.4 показывает, что $N \cap L^p \neq H^p$.

Мы возвращаемся к теореме 5.3 и используем формулу (5.3), чтобы получить важную теорему о факторизации для функций из N . Пусть $f(z) \in N$, $f \neq 0$, а $B(z)$ — произведение Бляшке с теми же нулями, что и $f(z)$, и пусть $g(z) = f(z)/B(z)$. Тогда $g(z) \in N$ и $\log|g(z)|$ есть интеграл Пуассона меры μ из (5.3). По теореме 5.4 $f \in N^+$ тогда и только тогда, когда $g \in N^+$.

Нетрудно восстановить g , а значит, и $f = Bg$ по мере μ . Мы будем действовать, как в доказательстве теоремы 5.3, но несколько осторожнее. Положим

$$(5.7) \quad d\mu = \log|f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} - (d\mu_1 - d\mu_2),$$

где $d\mu_j \geq 0$ и $d\mu_j \perp d\theta$. Функция

$$F(z) = \exp \left(\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \right)$$

внешняя в круге, потому что $F = e^{u+iv}$, где u — интеграл Пуассона функции $\log|f(e^{i\theta})|$, а v гармонически сопряжена с u (с нормировкой $v(0) = 0$). Условие $F(0) > 0$ выделяет F среди других внешних функций, связанных с $\log|f(\theta)|$.

Аналогично положим

$$(5.8) \quad S_j(z) = \exp \left(- \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_j(\theta) \right), \quad j = 1, 2.$$

Функции S_j аналитичны в D и обладают следующими свойствами:

- (i) $S_j(z)$ не имеет в D нулей;
- (ii) $|S_j(z)| \leq 1$;
- (iii) $|S_j(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду;
- (iv) $S_j(0) > 0$.

Свойства (i) и (iv) непосредственно вытекают из (5.8), а (ii) выполняется, поскольку $\mu_j \geq 0$ и

$$(5.9) \quad \log|S_j(z)| = - \int P_z(\theta) d\mu_j(\theta),$$

Свойство (iii) вытекает из леммы I.5.4, так как $d\mu_1 \perp d\theta$. Функция со свойствами (i)–(iv) называется *сингулярной*. Каждая сингулярная функция $S(z)$ имеет вид (5.8) (с некоторой сингулярной положительной мерой μ). Эта мера определяется из (5.9).

Ввиду разбиения (5.7)

$$\log |g(z)| = \log |F(z)|^m \log |S_1(z)| - \log |S_2(z)|.$$

Так как $g(z)$ не имеет нулей, то $\log g(z)$ однозначен в D и

$$\log g(z) = ic + \log F(z) + \log S_1(z) - \log S_2(z), \quad c \in \mathbb{R},$$

$$g(z) = e^{ic} F(z) S_1(z) / S_2(z).$$

Мы доказали большую часть теоремы о канонической факторизации.

Теорема 5.5. Пусть $f \in N$, $f \not\equiv 0$. Тогда

$$(5.10) \quad f(z) = cB(z)F(z)S_1(z)/S_2(z), \quad |c| = 1,$$

где B — произведение Бляшке, F — внешняя функция, а S_1 и S_2 — сингулярные функции. Факторизация (5.10) единственна с точностью до выбора постоянной c , $|c| = 1$. Всякая функция вида (5.10) принадлежит N .

Доказательство. Факторизацию (5.10) мы уже получили. С единственностью сомножителей трудности не возникает, потому что $B(z)$ определяется нулями $f(z)$, $F(z)$ определяется по $\log |f(e^{i\theta})|$, поскольку $|B(e^{i\theta})| = |S_1(e^{i\theta})| = |S_2(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, а $S_1(z)$ и $S_2(z)$ определяются наименьшей гармонической мажорантой функции $\log |f(z)|$. Если $f(z)$ имеет вид (5.10), то

$$\log |f(z)| \leq \log |F(z)| + \log |S_1(z)| - \log |S_2(z)|,$$

и $\log |f(z)|$ мажорируется интегралом Пуассона. По теореме 5.1 тогда $f \in N$. $\square$

Следствие 5.6. Пусть $f \in N$, $f \not\equiv 0$. В разложении (5.10) отсутствует второй сингулярный сомножитель, $S_2(z) \equiv 1$, тогда и только тогда, когда $f \in N^+$.

Доказательство. $S_2(z) \equiv 1$ тогда и только тогда, когда

$$d\mu = \log |f(\theta)| (d\theta/2\pi) - d\mu_1,$$

где $d\mu_1 \geq 0$, а это значит, что $f \in N^+$. $\square$

Следующие два утверждения очень важны.

Следствие 5.7. Функция $f \in H^p$, $p > 0$, имеет единственную факторизацию

$$f(z) = cB(z)F(z)S(z),$$

где $|c| = 1$, B — произведение Бляшке, S — сингулярная функция, а F — внешняя функция из H^p .

Следствие 5.8. Пусть $f \in N^+$. Тогда $f \in H^p$ в том и только том случае, когда ее внешний сомножитель F лежит в H^p .

Доказательства этих следствий предоставляются читателю.

6. Внутренние функции

Внутренней функцией называется такая функция $f \in H^\infty$, что $|f(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду. Каждое произведение Бляшке, как и каждая сингулярная функция

$$S(z) = \exp \left(- \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right),$$

где мера μ положительна и сингулярна относительно $d\theta$, — внутренняя функция.

По теореме 5.5 о факторизации каждая внутренняя функция имеет вид

$$f(z) = e^{ic} B(z) S(z), \quad c \in \mathbb{R},$$

где B — произведение Бляшке, а S — сингулярная функция. Если $f \in N^+$ и $|f(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, то f — внутренняя функция, потому что $N^+ \cap L^\infty = H^\infty$. Однако если $f = 1/S$, где S — непостоянная сингулярная функция, то $f \in N$ и $|f(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, но f не является внутренней функцией. Иначе при $z \in D$ получилось бы $|f(z)| \leq 1$ и $|1/f(z)| \leq 1$, что невозможно.

Теорема 6.1. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, и пусть $E \subset \partial D$ — множество предельных точек для $\{z_n\}$. Тогда $B(z)$ аналитически продолжается на дополнение множества

$$E \cup \{1/\bar{z}_n: n = 1, 2, \dots\}$$

на комплексной плоскости. В частности, $B(z)$ аналитична на любой дуге из $\partial D \setminus E$. С другой стороны, $|B(z)|$ не может быть непрерывно продолжена из D в какую-либо точку множества E .

Доказательство. Пусть $B_n(z)$ — конечные произведения Бляшке, сходящиеся к $B(z)$. Тогда $B_n(1/\bar{z}) = 1/\overline{B_n(z)}$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z)$ существует в $\{z: |z| > 1\} \setminus \{1/\bar{z}_n: n = 1, 2, \dots\}$ и является аналитической функцией в этой области. Если $z_0 \in \partial D \setminus E$ и $\delta > 0$ мало, то каждое $B_n(z)$ аналитично в $\Delta = \Delta(z_0, \delta)$ и $B_n(z)$ ограниченно сходятся на $\partial \Delta \setminus \partial D$. Это значит, что $B_n(z)$ сходятся в Δ — хотя бы по интегральной формуле Пуассона для Δ . Стало быть, $B(z)$ аналитична всюду вне $E \cup \{1/\bar{z}_n\}$. Если $z_0 \in E$, то $\lim_{D \ni z \rightarrow z_0} |B(z)| = 0$, и так как $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, то $\lim_{D \ni z \rightarrow z_0} |B(z)| = 1$. Значит, $|B(z)|$ не может быть непрерывно продолжена в точку z_0 . $\square$

После произведений Бляшке простейшая внутренняя функция — это сингулярная функция

$$S(z) = \exp \frac{z+1}{z-1},$$

порожденная точечной массой в 1. Вычисление показывает, что S и все ее производные имеют некасательный предел 0 в $e^{i\theta} = 1$. Посредством $w = (1+z)/(1-z)$ круг D отображается на правую полуплоскость $\{\operatorname{Re} w > 0\}$, причем $z = 1$ соответствует $w = \infty$ и $\partial D \setminus \{1\}$ соответствует мнимой оси. Таким образом, $S(z) = e^{-w}$ аналитична на $\partial D \setminus \{1\}$ и $\partial D \setminus \{1\}$ при отображении $S(z)$ наматывается на ∂D бесконечное число раз. Вертикальная прямая $\operatorname{Re} w = \alpha$, $\alpha > 0$, переходит в орицикл

$$C_\alpha = \left\{ \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \alpha \right\}.$$

Это круг с центром $\alpha/(1+\alpha)$ и радиусом $1/(1+\alpha)$, касающийся ∂D в 1. На этом орицикле $|S(z)| = e^{-\alpha}$, и он наматывается при S на $\{|\xi| = e^{-\alpha}\}$ бесконечное число раз. Функция $S(z)$ не имеет нулей в D , но для каждого ξ , $0 < |\xi| < 1$, $S(z)$ бесконечно часто принимает значение ξ в каждой окрестности точки $z = 1$.

Напомним обозначение

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \left\{ z \in D: \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < \alpha \right\}, \quad \alpha > 1,$$

для конической области в D с вершиной $e^{i\theta}$.

Теорема 6.2. Пусть $S(z)$ — сингулярная функция, определенная мерой μ , и $E \subset \partial D$ — замкнутый носитель меры μ . Тогда $S(z)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus E$, в частности, $S(z)$ аналитична на каждой дуге из $\partial D \setminus E$. С другой стороны, $|S(z)|$ нельзя непрерывно продолжить из D ни в какую точку множества E . Для любого $\alpha > 1$ и μ -почти всех θ

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} S(z) = 0, \quad z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta}).$$

Если

$$(6.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu((\theta - h, \theta + h))}{h \log 1/h} = \infty,$$

то и для всех производных $S^{(n)}(z)$ функции $S(z)$

$$(6.2) \quad \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} S^{(n)}(z) = 0, \quad z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta}).$$

Доказательство. Для любой меры μ на ∂D функция

$$\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

аналитична всюду вне замкнутого носителя меры μ . Значит, S аналитична в $\mathbb{C} \setminus E$. Если μ сингулярна, то

$$(6.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu((\theta - h, \theta + h))}{2h} = \infty$$

для μ -почти всех θ . Это выводится из леммы I.4.4 повторением доказательства леммы I.5.4 с переменной мест dx и $d\mu$. Для $z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})$ и $|\varphi - \theta| < 1 - |z|^2$ имеем

$$P_z(\varphi) \geq \frac{c_2}{1 - |z|^2},$$

при $h = 1 - |z|^2$ получим

$$-\log |S(z)| \geq \frac{c_2}{h} \mu((\theta - h, \theta + h)) \rightarrow \infty$$

для $z \rightarrow e^{i\theta}$, $z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})$, если только выполняется (6.3). Значит, $|S|$ нельзя непрерывно продолжить ни в какую точку множества E .

Если в точке $e^{i\theta}$ выполняется (6.1), то аналогично

$$\lim_{\Gamma_\alpha(\theta) \ni z \rightarrow e^{i\theta}} (-\log |S(z)| + n \log(1 - |z|^2)) = \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Значит,

$$(6.4) \quad \lim_{\Gamma_\alpha(\theta) \ni z \rightarrow e^{i\theta}} \frac{|S(z)|}{(1 - |z|^2)^n} = 0.$$

Пусть теперь $z \in \Gamma_\alpha(\theta)$; рассмотрим круги

$$\Delta_1 = \Delta(z, a(1 - |z|^2)), \quad \Delta_2 = \Delta\left(z, \frac{1}{2}a(1 - |z|^2)\right).$$

Если $f(\zeta)$ аналитична в Δ_1 и $\sup_{\Delta_1} |f(\zeta)| / (1 - |\zeta|^2)^n < \varepsilon$, то $\sup_{\Delta_2} |f^{(n)}(\zeta)| \leq C(a, n)\varepsilon$, где $C(a, n)$ зависит только от a и n . Это простое следствие леммы Шварца или интегральной формулы Пуассона для Δ_1 . Значит, из (6.4) следует

$$S^{(n)}(z) \rightarrow 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $z \rightarrow e^{i\theta}$, $z \in \Gamma_\alpha(\theta)$, если только для θ выполняется (6.1). $\square$

Теорема 6.3. Пусть $f \in H^p$, $p > 0$, и Γ — открытая дуга на ∂D . Если f аналитична вплоть до Γ , то и ее внутренний и внешний сомножители аналитичны вплоть до Γ . Если f непрерывна вплоть до Γ , то ее внешний сомножитель непрерывен вплоть до Γ^1 .

¹⁾ В действительности внешний сомножитель функции f оказывается, грубо говоря, столь же гладким (в замкнутом круге $\bar{D}$), как и сама f . Этой теме были посвящены многочисленные работы (см., например, литературу в статье Широкова [1981*]). — *Прим. ред.*

Доказательство. Положим $f = BSF$, где B — произведение Бляшке, S — сингулярная, а F — внешняя функции. Можно считать, что $f \neq 0$. Если f аналитична или непрерывна вплоть до Γ , то F ограничена на каждом компактном подмножестве дуги Γ , потому что $|F| = |f|$ на Γ .

Пусть f аналитична вплоть до Γ . Если бы нули $B(z)$ имели на Γ предельную точку, то f имела бы в этой точке нуль бесконечного порядка. Это невозможно, и, следовательно, B также аналитична на Γ . Пусть μ — мера, определяющая S . Если бы μ имела на Γ точечную нагрузку, то S , а с ней и f , имела бы в этой точке нуль бесконечного порядка по теореме 6.2. Значит, $\mu\{e^{i\theta}\} = 0$, $\theta \in \Gamma$. Если теперь $\mu(K) > 0$ для какого-нибудь компактного множества $K \subset \Gamma$, то K несчетно, и по теореме 6.2 f должна иметь на K бесконечно много нулей. Значит, $\mu(\Gamma) = 0$ и S аналитична на Γ . Тогда и $F = f/BS$ аналитична вплоть до Γ .

Пусть теперь f непрерывна вплоть до Γ . Пусть $K = \{\theta \in \Gamma: f(e^{i\theta}) = 0\}$. Как функция на Γ F непрерывна в каждой точке K , ибо $|F| = |f|$ на Γ и $|F| = 0$ на K . На $\Gamma \setminus K$ имеет место неравенство $|f| > 0$, так что B и S не могут стремиться к 0 ни в какой точке из $\Gamma \setminus K$. Значит, B и S аналитичны на $\Gamma \setminus K$ и F непрерывна на Γ . Но теперь интегральная формула Пуассона позволяет заключить, что F непрерывна в $D \cup \Gamma$. $\square$

По определению компактное плоское множество K имеет *положительную логарифмическую емкость*, если на K существует такая положительная мера $\sigma \neq 0$, что *логарифмический потенциал*

$$U_\sigma(z) = \int_K \log \frac{1}{|\xi - z|} d\sigma(\xi)$$

ограничен в некоторой окрестности множества K . Если $K \subset D$, то K имеет положительную логарифмическую емкость тогда и только тогда, когда K несет такую положительную меру σ , что *потенциал Грина*

$$(6.5) \quad G_\sigma(z) = \int_K \log \left| \frac{1 - \bar{\xi}z}{\xi - z} \right| d\sigma(\xi)$$

ограничен в D , потому что член $\int_K \log |1 - \bar{\xi}z| d\sigma(\xi)$ ограничен

в D всегда. Говорят, что произвольное множество E имеет положительную емкость, если какое-нибудь его компактное подмножество имеет положительную емкость. Поскольку функция $\log(1/|\xi|)$ локально интегрируема по площади, то любое множество положительной площади имеет положительную емкость. Совершенные множества нулевой емкости существуют, но они

очень разрежены. Например, канторово троичное множество на $[0, 1]$ имеет положительную емкость (см. Цудзи [1959])¹⁾.

Потенциал Грина $G_\sigma(z)$, очевидно, неотрицателен в D . Так как σ конечна и сосредоточена на положительном расстоянии от ∂D , то

$$(6.6) \quad G_\sigma \text{ непрерывен и } G_\sigma(z) = 0 \text{ при } z \in \partial D.$$

Дальнейшую информацию о емкости и потенциалах можно найти в книге Цудзи [1959], но нам понадобятся только перечисленные факты.

Если $B(z)$ — произведение Бляшке, то условимся функцию $e^{ic}B(z)$, $c \in \mathbb{R}$, тоже называть *произведением Бляшке*.

Теорема 6.4 (Фростман). Пусть $f(z)$ — непостоянная внутренняя функция в единичном круге. Для всех ξ , $|\xi| < 1$, за исключением множества емкости нуль, функция

$$f_\xi(z) = \frac{f(z) - \xi}{1 - \bar{\xi}f(z)}$$

является произведением Бляшке.

Доказательство. Пусть K — компактное множество положительной емкости и σ — мера на K с ограниченным в D потенциалом G_σ . Мы покажем, что

$\sigma(\{\xi \in K: f_\xi \text{ не является произведением Бляшке}\}) = 0$,
и это докажет теорему. Положим

$$V(z) = G_\sigma(f(z)) = \int_K \log \left| \frac{1 - \bar{\xi}f(z)}{\xi - f(z)} \right| d\sigma(\xi).$$

Тогда $V \geq 0$ и V ограничена. Так как f — внутренняя функция, то из (6.6) и теоремы об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int V(re^{i\theta}) d\theta = 0.$$

Значит, по лемме Фату

$$\int_K \lim_{r \rightarrow 1} \int \log |f_\xi(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} d\sigma(\xi) = 0.$$

Так как $\sigma \geq 0$ и $\log |f_\xi| \leq 0$, то это означает, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int \log |f_\xi(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = 0$$

для σ -почти всех ξ . Теорема 2.4 тогда показывает, что f_ξ есть для σ -почти всех ξ произведение Бляшке. $\square$

¹⁾ См. также Карлесон [1967], Неванлинна [1953], Ландкоф [1966*]. — Прим. перев.

Следствие 6.5. *Множество произведений Бляшке равномерно плотно в множестве внутренних функций.*

Доказательство. Если f — внутренняя функция, а ξ достаточно мало, то $\|f - f_\xi\|_\infty < \varepsilon$. По теореме Фростмана f_ξ является произведением Бляшке при многих малых ξ . $\square$

Следствие 6.5 можно сравнить с теоремой Каратеодори I. 2.1, в которой получена более слабая сходимостъ — ограниченная поточечная, но предполагалось только, что $\|f\|_\infty \leq 1$.

Пусть $f \in H^\infty(D)$ и $z_0 \in \partial D$. Предельное множество функции f в точке z_0 определяется формулой

$$\text{Cl}(f, z_0) = \bigcap_{r>0} \overline{f(D \cap \Delta(z_0, r))}.$$

Таким образом, $\xi \in \text{Cl}(f, z_0)$ тогда и только тогда, когда существуют точки $z_n \rightarrow z_0$, такие, что $f(z_n) \rightarrow \xi$. Предельное множество компактно, непусто и связно. Оно сводится к одной точке тогда и только тогда, когда f непрерывна в $D \cup \{z_0\}$. Множество повторяющихся значений функции f в точке z_0 определяется формулой

$$\mathcal{R}(f, z_0) = \bigcap_{r>0} f(D \cap \Delta(z_0, r)),$$

так что $\xi \in \mathcal{R}(f, z_0)$ тогда и только тогда, когда существуют точки $z_n \rightarrow z_0$, такие, что $f(z_n) = \xi$. Иными словами, $\mathcal{R}(f, z_0)$ состоит из значений, принимаемых функцией f бесконечно часто в каждой окрестности точки z_0 . Это G_δ -множество. Очевидно, что $\mathcal{R}(f, z_0) \subset \text{Cl}(f, z_0)$. Если f непостоянна и аналитична в точке z_0 , то $\text{Cl}(f, z_0) = \{f(z_0)\}$, а $\mathcal{R}(f, z_0) = \emptyset$.

Теорема 6.6. *Пусть f — внутренняя функция в D , и пусть $z_0 \in \partial D$ — ее особая точка (т. е. f нельзя аналитически продолжить в эту точку). Тогда*

$$\text{Cl}(f, z_0) = \bar{D} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(f, z_0) = D \setminus L,$$

где L — множество логарифмической емкости нуля.

Теорема 6.6 показывает, что, несмотря на теорему Фату, граничное поведение функции из H^∞ может быть довольно диким. Например, если f — произведение Бляшке, нули которого плотны на ∂D , или сингулярная функция, определенная мерой с замкнутым носителем ∂D , то заключение теоремы 6.6 выполняется во всех точках ∂D , несмотря на существование почти всюду некасательных пределов.

Доказательство. Множество нулевой емкости не имеет внутренних точек; поэтому достаточно доказать утверждение о $\mathcal{R}(f, z_0)$.

Пусть f не является аналитической в точке z_0 . Если f — произведение Бляшке, то z_0 — точка накопления нулей f . Значит, $0 \in \mathcal{R}(f, z_0)$. Вообще, $f_\xi(z) = (f(z) - \xi) / (1 - \bar{\xi}f(z))$ является произведением Бляшке при $\xi \notin L$, где L имеет емкость 0. Но f_ξ тоже имеет особую точку в z_0 ; поэтому $0 \in \mathcal{R}(f_\xi, z_0)$ и, следовательно, $\xi \in \mathcal{R}(f, z_0)$. $\square$

Теорема 6.6 доказана, но теорема 6.2 позволяет получить еще более точную информацию. Пусть f — внутренняя функция, z_0 — особая точка функции f и $\xi \in D \setminus \mathcal{R}(f, z_0)$. Тогда внутренняя функция f_ξ не является произведением Бляшке и для сомножителя Бляшке в факторизации $f_\xi = B_\xi S_\xi$ точка z_0 не может быть точкой накопления нулей. Значит, B_ξ аналитично в точке z_0 . Стало быть, z_0 является особой точкой функции S_ξ . Могут представиться два случая.

Если z_0 — изолированная особая точка S_ξ на ∂D , то определяющая S_ξ сингулярная мера содержит атом в точке z_0 . В таком случае S_ξ и все ее производные некасательно стремятся в z_0 к 0. Тогда и $f_\xi(z)$ стремится некасательно к 0 со всеми производными, так что $f(z)$ стремится к ξ , а все ее производные — к 0. Эти заключения также справедливы, если в точке z_0 выполняется (6.1). Легко видеть, что при данном z_0 может быть только одна такая точка $\xi \in D \setminus \mathcal{R}(f, z_0)$.

Во втором случае $\mu\{z_0\} = 0$. По теореме 6.2 z_0 есть предел последовательности точек $e^{i\theta_n}$, в каждой из которых S_ξ имеет некасательный предел 0, а f — некасательный предел ξ . Теперь теорема 6.2 утверждает еще больше: или мера μ непрерывна в окрестности z_0 , или μ помещает положительную массу в каждую точку последовательности $e^{i\theta_n} \rightarrow z_0$. В первом случае по теореме 6.2 в каждой окрестности точки z_0 содержится несчетное множество таких $e^{i\theta}$, в которых f некасательно стремится к ξ . Во втором — в каждой точке $e^{i\theta_n}$ f некасательно стремится к ξ , а все ее производные — к 0.

Подытожим эти рассуждения следующим образом.

Теорема 6.7. Пусть f — внутренняя функция в D и z_0 — ее особая точка. Для любого ξ , $|\xi| < 1$, выполняется хотя бы одно из условий:

- (а) $\xi \in \mathcal{R}(f, z_0)$;
- (б) f имеет в точке z_0 некасательный предел ξ , а все $f^{(n)}$ некасательно стремятся к нулю в z_0 ;
- (с) z_0 есть предел последовательности точек $e^{i\theta}$, в каждой из которых выполняется (б);
- (д) Каждая окрестность точки z_0 на ∂D содержит несчетное множество точек, в которых f имеет некасательный предел ξ .

Значительно больше о теории предельных множеств можно найти в интересных книгах Носиро [1960] и Коллингвуда и Ловатера [1966].

7. Теорема Бёрлинга

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с базисом $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$. Оператор сдвига S на H определяется формулой $S(\xi_j) = \xi_{j+1}$ или, что то же самое, $S(\sum a_j \xi_j) = \sum a_j \xi_{j+1}$. Бёрлинг использовал внутренние функции, чтобы описать все замкнутые подпространства, инвариантные относительно S . Если отождествить H с H^2 , полагая $\xi_k = e^{ik\theta}$, то оператор S перейдет в умножение на z .

$$S(f) = zf(z).$$

Подпространство $M \subset H^2$ называется *инвариантным* относительно S , если $zM \subset M$, т. е. $zf(z) \in M$ для всех $f \in M$. Эквивалентное определение: M инвариантно, если $p(z)M \subset M$ для любого полинома p . Так как M замкнуто, это то же самое, что условие $H^\infty M \subset M$, где $H^\infty M = \{gf: g \in H^\infty, f \in M\}$, потому что, согласно упр. 4, любая функция $g \in H^\infty$ есть ограниченный поточечный предел полиномов.

Теорема 7.1. (Бёрлинг). Пусть M — подпространство в H^2 , инвариантное относительно S . Если $M \neq \{0\}$, то существует внутренняя функция $G(z)$, такая, что

$$(7.1) \quad M = GH^2 = \{Gf: f \in H^2\}.$$

Внутренняя функция G единственна с точностью до постоянного множителя. Каждое подпространство вида (7.1) является замкнутым и инвариантным относительно S .

Доказательство. Каждое подпространство вида (7.1) замкнуто в L^2 , потому что $|G| = 1$. Очевидно, что оно будет инвариантно относительно умножения на z . Далее пусть G_1 и G_2 — такие две внутренние функции, что $G_1 H^2 = G_2 H^2$. Тогда $G_1 = G_2 h$, $G_2 = G_1 k$, $k, h \in H^2$. Ясно, что это означает $G_1 = \lambda G_2$, $|\lambda| = 1$, так как и G_1/G_2 и G_2/G_1 оказываются внутренними функциями из H^∞ . Пусть теперь M — инвариантное подпространство и $M \neq \{0\}$. Тогда существует $f \in M$, $f = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$ с $a_k \neq 0$. Выберем f с наименьшим возможным k и положим $M = z^k M_1$. Подпространство $M_1 \subset H^2$ также инвариантно и замкнуто, так что можно считать $M = M_1$. Таким образом, мы предположим, что M содержит функцию f_0 с $f_0(0) \neq 0$. Рассмотрим функцию из H^2 , тождественно равную 1; пусть g_0 — ее ортогональная проекция на M . Тогда $g_0 \in M$ и

$1 - g_0$ ортогональна M . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{in\theta} g_0(\theta) (1 - \overline{g_0(\theta)}) d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

так как $z^n g_0(z) \in M$. Поскольку $z^n g_0(z)$ обращается в 0 при $z = 0$ и $n \geq 1$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{in\theta} |g_0(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int g_0(\theta) e^{in\theta} d\theta = 0, \quad n \geq 1.$$

Значит, коэффициенты Фурье функции $|g_0|^2$ обращаются в нуль при $n \neq 0$, и потому $|g_0|^2$ — постоянная:

$$|g_0|^2 = c = \frac{1}{2\pi} \int |g_0|^2 d\theta = \|g_0\|_2^2.$$

Если $g_0 = 0$, то $1 = 1 - g_0$ ортогональна к M и все функции из M должны обращаться в 0 при $z = 0$, что противоречит нашему предположению. Значит, $g_0 \neq 0$ и

$$G = g_0 / \|g_0\|_2 \in M$$

является внутренней функцией.

Подпространство M инвариантно, поэтому $GH^2 \subset M$. Пусть теперь $h \in M$ ортогональна к GH^2 . Но $g_0 = G\|g_0\| \in GH^2$, и тогда

$$\int h e^{-in\theta} \overline{g_0(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Поскольку $1 - g_0$ ортогональна к M , а $z^n h \in M$, то

$$0 = \int h e^{in\theta} (1 - \overline{g_0(\theta)}) \frac{d\theta}{2\pi} = - \int h e^{in\theta} \overline{g_0(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

так как $z^n h(z) = 0$ при $z = 0$. Значит, суммируемая функция $h \bar{g}_0$ имеет нулевые коэффициенты Фурье и $h \bar{g}_0 = 0$. Но $|g_0| > 0$ и потому $h = 0$, т. е. $M = GH^2$. $\square$

Пусть G_1 и G_2 — две внутренние функции, а $M_1 = G_1 H^2$, $M_2 = G_2 H^2$ — их инвариантные подпространства. Включение $M_1 \subset M_2$ верно тогда и только тогда, когда $G_1 \in M_2$, т. е. G_1 делится на G_2 , иначе говоря, $G_1 = G_2 h$, $h \in H^2$. Если G_1 делится на G_2 , то частное G_1/G_2 снова будет внутренней функцией.

Пусть теперь $\mathcal{S}$ — непустое семейство внутренних функций. Существует наименьшее инвариантное подпространство, содержащее $\mathcal{S}$, — это просто пересечение всех содержащих его инвариантных подпространств. Оно имеет вид $M = G_0 H^2$ при некоторой внутренней функции G_0 , и эта G_0 должна делить все функции из $\mathcal{S}$. Если G_1 — другая внутренняя функция, делящая каждую функцию из $\mathcal{S}$, то $M_1 = G_1 H^2$ содержит $\mathcal{S}$, так что $M \subset M_1$ и G_1 должна делить G_0 . Таким образом, G_0 — *наибольший общий делитель* семейства $\mathcal{S}$, единственный с точностью до постоянного множителя. Мы доказали

Следствие 7.2. Каждое непустое семейство внутренних функций имеет наибольший общий делитель.

Возможен и другой путь доказательства следствия 7.2, который дает некоторое представление о том, как выглядит G_0 . Пусть $G_0 = B_0 S_0$, где B_0 — произведение Бляшке, а S_0 — сингулярная функция, порожденная мерой μ_0 . Если $G = BS \in \mathcal{G}$, то B_0 делит B , а S_0 делит S . Это значит, что нули B_0 содержатся среди нулей B и $\mu_0 \leq \mu$, где μ — мера, связанная с S . Следовательно, B_0 — это произведение Бляшке с нулями $\bigcap \{G^{-1}(0) : G \in \mathcal{G}\}$, а μ_0 — точная нижняя грань множества $\mathcal{P}$ мер, соответствующих функциям из $\mathcal{G}$. Любое непустое множество положительных борелевских мер имеет точную нижнюю грань μ_0 . Для любого борелевского множества E

$$\mu_0(E) = \inf \sum_{j=1}^N \mu_j(E_j),$$

где μ_j пробегает $\mathcal{P}$, а $\{E_1, \dots, E_N\}$ — произвольное разбиение E на борелевские части.

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает множество всех полиномов от переменной z .

Следствие 7.3. Пусть $f \in H^2$. Функция f внешняя тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}f = \{p(z)f(z) : p \in \mathcal{P}\}$ плотно в H^2 .

Доказательство. Пусть M — замыкание множества $\mathcal{P}f$ в H^2 . Ясно, что оно инвариантно относительно сдвига S , и потому $M = GH^2$ при некоторой внутренней функции G . Но $f \in M$ и $f = Gh$, $h \in H^2$. Если f — внешняя функция, то G постоянна и $M = H^2$. Пусть теперь $f = Fh$, где F — внутренняя функция, а h — внешняя. Если F непостоянна, то FH^2 есть замкнутое инвариантное подпространство, содержащее $\mathcal{P}f$, и $\mathcal{P}f$ не плотно в H^2 . $\square$

Следствие 7.3 утверждает, что для любой внешней функции $f \in H^2$ существуют такие полиномы p_n , что

$$(7.2) \quad \int |1 - p_n f|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0.$$

Можно непосредственно доказать более точную версию соотношения (7.2).

Теорема 7.4. Пусть $f(z)$ — внешняя функция. Существуют функции $\{f_n\}$ из H^∞ , такие, что

$$(7.3) \quad |f_n(z)f(z)| \leq 1,$$

$$(7.4) \quad f_n(\theta)f(\theta) \rightarrow 1 \text{ почти всюду.}$$

Доказательство. Положим

$$u_n(\theta) = \min(A_n, -\log|f(\theta)|),$$

где A_n — большое число, которое мы выберем позже. Пусть f_n — внешняя функция с $\log|f_n| = u_n$ и $f_n(0)f(0) > 0$. Тогда $|f_n| \leq e^{A_n}$, и (7.3) выполняется, так как $u_n(\theta) + \log|f(\theta)| \leq 0$. Если $A_n \rightarrow \infty$, то $\|u_n + \log|f|\|_1 \rightarrow 0$ и $f_n(0)f(0) \rightarrow 1$. Пусть $A_n \rightarrow \infty$ так быстро, что $\sum(1 - f_n(0)f(0)) < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum \|1 - f_n f\|_2^2 &= \sum \{1 + \|f_n f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} f_n(0) f(0)\} \leq \\ &\leq 2 \sum \{1 - f_n(0) f(0)\} < \infty \end{aligned}$$

откуда следует (7.4). $\square$

Инвариантные подпространства в H^p , $0 < p < \infty$, описываются в упр. 18. Инвариантное подпространство в H^∞ является идеалом в кольце H^∞ . Слабая L^1 -топология в H^∞ определяется базисом открытых множеств

$$\bigcap_{j=1}^n \{f \in H^\infty : \left| \int f F_j d\theta - \int f_0 F_j d\theta \right| < 1\},$$

где $F_1, \dots, F_n \in L^1$ и $f_0 \in H^\infty$. Это — сужение на H^∞ слабой L^1 -топологии пространства L^∞ .

Теорема 7.5. Пусть I — ненулевой идеал в H^∞ . Если I слабо L^1 -замкнут, то существует такая внутренняя функция G , что

$$(7.5) \quad I = GH^\infty.$$

Внутренняя функция G единственна с точностью до постоянного множителя, и каждое множество вида (7.5) является слабо L^1 -замкнутым идеалом в H^∞ .

Доказательство. Ясно, что G единственна и что (7.5) — слабо L^1 -замкнутый идеал. Пусть теперь $I \neq \{0\}$ — слабо L^1 -замкнутый идеал, а M — его замыкание в H^2 . Покажем, что

$$(7.6) \quad M \cap H^\infty = I.$$

Тогда $M = GH^2$ для некоторой внутренней функции G и $I = M \cap H^\infty = GH^\infty$, так что (7.5) следует из (7.6).

Ясно, что $I \subset M \cap H^\infty$. Пусть $g \in M \cap H^\infty$ и $g_n \in I$ таковы, что $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$. Мы модифицируем некоторую подпоследовательность последовательности g_n , выбрав такие функции $h_n \in H^\infty$, что $\|h_n g_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$ и $h_n g_n \rightarrow g$ почти всюду. Тогда $h_n g_n \rightarrow g$ в слабой L^1 -топологии, и $g \in I$, так как $h_n g_n \in I$, а I слабо замкнут. Выбор h_n — ядро доказательства — напоминает доказательство теоремы 7.4. Можно считать, что $\|g\|_\infty = 1$ и $\|g_n - g\|_2 \leq$

$\leq 1/n^2$, а значит, $g_n \rightarrow g$ почти всюду. Поскольку $\log|x| \leq |x| - 1$, то

$$\int \log^+ |g_n| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_{|g_n| > 1} (|g_n| - 1) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Пусть h_n — внешние функции с $\log|h_n| = -\log^+|g_n|$, $h_n(0) > 0$. Тогда $|h_n g_n| \leq 1$ и

$$1 - h_n(0) = 1 - \exp \frac{1}{2\pi} \int (-\log^+ |g_n|) d\theta \leq 1 - e^{-1/n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Значит, $\sum \|1 - h_n\|_2^2 = \sum (1 + \|h_n\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} h_n(0)) \leq 2 \sum (1 - h_n(0)) < \infty$ и $h_n \rightarrow 1$ почти всюду. $\square$

Самые интересные идеалы в H^∞ — это максимальные идеалы. Поскольку H^∞ — банахова алгебра с единицей, то максимальные идеалы в H^∞ являются ядрами гомоморфизмов $m: H^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ (см. гл. V). Чтобы слабо L^1 -замкнутый идеал GH^∞ был максимальным, внутренняя функция G не должна иметь собственных делителей. Любая сингулярная функция $S(z)$ имеет бесконечно много делителей — это, например, все ее степени $S^t(z)$, $0 < t < 1$. Значит, G не имеет делителей в единственном случае — когда

$$G(z) = e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |z_0| < 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда максимальный идеал GH^∞ равен

$$(7.7) \quad \{f \in H^\infty: f(z_0) = 0\},$$

а комплексный гомоморфизм m есть $m(f) = f(z_0)$. Таковы все слабо L^1 -замкнутые максимальные идеалы.

H^∞ имеет много других максимальных идеалов, которые не являются слабо L^1 -замкнутыми. Например, любая непостоянная сингулярная функция $S(z)$ необратима в H^∞ и по лемме Цорна лежит в некотором максимальном идеале. Но $S(z)$ не имеет нулей в D , и этот идеал не имеет вида (7.7).

Максимальные идеалы в H^∞ будут изучаться в гл. V и X. Здесь же мы только отметим, что идеалами (7.7) исчерпываются максимальные идеалы, допускающие конструктивное описание (самый термин «конструктивный» остается неопределенным).

Замечания

Обсуждение пространств Харди в общих областях, где H^p нужно определять через гармонические мажоранты, см. у Парро [1951] и Рудина [1955a]¹⁾.

¹⁾ Имеются и другие обобщения классов H^p на плоские области. Это так называемые классы E^p В. И. Смирнова (см. Привалов [1950*], Голузин [1966*], Хавинсон [1965*]). — *Прим. ред.*

Теорема 2.3 принадлежит Ф. Риссу [1923]. Произведения Бляшке были введены Бляшке [1915]. Теорема 2.4 опубликована Фростманом [1935].

Теорема 3.1 взята у Харди и Литтлвуда [1930]; аналоги (3.2) и (3.3) для круга были ранее доказаны Ф. Риссом [1923]. Теорема 3.6 заимствована из знаменитой работы Ф. и М. Риссов [1916]; доказательство в тексте принадлежит, по-видимому, Бохнеру. Некоторые приложения этого фундаментального результата содержатся в упражнениях. Теорема 3.9 будет очень важна для нас в дальнейшем.

На окружности суммируемость $\log|f|$, $f \in H^p$, впервые была отмечена Сегё [1921] для $p = 2$ и Ф. Риссом [1923] для остальных p . Теорема о канонической факторизации принадлежит Смирнову [1929]. Параллельный результат Ф. Рисса [1930] о субгармонических функциях описан в упражнении 20.

Теорема 6.4 содержится в диссертации Фростмана [1935] — важной работе, связавшей теорию функций с теорией потенциала¹⁾. Дальнейшие результаты о граничном поведении внутренних функций см. у Зейделя [1934] и в книгах Коллингвуда и Ловатера [1966], Носиро [1960] и Цудзи [1959].

Теорема Бёрлинга взята из его знаменитой работы [1949]. Книги Хелсона [1964] и Гофмана [1962a] содержат более подробное обсуждение инвариантных подпространств²⁾.

Различные подходы к теории пространств Харди представлены в книгах Дьюрена [1970], Гофмана [1962a], Привалова [1951] и Зигмунда [1968]³⁾.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Пусть $f \in H^p$. Тогда $f = gh$, где $g, h \in H^{2p}$ и $\|g\|_{2p} = \|h\|_{2p} = \|f\|_p^{1/2}$. Далее $f = f_1 + f_2$, где функции $f_i \in H^p$ внешние и $\|f_i\|_p \leq \|f\|_p$. (Поделите на произведение Бляшке. Если f — внутренняя функция, возьмите $f_1 = (f + 1)/2$, $f_2 = (f - 1)/2$.)

2. (а) Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция f является некасательным пределом функции из $H^p(dt)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно (а потому и все) из следующих условий:

(i) интеграл Пуассона f аналитичен в $\mathcal{H}$;

(ii) $\int \frac{f(t)}{t-z} dt = 0$, $\operatorname{Im} z < 0$, при $p < \infty$, или

$$\int f(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0} \right) dt = 0, \quad \operatorname{Im} z < 0 \text{ при } p = \infty,$$

¹⁾ Результаты, связанные с теоремой 6.4, см. в книге Рудина [1974*] и в статьях Хейнса [1955*], Гинзбурга, Талюша [1973*], Виноградова [1976*]. — Прим. ред.

²⁾ См. также Никольский [1974*], [1980*]. — Прим. ред.

³⁾ А также в книгах Бари [1961*] и Голузина [1966*]. — Прим. ред.

где z_0 — фиксированная (но произвольная) точка из нижней полуплоскости;

(iii) $\int fg dt = 0$ для всех $g \in H^q$, $q = p/(p-1)$;

(iv) при $1 \leq p \leq 2$ (когда преобразование Фурье определено на L^p по теореме Планшереля)

$$\hat{f}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(t) e^{-2\pi i s t} dt = 0$$

при почти всех $s < 0$. Это — вариант теоремы Пэли — Винера.

(b) Пусть теперь $f \in L^p(\partial D)$, $1 \leq p \leq \infty$. Функция f является некасательным пределом функции из H^p тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

(i) интеграл Пуассона f аналитичен в D ;

(ii) $\int e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0$, $n = 1, 2, \dots$;

(iii) если $q = p/(p-1)$ и

$$H_0^q = \left\{ g \in H^q: g(0) = \frac{1}{2\pi} \int g(e^{i\theta}) d\theta = 0 \right\},$$

то $\int fg d\theta = 0$, $g \in H_0^q$;

(iv) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0$, $|z| > 1$.

Если $f \in H^p$, $p \geq 1$, то

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| < 1.$$

3. (теорема о скачке). Если $f \in L^1(\partial D)$, то при $|z| < 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - 1/\bar{z}} = \frac{1}{2\pi} \int f(e^{i\theta}) P_z(\theta) d\theta.$$

Следовательно, почти всюду

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - re^{i\theta}} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \frac{1}{r} e^{i\theta}} \right) = f(e^{i\theta}).$$

В верхней полуплоскости этот результат выглядит прозрачнее; см. ниже упр. III. 10.

4. Пусть $f(e^{i\theta}) \in L^\infty(\partial D)$. Функция f является некасательным пределом функции из H^∞ тогда и только тогда, когда существует равномерно ограниченная последовательность аналитических полиномов $p_n(z)$, такая, что $p_n(e^{i\theta}) \rightarrow f(e^{i\theta})$ почти всюду. Если $f \in H^\infty$, то $p_n(z) \rightarrow f(z)$, $z \in D$, и p_n можно выбрать так, чтобы $\|p_n\| \leq \|f\|_\infty$. (Указание. Используйте средние Чезаро или аппроксимируйте $f(rz)$, $r < 1$, посредством $\lambda p(z)$, где $p(z)$ — полином Тейлора $f(rz)$, а $\lambda = \|f\|_\infty / \|p\|_\infty$.)

5. (а) Если $f \in H^p(D)$, то

$$|f(z)| \leq \|f\|_{H^p} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^{1/p}$$

и

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_{n,p} \|f\|_{H^p} \frac{1}{(1-|z|)^{n+1/p}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти оценки неулучшаемы с точностью до постоянных множителей при любом p ; пример доставляет функция

$$f(z) = ((1-|z_0|^2)/(1-\bar{z}_0 z)^2)^{1/p}.$$

(b) Если $f \in H^2$, то в силу равенства Парсеваля или по теореме Грина

$$J_2 = \int (1-|z|) |f'(z)|^2 dx dy \leq c \|f\|_2^2.$$

Вообще, при $q \geq 2$

$$J_q = \int_0^1 (1-r)^{2-2/q} \left(\int |f'(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{2/q} r dr \leq c_q \|f\|_2^2.$$

(Указание. Пусть $\rho = (1+r)/2$, тогда

$$|f'(re^{i\theta})|^{q-2} \leq \frac{c}{(1-r)^{\frac{q-2}{2}}} \left(\int |f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{(q-2)/2}.$$

(с) Если $f \in H^2$, $q > 2$ и

$$I_q = \int_0^1 (1-r)^{-2/q} \left(\int |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{2/q} dr,$$

то $I_q \leq c'_q (|f(0)|^2 + J_q)$.

(Указание. Проинтегрируйте по частям, используя оценку

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} |f(re^{i\theta})|^q \right| \leq c_q |f(re^{i\theta})|^{q-1} |f'(re^{i\theta})|,$$

а затем примените неравенства Гёльдера и Шварца.)

(d) Если $0 < p < 1$ и $f \in H^p$, то, согласно (а),

$$\int |f(re^{i\theta})| d\theta \leq c_p \|f\|_{H^p}^p \left\{ \frac{1}{(1-r)^{1/p}} \|f\|_{H^p} \right\}^{1-p}.$$

откуда

$$\int |f(re^{i\theta})| d\theta \leq c'_p \|f\|_{H^p}^{1-p} (1-r)^{(p-1)/p} \left(\int |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} \int |f(re^{i\theta})| dr d\theta &\leq \\ &\leq c_p \|f\|_{H^p}^p \int (1-r)^{-p} \left(\int |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr. \end{aligned}$$

Для $f = g^{p/2}$, $g \in H^2$, интеграл в правой части есть $l_{2/p}$, и поэтому

$$\int_0^1 (1-r)^{(1/p)-2} \int |f(re^{i\theta})| dr d\theta \leq c'_p \|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p, \quad 0 < p < 1.$$

См. дальнейшие детали у Харди и Литтлвуда [1932a] и Дьюрена [1970].

6. Из упражнения 2 следует, что при $1 \leq p < \infty$ пространство, сопряженное с $H^p(D)$, есть L^q/H_0^q , $q = p/(p-1)$. При $0 < p < 1$ пространство H^p имеет сопряженное, которое можно отождествить с некоторым пространством аналитических функций, непрерывных по Липшицу. Мы опишем доказательство в случае $1/2 < p < 1$. Пусть A_α , $0 < \alpha < 1$, — пространство аналитических в D функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию Липшица

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|^\alpha.$$

(а) Если φ аналитична в D , то $\varphi \in A_\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$|\varphi'(z)| \leq c(1-|z|)^{\alpha-1}.$$

Если $\varphi \in A_\alpha$, то эта оценка следует из формулы Коши для окружности $\{|\xi - z| = 1 - |z|\}$. Для доказательства обратного проинтегрируйте φ' по контуру, изображенному на рис. II.1.

(б) Пусть $1/2 < p < 1$ и $\alpha = (1/p) - 1$. Если $f \in H^p$, $\varphi \in A_\alpha$, то по формуле Грина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z} = f(0) \overline{\varphi(0)} + \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<r} f(z) \overline{\varphi'(z)} dx dy.$$

Согласно (а) и 5(d),

$$\iint_{|z|<1} |f(z)| |\varphi'(z)| dx dy \leq C \|f\|_{H^p},$$

и поэтому предел

$$L_\varphi(f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z}$$

существует и определяет ограниченный линейный функционал на H^p . Если $\varphi(z) = \sum a_n z^n$, то $L_\varphi(z^n) = \bar{a}_n$.

(с) Обратно, пусть L — линейный функционал на H^p , $1/2 < p < 1$, и $|L(f)| \leq B \|f\|_{H^p}$, $f \in H^p$. Положим при $|\omega| < 1$

$$f_\omega(z) = \frac{1}{1 - \bar{\omega}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}^n z^n.$$

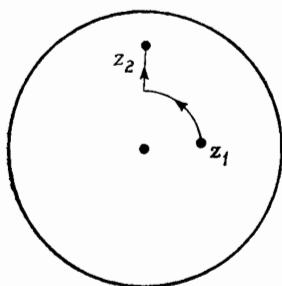


Рис. II. 1.

Этот ряд сходится в H^p (и даже равномерно) и $f_w \in H^p$. Положим

$$\varphi(w) = \overline{L(f_w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{L(z^n)} w^n.$$

Тогда

$$|\varphi'(w)| \leq B \left\| \frac{z}{(1 - \bar{w}z)^2} \right\|_{H^p}$$

и легкая оценка

$$\|P_w\|_{2p}^{2p} \leq \left(\frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right)^{1-2p} \int P_w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}, \quad 2p > 1,$$

дает

$$|\varphi'(w)| \leq cB(1 - |w|)^{(1/p)-2} = cB(1 - |w|)^{\alpha-1}.$$

Значит, $\varphi \in A_\alpha$, $L_\varphi(z^n) = L(z^n)$, $n = 0, 1, \dots$, и $L = L_\varphi$, так как полиномы плотны в H^p . Полное изложение см. у Дьюрена, Ромберга и Шилдса [1969]. С другой стороны, на пространстве L^p , $0 < p < 1$, не существует ни одного ненулевого линейного ограниченного функционала.

7 (Линделёф [1915]). Пусть $f \in H^\infty$.

(а) Если

$$m = \operatorname{ess} \lim_{\theta \rightarrow 0} |f(e^{i\theta})| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \|f(e^{i\theta}) \chi_{(-\delta, \delta)}(\theta)\|_\infty,$$

то

$$\lim_{D \ni z \rightarrow 1} |f(z)| \leq m.$$

(Используйте субгармоничность $\log |f(z)|$.)

(б) Если

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(e^{i\theta}) = \alpha,$$

то

$$\lim_{\Omega_\delta^+ \ni z \rightarrow 1} f(z) = \alpha, \quad \delta > 0,$$

где $\Omega_\delta^+ = \{z \in D: |\arg(1 - z)| < (\pi/2) - \delta\}$. (Рассмотрите $\log |f(z) - \alpha|$.)

(с) Если

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} f(e^{i\theta}) = \alpha, \quad \lim_{\theta \rightarrow -0} f(e^{i\theta}) = \beta,$$

то $\alpha = \beta$ и

$$\lim_{D \ni z \rightarrow 1} f(z) = \alpha.$$

(d) Ограниченность f несущественна для этих результатов. Достаточно предполагать, что $f \in H^p(D \cap \{|z-1| < \eta\})$ при некотором $\eta > 0$, т. е. что $|f|^p$ имеет в $D \cap \{|z-1| < \eta\}$ гармоническую мажоранту.

8. (а) (неравенство Харди). Если $f = \sum_0^\infty a_n z^n \in H^1$, то

$$\sum_0^\infty \frac{|a_n|}{n+1} \leq \pi \|f\|_1.$$

(Пусть $f = gh$, $\|g\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \|f\|_1$, $g, h \in H^2$. Если $g = \sum b_n z^n$, $h = \sum c_n z^n$, то положим $G = \sum |b_n| z^n$, $H = \sum |c_n| z^n$ и $F = GH$. Тогда

$$\sum_0^\infty \frac{|a_n|}{n+1} \leq \sum_0^\infty \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |b_k| |c_{n-k}| = \frac{1}{2\pi} \int F(e^{i\theta}) \varphi(e^{i\theta}) d\theta,$$

где $\varphi \in L^\infty$ и $\|\varphi\|_\infty = \pi$.)

(b) Пусть $f = \sum a_n z^n \in H^1$. Функция $f(e^{i\theta})$ почти всюду совпадает с функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда $f' \in H^1$; при этом $f(e^{i\theta})$ абсолютно непрерывна, $f(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$ и $\sum |a_n| < \infty$. При $f' \in H^1$ почти всюду

$$ie^{i\theta} \lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta}) = \frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}).$$

(Харди и Литтлвуд [1927], Смирнов [1933].)

* 9. Пусть Ω — односвязное открытое множество, ограниченное жордановой кривой Γ , и $f: D \rightarrow \Omega$ — конформный гомеоморфизм, $f(D) = \Omega$. По знаменитой теореме Каратеодори (см. Альфорс [1973] или Цудзи [1959]¹⁾) отображение $f(z)$ продолжается до взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения $\bar{D}$ на $\bar{\Omega}$.

(а) Кривая Γ спрямляема тогда и только тогда, когда $f' \in H^1$.

¹⁾ См. также Маркушевич [1967*]. — Прим. ред.

(b) Если Γ спрямляема и множество $E \subset \Gamma$ замкнуто, то его длина $l(E)$ равна

$$\int_{f^{-1}(E)} |f'(e^{i\theta})| d\theta.$$

Таким образом, длины множеств E и $f^{-1}(E)$ равны или не равны нулю одновременно.

(c) Далее, если Γ спрямляема, то отображение f конформно (сохраняет углы) в почти всех точках $e^{i\theta}$. Точнее, если f' имеет в точке $e^{i\theta}$ некасательный предел $f'(e^{i\theta}) \neq 0$ и γ — кривая в D с концом $e^{i\theta}$, для которой угол

$$\alpha = \lim_{\gamma \ni z \rightarrow e^{i\theta}} \arg(1 - e^{-i\theta}z)$$

существует и $\alpha \neq \pm\pi/2$, то кривая $f(\gamma)$ пересекает нормаль к Γ в точке $f(e^{i\theta})$ под тем же углом α .

Части (a) и (b) принадлежат Ф. и М. Риссам [1916], см. также Смирнов [1933].

*10 (локальная теорема Фату). Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в D . Скажем, что $u(z)$ некасательно ограничена в точке $e^{i\theta} \in T = \partial D$, если $u(z)$ ограничена в некотором секторе

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \left\{ z \in D: \frac{|z - e^{i\theta}|}{1 - |z|} < \alpha \right\}, \quad \alpha > 1.$$

Если E — измеримое подмножество окружности T , а $u(z)$ некасательно ограничена во всех точках множества E , то $u(z)$ имеет в почти всех точках множества E некасательные пределы.

Согласно элементарной теории меры, существуют компактное множество $F \subset E$, $|E \setminus F| < \varepsilon$, и числа $M > 0$ и $\alpha > 1$, такие, что $|u(z)| \leq M$ в

$$\Omega = \bigcup_{e^{i\theta} \in F} \Gamma_\alpha(e^{i\theta}).$$

Область Ω односвязна (она есть объединение лучей, проведенных из начала координат) и $\partial\Omega$ — спрямляемая кривая ($\partial\Omega$ состоит из F и «домиков» над интервалами, дополнительными к F ; но «домик» над дугой $I \subset T$ имеет длину, не превышающую $c(\alpha)|I|$). Согласно упражнению 9, $u(z)$ имеет некасательный предел изнутри Ω в почти всех точках F . Некасательную сходимости изнутри D теперь легко получить: если $e^{i\theta}$ есть точка плотности множества F , т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|F \cap [\theta - \delta, \theta + \delta]|}{2\delta} = 1,$$

и $\beta > \alpha$, то при некотором $r < 1$

$$\{|z| > r\} \cap \Gamma_\beta(e^{i\theta}) \subset \Omega.$$

Следовательно, предел $\lim_{\Gamma_\beta(e^{i\theta}) \ni z \rightarrow e^{i\theta}} u(z)$ существует при всех $\beta > 1$ и при почти всех $e^{i\theta} \in F$.

То же самое заключение остается верным, если функцию $u(z)$ предположить только ограниченной снизу в некотором угле $\Gamma_\alpha(e^{i\theta})$ при каждом $e^{i\theta} \in E$. Можно также заменить гармонические функции мероморфными. Из предыдущих рассуждений следует, что мероморфная функция, имеющая некасательный предел 0 на множестве положительной меры, тождественно равна 0. Для радиальных пределов это уже не верно (см. Привалов [1950] или Багемил и Зейдель [1954]). Первоисточник этой теоремы см. Привалов [1919]; см. также Зигмунд [1968, v. II]. Другое элементарное доказательство мы дадим в гл. IX.

11 (теорема Плеснера). Пусть $f(z)$ мероморфна в D . Точка $e^{i\theta} \in T$ называется *точкой Плеснера* для f , если угловое предельное множество f в точке $e^{i\theta}$ совпадает со всей римановой сферой S^2 , т. е. если для всех $\alpha > 1$, $r < 1$ множество

$$f(\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \cap \{|z| > r\})$$

плотно в S^2 . Окружность T разбивается на три непересекающихся борелевских множества, $T = N \cup P \cup G$, так что

- (i) $|N| = 0$;
- (ii) каждая точка множества P есть точка Плеснера для f ;
- (iii) в каждой точке множества G функция f имеет конечный некасательный предел.

(Для рациональных $w \in \mathbb{C}$ положим $E_w = \{e^{i\theta} : (f - w)^{-1} \text{ некасательно ограничена в } e^{i\theta}\}$. Тогда $P = T \setminus \bigcup_w E_w$ есть множество точек Плеснера для f , и в почти всех точках $e^{i\theta} \in E_w$ функция $(f - w)^{-1}$ имеет ненулевой некасательный предел. См. Плеснер [1927] или Цудзи [1959]¹⁾.)

12 (теорема Морера). Пусть $g(z) \in H^1(|z| > 1)$, т. е. $g(1/z) \in H^1(D)$. Пусть, далее, $f \in H^1(D)$ и $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ почти всюду на дуге $I \subset T$. Положим

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| < 1, \\ g(z), & |z| > 1. \end{cases}$$

Тогда для $z_0 \in I$ и малого $\delta > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \delta} F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = F(z), \quad z \in \Delta(z_0, \delta) \setminus T,$$

так что F аналитически продолжается через $I \cap \{|z - z_0| < \delta\}$ и, следовательно, через I .

13. Пусть f аналитична в D .

(а) Если $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, то $f \in H^p$ при всех $p < 1$ ²⁾. (Пусть

¹⁾ См. также Привалов [1950]. — *Прим. ред.*

²⁾ Это теорема В. И. Смирнова (см. Смирнов [1929]). — *Прим. ред.*

$f = e^\varphi$, $|\operatorname{Im} \varphi| \leq \pi/2$. Тогда $|f|^p = e^{p \operatorname{Re} \varphi} \leq \left(\cos \frac{\pi}{2} p\right)^{-1} \operatorname{Re} f^p$, так что $|f|^p$ имеет гармоническую мажоранту.)

(b) Если $f \in H^1$ и $f(e^{i\theta})$ вещественно, то f постоянна. Этот результат точен, так как $(1+z)/(1-z) \in H^p$ при всех $p < 1$.

(c) Если $f \in H^{1/2}$ и $f(e^{i\theta})$ почти всюду положительно, то f постоянна.

(d) Утверждения (b) и (c) имеют локальные варианты. Пусть $I \subset T$ — дуга. Если $f \in H^1$ и $f(e^{i\theta})$ вещественно почти всюду на I , то f аналитически продолжается через I : если $h(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$, то $h \in H^1(|z| > 1)$ и $h(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ почти всюду на I .

Точно так же, если $f \in H^{1/2}$ и $f(e^{i\theta}) \geq 0$ почти всюду на I , то f аналитически продолжается через I . Пусть $f = Bg^2$, где $g \in H^1$ и B — произведение Бляшке. Тогда $\overline{g(1/\bar{z})} \in H^1(|z| > 1)$ и на I

$$B(z)g^2(z) = g(z)\overline{g(1/\bar{z})}.$$

Значит, по теореме Морера Bg и g продолжаются через I .

Результаты об $H^{1/2}$ имеют и другое доказательство, где используются максимальные функции и субгармоничность вместо факторизации Рисса. Пусть $v(z) = \operatorname{Im} \sqrt{f(z)}$, причем ветвь корня выбрана так, что $v \geq 0$. Функция $v(z)$ определена и субгармонична в D и $0 \leq v(z) \leq |f(z)|^{1/2}$, так что по теореме I.6.7 v имеет наилучшую гармоническую мажоранту

$$u(z) = \int P_z(\theta) v(e^{i\theta}) d\theta / 2\pi.$$

Если $f(e^{i\theta}) \geq 0$ почти всюду, то $v = 0$ и f постоянна.

Если $f(e^{i\theta}) \geq 0$ почти всюду на дуге I , то для любого $z_0 \in I$ найдется такое $\delta > 0$, что $0 \leq u(z) \leq 1$ в $V = D \cap \{|z - z_0| \leq \delta\}$. Тогда $0 \leq v(z) \leq 1$ в V и, значит, $|\operatorname{Im}(1 + f(z))| \leq \leq 2 \operatorname{Re}(1 + f(z))$, $z \in V$. Следовательно, $1 + f \in H^1(V)$. Конформно отображая V на D , мы видим, что $1 + f$ аналитична на $T \cap \partial V$. Это доказательство принадлежит Леннарту Карлесону.

Часть (c) получена Хелсоном и Сарасоном [1967] и, независимо, Нойвиртом и Ньюменом [1967]. Результат об $H^{1/2}$ в части (d) принадлежит Кусису [1973].

14. (a) При $p \geq 1$ существует локальный вариант следствия 4.8(a). Пусть $f \in H^1(D)$. Если $\operatorname{Re} f \geq 0$ почти всюду на дуге $I \subset T$, то внутренний сомножитель функции f аналитичен на I .

Случай $p > 1$, который мы используем в гл. IV, легче. Пусть $u(z)$ — интеграл Пуассона функции $\chi_I(\theta) \arg f(e^{i\theta})$, а $v(z)$ — гармонически сопряженная к $u(z)$ функция. Согласно упр. 13(a), $e^{-i(u+iv)} \in H^p$, $p < 1$, и $F = fe^{-i(u+iv)} \in H^{1/2}$. Так как $F \geq 0$ на I , то внутренний сомножитель аналитичен на I .

Следующее доказательство для $p = 1$ принадлежит Кусису. Заменяя дугу I меньшей, мы можем считать, что f имеет некасательные пределы в концах θ_1, θ_2 дуги I , причем $\operatorname{Re} f(e^{i\theta_j}) > 0$, $j = 1, 2$. Пусть Γ — дуга окружности, соединяющая $e^{i\theta_1}$ с $e^{i\theta_2}$ в D . Изменяя Γ , мы можем считать, что $\inf_{\Gamma} |f| > 0$. Пусть U — область, ограниченная $\Gamma \cup I$, а τ — конформное отображение круга D на U . Покажем, что $F = f \circ \tau$ — внешняя функция. Но τ можно выписать явно, и отсюда сразу следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \int \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

для любой компактной дуги $J \subset I$, что и означает отсутствие особенностей у внутреннего сомножителя f на I .

Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma$ — компактная дуга, причем $\operatorname{Re} f \geq 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_1$. Положим $\gamma = \tau^{-1}(\Gamma_1)$. Тогда $\operatorname{Re} F \geq 0$ почти всюду на $T \setminus \gamma$, в то время как $F(e^{i\theta})$ лежит в C^∞ и нигде не обращается в 0 на γ . Пусть $u \in C^\infty(T)$, $u = 0$ на $T \setminus \gamma$ и $|u - \arg F| < \pi/2$ на γ . Положим $g(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z)$ — интеграл Пуассона от $u(e^{i\theta})$, а $v(z)$ — гармонически сопряженная к $u(z)$ функция. В следующей главе мы увидим, что $g \in H^\infty$. Поскольку $\operatorname{Re} Fe^{-ig} \geq 0$ почти всюду и $Fe^{-ig} \in H^1$, следствие 4.8 показывает, что функция Fe^{-ig} внешняя.

(б) При $p < 1$ утверждение (а) становится неверным. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность Бляшке и $B_n(z)$ — конечное произведение Бляшке с нулями z_k , $1 \leq k \leq n$, причем $B_n(0) > 0$. Пусть $v_n \in L^\infty$, $v_n(e^{i\theta}) = \pm \pi/2$ таковы, что

$$|v_n(e^{i\theta}) - \arg B_n(e^{i\theta})| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $v_n(z)$ — интеграл Пуассона от $v_n(e^{i\theta})$ и $u_n(z)$ — гармонически сопряженная к $v_n(z)$ функция, $u_n(0) = 0$. Тогда $\operatorname{Re}(e^{u_n - iv_n}) \geq 0$ и $G_n = B_n e^{u_n - iv_n} \in H^p$ при всех $p < 1$, причем $\operatorname{Re} G_n(e^{i\theta}) \geq 0$ почти всюду.

При данном $p < 1$ и уже выбранных $z_1, \dots, z_n$ мы всегда можем выбрать z_{n+1} со столь малым $1 - |z_{n+1}|$, чтобы

$$\|G_{n+1} - G_n\|_p^p < 2^{-n}.$$

Теперь G_n сходятся в H^p и почти всюду к некоторому G и $\operatorname{Re} G(e^{i\theta}) \geq 0$, $G(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, но $G \not\equiv 0$, так как $|G(0)| = \lim_n |B_n(0)|$. На аргументы никаких ограничений нет,

и мы можем сделать все точки окружности предельными для $\{z_k\}$. Тогда внутренний сомножитель функции G не может аналитически продолжаться ни через какую дугу.

15. Пусть f принадлежит классу Неванлинны N . Некасательная максимальная функция

$$f^*(\theta) = \sup_{r < 1} |f(re^{i\theta})|, \quad \alpha > 0,$$

удовлетворяет неравенству

$$|\{\theta: f^*(\theta) > \lambda\}| \leq \frac{A_\alpha}{\log \lambda} \sup_{r < 1} \int \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}, \quad \lambda > 1.$$

Отсюда следует, что f имеет некасательный предел $f(e^{i\theta})$ почти всюду и

$$\int \log^+ |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \sup_{r < 1} \int \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

16. Аналитическая в D функция f принадлежит N тогда и только тогда, когда $f = f_1/f_2$, где $f_j \in H^\infty$, $j = 1, 2$, и f_2 не имеет нулей. Знаменатель f_2 можно выбрать внешней функцией тогда и только тогда, когда $f \in N^+$ (Ф. и Р. Неванлинна [1922]).

17. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех полиномов от z , а $f \in H^2(D)$. Тогда $\overline{\mathcal{P}}f = GH^2$, где G — внутренний сомножитель f .

18. (а) Пусть $0 < p < \infty$. Если M — замкнутое подпространство в H^p , инвариантное относительно умножения на z , то $M = GH^p$ для некоторой внутренней функции G (см. доказательство теоремы 7.5).

(б) Пусть M — замкнутое подпространство в L^p , $0 < p \leq \infty$ (при $p = \infty$ предположим M слабо L^1 -замкнутым). Пусть $zM \subset M$. Если $zM = M$, то $\bar{z}M = M$ и $M = \chi_E L^p$ для некоторого борелевского множества E . Если $zM \subsetneq M$, то $M = UH^p$ для некоторой функции $U \in L^\infty$, где $|U| = 1$ почти всюду.

** 19. (теорема Литтлвуда о субгармонических функциях). Пусть μ — положительная мера в D , такая, что

$$(E.1) \quad \int \log \frac{1}{|\xi|} d\mu(\xi) < \infty.$$

Потенциал Грина

$$U_\mu(z) = \int \log \left| \frac{1 - \bar{\xi}z}{\xi - z} \right| d\mu(\xi)$$

супергармоничен в D (т. е. функция $-U_\mu$ субгармонична). Для дискретной меры с единичными нагрузками $\mu = \sum \delta_{z_n}$, $z_n \neq 0$,

(E.1) равносильно условию Бляшке $\sum (1 - |z_n|) < \infty$ и $U_\mu(z) = -\log |B(z)|$, где $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$. Литтлвуд [1929] доказал, что

$$(i) \lim_{r \rightarrow 1} \int U_\mu(re^{i\theta}) d\theta = 0;$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 1} U_\mu(re^{i\theta}) = 0 \text{ почти всюду.}$$

Это обобщения результатов раздела 2 о произведениях Бляшке. Тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int \log \left| \frac{re^{i\theta} - z}{1 - re^{-i\theta}z} \right| d\theta = \begin{cases} \log |z|, & r < |z| \leq 1, \\ \log r, & |z| \leq r \end{cases}$$

следует из теоремы о среднем для гармонических функций. Поэтому (i) есть следствие из теоремы Фубини.

(ii) мы докажем для верхней полуплоскости и вертикальной сходимости. Локальность задачи позволяет предположить, что носитель меры μ лежит в квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Условие (E.1) превращается в

$$\int_Q y d\mu(x, y) < \infty,$$

а потенциал принимает вид

$$U_\mu(z) = \int_Q \log \left| \frac{z - \bar{\xi}}{z - \xi} \right| d\mu(\xi).$$

Мы должны показать, что $\lim_{y \rightarrow 0} U_\mu(x + iy) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Пусть μ_n — сужение μ на полосу

$$A_n = Q \cap \{2^{-n} < \operatorname{Im} \xi \leq 2^{-n+1}\},$$

а ν_n — вертикальная проекция $2^{-n}\mu_n$ на $[0, 1]$, $\nu_n(E) = 2^{-n}\mu(E \times (2^{-n}, 2^{-n+1}))$. Тогда $\sum_1^\infty \|\nu_n\| < \infty$. Положим

$$U_\mu(z) = U_1(z) + U_2(z),$$

где

$$U_1(z) = \int_{|\xi - z| \geq y/4} \log \left| \frac{z - \bar{\xi}}{z - \xi} \right| d\mu(\xi),$$

$$U_2(z) = \int_{|\xi - z| < y/4} \log \left| \frac{z - \bar{\xi}}{z - \xi} \right| d\mu(\xi), \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Оценим U_1 и U_2 по отдельности. При $|\xi - z| > y/4$

$$\log \left| \frac{z - \bar{\xi}}{z - \xi} \right| \leq c \frac{y\eta}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}, \quad \xi = \xi + i\eta.$$

Значит,

$$\begin{aligned} U_1(z) &\leq c \sum_1^\infty \int \frac{y\eta}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} d\mu_n(\xi) \leq \\ &\leq c \sum_1^N \int \frac{y\eta}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} d\mu_n(\xi) + cM \left(\sum_{N+1}^\infty d\nu_n \right)(x), \end{aligned}$$

где $M(dv)$ — максимальная функция Харди — Литтлвуда меры v . Для любого N

$$\lim_{y \rightarrow 0} \sum_1^N \int \frac{y\eta}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} d\mu_n(\xi) = 0,$$

так что по оценке слабого типа для $M(dv)$

$$|\{x: \lim_{y \rightarrow 0} U_1(x+iy) > \varepsilon\}| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{c}{\varepsilon} \sum_{N+1}^{\infty} \|v_n\| = 0.$$

Для оценки $U_2(z)$ предположим, что $z \in A_n$. Круг $\{|\xi - z| < y/4\}$ пересекает лишь A_{n-1} , A_n и A_{n+1} , так что

$$U_2(z) \leq c 2^n \sum_{k=n-1}^{n+1} \int_{|\xi-x| < 2^{-n}} \log \left| \frac{2^{-n}}{x-\xi} \right| dv_k(\xi).$$

Подынтегральное выражение положительно и четно, и потому

$$\begin{aligned} \int_{|\xi-x| < 2^{-n}} \log \left| \frac{2^{-n}}{x-\xi} \right| dv_k(\xi) &\leq c M(dv_k)(x) \int_0^{2^{-n}} \log \left| \frac{2^{-n}}{t} \right| dt \leq \\ &\leq c \cdot 2^{-n} M(dv_k)(x). \end{aligned}$$

Значит,

$$U_1(x+iy) \leq c \sum_{k=n-1}^{n+1} M(dv_k)(x)$$

и $U_1(x+iy) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ почти всюду.

Близкий результат будет доказан в разд. 3 гл. VIII.

*20. Теорема о канонической факторизации обобщается на субгармонические функции. Доказательство использует теорему Рисса о разложении (упражнение I.17) и теорему Литтлвуда (упражнение 19).

(а) Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция в D , $v \not\equiv -\infty$, и пусть $\mu \geq 0$ — ее слабый лапласиан. Для $|z| < r < 1$

$$v(z) = u_r(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| < r} \log \left| \frac{1-\bar{\xi}z}{\xi-z} \right| d\mu(\xi),$$

где $u_r(z)$ гармонична при $|z| < r$.

(б) Если $v(z)$ имеет гармоническую мажоранту, то ее наилучшая гармоническая мажоранта равна $u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} u_r(z)$ и $v(z) = u(z) - (1/2\pi) U_\mu(z)$. В частности, потенциал сходится везде, где $v(z) > -\infty$, и теорема Литтлвуда применима к $U_\mu(z)$.

(с) Если

$$\sup_r \int v^+(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

то наилучшая гармоническая мажоранта функции $v(z)$ есть интеграл Пуассона конечной меры $kd\theta/2\pi + d\sigma$, где σ сингулярна, так что, согласно части (ii) теоремы Литтлвуда, $v(z)$ имеет почти всюду некасательный предел $k(e^{i\theta})$.

(d) В частном случае $v(z) = \log|f(z)|$, $f \in N$, $f(0) \neq 0$, мы получаем теорему 5.5 как следствие (b) и (с).

См. Ф. Рисс [1930].

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ

После некоторой подготовки (в ходе которой будет установлено совпадение оператора гармонического сопряжения с преобразованием Гильберта) мы докажем — в нескольких вариантах — знаменитую теорему Марселя Рисса. Затем мы обсудим более молодую, но и более важную теорему, утверждающую, что сопряженная функция и некасательная максимальная функция принадлежат одному и тому же классу L^p .

1. Предварительные сведения

Пусть $f(\theta) \in L^1(T)$, где $T = \partial D$ — единичная окружность. Предположим вначале, что f вещественна, $u(z)$ — ее интеграл Пуассона, а $\tilde{u}(z)$ — функция, гармонически сопряженная с $u(z)$ и нормированная условием $\tilde{u}(0) = 0$. Поскольку

$$P_z(\varphi) = \operatorname{Re} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z},$$

то

$$(u + i\tilde{u})(z) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} f(\varphi) d\varphi$$

и

$$\tilde{u}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int Q_z(\varphi) f(\varphi) d\varphi,$$

где

$$-Q_z(\varphi) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} = \frac{2r \sin(\theta - \varphi)}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Эти формулы определяют *гармонически сопряженную функцию* $\tilde{u}(z)$ даже для комплексных f . Ядро $-Q_z(\varphi) = Q_r(\theta - \varphi)$ называется *сопряженным ядром Пуассона*¹⁾. Ядра Q_r вовсе не ведут себя как аппроксимативная единица; они нечетны и $\|Q_r\|_1 \sim \sim \log 1/(1-r)$. Тем не менее сопряженная функция $\tilde{u}(z)$ почти всюду на T имеет некасательные пределы.

Лемма 1.1. Если $f \in L^1(T)$, то $\tilde{u}(z)$ имеет некасательный предел $\tilde{f}(\theta)$ почти всюду на T .

¹⁾ Знак минус в $-Q_z(\varphi)$ обеспечивает равенство $Q_z(\varphi) = Q_r(\varphi)$ при $z=r$. В наших обозначениях $P_z - iQ_z$ аналитична при $|z| < 1$ и $e^{i\theta} \rightarrow P_r(\theta) + iQ_r(\theta)$ продолжается до аналитической при $|z| < 1$ функции.

Доказательство. Можно считать, что $f(\theta) \geq 0$. Аналитическая функция $g(z) = u(z) + i\tilde{u}(z)$ имеет неотрицательную вещественную часть, и $G(z) = g(z)/(1+g(z))$ ограничена. Функция $G(z)$ имеет почти всюду некасательный предел $G(\theta)$, и $G(\theta) = 1$ самое большее на множестве меры 0. Значит, $g = G/(1-G)$ почти всюду имеет конечные некасательные пределы, как и ее мнимая часть $\tilde{u}(z)$. $\square$

Линейное отображение $f(\theta) \rightarrow \tilde{f}(\theta)$ называется *оператором сопряжения*. Сопряженную функцию $\tilde{f}(\theta)$ можно представить и как интеграл в смысле главного значения.

Лемма 1.2. Пусть $f \in L^1(T)$. Для почти всех θ

$$(1.1) \quad \tilde{f}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\theta - \varphi| > \varepsilon} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) f(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

В частности, предел (1.1) существует почти всюду. Далее,

$$(1.2) \quad \left| \tilde{u}(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \varphi| > 1-r} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) f(\varphi) d\varphi \right| \leq CMf(\theta),$$

где C — абсолютная константа, а Mf — максимальная функция Харди — Литтлвуда для f .

Доказательство. При $\theta \neq 0$

$$\lim_{r \rightarrow 1} Q_r(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = Q_1(\theta),$$

а это — ядро (1.1). Пусть $\varepsilon = 1 - r$. При $\varepsilon < \theta < \pi$

$$\begin{aligned} Q_1(\theta) - Q_r(\theta) &= \frac{(1-r)^2 \sin \theta}{(1 - \cos \theta)(1 - 2r \cos \theta + r^2)} = \frac{1-r}{1+r} Q_1(\theta) P_r(\theta) \leq \\ &\leq \frac{1-r}{1+r} Q_1(1-r) P_r(\theta). \end{aligned}$$

Но $(1-r)Q_1(1-r) \leq 2$, и потому

$$(1.3) \quad |Q_1(\theta) - Q_r(\theta)| \leq \frac{2}{1+r} P_r(\theta), \quad \varepsilon < |\theta| < \pi.$$

С другой стороны, при $|\theta| \leq \varepsilon = 1 - r$

$$(1.4) \quad |Q_r(\theta)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \left| \tilde{u}(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \varphi| > \varepsilon} \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) f(\varphi) d\varphi \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\varphi| \leq \varepsilon} |Q_r(\varphi)| |f(\theta - \varphi)| d\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|\varphi| > \varepsilon} |Q_1(\varphi) - Q_r(\varphi)| |f(\theta - \varphi)| d\varphi \end{aligned}$$

По (1.3), (1.4) и теореме I.4.2 эти два интеграла не превосходят $CMf(\theta)$, и (1.2) доказано.

Чтобы доказать (1.1), используем тот факт, что нечетные функции $Q_r(\theta)$ и $Q_1(\theta)\chi_{\{|\theta|>\varepsilon\}}$ ортогональны константам. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{u}(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon < |\varphi| < \pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} f(\theta - \varphi) d\varphi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{|\varphi| \leq \varepsilon} Q_r(\varphi) (f(\theta - \varphi) - f(\theta)) d\varphi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon < |\varphi| < \pi} \frac{1-r}{1+r} Q_1(\varphi) P_r(\varphi) (f(\theta - \varphi) - f(\theta)) d\varphi.\end{aligned}$$

Значит, по (1.3) и (1.4)

$$\begin{aligned}\left| \tilde{u}(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} f(\theta - \varphi) d\varphi \right| \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|\varphi| \leq \varepsilon} |f(\theta - \varphi) - f(\theta)| d\varphi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int \frac{2}{1+r} P_r(\varphi) |f(\theta - \varphi) - f(\theta)| d\varphi.\end{aligned}$$

Согласно упражнению I.11, эти два интеграла стремятся к 0 на лебеговском множестве функции f . $\square$

Нетрудно доказать и некасательный аналог оценки (1.2):

$$\left| \tilde{u}(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \varphi| > \varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} f(\varphi) d\varphi \right| \leq C_\alpha Mf(\theta),$$

где $z \in \Gamma_\alpha(\theta)$ и $\varepsilon = 1 - |z|$. Детали мы оставляем читателю. Неравенство

$$\left| \frac{2}{\theta} - \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right| \leq \frac{2}{\pi}$$

показывает, что главное значение в (1.1) ведет себя так же, как и преобразование Гильберта

$$(1.5) \quad Hf(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |\theta - \varphi| < \pi} \frac{f(\varphi)}{\theta - \varphi} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f(\theta).$$

Функции $Hf(\theta)$ и $\tilde{f}(\theta)$ не совпадают, но их разность есть свертка с ограниченной функцией $2/\theta - \operatorname{ctg} \theta/2$, так что $Hf(\theta)$ существует почти всюду и

$$(1.6) \quad |\tilde{f}(\theta) - Hf(\theta)| \leq \frac{2}{\pi} \|f\|_1.$$

Существуют непрерывные функции f , для которых $\tilde{f}$ даже не ограничена. Например, пусть $F = u + i\tilde{u}$ — конформное отображение круга D на полосу $\{z: |x| < 1/(1+y^2)\}$, $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$. По теореме Каратеодори о непрерывности конформ-

ных отображений $u(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta})$ — непрерывная функция, но $\tilde{u}(\theta)$ не ограничена. Более простой пример получается из (1.5). Пусть $f(\theta)$ — нечетная функция, так что в (1.5) при $\theta = 0$ не возникает никаких сокращений. Тогда $\lim_{r \rightarrow 1} \tilde{u}(r)$ ведет себя как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta,$$

но этот интеграл может расходиться и для непрерывных f .

Для непрерывной функции $f(\theta)$ на окружности T пусть

$$\omega(\delta) = \omega_f(\delta) = \sup_{|\theta - \varphi| < \delta} |f(\theta) - f(\varphi)|$$

— ее *модуль непрерывности*. Модуль непрерывности — это убывающая функция, причем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0 \quad \text{и} \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

Функция называется *непрерывной по Дини*, если

$$\int_0^a \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$$

при некотором $a > 0$.

Теорема 1.3. Если функция $f(\theta)$ непрерывна по Дини на T , то $\tilde{f}$ существует всюду на T , непрерывна и

$$(1.7) \quad \omega_{\tilde{f}}(\delta) \leq C \left(\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right),$$

где постоянная C не зависит от f и ω .

Заметим, что при малом δ_0 и $0 < \delta < \delta_0$

$$\delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq \int_{\delta}^{\delta_0} \frac{\omega(t)}{t} dt + \frac{\delta}{\delta_0} \int_{\delta_0}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t} dt,$$

так что при выполнении условия Дини непрерывность $\tilde{f}$ следует из (1.7).

При $0 < \alpha < 1$ мы скажем, что $f \in \Lambda_{\alpha}$, если $\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha})$. Тогда (1.7) показывает, что сопряжение сохраняет классы Липшица Λ_{α} .

Доказательство. Если функция $b(\theta)$ ограничена и

$$b * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int b(\varphi) f(\theta - \varphi) d\varphi,$$

то при малых δ

$$\omega_{b \circ f}(\delta) \leq \|b\|_{\infty} \omega_f(\delta) \leq C \|b\|_{\infty} \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt.$$

Поэтому достаточно показать, что $Hf(\theta)$ существует всюду и допускает оценку (1.7). Поскольку

$$Hf(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|\theta - \varphi| > \varepsilon} \frac{f(\varphi) - f(\theta)}{\theta - \varphi} d\varphi,$$

то условие Дини обеспечивает существование $Hf(\theta)$ в каждой точке.

Пусть $|\theta_1 - \theta_2| = \delta$ и $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Константы имеют нулевое преобразование Гильберта, и можно считать, что $f(\theta_3) = 0$. Предположим, что $\theta_1 < \theta_2$. Тогда

$$\begin{aligned} |Hf(\theta_1) - Hf(\theta_2)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1 - \delta}^{\theta_1 + \delta} \frac{|f(\varphi) - f(\theta_1)|}{|\varphi - \theta_1|} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\theta_2 - \delta}^{\theta_2 + \delta} \frac{|f(\varphi) - f(\theta_2)|}{|\varphi - \theta_2|} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1 - \delta}^{\theta_1} \frac{|f(\varphi)|}{|\varphi - \theta_2|} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\theta_2}^{\theta_2 + \delta} \frac{|f(\varphi)|}{|\varphi - \theta_1|} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{3\delta/2 < |\varphi - \theta_3| < \pi} |f(\varphi)| \left| \frac{1}{\varphi - \theta_1} - \frac{1}{\varphi - \theta_2} \right| d\varphi \end{aligned}$$

Два первых интеграла не превосходят $C \int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt$. Поскольку $f(\theta_3) = 0$, два следующих интеграла не превосходят

$$\omega\left(\frac{3\delta}{2}\right) \int_{\delta}^{2\delta} \frac{dt}{t} \leq C\omega(\delta) \leq C \int_{\delta/2}^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt.$$

Наконец, последний интеграл — поскольку $f(\theta_3) = 0$ — не превосходит

$$C|\theta_1 - \theta_2| \int_{3\delta/2}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq C\delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2} dt. \quad \square$$

Следствие 1.4. Пусть $I \subset T$ — открытая дуга. Пусть $f \in L^1$ и f непрерывна по Дини на дуге I . Тогда f непрерывна во всех точках этой дуги.

Доказательство. Прежде всего если $f(\theta) = 0$ на I , то, согласно (1.1), f на I вещественно-аналитична. Если J — произвольная компактная часть дуги I , то существует непрерывная

по Дини на T функция g , равная f в окрестности J . По теореме 1.3

$$\tilde{f} = \tilde{g} + (f - g)^{\sim}$$

непрерывна на J . $\square$

Существует тесная связь между сопряженными функциями и частичными суммами рядов Фурье. Пусть $f(\theta) \in L^1$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Предположим для простоты, что f вещественна, так что $a_{-n} = \bar{a}_n$. Поскольку P_r и Q_r вещественны и

$$P_r(\theta) + iQ_r(\theta) = \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} r^n e^{in\theta},$$

то

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta},$$

$$Q_r(\theta) = \sum_{n \neq 0} (-i) \operatorname{sign}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Стало быть,

$$u(re^{i\theta}) = P_r * f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

и

$$\tilde{u}(re^{i\theta}) = Q_r * f(\theta) = -i \sum_{n \neq 0} \operatorname{sign}(n) a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

В частности, для тригонометрического полинома $\sum_{-N}^N a_n e^{in\theta}$ функция $\tilde{f}(\theta)$ будет полиномом той же степени,

$$(1.8) \quad \tilde{f}(\theta) = \sum_{-N}^N m(n) a_n e^{in\theta},$$

где

$$m(n) = \begin{cases} -i, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \\ i, & n < 0 \end{cases}$$

— мультипликатор Фурье, связанный с оператором сопряжения. Из теоремы Парсеваля сразу вытекает

Теорема 1.5. Если $f \in L^2$, то и $\tilde{f} \in L^2$, причем

$$\|\tilde{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - |a_0|^2.$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) d\theta.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$P(f) = \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) + \frac{1}{2}a_0,$$

который переводит $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ в $\sum_0^{\infty} a_n e^{in\theta}$. Оператор P уничтожает a_n при $n < 0$ и является ортогональным проектором пространства L^2 на H^2 . В любой норме, в которой линейный функционал $f \rightarrow a_0(f)$ непрерывен, оператор P будет ограничен или неограничен одновременно с оператором сопряжения.

Оператор $f \rightarrow e^{-in\theta}(P(e^{in\theta}f))$ уничтожает коэффициенты a_k при $k < -n$, а остальные коэффициенты не меняет. Таким же образом оператор $f \rightarrow e^{i(n+1)\theta}P(e^{-i(n+1)\theta}f)$ уничтожает коэффициенты a_k при $k < n+1$. Следовательно,

$$e^{-in\theta}P(e^{in\theta}f) - e^{i(n+1)\theta}P(e^{-i(n+1)\theta}f) = S_n(f)$$

есть частичная сумма $\sum_{-n}^n a_k e^{ik\theta}$ ряда Фурье.

Подобное же рассуждение показывает, что

$$Pf = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\theta} S_n(e^{-in\theta}f), \quad f \in L^2.$$

Это значит, что знаменитая теорема Марселя Рисса

$$\|f\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

равносильна любому из неравенств

$$\|Pf\|_p \leq B_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

или

$$\sup_n \|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Легко видеть, что последнее неравенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$\|S_n f - f\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad f \in L^p.$$

(В одну сторону используйте принцип равномерной ограниченности; в другую — плотность тригонометрических полиномов в L^p .)

Для верхней полуплоскости пусть $u(z)$ — интеграл Пуассона функции $f(t) \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Сопряженная функция $\tilde{u}(z)$ теперь определяется формулой

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt = Q_y * f(x), \quad z = x + iy,$$

где

$$Q_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + y^2}$$

— сопряженное ядро для верхней полуплоскости. Определяющий $\tilde{u}(z)$ интеграл сходится, так как $Q_y \in L^q$ при всех $q > 1$. Поскольку

$$P_y(x-t) + iQ_y(x-t) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{t-z},$$

то функция $u(z) + i\tilde{u}(z)$ аналитична в верхней полуплоскости. Этот выбор $\tilde{u}(z)$ включает в себя нормировку, отличную от случая круга. Вместо $\tilde{u}(i) = 0$ мы требуем, чтобы $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(x + iy) = 0$, потому что только при такой нормировке $\tilde{u}(z)$ может быть интегралом Пуассона функции из L^p , $p < \infty$. Поскольку $Q_y \notin L^1$, то для $p = \infty$ мы возвращаемся к нормировке круга и полагаем

$$\tilde{u}(z) = \int \left(Q_y(x-t) + \frac{1}{\pi} \frac{t}{1+t^2} \right) f(t) dt.$$

Тогда $\tilde{u}(i) = 0$, и при $f \in L^\infty$ указанный интеграл абсолютно сходится.

Полученные выше результаты о сопряженных функциях в круге можно тем же путем доказать и в полуплоскости, и мы не будем сейчас излагать их подробно. Однако мы отметим некоторые небольшие различия между двумя этими случаями.

При $p < \infty$ предел ядер $Q_y(t)$ при $y \rightarrow 0$ совпадает с ядром $1/\pi t$ преобразования Гильберта. Таким образом,

$$\left| \tilde{u}(x + iy) - \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > y} \frac{f(t)}{x-t} dt \right| \leq CMf(x),$$

и при $y \rightarrow 0$ оба члена в этом выражении стремятся почти всюду к $\tilde{f}(x) = Hf(x)$.

Преобразование Гильберта функции $f \in L^\infty$ почти всюду определяется формулой

$$Hf(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \tilde{u}(x + iy) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) f(t) dt.$$

Нормировка $\tilde{u}(i) = 0$ делает интегралы сходящимися при больших t .

Для фиксированного $y > 0$ функция $K_y = P_y + iQ_y = -1/\pi i(t + iy)$ лежит в L^2 , и ее преобразование Фурье

$$\hat{K}_y(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-1}{\pi i} \int_{-N}^N \frac{e^{-2\pi i s t}}{t + iy} dt$$

можно вычислить по теореме Коши:

$$\hat{K}_y(s) = \begin{cases} 2e^{-2\pi sy}, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\hat{P}_y(s) = e^{-2\pi|s|y}$, это дает

$$\hat{Q}_y(s) = \begin{cases} -ie^{-2\pi|s|y}, & s > 0, \\ ie^{-2\pi|s|y}, & s < 0. \end{cases}$$

Из теоремы Планшереля следует, что $Q_y * f$ сходятся в норме L^2 при $y \rightarrow 0$. Поскольку $Q_y * f \rightarrow Hf$ почти всюду, то мы заключаем, что $Hf \in L^2$, $\|Q_y * f - Hf\|_2 \rightarrow 0$ и имеют место равенства

$$(1.9) \quad \widehat{Hf}(s) = (\tilde{f})^\wedge(s) = -i \frac{s}{|s|} \hat{f}(s),$$

$$(1.10) \quad \|Hf\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

2. L^p -теоремы

Выберем $\alpha > 1$. Максимальная сопряженная функция для $f \in L^1(T)$ — это

$$(\tilde{f})^*(\theta) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(\theta)} |\tilde{u}(z)|,$$

где $\tilde{u}(z)$ — сопряженный интеграл Пуассона для $f(\theta)$, а $\Gamma_\alpha(\theta)$ — сектор

$$\left\{ \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < \alpha, |z| < 1 \right\}.$$

Теорема 2.1. Существует константа A_α , зависящая только от α и такая, что

$$(2.1) \quad |\{\theta: (\tilde{f})^*(\theta) > \lambda\}| \leq (A_\alpha/\lambda) \|f\|_1, \quad \lambda > 0,$$

при $f \in L^1(T)$.

Доказательство. Если мы докажем (2.1) для положительных $f \in L^1$ с постоянной C_α , то будет доказан и общий случай с $A_\alpha = 8C_\alpha$. Поэтому предположим, что $f \geq 0$. Тогда $F(z) = (P_r + iQ_r) * f(\theta)$, $z = re^{i\theta}$, — аналитическая функция в D с $\operatorname{Re} F(z) > 0$ и

$$F(0) = \int f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_1.$$

Множество $\{ts: |s| > \lambda\}$ на мнимой оси имеет в правой полуплоскости гармоническую меру

$$h(w) = \frac{1}{\pi} \int_{|s| > \lambda} \frac{u}{(v-s)^2 + u^2} ds, \quad w = u + iv.$$

Очевидно, что $h(w) \geq 0$ и $h(w) \geq 1/2$ при $|\operatorname{Im} w| \geq \lambda$. На положительной вещественной полуоси

$$h(u) = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{u}{s^2 + u^2} ds \leq \frac{2u}{\pi\lambda}.$$

Суперпозиция $g(z) = h(F(z))$ является положительной гармонической функцией в D , т. е. интегралом Пуассона некоторой положительной меры с полной массой

$$g(0) = h\left(\int f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}\right) = h(\|f\|_1).$$

Если $|\operatorname{Im} F(z)| > \lambda$, то $g(z) > 1/2$ и, стало быть,

$$\{\theta: (\tilde{f})^*(0) > \lambda\} \subset \{\theta: g^*(\theta) > 1/2\}.$$

Но для интегралов Пуассона положительных мер справедлива оценка слабого типа для некасательной максимальной функции (теорема I.5.1), и поэтому

$$|\{\theta: (\tilde{f})^*(\theta) > \lambda\}| \leq 2B_{\alpha} g(0) = 2B_{\alpha} h(\|f\|_1) \leq \frac{4B_{\alpha}}{\pi\lambda} \|f\|_1,$$

где B_{α} зависит только от α . Значит, (2.1) доказано для $f \in L^1$ с $A_{\alpha} = 32B_{\alpha}/\pi$. $\square$

Доказательство (2.1) для верхней полуплоскости одной детально отличается от этого рассуждения.

Лемма 2.2. Если μ — конечная мера на $\mathbb{R}$ с интегралом Пуассона $u(z)$, то

$$\int d\mu = \lim_{y \rightarrow \infty} \int \frac{y^2}{t^2 + y^2} d\mu(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \pi u(iy).$$

Эта лемма элементарна.

Чтобы доказать (2.1) и для верхней полуплоскости, предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Функция $F(z) = (u + i\tilde{u})(z) = (P_y + iQ_y) * f(x)$, $z = x + iy$, аналитична в $\mathcal{H}$, и $\operatorname{Re} F(z) > 0$. Функция же $g(z) = h(F(z))$ гармонична и положительна в $\mathcal{H}$. Более того, поскольку $0 \leq g(z) \leq 1$, то $g(z)$ есть интеграл Пуассона от своего граничного значения $g(t)$. Снова мы получаем

$$\{t: (\tilde{f})^*(t) > \lambda\} \subset \{t: g^*(t) > 1/2\},$$

где $(\tilde{f})^*(t) = \sup_{\Gamma_{\alpha}(t)} |\tilde{u}(z)|$ — максимальная сопряженная функция для верхней полуплоскости. Следовательно,

$$|\{t: (\tilde{f})^*(t) > \lambda\}| \leq 2B_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt.$$

Но по лемме 2.2

$$\int g(t) dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \pi y h(F(iy)) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \int_{|s| > \lambda} \frac{u(iy) ds}{u(iy)^2 + (\tilde{u}(iy) - s)^2}.$$

Так как $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(iy) = 0$, то повторное использование этой леммы дает

$$\int g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int f(t) dt \int_{|s| > \lambda} \frac{ds}{s^2} = \frac{2 \|f\|_1}{\pi \lambda}.$$

Значит,

$$|\{t: (\tilde{f})^*(t) > \lambda\}| \leq (4B_\alpha/\pi\lambda) \|f\|_1$$

при $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $f \geq 0$.

Теорема 2.1 показывает, что оператор сопряжения имеет слабый тип $(1-1)$ на $L^1(T)$ или на $L^1(\mathbb{R})$. Мы видели в разд. 1, что он ограничен в L^2 , поэтому по теореме Марцинкевича

$$(2.2) \quad \|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad 1 < p \leq 2.$$

Но при $2 < p < \infty$ (2.2) можно вывести из соображений двойственности. Из (1.8) или (1.10) следует, что

$$\int \tilde{f} g dt = - \int f \tilde{g} dt,$$

где f, g лежат в $L^2(\mathbb{R})$ или $L^2(T)$. Мы рассмотрим только $L^p(\mathbb{R})$. При $p > 2$, $q = p/(p-1)$ и $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

$$\|\tilde{f}\|_p = \sup \left\{ \left| \int \tilde{f} g dt \right| : g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q \leq 1 \right\}$$

независимо от того, конечна $\|\tilde{f}\|_p$ или нет. Но $q < 2$, и поэтому

$$\|\tilde{f}\|_p = \sup \left\{ \left| \int f \tilde{g} dt \right| : g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q \leq 1 \right\} \leq A_q \|f\|_p.$$

Так как $L^2 \cap L^p$ плотно в L^p , то оценка (2.2) справедлива на всем L^p с постоянной $A_p = A_q$. Мы доказали следующую теорему, принадлежащую М. Риссу.

Теорема 2.3. Если $1 < p < \infty$, то существует константа A_p , такая, что

$$\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

для $f \in L^p(\mathbb{R})$ или $f \in L^p(T)$.

Из интерполяционной теоремы следуют оценки

$$(2.3) \quad A_p \sim \frac{A}{p-1}, \quad p \rightarrow 1,$$

$$(2.4) \quad A_p \sim A p, \quad p \rightarrow \infty.$$

Эти оценки точны по порядку. По двойственности (2.3) точна, если точна (2.4). Но пусть $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$. Тогда $\|f\|_p = 1$

при всех p и

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} (\log |t| - \log |t-1|),$$

так что

$$\|\tilde{f}\|_p \geq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 |\log t|^p dt \right)^{1/p} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\infty x^p e^{-x} dx \right)^{1/p} = \frac{1}{\pi} (\Gamma(p+1))^{1/p}.$$

По формуле Стирлинга

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \|\tilde{f}\|_p \geq e/\pi.$$

Теорема Рисса вместе с максимальной теоремой дает

$$\|(f) * \|_p \leq B_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

где

$$B_p \sim \frac{C}{(p-1)^2}, \quad p \rightarrow 1.$$

Эта оценка B_p уже может быть улучшена до

$$B_p \sim B/(p-1), \quad p \rightarrow 1,$$

интерполяцией непосредственно между (2.1) и оценкой в L^2 . На другом конце $B_p \sim Bp$, $p \rightarrow \infty$, так как постоянные в максимальной теореме ограничены при $p \rightarrow \infty$.

Отметим фундаментальное различие между теоремами 2.3 и 1.3. В теореме 1.3 существенна гладкость $f(\theta)$, в то время как в теореме 2.3 важно взаимное сокращение значений ядра.

Теорема 2.4. Пусть функция $F(z)$ аналитична в круге D . Если $\operatorname{Re} F(z) > 0$, то $F \in H^p$ при всех $p < 1$ и $\|F\|_{H^p} \leq C_p |F(0)|$.

Это утверждение можно вывести из теоремы 2.1, потому что $\operatorname{Re} F$ является интегралом Пуассона конечной меры, а любая функция из слабого L^1 на T лежит во всех L^p , $p < 1$. Однако теорема 2.4 допускает и простое непосредственное доказательство.

Доказательство. Пусть $F = |F|e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi/2$. Функция F^p аналитична в D и

$$F^p = |F|^p (\cos p\varphi + i \sin p\varphi).$$

Но $p < 1$, и поэтому

$$|F|^p \leq C_p \operatorname{Re} F^p, \quad C_p = (\cos \pi p/2)^{-1}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi} \int |F(re^{i\theta})|^p d\theta \leq C_p \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Re} F^p(re^{i\theta}) d\theta = C_p \operatorname{Re} F^p(0) \leq \leq C_p |F(0)|^p. \quad \square$$

Следствие 2.5. Если $F(z)$ аналитична в D и $|\arg F(z)| \leq \leq \lambda \leq \pi$, то $F \in H^p$ при всех $p < \pi/2\lambda$.

Доказательство. Применим теорему 2.4 к $F^{\pi/2\lambda}$. $\square$

Следствие 2.6. Если $f(\theta) \in L^\infty(T)$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, то при $p < \pi/2$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{p|f|} d\theta \leq C_p < \infty.$$

Если $f(\theta)$ непрерывна на T , то

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{p|f|} d\theta < \infty$$

при всех $p < \infty$.

Доказательство. Если $f \in L^\infty$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, то функция

$$F = \exp\left(\pm \frac{\pi}{2} i(f + i\tilde{f})\right)$$

отображает круг в правую полуплоскость. Значит, $F \in H^p$ при всех $p < 1$. Если же f непрерывна, то найдется тригонометрический полином g , такой, что $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Тогда $\tilde{g}$ тоже тригонометрический полином, так что $\tilde{g}$ ограничена. Стало быть,

$$\exp p|f| \leq \exp(p|f - \tilde{g}|) \exp p|\tilde{g}|$$

— интегрируемая функция при $p < \pi/2\varepsilon$. $\square$

Теорема 2.7. Пусть $E \subset T$ — измеримое множество меры $|E|$, и пусть $f = \chi_E$. Тогда функция распределения

$$|\{\theta: |f(\theta)| > \lambda\}|$$

зависит только от $|E|$.

Доказательство. Для $F(z) = (P_r + iQ_r) * f(\theta)$, $z = re^{i\theta}$, имеем $0 < \operatorname{Re} F(z) < 1$, $\operatorname{Re} F(e^{i\theta}) = \chi_E(\theta)$ почти всюду и $F(0) = |E|/2\pi$. Если $h(w)$ — гармоническая функция в полосе $\{0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ с граничными значениями $\chi_{\{|\operatorname{Im} w| > \lambda\}}$, то ограниченная гармоническая функция $h(F(z))$ почти всюду имеет некасательный предел, равный характеристической функции множества $\{\theta: |f(\theta)| > \lambda\}$. Значит,

$$|\{\theta: |f(\theta)| > \lambda\}| = 2\pi h(F(0)) = 2\pi h(|E|/2\pi).$$

Теорема 2.7 доказана. $\square$

3. Сопряженные функции и максимальные функции

Теорема Рисса при $p = 1$ и $p = \infty$ неверна. Для $p = \infty$ контр-пример был дан в разд. 1; при $p = 1$ теорема неверна по соображениям двойственности.

Однако существует близкое неравенство, справедливое для всех конечных p , из которого теорема Рисса вытекает при $1 < p < \infty$. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. С помощью секторов

$$\Gamma(t) = \{z \in \mathcal{H} : |x - t| < y\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

определим для нее некасательную максимальную функцию

$$u^*(t) = \sup_{\Gamma(t)} |u(z)|.$$

Теорема 3.1. Если $0 < p < \infty$ и вещественная гармоническая в $\mathcal{H}$ функция $u(z)$ такова, что $u^* \in L^p$, то существует гармонически сопряженная с $u(z)$ функция $v(z)$, для которой

$$(3.1) \quad \sup_{y>0} \int |v(x + iy)|^p dx \leq C_p \int |u^*(t)|^p dt.$$

В единичном круге справедлива та же оценка:

$$(3.2) \quad \sup_{r<1} \int |\tilde{u}(re^{i\theta})|^p d\theta \leq c_p \int |u^*(\theta)|^p d\theta, \quad 0 < p < \infty,$$

где $\tilde{u}$ — обычная сопряженная функция с нормировкой $\tilde{u}(0) = 0$, а

$$(3.3) \quad u^*(\theta) = \sup \left\{ |u(z)| : \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < 2 \right\}.$$

Конечно, в теореме 3.1 несущественно, что раствор сектора равен $\pi/2$. Из теоремы 3.6 мы увидим, что (3.1) остается в силе для секторов любого раствора.

При $p > 1$ теорема 3.1 вытекает из теоремы Рисса, так что нечто новое она сообщает лишь для $p \leq 1$. В свою очередь теорема Рисса следует из теоремы 3.1 и максимальной теоремы Харди — Литтлвуда. Впервые теорема 3.1 была доказана Буркхольдером, Ганди и Сильверстейном [1971] с помощью броуновского движения. Приводимое ниже элементарное доказательство недавно изобрел Пол Кусис. Мы ограничимся случаем $p < 2$ и вначале дадим доказательство для прямой. После этого мы покажем, как приспособить наши рассуждения к случаю окружности.

Лемма 3.2. Если $F(z) = u(z) + iv(z) \in H^2$,

$$m(\lambda) = |\{t: u^*(t) > \lambda\}|$$

$$\mu(\lambda) = |\{t: |v(t)| > \lambda\}|,$$

$$(3.4) \quad \mu(\lambda) \leq 2m(\lambda) + \frac{2}{\lambda^2} \int_0^\lambda sm(s) ds.$$

Доказательство. Пусть $U_\lambda = \{t: u^*(t) > \lambda\}$ и $E_\lambda = \mathbb{R} \setminus U_\lambda$, так что $m(\lambda) = |U_\lambda|$. Построим область $\mathcal{R} = \bigcup_{t \in E_\lambda} \Gamma(t)$.

Ее граница состоит из двух частей: $E_\lambda = \partial\mathcal{R} \cap \mathbb{R}$ и $\Gamma = \{y > 0\} \cap \partial\mathcal{R}$. Множество Γ — это объединение «домиков» над составляющими открытое множество U_λ интервалами, как показано на

$\mathcal{R}$

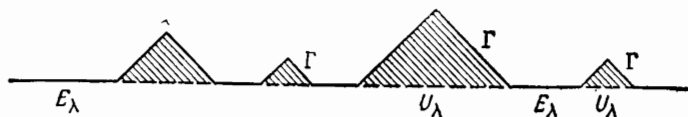


Рис. III. 1. $|u(z)| \leq \lambda$ на $\mathcal{R}$.

рис. III. 1. Поскольку $F(z) \in H^2$, то из теоремы Коши и плотности множества $\mathcal{A}_N$ в H^1 следует, что

$$\int_{\partial\mathcal{R}} F^2(z) dz = 0.$$

Раскрывая вещественную часть этого интеграла, получаем

$$\int_{E_\lambda} (u^2 - v^2) dx + \int_{\Gamma} (u^2 - v^2) dx - 2 \int_{\Gamma} uv dy = 0.$$

На Γ мы имеем $|dy| = dx$ и $-2uv \leq u^2 + v^2$, так что

$$-2 \int_{\Gamma} uv dy \leq \int_{\Gamma} (u^2 + v^2) dx.$$

Значит,

$$0 \leq \int_{E_\lambda} (u^2 - v^2) dx + 2 \int_{\Gamma} u^2 dx$$

и

$$(3.5) \quad \int_{E_\lambda} v^2 dx \leq \int_{E_\lambda} u^2 dx + 2 \int_{\Gamma} u^2 dx.$$

Но $|u(z)| \leq \lambda$ на Γ , откуда

$$\int_{\Gamma} u^2 dx \leq \lambda^2 \int_{\Gamma} dx = \lambda^2 |U_\lambda| = \lambda^2 m(\lambda).$$

Оценим теперь второй член в правой части (3.5):

$$\begin{aligned} \int_{E_\lambda} u^2 dx &\leq \int_{E_\lambda} (u^*)^2 dx = \iint_{\substack{u^* \leq \lambda \\ 0 < s < u^*}} 2s ds dx = \int_0^\lambda \int_{\{s < u^* < \lambda\}} dx 2s ds = \\ &= \int_0^\lambda (m(s) - m(\lambda)) 2s ds = \int_0^\lambda 2sm(s) ds - \lambda^2 m(\lambda). \end{aligned}$$

Тогда ввиду неравенства Чебышева (3.5) дает

$$|\{t \in E_\lambda: |v(t)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda 2sm(s) ds - m(\lambda) + 2m(\lambda).$$

Но

$$\mu(\lambda) \leq |U_\lambda| + |\{t \in E_\lambda: |v(t)| > \lambda\}|,$$

и (3.4) доказано. $\square$

Неравенство (3.4) — главный шаг в доказательстве теоремы 3.1. Оставшаяся часть доказательства более стандартна

Лемма 3.3. Если $0 < p \leq 2$ и $u^* \in L^p$, то

$$\left(\int |u(x + iy)|^2 dx \right)^{1/2} \leq 2y^{1/2-1/p} \left(\int |u^*|^p dt \right)^{1/p}, \quad y > 0.$$

Доказательство. Пусть $y > 0$. Тогда

$$|u(x + iy)|^p \leq \inf_{|t-x|<y} |u^*(t)|^p \leq \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} |u^*(t)|^p dt,$$

и потому

$$\sup_x |u(x + iy)| \leq (2y)^{-1/p} \|u^*\|_p.$$

Поскольку $p \leq 2$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \left(\int |u(x + iy)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left\{ (2y)^{\frac{p-2}{p}} \|u^*\|_p^{2-p} \int |u(x + iy)|^p dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq (2y)^{1/2-1/p} \left(\int |u^*|^p dt \right)^{1/p}. \quad \square \end{aligned}$$

Переходя к доказательству теоремы 3.1 для прямой и для $0 < p < 2$, предположим, что $u^* \in L^p$, и выберем $y_0 > 0$. По лемме 3.3 найдется сопряженная к $u(z)$ функция $v(z)$, определенная при $y > y_0$, для которой

$$\sup_{y > y_0} \int |f(x + iy)|^2 dx < \infty, \quad f = u + iv.$$

Для любого $y_0 > 0$ может быть только одна такая v , поэтому v не зависит от y_0 . Положим

$$\mu(\lambda) = |\{x: |v(x + iy_0)| > \lambda\}|.$$

Для $u_0(z) = u(z + iy_0)$ имеет место неравенство $u_0^* \leq u^*$, и по лемме 3.2

$$\mu(\lambda) \leq 2m(\lambda) + \frac{2}{\lambda^2} \int_0^\lambda sm(s) ds, \quad m(\lambda) = |\{t: u^*(t) > \lambda\}|.$$

Интегрируя его по λ с весом $p\lambda^{p-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \int |v(x + iy_0)|^p dx &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mu(\lambda) d\lambda \leq \\ &\leq 2 \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\lambda) d\lambda + 2 \int_0^\infty psm(s) \int_s^\infty \lambda^{p-3} d\lambda ds = \\ &= 2\|u^*\|_p^p + \frac{2}{2-p} \int_0^\infty ps^{p-1} m(s) ds = \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2-p}\right) \|u^*\|_p^p. \end{aligned}$$

Правая часть не зависит от y_0 , и мы получаем (3.1) с постоянной

$$C_p = 2\left(1 + \frac{1}{2-p}\right), \quad p < 2.$$

Рост C_p при $p \rightarrow 2$ не имеет значения, так как теорема Рисса дает при $p > 1$ другое доказательство оценки (3.1). $\square$

Конечно, случай $p \geq 2$ теоремы 3.1 может быть доказан и без обращения к теореме Рисса. При $p > 2$ теорема по соображениям двойственности выводится из уже доказанного случая $p < 2$, а оставшийся случай $p = 2$ получается интерполяцией.

В единичном круге годятся те же рассуждения, но нам нужно установить неравенство, аналогичное (3.4). Пусть $f = u + i\tilde{u} \in H^2$, $\tilde{u}(0) = 0$. Пусть $U_\lambda = \{\theta: u^*(\theta) > \lambda\}$, где u^* определено формулой (3.3), $\tilde{E}_\lambda = T \setminus U_\lambda$ и $m(\lambda) = |U_\lambda|$. Пусть, наконец, $\mu(\lambda) = |\{\theta: |\tilde{u}(\theta)| > \lambda\}|$. Если $m(\lambda)$ не мало, то автоматически

$$(3.6) \quad \mu(\lambda) \leq Cm(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda sm(s) ds.$$

Это и есть интересующее нас неравенство. Поэтому нам достаточно доказать его при малых значениях $m(\lambda)$. Как и раньше

ше, построим

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\theta \in E_\lambda} \left\{ z: \frac{|e^{i\theta} - z|}{1 - |z|} < 2 \right\}.$$

Снова $\partial\mathcal{R} = E_\lambda \cup \Gamma$, где Γ — объединение «домиков» над компонентами связности U_λ . По теореме Коши

$$u(0)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{R}} f^2(z) \frac{dz}{z}.$$

На E_λ

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} d\theta,$$

а на Γ

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} d\theta \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{dr}{r}.$$

При достаточно малом $m(\lambda) = |U_\lambda|$ величина $1 - r$ мала на Γ , и легко видеть, что почти всюду на Γ

$$\left| \frac{dr}{r d\theta} \right| < 1.$$

Раскрывая вещественную часть интеграла, имеем

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_\lambda} (u^2 - \tilde{u}^2) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (u^2 - \tilde{u}^2) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} 2u\tilde{u} \frac{dr}{r}.$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma} 2|u\tilde{u}| \frac{|dr|}{r} \leq \int_{\Gamma} (u^2 + \tilde{u}^2) d\theta,$$

мы получаем

$$\int_{E_\lambda} \tilde{u}^2 d\theta \leq \int_{E_\lambda} u^2 d\theta + 2 \int_{\Gamma} u^2 d\theta$$

при малых $m(\lambda)$. Неравенство (3.6) выводится отсюда так же, как в лемме 3.2, и, следовательно, справедливо при всех значениях $m(\lambda)$. Оставшаяся часть доказательства теоремы 3.1 показывает, что оценка (3.2) верна при $0 < p < 2$, а теорема Рисса дает (3.2) при $2 \leq p < \infty$.

Следствие 3.4. Пусть $0 < p < \infty$ и $u(z)$ — вещественная гармоническая функция. Равенство $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ с некоторой $f \in H^p$ справедливо тогда и только тогда, когда $u^* \in L^p$. Существуют c_1 и c_2 , зависящие только от p и такие, что

$$c_1 \|u^*\|_p \leq \|f\|_p \leq c_2 \|u^*\|_p.$$

Доказательство. Неравенство $c_1 \|u^*\|_p \leq \|f\|_p$ было доказано в гл. II. Второе неравенство непосредственно вытекает из теоремы. $\square$

Следствие 3.4, которое, конечно, равносильно самой теореме, очень важно, потому что оно описывает пространства H^p , $p < \infty$, без какого-либо обращения к аналитическим функциям. Пространства H^p можно охарактеризовать, даже не обращаясь и к гармоническим функциям (Фефферман и Стейн [1972]).

Следствие 3.5. Если $0 < p < \infty$ и $u(z)$ — гармоническая функция, с $u^* \in L_p$, то существует сопряженная к ней функция $v(z)$ с $v^* \in L_p$, причем

$$\|v^*\|_p^p \leq c_p \|u^*\|_p^p.$$

Доказательство. По следствию 3.4 $f = u + iv \in H^p$ и $\|f\|_p^p \leq c_2^p \|u^*\|_p^p$. По максимальной теореме тогда $f^* \in L^p$, а $\|f^*\|_p^p \leq A c_2^p \|u^*\|_p^p$. Но $v^* \leq f^*$, и потому $\|v^*\|_p^p \leq c_p \|u^*\|_p^p$. $\square$

Есть еще одно неравенство, более сильное, даже чем (3.1), в котором некасательная максимальная функция заменена на вертикальную. По-прежнему считая $u(z)$ гармонической функцией в $\mathcal{H}$, положим

$$u^+(t) = \sup_{y>0} |u(t + iy)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $u^+(t) \leq u^*(t)$. И обратно, оказывается справедливой

Теорема 3.6. Если $0 < p < \infty$ и $u(z)$ гармонична в $\mathcal{H}$, то

$$\int |u^*|^p dt \leq c_p \int |u^+|^p dt,$$

где c_p зависит только от p .

Как следствие мы получаем, что гармоническая функция $u(z)$ является вещественной частью функции из H^p тогда и только тогда, когда $u^+ \in L^p$, и, следовательно, неравенство (3.1) остается в силе для секторов любого раствора.

Доказательство теоремы 3.6 опирается на замечательное неравенство, принадлежащее Харди и Литтлвуду.

Лемма 3.7. Если $u(z)$ гармонична в круге $\Delta(z_0, R)$ и $0 < p < \infty$, то

$$(3.7) \quad |u(z_0)| \leq K_p \left(\frac{1}{\pi R^2} \iint_{\Delta(z_0, R)} |u(z)|^p dx dy \right)^{1/p},$$

где K_p зависит только от p .

При $p \geq 1$ лемма 3.7 — тривиальное следствие теоремы о среднем значении и неравенства Гёльдера. Но при $p < 1$ неравенство (3.7) неожиданно, так как функция $|u(z)|^p$ не обязана быть субгармонической.

Доказательство. Мы ограничимся случаем $p < 1$ и предположим без ограничения общности, что $z_0 = 0$ и $R = 1$. Пусть

$$m_q(r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q}.$$

Можно считать, что

$$2 \int_0^1 m_p(r)^p r dr = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta(0,1)} |u(z)|^p dx dy = 1$$

и что $m_\infty(r) = \sup \{|u(z)| : |z| = r\} > 1$ при $0 < r < 1$, так как иначе (3.7) выполняется с $K_p = 1$.

Поскольку $p < 1$, то

$$m_1(r) \leq \frac{1}{2\pi} \int |u(re^{i\theta})|^p d\theta m_\infty(r)^{1-p} = m_p(r)^p m_\infty(r)^{1-p}.$$

Оценка максимума ядра Пуассона дает

$$m_\infty(\rho) \leq \frac{2m_1(r)}{1 - \rho/r}, \quad 0 < \rho < r < 1.$$

Положим $\rho = r^\alpha$, где $\alpha > 1$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r^\alpha) \frac{dr}{r} &\leq \int_{1/2}^1 \log \left(\frac{2}{1 - \rho/r} \right) \frac{dr}{r} + p \int_{1/2}^1 \log m_p(r) \frac{dr}{r} + \\ &+ (1-p) \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа сходится и равен некоторому C_α , а второй не превосходит

$$\int_{1/2}^1 m_p(r)^p \frac{dr}{r} \leq 4 \int_0^1 m_p(r)^p r dr = 2.$$

Значит,

$$\int_{1/2}^1 \log m_\infty(r^\alpha) \frac{dr}{r} \leq (C_\alpha + 2) + (1-p) \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r}.$$

Но мы предположили, что $\log m_\infty(r) \geq 0$, и замена переменной дает

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} &\leq \int_{1/2^\alpha}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r} = \alpha \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r^\alpha) \frac{dr}{r} \leq \\ &\leq \alpha(C_\alpha + 2) + \alpha(1-p) \int_{1/2}^1 \log m_\infty(r) \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Выбирая $\alpha(1-p) < 1$, мы получим

$$\inf_{1/2 < r < 1} \log m_{\infty}(r) < \frac{\alpha(C_{\alpha} + 2)}{1 - \alpha(1-p)} \frac{1}{\log 2} = \log K_p.$$

Теперь (3.7) следует из принципа максимума. $\square$

Лемма 3.7 дает новое доказательство леммы 3.3, но с другой постоянной.

Доказательство теоремы 3.6. Выберем q , $0 < q < p$. Пусть $z = x + iy \in \Gamma(t) = \{|x - t| < y\}$. Функция u гармонична в $\Delta(z, y/2)$, и по лемме 3.7

$$\begin{aligned} |u(z)|^q &\leq \frac{4K_q^q}{\pi y^2} \iint_{\Delta(z, y/2)} |u(\xi + i\eta)|^q d\xi d\eta \leq \\ &\leq \frac{C_q}{y} \int_{|\xi - x| < y/2} u^+(\xi)^q d\xi \leq \frac{C_q}{y} \int_{|\xi - t| < 3y/2} u^+(\xi)^q d\xi, \end{aligned}$$

поскольку $|x - t| < y$. Последний интеграл не превосходит $C'_q Mg(t)$, где $g = (u^+)^q$, и Mg — максимальная функция Харди — Литтлвуда для g . Мы доказали, что

$$u^*(t)^p \leq C_q'' (Mg(t))^{p/q}.$$

Так как $p/q > 1$ и $g \in L^{p/q}$, то максимальная теорема дает

$$\int |u^*(t)|^p dt \leq C \int |Mg(t)|^{p/q} dt \leq C \int |u^+(t)|^p dt. \quad \square$$

Замечания

Теорема 1.3 для классов Λ_{α} восходит к Привалову [1916]¹⁾. Оценка слабого типа

$$(N.1) \quad |\{\theta: |\tilde{f}(\theta)| > \lambda\}| \leq (A/\lambda) \|f\|_1$$

и ее следствие

$$(N.2) \quad \|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_1, \quad 0 < p < 1,$$

которые, разумеется, вытекают из теоремы 2.1, принадлежат А. Н. Колмогорову [1925]. Для преобразования Гильберта оценка слабого типа была ранее опубликована Безиковичем [1923]. М. Рисс анонсировал свою теорему в [1924], но публикацию доказательства задержал до [1927]. Следствие 2.6 принадлежит Зигмунду [1929], а теорема 2.7 взята у Стейна и Вейсса [1959].

Теорема Рисса имеет много доказательств; доказательство в тексте выбрано за его краткость и потому, что оно подчерки-

¹⁾ Точные константы в неравенствах, соответствующих теореме 1.3, вычислены в статье Александрова [1975*]. — *Прим. ред.*

вает роль гармонических оценок. Доказательство теоремы 2.1 повторяет приводимое Кацнельсоном [1968] доказательство Карлесона неравенства Колмогорова. Приведенное в тексте доказательство теоремы 2.7 я узнал от Брайана Коула во время автомобильной поездки по Лос-Анджелесу.

Вещественные доказательства теоремы Рисса, более удобные для многомерных обобщений, ведут к теории сингулярных интегралов (см. Кальдерон и Зигмунд [1952] и Стейн [1970]). Подход Кальдерона — Зигмунда к теореме 2.1 описан в упр. 11, его идеи еще появятся в конце гл. VI. Другое вещественное доказательство, связанное с красивой леммой Люмиса [1946], элегантно изложено Гарсна [1970].

Заслуживают внимания еще три доказательства теоремы Рисса: первоначальное доказательство Рисса [1927] (см. у Зигмунда [1955]), его усовершенствование Кальдероном (Кальдерон [1950a] или Зигмунд [1968]) и доказательство при помощи формулы Грина, принадлежащее П. Стейну [1933], которое приводят Дьюрен [1970] и Зигмунд [1968]¹⁾.

Наилучшее значение постоянной A_p в теореме 2.3 определено Пикоридесом [1972] и, независимо, Б. Коулом (не опубликовано). Используя броуновское движение, Б. Девис [1974, 1976] нашел точные постоянные в неравенствах Колмогорова (N.1) и (N.2). Более классическое доказательство результатов Девиса дал позднее Бернштейн [1979]. Идея состоит в сведении неравенств для норм сопряженных функций к некоторой задаче о субгармонических функциях во всей плоскости. Начав с неотрицательных функций, мы можем заменить их гармоническими функциями в полуплоскости, расплачиваясь завышением постоянных и некоторой потерей в общности. Недавняя монография Гамелина [1979] дает превосходное изложение красивой теории Коула о сопряженных функциях в равномерных алгебрах; выводятся также и точные постоянные в нескольких теоремах.

Теорема Буркхольдера — Ганди — Сильверстейна 3.1 — результат, в настоящее время фундаментальный. С одной стороны, она объясняет, почему сопряженные функции удовлетворяют тем же неравенствам, что и максимальные. С другой сто-

¹⁾ Различные варианты «вещественного» подхода к результатам типа теорем М. Рисса и Колмогорова содержатся в работах Лузина [1951*] (стр. 287—319), Безикевича [1926*], Полларда [1927*], Полларда и Янга [1928*]. Исторически первые (и совершенно элементарные) оценки типа (2.1) и, по существу, той же силы, что и (2.1), получил Буль [1857*] (см. также Левинсон [1940*], стр. 68, Виноградов и Хрушев [1981*]). В связи с теоремой 2.1 см. также результаты П. Л. Ульянова (Бари [1961*], гл. 8) и А. Б. Александрова (Александров [1981a*], [1981b*]). Многомерный вариант теоремы 3.1 см. у Кусиса [1979]. Подход к теоремам Рисса — Колмогорова с позиций «абстрактной теории функций» дан в книге Барби и Кёнига [1977*]. — *Прим. ред.*

роны, случай $p \leq 1$ в этой теореме показывает, что некасательная максимальная функция — более мощный инструмент, чем максимальная функция Харди — Литтлвуда. Решающей здесь оказывается не гармоничность, а гладкость ядра Пуассона. Например, пусть $\varphi(t)$ — положительная и непрерывная по Дини функция с компактным носителем на $\mathbb{R}$. По аналогии с интегралом Пуассона положим для вещественной функции $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$U(x, y) = \frac{1}{y} \int \varphi\left(\frac{x-t}{y}\right) f(t) dt, \quad y > 0.$$

Тогда если $0 < p \leq 1$, то $f = \operatorname{Re} F$, $F \in H^p$, в том и только том случае, когда $\sup_{y>0} |U(x, y)| \in L^p(\mathbb{R})$.

Эту теорему вместе с новым доказательством теоремы 3.2 для $\mathbb{R}^n$ можно найти у Феффермана и Стейна [1972]. К сожалению, точные условия на ядро φ , необходимые и достаточные для характеристики H^p , остаются нерешенной задачей (см. Вейсс [1979]).

Другой путь к теореме 3.1 идет через атомную теорию пространств H^p . См. случай $\mathbb{R}^1$ у Койфмана [1974], обобщение на $\mathbb{R}^n$ у Лэттера [1978] и случай шара в $\mathbb{C}^n$ у Гарнетта и Лэттера [1978]. Теория атомов кратко обсуждается в упр. 11 к гл. VI.

Элементарное доказательство теоремы 3.1 в тексте заимствовано у Кусиса [1978]. Оно сделало книгу на 10 страниц короче.

Упражнения и дальнейшие результаты

1 (множества пика для диск-алгебры). Пусть $E \subset T$ — компактное множество меры 0.

(а) (Фату [1906]). Существует функция $u: T \rightarrow [-\infty, 0)$, такая, что $u^{-1}(-\infty) = E$, $u \in L^1(T)$, u непрерывна на T и $u \in C^1(T \setminus E)$. Тогда функция $g = u + i\bar{u}$ непрерывна в $\bar{D} \setminus E$ и ее значения лежат в левой полуплоскости. Функция $f_0 = \exp g$ входит в диск-алгебру $A_0 = H^\infty \cap C(T)$ и $f_0(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z \in E$. Таким образом, любое замкнутое множество меры 0 является *множеством нулей* для A_0 . Обратно, если $E \subset T$ является множеством нулей для какой-то функции $f \in A_0$, то $|E| = 0$ ($\int \log |f| d\theta > -\infty$).

(б) (Ф. Рисс и М. Рисс [1916]). Пусть g — функция из части (а) и $f_1 = g/(g-1)$. Тогда $f_1 \in A_0$, $f_1 \equiv 1$ на E и $|f_1(z)| < 1$ при $z \in \bar{D} \setminus E$. Значит, E — *множество пика* для A_0 . Обратно, любое множество пика для A_0 имеет меру 0. (Если $f \equiv 1$ на E , то $1-f \equiv 0$ на E .)

(с) Докажите при помощи (б) теорему Ф. и М. Риссов для круга: если μ — конечная комплексная борелевская мера на T

и $\int e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, то μ абсолютно непрерывна. (Иначе существует компакт E меры 0, для которого $\int_E e^{i\theta} d\mu(\theta) \neq 0$. Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_1^n e^{i\theta} d\mu = 0.)$$

Это — первоначальное доказательство теоремы.

(d) (Рудин [1956], Карлесон [1957]).¹⁾ Если $E \subset T$ — компактное множество меры 0, то E является *интерполяционным множеством пика* для A_0 , т. е. для данного $h \in C(E)$ всегда найдется функция $g \in A_0$, сужение которой на E совпадает с h и

$$\|g\|_\infty = \|h\| = \sup_E |h(z)|.$$

По теореме Рунге найдутся такие $g_n \in A_0$, что $g_n \rightarrow h$ равномерно на E . Выберем n_j так, чтобы $|g_{n_{j+1}} - g_{n_j}| < 2^{-j}$ в некоторой окрестности V_j множества E , и k_j так, чтобы

$$|g_{n_{j+1}} - g_{n_j}| |f_1^{k_j}| < 2^{-j}$$

на $T \setminus V_j$, где f_1 — функция пика из части (b). Тогда

$$g = g_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (g_{n_{j+1}} - g_{n_j}) f_1^{k_j}$$

лежит в A_0 и $g = h$ на E . Действуя несколько аккуратнее, нетрудно получить и равенство $\|g\|_\infty = \|h\|$.

(e) Результат (d) можно вывести из соображений двойственности. Оператор сужения $S: A_0 \rightarrow C(E)$ имеет сопряженный оператор $S^*: M(E) \rightarrow M(T)/A_0^\perp$, где $M(E) = C(E)^*$ — пространство конечных комплексных борелевских мер на E , а $A_0^\perp$ — подпространство в $M(T)$ мер, ортогональных к A_0 . По теореме Ф. и М. Риссов из гл. II (теорема II.3.6) S^* является изометрией. Пусть $I = \text{Ker } S = \{f \in A_0: S(f) = 0\}$. По известной теореме функционального анализа $\tilde{S}: A_0/I \rightarrow C(E)$ также является изометрией и отображает A_0/I на все $C(E)$. Теперь если $h \in C(E)$ и $\varepsilon > 0$, то существует $g \in A_0$, такое, что $g = h$ на E и $\|g\|_\infty \leq (1 + \varepsilon) \|h\|$. При подходящих m_k функция

$$g_0 = \sum 2^{-k} f_1^{m_k} g$$

равна h на E и $\|g_0\| = \|h\|$ (см. Бишоп [1962] и Гликсберг [1962]).

¹⁾ См. также Виноградов, Хавин [1976*], Оберлин [1980*], Виноградов, Хрущев [1981*], Пелчинский [1964a*], [1964b*], Дынькин [1979*], Широков [1982*], Досс [1981*]. — Прим. ред.

*(f) (Гамелин [1964]). Пусть $p(z)$ — положительная непрерывная функция в $\bar{D}$. Если $h \in C(E)$ и $|h(z)| \leq p(z)$, $z \in E$, то существует функция $g \in A_0$, такая, что $g = h$ на E и $|g(z)| \leq p(z)$ на $\bar{D}$.

2. Мы используем в дальнейшем следующее приложение результатов 1(b) и 1(c). Пусть μ — конечная комплексная борелевская мера на T , сингулярная относительно меры Лебега. Тогда существуют такие аналитические полиномы $p_n(z)$, что

$$(i) \quad |p_n(z)| \leq 1, \quad |z| \leq 1;$$

$$(ii) \quad \int p_n d\mu \rightarrow \|\mu\|;$$

$$(iii) \quad p_n \rightarrow 0 \text{ почти всюду по мере Лебега.}$$

Вместо условия (iii) можно потребовать, чтобы $p_n \rightarrow -1$ почти всюду по мере Лебега. (Указание. Пусть μ сосредоточена на $\bigcup_n E_n$, где E_n — компакты меры 0 и $E_n \subset E_{n+1}$. Пусть $h_n \in$

$C(E_n)$, $\|h_n\| < 1$, $\int_{E_n} h_n d\mu \rightarrow \|\mu\|$, и пусть $g_n \in A_0$ интерполи-

рует h_n , $\|g_n\| < 1$. Возьмите в качестве p_n полиномиальные приближения к g_n .)

** 3. Пусть A^m обозначает алгебру функций, у которых первые m производных принадлежат A_0 , и $A^\infty = \bigcap A^m$. Пусть A_α , $0 < \alpha \leq 1$, — пространство функций $f \in A_0$, у которых

$$|f(z) - f(w)| \leq K|z - w|^\alpha.$$

(a) Пусть E — замкнутое подмножество окружности T меры 0 и $\{l_j\}$ — длины его смежных интервалов. Для того чтобы E было множеством нулей для A^∞ или A_α , необходимо и достаточно, чтобы $\sum l_j \log 1/l_j < \infty$ (Карлесон [1952])¹⁾.

(b) С другой стороны, функция $f \in A^m$, такая, что $f(z) = 1$ на E и $|f| < 1$ в $\bar{D} \setminus E$, существует тогда и только тогда, когда E — конечное множество (Тейлор и Вильямс [1970]; дальнейшую информацию и смежные вопросы см. у Александера, Тейлора и Вильямса [1971] и Тейлора и Вильямса [1971]).

4. Теорема 1.3 точна в следующем смысле. Пусть функция $\omega(\delta)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$,

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$$

и

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta = \infty.$$

¹⁾ См. также Хрушев [1977b*], [1978*], а также работу Широкова [1981*]. Условие сходимости ряда $\sum l_j \log 1/l_j$ в связи с теоремами единственности впервые появилось в статье Берлинга [1939*]. См. также Кахан, Салем [1963*], гл. XI. — Прим. перев.

(а) Существует вещественная функция $f \in C(T)$, у которой

$$\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta), \quad \delta < \delta_0,$$

но $\tilde{f}$ не является непрерывной. (Положите $f(t) = \omega(t)$, $0 < t < \delta_0$; $f(t) = 0$, $-1 \leq t \leq 0$.)

(б) Существует вещественная функция $g \in C(T)$, у которой

$$\omega_g(\delta) \geq \omega(\delta),$$

но $\tilde{g}$ не непрерывна. Вот набросок доказательства.

Пусть K — канторовское трюичное множество, тогда $\{x - y: x \in K, y \in K\} = [-1, 1]$. (Попытайтесь нарисовать $K \times K$.) Пусть $h \in C(K)$, h вещественна и $\omega_h(\delta) \geq \omega(\delta)$. Найдется $g \in H^\infty$ с непрерывными граничными значениями, равная h на $\{e^{i\theta}: \theta \in K\}$.

5. Если $f \in C(T)$ непрерывна по Дини, то $S_n f \rightarrow f$ равномерно. Есть более точный результат: $S_n f \rightarrow f$ равномерно, если $\omega(\delta) \log 1/\delta \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) (Зигмунд [1968]).

6. Если $1 < p < \infty$ и $f \in L^p$, то $\|S_n f - f\|_p \rightarrow 0$.

7. Пусть $f \in L^1(T)$. Если $\int |f| \log(2 + |f|) d\theta < \infty$, то $\tilde{f} \in L^1$.

Если $f \geq 0$ и $\tilde{f} \in L^1$, то $\int |f| \log(2 + |f|) d\theta < \infty$. Первое утверждение принадлежит Зигмунду [1929], второе — М. Риссу (Зигмунд [1968]).

8. Докажите две оценки Колмогорова:

$$|\{|\tilde{f}| > \lambda\}| \leq (A/\lambda) \|f\|_1; \quad \|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_1, \quad 0 < p < 1.$$

Первая верна и на прямой, и на окружности, вторая — только на окружности.

9. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ имеет конечную меру; положим

$$H\chi_E(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\chi_E(t)}{x-t} dt.$$

Тогда функция распределения $H\chi_E$ зависит только от $|E|$. Точнее,

$$|\{ |H\chi_E(x)| > \lambda \}| = \frac{2|E|}{\text{sh } \pi \lambda}$$

(см. Стейн и Вейс [1959]).

10 (еще одна теорема о скачке). Пусть $f \in L^1(T)$; положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad |z| \neq 1.$$

Почти всюду на T $F(z)$ имеет некасательные пределы $f_1(\xi)$ изнутри круга D и пределы $f_2(\xi)$ извне круга D . Далее, почти всюду

$$f_1(\xi) - f_2(\xi) = f(\xi).$$

*11. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Положим

$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} f(t) \frac{dt}{x-t}, \quad \varepsilon > 0$$

$$H^*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f(x)|.$$

H^*f называется *максимальным преобразованием Гильберта*.

(а) Покажите, что

$$H^*f \leq c_1 M(Hf) + c_2 Mf,$$

где M обозначает максимальную функцию, а $Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f$.

Ввиду (1.10) отсюда следует, что $\|H^*f\|_2 \leq C\|f\|_2$.

(б) Предполагая, что H^* имеет слабый тип $(1-1)$, покажите с помощью интерполяции, что $\|H^*f\|_p \leq c_p \|f\|_p$, $1 < p < 2$.

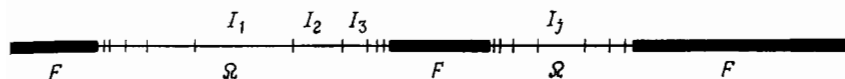


Рис. III.2. Разложение $\Omega = \bigcup I_j$.

(с) Для данного f найдется измеримая функция $\varepsilon(x)$, $0 < \varepsilon(x) < \infty$, такая, что

$$|H_{\varepsilon(x)} f(x)| \geq \frac{1}{2} H^*f(x)$$

(этот процесс называется *линеаризацией*). Поэтому

$$\int (H^*f(x)) |g(x)| dx \leq 2 \int |(H_{\varepsilon(x)} f(x)) g(x)| dx \leq 2 \int |f(x)| H^*g(x) dx,$$

так что из части (б) по соображениям двойственности следует, что $\|H^*f\|_p \leq C_p \|f\|_p$, $2 < p < \infty$.

(д) Почти очевидно ввиду (б) и (с), что $\|Hf\|_p \leq C_p \|f\|_p$, где $Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon f$.

(е) Вернемся к оценке слабого типа

$$(E.1) \quad |\{x: H^*f(x) > 3\lambda\}| \leq (C/\lambda) \|f\|_1.$$

Пусть $\Omega = \{x: Mf(x) > \lambda\}$ и $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$. Положим $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$,

где замкнутые интервалы I_j таковы, что $\text{dist}(F, I_j) = |I_j|$ (см. рис. III.2). Так как каждый I_j содержится в интервале удвоенной длины, пересекающем F , то

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(t)| dt \leq 2\lambda.$$

Положим

$$g(x) = f(x) \chi_F(x) + \sum_I \left(\frac{1}{|I_I|} \int_{I_I} f(t) dt \right) \chi_{I_I}(x),$$

$$b(x) = f(x) - g(x) = \sum_I \left(f(x) - \frac{1}{|I_I|} \int_{I_I} f(t) dt \right) \chi_{I_I}(x).$$

Специалисты по вещественному анализу называют $g(x)$ хорошей функцией, а $b(x)$ — плохой. Функция g хороша, потому что $\|g\|_2$ невелика:

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_F |f|^2 + \sum_I |I_I| \left(\frac{1}{|I_I|} \int_{I_I} f(t) dt \right)^2 \leq \\ &\leq \lambda \int_F |f| + 2\lambda \sum_I \int_{I_I} |f(t)| dt \leq 2\lambda \|f\|_1. \end{aligned}$$

Теперь неравенство в L^2 из части (а) дает

$$|\{x: H^*g(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^2} \|g\|_2^2 \leq \frac{2C}{\lambda} \|f\|_1,$$

и для доказательства (Е.1) нам достаточно проверить, что

$$|\{x: H^*b(x) > 2\lambda\}| \leq C/\lambda \|f\|_1.$$

По максимальной теореме $|\Omega| \leq (C/\lambda) \|f\|_1$, и нужно только доказать, что

$$(E.2) \quad |\{x \in F: H^*b(x) > 2\lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Но $b(x) = \sum b_I(x)$, где

$$b_I(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|I_I|} \int_{I_I} f(t) dt \right) \chi_{I_I}(x).$$

Заметим, что b_I обладают хорошим свойством сокращения:

$\int b_I(x) dx = 0$. Пусть $x \in F$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} H_\varepsilon b(x) &= \sum_I \int_{|x-t|>\varepsilon} b_I(t) \frac{dt}{x-t} = \\ &= \sum_{\text{dist}(x, I_I) > \varepsilon} \int_{I_I} b_I(t) \frac{dt}{x-t} + \sum_{\text{dist}(x, I_I) < \varepsilon} \int_{|x-t|>\varepsilon} b_I(t) \frac{dt}{x-t} = \\ &= A_\varepsilon(x) + B_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Пусть t_I — центр I_I . При $\text{dist}(x, I_I) > \varepsilon$

$$\int_{I_I} b_I(t) \frac{dt}{x-t} = \int_{I_I} b_I(t) \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-t_I} \right) dt = \int_{I_I} \frac{b_I(t)(t-t_I)}{(x-t)(x-t_I)} dt,$$

так как $\int b_I(t) dt = 0$. Для $x \in F$ и $t \in I_I$ величина $|x - t|/|x - t_I|$ ограничена сверху и снизу, так что

$$\left| \int_{I_I} b_I(t) \frac{dt}{x-t} \right| \leq c |I_I| \int_{I_I} \frac{|b_I(t)|}{|x-t|^2} dt,$$

откуда

$$\sup_{\varepsilon > 0} |A_\varepsilon(x)| \leq A(x) = \sum_I c |I_I| \int_{I_I} \frac{|b_I(t)|}{|x-t|^2} dt.$$

Фокус здесь состоял в том, чтобы за счет сокращения b_I заменить в интеграле первый порядок особенности на второй. Теперь

$$\int_F A(x) dx \leq C \sum_I c |I_I| \int_{I_I} |b_I(t)| dt \int_{|I_I|}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \leq C \sum \|b_I\|_1 \leq 2C \|f\|_1,$$

$$|\{x \in F: \sup_{\varepsilon > 0} |A_\varepsilon(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Наконец, при $\text{dist}(x, I_I) \leq \varepsilon$ мы имеем $|I_I| = \text{dist}(F, I_I) \leq \varepsilon$ и

$$|B_\varepsilon(x)| \leq \frac{c}{\varepsilon} \int_{\varepsilon < |x-t| < 2\varepsilon} \left| \sum b_I(t) \right| dt \leq c M b(x).$$

Но $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$, и

$$|\{x \in F: \sup_{\varepsilon > 0} |B_\varepsilon(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Теперь (Е.2) вытекает из установленных оценок слабого типа для $\sup_{\varepsilon} |A_\varepsilon(x)|$ и $\sup_{\varepsilon} |B_\varepsilon(x)|$. (См. Кальдерон и Зигмунд [1952] и Стейн [1970].)

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Мы начинаем с основного соотношения двойственности

$$(0.1) \quad \inf_{g \in H^p} \|f - g\|_p = \sup \left\{ \left| \int F f \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H^q, \|F\|_q = 1 \right\}.$$

Оно выводится из теоремы Хана — Банаха в разд. 1. Затем, прежде чем продолжать углубление общей теории, мы применяем (0.1) к изучению трех важных и нетривиальных задач:

1. Определить, когда непрерывная функция на окружности имеет в качестве наилучшего равномерного приближения из H^∞ снова непрерывную функцию. Эта задача обсуждается в разд. 2.

2. Описать все положительные меры μ на T , для которых

$$\int |\tilde{p}|^2 d\mu \leq K \int |p|^2 d\mu$$

для любого тригонометрического полинома $p(\theta)$. Эта тема появится вновь в гл. VI, где основной результат разд. 3 настоящей главы позволит получить информацию о вещественных частях функций из H^∞ .

3. Решить интерполяционную задачу

$$(0.2) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots, f \in H^\infty,$$

при дополнительном ограничении, что $|f(e^{i\theta})|$ постоянно или что $\|f\|_\infty$ должно быть возможно меньше. Эта задача излагается подробно, так как приводимая ниже теорема 4.1 имеет в дальнейшем важные и удивительные приложения и довольно точные результаты на этот счет требуют более глубоких идей, чем соотношение двойственности (0.1).

Чтобы сравнить подход, основанный на двойственности, с более классическим, мы заключаем главу замечательным решением задачи (0.2), принадлежащим Неванлинне.

1. Двойственные экстремальные задачи

Пусть X — банахово пространство с сопряженным X^* , а Y — замкнутое подпространство в X . Тогда

$$Y^\perp = \{x^* \in X^*: \langle y, x^* \rangle = 0, y \in Y\}$$

— замкнутое подпространство в X^* . Теорема Хана — Банаха дает изометрические изоморфизмы

$$(1.1) \quad Y^* \cong X^*/Y^\perp,$$

$$(1.2) \quad (X/Y)^* \cong Y^\perp.$$

Они могут быть записаны в виде двух равенств.

Лемма 1.1. Если $x^* \in X^*$, то

$$(1.1') \quad \sup\{|\langle x^*, y \rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} = \inf\{\|x^* - k\| : k \in Y^\perp\}.$$

Если $x \in X$, то

$$(1.2') \quad \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = \sup\{|\langle x, k \rangle| : k \in Y^\perp, \|k\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Левая часть (1.1') — это норма сужения x^* на Y , а правая — норма факторкласса $x^* + Y^\perp$ в $X^*/Y^\perp$. Согласно (1.1), они равны. Аналогичным образом и (1.2') следует из (1.2). $\square$

На окружности T мы имеем банаховы пространства $C \subset L^\infty \subset L^p \subset L^1$, где $C = C(T)$ — это пространство всех непрерывных функций на T , а пространства L^p определяются относительно меры $d\theta/2\pi$. Нам интересны их подпространства $A_0 \subset C \subset H^\infty \subset H^p \subset H^1$, где A_0 — это диск-алгебра: $A_0 = C \cap H^\infty$. Можно теперь составить таблицу пространств, сопряженных к

X	Y	X^*	$Y^\perp$
C	A_0	$M(T)$	H_0^1
L^∞	H^∞	—	—
$L^p, p < \infty$	H^p	L^q	H_0^q
L^1	H_0^1	L^∞	H^∞

ним пространств и их подпространств. В ней $q = p/(p-1)$, $H_0^q = \{g \in H^q : g(0) = 0\}$, $M(T)$ — пространство всех комплексных бореллевских мер на T с полной вариацией в качестве нормы, а H_0^1 отождествлено с замкнутым подпространством в $M(T)$, состоящим из всевозможных абсолютно непрерывных мер $Fd\theta/2\pi$ с плотностью $F \in H_0^1$. Два пробела в строке L^∞ будут заполнены в гл. V, но заполняющие их пространства для наших целей не особенно полезны. Для получения последнего столбца заметим, что если $F \in L^q$, $q > 1$, и $\int e^{in\theta} F(\theta) d\theta = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $F \in H_0^p$. Описание $A_0^\perp$ как H_0^1 — это теорема Ф. и М. Риссов (теорема II.3.8) для круга.

Теорема 1.2. Если $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p$ и $f \notin H^p$, то расстояние от f до H^p равно

$$(1.3) \quad \text{dist}(f, H^p) = \inf_{g \in H^p} \|f - g\|_p = \\ = \sup \left\{ \left| \int f F \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H_0^q, \|F\|_q \leq 1 \right\}.$$

Существует единственная функция $g \in H^p$, для которой $\text{dist}(f, H^p) = \|f - g\|_p$, и существует единственная функция $F \in H_0^q$, $\|F\|_q = 1$, для которой

$$(1.4) \quad \int f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^p).$$

Доказательство. Равенство (1.3) следует из (1.2'). Пусть $g_n \in H^p$ таковы, что $\|f - g_n\|_p \rightarrow \text{dist}(f, H^p)$. Интегралы Пуассона функций $f - g_n$ равномерно ограничены на каждом компакте в D , и, согласно теории нормальных семейств, можно считать, что g_n сходятся к некоторой аналитической функции $g(z)$: $g_n(z) \rightarrow g(z)$, $z \in D$. Вычисляя средние по окружностям радиуса $r < 1$, мы видим, что $g \in H^p$ и $\|f - g\|_p \leq \lim \|f - g_n\|_p = \text{dist}(f, H^p)$, так что существует по крайней мере одно наилучшее приближение, а именно g .

Пусть теперь $F_n \in H_0^q$, $\|F_n\|_q \leq 1$ и $\int f F_n \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \text{dist}(f, H^p)$. Поскольку $1 < q \leq \infty$, то по теореме Банаха — Алаоглу последовательность $\{F_n\}$ имеет слабую предельную точку F . Тогда $F \in H_0^q$, $\|F\|_q \leq 1$ и $\int f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^p)$. Так как $\int g F \frac{d\theta}{2\pi} = 0$, то

$$(1.5) \quad \text{dist}(f, H^p) = \int (f - g) F \frac{d\theta}{2\pi} \leq \|f - g\|_p \|F\|_q \leq \|f - g\|_p.$$

Всюду в (1.5) должно достигаться равенство, поэтому $\|F\|_q = 1$, и существование двойственной экстремальной функции, удовлетворяющей условию (1.4), доказано.

Пусть теперь $g \in H^p$ — любое наилучшее приближение для f , а $F \in H_0^q$ — любая двойственная экстремальная функция. Равенство в (1.5) влечет за собой равенство в неравенстве Гёльдера, т. е. должно быть

$$\frac{f - g}{\|f - g\|_p} = \overline{F} |F|^{q-2}, \quad F = (\overline{f - g}) \frac{|f - g|^{p-2}}{\|f - g\|_p^{p-1}}$$

при $p > 1$. При $p = 1$ вместо этого получим

$$(f - g)F = |f - g|.$$

Пусть $p > 1$. Поскольку $|F| > 0$ почти всюду, то первое урав-

нение доказывает единственность функции g . Поскольку F определяется своими значениями на любом множестве положительной меры, то второе уравнение доказывает единственность функции F .

При $p = 1$ третье уравнение доказывает единственность F и $\text{Im}(gF)$. Но $gF \in H_0^1$, следовательно, однозначно определено и gF в целом, а потому и g почти всюду, так как $|F| > 0$ почти всюду. $\square$

Отметим, что наилучшее приближение $g \in H^p$ и двойственная экстремальная функция $F \in H_0^q$, $\|F\|_q = 1$, определяются равенством (1.5):

$$(1.6) \quad \int (f - g) F \frac{d\theta}{2\pi} = \|f - g\|_p \|F\|_q = \|f - g\|_p.$$

Иногда можно вычислить $\text{dist}(f, H^p)$, решая (1.6) относительно g и F (см. упр. 3).

При $p = \infty$ некоторые из утверждений теоремы можно спасти, используя нижнюю строку таблицы вместо второй и (1.1') вместо (1.2').

Теорема 1.3. Если $f \in L^\infty$, то расстояние от f до H^∞ равно

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} \|f - g\|_\infty = \sup \left\{ \left| \int f F \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H_0^1, \|F\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Существует $g \in H^\infty$, для которой $\|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty)$. Если существует $F \in H_0^1$, $\|F\|_1 \leq 1$, для которой

$$\int f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^\infty),$$

то это наилучшее приближение $g \in H^\infty$ единственно и почти всюду

$$|f - g| = \text{dist}(f, H^\infty).$$

Доказательство. Выражение для расстояния следует из (1.1'). Существование функции наилучшего приближения $g \in H^\infty$ доказывается, как в теореме 1.2. Если двойственная экстремальная функция $F \in H_0^1$ существует, то

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \int (f - g) F \frac{d\theta}{2\pi} = \|f - g\|_\infty \|F\|_1,$$

и поэтому

$$(1.7) \quad \frac{f - g}{\text{dist}(f, H^\infty)} = \frac{f - g}{\|f - g\|_\infty} = \frac{\bar{F}}{|F|}$$

почти всюду. Значит, g единственна. $\square$

Если F существует, то из (1.7) уже не следует ее единственность, но следует единственность ее аргумента.

Пример 1.4. Пусть $f(\theta) = e^{-2i\theta}$. Если $F_0(\theta) = e^{2i\theta}$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int f F_0 d\theta = 1.$$

Значит, $\text{dist}(f, H^\infty) = 1$ и F_0 — двойственная экстремальная функция. Однако

$$F_\alpha(z) = \frac{z(z+\alpha)(1+\bar{\alpha}z)}{1+|\alpha|^2}, \quad |\alpha| < 1,$$

— другая двойственная экстремальная функция. В этом примере $g = 0$.

Пример 1.5. Пусть

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \theta < 3\pi/2, \\ -1, & 3\pi/2 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Если бы нашлась $g \in H^\infty$, такая, что $\|g - f\|_\infty < 1$, то $\text{Re } g > \delta > 0$ на $(0, \pi/2)$ и $\text{Re } g < -\delta < 0$ на $(-\pi/2, 0)$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|\theta| > \varepsilon} \text{Re } g(\theta) \frac{d\theta}{\theta} = \infty.$$

Но этот интеграл с точностью до ограниченных слагаемых представляет собой $-\lim_{r \rightarrow 1} \text{Im } g(r)$. Значит, таких ограниченных g не существует, $\text{dist}(f, H^\infty) = 1$ и $g = 0$ является одним из наилучших приближений. Пусть теперь g — конформное отображение круга D на полукруг $D \cap \{\text{Im } z > 0\}$. Можно считать, что $g(1) = 0$, $g(i) = 1$ и $g(-i) = -1$. Вычисляя значения g на трех дугах, где f постоянна, мы видим, что $\|f - g\|_\infty = 1$. Значит, наилучшее приближение не единственно и, по теореме 1.3, двойственной к f экстремальной функции $F \in H_0^1$ не существует.

Интересно отметить, где в примере 1.5 не проходит доказательство теоремы 1.2. Согласно нижней строке таблицы, существуют $F_n \in H_0^1$, $\|F_n\|_1 \leq 1$, такие, что $\int f F_n d\theta / 2\pi \rightarrow 1$. Последовательность $\{F_n\}$ имеет слабую предельную точку $\sigma \in (L^\infty)^*$, и линейный функционал σ ортогонален к H^∞ . В гл. V мы увидим, что σ есть комплексная мера на компактном хаусдорфовом пространстве максимальных идеалов алгебры L^∞ . Однако σ не является слабо непрерывной на L^∞ и не может быть представлена в виде $\sigma(h) = \int h F d\theta$, $F \in L^1$. На самом деле функционал σ сингулярен относительно $d\theta$ в смысле, уточняемом в гл. V. На классическом языке это значит, что $F_n(z) \rightarrow 0$, $z \in D$. Отсутствие двойственной экстремальной функции $F \in H_0^1$ часто является главной трудностью в экстремальных задачах для H^∞ . Мы снова встретимся с этой трудностью в разд. 4.

Если функция $f \in L^\infty$ непрерывна, то двойственная экстремальная функция F существует и наилучшее приближение g единственно.

Лемма 1.6. Если $f \in C$, то

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \text{dist}(f, A_0) = \inf_{g \in A_0} \|f - g\|_\infty.$$

Доказательство. Существует функция $g \in H^\infty$, такая, что $\|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty)$. Пусть $f_r = P_r * f$, $g_r = P_r * g$ — интегралы Пуассона функций f и g . Но $\|P_r\|_1 = 1$, и потому

$$\|f_r - g_r\|_\infty = \|(f - g) * P_r\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty.$$

В то же время $g_r \in A_0$ и $\|f - f_r\|_\infty < \varepsilon$ при малом $1 - r$. Значит,

$$\text{dist}(f, A_0) \leq \lim_{r \rightarrow 1} \|f - g_r\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty).$$

Обратное неравенство очевидно, так как $H^\infty \supset A_0$. $\square$

Множество всех функций вида $g + h$, где $g \in H^\infty$, $h \in C$, обозначим через $H^\infty + C$.

Теорема 1.7. Если $f \in H^\infty + C$, то существует функция $F \in H_0^1$, $\|F\|_1 = 1$, для которой

$$(1.8) \quad \int f F \frac{d\theta}{2\pi} = \text{dist}(f, H^\infty),$$

и существует единственная функция $g \in H^\infty$, для которой $\|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty)$.

Доказательство. Пусть $f = g + h$, $g \in H^\infty$, $h \in C$. Тогда $\text{dist}(f, H^\infty) = \text{dist}(h, H^\infty)$, и мы можем считать f непрерывной. По теореме 1.3 существуют $F_n \in H_0^1$, $\|F_n\|_1 \leq 1$, для которых

$$\frac{1}{2\pi} \int f F_n d\theta \rightarrow \text{dist}(f, H^\infty).$$

Выбирая подпоследовательность, мы можем считать, что $F_n(z) \rightarrow F(z)$, $z \in D$, где $F \in H_0^1$, $\|F\|_1 \leq 1$. Отсюда следует сходимость коэффициентов Фурье, и поэтому для всех тригонометрических полиномов $p(\theta)$

$$\int F_n p \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \int F p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Устремляя $\|f - p\|_\infty$ к 0, мы получаем

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \int F f \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Значит, (1.8) выполняется и f имеет единственное наилучшее приближение из H^∞ по теореме 1.3. $\square$

В качестве приложения мы заново докажем некоторые результаты из разд. 2 гл. I.

Следствие 1.8. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — различные точки круга D , а $\omega_1, \dots, \omega_n$ — комплексные числа. Среди всех $f \in H^\infty$, таких, что

$$(1.9) \quad f(z_j) = \omega_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

существует единственная функция f минимальной нормы. Эта функция имеет вид $sB(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке степени не выше $n-1$.

Следствие 1.9. Пусть $z_{n+1} \in D$ отличается от $z_1, \dots, z_n$. Предположим, что (1.9) имеет решение $f \in H^\infty$ с $\|f\|_\infty \leq 1$. Пусть f_0 — то из решений, для которого $|f(z_{n+1})|$ максимально. Тогда f_0 однозначно определяется своим значением $f_0(z_{n+1})$ и является произведением Бляшке степени не выше n .

Следствие 1.9 просто выводится из следствия 1.8. Экстремальная функция f_0 , $\|f_0\| \leq 1$, существует по теории нормальных семейств. Пусть $\omega_{n+1} = f_0(z_{n+1})$. Если $f \in H^\infty$ удовлетворяет (1.9) и $f(z_{n+1}) = \omega_{n+1}$, то $\|f\|_\infty \geq 1$, потому что иначе при некотором достаточно малом $|\lambda|$ функция

$$g = f + \lambda \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$$

удовлетворяет условию (1.9), $\|g\|_\infty \leq 1$ и $|g(z_{n+1})| > |f_0(z_{n+1})|$. Значит, f_0 имеет минимальную норму среди функций со значениями $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ в точках $z_1, \dots, z_{n+1}$.

Доказательство следствия 1.8. Пусть B_0 — произведение Бляшке с нулями $z_1, \dots, z_n$, а f_0 — полином, дающий интерполяцию (1.9). Минимальная норма функций из H^∞ , удовлетворяющих (1.9), равна

$$\inf_{g \in H^\infty} \|f_0 - B_0 g\|_\infty = \inf_{g \in H^\infty} \|\bar{B}_0 f_0 - g\|_\infty.$$

Поскольку $\bar{B}_0 f_0 \in C$, то существует единственная интерполирующая функция $f \in H^\infty$ минимальной нормы и существует $F \in H_0^1$, $\|F\|_1 = 1$, такая, что

$$\int \bar{f} \bar{B}_0 F \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_\infty.$$

Значит, $|f| = |\bar{f} \bar{B}_0| = \|f\|_\infty$ почти всюду, и почти всюду

$$(1.10) \quad fF/B_0 \geq 0.$$

Лемма 1.10. Если функция G класса H^1 почти всюду на дуге $I \subset T$ вещественна, то она аналитически продолжается через I .

Доказательство. Положим $G(z) = \overline{G(1/\bar{z})}$, $|z| > 1$. Это H^1 -функция при $|z| > 1$ с некасательными пределами $G(\theta)$ в почти всех точках I . Пусть Δ — кружок малого радиуса, такой, что $\Delta \cap T \subset I$, $V = \Delta \cap D$, $W = \Delta \cap \{|z| > 1\}$. Раз мы имеем дело с функциями из H^1 , то при $\omega \in \Delta \setminus T$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{G(z)}{z - \omega} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{G(z)}{z - \omega} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} \frac{G(z)}{z - \omega} dz = G(\omega).$$

Это показывает, что G можно продолжить через I . $\square$

Чтобы закончить доказательство следствия 1.8, отметим, что $G = f/B_0$ — функция из H^1 в кольце $\{r < |z| < 1\}$, $r > |z|$. Используя (1.10) и лемму, мы видим, что G аналитична на T и, в действительности, G рациональна. Поскольку $B_0 G$ аналитична на T , а $f/\|f\|_\infty$ — внутренняя функция, то f аналитична на T по теореме II 6.3. Следовательно, $f/\|f\|_\infty$ — произведение Бляшке конечной степени, а функция F рациональна. Но B_0 имеет в D n нулей, а F имеет нуль при $z = 0$. По принципу аргумента из (1.10) следует, что f имеет не более $n - 1$ нулей. $\square$

Экстремальная функция $f(z) = cB(z)$ из следствия 1.8 может иметь меньше чем $n - 1$ нулей. Например, пусть g — функция минимальной нормы, такая, что $g(z_j) = w_j$, $1 \leq j \leq n - 1$. Положим $w_n = g(z_n)$. Тогда $f = g$ имеет не более $n - 2$ нулей. Таким же образом и экстремальная функция из следствия 1.9 может иметь менее n нулей. Однако если задача (1.9) имеет два различных решения f_1, f_2 с $\|f_1\|_\infty \leq 1$, $\|f_2\|_\infty \leq 1$, то экстремальная функция f_0 из следствия 1.9 является произведением Бляшке степени n . Для доказательства отметим, что (1.9) тогда имеет решение f с $\|f\|_\infty < 1$ согласно утверждению о единственности из следствия 1.8. По теореме Руше f_0 и $f_0 - f$ имеют одинаковое число нулей в D . Но $f_0(z_j) = f(z_j)$, $1 \leq j \leq n$, и, следовательно f_0 имеет не менее n нулей.

Следствие I.2.4 дает больше информации, чем мы сейчас получили, но двойственные методы этого раздела применимы к более широкому кругу задач.

2. Теорема Карлесона — Якобса

Пусть $f(\theta) \in C$. Мы знаем из теоремы 1.7, что существует единственная функция $g \in H^\infty$, такая, что

$$\|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty).$$

Мы хотим знать, будет ли это наилучшее приближение $g(\theta)$ непрерывным на T . Хотя необходимые и достаточные для этого условия, налагаемые на $f(\theta)$, не известны, имеется точный результат, параллельный теореме 1.3 гл. III о непрерывности со-

пряженной функции. Напомним, что модулем непрерывности функции $f(\theta)$ называется

$$\omega(\delta) = \omega_f(\delta) = \sup\{|f(\theta) - f(\varphi)| : |\theta - \varphi| < \delta\}.$$

Теорема 2.1. Если $f(\theta)$ непрерывна по Дину, т. е. если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

то ее наилучшее приближение $g \in H^\infty$ непрерывно на T .

Теорема 2.2. Пусть $\omega(t)$ — непрерывная неубывающая функция, такая, что $\omega(0) = 0$, $S(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ и

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t} dt = \infty.$$

Тогда существует $f(\theta) \in C$, $\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$, у которой наилучшее приближение из H^∞ не является непрерывным.

Сначала мы докажем теорему 2.1. Можно предположить, что

$$\|f - g\|_\infty = \text{dist}(f, H^\infty) = 1.$$

По теореме 1.7 существует $F \in H_0^1$, $\|F\|_1 = 1$, такая, что

$$(2.1) \quad (f - g)F = |F| \text{ почти всюду.}$$

В доказательстве мы используем только (2.1) и непрерывность f . Нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.3. Пусть $G = u + iv \in H^1$ и на некоторой дуге $I \subset T$ почти всюду $u > 0$, $|v| \leq \alpha u$, где $\alpha > 0$. Пусть $J \subset I$ — относительно компактная дуга и $V = \{re^{i\theta} : r_0 < r < 1, \theta \in J\}$. Тогда если $\text{arctg } \alpha < \pi/2p$, то $G \in H^p(V)$, т. е. $|G|^p$ имеет в V гармоническую мажоранту.

Доказательство. Напомним, что по следствию III.2.5 функция из H^1 , у которой граничные значения лежат в секторе $S = \{x > 0, |y| < \alpha x\}$, входит в H^p при $\text{arctg } \alpha < \pi/2p$. Расширяя J , мы можем считать, что G имеет конечные радиальные пределы в обоих концах дуги J . Тогда $M = \sup\{|G(z)| : z \in \partial V, |z| < 1\} < \infty$ и

$$g = M(1 + 1/\alpha) + G$$

имеет в почти всех точках ∂V граничные значения из сектора S (см. рис. IV.1). Поскольку $g \in H^1(V)$, то интегральная формула Пуассона (примененная после конформного отображения области V на D) показывает, что $g(V) \subset S$. По следствию III.2.5

и ввиду конформной инвариантности класса $H^p(V)$ мы видим, что $g \in H^p(V)$, а потому и $G \in H^p(V)$. $\square$

Лемма 2.4. Пусть функции $f \in C$, $g \in H^\infty$ и $F \in H_0^1$ удовлетворяют (2.1). Тогда

(а) $F \in H^p$ при всех $p < \infty$;

(б) если $\tau \in [0, 2\pi)$, а $f_\tau = f - f(\tau)$, $g_\tau = g - f(\tau)$, то существуют $\delta > 0$ и $r_0 > 0$, такие, что $|g_\tau(z)| \geq 1/2$ на

$$W_\tau = \{re^{i\theta}: |\theta - \tau| < \delta/2, r_0 < r < 1\}.$$

Доказательство. Для доказательства (а) предположим, что $p < \infty$ и $\varepsilon > 0$ таково, что $\operatorname{arctg}(\varepsilon/(1-\varepsilon)) < \pi/2p$. Вы-

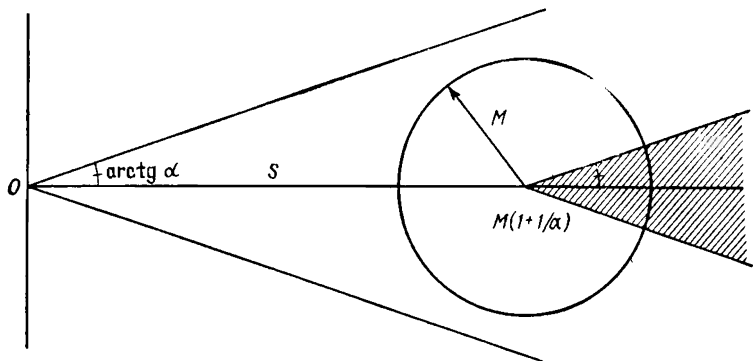


Рис. IV. 1. $S = \{|u| < \alpha x, x > 0\}$. Значения функции g на ∂V лежат в объединении круга и заштрихованного сектора.

берем такое δ , что $|f(\theta) - f(\tau)| < \varepsilon$ при $|\theta - \tau| < \delta$. На $I_\tau = \{\theta: |\theta - \tau| < \delta\}$ в силу (2.1)

$$-g_\tau F = (f - g)F - f_\tau F = |F| - f_\tau F.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}(-g_\tau F) > 0$ и $|\operatorname{Im} g_\tau F| < \varepsilon/(1-\varepsilon)\operatorname{Re}(-g_\tau F)$ почти всюду на I_τ . По лемме 2.3 $g_\tau F \in H^p(W_\tau)$. Если заменить W_τ пересечением двух кругов, границы которых пересекаются внутри I_τ , то простое конформное отображение показывает, что

$$\int_{|\theta - \tau| < \delta/2} |g_\tau F|^p d\theta < \infty.$$

Так как $|g_\tau| \geq \|f - g\|_\infty - \omega(\delta) \geq 1 - \varepsilon$ на I_τ , то это означает, что $\int_{|\theta - \tau| < \delta/2} |F|^p d\theta < \infty$ и, стало быть, $F \in L^p$. Значит, $F \in H^p$ по следствию II.4.3.

Чтобы доказать (б), выберем столь малое ε , что на I_τ

$$-g_\tau F = \exp(u + iv), \quad \|v\|_\infty < \pi/4.$$

Тогда

$$h = \exp(-iv\chi_{I_\tau} + \widetilde{v}\chi_{I_\tau})$$

лежит в H^2 по следствию III.2.6. Тогда H^1 -функция $g_\tau Fh$ вещественна на I_τ . По лемме 1.10 и теореме II.6.3 внутренний сомножитель функции $g_\tau Fh$ аналитичен на I_τ . Значит, и внутренний сомножитель функции g_τ тоже аналитичен на I_τ . Теперь формула представления для внешних функций показывает, что $|g_\tau(z)| \geq 3/4$ в области $\{r_0(\tau) < r < 1, |\theta - \tau| < \delta/2\}$. Но $g_\sigma(z) = g_\tau(z) - (f(\sigma) - f(\tau))$ и при $|\sigma - \tau| < \delta$ в той же области $|g_\sigma(z)| > 1/2$. Это значит, что $r_0(\tau)$ можно выбрать не зависящим от τ , что доказывает (b). $\square$

Доказательство теоремы 2.1. По лемме 2.4(b) функция $g_\tau(z)$ имеет в W_τ однозначный логарифм

$$(2.2) \quad \log g_\tau(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \tau| < \delta} \log |g_\tau(\theta)| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + R_\tau(z),$$

где $R_\tau(z)$ — сумма такого же интеграла по $|\theta - \tau| > \delta$ и логарифма внутреннего сомножителя $g_\tau(z)$. Поскольку $|g_\tau(z)| \geq 1/2$ в W_τ , то внутренний сомножитель отделен от нуля и аналитичен на дуге $\{e^{i\theta}: |\theta - \tau| < \delta/2\}$. Значит, при некотором $r_1 > 0$ функция $R_\tau(z)$ ограничена и аналитична в $\Delta_\tau = \{z - e^{i\tau} < r_1\}$; радиус r_1 и верхняя грань $\sup_{\Delta_\tau} |R_\tau|$ не зависят от τ . Но $|f_\tau - g_\tau| = 1$, и мы имеем

$$1 - |g_\tau|^2 = |f_\tau|^2 - 2 \operatorname{Re} f_\tau \bar{g}_\tau \leq A\omega(|\theta - \tau|),$$

так что

$$|\log |g_\tau(\theta)|| \leq c\omega(|\theta - \tau|).$$

Обозначим через $\Gamma(\tau)$ усеченный сектор

$$\Gamma(\tau) = \left\{ z: \frac{|z - e^{i\tau}|}{1 - |z|} \leq 2, \quad r_2 < |z| < 1 \right\},$$

где $r_2 > 0$ выбрано так, чтобы $\overline{\Gamma(\tau)} \subset \Delta_\tau$. При $z \in \Gamma(\tau)$

$$\left| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right| \leq \frac{C}{|\theta - \tau|}$$

и в силу (2.2)

$$|\log g_\tau(z) - R_\tau(z)| \leq C \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad z \in \Gamma(\tau).$$

Ввиду леммы Шварца и равномерной оценки величины $R_\tau(z)$ имеем $|R_\tau(z) - R_\tau(w)| \leq c|z - w|$, $z, w \in \Gamma(\tau)$. Стало быть, $|g_\tau(z) - g_\tau(w)| \leq C|z - w| + \eta(\delta)$, $z, w \in \Gamma(\tau)$, где $\eta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть теперь σ и τ настолько близки, что $\Gamma(\tau) \cap \Gamma(\sigma)$ содержит точку z с малым $1 - |z|$. Тогда

$$\begin{aligned} |g(e^{i\tau}) - g(e^{i\sigma})| &\leq |g(e^{i\tau}) - g(z)| + |g(z) - g(e^{i\sigma})| \leq \\ &\leq |g_\tau(e^{i\tau}) - g_\tau(z)| + |g_\sigma(z) - g_\sigma(e^{i\sigma})| \leq \\ &\leq 2\eta(\delta) + C|e^{i\tau} - z| + C|e^{i\sigma} - z| \leq 2\eta(\delta) + C|\sigma - \tau|. \end{aligned}$$

Если зафиксировать малое $\delta > 0$ с $2\eta(\delta) < \varepsilon$, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \tau} |g(e^{i\sigma}) - g(e^{i\tau})| < \varepsilon,$$

т. е. функция g непрерывна. $\square$

Пусть теперь $\omega(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.

Лемма 2.5. Пусть $\delta > 0$ и

$$f(e^{it}) = \begin{cases} \omega(t), & 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & -\delta \leq t < 0. \end{cases}$$

Продолжим $f(e^{it})$ до непрерывной на $[-\pi, \pi]$ и гладкой при $\delta < |t| < \pi$ функции с $f(-\pi) = f(\pi)$; пусть $g \in H^\infty$ — ее наилучшее приближение. Если g непрерывна, то

$$g(1) = \pm i \|f - g\|_\infty.$$

Доказательство. Так как f вещественна, то $f \notin H^\infty$ и $\|f - g\|_\infty > 0$. Можно считать, что $\|f - g\|_\infty = 1$, так что $|f - g| = 1$ на T . Докажем, что $\operatorname{Re} g(1) = 0$. Поскольку $|f - g| = 1$, то $\log |g(t)| = 0$ при $-\delta < t < 0$. Если $\operatorname{Re} g(1) > 0$, то при $0 < t < \delta$

$$\log |g| = -\log \left| \frac{g-f}{g} \right| \leq -\log \left(1 - \frac{f \operatorname{Re} g}{|g|^2} \right) \leq -C\omega(t).$$

Аналогично если $\operatorname{Re} g(1) < 0$, то $\log |g| \geq C\omega(t)$ при $0 < t < \delta$. Далее, g имеет на множестве $\{|z-1| < \delta, |z| \leq 1\}$ непрерывный логарифм — снова из-за того, что $|f - g| = 1$. Однако при $\operatorname{Re} g(1) \neq 0$ по лемме III.1.2.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} |\arg g(r)| &= \left| c + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \varepsilon} \log |g(t)| \frac{dt}{t} \right| \geq \\ &\geq c + C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\omega(t)}{t} dt = \infty. \end{aligned}$$

Это противоречие доказывает, что $g(1) = \pm i$. $\square$

Для доказательства теоремы 2.2 возьмем $\delta_n = 2^{-n}$ и положим

$$\omega_n(t) = \omega \left(\frac{\delta_n}{2} - \left| \frac{\delta_n + \delta_{n-1}}{2} - t \right| \right)$$

на $[\delta_n, \delta_{n-1}]$, $\omega_n(t) = 0$ вне $[\delta_n, \delta_{n-1}]$. Пусть

$$f(e^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_{4k+1}(t) + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_{4k+3}(t).$$

Функция f вещественна, значит, $f \notin H^\infty$. Легко проверить, что $\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$. Но если $g \in H^\infty$ — наилучшее приближение для f , то по лемме 2.5

$$g(e^{i\delta_{4k+1}}) = \pm i \|f - g\|_\infty, \quad g(e^{i\delta_{4k+3}}) = \pm \|f - g\|_\infty,$$

и функция $g(e^{it})$ не может быть непрерывной при $t = 0$. $\square$

3. Теорема Хелсона — Сегё

Если $p(\theta)$ — тригонометрический полином на окружности T , то его сопряженная функция $\tilde{p}(\theta)$ — снова тригонометрический полином, причем среднее значение функции $\tilde{p}(\theta)$ равно 0. В этом разделе мы излагаем принадлежащую Хелсону и Сегё характеристику тех положительных мер μ на T , для которых

$$\int |\tilde{p}(\theta)|^2 d\mu(\theta) \leq K \int |p(\theta)|^2 d\mu(\theta),$$

каков бы ни был тригонометрический полином $p(\theta)$. Конечно, это значит, что оператор сопряжения продолжается до ограниченного оператора в $L^2(\mu)$. В гл. VI будет дана совсем другая характеристика таких мер, и эти два результата будут применены к описанию равномерного замыкания в L^∞ пространства вещественных частей функций из H^∞ .

Прежде всего нам понадобится знаменитая и красивая теорема Сегё. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех полиномов от z , обращающихся в нуль при $z = 0$. После сужения на единичную окружность $\mathcal{F}$ совпадает с множеством всех тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{n>0} a_n e^{in\theta}.$$

Теорема 3.1 (Сегё). Пусть $d\mu$ — конечная положительная мера на окружности и

$$d\mu = w d\theta/2\pi + d\mu_s,$$

где $d\mu_s$ сингулярна относительно $d\theta$. Тогда

$$(3.1) \quad \inf_{f \in \mathcal{F}} \int |1 - f|^2 d\mu = \exp \frac{1}{2\pi} \int \log w d\theta.$$

Отметим, что если обе части равенства (3.1) равны 0, то $\mathcal{F}$ плотно в $L^2(\mu)$, потому что $e^{-i\theta}$, $e^{-2i\theta}$, ... по индукции также входят в замыкание множества $\mathcal{F}$.

Доказательство. Сначала мы избавимся от сингулярной части μ_s . Согласно упражнению III. 2, существуют полиномы $p_n \in \mathcal{F}$, такие, что $\|p_n\|_\infty \leq 1$, $p_n \rightarrow 1$ почти всюду относительно $d\mu_s$ и $p_n \rightarrow 0$ почти всюду относительно $d\theta$. Для любого $f_0 \in \mathcal{F}$ будет $f_0 + p_n(1 - f_0) \in \mathcal{F}$, так что

$$\begin{aligned} \inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 d\mu &\leq \lim_n \int |1 - (f_0 + p_n(1 - f_0))|^2 d\mu = \\ &= \lim_n \int |1 - f_0|^2 |1 - p_n|^2 d\mu = \int |1 - f_0|^2 w \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Поскольку $d\mu \geq w \frac{d\theta}{2\pi}$, то противоположное неравенство тривиально и

$$\inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 d\mu = \inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 w \frac{d\theta}{2\pi},$$

так что мы можем считать μ абсолютно непрерывной.

Пусть $\varphi = \log w$ и $\int \varphi d\theta > -\infty$. Пусть $\psi = \tilde{\varphi}$ — сопряженная к φ функция и $G = \exp((\varphi + i\psi)/2)$. Тогда G — внешняя функция из H^2 , $|G|^2 = w$ почти всюду и

$$G^2(0) = \exp \int \varphi \frac{d\theta}{2\pi},$$

а это правая часть (3.1). Если $f \in \mathcal{F}$, то $(1 - f)^2 G^2 \in H^1$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |1 - f|^2 w d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int |(1 - f)^2 G^2| d\theta \geq |(1 - f(0))^2 G^2(0)| = \\ &= \exp \int \varphi \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Так как G — внешняя функция, то по теореме Бёрлинга существуют такие полиномы $p_n(z)$, что $p_n G \rightarrow G(0)$ в H^2 . Тогда $p_n(0) G(0) \rightarrow G(0) \neq 0$, $p_n(0) \rightarrow 1$ и можно считать, что $p_n(0) = 1$. Следовательно, $p_n = 1 - f_n$, $f_n \in \mathcal{F}$, и

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{2\pi} \int |1 - f_n|^2 w d\theta &= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int |p_n G|^2 d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int |G(0)|^2 d\theta = \exp \int \varphi \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Таким образом, (3.1) доказано при $\log w \in L^1$.

Если же $\int \log w d\theta = -\infty$, то $\log(w + \varepsilon) \in L^1$ при $\varepsilon > 0$ и, стало быть,

$$\inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} \leq \inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 (w + \varepsilon) \frac{d\theta}{2\pi} = \exp \int \log(w + \varepsilon) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\inf_{\mathcal{F}} \int |1 - f|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} = 0. \quad \square$$

Обращаясь к работе Хелсона и Сегё, положим снова

$$d\mu = w d\theta/2\pi + d\mu_s.$$

Пусть $\mathcal{G}$ — пространство антианалитических тригонометрических полиномов вида $g = b_0 + b_1 e^{-i\theta} + b_2 e^{-2i\theta} + \dots$ и

$$\rho = \sup \left| \int f \bar{g} d\mu \right|,$$

где f и g пробегают соответственно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ при условии, что

$$\int |f|^2 d\mu \leq 1, \quad \int |g|^2 d\mu \leq 1.$$

Ясно, что $0 \leq \rho \leq 1$. Подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ортогональны в $L^2(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\rho = 0$; если их замыкания $\overline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$ имеют ненулевое пересечение, то $\rho = 1$. Если $\rho < 1$, то говорят, что *угол между подпространствами* $\overline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$ положителен и равен $\arccos \rho$. В таком случае сумма $\overline{\mathcal{F}} + \overline{\mathcal{G}}$ замкнута в $L^2(\mu)$ и

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 \leq (1 - \rho)^{-1} \|f + g\|^2, \quad f \in \mathcal{F}, \quad g \in \mathcal{G},$$

так что топология $\overline{\mathcal{F}} + \overline{\mathcal{G}}$ совпадает с топологией прямой суммы пространств $\overline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$. Существуют примеры замкнутых подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, у которых $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$, но $\rho = 1$ и $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ не замкнуто (упр. 9).

Теорема 3.2 (Хелсон — Сегё). *Угол между подпространствами $\overline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{G}}$ положителен тогда и только тогда, когда*

$$(3.2) \quad \mu_s = 0$$

$$(3.3) \quad \log w = u + \bar{v},$$

где $u \in L^\infty$, $v \in L^\infty$ и $\|v\|_\infty < \pi/2$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость условия (3.2). Пусть $d\mu_s > 0$. Тогда, согласно упражнению III.2, существуют такие $p_n \in \mathcal{F}$, что $|p_n| \leq 1$, $p_n \rightarrow 1$ почти всюду относительно $d\mu_s$ и $p_n \rightarrow 0$ почти всюду относительно $d\theta$. Но $g_n = \overline{p_n} \in \mathcal{G}$ и

$$\int p_n \overline{g_n} d\mu \rightarrow \int d\mu_s,$$

в то время как

$$\int |p_n|^2 d\mu = \int |g_n|^2 d\mu \rightarrow \int d\mu_s.$$

Нормируя p_n и g_n в $L^2(\mu)$, убеждаемся, что $\rho = 1$.

Теперь можно предполагать μ абсолютно непрерывной, $d\mu = w d\theta/2\pi$. Можно также считать, что $\log w \in L^1$, так как иначе по теореме Сегё $\mathcal{F}$ плотно в $L^2(\mu)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и $\rho = 1$, причем (3.3) не выполняется.

Пусть $\varphi = \log w$, $\psi = \tilde{\varphi}$ и $G = \exp((\varphi + i\psi)/2)$, как в доказательстве теоремы 3.1. Положим $H = G^2$. Тогда $G \in H^2$, $H \in H^1$, функции G и H внешние и $|G|^2 = |H| = w$. Значит,

$$\rho = \sup \left| \frac{1}{2\pi} \int (fG)(\bar{g}G) e^{-i\psi} d\theta \right|,$$

где $\sup$ берется по всем $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$, удовлетворяющим условию

$$\frac{1}{2\pi} \int |fG|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int |\bar{g}G|^2 d\theta = 1.$$

По теореме Бёрлинга $\{fG: f \in \mathcal{F}\}$ плотно в H_0^2 , а $\{\bar{g}G: g \in \mathcal{G}\}$ плотно в H^2 . Но каждую функцию $F \in H_0^1$ можно записать в виде $F = F_1 F_2$, где $F_1 \in H_0^2$, $F_2 \in H^2$ и $\|F_1\|_2^2 = \|F_2\|_2^2 = \|F\|_1$. Поэтому

$$\rho = \sup \left\{ \left| \int F e^{-i\psi} \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H_0^1, \|F\|_1 \leq 1 \right\}.$$

По двойственности

$$\rho = \inf_{g \in H^\infty} \|e^{-i\psi} - g\|_\infty.$$

Лемма 3.3. Пусть ψ — вещественная измеримая функция. Неравенство

$$\inf_{g \in H^\infty} \|e^{-i\psi} - g\|_\infty < 1$$

справедливо тогда и только тогда, когда найдутся $\varepsilon > 0$ и $h \in H^\infty$, такие, что

$$(3.4) \quad |h| \geq \varepsilon \text{ почти всюду и}$$

$$(3.5) \quad |\psi + \arg h| \leq \pi/2 - \varepsilon \pmod{2\pi}.$$

Доказательство. Если $\|e^{-i\psi} - g\|_\infty < 1$, $g \in H^\infty$, то g удовлетворяет условиям (3.4) и (3.5). Обратно, если выполняются (3.4) и (3.5), то $\|e^{-i\psi} - \lambda h\|_\infty < 1$ при малом $\lambda > 0$. (Это доказательство иллюстрируется рис. IV. 2.) $\square$

Пусть теперь $\rho < 1$. Тогда найдется функция $h \in H^\infty$, удовлетворяющая условиям (3.4) и (3.5). Так как $\arg H = \psi$, то

$$|\arg(hH)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Значит, hH имеет однозначный логарифм и, полагая $v = -\arg(hH)$, имеем $\|v\|_\infty < \pi/2 - \varepsilon$ и

$$\log|hH| = \bar{v}.$$

По (3.4) $u = -\log|h|$ ограничена и, стало быть,

$$\log w = \log|H| = \log|hH| - \log|h| = u + \bar{v},$$

что доказывает (3.3).

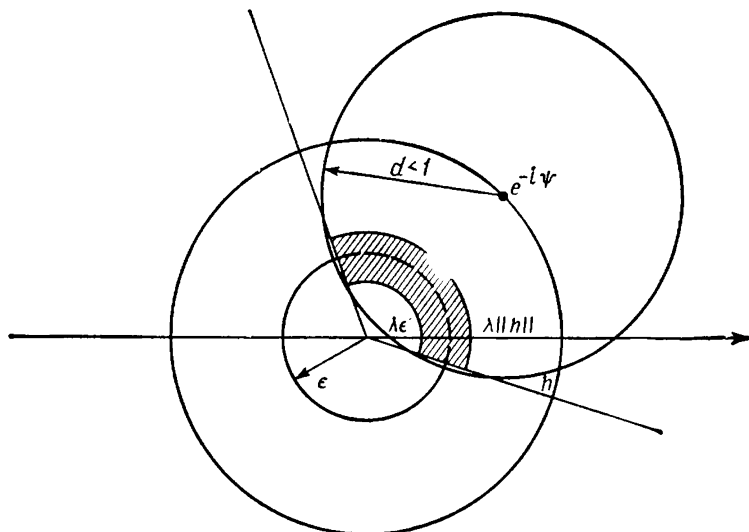


Рис. IV.2. Доказательство леммы 3.3. Значения функции h лежат в секторе $\{|\psi + \arg z| < \pi/2 - \varepsilon\}$ и в области $\{|z| > \varepsilon\}$. Заштрихованная область содержит все значения функции λh и сама содержится в $\{|z - e^{-i\psi}| < d < 1\}$

Обратно, предположим, что μ абсолютно непрерывна и $\log w$ имеет вид (3.3). Можно считать, что $u = 0$, потому что свойство $\rho = 1$ не меняется при умножении w на положительный ограниченный множитель, отделенный от 0 (упр. 10). Тогда в прежних обозначениях $\psi = \bar{\varphi} = -v$. Но $\|v\|_\infty < \pi/2$, и постоянная функция $g = \cos\|v\|_\infty$ дает $\|e^{-i\psi} - g\|_\infty < 1$, так что $\rho < \|e^{-i\psi} - g\|_\infty < 1$. $\square$

Теорема 3.4. Пусть μ — положительная конечная мера на окружности. Постоянная K , такая, что

$$(3.6) \quad \int |\tilde{p}|^2 d\mu \leq K \int |p|^2 d\mu$$

для всех тригонометрических полиномов p , существует тогда и только тогда, когда μ абсолютно непрерывна, $d\mu = \omega d\theta/2\pi$ и $\log \omega = u + \tilde{v}$, где $u \in L^\infty$, $v \in L^\infty$ и $\|v\|_\infty < \pi/2$.

Доказательство. Мы покажем, что оператор сопряжения ограничен в $L^2(\mu)$ тогда и только тогда, когда угол между подпространствами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в $L^2(\mu)$ положителен. После этого наша теорема будет следовать из теоремы 3.2.

Определим оператор T на тригонометрических полиномах формулой

$$Tp = \frac{1}{2} \{(p - a_0) + i\tilde{p}\}, \quad a_0 = a_0(p) = \int p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Тогда

$$T \sum a_n e^{in\theta} = \sum_{n \geq 0} a_n e^{in\theta}.$$

Поскольку $(p - a_0) = (-\tilde{p})^\wedge$, то при условии (3.6) оператор T ограничен в $L^2(\mu)$. Обратно, если

$$(3.7) \quad \int |Tp|^2 d\mu \leq C^2 \int |p|^2 d\mu,$$

то (3.6) выполняется для всех вещественных тригонометрических полиномов, а значит, всегда. Таким образом, (3.6) и (3.7) эквивалентны.

Каждый тригонометрический полином $p(\theta)$ имеет вид $p = f - g$, $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$, и $Tp = T(f - g) = f$. Значит, если T ограничен и $\int |f|^2 d\mu = \int |g|^2 d\mu = 1$, то по (3.7)

$$C^{-2} \leq \int |f - g|^2 d\mu = 2 - 2 \operatorname{Re} \int f \bar{g} d\mu,$$

откуда $\rho < 1 - 1/2C^2$. С другой стороны, если $\rho < 1$ и $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$, то

$$\begin{aligned} \int |f - g|^2 d\mu &\geq \int |f|^2 d\mu + \int |g|^2 d\mu - 2\rho \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{1/2} \geq \\ &\geq (1 - \rho) \left(\int |f|^2 d\mu + \int |g|^2 d\mu \right) \end{aligned}$$

и

$$\int |f|^2 d\mu = \int |T(f - g)|^2 d\mu \leq (1 - \rho)^{-1} \int |f - g|^2 d\mu.$$

Поэтому при $\rho < 1$ оператор T ограничен. $\square$

4. Интерполирующие функции постоянного модуля

Пусть $\{z_j\}$ — последовательность различных точек круга D , а $\{w_j\}$ — последовательность комплексных чисел. Предположим,

что существует функция $f_0 \in H^\infty$, решающая интерполяционную задачу:

$$(4.1) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Если точек z_j конечное число, то по теореме Пика или следствию 1.8 задача (4.1) имеет решение вида $f = cB$, где B — конечное произведение Бляшке, а c — минимальная возможная норма интерполирующей функции. В этом разделе мы рассмотрим случай бесконечно многих z_j , предполагая, что выполняется условие

$$\sum (1 - |z_j|) < \infty$$

— условие, необходимое и достаточное для того, чтобы задача (4.1) имела в H^∞ более одного решения.

Теорема 4.1 (Неванлинна). *Если существуют две различные функции нормы 1 в H^∞ , удовлетворяющие условию (4.1), то существует внутренняя функция, также удовлетворяющая (4.1).*

Если (4.1) имеет решение f_0 с $\|f_0\| < 1$, то условие теоремы выполняется. В самом деле, пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$; тогда при некоторых $s > 0$ и $t < 0$ функции $f_0 + sB$ и $f_0 + tB$ являются различными решениями с нормой 1. Если интерполирующая функция с нормой 1 всего одна, то это рассуждение вместе с теоремой 4.1 показывает, что всегда возможна интерполяция функцией постоянного модуля $1 + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Прежде чем доказывать нашу теорему, мы приведем пример, который показывает, что в случае единственного решения единичной нормы оно может не быть внутренним.

Пример 4.2. Пусть $\lim z_j = 1$, I — открытая дуга окружности T , содержащая $z = 1$, $f \in (H^\infty)^{-1}$, $\|f\| = 1$, $|f| \neq 1$ и $|f| = 1$ на I . Возьмем $w_j = f(z_j)$. Каждая интерполирующая функция имеет вид $f - Bg$, где $g \in H^\infty$, а B — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$. Покажем, что при $\|f - Bg\| \leq 1$ обязательно $g = 0$. Значит, существует только одна интерполирующая функция нормы 1, а именно f , и она не является внутренней.

Итак, пусть $g \in H^\infty$ и $\|f - Bg\| \leq 1$. Тогда почти всюду на I имеем $|1 - Bg/f| \leq 1$ и $\operatorname{Re} Bg/f \geq 0$. Согласно упр. II. 14, внутренний сомножитель функции Bg/f аналитически продолжается через I . Но при $g \neq 0$ он должен быть кратен B , а нули функции B сгущаются к $z = 1$. Поэтому $g \equiv 0$.

Теорема 4.1 вытекает из следующей теоремы Адамяна, Арова и Крейна [1968].

Теорема 4.3. *Пусть $h_0 \in L^\infty$. Если факторкласс $h_0 + H^\infty \in L^\infty/H^\infty$ содержит две различные функции нормы 1, то он со-*

держит и некоторую функцию $h \in L^\infty$, у которой $|h| = 1$ почти всюду.

Чтобы вывести теорему Неванлинны из теоремы 4.3, положим $h_0 = \bar{B}f_0$, где B — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$. Если $h \in \bar{B}f_0 + H^\infty$ и $|h| = 1$, то Bh — внутренняя функция и $Bh(z_j) = f_0(z_j)$, $j = 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы 4.3 разбивается на два случая, первый из которых гораздо проще второго. Стратегия доказательства уже появлялась в следствии 1.9. Для получения унимодулярной функции мы максимизируем некоторый линейный функционал на множестве

$$K = \{h \in h_0 + H^\infty: \|h\| \leq 1\}.$$

Нам понадобится факторнорма

$$\|h_0 + H^\infty\| = \inf \{\|h_0 - g\|: g \in H^\infty\}$$

функции h_0 в L^∞/H^∞ .

Случай 1. $\|h_0 + H^\infty\| < 1$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(4.2) \quad a = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int h d\theta \right| : h \in K \right\}.$$

Согласно теории нормальных семейств, существует экстремальная функция $h \in K$ с $\left| (1/2\pi) \int h d\theta \right| = a$. Мы покажем, что $|h| = 1$ почти всюду. Отметим, что

$$(4.3) \quad \text{dist}(h, H_0^\infty) = \inf \{\|h - g\|: g \in H^\infty, g(0) = 0\} = 1,$$

так как иначе $h - g + \varepsilon \int_K h d\theta / 2\pi$, $g \in H_0^\infty$, $\varepsilon > 0$, была бы функцией из K с бóльшим средним. С другой стороны,

$$(4.4) \quad \text{dist}(h, H^\infty) = \|h_0 + H^\infty\| < 1.$$

Поскольку $(H^1)^\perp = H_0^\infty$, то (4.3) дает

$$(4.3') \quad \sup \left\{ \left| \int hF \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H^1, \|F\|_1 \leq 1 \right\} = 1,$$

а (4.4) —

$$(4.4') \quad \sup \left\{ \left| \int hF \frac{d\theta}{2\pi} \right| : F \in H_0^1, \|F\|_1 \leq 1 \right\} < 1.$$

Выберем $F_n \in H^1$, $\|F_n\|_1 \leq 1$, так, чтобы

$$(4.5) \quad \int hF_n \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 1.$$

Это значит, что

$$(4.6) \quad \inf_n |F_n(0)| > 0,$$

поскольку иначе нашлась бы подпоследовательность, для которой

$$\int h \frac{F_n - F_n(0)}{\|F_n - F_n(0)\|} \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 1$$

вопреки (4.4').

Предположим теперь, что $|h| < \lambda < 1$ на некотором множестве E положительной меры. Так как $\|F_n\|_1 \leq 1$, то из (4.5) получаем

$$\int_E |F_n| \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0.$$

Значит, по неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} \int_E \log |F_n| \frac{d\theta}{2\pi} &\rightarrow -\infty, \\ \log |F_n(0)| &\leq \int_E \log |F_n| \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{T \setminus E} \log |F_n| \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

что противоречит (4.6).

Прежде чем обратиться к случаю 2, сделаем небольшое отступление и получим дальнейшую информацию для случая 1.

Теорема 4.4. Если $\|h_0 + H^\infty\| < 1$, то существуют $h \in h_0 + H^\infty$ и $F \in H^1$, $F \neq 0$, такие, что почти всюду

$$(4.7) \quad h = F/|F|.$$

Доказательство. Пусть h и $\{F_n\}$ — те же, что в предыдущем рассуждении. Если последовательность $\{F_n\}$ имеет в L^1 слабую предельную точку F , то по (4.5) $\int h F d\theta/2\pi = 1$. Так как $\|h\| \leq 1$, то отсюда следует (4.7). Допустим поэтому, что $\{F_n\}$ не имеет слабых предельных точек. Тогда найдутся измеримые множества $E_k \subset T$, такие, что $|E_k| \rightarrow 0$, но

$$(4.8) \quad \left| \int_{E_k} F_k \frac{d\theta}{2\pi} \right| \geq \beta > 0,$$

где $\{F_k\}$ — подпоследовательность последовательности $\{F_n\}$ (см. Данфорд и Шварц [1958]).

Лемма 4.5. Если $\{E_k\}$ — последовательность измеримых подмножеств окружности T и $|E_k| \rightarrow 0$, то существует последовательность $\{g_k\}$ функций из H^∞ , для которых

- (i) $\sup_{E_k} |g_k| \rightarrow 0$,
- (ii) $g_k(0) \rightarrow 1$,
- (iii) $|g_k| + |1 - g_k| \leq 1 + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

Предположим, что лемма доказана, и закончим доказательство теоремы 4.4. Положим

$$G_k = \frac{g_k F_k}{1 + e_k}, \quad H_k = \frac{(1 - g_k) F_k}{1 + e_k}.$$

Тогда $G_k, H_k \in H^1$ и по (4.5)

$$(4.9) \quad \|G_k\|_1 \int \frac{h G_k}{\|G_k\|_1} \frac{d\theta}{2\pi} + \|H_k\|_1 \int \frac{h H_k}{\|H_k\|_1} \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 1.$$

Но при достаточно большом k имеем $\|H_k\|_1 \geq \beta/2$ ввиду (4.8) и (i). Согласно (iii), $\|G_k\|_1 + \|H_k\|_1 \leq 1$ и (4.9) дает

$$\int \frac{h H_k}{\|H_k\|_1} \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 1.$$

Однако из условия (ii) вытекает, что $H_k(0) \rightarrow 0$, и мы снова приходим к противоречию с (4.4'). $\square$

Доказательство леммы 4.5. Пусть $A_k \rightarrow \infty$, но $A_k |E_k| \rightarrow 0$, и пусть f_k — интеграл Пуассона функции

$$A_k \chi_{E_k} + i A_k \tilde{\chi}_{E_k}.$$

Функции f_k аналитичны в D и $\operatorname{Re} f_k \geq 0$. Далее, $f_k(0) = A_k |E_k|$ и $\operatorname{Re} f_k = A_k$ почти всюду на E_k . Положим $h_k = (1 + f_k)^{-1}$. Эта функция отображает D в круг

$$(4.10) \quad |\omega - 1/2| < 1/2,$$

и $h_k(0) \rightarrow 1$, в то время как $\sup_{E_k} |h_k| \rightarrow 0$. Положим, наконец,

$g_k = h_k^{\delta_k}$, $\delta_k > 0$. Круг (4.10) под действием отображения $\omega \rightarrow \omega^\delta$ при малом δ сжимается так, что его образ попадает в эллипс, соответствующий условию (iii), и мы можем выбрать δ_k столь медленно стремящимися к нулю, что все условия (i) — (iii) будут выполнены. $\square$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 4.3.

Случай 2. $\|h_0 + H^\infty\| = 1$. По предположению существуют две различные функции $h_1, h_2 \in h_0 + H^\infty$ с $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$. Поскольку $h_1 \neq h_2$, то найдется точка $z \in D$, для которой

$$\int h_1 P_z \frac{d\theta}{2\pi} \neq \int h_2 P_z \frac{d\theta}{2\pi},$$

и после применения преобразования Мёбиуса мы можем считать, что $z = 0$ и

$$(4.11) \quad \operatorname{Re} \int h_1 \frac{d\theta}{2\pi} \neq \operatorname{Re} \int h_2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Как и в случае 1, мы ищем унимодулярную функцию $h \in h_0 + H^\infty$, максимизируя

$$\operatorname{Re} \int h \frac{d\theta}{2\pi}$$

на множестве $K = \{h \in h_0 + H^\infty: \|h\| \leq 1\}$. Однако на этот раз нам придется пользоваться доказательством теоремы Хана — Банаха вместо нее самой. Пространство L^∞/H^∞ сопряжено с H_0^1 , а элементы факторкласса $h \in h_0 + H^\infty$ с $\|h\| = 1$ соответствуют сохраняющим норму продолжениям на L^1 функционала

$$H_0^1 \ni F \rightarrow \int h_0 F \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Теперь (4.11) утверждает, что есть два сохраняющих норму продолжения, вещественные части которых различаются на постоянной функции $1 \in L^1/H_0^1$. Доказательство теоремы Хана — Банаха дает $m < M$, где

$$m = \sup_{F \in H_0^1} \left\{ -\|1 + F\|_1 - \operatorname{Re} \int h_0 F \frac{d\theta}{2\pi} \right\},$$

$$M = \inf_{F \in H_0^1} \left\{ \|1 + F\|_1 - \operatorname{Re} \int h_0 F \frac{d\theta}{2\pi} \right\}.$$

Мы можем выбрать $h \in h_0 + H^\infty$, $\|h\| = 1$, так, чтобы $\operatorname{Re} \int h d\theta/2\pi = M$. Покажем, что $|h| = 1$ почти всюду. Перепишем два последних равенства:

$$(4.12) \quad \inf_{F \in H_0^1} \left\{ \|1 + F\|_1 + \operatorname{Re} \int h(1 + F) \frac{d\theta}{2\pi} \right\} = M - m > 0,$$

$$(4.13) \quad \inf_{F \in H_0^1} \left\{ \|1 + F\|_1 - \operatorname{Re} \int h(1 + F) \frac{d\theta}{2\pi} \right\} = 0.$$

Левые части (4.12) и (4.13) различаются только знаком второго члена. По (4.13) найдутся такие $F_n \in H_0^1$, что

$$(4.14) \quad \int |1 + F_n| \left\{ 1 - \operatorname{Re} \left(h \frac{1 + F_n}{|1 + F_n|} \right) \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0.$$

Предположим, что $|h| < \lambda < 1$ на измеримом множестве $E \subset T$ положительной меры. По (4.14)

$$(4.15) \quad \frac{1}{2\pi} \int_E |1 + F_n| d\theta \rightarrow 0.$$

Лемма 4.6. Если $E \subset T$ имеет положительную меру, то найдется $g \in H^\infty$, такая, что $g(0) = 1$ и g вещественна и отрицательна на $T \setminus E$.

Считая лемму доказанной, положим $1 + G_n = g(1 + F_n)$. Тогда $G_n \in H_0^1$ и по (4.15)

$$\frac{1}{2\pi} \int_E |1 + G_n| \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left(h \frac{1 + G_n}{|1 + G_n|} \right) \right\} d\theta \rightarrow 0.$$

С другой стороны, на $T \setminus E$

$$\operatorname{Re} \left(h \frac{1 + G_n}{|1 + G_n|} \right) = - \operatorname{Re} \left(h \frac{1 + F_n}{|1 + F_n|} \right)$$

и по (4.14)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{T \setminus E} |1 + G_n| \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left(h \frac{1 + G_n}{|1 + G_n|} \right) \right\} d\theta \rightarrow 0.$$

Значит,

$$\int \{|1 + G_n| + \operatorname{Re}(h(1 + G_n))\} \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0,$$

что противоречит (4.12). $\square$

Доказательство леммы 4.6. Пусть G — внешняя функция, $|G| = e$ на E и $|G| = 1$ на $T \setminus E$. Значения G лежат в кольце $\{1 < |w| < e\}$ и $G(0) = \exp|E| > 1$. Функция $\varphi(w) = w + (1/w) - 2$ отображает окружность $\{|w| = 1\}$ на разрез $[-4, 0]$, а наше кольцо — на область между этим разрезом и некоторым эллипсом. Значит, $\varphi(G(0)) > 0$, и функция $g = \varphi \circ G / (\varphi \circ G(0))$, равная 1 в точке 0, вещественна и отрицательна почти всюду на $T \setminus E$. $\square$

5. Параметризация множества K

Мы продолжим наше обсуждение факторкласса $h_0 + H^\infty \in L^\infty / H^\infty$ в предположении, что $K = \{h \in h_0 + H^\infty : \|h\| \leq 1\}$ содержит не менее двух функций. Наша цель — это принадлежащая Адамян, Арову и Крейну [1968] красивая формула, дающая описание всех функций из K . Для начала нам нужны два результата де Леу и Рудина [1958] о геометрии единичного шара в H^1 .

Точка x выпуклого множества $\mathcal{K}$ называется его *крайней точкой*, если ее нельзя записать как выпуклую комбинацию

$$x = tx_1 + (1 - t)x_2, \quad 0 < t < 1,$$

где $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$, $x_1 \neq x_2$.

Теорема 5.1. *Функция F является крайней точкой единичного шара пространства H^1 тогда и только тогда, когда она внешняя и $\|F\|_1 = 1$. Если $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$, но F — не внешняя функция, то*

$$(5.1) \quad F = \frac{F_1 + F_2}{2},$$

где функции F_1 и F_2 внешние и $\|F_1\|_1 = \|F_2\|_1 = 1$.

Доказательство. Пусть $F \in H^1$. Если $\|F\|_1 < 1$, то

$$F = t(F/\|F\|_1) + (1-t) \cdot 0, \quad t = \|F\|_1,$$

так что мы можем считать, что $\|F\|_1 = 1$.

Пусть F не внешняя и $F = uG$, где функция G внешняя, а u внутренняя. Выберем такое λ , $|\lambda| = 1$, что

$$(5.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int |F| \operatorname{Re}(\lambda u) d\theta = 0,$$

и положим $u_0 = \lambda u$. Поскольку u_0 внутренняя, то

$$2 \operatorname{Re} u_0 = u_0 + \bar{u}_0 = u_0 + \frac{1}{u_0} = \frac{1 + u_0^2}{u_0}.$$

Следовательно,

$$(5.3) \quad J(e^{i\theta}) = F(e^{i\theta}) \operatorname{Re} u_0(e^{i\theta}) = \left\{ \frac{1}{2} \bar{\lambda} G(e^{i\theta}) u_0(e^{i\theta}) \right\} \{2 \operatorname{Re} u_0(e^{i\theta})\} = \\ = \frac{1}{2} \bar{\lambda} G(e^{i\theta}) (1 + u_0^2(e^{i\theta})) \in H^1.$$

Почти всюду $|F \pm J| = |F| (1 \pm \operatorname{Re} u_0)$, и, согласно (5.2),

$$\|F + J\|_1 = \|F - J\|_1 = \|F\|_1 = 1.$$

Так как F не была внешней, то $u_0 \neq \text{const}$, $J \neq 0$ и

$$F = \frac{F+J}{2} + \frac{F-J}{2}$$

не является крайней точкой. Далее

$$J \pm F = \frac{1}{2} \bar{\lambda} G (1 \pm 2u_0 + u_0^2) = \frac{1}{2} \bar{\lambda} G (1 \pm u_0)^2$$

— внешняя функция, потому что $1 \pm u_0$ внешняя. Тем самым (5.1) доказано.

Пусть теперь функция F внешняя и $\|F\|_1 = 1$. Если $F = tF_1 + (1-t)F_2$, $0 < t < 1$, то

$$1 = \|F\|_1 = t \int \frac{\bar{F}}{|F|} F_1 \frac{d\theta}{2\pi} + (1-t) \int \frac{\bar{F}}{|F|} F_2 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \\ \leqslant t \|F_1\|_1 + (1-t) \|F_2\|_1 \leqslant 1,$$

и всюду здесь достигается равенство. Поэтому $\|F_1\|_1 = \|F_2\|_1 = 1$ и

$$\int \frac{\bar{F}}{|F|} F_j \frac{d\theta}{2\pi} = \|F_j\|_1, \quad j = 1, 2.$$

Но $|F| > 0$ почти всюду и, стало быть, $F_j = k_j F$, $k_j > 0$, $tk_1 + (1-t)k_2 = 1$. Ввиду субгармоничности функции $\log|F_j|$

$$|F_j(0)| \leqslant |F(0)| \exp \left(\int \log k_j \frac{d\theta}{2\pi} \right),$$

так как F — внешняя функция. Поскольку $|F(0)| \leq t|F_1(0)| + (1-t)|F_2(0)|$, то неравенство Йенсена дает

$$1 \leq t \exp\left(\int \log k_1 \frac{d\theta}{2\pi}\right) + (1-t) \exp\left(\int \log k_2 \frac{d\theta}{2\pi}\right) \leq \\ \leq t \int k_1 \frac{d\theta}{2\pi} + (1-t) \int k_2 \frac{d\theta}{2\pi} = 1.$$

Но экспоненциальная функция строго выпукла, и мы должны заключить, что k_j постоянны и $k_j = \|F_j\|/\|F\|_1 = 1$. Значит, $F_1 = F_2 = F$ и F — крайняя точка $\square$

К сожалению, функция F из H^1 с единичной нормой не обязательно однозначно определяется своим аргументом (который существует по модулю 2π , поскольку $|F| > 0$ почти всюду). Например, если F не внешняя, то обе внешние функции в (5.1) имеют одинаковые аргументы с F (и между собой). Это следует из построения F_1 и F_2 или из того, что

$$\int \frac{\bar{F}}{|F|} F_j \frac{d\theta}{2\pi} = 1 = \|F_j\|_1, \quad j = 1, 2,$$

и, значит, $(\bar{F}/|F|)F_j = |F_j|$ почти всюду. Если $h \in L^\infty$ и $|h| = 1$ почти всюду, положим

$$\mathcal{P}_h = \{F \in H^1: \|F\|_1 = 1, F/|F| = h \text{ почти всюду}\}.$$

Геометрически это означает, что $\mathcal{P}_h$ — это пересечение единичного шара в H^1 с гиперплоскостью

$$(5.4) \quad \left\{ F: \int \bar{h} F \frac{d\theta}{2\pi} = 1 \right\},$$

т. е. выпуклое множество. Конечно, $\mathcal{P}_h$ может быть пустым, но мы интересуемся случаем $\mathcal{P}_h \neq \emptyset$. Если $\mathcal{P}_h$ содержит только одну функцию F , то гиперплоскость (5.4) касается шара только в точке F , т. е. F — *выступающая* точка шара. Мы не располагаем хорошей характеристикой выступающих точек единичного шара в H^1 , т. е. таких функций F , что $\mathcal{P}_{F/|F|} = \{F\}$. Однако если $\mathcal{P}_h$ содержит хотя бы две функции, то оно оказывается уже очень большим.

Теорема 5.2. Пусть $h \in L^\infty$, $|h| = 1$ почти всюду и $\mathcal{P}_h$ содержит две различные функции. При любом $z_0 \in D$ множество $\{F(z_0): F \in \mathcal{P}_h\}$ содержит круг с центром в начале координат.

Доказательство. При $|z_0| \leq 1$, $|z_1| \leq 1$ выражение

$$\frac{(z - z_1)(1 - \bar{z}_1 z)}{(z - z_0)(1 - \bar{z}_0 z)} = \frac{(z - z_1)z(\bar{z} - \bar{z}_1)}{(z - z_0)z(\bar{z} - \bar{z}_0)}$$

вещественно и неотрицательно на T . Если найдется функция $F \in \mathcal{P}_h$, имеющая в точке z_0 нуль кратности k , то функция

$$F_{z_1}(z) = \left(\frac{(z - z_1)(1 - \bar{z}_1 z)}{(z - z_0)(1 - \bar{z}_0 z)} \right)^k F(z)$$

лежит в $\mathcal{P}_h$ и значения $F_{z_1}(z_0)$ заполняют некоторую окрестность нуля.

Осталось показать, что всегда найдется $F \in \mathcal{P}_h$ с $F(z_0) = 0$. Если выпуклое множество $\mathcal{P}_h$ содержит две различные функции, то по теореме 5.1 оно содержит и функцию $F = uG$ с непостоянным внутренним сомножителем $u(z)$. Если $J(z)$ — функция из (5.3), то $F + tJ = F(1 + t \operatorname{Re} u_0)$ при $0 < t < 1$ имеет норму $\|F + tJ\|_1 = 1$ по (5.2), и $F + tJ \in \mathcal{P}_h$. Мы также имеем (в силу (5.3))

$$F + tJ = \frac{1}{2} \bar{\lambda} M G \left(1 + \frac{2u_0}{t} + u_0^2 \right).$$

При $0 < t < 1$ уравнение

$$\zeta^2 + \frac{2\zeta}{t} + 1 = 0$$

имеет корень $\zeta(t)$, $|\zeta(t)| < 1$, и эти корни заполняют интервал $(-1, 0)$. Если при всех $t \in [0, 1)$ функция $F + tJ$ не имеет нулей в D , то область значений u_0 не пересекается с отрезком $(-1, 0]$. Тогда по следствию II.4.8 u_0 одновременно должна быть внутренней и внешней функцией, т. е. u_0 постоянна. Значит, $F + tJ$ при некотором t имеет нуль $z_1 \in D$, а тогда функция

$$\frac{(z - z_0)(1 - \bar{z}_0 z)}{(z - z_1)(1 - \bar{z}_1 z)} (F + tJ)$$

является функцией из $\mathcal{P}_h$ с нулем в точке z_0 . $\square$

Возвращаясь к теме предыдущего раздела, фиксируем факторкласс $h_0 + H^\infty \in L^\infty/H^\infty$ и предположим, что

$$K = \{h \in h_0 + H^\infty: \|h\| \leq 1\}$$

содержит более одной функции. По теореме 4.3 K тогда содержит унимодулярную функцию, которую мы и будем обозначать через h_0 : $h_0 \in K$, $|h_0| = 1$ почти всюду. Напомним, что после подходящей замены координат функция h_0 является экстремальной:

$$(5.5) \quad \operatorname{Re} \int h_0 \frac{d\theta}{2\pi} = \sup_{h \in K} \operatorname{Re} \int h \frac{d\theta}{2\pi}$$

(см. доказательство теоремы 4.3). Параметризация Адамяна, Арова и Крейна, о которой мы упоминали, — это следующая формула (5.7).

Теорема 5.3. *Существует единственная внешняя функция $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$, такая, что*

$$(5.6) \quad h_0 = F/|F|.$$

Определим $\chi \in H^\infty$ равенством

$$\frac{1 + \chi(z)}{1 - \chi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} |F(e^{i\theta})| d\theta.$$

Тогда

$$(5.7) \quad K = \left\{ h_0 - \frac{F(1-\chi)(1-w)}{1-\chi w} : w(z) \in H^\infty, \|w\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

В качестве следствия параметризации (5.7) мы видим, что при $z \in D$ множество

$$\left\{ \int h P_z \frac{d\theta}{2\pi} : h \in K \right\}$$

является невырожденным замкнутым кругом. Другое следствие формулы (5.7) — это принадлежащее Неванлинне [1929] описание всех решений $f \in H^\infty$, $\|f\| \leq 1$, интерполяционной задачи

$$f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(см. ниже разд. 6).

Может показаться, что условие (5.6) противоречит теореме 4.4, потому что при $\|h_0 + H^\infty\| < 1$ мы получаем, что экстремальная функция h_0 имеет две формы:

$$h_0 = \bar{F}_1/|F_1|, \quad h_0 = F_2/|F_2|,$$

$F_1, F_2 \in H^1$, $\|F_j\|_1 = 1$. Однако если $F_1 \in H^1$, $g \in H^\infty$ и

$$\left\| \frac{\bar{F}_1}{|F_1|} - g \right\|_\infty = \alpha < 1,$$

то $|\arg(gF_1)| < \arcsin(1-\alpha) < \pi/2$ и по следствию III.2.5 $(gF_1)^{-1} \in H^1$. Значит, $F_1^{-1} = g(gF_1)^{-1} \in H^1$ и (5.6) выполняется при $F_2 = F_1^{-1}/\|F_1^{-1}\|_1$.

В доказательстве теоремы 5.3 требуются три леммы; первая использует идею Кусиса [1973].

Лемма 5.4. *Существует внешняя функция $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$, такая, что $h_0 = F/|F|$ почти всюду.*

Доказательство. Мы знаем, что $|h_0| = 1$ и что существует функция $g \in H^\infty$, $g \neq 0$, такая, что $\|h_0 - g\|_\infty \leq 1$. Значит, почти всюду $|1 - \bar{h}_0 g| \leq 1$. Пусть $\alpha = \arg \bar{h}_0 g$; тогда $|\alpha| \leq \pi/2$ и

$$|g| = |\bar{h}_0 g| \leq 2 \cos \alpha,$$

как показано на рис. IV.3. Положим $\varphi = e^{a-i\alpha}$; по теореме III.2.4 тогда $\varphi \in H^p$, $p < 1$, кроме того, $g\varphi \in H^1$, потому что

$$(5.8) \quad |\varphi(e^{i\theta})g(e^{i\theta})| \leq 2|\varphi(e^{i\theta})\cos\alpha(e^{i\theta})| = 2\operatorname{Re}\varphi(e^{i\theta});$$

но $\operatorname{Re}\varphi \geq 0$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int \operatorname{Re}\varphi d\theta \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int \operatorname{Re}\varphi(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \operatorname{Re}\varphi(0).$$

Значит, $\varphi g \in H^p \cap L^1 = H^1$. Поэтому $F_0 = \varphi g / \|\varphi g\|_1$ лежит в единичном шаре пространства H^1 и $\bar{h}_0 F_0 \geq 0$, т. е.

$$h_0 = F_0 / |F_0|.$$

Наконец, согласно замечанию после теоремы 5.1, существует и внешняя функция F , удовлетворяющая (5.6). $\square$

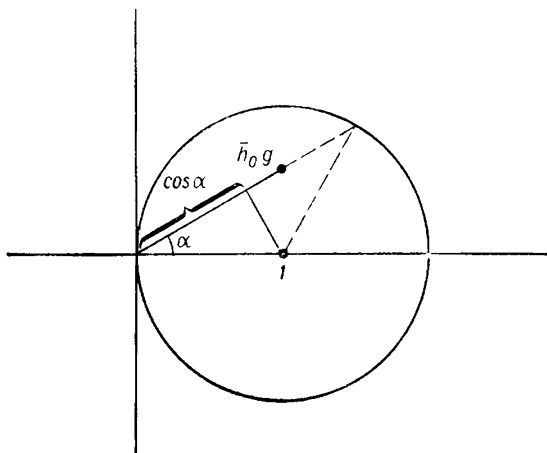


Рис. IV.3. Почему $|g| \leq 2 \cos \alpha$.

Лемма 5.5. Пусть $F(z)$ — произвольная функция из H^1 , $F \neq 0$. Определим $\chi \in H^\infty$ равенством

$$(5.9) \quad \frac{1 + \chi(z)}{1 - \chi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} |F(e^{i\theta})| d\theta.$$

Если $w(z) \in H^\infty$, $\|w\|_\infty \leq 1$, то функция

$$(5.10) \quad g(z) = \frac{F(z)(1 - \chi(z))(1 - w(z))}{1 - \chi(z)w(z)}$$

лежит в H^∞ и

$$(5.11) \quad \|F/|F| - g\|_\infty \leq 1.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{Re} \frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} = \int P_z(\theta) |F(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \geq 0.$$

Пусть $|\omega(z)| \leq 1$, и положим

$$(5.12) \quad \varphi(z) = \frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} + \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = \frac{2(1-\chi(z)\omega(z))}{(1-\chi(z))(1-\omega(z))}.$$

Функция φ голоморфна, и поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} \geq 0,$$

то

$$(5.13) \quad \operatorname{Re} \varphi(z) \geq \int P_z(\theta) |F(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \geq |F(z)| \geq 0.$$

Простое вычисление (с учетом (5.10) и (5.12)) показывает, что

$$g(z) = 2F(z)/\varphi(z),$$

так что $g \in H^\infty$. Если $\omega \equiv 1$, то $g = 0$, а при $\omega \not\equiv 1$ φ имеет почти всюду некасательные пределы, причем

$$|\varphi(e^{i\theta})| \geq |F(e^{i\theta})|.$$

Но

$$\left| \frac{F(e^{i\theta})}{|F(e^{i\theta})|} - g(e^{i\theta}) \right| \leq 1$$

тогда и только тогда, когда

$$(5.14) \quad \left| \frac{1}{|F(e^{i\theta})|} - \frac{g(e^{i\theta})}{F(e^{i\theta})} \right| \leq \frac{1}{|F(e^{i\theta})|}.$$

Преобразование $\zeta \rightarrow 2/\zeta$ превращает полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta \geq |F(e^{i\theta})|$ в круг $||F(e^{i\theta})|^{-1} - \omega| \leq |F(e^{i\theta})|^{-1}$. Согласно (5.13), почти всюду $\operatorname{Re}(2F/g) = \operatorname{Re} \varphi \geq |F|$; поэтому выполняется (5.14) и, следовательно, (5.11). $\square$

Лемма 5.6. Функция $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$, такая, что $h_0 = F/|F|$, единственна.

Доказательство. По лемме 5.4 найдется хотя бы одна такая F , и мы должны доказать, что $\mathcal{P}_{h_0}$ состоит только из одной функции. Но если $\mathcal{P}_{h_0}$ содержит хотя бы две функции, то по теореме 5.2 найдется $F_1 \in \mathcal{P}_{h_0}$ с $\operatorname{Re} F_1(0) < 0$. Поскольку $\|F_1\|_1 = 1$, то $\chi(0) = 0$, где χ связана с F_1 посредством (5.9). Возьмем $\omega \equiv -1$ в (5.10); мы получим $g \in H^\infty$, $\operatorname{Re} g(0) < 0$, и в силу (5.11) $h_0 - g \in K$. Тогда

$$\operatorname{Re} \int (h_0 - g) \frac{d\theta}{2\pi} > \operatorname{Re} \int h_0 \frac{d\theta}{2\pi},$$

что противоречит (5.5). $\square$

Окончание доказательства теоремы 5.3. По леммам 5.4 и 5.6 найдется единственная внешняя функция $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$, удовлетворяющая (5.6). По лемме 5.5 любая функция вида

$$(5.15) \quad h_0 - \frac{F(1-\chi)(1-w)}{1-\chi w}, \quad w \in H^\infty, \|w\|_\infty \leq 1,$$

лежит в K . Пусть теперь $g \in H^\infty$, $g \neq 0$ и $\|h_0 - g\|_\infty \leq 1$. Мы должны показать, что $h_0 - g$ имеет вид (5.15). Идея доказательства содержится в доказательстве леммы 5.4. Полагая $\alpha = \arg h_0 g$ и $\varphi = e^{i\alpha}$, мы имеем $\varphi g \in H^1$ и $F = \varphi g / \|\varphi g\|_1$ в силу единственности функции F . Но $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0$ и по (5.8)

$$\frac{\operatorname{Re} 2\varphi(e^{i\theta})}{\|\varphi g\|_1} \geq \frac{|\varphi(e^{i\theta})g(e^{i\theta})|}{\|\varphi g\|_1} = |F(e^{i\theta})|.$$

Положительная гармоническая функция $\operatorname{Re} 2\varphi(z)/\|\varphi g\|_1$ является интегралом Пуассона положительной меры, абсолютно непрерывная часть которой превосходит $|F(e^{i\theta})|d\theta$. Следовательно,

$$\frac{2\varphi(z)}{\|\varphi g\|_1} - \frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} = k(z),$$

где $\operatorname{Re} k(z) > 0$, т. е.

$$k(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}, \quad w \in H^\infty, \|w\|_\infty \leq 1.$$

Теперь

$$\begin{aligned} g &= \frac{\|\varphi g\|_1 F}{\varphi} = 2F \cdot \left(\frac{2\varphi}{\|\varphi g\|_1} \right)^{-1} = \frac{2F}{\frac{1+\chi}{1-\chi} + \frac{1+w}{1-w}} = \\ &= F \frac{(1-\chi)(1-w)}{1-\chi w}, \end{aligned}$$

и представимость $h_0 - g$ в виде (5.15) доказана. $\square$

6. Доказательство Неванлинны

В частном случае $h = Bf$, где $f \in \mathcal{B}$ (т. е. $|f(z)| \leq 1$) и B — произведение Бляшке с различными нулями $\{z_j\}$, формула (5.7) описывает все $f \in \mathcal{B}$, такие, что

$$(6.1) \quad f(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(в предположении, что (6.1) имеет в $\mathcal{B}$ два различных решения). Уже в [1929] Неванlinna располагал подобной формулой для решений (6.1), а его оригинальное доказательство теоремы 4.1 в той же работе появлялось как приложение этой формулы. После такого количества теории в двух предыдущих разделах нам следует включить в наше изложение и элементарный подход Неванлинны.

Идея состоит в повторном применении инвариантной формы леммы Шварца. Предположим, что $\mathcal{B}$, т. е. замкнутый единичный шар пространства H^∞ , содержит два разных решения f_1 и f_2 задачи (6.1). Найдется точка $z_0 \in D$, в которой $f_1(z_0) \neq f_2(z_0)$; применяя преобразования Мёбиуса, мы можем считать, что $z_0 = 0$. Положим

$$\mathcal{E}_n = \{f \in \mathcal{B}: f(z_j) = w_j, \quad 1 \leq j \leq n\}.$$

Мы попытаемся найти параметризацию $\mathcal{E}_\infty = \bigcap \mathcal{E}_n$ и показать с ее помощью, что $\mathcal{E}_\infty$ содержит внутренние функции.

Зафиксируем c_1 , $|c_1| < 1$, которое точно определим в дальнейшем. Если $f \in \mathcal{E}_1$, то

$$(6.2) \quad \frac{f - w_1}{1 - \bar{w}_1 f} = \frac{f_1 + c_1}{1 + \bar{c}_1 f_1} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

для некоторой функции $f_1 \in \mathcal{B}$. Обратно, если $f_1 \in \mathcal{B}$, то (6.2) определяет функцию $f \in \mathcal{E}_1$. Перепишем (6.2) в виде

$$(6.3) \quad f(z) = \frac{A_1(z) + B_1(z) f_1(z)}{C_1(z) + D_1(z) f_1(z)},$$

где

$$A_1(z) = w_1(1 - \bar{z}_1 z) + c_1(z - z_1),$$

$$B_1(z) = \bar{c}_1 w_1(1 - \bar{z}_1 z) + (z - z_1),$$

$$C_1(z) = (1 - \bar{z}_1 z) + c_1 \bar{w}_1(z - z_1),$$

$$D_1(z) = \bar{c}_1(1 - \bar{z}_1 z) + \bar{w}_1(z - z_1).$$

Тогда (6.3) и есть нужная нам параметризация для простой интерполяционной задачи $f(z_1) = w_1$, $f \in \mathcal{B}$. Предположим теперь, что $f \in \mathcal{E}_n$, $n \geq 2$. Формула (6.2) определяет $f_1(z_j)$ при $2 \leq j \leq n$. Решая (6.2), мы получим

$$(6.4) \quad f_1(z_j) = w_j^{(1)}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Ясно, что $|w_j^{(1)}| \leq 1$, потому что $f_1 \in \mathcal{B}$. Кроме того, случай $|w_j^{(1)}| = 1$ при некотором j , $2 \leq j \leq n$, невозможен, поскольку тогда $f_1 = w_j^{(1)}$ и $\mathcal{E}_n$ содержит точно одну функцию. Таким образом, $|w_j^{(1)}| < 1$, $j = 2, 3, \dots$. Кое-что мы уже, однако, получили, потому что (6.2) позволяет исключить из рассмотрения значение $f_1(z_1)$ и теперь $\mathcal{E}_n$ описывается $n-1$ уравнениями (6.4) вместо n первоначальных.

Повторяя эти рассуждения, зафиксируем c_2 , $|c_2| < 1$, и положим

$$(6.5) \quad \frac{f_1 - w_2^{(1)}}{1 - \bar{w}_2^{(1)} f_1} = \frac{f_2 + c_2}{1 + \bar{c}_2 f_2} \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}.$$

Теперь $f \in \mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $f_1(z_2) = w_2^{(1)}$, а это случается тогда и только тогда, когда (6.5) выполняется для

некоторой функции $f_2 \in \mathcal{B}$. Далее, если $n > 2$, то $f \in \mathcal{E}_n$ тогда и только тогда, когда

$$f_2(z_j) = w_j^{(2)}, \quad 3 \leq j \leq n,$$

где $w_j^{(2)}$ определяются при помощи (6.5). Мы также имеем $|w_j^{(2)}| < 1$ по тем же причинам, по которым $|w_j^{(1)}| < 1$.

Продолжим по индукции, предполагая все время, что $\mathcal{E}_n$ содержит более одной функции. Если $k \leq n$, то $f \in \mathcal{E}_n$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функции

$$f_0, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{B},$$

что $f_0 = f$, $f_k(z_j) = w_j^{(k)}$, $k+1 \leq j \leq n$, где $|w_j^{(k)}| < 1$, $w_j^{(0)} = w_j$, и что

$$(6.6) \quad \frac{f_{k-1} - w_k^{(k-1)}}{1 - \bar{w}_k^{(k-1)} f_{k-1}} = \frac{f_k + c_k}{1 + \bar{c}_k f_k} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$$

Здесь числа c_k , $|c_k| < 1$, еще подлежат определению (явные значения $w_j^{(k)}$ для нас не важны). Итерируя (6.6), мы получим взаимно однозначное отображение $\mathcal{B}$ на $\mathcal{E}_n$. Перепишем (6.6) в виде

$$(6.7) \quad f_{k-1}(z) = \frac{\alpha_k(z) + \beta_k(z) f_k(z)}{\gamma_k(z) + \delta_k(z) f_k(z)},$$

где

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \alpha_k(z) &= w_k^{(k-1)}(1 - \bar{z}_k z) + c_k(z - z_k), \\ \beta_k(z) &= \bar{c}_k w_k^{(k-1)}(1 - \bar{z}_k z) + (z - z_k), \\ \gamma_k(z) &= (1 - \bar{z}_k z) + c_k \bar{w}_k^{(k-1)}(z - z_k), \\ \delta_k(z) &= \bar{c}_k(1 - \bar{z}_k z) + \bar{w}_k^{(k-1)}(z - z_k). \end{aligned}$$

По индукции получим из (6.3) и (6.7)

$$(6.9) \quad f(z) = \frac{A_n(z) + B_n(z) f_n(z)}{C_n(z) + D_n(z) f_n(z)},$$

где

$$(6.10) \quad \begin{aligned} A_n &= \gamma_n A_{n-1} + \alpha_n B_{n-1}, \\ B_n &= \delta_n A_{n-1} + \beta_n B_{n-1}, \\ C_n &= \gamma_n C_{n-1} + \alpha_n D_{n-1}, \\ D_n &= \delta_n C_{n-1} + \beta_n D_{n-1} \end{aligned}$$

— полиномы от z степени не выше n . Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма 6.1. Пусть полиномы $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$, $D_n(z)$ определены согласно (6.8) и (6.10). Тогда $f(z) \in \mathcal{E}_n$ в том и только

том случае, когда $f(z)$ удовлетворяет (6.9) при некоторой функции $f_n(z) \in \mathcal{B}$.

Полиномы A_n, B_n, C_n и D_n зависят от параметров $c_1, c_2, \dots, c_n$. Выберем теперь $c_k = \bar{z}_k \omega_k^{(k-1)}$. Тогда

$$\delta_n(0) = D_n(0) = 0,$$

что вскоре облегчит нам доказательство сходимости.

При $|z| < 1$ (6.9) показывает, что множество $\{f(z): f \in \mathcal{E}_n\}$ — замкнутый круг $\Delta_n(z)$, содержащийся в D и определенный формулой

$$(6.11) \quad \left\{ \frac{A_n(z) + B_n(z)\xi}{C_n(z) + D_n(z)\xi} : |\xi| \leq 1 \right\}.$$

При $|z| = 1$ эта формула для $\Delta_n(z)$ сохраняет смысл, хотя некоторые $f \in \mathcal{E}_n$ могут быть не определены в точке z . Можно считать, что $\Delta_n(z) = \{f(z): f \in A_0 \cap \mathcal{E}_n\}$, где A_0 — диск-алгебра. Круг $\Delta_n(z)$ вырождается в точку тогда и только тогда, когда

$$A_n(z)D_n(z) - B_n(z)C_n(z) = 0.$$

Из (6.10) по индукции получаем

$$(6.12) \quad A_n D_n - B_n C_n = (\gamma_n \beta_n - \alpha_n \delta_n) (A_{n-1} D_{n-1} - B_{n-1} C_{n-1}) = \\ = \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|^2 |\omega_k^{(k-1)}|^2) (1 - |\omega_k^{(k-1)}|^2) (z - z_k) (1 - \bar{z}_k z),$$

где $\omega_k^{(0)} = \omega_k$. Стало быть, $\Delta_n(z)$ сводится к точке только при $z = z_j$, $1 \leq j \leq n$. Простое вычисление дает радиус $\Delta_n(z)$:

$$\rho_n(z) = \frac{|A_n D_n - B_n C_n|}{|C_n|^2 - |D_n|^2}.$$

Лемма 6.2. Если $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$, то при $|z| = 1$ имеем $\Delta_n(z) = \bar{D}$, $\rho_n(z) = 1$ и

$$(6.13) \quad |B_n(z)| = |C_n(z)|, \\ |A_n(z)| = |D_n(z)|, \\ A_n(z)/C_n(z) = \overline{(D_n(z)/B_n(z))} = \lambda_n(z),$$

где $|\lambda_n(z)| < 1$.

Доказательство. Условия (6.13) следуют из того, что $\Delta_n(z) = \bar{D}$ ввиду хорошо известного описания дробно-линейных отображений $\xi \rightarrow (A + B\xi)/(C + D\xi)$ круга D на себя. Равенство $\Delta_n(z) = \bar{D}$ докажем по индукции. Пусть $z = e^{i\theta}$ и $\xi \in \bar{D}$. При $n = 1$ найдется такая постоянная $f_1 \in \mathcal{B}$, что

$$(6.14) \quad \frac{f_1(e^{i\theta}) + c_1}{1 + \bar{c}_1 f_1(e^{i\theta})} = \left(\frac{\xi - w_1}{1 - \bar{w}_1 \xi} \right) / \left(\frac{e^{i\theta} - z_1}{1 - \bar{z}_1 e^{i\theta}} \right).$$

и (6.2) даст нам функцию $f \in \mathcal{F}_1$ с $f(e^{i\theta}) = \zeta$. При $n > 1$ множество

$$\{f_1 \in \mathcal{B}: f_1(z_j) = w_j^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

непусто, потому что непусто $\mathcal{F}_n$. По индукции оно содержит функцию f_1 , удовлетворяющую (6.14). Как и раньше, из (6.2) тогда следует, что $f(e^{i\theta}) = \zeta$. $\square$

Лемма 6.3. $C_n(z)$ не имеет нулей в $\bar{D}$.

Доказательство. Если $C_n(z) = 0$, то, выбирая $\zeta = 0$ в (6.11), мы видим, что и $A_n(z) = 0$. Тогда

$$A_n(z)D_n(z) - C_n(z)B_n(z) = 0,$$

так что ввиду (6.12) $z = z_j$ при некотором $j = 1, 2, \dots, n$. Но, снова по (6.12), определитель $A_n D_n - B_n C_n$ имеет только простые нули и, значит,

$$A'_n(z_j)D_n(z_j) - B_n(z_j)C'_n(z_j) \neq 0.$$

Полагая $\zeta = 0$ в (6.11), получим

$$w_j = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{A_n(z)}{C_n(z)} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{A'_n(z)}{C'_n(z)}.$$

Если $C'_n(z_j) = 0$, то отсюда следует, что и $A'_n(z_j) = 0$, а если $C'_n(z_j) \neq 0$, то $A'_n(z_j)/C'_n(z_j) = w_j$. Значит,

$$A'_n(z_j) = w_j C'_n(z_j).$$

Полагая, с другой стороны, $\zeta = 1$ в (6.11), получим

$$B_n(z_j) = w_j D_n(z_j).$$

Следовательно,

$$A'_n(z_j)D_n(z_j) - B_n(z_j)C'_n(z_j) = 0.$$

Это — противоречие. $\square$

Нам будет удобно перенормировать (6.9). Положим

$$\psi_n(z) = \left(\prod_{k=1}^n \left(-\frac{|z_k|}{\bar{z}_k} \right) (1 - |z_k|^2 |w_k^{(k-1)}|^2) (1 - |w_k^{(k-1)}|^2) (1 - \bar{z}_k z)^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку $\psi_n(z)$ не имеет нулей в $\bar{D}$, то

$$P_n = \frac{A_n}{\psi_n}, \quad Q_n = \frac{B_n}{\psi_n}, \quad R_n = \frac{C_n}{\psi_n}, \quad S_n = \frac{D_n}{\psi_n}$$

— рациональные функции, аналитические в $\bar{D}$. Согласно (6.9), мы получаем новую параметризацию множества $\mathcal{F}_n$:

$$(6.15) \quad f(z) = \frac{P_n(z) + Q_n(z)f_n(z)}{R_n(z) + S_n(z)f_n(z)}, \quad f_n \in \mathcal{B}.$$

Удобство этой нормировки состоит в том, что теперь в силу (6.12) определитель равен

$$P_n(z) S_n(z) - Q_n(z) R_n(z) = \Pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{-\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z},$$

т. е. произведению Бляшке с нулями $\{z_1, \dots, z_n\}$, $\Pi_n(0) > 0$.
Далее

$$\rho_n(z) = \frac{|\Pi_n(z)|}{|R_n(z)|^2 - |S_n(z)|^2},$$

и по лемме 6.2

$$(6.16) \quad |R_n(z)|^2 - |S_n(z)|^2 = 1, \quad |z| = 1.$$

По лемме 6.3 R_n не имеет нулей в $\bar{D}$, и поэтому

$$\frac{1}{|R_n(z)|} \leq 1, \quad |z| \leq 1.$$

Теперь из (6.13) и принципа максимума получаем

$$(6.17) \quad \begin{aligned} |P_n(z)| &\leq |R_n(z)|, \\ |Q_n(z)| &\leq |R_n(z)|, \\ |S_n(z)| &\leq |R_n(z)|, \quad |z| \leq 1. \end{aligned}$$

Теорема 6.4. *Предположим, что $\mathcal{E}_\infty = \bigcap \mathcal{E}_n$ содержит две функции с разными значениями при $z = 0$. Тогда для некоторой последовательности $n_j \rightarrow \infty$ существуют все пределы*

$$P(z) = \lim_j P_{n_j}(z),$$

$$Q(z) = \lim_j Q_{n_j}(z),$$

$$R(z) = \lim_j R_{n_j}(z),$$

$$S(z) = \lim_j S_{n_j}(z).$$

Эти пределы не могут быть все тождественно равны нулю, более того,

$$P(z)S(z) - Q(z)R(z) = \Pi(z)$$

— произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$. Если $f \in \mathcal{B}$, то $f \in \mathcal{E}_\infty$ тогда и только тогда, когда

$$(6.18) \quad f(z) = \frac{P(z) + Q(z)f_\infty(z)}{R(z) + S(z)f_\infty(z)}, \quad |z| < 1,$$

для некоторой функции $f_\infty \in \mathcal{B}$.

Доказательство. Раз $\bigcap \mathcal{E}_n$ содержит две функции с разными значениями при $z = 0$, то $\lim_n \rho_n(0) > 0$ ($\rho_{n+1} < \rho_n$,

так как $\mathcal{E}_{n+1} \subset \mathcal{E}_n$. Поскольку $D_n(0) = 0$, то после нашего выбора констант c_n в (6.6) имеем $|R_n(0)|^2 = |\Pi_n(0)|/\rho_n(0)$ и, значит,

$$(6.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(0)| < \infty.$$

Выберем n_j так, чтобы ограниченная последовательность $\{1/R_{n_j}(z)\}$ сходилась в D . Поскольку $1/R_{n_j}(z)$ нулей в D не имеет, предельная функция или тождественно равна 0, или тоже не имеет нулей. Но в силу (6.19) соответствующий предел отличен от 0 при $z = 0$ и, стало быть, вообще не имеет в D нулей. Следовательно, $R_{n_j}(z)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах из D к аналитической функции $R(z)$, не имеющей в D нулей. По (6.17) мы можем разредить последовательность $\{n_j\}$ так, чтобы существовали все пределы

$$\lim_j P_{n_j}(z) = P(z),$$

$$\lim_j Q_{n_j}(z) = Q(z),$$

$$\lim_j S_{n_j}(z) = S(z).$$

Тогда

$$P(z)S(z) - Q(z)R(z) = \lim_j \Pi_{n_j}(z) = \Pi(z),$$

так что предельные функции не могут все быть тождественно равны нулю. Если $f \in \bigcap \mathcal{E}_n$, то по лемме 6.1 найдутся $f_n \in \mathcal{B}$, для которых

$$f = \frac{P_n + Q_n f_n}{R_n + S_n f_n}.$$

Проредим последовательность $\{n_j\}$ так, чтобы и $f_{n_j}(z) \rightarrow f_\infty(z)$ в D при $j \rightarrow \infty$, $f_\infty \in \mathcal{B}$. Тогда сразу получается (6.18). Обратно, если $f_\infty \in \mathcal{B}$, то функции

$$f^{(n)} = \frac{P_n + Q_n f_\infty}{R_n + S_n f_\infty}$$

лежат в $\mathcal{E}_n$ и пределом функций $f^{(n)}$ является $f \in \mathcal{E}_\infty$. $\square$

Оказывается, что P, Q, R, S не зависят от выбора подпоследовательности $\{n_j\}$, а однозначно определяются исходной интерполяционной задачей (6.1) и выбором постоянных c_n в (6.6). Однако мы не будем использовать этот факт.

Перед тем как обратиться к доказательству Неванлинны присутствия внутренних функций в $\mathcal{E}_\infty$, отметим одно простое следствие формулы (6.18). Поскольку $\mathcal{E}_{n+1} \subset \mathcal{E}_n$, то круги

$\Delta_n(z)$, $|z| < 1$, убывая, стремятся к предельному кругу $\Delta_\infty(z) = \{f(z): f \in \mathcal{E}_\infty\}$. Согласно (6.18),

$$\Delta_\infty(z) = \left\{ \frac{P(z) + Q(z)\xi}{R(z) + S(z)\xi} : |\xi| \leq 1 \right\}.$$

Так как определитель этого отображения равен $\Pi(z)$, то круг $\Delta_\infty(z)$ при $z \neq z_j$ нетривиален. Его радиус равен

$$\rho_\infty(z) = \lim_n \rho_n(z) = \frac{|\Pi(z)|}{|R(z)|^2 - |S(z)|^2}.$$

Возвращаясь к $\Delta_n(z_0)$, $|z_0| < 1$, и его параметризации (6.11), мы видим, что $f \in \mathcal{E}_n$ решает экстремальную задачу $f(z_0) \in \partial\Delta(z_0)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{A_n(z) + B_n(z)e^{i\varphi}}{C_n(z) + D_n(z)e^{i\varphi}} = \frac{P_n(z) + Q_n(z)e^{i\varphi}}{R_n(z) + S_n(z)e^{i\varphi}}$$

с постоянной $\varphi \in \mathbb{R}$. Таким образом, $f(z)$ есть рациональная функция степени не выше n . Дважды (следствие 1.9 этой главы и следствие I.2.4) мы уже видели, что экстремальная функция $f(z)$ — конечное произведение Бляшке. Это вытекает и из рассуждений настоящего раздела, потому что по лемме 6.2 $|f(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Дальнейший анализ полиномов $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ и $D_n(z)$ показывает, что это произведение Бляшке имеет степень n . (См. упражнение 20.)

Предыдущее обсуждение помогает найти в $\mathcal{E}_\infty$ внутренние функции: надо положить $f_\infty = e^{i\varphi}$ в (6.18). Именно так Неванлинна впервые доказал теорему 4.1. Приведенное выше доказательство теоремы 4.4 основано на той же идее: унимодулярная функция $h_0 \in K$ получается максимизацией на K функционала $\operatorname{Re} \int h d\theta/2\pi$.

Мы возвращаемся к теореме 4.1, которую переформулируем следующим образом.

Теорема 6.5. Если $\mathcal{E}_\infty$ содержит две различные функции, а $e^{i\varphi}$ — унимодулярная постоянная, то

$$(6.20) \quad f(z) = \frac{P(z) + Q(z)e^{i\varphi}}{R(z) + S(z)e^{i\varphi}}$$

— внутренняя функция из $\mathcal{E}_\infty$.

Доказательство. По теореме 6.4 $f \in \mathcal{E}_\infty$ и, в частности, $\|f\|_\infty \leq 1$. Предположим, что существует множество $E \subset T$,

$$|E| = \int \chi_E(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} > 0, \text{ на котором}$$

$$(6.21) \quad |f(e^{i\theta})| \leq \alpha < 1.$$

Можно считать, что $P_n \rightarrow P$, $Q_n \rightarrow Q$, $R_n \rightarrow R$ и $S_n \rightarrow S$. Выберем $M > |R(0)|$. Так как $R_n(z)$ не имеет нулей в $\bar{D}$ по лемме 6.3, то

$$\log M > \log |R_n(0)| = \frac{1}{2\pi} \int \log |R_n(e^{i\theta})| d\theta$$

при больших n (скажем, при $n > n_0$). По (6.16) $\log |R_n(e^{i\theta})| > 0$ и, стало быть,

$$|\{\theta: \log |R_n(e^{i\theta})| > 2(\log M)/|E|\}| \leq |E|/2.$$

Таким образом, если

$$E_n = \{\theta \in E: |R_n(e^{i\theta})| \leq M^{2/|E|}\},$$

то $|E_n| \geq |E|/2$, $n > n_0$. По (6.16) и (6.13)

$$\left| \frac{P_n(e^{i\theta})}{R_n(e^{i\theta})} \right|^2 = 1 - \frac{1}{|R_n(e^{i\theta})|^2},$$

и поэтому на E_n

$$(6.22) \quad \left| \frac{P_n(e^{i\theta})}{R_n(e^{i\theta})} \right| \leq (1 - M^{-4/|E|})^{1/2} = \beta < 1.$$

Поскольку $f \in \mathcal{F}_n$, то существует такая функция $f_n \in \mathcal{F}$, что

$$f(z) = \frac{P_n(z) + Q_n(z)f_n(z)}{R_n(z) + S_n(z)f_n(z)}.$$

Рациональные функции P_n , Q_n , R_n , S_n непрерывны в $\bar{D}$ и $|P_n S_n - Q_n R_n| = 1$ на T , поэтому $f_n(z)$ имеет радиальный предел $f_n(e^{i\theta})$ всюду, где его имеет $f(z)$. В частности, на E он существует и

$$f(e^{i\theta}) = \frac{P_n(e^{i\theta}) + Q_n(e^{i\theta})f_n(e^{i\theta})}{R_n(e^{i\theta}) + S_n(e^{i\theta})f_n(e^{i\theta})}$$

По лемме 6.2 отображение

$$\xi \rightarrow \frac{P_n(e^{i\theta}) + Q_n(e^{i\theta})\xi}{R_n(e^{i\theta}) + S_n(e^{i\theta})\xi}$$

есть конформный автоморфизм круга D и потому сохраняет псевдогиперболическое расстояние:

$$|f_n(e^{i\theta})| = \rho(f_n(e^{i\theta}), 0) = \rho(f(e^{i\theta}), P_n(e^{i\theta})/R_n(e^{i\theta})).$$

При $n > n_0$ на E_n формулы (6.21) и (6.22) дают

$$|f_n(e^{i\theta})| \leq \frac{|f(e^{i\theta})| + |P_n(e^{i\theta})/R_n(e^{i\theta})|}{1 + |f(e^{i\theta})| |P_n(e^{i\theta})/R_n(e^{i\theta})|} \leq \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} = \gamma < 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f_n(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int |f_n(e^{i\theta})| d\theta \leq \gamma |E_n| + (1 - |E_n|) \leq \\ &\leq \left\{ \gamma \frac{|E|}{2} + \left(1 - \frac{|E|}{2} \right) \right\} = \eta < 1. \end{aligned}$$

Выберем подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ так, чтобы $f_{n_j}(0) \rightarrow \xi$, $|\xi| \leq \eta < 1$. Тогда

$$f(0) = \lim \frac{P_{n_j}(0) + Q_{n_j}(0) f_{n_j}(0)}{R_{n_j}(0) + S_{n_j}(0) f_{n_j}(0)} = \frac{P(0) + Q(0) \xi}{R(0) + S(0) \xi}.$$

Поскольку $P(0)S(0) - Q(0)R(0) \neq 0$, то по (6.20) отсюда вытекает, что $\xi = e^{i\varphi}$. Это — противоречие. $\square$

Вот интересная и, по-видимому, нерешенная задача: всегда ли содержится в $\mathcal{E}_\infty$ какое-либо произведение Бляшке (а если нет, то при каких условиях содержится)?

Замечания

Первое систематическое исследование двойственных экстремальных задач дано в работе Макинтайра и Рогозинского [1950]. Методы функционального анализа были введены Хавинсоном [1949, 1951] и Рогозинским и Шапиро [1953]. Книга Дьюрена [1970] содержит несколько иную трактовку и ссылки на предшествующую литературу. См. также Голузин [1966] и Ландау [1916].

Раздел 2 заимствован из статьи Карлесона и Якобса [1972]. Кахан [1974] обсуждает различные смежные вопросы. Интересная открытая проблема состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, при которых функция из L^∞ имеет единственное наилучшее приближение в H^∞ . Частичный ответ дается упр. 17.

Основные ссылки в разд. 3 — это Сегё [1920] и Хелсон и Сегё [1960]. В упражнениях 8 и 14 описаны некоторые другие результаты, подобные теореме Хелсона — Сегё.

Большинство материала в разд. 4 и 5 восходит к Адамяну, Арову и Крейну [1968], но доказательства в тексте сильно отличаются от их спектрального подхода. В [1971] Адамян, Аров и Крейн распространили свои результаты на матрично-значный случай. Теоремы 5.1 и 5.2 взяты у де Леу и Рудина [1958].

Раздел 6 возник из статьи Неванлинны [1929], которая включает еще много других классических результатов, и все они выводятся непосредственно из леммы Шварца. Эта фундаментальная статья долгое время оставалась незамеченной. Шур [1917]

дал очень похожее изложение проблемы коэффициентов, которое кратко описано в упр. 21¹⁾.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\inf_{g \in H^p} \|f - g\|_p = \sup_{\substack{G \in H^q \\ \|G\|_q = 1}} \left| \int f G dx \right|.$$

2. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и входит в H^1 в некотором кольце $\{R < |z| < 1\}$ (т. е. $|f(z)|$ допускает там гармоническую мажоранту). Тогда почти всюду существует $f(e^{i\theta})$. Докажите, что $f(e^{i\theta}) \geq 0$ почти всюду в том и только том случае, когда $f(z)$ рациональна и

$$f(z) = c \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)(1 - \bar{\alpha}_j z) / \prod_{j=1}^n (z - \beta_j)(1 - \bar{\beta}_j z), \quad c > 0, |\alpha_j| \leq 1, \\ |\beta_j| \leq 1.$$

3. При данных комплексных числах $c_0, c_1, \dots, c_N$ рассмотрим экстремальную задачу

$$M = \sup_{\substack{f \in H^\infty \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \left| \sum_{j=0}^N c_j a_j \right|, \quad f(z) = \sum a_j z^j.$$

(а) Двойственной экстремальной задачей является

$$M = \inf_{g \in H_0^1} \|k - g\|_1, \quad k(z) = \sum_{j=0}^N c_j z^{-j}.$$

Она равносильна задаче на минимум

$$M = \inf \{ \|h\|_1 : h \in H^1, h = c_N + c_{N-1}z + \dots + c_0 z^N + \dots \}.$$

¹⁾ Теория двойственности в экстремальных задачах получила дальнейшее существенное развитие в работах Хавинсона [1955*], [1963*]; см. также Хавинсон [1965*], [1981*], Шапиро [1971*]. В работах Адамяна, Арова и Крейна [1968*] и Пеллера и Хрущева [1982*] получен ряд результатов о «гладкости» функции, осуществляющей наилучшее равномерное приближение в смысле разд. 2. Теорема Хелсона — Сегё (как, впрочем, и целый ряд других разделов книги) имеет важные приложения к теории вероятностей; в связи с ними см. Дим, Маккин [1976], Ибрагимов, Розанов [1970*], Пеллер, Хрущев [1982*]. Новые интересные связи критерия Хелсона — Сегё с теорией базисов из экспонент см. в книге Никольского [1980*] и в статье Никольского, Павлова и Хрущева [1981*]. В связи с разд. 5 и 6 см. Крейн, Нудельман [1973*], Ахизер [1961*], Уолш [1960], Никольский [1974*]. — *Прим. ред.*

(b) Как исходная, так и двойственная экстремальная задачи имеют единственные экстремальные функции f_0 и g_0 . Более того,

$$f_0(z)(k(z) - g_0(z)) = |k(z) - g_0(z)|, \quad |z| = 1,$$

так что

$$f_0(z)(k(z) - g_0(z)) = cz^q \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)(1 - \bar{\alpha}_j z)/z^N,$$

где $n + q = N$, $0 < |\alpha_j| \leq 1$, $c > 0$. Нумеруя $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в порядке возрастания модулей, получим такой номер s , $0 \leq s \leq n$, что $|\alpha_j| < 1$ при $j \leq s$ и

$$f_0 = \gamma z^q \prod_{j=1}^s \left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z} \right),$$

$$k(z) - g_0(z) = c \bar{\gamma} \prod_{i=1}^n (1 - \bar{\alpha}_i z)^2 \prod_{s+1}^n \left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z} \right) / z^N, \quad |\gamma| = 1.$$

(c) При достаточно малых $|z|$

$$(c_N + c_{N-1}z + \dots + c_0 z^N)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j z^j.$$

Положим

$$P_N(z) = \sum_{j=0}^N \lambda_j z^j.$$

Если $P_N(z)$ не имеет нулей в D , то найдутся такие α_j , $j = 1, \dots, N$, что $0 < |\alpha_j| \leq 1$ и

$$P_N(z) = \lambda_0 \prod_{j=1}^n (1 - \bar{\alpha}_j z).$$

Тогда

$$z^{-N} P_N^2 = c_N z^{-N} \prod_{j=1}^n (1 - \bar{\alpha}_j z)^2 = k - g, \quad g \in H^1.$$

Полагая

$$f_0(z) = \frac{\bar{c}_N}{|c_N|} z^{N-n} \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}.$$

мы получим $f_0 P_N^2 / z^N \geq 0$ при $|z| = 1$. Следовательно, функция f_0 экстремальна, $k(z) - g_0(z) = P_N^2(z) / z^N$ и

$$M = \|P_N^2\|_1 = \sum_{j=0}^N |\lambda_j|^2.$$

(d) Ландау [1913, 1916] другим способом определил значение M в частном случае $c_j = 1$. Здесь $P_N = \sum_0^N \lambda_j z^j$, где

$$\lambda_j = (-1)^j \binom{-1/2}{j} = \frac{(2j)!}{4^j (j!)^2},$$

и по формуле Валлиса

$$M \sim \log N/\pi, \quad N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, M растет с той же скоростью, что и константы Лебега частичных сумм ряда Фурье $\|D_N\|_1$, где $D_N = \sum_{-N}^N e^{ik\theta}$ — ядро Дирихле.

Двойственная задача из части (a) изучалась Ф. Риссом [1920] вариационными методами.

4. Назовем функцию $f \in C(T)$ *плохо приближаемой*, если ее наилучшее приближение из H^∞ есть 0. Покажите, что f плохо приближаема тогда и только тогда, когда $|f(e^{i\theta})|$ — положительная постоянная, а $f(e^{i\theta})$ имеет отрицательное число вращения (см. Пореда [1972] или Гамелин, Гарнетт, Рубел и Шилдс [1976]).

5. Существует гипотеза, что наилучшее приближение в H^∞ функции f из $C(T)$ будет непрерывным, если непрерывна сопряженная функция $\bar{f}$. Однако обратное утверждение неверно; постройте с помощью упр. 4 плохо приближаемую функцию f , у которой $\bar{f}$ не является непрерывной (Сарасон, не опубликовано).

6. Пусть $f \in C(T)$, $f \notin H^\infty$, $g \in H^\infty$ — наилучшее приближение функции f и $F \in H_0^1$ — двойственная экстремальная функция, так что почти всюду

$$(f - g)F = \|f - g\|_\infty |F|.$$

(a) Можно выбрать F так, чтобы $F(z)/z$ была внешней.

(b) Если $F_1 \in H_0^1$ — другая двойственная экстремальная функция, то функция F/F_1 рациональна.

(c) F единственна тогда и только тогда, когда $z/F \in H^1$. В этом случае $z/F \in H^p$ при всех $p < \infty$.

(d) Вообще, если $f \in L^\infty \setminus H^\infty$, F существует и $z/F \in H^1$, то F единственна. (См. де Леу и Рудин [1958], Карлесон и Якобс [1972].)

7. Если $f \in H^\infty$, то

$$\text{dist}(f, A_0) \leq 2 \text{dist}(f, C(T)),$$

где $A_0 = H^\infty \cap C(T)$ — диск-алгебра. Константа 2 точна. (См. Дэви, Гамелин и Гарнетт [1973]).

*8. Пусть $d\mu = w d\theta/2\pi + d\mu_s$ — положительная мера на окружности. Тогда

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} \int |1 - \operatorname{Re} f|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{-1},$$

где $\mathcal{F}$ — множество всех тригонометрических полиномов $\sum_{n \geq 0} a_n e^{in\theta}$ (см. Гренандер и Розенблатт [1957]). Этот результат принадлежит Колмогорову [1941].

9. Найдите в гильбертовом пространстве два замкнутых подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$, но с

$$1 = \sup \{ |\langle f, g \rangle| : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}, \|f\| = \|g\| = 1 \}.$$

10. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — подпространства в $L^2(\mu)$, то $\rho = 1$ тогда и только тогда, когда

$$0 = \inf \left\{ \int |f - g|^2 d\mu : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}, \|f\| \geq 1, \|g\| \geq 1 \right\}.$$

Значит, свойство $\rho = 1$ сохраняется при замене $d\mu$ на $w d\mu$, где вес w ограничен и отделен от нуля.

11. Если вес w удовлетворяет условию Хелсона — Сегё (3.3), то при некотором $\varepsilon > 0$ имеем $w \in L^{1+\varepsilon}$ и $w^{-1} \in L^{1+\varepsilon}$.

12. Предположим, что функция $\log w$ непрерывна, за исключением конечного числа скачков. Тогда вес w удовлетворяет (3.3) в том и только том случае, когда каждый скачок меньше π (Хелсон и Сегё [1960]).

13. Для вещественного α постоянная K_α , такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{p}(\theta)| |\theta|^\alpha d\theta \leq K_\alpha \int_{-\pi}^{\pi} |p(\theta)|^2 |\theta|^\alpha d\theta$$

для всех тригонометрических полиномов, существует тогда и только тогда, когда $-1 < \alpha < 1$ (Харди и Литтлвуд [1936]).

**14. Пусть $\mathcal{F}_n$ — множество всех тригонометрических полиномов вида $\sum_{k \geq n} a_k e^{ik\theta}$, а $\mathcal{G}_n = \overline{\mathcal{F}_n}$ — множество тригонометрических полиномов вида $\sum_{k \geq n} b_k e^{-ik\theta}$. Для положительной конеч-

ной меры μ на T положим $\rho_n = \sup \left| \int f \bar{g} d\mu \right|$, где $f \in \mathcal{F}_n$, $g \in \mathcal{G}_n$, $\int |f|^2 d\mu \leq 1$, $\int |g|^2 d\mu \leq 1$. Пусть $d\mu = w d\theta/2\pi + d\mu_s$, где μ_s сингулярна.

(а) Если $d\mu_s \neq 0$ или $\log w \notin L^1$, то $\rho_n \equiv 1$.

(б) Пусть $d\mu_s = 0$ и $\varphi = \log w \in L^1$. Обозначим через W множество всех таких весов w , что $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $w \in W$ в том и только том случае, когда $e^{-i\varphi} \in H^\infty + C$.

(с) $H^\infty + C$ — замкнутая подалгебра алгебры L^∞ .

(d) Пусть W_0 — множество всех таких положительных весов ω , что для любого $\varepsilon > 0$

$$\varphi = \log \omega = r + \bar{s} + t,$$

где $\|r\|_\infty < \varepsilon$, $\|\bar{s}\|_\infty < \varepsilon$ и $t \in C$. Тогда $W_0 \subset W$, и $\omega \in W$ в том и только том случае, когда $\omega = |p|^2 \omega_0$, где $\omega_0 \in W_0$, а p — тригонометрический полином. (Множество $\log W_0$ совпадает с пространством VMO, изучаемым в гл. VI.) (См. Хелсон и Сарасон [1967]).

15. Пусть u — унимодулярная функция из L^∞ и

$$\mathcal{P}_u = \{G \in H^1: \|G\|_1 = 1, G/|G| = u\}.$$

(a) Существуют функции u с $\mathcal{P}_u = \{\emptyset\}$.

(b) Если $F \in \mathcal{P}_u$ и $F^{-1} \in H^1$, то $\mathcal{P}_u = \{F\}$.

(c) Если $\mathcal{P}_u = \{F\}$, $|\alpha| = 1$, то $(z - \alpha)^{-2} F(z) \notin H^1$. (См. де Леу и Рудин [1958]).

16. Пусть функция $h \in L^\infty$ унимодулярна.

(a) Если $\text{dist}(h, H^\infty) < 1$, то $h = F/|F|$, $F \in H^1$, и внешний сомножитель F обратим в H^1 . (См. лемму 5.4.)

(b) Если $\text{dist}(h, H^\infty) < 1$, но $\text{dist}(h, H^\infty) = 1$, то $h = \bar{F}/|F|$, $F \in H^1$. (См. случай 1 в доказательстве теоремы 4.4.) Отсюда следует, что $\text{dist}(\bar{h}, H^\infty) < 1$.

17. (a) Пусть $h \in L^\infty$. Если $h + H^\infty$ является крайней точкой единичного шара пространства L^∞/H^∞ , то найдется функция $g \in H^\infty$, для которой $|h + g| = 1$ почти всюду.

(b) Пусть $|h| = 1$ почти всюду. Класс $h + H^\infty$ является крайней точкой единичного шара в L^∞/H^∞ тогда и только тогда, когда $\|h + g\|_\infty > 1$ при всех $g \in H^\infty$, $g \neq 0$. Таким образом, крайние точки шара L^∞/H^∞ — это факторклассы, содержащие в точности одну унимодулярную функцию (см. Кусис [1971]).

(c) Пусть $|h| = 1$ почти всюду. В таком случае $\|h + g\|_\infty > 1$ при всех $g \in H^\infty$, $g \neq 0$, тогда и только тогда, когда $h \neq F/|F|$, $F \in H^1$. (См. леммы 5.4 и 5.5.) Это — небольшое обобщение упр. 5. Если $|h| = 1$, то h плохо приближаема ($\|h - g\|_\infty > 1$, $g \in H^\infty$, $g \neq 0$) тогда и только тогда, когда она не является аргументом функции из H^1 . Пример 4.2 показывает, что существуют плохо приближаемые функции с непостоянным модулем.

(d) L^∞/H^∞ является сопряженным пространством. Значит, единичный шар в L^∞/H^∞ есть слабо замкнутая выпуклая оболочка множества факторклассов $\{h + H^\infty: |h| = 1, h \text{ плохо приближаемо}\}$.

18. Пусть $F \in H^1$, $\|F\|_1 = 1$. Каждая функция $g \in H^\infty$ с $\|F/|F| - g\|_\infty \leq 1$ имеет вид (5.10) тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_{F/|F|} = \{F\}$.

19. Функция $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty = 1$, является крайней точкой единичного шара в H^∞ тогда и только тогда, когда

$$\int \log(1 - |f(e^{i\theta})|) d\theta = -\infty$$

(де Леу и Рудин [1958]).

20. В обозначениях разд. 6 при $c_k = \bar{z}_k \omega_k^{(k-1)}$ полином $A_n(z)$ имеет степень не выше $n-1$, а $B_n(z)$ — степень n . Полиномы $A_n(z) + B_n(z)e^{i\varphi}$ и $C_n(z) + D_n(z)e^{i\varphi}$ не имеют общих нулей, так что

$$f(z) = \frac{A_n(z) + B_n(z)e^{i\varphi}}{C_n(z) + D_n(z)e^{i\varphi}}$$

является произведением Бляшке степени n .

*21. Выберем комплексные числа $c_0, c_1, \dots$ и положим

$$\mathcal{E}_n = \{f \in \mathcal{B}: f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots\}.$$

Пусть $\gamma_0 = c_0$ и $|\gamma_0| \leq 1$.

(а) При $|\gamma_0| = 1$ в $\mathcal{E}_0$ содержится только постоянная γ_0 . Пусть $|\gamma_0| < 1$; запишем $f \in \mathcal{E}_0$ в виде

$$(E.1) \quad f = \frac{zf_1 + \gamma_0}{1 + \bar{\gamma}_0 z f_1}, \quad f_1 \in \mathcal{B}.$$

Таким образом, $\mathcal{E}_0$ находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathcal{B}$; $f \in \mathcal{E}_1$ тогда и только тогда, когда $f_1(0) = \gamma_1 = c_1/(1 - |\gamma_0|^2)$. В частности, $\mathcal{E}_1 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $|\gamma_1| \leq 1$, и $\mathcal{E}_1$ содержит более одной функции при $|\gamma_1| < 1$ (и только в этом случае).

(б) Продолжая по индукции, мы получим $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$. Если $|\gamma_0| < 1, |\gamma_1| < 1, \dots, |\gamma_n| < 1$, то $\mathcal{E}_n$ находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathcal{B}$ по формулам $f_0 = f$,

$$f_{k-1} = \frac{zf_k + \gamma_{k-1}}{1 + \bar{\gamma}_{k-1} z f_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad f_k \in \mathcal{B}.$$

Если $|\gamma_k| = 1$, но $|\gamma_j| < 1, j < k$, то $\mathcal{E}_k$ состоит из одной функции — произведения Бляшке степени k .

(с) Если $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$, то значения коэффициента c_{n+1} функции из $\mathcal{E}_n$ заполняют круг с радиусом

$$(E.2) \quad \omega_n = (1 - |\gamma_0|) \dots (1 - |\gamma_n|).$$

(Используйте индукцию и (E.1).)

(д) Пусть $\bigcap \mathcal{E}_n \neq \emptyset$. Конечно, тогда $\bigcap \mathcal{E}_n = \{f\}$, $f = \sum_0^\infty c_n z^n$. Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \exp \frac{1}{2\pi} \int \log(1 - |f|^2) d\theta.$$

(Указание. По (Е.1) и (Е.2) при $|z|=1$

$$1 - |f|^2 = \frac{(1 - |\gamma_0|^2)(1 - |f_1|^2)}{|1 + \bar{\gamma}_0 z f_1|^2} = \frac{\omega_n (1 - |f_{n+1}|^2)}{\prod_{j=0}^n |1 + \bar{\gamma}_j z f_{j+1}|^2}.$$

Поскольку знаменатель не имеет нулей в D , то

$$\exp \frac{1}{2\pi} \int \log (1 - |f|^2) d\theta = \omega_n + \exp \frac{1}{2\pi} \int \log (1 - |f_{n+1}|^2) d\theta \leq \omega_n.$$

Для получения обратного неравенства используйте теорему Сегё. При $\varepsilon > 0$ найдется $p(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_n z^n$, для которого

$$\int |p|^2 (1 - |f|^2) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \varepsilon + \exp \frac{1}{2\pi} \int \log (1 - |f|^2) d\theta.$$

Пусть $f^* \in \mathcal{E}_n$ получается при $f_{n+1} \equiv 0$. По теореме Сегё

$$\omega_n = \exp \frac{1}{2\pi} \int \log (1 - |f^*|^2) d\theta \leq \int |p|^2 (1 - |f^*|^2) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Но, согласно равенству Парсеваля,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |p|^2 (1 - |f^*|^2) \frac{d\theta}{2\pi} = \int |p|^2 (1 - |f|^2) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(е) Пусть

$$A_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_0 \end{bmatrix}$$

и I_n — единичная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$. Тогда $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ в том и только том случае, когда матрица $I_n - A_n^* A_n$ неотрицательно определена. Если $I_n - A_n^* A_n$ положительно определена, то $\mathcal{E}_n$ бесконечно. Точнее,

$$\det(I_n - A_n^* A_n) = \omega_0 \omega_1 \dots \omega_n.$$

(См. Шур [1917]. Часть (d) принадлежит Бойду [1979]).

НЕМНОГО РАВНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этой главе развиваются основы теории равномерных алгебр, которые нам понадобятся при изучении H^∞ . Наше изложение кратко. Полную картину общей теории читатель сможет найти в книгах Браудера [1969], Гамелина [1969] и Стаута [1971].

Однако мы подробно занимаемся двумя темами, специфическими для H^∞ . В разделе 2 мы доказываем теорему Маршалла о том, что произведения Бляшке порождают H^∞ . В разд. 5 три теоремы о пространстве, предсопряженном к H^∞ , доказаны с помощью представления линейных функционалов как мер на шиловской границе алгебры H^∞ .

1. Пространства максимальных идеалов

Банахова алгебра — это комплексная алгебра A , которая одновременно является банаховым пространством, причем

$$(1.1) \quad \|fg\| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in A.$$

Мы всегда предполагаем A коммутативной ($fg = gf$, $f, g \in A$) и содержащей единицу $1 \in A$ ($1 \cdot f = f$, $f \in A$). Соответствие $\lambda \rightarrow \lambda \cdot 1$ отождествляет поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ с подалгеброй в A . Мы говорим, что элемент $f \in A$ *обратим*, если $fg = 1$ при некотором $g \in A$. Этот единственный обратный элемент g обозначается через f^{-1} . Множество всех обратимых элементов алгебры A обозначается через A^{-1} :

$$A^{-1} = \{f \in A: f^{-1} \text{ существует}\}.$$

Комплексным гомоморфизмом, или *мультипликативным линейным функционалом*, называется ненулевой гомоморфизм $m: A \rightarrow \mathbb{C}$ алгебры A в поле комплексных чисел. Очевидно, $m(1) = 1$.

Теорема 1.1. *Каждый комплексный гомоморфизм алгебры A является непрерывным линейным функционалом с нормой, не превосходящей единицы:*

$$\|m\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |m(f)| \leq 1.$$

Доказательство. По определению m линейен и нужно только доказать, что $\|m\| \leq 1$. Если функционал не ограничен

или $\|m\| > 1$, то найдется такой элемент $f \in A$, что $\|f\| < 1$, но $m(f) = 1$. Согласно (1.1), ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n$$

сходится по норме. Для его суммы выполняется равенство

$$(1.2) \quad (1 - f) \sum_{n=0}^{\infty} f^n = 1,$$

так что $1 - f \in A^{-1}$. Но тогда

$$1 = m(f) = m((1 - f)^{-1}) (m(1) - m(f)) = 0$$

приводит к противоречию. $\square$

Теорема 1.2. *Предположим, что M — собственный максимальный идеал в A . Тогда M является ядром некоторого комплексного гомоморфизма $m: A \rightarrow \mathbb{C}$.*

Доказательство. Оно включает два шага. Сначала мы покажем, что идеал M замкнут. Его замыкание $\bar{M}$ — тоже идеал, причем $M \subset \bar{M}$. Но M — максимальный идеал, поэтому либо он замкнут, либо $\bar{M} = A$. Однако если $g \in M$, то $g \notin A^{-1}$ и (1.2) в применении к $f = 1 - g$ показывает, что $\|1 - g\| \geq 1$. Значит, $1 \notin \bar{M}$ и M замкнут.

На втором шаге покажем, что факторалгебра $B = A/M$ равна $B = \mathbb{C} \cdot 1$, где $1 = 1 + M$ — единица в B . Тогда отображение факторизации $A \rightarrow A/M$ определяет комплексный гомоморфизм с ядром M . Поскольку M — максимальный идеал, то $B = A/M$ — поле, а поскольку M замкнут, B полно по факторнорме

$$\|f + M\| = \inf_{g \in M} \|f + g\|$$

и удовлетворяет (1.1).

Предположим, что найдется $f \in B \setminus \mathbb{C} \cdot 1$. Тогда $f - \lambda \in B^{-1}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, потому что B — поле. В круге $\{|\lambda - \lambda_0| < < 1/\|(f - \lambda_0)^{-1}\|\}$ ряд

$$(1.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n ((f - \lambda_0)^{-1})^{n+1}$$

сходится по норме к $(f - \lambda)^{-1}$ в силу тождества

$$\frac{1}{f - \lambda} = \frac{1}{f - \lambda_0} \frac{1}{[1 - (\lambda - \lambda_0)/(f - \lambda_0)]}.$$

Ясно, что $f^{-1} \neq 0$, и по теореме Хана — Бахаха найдется такой линейный функционал L на B , что $\|L\| = 1$ и

$$(1.4) \quad L(f^{-1}) \neq 0.$$

Но ряд (1.3) сходится по норме, и мы имеем

$$F(\lambda) = L((f - \lambda)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} L(((f - \lambda_0)^{-1})^{n+1})(\lambda - \lambda_0)^n$$

при $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|(f - \lambda_0)^{-1}\|$. Так как λ_0 произвольно, функция $F(\lambda)$ оказывается целой функцией. Однако при больших $|\lambda|$, согласно (1.2),

$$\|(f - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\|^n}{|\lambda|^n}.$$

Следовательно, $|F(\lambda)| = |L((f - \lambda)^{-1})| \leq C|\lambda|^{-1}$ и $F \equiv 0$ по теореме Лиувилля. Значит, $L(f^{-1}) = F(0) = 0$ в противоречие с (1.4). $\square$

Множество $\mathfrak{M}_A$ всех комплексных гомоморфизмов алгебры A называется ее *спектром* или *пространством максимальных идеалов*. По теореме 1.1 $\mathfrak{M}_A$ содержится в единичном шаре сопряженного банахова пространства A^* . Снабдим $\mathfrak{M}_A$ слабой топологией над A , в которой любая базисная окрестность V точки $m_0 \in \mathfrak{M}_A$ определяется числом $\varepsilon > 0$ и элементами $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$:

$$V = \{m \in \mathfrak{M}_A : |m(f_j) - m_0(f_j)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}.$$

Эта топология на $\mathfrak{M}_A$ называется *топологией Гельфанда*. В топологии Гельфанда $\mathfrak{M}_A$ становится слабо замкнутым подмножеством единичного шара A^* , так как

$$\mathfrak{M}_A = \{m \in A^* : \|m\| \leq 1, m(fg) = m(f)m(g), f, g \in A\}.$$

По теореме Банаха — Алаоглу, которая утверждает, что единичный шар A^* слабо компактен, $\mathfrak{M}_A$ — компактное хаусдорфово пространство. Полагая

$$\hat{f}(m) = m(f), \quad f \in A, m \in \mathfrak{M}_A,$$

мы получаем гомоморфизм $f \rightarrow \hat{f}$ алгебры A в $C(\mathfrak{M}_A)$, алгебру всех комплексных непрерывных функций на $\mathfrak{M}_A$. Этот гомоморфизм называется *преобразованием Гельфанда*. По теореме 1.1 преобразование Гельфанда не увеличивает норму:

$$\|\hat{f}\| = \sup_{m \in \mathfrak{M}_A} |\hat{f}(m)| \leq \|f\|.$$

По теореме 1.2 $f \in A^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ нигде не обращается в нуль. В самом деле, если $f \notin A^{-1}$, то по лемме Цорна идеал $\{fg : g \in A\}$ содержится в некотором максимальном идеале.

Банахова алгебра A называется *равномерной*, если преобразование Гельфанда является изометрией, т. е. $\|\hat{f}\| = \|f\|$, $f \in A$.

Теорема 1.3. Преобразование Гельфанда является изометрией тогда и только тогда, когда

$$(1.5) \quad \|f^2\| = \|f\|^2, \quad f \in A.$$

Доказательство. Поскольку $\|f\|$ — это точная верхняя грань, то $\|f^2\| = \|f\|^2$, и (1.5) справедливо для любой равномерной алгебры. Предположим теперь, что (1.5) справедливо. По теореме 1.1 $\|f\| \leq \|f\|$. Покажем, что для любого $f \in A$ с $\|f\| = 1$ и $\varepsilon > 0$ будет $\|f\| \leq 1 + \varepsilon$. По теореме 1.2 $f - \lambda \in A^{-1}$ при $|\lambda| > 1 = \|f\|$ и, согласно (1.3), A -значная функция $(f - \lambda)^{-1}$ аналитична при $|\lambda| > 1$. Это значит, что скалярная функция $F(\lambda) = L((f - \lambda)^{-1})$ аналитична при $|\lambda| > 1$ для любого $L \in A^*$. Ввиду компактности

$$\sup_{|\lambda| = 1 + \varepsilon} \|(f - \lambda)^{-1}\| = K < \infty.$$

Согласно (1.2),

$$F(\lambda) = L\left(\frac{-1}{\lambda} \left(1 - \frac{f}{\lambda}\right)^{-1}\right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(f^n)}{\lambda^{n+1}}, \quad |\lambda| > \|f\|.$$

При $\|L\| = 1$ по теореме Коши

$$|L(f^n)| = \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = 1 + \varepsilon} F(\lambda) \lambda^n d\lambda \right| \leq (1 + \varepsilon)^{n+1} K.$$

Следовательно, по теореме Хана — Банаха

$$\|f^n\| = \sup_{\|L\|=1} |L(f^n)| \leq (1 + \varepsilon)^{n+1} K.$$

Полагая $n = 2^k$, заключаем из (1.5), что

$$\|f\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (K(1 + \varepsilon)^{2^k + 1})^{1/2^k} = 1 + \varepsilon. \quad \square$$

Если A — равномерная алгебра, то ее образ $\hat{A}$ при преобразовании Гельфанда является замкнутой подалгеброй в $C(\mathfrak{M}_1)$, изометрически изоморфной A . В таком случае мы отождествляем f с $\hat{f}$ и пишем

$$f(m) = \hat{f}(m) = m(f), \quad f \in A, \quad m \in \mathfrak{M}_A.$$

Таким образом, мы рассматриваем A как равномерно замкнутую алгебру непрерывных функций на $\mathfrak{M}_A$. Отметим, что A разделяет точки $\mathfrak{M}_A$ и содержит функции, постоянные на $\mathfrak{M}_A$.

Пример 1. Предположим, что A — произвольная алгебра непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Y . Если A наделена равномерной нормой $\|f\| = \sup_y |f(y)|$ и полна, то A — равномерная алгебра. Если A

содержит постоянные и разделяет точки множества Y , то Y гомотопически эквивалентно замкнутому подмножеству пространства $\mathfrak{M}_A$ и мы говорим, что A — *равномерная алгебра на Y* . Это основной пример, так как любая равномерная алгебра A является равномерной алгеброй на своем спектре $Y = \mathfrak{M}_A$. Если $A = C(Y)$, то $\mathfrak{M}_A = Y$ (см. упр. 5).

Пример 2. Пусть l^∞ — пространство всех ограниченных комплексных последовательностей. С нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$ и поточечным умножением $(xy)_n = x_n y_n$ оно становится равномерной алгеброй в силу теоремы 1.3. Пространство максимальных идеалов алгебры l^∞ обозначается через $\beta\mathbb{N}$ и называется *компактификацией Стоуна — Чеха* натурального ряда $\mathbb{N}$.

Преобразование Гельфанда алгебры l^∞ совпадает с $C(\beta\mathbb{N})$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для вещественного $x \in l^\infty$ (т. е. такого, что $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) $\hat{x}(m)$ — вещественная функция на $\mathfrak{M}_{l^\infty} = \beta\mathbb{N}$, так как $(x - \lambda)^{-1} \in l^\infty$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$. Теперь равенство $l^\infty = C(\beta\mathbb{N})$ следует из теоремы Стоуна — Вейерштрасса. Поскольку функционал $m_n(x) = x_n$ мультипликативен на l^∞ , то $\mathbb{N}$ отождествляется с подмножеством множества $\beta\mathbb{N}$, и топология Гельфанда определена так, что $\mathbb{N}$ гомеоморфно своему образу в $\beta\mathbb{N}$. Далее, $\mathbb{N}$ плотно в $\beta\mathbb{N}$, потому что любая функция из $C(\beta\mathbb{N}) = l^\infty$ однозначно определяется своим поведением на $\mathbb{N}$.

Возможно и функториальное описание компактификации Стоуна — Чеха $\beta\mathbb{N}$.

Теорема 1.4. Пусть Y — компактное хаусдорфово пространство и $\tau: \mathbb{N} \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда τ имеет единственное непрерывное продолжение $\tilde{\tau}: \beta\mathbb{N} \rightarrow Y$.

Если $\tau(\mathbb{N})$ плотно в Y и образы непересекающихся подмножеств множества $\mathbb{N}$ имеют в Y непересекающиеся замыкания, то $\tilde{\tau}$ — гомеоморфизм $\beta\mathbb{N}$ на Y .

Доказательство. Отображение $T: C(Y) \rightarrow l^\infty$, определенное формулой $Tf(n) = f \circ \tau(n)$, является гомоморфизмом $C(Y)$ в l^∞ . Поскольку T непрерывно, сопряженное отображение $T^*: (l^\infty)^* \rightarrow C(Y)^*$ тоже непрерывно относительно слабых топологий. Далее, $T(fg) = T(f)T(g)$, и поэтому для любого мультипликативного линейного функционала $m \in \beta\mathbb{N} \subset (l^\infty)^*$ функционал $T^*(m)$ на $C(Y)$ также мультипликативен, и, согласно упр. 5, $T^*(m) \in Y = \mathfrak{M}_{C(Y)}$. Сужение T^* на $\beta\mathbb{N}$ даст нам отображение $\tilde{\tau}(m) = T^*(m): \beta\mathbb{N} \rightarrow Y$, и $\tilde{\tau}(n) = \tau(n)$, $n \in \mathbb{N}$, по определению отображения T . Отображение $\tilde{\tau}$ непрерывно, так как $\beta\mathbb{N}$ наделено слабой топологией пространства $(l^\infty)^*$, а $Y = \mathfrak{M}_{C(Y)}$ — слабой топологией пространства $C(Y)^*$. Наконец, поскольку $\mathbb{N}$ плотно в $\beta\mathbb{N}$, то продолжение $\tilde{\tau}$ определено однозначно.

Пусть теперь для любых двух множеств $S_1, S_2 \subset \mathbb{N}$ если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то $\tau(S_1) \cap \tau(S_2) = \emptyset$. Тогда найдется функция $f \in C(Y)$, для которой $f = 1$ на $\tau(S_1)$ и $f = 0$ на $\tau(S_2)$. Можно считать, что $S_2 = \mathbb{N} \setminus S_1$, так что $Tf = \chi_{S_1}$. Поскольку линейные комбинации характеристических функций плотны в l^∞ , то образ T плотен в l^∞ . Если, кроме того, $\tau(\mathbb{N})$ плотно в Y , то $\|Tf\| = \|f\|$, $f \in C(Y)$ и отображение T является изометрией, а его образ замкнут по норме пространства l^∞ . Значит, образ T замкнут и плотен в l^∞ одновременно, т. е. T отображает $C(Y)$ на l^∞ . Но $\|Tf\| = \|f\|$, и T оказывается изоморфизмом банаховых алгебр. Поэтому T^* определяет гомеоморфизм $\beta\mathbb{N}$ на Y . $\square$

Теорема 1.4 определяет пространство $\beta\mathbb{N}$ с точностью до гомеоморфизма, потому что если Z — другое компактное хаусдорфово пространство, содержащее плотную последовательность $\{z_n\}$, гомеоморфную $\mathbb{N}$ и такую, что теорема 1.4 остается в силе с заменой $\beta\mathbb{N}$ на Z , то соответствие $n \leftrightarrow z_n$ продолжается до гомеоморфизма между $\beta\mathbb{N}$ и Z .

Пространство $\beta\mathbb{N}$ чрезвычайно велико. Его можно отобразить на любое сепарабельное компактное хаусдорфово пространство. Ни одну точку из $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ нельзя описать явно.

Пример 3. Пространство L^∞ всех существенно ограниченных измеримых функций на единичной окружности с поточечным умножением и нормой

$$\|f\| = \inf \{ \alpha : |f| \leq \alpha \text{ почти всюду} \}$$

является равномерной алгеброй.

Мы закрепим за пространством максимальных идеалов алгебры L^∞ постоянное обозначение X , потому что это пространство время от времени будет появляться дальше. Посредством преобразования Гельфанда алгебра L^∞ оказывается изоморфной алгебре всех непрерывных комплексных функций $C(X)$. Это доказывается так же, как для l^∞ . Если f лежит в L^∞ и вещественна, то $(f - \lambda)^{-1} \in L^\infty$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$, f вещественна на X и $L^\infty = C(X)$ по теореме Стоуна — Вейерштрасса.

Как и $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, пространство X велико и не поддается описанию. Мы не можем построить ни единой его точки. Тем не менее, это пространство очень полезно в теории ограниченных аналитических функций. Некоторые сложности, связанные с X , описаны в упр. 8, дальнейшие детали см. у Гофмана [1962a].

Пусть A — равномерная алгебра на $\mathfrak{M}_A$. Замкнутое подмножество $K \subset \mathfrak{M}_A$ называется *границей* для A , если

$$\|f\| = \sup_{m \in K} |f(m)|, \quad f \in A.$$

Теорема 1.5. *Существует наименьшая замкнутая граница K_0 алгебры A , которая содержится в любой другой границе K этой алгебры.*

Эта наименьшая граница называется *границей Шилова* алгебры A . Заметим, что A является равномерной алгеброй на своей границе Шилова.

Доказательство. Пусть K_0 — пересечение всех границ для A ; мы должны доказать, что K_0 — тоже граница для A .

Лемма 1.6. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ и*

$$U = \{m: |f_j(m)| < 1, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда или $U \cap K \neq \emptyset$ для любой границы K алгебры A , или $K \setminus U$ является границей при любой границе K .

Закончим доказательство теоремы 1.5, считая лемму доказанной. Пусть $f \in A$ и $|f| < 1$ на K_0 . Положим $J = \{m: |f(m)| \geq 1\}$. Достаточно показать, что $J = \emptyset$ для всех таких f — тогда K_0 окажется границей для A . Поскольку $J \cap K_0 = \emptyset$, то для любого $m \in J$ по определению K_0 найдутся граница K_m алгебры A и окрестность U точки m , описанная в лемме, для которых $U \cap K_m = \emptyset$. Покроем J конечным числом таких окрестностей U_i , $1 \leq i \leq N$. По лемме 1.6 $K \setminus U_i$ есть граница для A , если K — граница для A . По индукции

$$K_1 = \mathfrak{M}_A \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i = (\dots (\mathfrak{M}_A \setminus U_1) \setminus U_2) \setminus U_3) \setminus \dots \setminus U_N)$$

есть граница для A . Так как $|f| < 1$ на K_1 , то $\|f\| < 1$ и $J = \emptyset$. $\square$

Доказательство леммы 1.6. Предположим, что K — граница для A , а $K \setminus U$ — нет. Докажем, что тогда U пересекается с любой границей для A . По предположению найдется функция $f \in A$, $\|f\| = 1$, у которой $\sup_{K \setminus U} |f(m)| < 1$. Заменяя f на f^n , мы можем считать, что $\sup_{K \setminus U} |f(m)| < \varepsilon$, где $\varepsilon \|f_j\| < 1$, $j = 1, \dots, n$, а $f_1, \dots, f_n$ — функции, определяющие U . Тогда на U имеем $\|ff_j\| < 1$ по определению U , а на $K \setminus U$ имеем $\|ff_j\| < 1$ по определению ε . Но K — граница для A , и, значит, $\|ff_j\| < 1$, $j = 1, \dots, n$. Стало быть,

$$\{m: |f(m)| = 1\} \subset \bigcap_{j=1}^n \{m: |f_j(m)| < 1\} = U.$$

Так как $\{m: |f(m)| = 1\} = \|f\|$ пересекается с любой границей для A , то и U пересекается с любой границей для A . $\square$

Конечно, если $A = C(Y)$, то граница Шилова для A есть Y . Точка $x \in \mathfrak{M}_A$ называется *точкой пика* для A , если существует функция $f \in A$, такая, что

$$f(x) = 1 \text{ и } |f(y)| < 1, y \in \mathfrak{M}_A, y \neq x.$$

Очевидно, что все точки пика принадлежат границе Шилова.

Пример 4. Диск-алгебра A_0 — это алгебра всех функций, непрерывных в замкнутом круге $\bar{D}$ и аналитических в открытом круге D . Это равномерная алгебра с нормой $\|f\| = \sup_D |f(z)|$.

Так как аналитические полиномы разделяют точки круга $\bar{D}$, то A_0 — равномерная алгебра на $\bar{D}$. По принципу максимума единичная окружность T является границей для A . Если $\lambda \in T$ и $f(z) = (1 + \bar{\lambda}z)/2$, то $f(\lambda) = 1$ и $|f(z)| < 1$ при $z \in \bar{D}$, $z \neq \lambda$. Значит, λ — точка пика, и T является границей Шилова для A_0 . Пространство максимальных идеалов алгебры A_0 совпадает с $\bar{D}$ (упр. 9).

Пример 5. H^∞ — равномерная алгебра с поточечным умножением и нормой

$$\|f\| = \sup_D |f(z)|.$$

Ее пространство максимальных идеалов мы всегда обозначаем через $\mathfrak{M}$.

Для любой точки $\xi \in D$ существует $m_\xi \in \mathfrak{M}$, для которого $m_\xi(z) = \xi$ (z — координатная функция), потому что $z - \xi \notin (H^\infty)^{-1}$. Теперь если $f \in H^\infty$, то и $(f - f(\xi))/(z - \xi) \in H^\infty$ и

$$f = f(\xi) + (z - \xi) \left(\frac{f - f(\xi)}{z - \xi} \right).$$

Таким образом,

$$m_\xi(f) = f(\xi) + m_\xi(z - \xi) m_\xi \left(\frac{f - f(\xi)}{z - \xi} \right) = f(\xi),$$

и точка $m_\xi \in \mathfrak{M}$ однозначно определяется условием $m_\xi(z) = \xi$. Значит, $\xi \rightarrow m_\xi$ определяет вложение круга D в $\mathfrak{M}$. Это вложение есть гомеоморфизм по определению топологии $\mathfrak{M}$. Мы отождествим ξ с m_ξ и будем считать D частью $\mathfrak{M}$. Тогда D открыто в $\mathfrak{M}$, так как

$$D = \{m \in \mathfrak{M}: |z(m)| < 1\}.$$

В дальнейшем мы отождествляем H^∞ с ее преобразованием Гельфанда и представляем H^∞ как подалгебру алгебры $C(\mathfrak{M})$. Здесь нет неопределенности, так как

$$\hat{f}(m_\xi) = f(\xi), \xi \in D.$$

Пусть теперь $|\xi| = 1$. Снова $(z - \xi)^{-1} \notin (H^\infty)^{-1}$, и существуют точки $m \in \mathfrak{M}$, в которых $\hat{z}(m) = \xi$. Но мы вскоре увидим, что при $\xi \in \partial D$ слой $\mathfrak{M} = \{m: \hat{z}(m) = \xi\}$ оказывается очень большим.

Преобразование Гельфанда координаты z определяет отображение

$$\hat{z}: \mathfrak{M} \rightarrow \bar{D}.$$

Отождествляя D с $\hat{z}^{-1}(D)$, имеем

$$\mathfrak{M} = D \cup \bigcup_{|\xi|=1} \mathfrak{M}_\xi.$$

Таким образом, мы можем представлять себе $\mathfrak{M}$ как круг D вместе с большим компактным пространством $\mathfrak{M} = \hat{z}^{-1}(\xi)$, лежащим над каждой точкой $\xi \in \partial D$. Слои $\mathfrak{M}_\xi$ гомеоморфны между собой, так как вращение $\tau(z) = \xi z$, $|\xi| = 1$, порождает автоморфизм $f \rightarrow f \circ \tau$ алгебры H^∞ и сопряженное с ним отображение отождествляет $\mathfrak{M}_1$ с $\mathfrak{M}_\xi$.

Чтобы увидеть, насколько велико $\mathfrak{M}_\xi$, возьмем $\xi = 1$ и рассмотрим сингулярную функцию $S(z) = \exp((z+1)/(z-1))$. В гл. II мы показали, что ее предельное множество в точке $z = 1$ совпадает с замкнутым единичным кругом. (То есть для любого ω , $|\omega| \leq 1$, существует последовательность $\{z_n\} \subset D$, $z_n \rightarrow 1$, вдоль которой $S(z_n) \rightarrow \omega$.) Ввиду компактности пространства $\mathfrak{M}$ последовательность $\{z_n\}$ имеет предельную точку m в $\mathfrak{M}_1$ и $S(m) = \omega$. Значит, S отображает $\mathfrak{M}_1$ на весь круг $\bar{D}$.

Далее, существуют такие последовательности $\{z_n\} \subset D$, $z_n \rightarrow 1$, что любая интерполяционная задача

$$f(z_n) = \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$\{\alpha_n\} \in l^\infty$, имеет решение $f \in H^\infty$. Такие последовательности называются *интерполяционными* и будут обсуждаться в гл. VII; простой пример приведен в упр. 11. Здесь мы только хотим отметить следующее: если $\{z_n\}$ — интерполяционная последовательность, то отображение $n \rightarrow z_n$ по теореме 1.4 продолжается до гомеоморфизма $\beta\mathbb{N}$ на замыкание последовательности $\{z_n\}$ в $\mathfrak{M}$. Раз $\lim z_n = 1$ (в плоскости), то мы видим, что $\mathfrak{M}_1$ содержит гомеоморфный экземпляр пространства $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

По теореме Фату H^∞ является замкнутой подалгеброй в L^∞ . Она разделяет точки в $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$, потому что любая вещественная функция из L^∞ имеет вид $u = \log |f|$, $f \in (H^\infty)^{-1}$ (теорема II.4.5), а тогда и $u(m) = \log |f(m)|$ как функции из $C(X)$. Ввиду компактности непрерывное отображение $X \rightarrow \mathfrak{M}$, определяемое сужением на H^∞ каждого мультипликативного линейного функционала на L^∞ , является гомеоморфизмом. Стало быть, X мы можем представлять себе как замкнутое подмно-

жество в $\mathfrak{M}$. Поскольку вложение $H^\infty \subset L^\infty$ изометрично, то X является границей для H^∞ . Далее, если K — собственное замкнутое подмножество множества X , то (поскольку $C(X) = L^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$) найдется такая функция $f \in H^\infty$, что

$$\sup_K \log |f| < \sup_X \log |f|,$$

и K не может быть границей для H^∞ . Мы доказали следующую теорему:

Теорема 1.7. *Граница Шилова для H^∞ есть $X = \mathfrak{M}_L^\infty$.*

Каждая внутренняя функция имеет модуль 1 на X , поскольку она имеет модуль 1 как элемент из L^∞ . Значит, $|S| = 1$ на X , где $S(z) = \exp((z+1)/(z-1))$, $S \notin (H^\infty)^{-1}$ и S не имеет нулей в D . Следовательно,

$$\mathfrak{M} \neq D \cup X.$$

Теорема Карлесона о короне утверждает, что D плотно в $\mathfrak{M}$. Иными словами, корона $\mathfrak{M} \setminus \bar{D}$ пуста. Мы докажем эту знаменитую теорему в гл. VIII, а сейчас только переведем ее на классический язык.

Теорема 1.8. *Следующие утверждения равносильны:*

a) *открытый круг D плотен в $\mathfrak{M}$;*

b) *если $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ и*

$$(1.6) \quad \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in D,$$

то существуют функции $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$, такие, что

$$(1.7) \quad f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1.$$

Доказательство. Пусть D плотно в $\mathfrak{M}$. Тогда по непрерывности

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f_j(m)| \geq \delta, \quad m \in \mathfrak{M},$$

и $\{f_1, \dots, f_n\}$ не содержится ни в каком собственном идеале алгебры H^∞ . Значит, идеал J , порожденный семейством $\{f_1, \dots, f_n\}$, содержит 1. Но

$$J = \{f_1 g_1 + \dots + f_n g_n: g_j \in H^\infty\}$$

и (1.7) выполняется.

Обратно, пусть D не плотно в $\mathfrak{M}$. Тогда некоторая точка $m_0 \in \mathfrak{M}$ имеет окрестность, не пересекающую D . Эта окрестность имеет вид

$$V = \{m: |f_j(m)| < \delta, 1 \leq j \leq n\},$$

где $\delta > 0$, $f_1, f_2, \dots, f_n \in H^\infty$ и $f_j(m_0) = 0$. Функции $f_1, \dots, f_n$ удовлетворяют (1.6), потому что $V \cap D = \emptyset$, но не могут удовлетворять (1.7), потому что лежат в идеале $\{f: f(m_0) = 0\}$. $\square$

Для диск-алгебры A_0 «теорема о короне», т. е. равенство $\mathfrak{M}_A = \bar{D}$, является простым следствием теории Гельфанда (см. упр. 9). Таким образом, если выполняется условие (1.6), то существуют функции $g_1, \dots, g_n$, удовлетворяющие (1.7). Предположим теперь, что для A_0 нам известна «теорема о короне с оценками». Иными словами, допустим, что для любых $f_1, \dots, f_n \in A_0$, подчиненных условию (1.6), мы можем найти $g_1, \dots, g_n \in A_0$, удовлетворяющие (1.7) с дополнительными оценками

$$(1.8) \quad \|g_j\| \leq C(n, \delta, \max_j \|f_j\|).$$

Теперь теорему о короне для H^∞ можно получить простым рассуждением с нормальными семействами: имея $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ и $r < 1$, мы можем найти $g_1^{(r)}, \dots, g_n^{(r)} \in A_0$, такие, что

$$\sum f_j(rz) g_j^{(r)}(z) = 1, \quad z \in D,$$

и $\|g_j^{(r)}\|_\infty \leq C(n, \delta, \max_j \|f_j\|)$. Для некоторой последовательности $r_k \rightarrow 1$

$$g_j(z) = \lim_k g_j^{(r_k)}(z)$$

даст решение (1.7) из H^∞ . Иными словами, мы можем получить теорему о короне для H^∞ , если будем иметь доказательство простой теоремы о короне для A_0 , настолько конструктивное, что оно дает оценки (1.8).

2. Внутренние функции

Напомним, что функция $u \in H^\infty$ называется внутренней, если $|u(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду. Каждое произведение Бляшке является внутренней функцией, и по теореме Фростмана II.6.4 каждая внутренняя функция является равномерным пределом последовательности произведений Бляшке. В этом разделе мы докажем, что внутренние функции — и, стало быть, произведения Бляшке — порождают H^∞ как равномерную алгебру.

Теорема 2.1 (Дуглас — Рудин). Пусть U — унитарная функция из L^∞ , $|U(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие внутренние функции $u_1, u_2 \in H^\infty$, что

$$\|U - u_1/u_2\| < \varepsilon.$$

Прежде чем доказывать теорему 2.1, рассмотрим аналогичный результат для непрерывных функций на окружности T . Его

можно доказать в несколько строк. Пусть $U \in C(T)$, $|U| \equiv 1$. Тогда $U = z^n V^2$, где n — целое число (число вращения или индекс функции U), а $V \in C(T)$, $|V| \equiv 1$. По аппроксимационной теореме Вейерштрасса найдется рациональная функция $h(z)$, которая аналитична на T и

$$|V(z) - h(z)| < \varepsilon, \quad z \in T.$$

Раз $|V| \equiv 1$, то и

$$|V(z) - 1/\overline{h(1/\bar{z})}| < \varepsilon/(1 - \varepsilon), \quad z \in T.$$

Рациональная функция

$$g(z) = z^n h(z) / \overline{h(1/\bar{z})}$$

является отношением двух конечных произведений Бляшке, потому что $|g(z)| = 1$, $z \in T$. Но

$$|U(z) - g(z)| < \varepsilon + \varepsilon/(1 - \varepsilon), \quad z \in T.$$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть E — подмножество окружности T , имеющее положительную меру. Мы можем считать, что

$$U = \alpha \chi_E + \beta \chi_{T \setminus E}, \quad |\alpha| = |\beta| = 1, \quad \alpha \neq \beta,$$

потому что произведения таких функций плотны по норме L^∞ в множестве всех унимодулярных функций.

Рассмотрим дуги

$$A = \{e^{i\theta}: |e^{i\theta} - \alpha| \leq \varepsilon/2\}, \quad B = \{e^{i\theta}: |e^{i\theta} - \beta| \leq \varepsilon/2\}.$$

Мы можем считать, что $|\alpha - \beta| > 2\varepsilon$ и $A \cap B = \emptyset$. Пусть Ω — дополнение множества $A \cup B$ до римановой сферы. Область Ω двусвязна, и при некотором r , $0 < r < 1$, кольцо

$$V = \{r < |w| < 1/r\}$$

конформно отображается на Ω . Конформное отображение $\varphi: V \rightarrow \Omega$ непрерывно продолжается на $\bar{V}$ и

$$\varphi(|w| = r) \subset A, \quad \varphi(|w| = 1/r) \subset B$$

(см. Альфорс [1966]¹⁾). Функция φ аналитична всюду в V , кроме единственного простого полюса $P \in V$.

Пусть теперь $h \in (H^\infty)^{-1}$ — такая внешняя функция, что $|h| = r\chi_E + (1/r)\chi_{T \setminus E}$ почти всюду. Тогда $h(D) \subset V$ и

$$\|U - \varphi \circ h\| \leq \varepsilon.$$

Мы покажем, что $\varphi \circ h$ есть отношение двух внутренних функций. Заметим, что $\varphi \circ h$ — мероморфная функция в D с полю-

¹⁾ См. также Голузин [1966]. — Прим. ред.

сами только на множестве $h^{-1}(P)$. Функция $\zeta(w) = w + 1/w$ отображает V на эллипс W . Пусть $G(\zeta)$ — конформное отображение W на D с $G(\zeta(P)) = 0$. Тогда функция $\psi(w) = G(\zeta(w))$ аналитична в V и непрерывна в $\bar{V}$. Далее $|\psi(w)| = 1$ на ∂V и $\psi(P) = 0$. Значит, функции $u_1 = (\varphi\psi) \circ h$ и $u_2 = \psi \circ h$ внутренние и

$$\|U - u_1/u_2\|_\infty \leq \varepsilon. \quad \square$$

Другое доказательство теоремы 2.1 дано в упр. 13.

Напомним, что граница Шилова для H^∞ есть $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$.

Теорема 2.2 (Д. Дж. Ньюмен). Если t — элемент пространства $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов алгебры H^∞ , то следующие условия равносильны:

- (a) $t \in X$ (границе Шилова для H^∞);
- (b) $|u(t)| = 1$ для любой внутренней функции $u(z)$;
- (c) $|B(t)| > 0$ для любого произведения Бляшке $B(z)$.

Доказательство. Поскольку $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$ и любая внутренняя функция является унимодулярной функцией из L^∞ , то (a) влечет за собой (b).

Пусть теперь выполнено (b). Покажем, что t продолжается до мультипликативного линейного функционала на L^∞ . По теореме 2.1 алгебра

$$\mathcal{J} = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \bar{v} : \lambda_j \in \mathbb{C}, v, u_j \text{ внутренние} \right\}$$

плотна в L^∞ по норме. Положим на $\mathcal{J}$

$$\tilde{m} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \bar{v} \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j m(u_j) \overline{m(v)}.$$

Благодаря (b) функционал $\tilde{m}$ корректно определен, линейен и мультипликативен на $\mathcal{J}$. Далее

$$\left| \tilde{m} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \bar{v} \right) \right| = \left| m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right) \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \bar{v} \right\|.$$

Значит, $\tilde{m}$ ограничен и имеет единственное непрерывное продолжение на L^∞ . Тогда $\tilde{m}(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{J}$, для некоторого $x \in X$. Мы должны показать, что $m(f) = f(x)$ при $f \in H^\infty$. Выберем $g = \sum \lambda_j u_j \bar{v} \in \mathcal{J}$ так, чтобы $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Тогда

$$|\tilde{m}(g) - f(x)| = |g(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Но $vg \in H^\infty$, $vf \in H^\infty$ и $|m(v)| = 1$, так что

$$|m(f) - \tilde{m}(g)| = |m(v)m(f) - m(v)\tilde{m}(g)| = |m(vf) - m(vg)| < \varepsilon$$

по определению $\tilde{m}$. Значит, $|m(f) - f(x)| < 2\varepsilon$ и $m \in X$.

Очевидно, что (b) влечет за собой (c). Пусть теперь (b) не выполняется. Тогда $|u(m)| < 1$ для некоторой внутренней функции $u(z)$ и по теореме Фростмана $|B(m)| < 1$ для некоторого произведения Бляшке $B(z)$. Мы можем считать, что $m \notin D$, так что $|m(B_0)| = 1$ для любого конечного произведения Бляшке. Значит, $B(z)$ — бесконечное произведение:

$$B(z) = z^k \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Выберем $n_j \rightarrow \infty$ так, чтобы $\sum n_j(1 - |z_j|) < \infty$, и построим произведение Бляшке

$$B_1(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{n_j}.$$

При достаточно большом N имеем $B_1 = B_0^{(N)} B_1^{(N)} B_2^{(N)}$, где $B_0^{(N)}$ — конечное произведение Бляшке, а

$$B_1^{(N)}(z) = \prod_{j=N}^{\infty} \left(\frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right)^{n_j}.$$

Тогда $|B_0^{(N)}(m)| = 1$, $|B_2^{(N)}(m)| \leq 1$ и $|B_1^{(N)}(m)| = |B(m)|^{n_N}$, так что

$$|B_1(m)| \leq |B(m)|^{n_N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Значит, $|B_1(m)| = 0$ и (c) влечет за собой (b). $\square$

Пусть $\mathcal{P}$ — подмножество равномерной алгебры A . Мы говорим, что $\mathcal{P}$ порождает A , если линейные комбинации произведений функций из $\mathcal{P}$ плотны по норме в A . Если $\mathcal{P}$ замкнуто относительно умножения, то оно порождает A тогда и только тогда, когда замкнутая линейная оболочка $\mathcal{P}$ есть A .

Теорема 2.3 (Бернар). Пусть A — равномерная алгебра на компактном хаусдорфовом пространстве Y и

$$\mathcal{U} = \{u \in A: |u| = 1 \text{ на } Y\}$$

— множество ее унимодулярных функций. Если $\mathcal{U}$ порождает A , то единичный шар в A совпадает с замкнутой по норме выпуклой оболочкой множества $\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть $f \in A$, $\|f\| < 1$. Можно считать, что

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j, \quad u_j \in \mathcal{U}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

потому что такие функции плотны в единичном шаре алгебры A .

Пусть $u = \prod_{j=1}^n u_j \in \mathcal{U}$; тогда $\bar{f}u \in A$. Но всюду на Y

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f + e^{it}u}{1 + e^{it}\bar{f}u} dt.$$

При каждом t подынтегральное выражение принадлежит $\mathcal{U}$. Римановы суммы для этого интеграла сходятся к $\bar{f}$ равномерно на Y , так как $\|f\| < 1$. Эти суммы — выпуклые комбинации элементов множества $\mathcal{U}$. $\square$

Следствие 2.4. *Единичный шар диск-алгебры A_0 является замкнутой выпуклой оболочкой множества всех конечных произведений Бляшке.*

Доказательство. Внутренние функции из A_0 — это конечные произведения Бляшке; они порождают A_0 , потому что в A_0 плотны многочлены. $\square$

Теорема 2.5 (Маршалл). *Произведения Бляшке порождают H^∞ .*

Следствие 2.6. *Единичный шар пространства H^∞ является замкнутой выпуклой оболочкой множества всех произведений Бляшке.*

Это следствие непосредственно вытекает из теорем 2.5, 2.3 и теоремы Фростмана. Заметим, что теорема Каратеодори о поточечной сходимости I.2.1 гораздо проще следствия 2.6.

Доказательство теоремы 2.5 представляет собой остроумную комбинацию трех компонент — теоремы Дугласа — Рудина, приема Бернара из доказательства теоремы 2.3 и теоремы Неванлинны из гл. IV. Это доказательство вскрывает связь между задачами интерполяции и приближения, которая обнаруживается всюду в нашей теории.

Доказательство теоремы 2.5. По теореме Фростмана достаточно доказать, что внутренние функции порождают H^∞ . Пусть J — замкнутая подалгебра в H^∞ , порожденная всевозможными внутренними функциями, и

$$\mathfrak{N} = \{f \in H^\infty : \bar{f}u \in H^\infty \text{ для некоторой внутренней функции } u\}.$$

Мы должны показать, что $J = H^\infty$. Сделаем два предварительных наблюдения:

- (i) Если $f = \sum \lambda_j u_j$ — линейная комбинация внутренних функций, то $f \in \mathfrak{N}$,
- (ii) $\mathfrak{N} \subset J$.

Чтобы доказать (i), возьмем $u = \prod u_j$ и заметим, что

$$\bar{f}u = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \prod_{k \neq j} u_k \in H^\infty.$$

Чтобы доказать (ii), используем идею Бернара из теоремы 2.3. Пусть $f \in \mathfrak{A}$ и $\|f\| < 1$. Если u — та внутренняя функция, для которой $\bar{f}u \in H^\infty$, то $(f + e^{it}u)/(1 + e^{it}\bar{f}u)$ — внутренняя функция при любом $t \in \mathbb{R}$. Значит, интеграл

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f + e^{it}u}{1 + e^{it}\bar{f}u} dt$$

представляет f как равномерный предел выпуклых комбинаций внутренних функций.

Пусть теперь $f \in H^\infty$. По теореме Дугласа — Рудина 2.1 и теореме Фростмана найдутся внутренние функции $u_1, \dots, u_n$, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и произведение Бляшке $B(z)$, для которых¹⁾

$$(2.1) \quad \|f - \sum \lambda_j u_j \bar{B}\| < \varepsilon.$$

Теперь мы используем теорему IV.4.1 для устранения не голоморфного множителя $\bar{B}$. Пусть $g = \sum \lambda_j u_j$. По (2.1) $\|Bf - g\| < \varepsilon$, так что $|g(z_n)| < \varepsilon$ в нулях $\{z_n\}$ произведения $B(z)$. По теореме IV.4.1 найдется внутренняя функция $v(z)$, такая, что

$$ev(z_n) = g(z_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Значит,

$$g - \varepsilon v = Bh, \quad h \in H^\infty.$$

Вспоминая, что $g = \sum \lambda_j u_j$, мы видим, что $Bh \in \mathfrak{A}$ в силу (1). Поэтому существует внутренняя функция $u(z)$, для которой $B\bar{h}u \in H^\infty$. Тогда и $B\bar{B}\bar{h}u = \bar{h}u \in H^\infty$, $h \in \mathfrak{A}$ и в силу (ii) $h \in J$. Но

$$\begin{aligned} \|f - h\| &= \|Bf - Bh\| \leq \|Bf - g\| + \|g - Bh\| = \\ &= \|Bf - g\| + \varepsilon\|v\| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

и, стало быть, $f \in J$. $\square$

¹⁾ Здесь имеется в виду несколько усиленная формулировка теоремы 2.1: каждую функцию $f \in L^\infty$, $\|f\| \leq 1$, можно сколь угодно точно приблизить (в L^∞) полусуммой отношений внутренних функций. Для доказательства нужно рассмотреть функции φ_1, φ_2 , непрерывные и унимодулярные в $D \setminus \{0\}$ и такие, что $z = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ (в $D \setminus \{0\}$), и применить теорему 2.1 к каждой из унимодулярных функций $\varphi_i(f)$ (при этом можно считать, что f отделена от нуля); в качестве φ_i можно взять функции $(z/|z|)\exp(\pm i \arccos |z|)$. — Прим. ред.

3. Аналитические круги в слоях

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность Бляшке в D , т. е. $\sum (1 - |z_n|) < \infty$. Предположим, что $\lim z_n = 1$. Если $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, то

$$B'(z_n) = \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{1}{1 - |z_n|^2} \prod_{k, k \neq n} \frac{-\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n}$$

■

$$(1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = \prod_{k, k \neq n} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right|.$$

Заменим $\{z_n\}$ такой подпоследовательностью, чтобы

$$\inf_n \prod_{k, k \neq n} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| = \delta > 0,$$

чего легко добиться с помощью диагонального процесса.

Таким образом, мы считаем, что

$$(3.1) \quad \inf_n (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = \delta > 0.$$

Это условие будет очень важно для нас в дальнейшем, потому что оно характеризует интерполяционные последовательности. Здесь же мы воспользуемся им только для того, чтобы построить нетривиальные аналитические отображения открытого единичного круга в слой $\mathfrak{M}_1$ пространства $\mathfrak{M}$ над точкой $z = 1$. Положим

$$L_n(\xi) = \frac{\xi + z_n}{1 + \bar{z}_n \xi}, \quad |\xi| < 1.$$

Тогда $f \circ L_n \in H^\infty$, если $f \in H^\infty$, и $f \circ L_n(0) = f(z_n)$. Рассмотрим L_n как отображение $\mathcal{D} = \{|\xi| < 1\}$ в $\mathfrak{M}$. (Обозначение $\mathcal{D} = \{|\xi| < 1\}$ нужно, чтобы отличить область определения L_n от ее образа $D \in \mathfrak{M}$.) Пространство $\mathfrak{M}^\mathcal{D}$ всех (непрерывных или нет) отображений круга $\mathcal{D}$ в $\mathfrak{M}$ компактно и хаусдорфово в топологии произведения. Из последовательности $\{L_n\} \subset \mathfrak{M}^\mathcal{D}$ выберем поднаправление $\{L_{n_j}\}$, которое сходится к пределу $L \in \mathfrak{M}^\mathcal{D}$ (направления нужны потому, что пространство $\mathfrak{M}^\mathcal{D}$ не метрическое). Мы получим отображение $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$, причем

$$(3.2) \quad f \circ L(\xi) = \lim_j f \circ L_{n_j}(\xi) = \lim_j f \left(\frac{\xi + z_{n_j}}{1 + \bar{z}_{n_j} \xi} \right), \quad f \in H^\infty.$$

Теорема 3.1. *Отображение $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ обладает следующими тремя свойствами:*

(а) $L(\mathcal{D}) \subset \mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_1$ — слой $\mathfrak{M}$ над $z = 1$);

(b) отображение L аналитично, т. е. $f \circ L(\xi)$ — аналитическая функция в $\mathcal{D}$ при $f \in H^\infty$;

(c) отображение L не постоянно.

Доказательство. Согласно (3.2),

$$\hat{z}(L(\xi)) = \lim_j \left(\frac{\xi + z_{n_j}}{1 + \bar{z}_{n_j} \xi} \right) = 1,$$

так что $L(\mathcal{D}) \subset \mathfrak{M}_1$ и (a) выполняется.

Свойство (b) следует из (3.2) и того факта, что предел любого ограниченного направления в множестве аналитических в $\mathcal{D}$ функций снова аналитичен. Из (3.2) следует также, что $(f \circ L)'(\xi) = \lim_j (f \circ L_{n_j})'(\xi)$ при $f \in H^\infty$. Стало быть,

$$\begin{aligned} (B \circ L)'(0) &= \lim_j (B \circ L_{n_j})'(0) = \lim_j B'(z_{n_j}) L'_{n_j}(0) = \\ &= \lim_j (1 - |z_{n_j}|^2) B'(z_{n_j}) \end{aligned}$$

и, согласно (3.1),

$$(3.3) \quad |(B \circ L)'(0)| \geq \delta > 0.$$

Значит, $B \circ L$ не постоянно и (c) выполняется. $\square$

В гл. X мы увидим, что L — взаимно однозначное отображение $\mathcal{D}$ в $\mathfrak{M}_1$ и что $\mathfrak{M}_1$ содержит несчетное множество непересекающихся аналитических кругов вида $L(\mathcal{D})$.

Ввиду (3.3) и леммы Шварца (упр. 1.1) существует такое $\eta = \eta(\delta) > 0$, что отображение L взаимно однозначно при $|\xi| < \eta$. Множество $L(|\xi| < \eta) \subset \mathfrak{M}_1$, таким образом, параметризуется точками круга, и все функции из H^∞ на нем аналитичны. Это множество $L(|\xi| < \eta)$ называется *аналитическим кругом*.

Следующее замечание, возможно, сделает аналитический круг $L(|\xi| < \eta)$ не столь загадочным. Рассмотрим круги

$$\Delta_n = \left\{ z: \rho(z, z_n) = \left| \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right| < \eta \right\} = L_n(|\xi| < \eta).$$

В евклидовой метрике круги Δ_n сходятся к точке $z = 1$. Но в гиперболической метрике все они конгруэнтны $\Delta = \{|\xi| < \eta\}$. См. рис. V. 1. При $f \in H^\infty$ функции

$$f_n(\xi) = f(L_n(\xi))$$

образуют нормальное семейство, и поведение f на Δ_n совпадает с поведением f_n на Δ . При $f = B$ имеем $f'_n(0) = B'(z_n)(1 - |z_n|^2)$, и, согласно (3.1), никакая предельная функция $\{f_n\}$ не может быть постоянной. Раз пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{H^\infty}$ компактно, то найдется направление из индексов $\{n_j\}$, такое, что $f_{n_j} = f(L_{n_j}(\xi))$ сходятся для всех $f \in H^\infty$. Это

то же самое, что сказать, что $L_{n_j} \rightarrow L$ в $\mathfrak{M}^{\mathscr{D}}$. Следовательно, мы можем представлять себе направление кругов $\{\Delta_{n_j}\}$ сходящимся к предельному множеству $L(|\xi| < \eta)$. Согласно (3.1) и

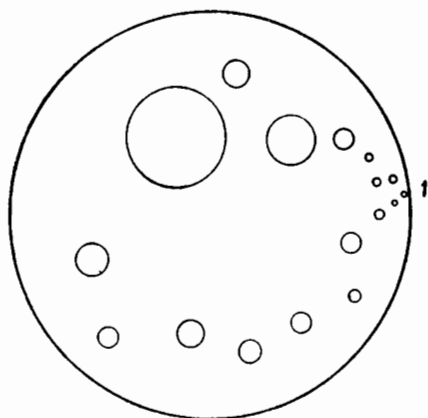


Рис. V. 1. Гиперболически конгруэнтные кружки Δ_n .

(3.3), предельное множество — круг, на котором функция $B(z)$ взаимно однозначна, а все функции из H^∞ аналитичны.

4. Представляющие меры и ортогональные меры

Теорема 4.1. Пусть A — равномерная алгебра на компактном хаусдорфовом пространстве Y и $m \in \mathfrak{M}_A$. Тогда

$$\|m\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |m(f)| = 1.$$

На Y существует положительная борелевская мера μ , такая, что $\mu(Y) = 1$ и

$$(4.1) \quad m(f) = \int_Y f d\mu, \quad f \in A.$$

Положительная мера на Y , удовлетворяющая (4.1), называется *представляющей мерой* для m . Любая представляющая мера оказывается вероятностной, т. е. $\mu(Y) = 1$, потому что $\int 1 d\mu = m(1) = 1$.

Доказательство. По теореме 1.1 имеет место неравенство $\|m\| \leq 1$, но $\|1\| = 1$, так как A — равномерная алгебра, и поэтому $\|m\| \geq |m(1)| = 1$. По теореме Хана — Банаха линейный функционал $m(f)$ можно без увеличения нормы продолжить на $C(Y)$, а по теореме Рисса о представлении это продолжение дается интегралом по некоторой конечной комплексной борелев-

ской мере μ на Y . Для меры μ выполняется (4.1) и

$$1 = \|\mu\| = \sup \left\{ \left| \int f d\mu \right| : f \in C(Y), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

Но $\|\mu\| = 1 = \int d\mu$, откуда следует, что μ положительна и $\mu(Y) = 1$. $\square$

Обычно теорему 4.1 используют, когда Y — граница Шилова алгебры A . Например, пусть $A = A_0$ — диск-алгебра и $Y = T$ — единичная окружность. Пространство максимальных идеалов — это замкнутый круг $\bar{D}$ (упр. 9). При $|z| = 1$ представляющая мера является точечной нагрузкой δ_z в точке z . При $|z| < 1$ представляющая мера дается ядром Пуассона

$$d\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

Каждая точка из $\bar{D}$ имеет на T только одну представляющую меру, потому что для положительной меры μ должно быть

$$\operatorname{Re} f(z) = \int_T \operatorname{Re} f d\mu,$$

а вещественные тригонометрические полиномы — вещественные части аналитических полиномов — плотны в пространстве $C_R(T)$ всех вещественных непрерывных функций на T .

Вообще, равномерная алгебра A называется *алгеброй Дирихле* на Y , если $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$ плотно по норме в $C_R(Y)$. Тогда каждый комплексный гомоморфизм алгебры A имеет единственную представляющую меру на Y . Мы говорим, что алгебра A *логмодулярна* на Y , если

$$\log |A^{-1}| = \{\log |f| : f \in A^{-1}\}$$

плотно в $C_R(Y)$. Каждая алгебра Дирихле логмодулярна, поскольку $\log |e^f| = \operatorname{Re} f$. Однако H^∞ не является алгеброй Дирихле (упр. 15), хотя она логмодулярна на своей границе Шилова X . В самом деле, как мы уже замечали и раньше, если $u \in L_R^\infty$ и $u(z)$ — ее интеграл Пуассона, то $f(z) = \exp(u(z) + i\bar{u}(z)) \in (H^\infty)^{-1}$ и $\log |f| = u$. Заметим, что для логмодулярной алгебры A граница Шилова совпадает с Y . Доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.7.

Теорема 4.2. *Если алгебра A логмодулярна на Y , то каждый функционал $t \in \mathfrak{M}_A$ имеет на Y единственную представляющую меру.*

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 — две представляющие меры для m и $f \in A^{-1}$. Поскольку меры μ_1, μ_2 вероятностные,

$$|m(f)| \leq \int |f| d\mu_1, \quad |m(f^{-1})| \leq \int |f^{-1}| d\mu_2,$$

так что

$$1 \leq \int |f| d\mu_1 \int |f^{-1}| d\mu_2.$$

Поскольку $\log|A^{-1}|$ плотно в $C_R(Y)$,

$$1 \leq \int e^u d\mu_1 \int e^{-u} d\mu_2, \quad u \in C_R(Y).$$

Положим при фиксированном u

$$h(t) = \int e^{tu} d\mu_1 \int e^{-tu} d\mu_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда $h(0) = 1$ и $h(t) \geq 1$. Дифференцируя $h(t)$ при $t = 0$, получим

$$\int u d\mu_1 = \int u d\mu_2,$$

так что $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Поскольку H^∞ — логмодулярная алгебра, каждый функционал $m \in \mathfrak{M}$ имеет единственную представляющую меру μ_m на X . Для $m \in X$ это точечная нагрузка δ_m . Но какая мера представляет $f \rightarrow f(0)$? Конечно, $f(0) = (1/2\pi) \int f(e^{i\theta}) d\theta$, $f \in H^\infty$, но $d\theta/2\pi$, строго говоря, не является мерой на X . Однако линейный функционал

$$L^\infty \ni g \rightarrow \int_T g \frac{d\theta}{2\pi}$$

определяет по теореме Рисса о представлении борелевскую вероятностную меру μ_0 на X , которая и будет той представляющей мерой, которую мы ищем. Если $E \subset T$ имеет положительную меру, то χ_E — идемпотент в L^∞ (т. е. $\chi_E^2 = \chi_E$). Поэтому $\hat{\chi}_E$ принимает только значения 0 или 1, так что существует открыто-замкнутое множество $\tilde{E} \subset X$, такое, что $\hat{\chi}_E = \chi_{\tilde{E}}$. Тогда

$$(4.2) \quad \mu_0(\tilde{E}) = \int_X \chi_{\tilde{E}} d\mu_0 = \int_T \chi_E \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Так как простые функции плотны в L^∞ , то открыто-замкнутые множества образуют базис топологии на X и (4.2) однозначно определяет борелевскую меру μ_0 .

Теорема 4.3. При $0 < p \leq \infty$ соответствие $\chi_E \rightarrow \chi_{\tilde{E}}$ единственным образом продолжается до положительного изометрического

линейного отображения S пространства $L^p(T, d\theta/2\pi)$ на $L^p(X, \mu_0)$.

Доказательство. Для простой функции $f = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$ положим $Sf = \sum \alpha_j \chi_{\tilde{E}_j}$. Это единственно возможное линейное продолжение соответствия $\chi_E \rightarrow \chi_{\tilde{E}}$. По (4.2) $\|Sf\|_p = \|f\|_p$, $0 < p \leq \infty$, и по соображениям плотности S продолжается до положительного изометрического линейного оператора из $L^p(T, d\theta/2\pi)$ в $L^p(X, \mu_0)$.

Мы должны показать, что образ S есть все $L^p(X, \mu_0)$. Множество $L^\infty(\mu_0)$ плотно в $L^p(\mu_0)$, $p < \infty$, а S есть L^p -изометрия. Поэтому достаточно рассмотреть случай $p = \infty$. Для $g \in L^\infty(\mu_0)$ выберем $\{g_n\} \subset C(X)$ так, чтобы $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ и $g_n \rightarrow g$ почти всюду относительно μ_0 . Так как $C(X)$ — преобразование Гельфанда алгебры L^∞ , а простые функции плотны в L^∞ , то мы можем считать, что $g_n = Sf_n$, где функции $f_n \in L^\infty$ просты и $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty$. Но S — изометрия, и $\|f_n - f_k\|_2 = \|g_n - g_k\|_2 \rightarrow 0$. Поэтому в $L^2(d\theta/2\pi)$ функции f_n сходятся к пределу f и $S(f) = g$. Но $f \in L^\infty$, потому что $\|f_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ и некоторая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ сходится к f почти всюду. $\square$

При $p = \infty$ теорема 4.3 утверждает, что $L^\infty(X, \mu_0) = C(X)$, — еще одно выражение того факта, что X очень велико и несвязно.

По теореме 4.3 мера на X , представляющая точку $z \in D$, равна $S(P_z)d\mu_0$, где P_z — ядро Пуассона для z . По теореме 4.3 и теореме Радона — Никодима пространство мер на X , абсолютно непрерывных относительно μ_0 , можно отождествить с $L^1(d\theta/2\pi)$, так что выражение $P_z d\theta/2\pi$ можно вполне безопасно рассматривать как меру на X .

Пусть A — равномерная алгебра на компактном хаусдорфовом пространстве Y . Обозначим через $A^\perp$ пространство всех конечных комплексных борелевских мер ν на Y , ортогональных к A :

$$\int_Y f d\nu = 0, \quad f \in A.$$

Аналогично если $m \in \mathfrak{M}_A$, т. е. $A_m = \{f \in A: f(m) = 0\}$ — максимальный идеал, то $A_m^\perp = \{\nu: \int f d\nu = 0, f \in A_m\}$. В частности, если $H_0^\infty = \{f \in H^\infty: f(0) = 0\}$, то $\{\nu \in (H_0^\infty)^\perp: \nu \ll \mu_0\}$ можно по теореме Ф. и М. Риссов отождествить с H^1 .

Теорема 4.4. Пусть A — равномерная алгебра на компактном хаусдорфовом пространстве Y и $m \in \mathfrak{M}_A$. Предположим, что m имеет единственную представляющую меру μ на Y . Если $\nu \in A_m^\perp$

и $\nu = \nu_a + \nu_s$ — разложение Лебега меры ν по отношению к μ , то $\nu_a \in A_m^\perp$ и $\nu_s \in A^\perp$.

Это обобщение теоремы Ф. и М. Риссов. Однако даже в случае $A = H^\infty$ мы уже не можем заключить, что $\nu_s = 0$, как в классической теореме. Мы только сможем утверждать, что $\int d\nu_s = 0$. Нам понадобится в доказательстве следующая лемма.

Лемма 4.5. Пусть $t \in \mathfrak{M}_A$ имеет единственную представляющую меру μ на Y . Пусть $E \subset Y$ — множество типа (F_σ) и $\mu(E) = 0$. Найдутся такие $f_n \in A$, что

- (i) $\|f_n\| \leq 1$,
- (ii) $f_n(y) \rightarrow 0$, $y \in E$,
- (iii) $f_n \rightarrow 1$ почти всюду относительно μ .

Доказательство. Сделаем одно предварительное замечание. Если $u \in C_R$, то

$$(4.3) \quad \sup \{ \operatorname{Re} m(f) : f \in A, \operatorname{Re} f < u \} = \\ = \inf \{ \operatorname{Re} m(f) : f \in A, \operatorname{Re} f > u \} = \int u d\mu.$$

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим положительный линейный функционал $\operatorname{Re} f \rightarrow \operatorname{Re} m(f)$ на $\operatorname{Re} A$. Согласно доказательству теоремы Хана — Банаха, существуют положительные продолжения этого функционала на все $C_R(Y)$, значения которых на u равны любому числу между левой и правой частями (4.3). Каждое такое продолжение является представляющей мерой для m . Но представляющая мера единственна, и потому в (4.3) должно достигаться равенство. Пусть $E = \bigcup E_n$, где все E_n компактны и $E_n \subset E_{n+1}$. Возьмем такие $u_n \in C_R(Y)$, что $u_n(y) > 0$, $u_n(y) > n$ при $y \in E_n$ и $\int u_n d\mu < 1/n^2$. Это возможно, так как $\mu(E_n) = 0$. Согласно (4.3), найдутся такие $g_n \in A$, что

$$\operatorname{Re} g_n > u_n, \operatorname{Re} g_n(m) < 1/n^2, \operatorname{Im} g_n(m) = 0.$$

Положим $f_n = e^{-g_n}$. Тогда (i) выполняется, так как $\operatorname{Re} g_n > u_n > 0$, а (ii) выполняется, поскольку $|f_n(y)| \leq e^{-u_n(y)} < e^{-n}$, $y \in E_n$. Докажем (iii). Так как $f_n(m) = e^{-g_n(m)}$, то

$$\int |1 - f_n|^2 d\mu = 1 + \int |f_n|^2 d\mu - 2 \operatorname{Re} f_n(m) \leq 2 - 2 \operatorname{Re} e^{-g_n(m)} \leq \\ \leq 2(1 - e^{-1/n^2}) \leq 2/n^2.$$

Значит, $f_n \rightarrow 1$ почти всюду относительно μ . $\square$

Доказательство теоремы 4.4. Поскольку v_s сингулярна относительно μ , найдется множество $E \subset Y$ типа (F_σ) , такое, что $\mu(E) = 0$ и $|v_s|(Y \setminus E) = 0$. Возьмем f_n из леммы 4.5 и $dv_n = f_n dv$. Множество A_m есть идеал, и потому $v_n \in A_m^\perp$. По лемме 4.5 и по теореме об ограниченной сходимости v_n слабо сходятся к $v_a = v - v_s$. Значит, $v_a \in A_m^\perp$ и $v_s = v - v_a \in A_m^\perp$. Наконец, ввиду утверждений (ii) и (iii) леммы 4.5

$$\int dv_s = \lim \int (f_n(m) - f_n) dv_s = 0,$$

откуда $v \in A^\perp$. $\square$

В качестве применения теоремы 4.4 мы заново докажем один результат из разд. IV. 2: пусть $h_0 \in L^\infty \setminus H^\infty$. Если $\|h_0 + H^\infty\| < 1$, то существует такая функция $F \in H^1$, $F \neq 0$, что

$$(4.4) \quad F/|F| \in h_0 + H^\infty.$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы IV.4.4, мы выберем такое $h \in h_0 + H^\infty$, $\|h\| = 1$, что

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int h d\theta \right| = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int g d\theta \right| : g \in h_0 + H^\infty, \|g\| \leq 1 \right\},$$

и заметим, что $\text{dist}(h, H_0^\infty) = 1$, но $\text{dist}(h, H^\infty) < 1$. По двойственности найдутся $F_n \in H^1$, $\|F_n\|_1 \leq 1$, такие что

$$(4.5) \quad \int h F_n \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 1,$$

$$(4.6) \quad \inf_n |F_n(0)| > 0.$$

Пусть $dv_n = S(F_n) d\mu_0$. Тогда $v_n \in (H_0^\infty)^\perp$ и $\|v_n\| \leq 1$. Пусть v — слабая предельная точка $\{v_n\}$. Тогда $v \in (H_0^\infty)^\perp$ и по теореме 4.4 $dv = S(F) d\mu_0 + dv_s$, где $F \in H^1$ и $v_s \in (H^\infty)^\perp$. Согласно (4.6), $F \neq 0$, так как $\int dv \neq 0$, хотя $\int dv_s = 0$. Далее $\|v\| \leq 1$ и $\int h dv = 1$ в соответствии с (4.5), откуда $\|v\| = 1$ и $\int h dv = \int |dv| = 1$. Поскольку v_s сингулярна относительно μ_0 , это означает, что $\int h dv_a = \int |dv_a|$. Но тогда

$$\int h F \frac{d\theta}{2\pi} = \int |F| \frac{d\theta}{2\pi},$$

т. е. $h = F/|F|$ почти всюду. $\square$

Теперь одно предостережение. Множество $(H^\infty)^\perp$ содержит меры, сингулярные относительно всех представляющих мер (упр. 17), и в предыдущих рассуждениях есть опасность пороч-

ного круга. Только благодаря (4.6) мы смогли заключить, что $v_a \neq 0$. Но вообще может случиться, что каждая слабая предельная точка последовательности $S(F_n)d\mu_0$, $F_n \in H^1$, сингулярна относительно μ_0 . В таком случае $F_n(z) \rightarrow 0$, $|z| < 1$ (см. упр. 18 и пример IV.1.5). Все же в этом направлении есть и некоторые положительные результаты (см. Гамелин [1973, 1974], Бернар, Гарнетт и Маршалл [1977]).

5. Пространство L^1/H_0^1

Пространство H^∞ сопряжено с L^1/H_0^1 , поскольку

$$H^\infty = \left\{ f \in L^\infty: \int f F d\theta = 0, F \in H_0^1 \right\}.$$

Элементы L^1/H_0^1 — самые полезные линейные функционалы на H^∞ , потому что они имеют конкретное представление как интегрируемые функции на T . В этом разделе мы докажем три теоремы о L^1/H_0^1 .

Замкнутое множество $P \subset X$ называется *множеством пика* для H^∞ , если существует функция $f \in H^\infty$, такая, что $f \equiv 1$ на P и $|f| < 1$ на $X \setminus P$. Мы начнем с элегантной леммы Амара и Ледерера [1971].

Лемма 5.1. Пусть ν — конечная комплексная борелевская мера на X . Предположим, что ν сингулярна относительно μ_0 . Для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество пика $P \subset X$, такое, что $\mu_0(P) = 0$ и $|\nu|(X \setminus P) < \varepsilon$.

Доказательство. По предположению существует компакт $K \subset X$, для которого $\mu_0(K) = 0$ и $|\nu|(X \setminus K) < \varepsilon$. Так как открыто-замкнутые множества образуют базис топологии в X , то можно найти открыто-замкнутые V_n , $K \subset V_{n+1} \subset V_n$, такие, что

$$(5.1) \quad \sum n \mu_0(V_n) < \infty.$$

Пусть $u_n = n \chi_{V_n}$. Поскольку V_n открыто и замкнуто, то $V_n = \{\tilde{\chi}_{E_n} = 1\}$ для некоторого измеримого множества $E_n \subset T$ и u_n можно отождествить с функцией $n \chi_{E_n} \in L^\infty$ и даже с гармонической функцией $u_n(z) = n \int_{E_n} P_z(\theta) d\theta/2\pi$. Положим

$$g_n(z) = u_n(z) + i \tilde{u}_n(z), \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z).$$

Согласно (5.1), функция $G(z)$ конечна и аналитична в D и $\operatorname{Re} G(z) > 0$. Тогда функция $f(z) = G(z)/(1 + G(z))$ входит в H^∞ , $\|f\|_\infty \leq 1$ и

$$|1 - f(z)| = \left| \frac{1}{1 + G(z)} \right| \leq \frac{1}{1 + u_n(z)}.$$

В частности, $|1 - f(e^{i\theta})| \leq 1/(n+1)$ почти всюду на E_n и

$$|1 - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad x \in V_n.$$

Множество $P = \{x: f(x) = 1\}$ является множеством пика, потому что для $g = (1 + f)/2$ мы имеем $g(x) = 1$ при $x \in P$ и $|g(x)| < 1$ при $x \notin P$. Наконец, $K \subset P$, потому что $\bigcap V_n = P$, и $|v|(X \setminus P) \leq |v|(X \setminus K) < \varepsilon$. $\square$

Теорема 5.2 (Муни). Пусть $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность интегрируемых функций, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \varphi_n \frac{d\theta}{2\pi} = L(f)$$

существует для всех $f \in H^\infty$. Тогда найдется $\varphi \in L^1$, для которой

$$(5.2) \quad L(f) = \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^\infty.$$

Линейный функционал вида (5.2) на H^∞ называется *слабо непрерывным*. Если $F \in H_0^1$, то

$$\int f(\varphi + F) \frac{d\theta}{2\pi} = \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^\infty,$$

так что множество слабо непрерывных функционалов находится в естественном соответствии с L^1/H_0^1 . Теорема 5.2 утверждает, что каждая слабая последовательность Коши в L^1/H_0^1 имеет в L^1/H_0^1 слабый предел. Иначе говоря, L^1/H_0^1 слабо секвенциально полно. Слабая полнота самого L^1 была установлена гораздо раньше (см. Данфорд и Шварц [1958], стр. 315).

Доказательство. Пусть

$$L_n(f) = \int f \varphi_n \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^\infty.$$

По принципу равномерной ограниченности $\sup_n \|L_n\| < \infty$, и предел L является ограниченным линейным функционалом на H^∞ . По теореме Хана — Банаха найдется такая конечная комплексная мера σ на λ , что

$$L(f) = \int f d\sigma, \quad f \in H^\infty.$$

Положим $d\sigma = \Phi d\mu_0 + d\sigma_s$, где $\Phi \in L^1(\mu_0)$, а мера σ_s сингулярна относительно μ_0 . По теореме 4.3 существует $\varphi \in L^1$, для которой

$$\int f \Phi d\mu_0 = \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in L^\infty.$$

Мы хотим показать, что $\sigma_s \in (H^\infty)^\perp$. Это значит, что

$$L(f) = \int f \Phi d\mu_0 = \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^\infty,$$

как и утверждается в теореме. Заменяя φ_n на $\varphi_n - \varphi$, мы можем считать, что

$$L(f) = \int_X f d\sigma_s, \quad f \in H^\infty.$$

Пусть $\sigma_s \notin (H^\infty)^\perp$ и $g \in H^\infty$ такова, что $\int g d\sigma_s \neq 0$. Применяя к $d\nu = g d\sigma_s$ лемму 5.1, мы построим множество пика $P \subset X$, $\mu_0(P) = 0$, $\nu(P) = \int_P g d\sigma_s \neq 0$. Пусть $f \in H^\infty$ — функция, которая имеет пик на P . Тогда

$$(5.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int f^k d\nu = \nu(P) \neq 0,$$

$$(5.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int f^k g \varphi_n \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

(потому что $\mu_0(P) = 0$ и $f^k(x) \rightarrow 0$ вне P). С другой стороны,

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f^k g \varphi_n \frac{d\theta}{2\pi} = L(f^k g) = \int f^k d\nu.$$

Выберем по индукции $n_j \rightarrow \infty$ и $m_j \rightarrow \infty$ так, чтобы

$$(5.6) \quad h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j f^{m_j}(z) \in H^\infty,$$

но чтобы последовательность $\{L_{n_j}(hg)\}$ расходилась. Это приведет к противоречию, которое и докажет теорему. При данном $\varepsilon > 0$ возьмем $n_1 = 1$ и выберем такое m_1 , чтобы

$$\left| \int f^{m_1} g \varphi_{n_1} \frac{d\theta}{2\pi} \right| < \varepsilon, \quad \left| \int f^{m_1} d\nu - \nu(P) \right| < \varepsilon/2.$$

Согласно (5.3) и (5.4), это возможно. Пусть $n_1, \dots, n_{k-1}$ и $m_1, \dots, m_{k-1}$ уже выбраны. Положим

$$L_{n_k} \left(\sum_{j=1}^k (-1)^j f^{m_j} g \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \int (-1)^j f^{m_j} g \varphi_{n_k} \frac{d\theta}{2\pi} + (-1)^k \int f^{m_k} g \varphi_{n_k} \frac{d\theta}{2\pi} = A_k + B_k.$$

Выберем вначале $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы, согласно (5.5),

$$(5.7) \quad \left| A_k - \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \int_X f^{m_j} dv \right| < \varepsilon.$$

Теперь благодаря (5.3) и (5.4) мы можем **выбрать m_k так**, чтобы $|B_k| < \varepsilon$ и

$$(5.8) \quad \left| \int f^{m_k} dv - v(P) \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что из (5.7) и (5.8) следует

$$(5.9) \quad |A_k - A_{k+1}| \geq v(P) - 3\varepsilon.$$

Раз $|f(z)| < 1$ в D и $\mu_0(P) = 0$, мы можем при этом выбрать m_k растущими столь быстро, что выполняется (5.6). Теперь в силу (5.4) для

$$C_k = \int \sum_{j=k+1}^{\infty} (-1)^j f^{m_j} g \varphi_{n_k} \frac{d\theta}{2\pi}$$

имеем $|C_k| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$. Но $L_{n_k}(hg) = A_k + B_k + C_k$, и из (5.9) следует, что

$$|L_{n_k}(hg) - L_{n_{k+1}}(hg)| \geq (v(P) - 3\varepsilon) - (|B_k| + |B_{k+1}| + |C_k| + |C_{k+1}|) \geq v(P) - 7\varepsilon.$$

При $\varepsilon < v(P)/7$ получаем противоречие. $\square$

Теорема 5.3. Пусть L — ограниченный линейный функционал на H^∞ . Следующие три условия равносильны:

(а) L слабо непрерывен, т. е. существует $\varphi \in L^1$, такая, что

$$L(f) = \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^\infty;$$

(б) L непрерывен относительно ограниченной поточечной сходимости: если $g_n \in H^\infty$, $\|g_n\| \leq M$ и $g_n(z) \rightarrow g(z)$, $z \in D$, то $L(g_n) \rightarrow L(g)$;

(с) если $h_k \in H^\infty$ и

$$(5.10) \quad \sum |h_k(e^{i\theta})| \leq M < \infty$$

почти всюду, то

$$(5.11) \quad L\left(\sum h_k\right) = \sum L(h_k).$$

Отметим, что в силу (5.10) $\sum h_k$ — корректно определенная функция из H^∞ .

Доказательство. Ясно, что (а) влечет за собой (б). Если $\|g_n\| \leq M$ и $g_n(z) \rightarrow g(z)$, то g является единственной сла-

бой предельной точкой последовательности $\{g_n\}$ в $L^\infty = (L^1)^*$, потому что ядра Пуассона лежат в L^1 . По теореме Банаха — Алаоглу это значит, что $g_n \rightarrow g$ слабо, так что

$$\int g_n \varphi \, d\theta \rightarrow \int g \varphi \, d\theta.$$

Из (b) непосредственно вытекает (c), так как $g_n = \sum_{k=1}^n h_k$ ограниченно сходятся в D к $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$.

Пусть теперь L удовлетворяет условию (c). Представим L мерой σ на X и положим $d\sigma = \Phi d\mu_0 + d\sigma_s$, где σ_s сингулярна относительно μ_0 . Вычитая $\Phi d\mu_0$, мы можем считать, что $\sigma = \sigma_s$. Мы хотим доказать, что $\sigma \in (H^\infty)^\perp$. Предположим, что существует функция $g \in H^\infty$, для которой $\int g \, d\sigma \neq 0$. Положим $dv = g \, d\sigma$ и выберем по лемме 5.1 множество пика $P \subset X$, такое, что $\mu_0(P) = 0$ и

$$(5.12) \quad |\nu|(X \setminus P) < \left| \int g \, d\sigma \right|.$$

Пусть $f \in H^\infty$ — функция, имеющая пик на P . Заменяя f на $1 - (1 - f)^{1/2}$, мы можем считать, что область значений f лежит в секторе с вершиной 1, так что

$$\frac{|f(e^{i\theta}) - 1|}{1 - |f(e^{i\theta})|} \leq A < \infty.$$

Положим $h_0 = g$, $h_j = f^j g - f^{j-1} g$, $j \geq 1$. Тогда $\sum h_j = 0$, но

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |h_j| &\leq |g| + |g| \sum_{j=1}^{\infty} |f|^{j-1} |f - 1| \leq \\ &\leq |g| \left(\frac{|f - 1|}{1 - |f|} \right) \leq A \|g\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $f = 1$ на P , то по теореме об ограниченной сходимости

$$\sum_{j=1}^{\infty} L(h_j) = \int_{X \setminus P} \sum_{j=1}^{\infty} f^{j-1} (1 - f) g \, d\sigma = \int_{X \setminus P} g \, d\sigma$$

и по (5.12)

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} L(h_j) \right| \leq |\nu|(X \setminus P) < \left| \int g \, d\sigma \right|.$$

Значит,

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} L(h_j) \right| \geq \left| \int g d\sigma \right| - |\nu|(X \setminus P) > 0$$

— противоречие. $\square$

Теорема 5.4. Пусть E — комплексное банахово пространство с сопряженным E^* . Если E^* изометрически изоморфно H^∞ , то E изометрически изоморфно L^1/H_0^1 .

Иными словами, H^∞ имеет изометрически единственное предсопряженное пространство. Для банахова пространства l^1 это не так (Бессага и Пелчинский [1960]).

Доказательство. По предположению существует линейная изометрия $T: H^\infty \rightarrow E^*$, $\|T(f)\|_{E^*} = \|f\|_\infty$. Сопряженный оператор $T^*: E^{**} \rightarrow (H^\infty)^*$ изометрически отображает $E \subset E^{**}$ на замкнутое подпространство $T^*(E) \subset (H^\infty)^*$. Мы покажем, что $T^*(E) = L^1/H_0^1$, проверяя условие (с) теоремы 5.3 для $L = T^*(\varphi)$, $\varphi \in E$.

Предположим, что $\{h_k\} \subset H^\infty$ удовлетворяет (5.10) и $h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$. Согласно (5.10) и свойству логмодулярности, найдется $h_0 \in H^\infty$, такая, что

$$(5.13) \quad |h_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| = M + 1.$$

Пусть φ^* — слабая предельная точка ограниченной последовательности $\left\{ \sum_1^n T(h_k) \right\}$ в E^* . Будет достаточно, если мы покажем, что $\varphi^* = T(h)$, так как тогда

$$L(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n L(h_k)$$

при $L = T^*(\varphi)$, $\varphi \in E$.

При любом выборе постоянных $\{e_k\}$, $|e_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_0^N e_k T(h_k) + \varphi^* - \sum_1^N T(h_k) \right\|_E &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_0^N e_k T(h_k) + \sum_{N+1}^n T(h_k) \right\|_E = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_0^N e_k h_k + \sum_{N+1}^n h_k \right\| \leq M + 1, \end{aligned}$$

потому что T — изометрия. Значит,

$$\left\| \sum_0^N e_k h_k + T^{-1}(\varphi^*) - \sum_1^N h_k \right\| \leq M + 1,$$

и, если должным образом выбрать ε_k для каждого $e^{i\theta}$, мы получим

$$\sum_0^N |h_k(e^{i\theta})| + \left| T^{-1}(\varphi^*)(e^{i\theta}) - \sum_1^N h_k(e^{i\theta}) \right| \leq M + 1$$

почти всюду. Из (5.13) теперь следует, что

$$T^{-1}(\varphi^*) = \sum_1^\infty h_k = h,$$

так что $T(h) = \varphi^{*1}$. $\square$

Результаты этого раздела мы выводили из леммы 5.1, чтобы продемонстрировать силу и красоту абстрактной техники. Эти результаты можно получить и классическими методами, быть может более легкими и информативными. См., например, упр. 19 и 20.

Замечания

Книги Браудера [1969], Гамелина [1969] и Стаута [1971] дают гораздо более полное освещение общей теории равномерных алгебр, а Гофман [1962a] приводит больше подробностей о спектре L^∞ и о слоях $\mathfrak{M}_\zeta$.

Другой подход к компактификации Стоуна — Чеха см. у Келли [1955]. Доказательство теоремы 1.5 (принадлежащей Г. Е. Шилову. — *Ред.*) взято у Хермандера [1966]. Теорема 2.1 заимствована у Дугласа и Рудина [1969], соответствующий результат для $C(T)$ был отмечен Хелсоном и Сарасоном [1967]. Ньюмен доказал теорему 2.2 в [1959b], где он переоткрыл в несколько ослабленной форме теорему Фростмана. Следствие 2.4 принадлежит Фишеру [1968]. См. также Фелпс [1965], Рудин [1969] и Фишер [1971]. Теорема 2.5 впервые опубликована Маршаллом [1976a]. Статья Бернара, Гарнетта и Маршалла [1977] содержит некоторые обобщения и дальнейшие ссылки, равно как и бернардовское доказательство теоремы 2.3. Некоторые идеи разд. 2 развиваются дальше в диссертации Маршалла [1976c]. Аналитические круги впервые были вложены в слои $\mathfrak{M}$ в статье Шарка [1961].

В разд. 4 мы лишь поверхностно коснулись общей теории абстрактных пространств Харди. Полную картину см. у Гофмана [1962b], Гамелина [1969], Люмера [1969], Стаута [1971] и в указанной там литературе²⁾. Идея использовать доказатель-

¹⁾ Это рассуждение доказывает, что $T^*(E) \subset L^1/H_0^1$. Чтобы установить равенство $T^*(E) = L^1/H_0^1$, нужно еще воспользоваться теоремой Хана — Баха и «совпадением» пространства H^∞ с E^* . — *Прим. ред.*

²⁾ См. также Барби, Кёниг [1977*]. — *Прим. ред.*

ство теоремы Хана — Банаха в лемме 4.5 и теореме IV. 4.3 исходит от Люмера [1965].

О лемме 5.1 см. Амар и Ледерер [1971]. Муни [1973] дал первое доказательство теоремы 5.2. Доказательство в тексте заимствовано у Амара [1973], идея сглаживания горбов в этом контексте введена Каханом [1967]. Хавин [1973] опубликовал более элементарное доказательство, описанное в упр. 20. Импликация (с) $\Rightarrow$ (а) в теореме 5.3 взята у Барби [1975], а теорема 5.4 принадлежит Андо [1977]. Дальнейшую информацию о L^1/H_0^1 см. у Хавина [1974], Шома [1978] и Пелчинского [1977]¹⁾.

Структура банахова пространства H^∞ еще плохо изучена. В частности, неизвестно, обладает ли H^∞ банаховым свойством аппроксимации. (То есть неизвестно, существует ли направление $\{T_\alpha\}$ ограниченных линейных операторов в H^∞ , каждый из которых имеет конечномерный образ и $\|T_\alpha f - f\|_\infty \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах H^∞ .) Средние Чезаро дают такую конструкцию для слабой сходимости и для сильной сходимости в диск-алгебре A_0 . Подробности и открытые вопросы см. у Пелчинского [1977]. Теорема 2.5 может оказаться полезной для этой проблемы.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Множество A^{-1} обратимых элементов банаховой алгебры с единицей открыто, и отображение $f \rightarrow f^{-1}$ на нем непрерывно. На самом деле это отображение аналитическое, т. е. разлагается в сходящийся по норме степенной ряд в окрестности каждого $f \in A^{-1}$.

2. Пусть A — алгебра абсолютно сходящихся рядов Фурье

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

с нормой $\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ и поточечным умножением функций $(fg)(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})$.

(а) Докажите, что $\mathfrak{M}_A$ естественно отождествляется с единичной окружностью.

(б) Если ряд Фурье функции $f(e^{i\theta})$ абсолютно сходится и $f(e^{i\theta})$ не обращается в 0, то $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Этот результат принадлежит Винеру. Доказательство Гельфанда, которое использовало часть (а) и теорему 1.2, привлекло большое внимание к теории банаховых алгебр.

¹⁾ А также в статьях Войташика [1979*], Дельбэна [1979*], Бургэна [1981*]. — Прим. ред.

(с) Образ преобразования Гельфанда не замкнут в $C(T)$. В частности, ни в какой эквивалентной норме A не является равномерной алгеброй.

(d) Получите аналогичные результаты для алгебры абсолютно сходящихся рядов Тейлора

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n, \quad \|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|.$$

3. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ — различные точки спектра банаховой алгебры A , а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — различные комплексные числа. Существует элемент $f \in A$, для которого $f(m_j) = \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

4. Если A — банахова алгебра и $f \in A$, то

$$\|\hat{f}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n}.$$

В частности, этот предел существует. Это так называемая формула для спектрального радиуса.

5. Пространство максимальных идеалов алгебры $C(Y)$ есть Y . Вообще пусть A — равномерная алгебра. Скажем, что элемент $f \in A$ вещественный, если $f - \lambda \in A^{-1}$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Если вещественные элементы A разделяют точки множества $\mathfrak{M}_A$, то $A = C(\mathfrak{M}_A)$.

6. Последовательность $\{p_n\}$ в спектре равномерной алгебры A называется интерполяционной, если интерполяционная задача

$$f(p_n) = \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \{\alpha_n\} \in l^\infty,$$

всегда имеет решение $f \in A$. Если последовательность $\{p_n\}$ интерполяционная, то отображение $n \rightarrow p_n$ продолжается до гомеоморфизма $\beta\mathbb{N}$ в замыкание множества $\{p_n\}$ в $\mathfrak{M}_A$ (см. доказательство теоремы 1.4).

7. Если A — равномерная алгебра с пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}_A$, то она сепарабельна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_A$ метризуемо.

8. Пусть X — пространство максимальных идеалов алгебры L^∞ .

(а) X не метризуемо (см. упр. 7).

(б) X экстремально несвязно, т. е. замыкание любого открытого множества в X снова открыто.

Это верно потому, что в L_R^∞ любое ограниченное подмножество имеет наименьшую верхнюю грань.

(с) При $|\xi| = 1$ пусть $X_\xi = \{m \in X: m(z) = \xi\}$ — слой множества X над ξ . Пусть $f \in L^\infty$. Тогда $w \in f(X_\xi)$ в том и только том случае, когда

$$|\{\theta: |e^{i\theta} - \xi| < \varepsilon, |f(e^{i\theta}) - w| < \varepsilon\}| > 0$$

для всех $\varepsilon > 0$.

* (d) Если f имеет нуль на X_α , то $f = 0$ на относительно открытом множестве в X_α (Гофман [1962a]).

9. (a) Пусть A_0 — диск-алгебра, $m \in \mathfrak{M}_{A_0}$ и $\xi = \hat{z}(m) = m(z)$. Тогда $|\xi| \leq 1$. Если $f(\xi) = 0$, то f равномерно приближается функциями вида $(z - \xi)g(z)$, $g \in A_0$, так что $m(f) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{M}_{A_0} = \bar{D}$.

(b) A_0 состоит из тех $f \in C(T)$, для которых

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(e^{it}) dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

(c) (теорема Вермера о максимальности). Пусть B — замкнутая подалгебра в $C(T)$, содержащая A_0 . Тогда или $B = A_0$, или $B = C(T)$. Если $z \in B^{-1}$, то $\bar{z} \in B$ и $B = C(T)$. Если $z \notin B^{-1}$, то найдется $m \in \mathfrak{M}_B$ с $m(z) = 0$, и тогда

$$m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

потому что сужение m на A_0 имеет на T единственную представляющую меру. В силу части (b) это означает, что $B = A_0$ (см. Вермер [1953] и Гофман и Зингер [1957]).

(d) Коэн [1961] дал элементарное доказательство теоремы Вермера. Если $B \neq A_0$, то при некотором $f \in B$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 1.$$

Пусть $zf = 1 + zp + \bar{z}q + h$, где p и q — полиномы из A_0 и $\|h\| < 1/2$. Величина $zq - \bar{z}q$ чисто мнимая, и при $\delta > 0$

$$\|1 + \delta(zq - \bar{z}q)\| \leq (1 + \delta^2 M^2)^{1/2}, \quad M = \|zq - \bar{z}q\|.$$

Но

$$\delta \bar{z}q = \delta(zf - 1 - zp) - \delta h = zg - \delta - \delta h, \quad g = f - p \in B.$$

Следовательно,

$$\|(1 + \delta) - z(g - \delta q)\| = \|1 + \delta(zq - \bar{z}q) - \delta h\| \leq (1 + \delta^2 M^2)^{1/2} + \delta/2.$$

При малых δ это означает, что $z(g - \delta q) \in B^{-1}$, так что $z \in B^{-1}$ и $B = C(T)$.

*10. Замкнутое множество K в спектре равномерной алгебры A называется *множеством пика*, если найдется функция $f \in A$, такая, что $f(x) = 1$, $x \in K$, и $|f(x)| < 1$, $x \in \mathfrak{M}_A \setminus K$.

(a) Счетное пересечение множеств пика есть снова множество пика.

(b) Пусть E — пересечение (возможно, несчетное) множеств пика. Если $g \in A$, то найдется такое $G \in A$, что $G = g$ на E и $\|G\| = \sup\{|g(x)| : x \in E\}$.

(c) Следовательно, при $|\lambda| = 1$ множество

$$\{x \in E : g(x) = \lambda \sup_{y \in E} |g(y)|\}$$

или пусто, или снова является пересечением множеств пика.

(d) По лемме Цорна в $\mathfrak{M}_A$ содержатся максимальные пересечения множеств пика. Согласно (c), они состоят из отдельных точек, которые называются *сильными граничными точками*.

(e) Согласно (c), граница Шилова является замыканием множества сильных граничных точек. (См. Бишоп [1959].)

11. Пусть $z_n = i + 10n$, $n = 1, 2, \dots$, в верхней полуплоскости. Последовательность $\{z_n\}$ интерполяционная для H^∞ . Пусть $|\alpha_n| \leq 1$. Положим

$$f_1(z) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z - \bar{z}_n)^2}.$$

Тогда $\|f_1\| \leq A$ и $|f_1(z_n) - \alpha_n| \leq \lambda < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Положим теперь

$$f_2 = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - f_1(z)}{(z - \bar{z}_n)^2}$$

и т. д. Мы получим $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\|f_k\| \leq A\lambda^{k-1}$, $f(z_n) = \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$.

*12. Пусть $\mathfrak{M}_\xi$ — слой в $\mathfrak{M}_{H^\infty}$ над $\xi \in \partial D$ и $\text{Cl}(f, \xi)$ — предельное множество функции $f \in H^\infty$ в точке ξ .

(a) $\text{Cl}(f, \xi) \subset f(\mathfrak{M}_\xi)$.

(b) Если f непрерывна на $D \cup \{\xi\}$, т. е. $\text{Cl}(f, \xi) = \{\lambda\}$, то $f(\mathfrak{M}_\xi) = \{\lambda\}$. (Надо приблизить $f(z) - \lambda$ посредством $(z - \lambda)g(z)$, $g \in H^\infty$.)

(c) $f(\mathfrak{M}_\xi) \subset \text{Cl}(f, \xi)$. Предположим, что $0 \notin \text{Cl}(f, \xi)$. Существует круг $\Delta = \{|z - \xi| < 2\delta\}$, в котором $|f(z)| > a > 0$ на $D \cap \bar{\Delta}$. Пусть $\varphi \in C^\infty$ такова, что

$$\varphi = 1 \text{ на } \Delta = \{|z - \xi| < \delta\}, \quad \varphi = 0 \text{ вне } \Delta, \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right| = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right| \leq \frac{4}{\delta}.$$

По теореме Грина

$$G(w) = \frac{\varphi(w)}{f(w)} + \frac{1}{\pi} \iint_{D \cap \bar{\Delta}} \frac{1}{f(z)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{dx dy}{z - w} \in H^\infty.$$

Изучение этого интеграла показывает, что $g(\omega) = G(\omega) - 1/\bar{f}(\omega)$ аналитически продолжается в Δ . Значит, g непрерывна в ξ ; и в силу (b) $f(\omega)(G(\omega) - g(\xi)) \in H^\infty$ не имеет нулей в $\mathfrak{M}_\xi$, так что $0 \notin \bar{f}(\mathfrak{M}_\xi)$. Это доказательство проходит и в произвольных плоских областях. (См. Гамелин [1970], Гарнетт [1971a]; более легкое доказательство для круга см. у Гофмана [1962a] в гл. 10.)

13. Вот другое доказательство теоремы 2.1, предложенное независимо Розэем и Маршаллом. Обозначим $[f, g]$ замкнутую подалгебру в L^∞ , порожденную функциями f и g .

(а) Пусть $E \subset T$, $|E| > 0$ и $h = \exp(\chi_E + i\bar{\chi}_E)$. Существуют внутренние функции $u_1, u_2 \in H^\infty$, такие, что $[u_1, u_2] = [h, 1/h]$.

Для доказательства заметим, что h отображает D на кольцо $\{1 < |\omega| < e\}$, так что $h_1 = \sqrt{e}/h + h/\sqrt{e}$ отображает D на эллипс W_1 . Пусть $G_1: W_1 \rightarrow D$ — конформное отображение, тогда $u_1 = G_1 \circ h_1$ — внутренняя функция. На W_1 отображение G_1 есть равномерный предел полиномов, и потому $u_1 \in [h, 1/h]$. На D функция G_1^{-1} есть равномерный предел полиномов, и потому $h_1 \in [u_1]$. Теперь $h_2 = \sqrt{e}/h - h/\sqrt{e}$ отображает D на другой эллипс W_2 . Пусть $G_2: W_2 \rightarrow D$ — конформное отображение. Тогда $u_2 = G_2 \circ h_2$ — внутренняя функция, $u_2 \in [h, 1/h]$ и $h_2 \in [u_2]$. Следовательно, $[u_1, u_2] = [h, 1/h]$.

(b) Из (а) следует, что L^∞ совпадает с замкнутой алгеброй, порожденной отношениями внутренних функций.

(с) Пусть U — унимодулярная функция в L^∞ и $U = V^2$. Согласно (b), найдутся такие внутренние функции $u_1, \dots, u_n, v$ и комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что

$$\|V - v \sum \lambda_j u_j\|_\infty < \varepsilon.$$

Пусть $u = \prod u_j$, $g = \sum \lambda_j u_j \in H^\infty$. Тогда $\bar{g}u \in H^\infty$ и $g = v_1 G$, $\bar{g}u = v_2 G$, где G — внешняя функция, а v_1, v_2 — внутренние. Далее

$$\|V - \bar{v}v_1 G\| < \varepsilon, \|1/V - u\bar{v}/v_2 G\|_\infty < \varepsilon/(1 - \varepsilon),$$

так что

$$\|U - uv_1/v^2 v_2\| < 2\varepsilon/(1 - \varepsilon).$$

14. Пусть

$\mathfrak{N} = \{f \in H^\infty: \bar{f}u \in H^\infty \text{ для некоторой внутренней функции } u\}$.

Тогда $f \in \mathfrak{N}$ в том и только том случае, когда $f \in H^\infty$ и $f(e^{i\theta})$ есть некасательный предел мероморфной функции класса Неванлинны (отношения двух ограниченных аналитических функций) в $\{|z| > 1\}$. Действительно, если $\bar{f}u = g \in H^\infty$, то

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} \overline{g(1/\bar{z})/u(1/\bar{z})}, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 1.$$

Обратное получится, если заметить, что $\{h \in H^2: \bar{f}h \in H^2\}$ — непустое инвариантное подпространство в H^2 , и применить теорему Бёрлинга. Функция e^z не входит в $\mathfrak{H}$. (См. Шапиро [1968], Дуглас, Шапиро и Шилдс [1970]¹⁾.)

15. H^∞ не является алгеброй Дирихле на X . Если $g(e^{i\theta}) = 0$, $-\pi \leq \theta < \pi$, то

$$\inf_{f \in H^\infty} \|g - \operatorname{Re} f\| = \pi.$$

Если $\|g - u\| < \pi$, то преобразование Гильберта для u не может быть ограниченным при $\theta = \pi$ (см. пример IV.1.5).

16. Так как каждый функционал $m \in \mathfrak{M}_{H^\infty}$ имеет на X единственную представляющую меру μ_m , то $\mathfrak{M}$ гомеоморфно слабо компактному множеству вероятностных мер μ на X , для которых

$$\int fg \, d\mu = \int f \, d\mu \int g \, d\mu, \quad f, g \in H^\infty.$$

Следовательно, каждое $u \in L^\infty$ имеет непрерывное продолжение на $\mathfrak{M}$:

$$u(m) = \int u \, d\mu_m.$$

На D это сводится к интегралу Пуассона.

*17. (а) Пусть m — мультипликативный линейный функционал на равномерной алгебре A . Он имеет представляющую меру μ_m на ее границе Шилова, для которой выполняется субгармоническое неравенство

$$(E.1) \quad \log |f(m)| \leq \int_Y \log |f| \, d\mu_m, \quad f \in A.$$

(Доказательство. Пусть Q — множество тех $u \in C_R(Y)$, для которых найдутся $\alpha > 0$ и $f \in A$, $f(m) = 1$, такие, что

$$u > \alpha \log |f|.$$

Q — выпуклый конус в $C_R(Y)$, содержащий все строго положительные функции. Но $0 \notin Q$, и по теореме отделимости для выпуклых множеств (Данфорд и Шварц [1958], стр. 446) существует вероятностная мера μ на Y , такая, что $\int u \, d\mu \geq 0$ для всех $u \in Q$. Тогда μ — представляющая мера для m и (E.1) выполняется (Бишоп [1963]).)

(б) Если A логмодулярна на своей границе Шилова Y и μ_m — единственная представляющая мера на Y для $m \in \mathfrak{M}_A$, то

¹⁾ Класс $\mathfrak{H}$ и его аналоги играют важную роль в теории операторов и в теории рациональной аппроксимации. См. Никольский [1980*], стр. 76—79, Тумаркин [1966*], Аров [1978*]. — Прим. ред.

(E.1) выполняется для μ_m . Пусть $G \in L^1(\mu_m)$ вещественна и ортогональна к A :

$$\int_Y fG \, d\mu_m = 0, \quad f \in A.$$

Тогда

$$\int \log |1 + G| \, d\mu_m \geq 0.$$

Действительно, если $f \in A^{-1}$, то по (E.1)

$$\begin{aligned} \int \log |f| \, d\mu_m &= \log |f(m)| = \log \left| \int f(1 + G) \, d\mu_m \right| \leq \\ &\leq \log \int |f| |1 + G| \, d\mu_m, \end{aligned}$$

так что

$$\int u \, d\mu_m \leq \log \int e^u |1 + G| \, d\mu_m, \quad u \in C_R(Y).$$

Приближая функциями из $C_R(Y)$ функцию

$$u = -\log |1 + G| + \int \log |1 + G| \, d\mu_m,$$

мы получим нужное неравенство.

(с) Если μ — вероятностная мера, $G \in L^1(\mu)$ вещественна и

$$\int \log |1 + tG| \, d\mu = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

то $G = 0$ почти всюду. В верхней полуплоскости

$$U(z) = \int \log |1 + zG| \, d\mu$$

гармонична и неотрицательна. Покажите, что $\lim_{y \rightarrow \infty} U(iy)/y = 0$,

и заключите отсюда, что $U(z) \equiv 0$. Значит, $\int \log(1 + G^2) \, d\mu = 0$ и $G = 0$ почти всюду. (Часть (с) принадлежит Аренсу. См. более детальное рассмотрение (b) и (с) у Гофмана [1962b] или Стаута [1971].)

(d) Мы видим из (b) и (с), что если μ_m — представляющая мера для логмодулярной алгебры A , а $v \in A^\perp$ вещественна и абсолютно непрерывна относительно μ_m , то $v = 0$. Поскольку H^∞ не является алгеброй Дирихле на X , то существует вещественная мера, ортогональная к H^∞ . Она сингулярна относительно любой представляющей меры и может быть выбрана как крайняя точка выпуклого компактного множества $B((H^\infty)^\perp)$ (единичного шара в пространстве $(H^\infty)^\perp$). (См. Гликсберг [1967].)

18. Если $\nu \in (H^\infty)^\perp$, то ν сингулярна относительно μ_0 тогда и только тогда, когда

$$\int \bar{z}^k d\nu = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть $\{F_n\}$ — ограниченная последовательность в H_0^1 . Каждая слабая предельная точка $\{F_n d\theta\}$ в $(L^\infty)^*$ сингулярна относительно μ_0 в том и только том случае, когда $F_n(z) \rightarrow 0$ при $z \in D$. Согласно примеру IV. 1.5, такие последовательности существуют.

19. Имеется более простое доказательство импликации (b) $\Rightarrow$ (a) в теореме 5.3. Пусть L — линейный функционал на H^∞ и $L(g_n) \rightarrow L(g)$, если $g_n \in H^\infty$, $\|g_n\| \leq M$ и $g_n(z) \rightarrow g(z)$, $z \in D$. Пусть μ — такая мера на единичной окружности, что

$$L(f) = \int f d\mu, \quad f \in A_0 = H^\infty \cap C(T).$$

Пусть $E \subset T$ замкнуто и $|E| = 0$. Тогда E — множество пика для A_0 , и если $f \in A_0$ — соответствующая функция, то $f^n(z) \rightarrow 0$, $z \in D$, так что

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f^n d\mu = \mu(E).$$

Значит, μ абсолютно непрерывна, $d\mu = \varphi d\theta/2\pi$, $\varphi \in L^1$. Пусть $r_n \nearrow 1$ и $g_n(z) = g(r_n z)$ для $g \in H^\infty$. Тогда

$$L(g) = \lim_n L(g_n) = \lim_n \int g_n \varphi \frac{d\theta}{2\pi} = \int g \varphi \frac{d\theta}{2\pi}.$$

20. В. П. Хавин доказал теорему 5.2, используя более легкую часть теоремы 5.3 (или упр. 19) и некоторый вариант леммы IV. 4.5. В метрике $d(f, g) = \int |f - g| d\theta/2\pi$ пространства L^1 единичный шар пространства H^∞ полон и функционалы

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int f \varphi_n d\theta$$

непрерывны. По теореме Бэра о категории существует $b \in H^\infty$, $\|b\| \leq 1$, такое, что предельный функционал $L(f) = \lim_n L_n(f)$ непрерывен в точке b по этой метрике. Пусть $f_k \in H^\infty$, $\|f_k\| \leq 1$ и $f_k \rightarrow 0$ почти всюду. По теореме 5.3(b) достаточно показать, что $L(f_k) \rightarrow 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$E_k = \{e^{i\theta} : |f_k(e^{i\theta})| > \varepsilon\}.$$

Тогда $|E_k| \rightarrow 0$. Возьмем функции $g_k(z)$ и постоянные $\varepsilon_k \rightarrow 0$, как в лемме IV. 4.5. Тогда $\|1 - g_k\|_1 \rightarrow 0$, так что

$$d\left(b, \frac{g_k b + (1 - g_k) f_k}{1 + \varepsilon_k}\right) \rightarrow 0, \quad d\left(b, \frac{g_k b}{1 + \varepsilon_k}\right) \rightarrow 0.$$

Предельный функционал L линеен и ограничен, поэтому

$$L(f_k) = L(g_k f_k) + L(g_k b + (1 - g_k) f_k) - L(g_k b)$$

и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |L(f_k)| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |L(g_k f_k)| \leq \|L\| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|g_k f_k\|_{\infty}.$$

Поскольку $\sup_{E_k} |g_k| \rightarrow 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$, то

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|g_k f_k\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |L(f_k)| \leq \varepsilon \|L\|$ (см. Хавин [1973]).

*21. (а) Точка x единичного шара банахова пространства B называется *выступающей*, если существует $x^* \in B^*$, для которого $\|x^*\| = \langle x^*, x \rangle = 1$, но $|\langle x^*, y \rangle| < 1$ при $\|y\| \leq 1$, $y \neq x$. Функция $f \in H^{\infty}$ является выступающей точкой единичного шара H^{∞} тогда и только тогда, когда $\|f\| = 1$ и

$$|\{e^{i\theta}: |f(e^{i\theta})| = 1\}| > 0.$$

Не каждая крайняя точка является выступающей (см. Фишер [1969b], Амар и Ледерер [1971]. Случай алгебры A_0 обсуждает Фелпс [1965]¹⁾).

(б) Согласно (а) и теореме Бишопа и Фелпса [1961], множество $\{f \in H^{\infty}: |f| = \|f\| \text{ на множестве положительной меры}\}$ плотно по норме в H^{∞} (Фишер [1969b]).

¹⁾ См. также Хавин [1974]. — Прим. ред.

ОГРАНИЧЕННАЯ СРЕДНЯЯ ОСЦИЛЛЯЦИЯ

Пространство ВМО функций ограниченной средней осцилляции¹⁾ является вещественным сопряженным к вещественному банахову пространству H^1 . Как комплексное банахово пространство H^1 сопряжено с пространством L^∞/H_0^∞ , поэтому ВМО тесно связано с H^∞ .

Кроме того, некоторые идеи этой главы будут важны для нас в дальнейшем. Выделим три из них.

(i) Техника «моментов остановки», которая вводится в лемме Кальдерона — Зигмунда в разд. 2 при доказательстве теоремы Джона — Ниренберга. Такая же процедура сыграет решающую роль в конструкции из теоремы о короне и ее приложениях.

(ii) Конформная инвариантность пространства ВМО. Это действенная причина, стоящая за частым появлением ВМО в теории функций. Инвариантность ВМО тесно связана с инвариантностью мер Карлесона, которая описана в разд. 3.

(iii) Интегральная формула Литтлвуда — Пэли, позволяющая нам заменять некоторые контурные интегралы интегралами по площади, которые оценивать легче. В разд. 4 этот метод использован для доказательства теоремы двойственности; он будет вновь использован в гл. VIII и IX.

Глава заканчивается обсуждением весовых оценок сопряженной функции. Они применяются для получения точных оценок расстояния от $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ до $\text{Re } H^\infty$. Этот последний раздел главы несколько труднее предыдущих, а его техника, очень важная в анализе, не будет использована в дальнейшем. Поэтому менее подготовленные читатели, возможно, предпочтут продолжать чтение книги, не усвоив еще разд. 6.

1. Предварительные сведения

Измеримая функция $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}$ называется *локально интегрируемой*, $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$, если функция $|\varphi|$ интегрируема на любом компактном множестве. Если $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$, а I — ограниченный ин-

¹ ВМО — Bounded Mean Oscillation — Прим. ред.

тервал, то пусть

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi dt$$

обозначает среднее значение φ на I . Если $\varphi \in L^1_{loc}$ и

$$(1.1) \quad \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| dt = \|\varphi\|_* < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам I , то мы говорим, что φ имеет *ограниченную среднюю осцилляцию*, $\varphi \in \text{ВМО}$. Значение $\|\varphi\|_*$ из (1.1) — норма φ в ВМО. Поскольку постоянные функции имеют нулевую ВМО-норму, то мы отождествляем $\varphi \in \text{ВМО}$ с $\varphi + \alpha$, $\alpha = \text{const}$, и рассматриваем ВМО как подмножество в факторпространстве $L^1_{loc}/\{\text{постоянные}\}$. Тогда из определения непосредственно вытекает, что $\|\cdot\|_*$ действительно является нормой.

Тот факт, что в (1.1) мы вычитаем именно φ_I , не важен. Предположим, что для всякого ограниченного интервала I найдется какая-нибудь константа α_I , для которой

$$(1.2) \quad \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \alpha_I| dt \leq M.$$

Тогда, очевидно, $|\varphi_I - \alpha_I| \leq M$ и $\|\varphi\|_* \leq 2M$. Ясно, что $L^\infty \subset \text{ВМО}$ (точнее, $L^\infty/\mathbb{C} \subset \text{ВМО}$) и для $\varphi \in L^\infty$

$$\|\varphi\|_* \leq \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Поскольку $\|\varphi - \alpha\|_* = \|\varphi\|_*$ при постоянном α ,

$$\|\varphi\|_* \leq \inf_\alpha \|\varphi - \alpha\|_\infty.$$

Функция $\log|t|$ — пример неограниченной функции из ВМО. Если $-b < a < b$, то

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |\log|t| - \log b| dt \leq C,$$

и поскольку $\log|t|$ — четная функция, то мы заключаем, что $\log|t| \in \text{ВМО}$. В некотором смысле, который уточняется в разд. 2, $\log|t|$ — типичная неограниченная функция из ВМО. Отметим, что $\log|t| \cdot \chi_{\{t > \eta\}}(t)$ уже не лежит в ВМО, потому что условие (1.1) нарушается для малых интервалов с центром в 0.

Если $\varphi \in \text{ВМО}$, а I и J — такие интервалы, что $I \subset J$, $|J| \leq \leq 2|I|$, то

$$(1.3) \quad |\varphi_I - \varphi_J| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_J| dt \leq \frac{2}{|J|} \int_J |\varphi - \varphi_J| dt \leq 2 \|\varphi\|_*.$$

Лемма 1.1. Пусть $\varphi \in \text{ВМО}$, а I и J — ограниченные интервалы.

(а) Если $I \subset J$ и $|J| > 2|I|$, то

$$|\varphi_I - \varphi_J| \leq c \log(|J|/|I|) \|\varphi\|_*.$$

(б) Если $|I| = |J|$, то

$$|\varphi_I - \varphi_J| \leq c \log(2 + \text{dist}(I, J)/|I|) \|\varphi\|_*.$$

Доказательство. В части (а) положим

$$I = I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_n = J,$$

где $|I_{k+1}| \leq 2|I_k|$ и $n \leq c \log(|J|/|I|)$. Тогда (1.3) дает

$$|\varphi_I - \varphi_J| \leq 2n \|\varphi\|_* = c \log(|J|/|I|) \|\varphi\|_*.$$

Часть (б) следует из части (а), если сравнить φ_I и φ_J порознь с φ_K , где K — наименьший интервал, содержащий $I \cup J$. $\square$

Теорема 1.2. Функция $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$ входит в ВМО тогда и только тогда, когда

$$(1.4) \quad \int \frac{|\varphi(t)|}{1+t^2} dt < \infty$$

и

$$(1.5) \quad \sup_{\text{Im } z > 0} \int |\varphi(t) - \varphi(z)| P_z dt = A < \infty,$$

где $\varphi(z) = \int P_z(t) \varphi(t) dt$ — интеграл Пуассона функции φ . При этом

$$c_1 \|\varphi\|_* \leq A \leq c_2 \|\varphi\|_*,$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а A определено в (1.5).

Из условия (1.4) следует, что $\int |\varphi(t)| P_z(t) dt < \infty$, так что $\varphi(z)$ существует в каждой точке полуплоскости $\mathcal{H}$. Условие (1.5) очень похоже на (1.1) из определения ВМО, но там вместо ядер Пуассона фигурировали ступенчатые ядра $(1/2y) \chi_{|t-x|<y}(t)$.

Доказательство. Предположим, что φ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.5). Пусть x — центр ограниченного интервала I , $y = |I|/2$ и $z = x + iy$. Тогда

$$\frac{1}{|I|} \chi_I(t) \leq \pi P_y(x - t),$$

и в силу (1.5)

$$\frac{1}{|I|} \int |\varphi(t) - \varphi(z)| dt \leq \pi A,$$

так что $\|\varphi\|_* \leq 2\pi A$ согласно (1.2).

Теперь предположим, что $\varphi \in \text{ВМО}$ и $z = x + iy \in \mathcal{H}$. Обозначим через I_0 интервал $\{|t - x| < y\}$, а через I_k интервал $\{|t - x| < 2^k y\}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $|I_k| = 2^{k+1}y$ и

$$P_z(t) \leq C/y, \quad t \in I_0, \quad P_z(t) \leq C/2^{2k}y, \quad t \in I_k \setminus I_{k-1}.$$

Лемма 1.1 дает

$$|\varphi_{I_k} - \varphi_{I_0}| \leq ck \|\varphi\|_*,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int |\varphi(t) - \varphi_{I_0}| P_z(t) dt &\leq \frac{c}{y} \int_{I_0} |\varphi - \varphi_{I_0}| dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^{2k}y} \int_{I_k \setminus I_{k-1}} |\varphi - \varphi_{I_k}| dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{2^{2k}y} \int_{I_k \setminus I_{k-1}} |\varphi_{I_k} - \varphi_{I_0}| dt \leq \\ &\leq 2c \|\varphi\|_* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c}{2^k} \|\varphi\|_* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck}{2^k} \|\varphi\|_*. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\int |\varphi - \varphi_{I_0}| P_z(t) dt \leq C \|\varphi\|_*,$$

откуда, очевидно, следует (1.4). Но отсюда вытекает и $|\varphi(z) - \varphi_{I_0}| \leq C \|\varphi\|_*$, а значит, и

$$\int |\varphi - \varphi(z)| P_z(t) dt \leq 2C \|\varphi\|_*. \quad \square$$

На окружности T тоже есть пространство ВМО. Сейчас мы увидим, что это пространство является образом $\text{ВМО}(\mathbb{R})$ при конформном отображении. Пусть $\psi \in L^1(T)$. Мы говорим, что $\psi \in \text{ВМО}(T)$, если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\psi - \psi_I| \frac{d\theta}{2\pi} = \|\psi\|_* < \infty,$$

где I обозначает любую дугу на T , $|I| = \int_I d\theta/2\pi$ — длина I , а

$$\psi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \psi \frac{d\theta}{2\pi}$$

— среднее значение ψ на I . Доказательство теоремы 1.2 показывает, что эквивалентной нормой в $\text{ВМО}(T)$ является

$$(1.6) \quad \sup_{z \in D} \int |\psi(\theta) - \psi(z)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = B,$$

где $\psi(z) = \int \psi P_z \frac{d\theta}{2\pi}$. Таким образом,

$$(1.7) \quad c_1 \|\psi\|_* \leq B \leq c_2 \|\psi\|_*$$

с постоянными c_1 и c_2 (не обязательно теми же самыми, что и в теореме 1.2). Отобразим D на верхнюю полуплоскость по формуле

$$z(w) = i \frac{1-w}{1+w}, \quad w \in D.$$

Будем писать $z(w) = t(\theta)$ для $w = e^{i\theta}$, $\theta \neq \pi$. Как и в разд. I.3, при $z_0 = z(w_0)$, $|w_0| < 1$,

$$P_{w_0}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = P_{z_0}(t) dt.$$

Следовательно, полагая $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(R)$ и $\psi(\theta) = \varphi(t(\theta))$ и сравнивая (1.5) с (1.6), мы видим, что $\varphi \in \text{ВМО}(R)$ тогда и только тогда, когда $\psi \in \text{ВМО}(T)$. Мы также видим, что

$$(1.8) \quad c_1 \|\varphi\|_* \leq \|\psi\|_* \leq c_2 \|\varphi\|_*$$

при некоторых постоянных c_1 и c_2 .

Следствие 1.3. *Под действием конформного отображения*

$$z = i \frac{1-w}{1+w}, \quad |w| < 1,$$

$\text{ВМО}(R)$ и $\text{ВМО}(T)$ переходят друг в друга. Нормы функции $\varphi \in \text{ВМО}(R)$ и ее образа $\psi \in \text{ВМО}(T)$ связаны неравенствами (1.8).

Из условия (1.6) вытекает также, что $\text{ВМО}(T)$ имеет эквивалентную норму, инвариантную относительно мёбиусовых преобразований.

Следствие 1.4. *Пусть $\psi \in L^1(T)$, а τ — преобразование Мёбиуса. Тогда $\psi \in \text{ВМО}(T)$ в том и только том случае, когда $\psi \circ \tau \in \text{ВМО}(T)$. Существует не зависящая от τ постоянная C , такая, что*

$$\|\psi \circ \tau\|_* \leq C \|\psi\|_*.$$

Далее, существуют такие постоянные c_1 и c_2 , что

$$(1.9) \quad c_1 \|\psi\|_* \leq \sup_{\tau} \int |\psi \circ \tau - \psi \circ \tau(0)| \frac{d\theta}{2\pi} \leq c_2 \|\psi\|_*,$$

где

$$\psi \circ \tau(0) = \int \psi \circ \tau \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Доказательство. Согласно (1.6) и (1.7), нормы

$$\|\psi\|_*' = \sup_{z \in D} \int |\psi - \psi(z)| P_z(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

и $\|\psi\|_*$ в $\text{ВМО}(T)$ эквивалентны. Но правило преобразования (3.1) из гл. I показывает, что

$$\|\psi \circ \tau\|_*' = \|\psi\|_*'$$

для любого мёбиусова преобразования τ . Это означает, что $\|\psi \circ \tau\|_* \leq C \|\psi\|_*$. То же самое правило преобразования дает еще

$$\|\psi\|_*' = \sup_{\tau} \int |\psi \circ \tau - \psi \circ \tau(0)| \frac{d\theta}{2\pi},$$

так что (1.9) выполняется. $\square$

Бывает полезно представлять себе ВМО следующим образом. Ввиду (1.9) $\psi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда все расстояния

$$\inf_{\alpha} \|\psi \circ \tau - \alpha\|_{L^1(T)}$$

допускают оценку, не зависящую от выбора мёбиусова преобразования τ . На этом пути $\|\cdot\|_*$ можно рассматривать как конформно-инвариантный вариант факторнормы для $L^1(T)/\mathbb{C}$. Конформная инвариантность этой нормы подсказывает, что ВМО теснее связано с L^∞ , чем с другими пространствами L^p , $p < \infty$. Эти рассуждения справедливы и для $\text{ВМО}(\mathbb{R})$. В самом деле, (1.5) показывает, что норма на ВМО лишь несущественно возрастает при отображении $\varphi \rightarrow \varphi \circ \tau$, где $\tau(t) = (t - x)/y$ — конформный автоморфизм полуплоскости $\mathcal{H}$ с неподвижной точкой в бесконечности. Инвариантность $\text{ВМО}(\mathbb{R})$ относительно полной группы конформных автоморфизмов полуплоскости $\mathcal{H}$ вытекает из следствий 1.3 и 1.4. Ее также можно доказать и непосредственно, изучая $\varphi(-1/t)$, $\varphi \in \text{ВМО}(\mathbb{R})$.

Теорема 1.5. Если $\varphi \in L^\infty$, $\tilde{\varphi}$ — сопряженная функция, то $\tilde{\varphi} \in \text{ВМО}$ и

$$\|\tilde{\varphi}\|_* \leq C \|\varphi\|_\infty$$

с универсальной постоянной C .

Доказательство. По следствию 1.3 безразлично, докажем ли мы эту теорему на прямой или на окружности. Дока-

зательство для окружности становится совсем прозрачным, если мы используем следствие 1.4. Нормировка $\tilde{\psi}(0) = 0$ сопряженной функции означает, что $(\psi \circ \tau) = \psi \circ \tau - \psi(\tau(0))$. Тогда теорема Парсеваля и неравенство Гёльдера дают

$$\begin{aligned} \int |\tilde{\psi} \circ \tau(\theta) - \tilde{\psi}(\tau(0))| \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \left\{ \int |\tilde{\psi} \circ \tau(\theta) - \tilde{\psi}(\tau(0))|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\{ \int |\psi \circ \tau|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right\}^{1/2} \leq \|\psi \circ \tau\|_{\infty} = \|\psi\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Согласно (1.9), мы получаем $\|\tilde{\psi}\|_* \leq C\|\psi\|_{\infty}$. $\square$

Поучительно и вещественное доказательство теоремы 1.5, которое мы приведем для прямой.

Пусть $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, I — ограниченный интервал на $\mathbb{R}$ и $J = I$ концентрический с I интервал длины $|J| = 3|I|$. Положим $\varphi = \varphi\chi_J + (\varphi - \varphi\chi_J) = \varphi_1 + \varphi_2$. Теперь

$$\begin{aligned} H\varphi_1(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\varphi_1(t)}{x-t} dt, \quad x \in I, \\ H\varphi_2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus J} \varphi_2(t) \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x_0-t} \right) dt, \quad x \in I, \end{aligned}$$

где x_0 — центр интервала I , и

$$\tilde{\varphi} = H\varphi_1 + H\varphi_2 + c, \quad x \in I,$$

где c — несущественная постоянная, зависящая от I . По неравенству Гёльдера и (1.10) гл. III

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int |H\varphi_1| dx &\leq \left\{ \frac{1}{|I|} \int |H\varphi_1|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{|I|^{1/2}} \|\varphi_1\|_2 \leq \\ &\leq \left(\frac{|J|}{|I|} \right)^{1/2} \|\varphi_1\|_{\infty} \leq \sqrt{3} \|\varphi\|_{\infty}. \end{aligned}$$

При $x \in I$, $t \notin J$

$$\left| \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x_0-t} \right| \leq \frac{c|I|}{|x_0-t|^2},$$

так что при $x \in I$

$$|H\varphi_2(x)| \leq \frac{C|I|}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus J} \frac{|\varphi(t)|}{|x_0-t|^2} dt \leq C\|\varphi\|_{\infty}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |H\varphi_2(x)| dx \leq C\|\varphi\|_{\infty},$$

и ввиду (1.2)

$$\|\tilde{\varphi}\|_* \leq (\sqrt{3} + C) \|\varphi\|_{\infty}.$$

Пусть σ — конечная вещественная мера на верхней полуплоскости. *Выметанием* меры σ называется функция

$$S\sigma(t) = \int P_z(t) d\sigma(z).$$

Теорема Фубини показывает, что $S\sigma(t)$ существует почти всюду и

$$\int |S\sigma(t)| dt \leq \int d|\sigma| = \|\sigma\|.$$

Оператор выметания S сопряжен с интегралом Пуассона $f \rightarrow f(z) = \int f(t) P_z(t) dt$, потому что при $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ теорема Фубини дает

$$\int f(z) d\sigma(z) = \int f(t) S\sigma(t) dt.$$

Пусть теперь полная вариация $|\sigma|$ меры σ является мерой Карлесона:

$$(1.10) \quad |\sigma|(Q) \leq N(\sigma)h,$$

где $Q = \{x_0 < x < x_0 + h, 0 < y < h\}$. Тогда по теореме II.3.9. о мерах Карлесона

$$\left| \int f(t) S\sigma(t) dt \right| \leq N(\sigma) \|f\|_{H^1}, \quad f \in H^1,$$

но пока это мало что говорит нам о функции $S\sigma(t)$.

Теорема 1.6. Если σ — конечная мера на верхней полуплоскости, полная вариация $|\sigma|$ которой — мера Карлесона, то $S\sigma \in \text{ВМО}$ и

$$\|S\sigma\|_* \leq CN(\sigma),$$

где $N(\sigma)$ — постоянная из (1.10), а C — универсальная постоянная.

Доказательство. Рассуждение очень похоже на вещественное доказательство теоремы 1.5. Полагая $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$, где $\sigma^\pm \geq 0$ и $|\sigma| = \sigma^+ + \sigma^-$, мы можем считать, что $\sigma \geq 0$. Пусть I_0 — фиксированный интервал, I_n — концентрический ему интервал длины $|I_n| = 2^n |I_0|$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$Q_n = \{z: x \in I_n, 0 < y < |I_n|\}$$

— квадрат с основанием I_n . Тогда

$$\int_{I_0} \int_{Q_1} P_z(t) d\sigma(z) dt \leq \sigma(Q_1) \leq 2N(\sigma) |I_0|.$$

При $z \in Q_n \setminus Q_{n-1}$, $n \geq 2$, и $t \in I_0$, $t_0 \in I_0$ имеем

$$|P_z(t) - P_z(t_0)| \leq \frac{c}{2^{2n} |I_0|}.$$

Значит,

$$\int_{I_0} \left| \int_{Q_n \setminus Q_{n-1}} (P_z(t) - P_z(t_0)) d\sigma(z) \right| dt \leq \frac{c\sigma(Q_n)}{2^{2n}} \leq \frac{cN(\sigma) |I_0|}{2^n}.$$

Суммируя, получаем с учетом (1.2)

$$\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} |S\sigma - (S\sigma)_{I_0}| dt \leq CN(\sigma)$$

и $\|S\sigma\|_* \leq CN(\sigma)$. $\square$

Мы предполагали меру $|\sigma|$ в теореме 1.6 конечной только ради уверенности в существовании $S\sigma$. Теорема верна и для бесконечных мер, если

$$|\sigma|(\{y > y_0\}) = 0$$

при некотором y_0 . Все же некоторые условия на меру необходимы для сходимости выметания $S\sigma$: если $\sigma = \sum 2^n \delta_{2^n i}$, то $S\sigma \equiv \infty$.

Основная теорема о ВМО утверждает, что ВМО — это пространство, сопряженное с вещественным банаховым пространством H^1 . Из нее следует, что каждая функция $\varphi \in \text{ВМО}$ имеет вид

$$\varphi = f + Hg, \quad f, g \in L^\infty.$$

Это обратная теорема к теореме 1.5. Мы докажем основную теорему в разд. 4 после того, как обсудим теорему Джона — Ниренберга и введем некоторые важные квадратичные интегралы. Теорема 1.6 также имеет обратную, которая эквивалентна обратной к теореме 1.5 (упр. 7).

2. Теорема Джона — Ниренберга

Теорема 2.1. Если $\varphi \in \text{ВМО}(\mathbb{R})$, а I — интервал, то для любого $\lambda > 0$

$$(2.1) \quad \frac{1}{|I|} |\{t \in I: |\varphi(t) - \varphi_I| > \lambda\}| \leq C \exp\left(\frac{-c\lambda}{\|\varphi\|_*}\right),$$

где постоянные C и c не зависят от φ , I и λ .

Условие (2.1) утверждает, что функция распределения для $|\varphi - \varphi_I|$ по нормированной мере Лебега на I ведет себя не хуже,

чем функция распределения для $\log(1/t)$ на $[0, 1]$. Теорема, обратная к теореме Джона — Ниренберга, тривиальна. Мы видим, что функция $\log|t|$ действительно имеет типичную для ВМО функцию распределения.

Единственная причина, по которой функции из ВМО удовлетворяют очень сильному условию (2.1), состоит в том, что определение ВМО касается всех подынтервалов интервала I . Ключ к доказательству — основная лемма, принадлежащая Кальдерону и Зигмунду.

Лемма 2.2. Пусть I — ограниченный интервал, $u \in L^1(I)$ и

$$\alpha > \frac{1}{|I|} \int_I |u| dt.$$

Тогда существует конечная или бесконечная последовательность $\{I_j\}$ попарно не пересекающихся открытых подынтервалов интервала I , такая, что

$$(2.2) \quad |u| \leq \alpha \text{ почти всюду в } I \setminus \bigcup_j I_j,$$

$$(2.3) \quad \alpha \leq \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |u| dt < 2\alpha,$$

$$(2.4) \quad \sum |I_j| \leq \frac{1}{\alpha} \int_I |u| dt.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $I = (0, 1)$. Разобьем I на два интервала: $\omega_0 = (0, 1/2)$ и $\omega_1 = (1/2, 1)$. Для каждого из них возможны два случая:

$$\text{Случай (i):} \quad \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |u| dt < \alpha;$$

$$\text{Случай (ii):} \quad \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |u| dt \geq \alpha.$$

По предположению для исходного интервала I имеет место случай (i). В случае (i) мы разделим ω на два непересекающихся интервала длины $|\omega|/2$ и к каждому из них применим случаи (i) и (ii).

В случае (i) каждый интервал мы поделим снова. Если же нам попадется интервал ω типа (ii), то его мы делить не будем, а поместим ω в последовательность $\{I_j\}$. Возникшая последовательность $\{I_j\}$ состоит из непересекающихся интервалов, потому что в случае (ii) интервал уже не разбивается.

Если $x \in I \setminus \bigcup_j I_j$, то для каждого диадического интервала, содержащего x , имеет место случай (i). По теореме Лебега о

дифференцировании интегралов это означает, что $|u(x)| \leq \alpha$ для почти всех $x \in I \setminus \bigcup I_j$, так что (2.2) выполняется.

Каждый выбранный интервал I_j содержится в единственном диадическом интервале I_j^* с $|I_j^*| = 2|I_j|$. Раз этот больший интервал не был выбран, то для него имеет место случай (i) и

$$\alpha > \frac{1}{|I_j^*|} \int_{I_j^*} |u| dt \geq \frac{1}{2|I_j|} \int_{I_j} |u| dt,$$

так что и (2.3) выполняется.

Наконец, так как все I_j — непересекающиеся интервалы типа (ii), то

$$\sum |I_j| \leq \sum \frac{1}{\alpha} \int_{I_j} |u| dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_I |u| dt. \quad \square$$

Правило выбора интервалов I_j на самом деле таково: мы выбираем максимальные по включению из тех диадических интервалов $\omega = (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \subset (0, 1)$, для которых

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |u| dt \geq \alpha.$$

Этот метод выбора интервалов — простейший пример так называемой *техники моментов остановки*, которую специалисты по теории вероятностей часто применяют к более общему случаю мартингалов. В оставшихся главах и мы часто будем использовать подобные рассуждения.

Доказательство теоремы. Ввиду однородности неравенства (2.1) мы можем считать, что $\|\varphi\|_* = 1$. Выберем интервал I и применим лемму 2.2 к $u = |\varphi - \varphi_I|$ и $\alpha = 3/2$. Мы получим такие интервалы I_j^1 , что $|\varphi - \varphi_{I_j^1}| \leq 3/2$ почти всюду в $I \setminus \bigcup I_j^1$.

$$(2.5) \quad |\varphi_{I_j^1} - \varphi_I| < 3$$

согласно (2.3), и по (2.4)

$$(2.6) \quad \sum |I_j^1| \leq \frac{2}{3} |I|.$$

К каждому I_j^1 мы снова применим лемму 2.2 с $u = \varphi - \varphi_{I_j^1}$ и $\alpha = 3/2$. Мы получим такие интервалы I_j^2 , что каждый из них содержится в одном из I_j^1 , почти всюду на $I \setminus \bigcup I_j^2$ выполняется в силу (2.5) и (2.2) $|\varphi - \varphi_I| < 3/2 + 3 < 6$, в силу (2.3) и (2.5)

$$|\varphi_{I_j^2} - \varphi_I| < 6,$$

и, наконец,

$$\sum_I |I_I^2| \leq \frac{2}{3} \sum_I |I_I| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |I|.$$

Продолжим этот процесс до бесконечности. На шаге n мы получим интервалы I_I^n , такие, что $|\varphi - \varphi_I| < 3n$ почти всюду в $I \setminus \bigcup_I I_I^n$ и

$$\sum_I |I_I^n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |I|.$$

Если теперь $n > 1$ таково, что $3n < \lambda \leq 3n + 3$, то

$$|\{t \in I: |\varphi(t) - \varphi_I| > \lambda\}| \leq \sum_I |I_I^n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |I| \leq e^{-c\lambda} |I|$$

при $c = (1/6) \log(3/2)$. Значит, для $\lambda \geq 3$ (2.1) верно. Но при $0 < \lambda < 3$, очевидно,

$$|\{t \in I: |\varphi(t) - \varphi_I| > \lambda\}| \leq |I| < e^{3c} e^{-c\lambda} |I|,$$

так что, полагая $C = e^{3c}$, мы получаем (2.1) при всех λ . $\square$

Теорема Джона — Ниренберга имеет много интересных следствий, первое из которых — волшебное обращение неравенства Гёльдера.

Следствие 2.3. Если $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| dt = \|\varphi\|_* < \infty,$$

то для любого конечного $p > 1$

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^p dt \right)^{1/p} \leq A_p \|\varphi\|_*,$$

где постоянная A_p зависит только от p .

Доказательство. Так как $\varphi \in \text{ВМО}$, то в нашем распоряжении неравенство (2.1). Выберем I и положим

$$m(\lambda) = \frac{1}{|I|} |\{t \in I: |\varphi(t) - \varphi_I| > \lambda\}|.$$

Тогда так как $m(\lambda)$ — это функция распределения для $|\varphi - \varphi_I|$, то

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^p dt = p \int_0^\infty m(\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda,$$

и из (2.1) вытекает, что

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^p dt \leq C p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \exp\left(\frac{-c\lambda}{\|\varphi\|_*}\right) d\lambda = C p \Gamma(p) \frac{\|\varphi\|_*^p}{c^p}. \quad \square$$

Постоянная A_p в следствии 2.3 при $p \rightarrow \infty$ имеет вид $A_p \sim pA$ при некотором A . Действительно, доказательство следствия вместе с формулой Стирлинга дает $A_p \leq pA$ при больших p , а замечания после теоремы III.2.3 показывают, что эта оценка величины A_p точна.

Следствие 2.4. Если $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, то $\varphi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда

$$\int \frac{|\varphi(t)|^2}{1+t^2} dt < \infty$$

и

$$(2.7) \quad \sup_{|mz| > 0} \int |\varphi - \varphi(z)|^2 P_z(t) dt = B_2 < \infty,$$

где $\varphi(z)$ — интеграл Пуассона от φ . Существуют такие постоянные c_1 и c_2 , что $c_1 \|\varphi\|_* \leq B_2^{1/2} \leq c_2 \|\varphi\|_*$.

Перед доказательством отметим тривиальное, но полезное тождество

$$(2.8) \quad \inf_a \int |\varphi - a|^2 P_z(t) dt = \int |\varphi - \varphi(z)|^2 P_z(t) dt = \\ = \int |\varphi|^2 P_z(t) dt - |\varphi(z)|^2,$$

которое выполняется потому, что ортогональная проекция функции φ на постоянные в гильбертовом пространстве $L^2(P_z(t) dt)$ совпадает с $\varphi(z)$.

Доказательство. Если интеграл Пуассона от $|\varphi|^2$ сходится и выполняется (2.7), то, согласно неравенству Гёльдера и теореме 1.2,

$$\|\varphi\|_* \leq c_2 B_2^{1/2}.$$

Доказательство обратного утверждения напоминает доказательство теоремы 1.2. Пусть $\varphi \in \text{ВМО}$, $z = x + iy$, $y > 0$, и I_k — интервал $\{|t - x| < 2^k y\}$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда $|I_0| = 2y$ и

$$P_z(t) \leq \frac{c}{y}, \quad t \in I_0,$$

$$P_z(t) \leq \frac{c}{2^{2k} y}, \quad t \in I_k \setminus I_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь по лемме 1.1

$$|\varphi - \varphi_{I_0}|^2 \leq 2|\varphi - \varphi_{I_k}|^2 + 2|\varphi_{I_k} - \varphi_{I_0}|^2 \leq 2|\varphi - \varphi_{I_k}|^2 + 2c^2 k^2 \|\varphi\|_*^2.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int |\varphi - \varphi_{I_0}|^2 P_z(t) dt &\leq \frac{2c}{|I_0|} \int_{I_0} |\varphi - \varphi_{I_0}|^2 dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c}{2^k |I_k|} \int_{I_k \setminus I_{k-1}} |\varphi - \varphi_{I_k}|^2 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c^2}{2^k |I_k|} k^2 \|\varphi\|_*^2 |I_k| \leq \\ &\leq C_2^2 \|\varphi\|_*^2. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 2.5. Если φ лежит в ВМО, то и сопряженная функция $\tilde{\varphi}$ принадлежит ВМО и

$$c_1 \|\varphi\|_* \leq \|\tilde{\varphi}\|_* \leq c_2 \|\varphi\|_*$$

при некоторых постоянных c_1 и c_2 , не зависящих от φ .

Доказательство. Согласно следствию 2.4, достаточно показать, что

$$\int |\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}(z)|^2 P_z(t) dt = \int |\varphi - \varphi(z)|^2 P_z(t) dt, \quad z \in \mathcal{H}.$$

Это сводится к равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int |\tilde{g}|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int |g|^2 d\theta, \quad g \in L^2(T), \quad \int g d\theta = 0,$$

посредством конформного отображения полуплоскости $\mathcal{H}$ на D , переводящего точку z в 0. $\square$

3. Интегралы Литтлвуда — Пэли и меры Карлесона

Начнем с классического тождества типа Литтлвуда — Пэли. Пусть $g(e^{i\theta})$ — интегрируемая функция на T , а $g(z)$, $z \in D$, — ее интеграл Пуассона. Квадрат длины вектора градиента $\nabla g(z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ дается формулой

$$|\nabla g(z)|^2 = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2,$$

так что для аналитической функции $g(z)$

$$|\nabla g(z)|^2 = 2|g'(z)|^2.$$

Пусть Ω — плоская область с гладкой границей, а u и v — две C^2 -функции на $\bar{\Omega}$. По теореме Грина

$$\iint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds,$$

где Δ — лапласиан, $\partial/\partial n$ — дифференцирование в направлении внешней нормали к $\partial\Omega$, а ds — длина дуги на $\partial\Omega$.

Лемма 3.1. Если $g(e^{i\theta}) \in L^1(T)$, а $g(0) = \frac{1}{2\pi} \int g(\theta) d\theta$ — ее среднее значение, то

$$(3.1) \quad \frac{1}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2 d\theta.$$

Доказательство. Можно считать, что $g(0) = 0$. Заметим, что

$$2|\nabla g(z)|^2 = \Delta(|g(z)|^2).$$

Применяя теорему Грина к $u(z) = |g(z)|^2$, $v(z) = \log(r/|z|)$ и $\Omega = \{|z| < r\}$, $r < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{|z| < r} \Delta(|g(z)|^2) \log \frac{r}{|z|} dx dy &= \int_{|z|=r} |g(z)|^2 \frac{ds}{r} - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|=\varepsilon} \left(\frac{|g(z)|^2}{\varepsilon} - \log \frac{r}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial |z|} |g(z)|^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Но $g(0) = 0$, а градиент $|\nabla g(z)|$ ограничен при $|z| < 1/2$, и этот предел равен 0. Значит,

$$\iint_{|z| < r} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{r}{|z|} dx dy = \frac{1}{2} \int |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

При $r \rightarrow 1$ левая часть этого равенства монотонно стремится к

$$\iint_D |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy,$$

а правая — к $\frac{1}{2} \int |g(e^{i\theta})|^2 d\theta$. $\square$

Иногда бывает легче работать с несколько иной формой тождества (3.1).

Лемма 3.2. Если $g(e^{i\theta}) \in L^1(T)$, то

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \frac{1}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 (1 - |z|^2) dx dy &\leq \frac{1}{\pi} \int |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2 d\theta \leq \\ &\leq \frac{C}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 (1 - |z|^2) dx dy \end{aligned}$$

с абсолютной постоянной C .

Доказательство. Левое неравенство в (3.2) следует из (3.1) и того, что $1 - |z|^2 \leq 2 \log(1/|z|)$, $|z| < 1$. Чтобы доказать правое неравенство, предположим, что двойной интеграл конечен, и нормируем g условием

$$\frac{1}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 (1 - |z|^2) dx dy = 1.$$

При $|z| > 1/4$ справедливо неравенство $\log(1/|z|) \leq c_1(1 - |z|^2)$, так что

$$\frac{1}{\pi} \iint_{1/4 < |z| < 1} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq \frac{c_1}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 (1 - |z|^2) dx dy.$$

При $|z| \leq 1/4$ субгармоничность $|\nabla g(z)|^2$ дает при $\xi = \xi + i\eta$

$$\begin{aligned} |\nabla g(z)|^2 &\leq \frac{16}{\pi} \iint_{|\xi - z| < 1/4} |\nabla g(\xi)|^2 d\xi d\eta \leq \\ &\leq \frac{32}{\pi} \iint_{|\xi| < 1/2} |\nabla g(\xi)|^2 (1 - |\xi|^2) d\xi d\eta \leq 32. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z| < 1/4} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq \frac{32}{\pi} \iint_{|z| < 1/4} \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq c_2.$$

Теперь из (3.1) мы заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2 d\theta \leq \frac{c_1 + c_2}{\pi} \iint_D |\nabla g(z)|^2 (1 - |z|^2) dx dy. \quad \square$$

Для доказательства (3.2) можно использовать и ряды Фурье, тогда получится точная постоянная $C = 4$. В некоторых задачах (3.2) имеет преимущество перед (3.1) из-за отсутствия логарифмической особенности, но (3.1) — тождество, и поляризацией из него можно получить билинейные соотношения, чего с (3.2) сделать нельзя.

Для изучения ВМО мы используем конформно-инвариантные формы соотношений (3.1) и (3.2). Пусть $z_0 \in D$ и $\varphi \in L^1(T)$. Тождество

$$(3.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \iint_D |\nabla \varphi(z)|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0} \right| dx dy$$

имеет то же самое доказательство, что и (3.1), и получается из него заменой переменной $z \rightarrow (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$, так как дифференциальная форма $|\nabla \varphi(z)|^2 dx dy$ конформно-инвариантна. Таким же образом, используя равенство

$$1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2},$$

мы получаем инвариантную форму оценок (3.2)

$$\begin{aligned} (3.4) \quad \frac{1}{\pi} \iint_D |\nabla \varphi(z)|^2 \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} dx dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta \leq \frac{C}{\pi} \iint_D |\nabla \varphi(z)|^2 \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} dx dy. \end{aligned}$$

В силу следствия 2.4 $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z_0 \in D} \frac{1}{2\pi} \int |\varphi - \varphi(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta < \infty,$$

и это выражение является квадратом еще одной нормы в ВМО, эквивалентной норме $\|\cdot\|_*$. Значит, точная верхняя грань по $z_0 \in D$ двойных интегралов в (3.3) или (3.4) тоже определяет эквивалентную норму в ВМО.

Положительная мера λ в D называется *мерой Карлесона*, если для некоторой постоянной $N(\lambda)$

$$(3.5) \quad \lambda(S) \leq N(\lambda)h$$

для каждого сектора

$$S = \{re^{i\theta}: 1-h \leq r < 1, |\theta - \theta_0| \leq h\}.$$

Мы включаем случай $h = 1$, так что $\lambda(D) \leq 4N(\lambda)$. Мы знаем из гл. I и II, что мера λ будет мерой Карлесона тогда и только тогда, когда $\int |f(z)|^p d\lambda \leq C_p \|f\|_p^p$ для всех $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, или всех $f \in H^p$, $0 < p < \infty$. Здесь мы хотим отметить конформно-инвариантный характер условия карлесоновости.

Лемма 3.3. *Положительная мера λ в круге будет карлесоновой тогда и только тогда, когда*

$$(3.6) \quad \sup_{z_0 \in D} \int \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) = M < \infty,$$

причем

$$C_1 N(\lambda) \leq M \leq C_2 N(\lambda)$$

с абсолютными постоянными C_1 и C_2 ¹⁾.

Доказательство. Пусть выполнено (3.6), а $S = \{1-h \leq r < 1, |\theta - \theta_0| < h\}$ — произвольный сектор. Можно считать, что $h < 1/4$, так как при $z_0 = 0$ (3.6) дает $\lambda(D) \leq M$. Выберем $z_0 = (1-h/2)e^{i\theta_0}$. При $z \in S$

$$\frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \geq \frac{C}{1 - |z_0|^2},$$

и потому

$$\lambda(S) \leq C_1 (1 - |z_0|) \int \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda \leq C_1 M (1 - |z_0|) = 2C_1 M h.$$

¹⁾ Инвариантное условие (3.6) и некоторые другие его формы появляются более непосредственно в доказательстве теоремы II.3.9 (в случае $p = 2$), принадлежащем С. А. Виноградову (Никольский [1980*], с. 195). — *Прим. ред.*

Обратно, пусть λ — мера Карлесона и $z_0 \in D$. Если $|z_0| < 3/4$, то

$$\int \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) \leq C\lambda(D) \leq C'N(\lambda).$$

Если же $|z_0| > 3/4$, то положим

$$E_n = \left\{ z \in D: \left| z - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < 2^n(1 - |z_0|) \right\}.$$

Ввиду (3.5) $\lambda(E_n) \leq CN(\lambda)2^n(1 - |z_0|)$, $n = 1, 2, \dots$. Но

$$\begin{aligned} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} &\leq \frac{C}{1 - |z_0|}, & z \in E_1, \\ \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} &\leq \frac{C}{2^{2n}(1 - |z_0|)}, & z \in E_n \setminus E_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) &\leq \int_{E_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n \setminus E_{n-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c\lambda(E_n)}{2^{2n}(1 - |z_0|)} \leq \\ &\leq C'N(\lambda) \sum_n 2^{-n} = C'N(\lambda). \quad \square \end{aligned}$$

В верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ секторы в определении мер Карлесона заменяются квадратами:

$$(3.7) \quad \lambda(\{x_0 \leq x \leq x_0 + h, 0 < y \leq h\}) \leq N(\lambda)h.$$

Аналог (3.6) имеет вид

$$(3.8) \quad \sup_{z_0 \in \mathcal{H}} \int \frac{y_0}{|z - \bar{z}_0|^2} d\lambda(z) = M < \infty,$$

и доказательство эквивалентности (3.7) и (3.8) геометрически даже проще, чем в лемме 3.3.

Следующая теорема — главный результат раздела — кажется теперь почти очевидной.

Теорема 3.4. Пусть $\varphi \in L^1(T)$ и

$$d\lambda_\varphi = |\nabla\varphi(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy,$$

где $\nabla\varphi(z)$ — градиент интеграла Пуассона от φ . Тогда $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ в том и только том случае, когда λ_φ — мера Карлесона. Существуют универсальные постоянные C_1 и C_2 , для которых

$$C_1 \|\varphi\|_*^2 \leq N(\lambda_\varphi) \leq C_2 \|\varphi\|_*^2.$$

Доказательство. Ввиду (3.4) и следствия 2.4 $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ тогда и только тогда, когда

$$(3.9) \quad \sup_{z_0 \in D} \iint_D |\nabla\varphi(z)|^2 \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} dx dy = M_1 < \infty,$$

причем $M_1 \approx \|\varphi\|_*^2$. По лемме 3.3 условие (3.9) равносильно карлесоновости меры

$$d\mu_f = |\nabla\varphi(z)|^2(1-|z|^2)dx dy$$

и $N(\mu_f) \approx \|\varphi\|_*^2$. Осталось доказать, что λ_φ и μ_φ являются мерами Карлесона одновременно и что $N(\lambda_\varphi) \approx N(\mu_\varphi)$. Половина этой задачи тривиальна, поскольку $1-|z|^2 \leq 2\log(1/|z|)$ и $\mu_\varphi \leq 2\lambda_f$. При $|z| > 1/4$ обратное неравенство $\log(1/|z|) \leq C(1-|z|^2)$ дает

$$\lambda_\varphi(S) \leq C\mu_\varphi(S)$$

для секторов $S = \{1-h \leq r < 1, |\theta - \theta_0| < h\}$, $h \leq 3/4$.

Это докажет неравенство $N(\lambda_\varphi) \leq CN(\mu_\varphi)$, если мы сумеем показать, что

$$(3.10) \quad \lambda_\varphi(\{|z| \leq 1/4\}) \leq C\mu_\varphi(\{|z| \leq 1/2\}) \leq CN(\mu_\varphi).$$

Но мы уже касались (3.10) в лемме 3.2. Поскольку функция $|\nabla\varphi(z)|^2$ субгармонична, то

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\{|z| \leq 1/4\}) &\leq C \sup_{|z| \leq 1/4} |\nabla\varphi(z)|^2 \leq \\ &\leq \frac{32C}{\pi} \iint_{|\xi| \leq 1/2} |\nabla\varphi(\xi)|^2(1-|\xi|^2) d\xi d\eta \leq \\ &\leq C'\mu_\varphi(\{|\xi| \leq 1/2\}). \end{aligned}$$

Это дает (3.10) и, значит, $N(\lambda_\varphi) \leq CN(\mu_\varphi)$. $\square$

Мера λ_φ (с логарифмом) будет нам полезна, когда в следующем разделе мы произведем поляризацию равенства (3.1). Важнейшей составной частью теоремы 3.4 является теорема Джона—Ниренберга, которая позволяет описывать ВМО квадратичными выражениями.

4. Теорема двойственности Феффермана

Вначале сделаем небольшое отступление и найдем пространство, сопряженное с $H^p(dt)$, $1 \leq p < \infty$. Для круга это было сделано в разд. IV. 1; для полуплоскости рассуждения формально те же самые.

Лемма 4.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $q = p/(p-1)$ и $g \in L^q$. Функция g лежит в $(H^p)^\perp$, т. е.

$$(4.1) \quad \int fg dt = 0, \quad f \in H^p,$$

тогда и только тогда, когда $g \in H^q$.

Доказательство. Если $g \in H^q$, то $fg \in H^1$, и (4.1) следует из леммы II. 3.7,

С другой стороны, если выполняется (4.1), то интеграл Пуассона функции g аналитичен в полуплоскости $\mathcal{H}$. Действительно, при $z \in \mathcal{H}$ и $z_0 \in \mathcal{H}$ функция

$$h_z(t) = \frac{1}{\bar{z} - t} - \frac{1}{\bar{z}_0 - t}$$

лежит в H^p и

$$P_z - P_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} (h_z - \bar{h}_z).$$

Значит, по (4.1)

$$\begin{aligned} g(z) - g(z_0) &= \int g(t) (P_z(t) - P_{z_0}(t)) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int g(t) \left(\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z_0-t} \right) dt, \end{aligned}$$

т. е. g аналитична. Тогда $g \in (H^p)^\perp$ по теореме I.3.5. $\square$

Доказанная лемма и теорема Хана — Банаха дают

$$(4.2) \quad (H^p)^* = L^q/H^q, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где билинейное спаривание между $f \in H^p$ и факторклассом $g + H^q \in L^q/H^q$ дается формулой $\int fg dt$.

Наша цель в этом разделе — представить $(H^p)^*$ как пространство функций, а не факторпространство. Два банаховых пространства X и Y называются *изоморфными*, если существует такое линейное отображение T пространства X на пространство Y , что

$$c_1 \|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2 \|x\|, \quad x \in X.$$

Такой изоморфизм называется *изометрией*, если $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$. О двух изоморфных пространствах можно думать как об одном пространстве с двумя разными (но эквивалентными) нормами.

Мы намерены установить изоморфизм между $(H^p)^*$ и некоторым пространством функций. При $1 < p < \infty$ искомый изоморфизм дает теорема М. Рисса о сопряженных функциях.

Теорема 4.2. При $1 < p < \infty$ пространство $(H^p)^*$ изоморфно H^q — пространству функций, комплексно сопряженных с функциями из H^p . Изоморфизм $T: H^q \rightarrow (H^p)^*$ определен формулой

$$(4.3) \quad (Tg)(f) = \int fg dt, \quad f \in H^p, \quad g \in H^q.$$

Доказательство. Поскольку $1 < q < \infty$, то преобразование Гильберта H и оператор $S(g) = g - iHg$ ограничены в L^q . Ядро оператора S совпадает с H^q , а образ — с H^q . По теореме об открытом отображении индуцированное отображение $S: L^q/H^q \rightarrow H^q$ является изоморфизмом, так что по (4.2)

$T = S^{-1}$ — изоморфизм пространства $\bar{H}^q$ на $(H^p)^* = L^q/H^q$. При $g \in \bar{H}^q$ имеем $S(g + H^q) = g$, и (4.3) выполняется. $\square$

При $p = 1$ эти рассуждения неприменимы, потому что теорема Рисса неприменима к L^∞ . Мы увидим, что пространство функций, изоморфное $(H^1)^* = L^\infty/H^\infty$, — это не $\bar{H}^\infty$, а ВМО.

Нам будет удобно рассматривать H^1 как банахово пространство над полем вещественных чисел. Разумеется, каждое комплексное банахово пространство X является и вещественным. В то же время комплексные линейные функционалы на X можно очень просто получить из вещественных линейных функционалов. Пусть L — вещественный линейный функционал на X , тогда

$$L_{\mathbb{C}}(x) = L(x) - iL(ix)$$

— комплексный линейный функционал и

$$L(x) = \operatorname{Re} L_{\mathbb{C}}(x).$$

Поскольку $\|L_{\mathbb{C}}\| = \sup \{\operatorname{Re} L_{\mathbb{C}}(x) : \|x\| = 1\}$, то функционалы L и $L_{\mathbb{C}}$ имеют одинаковые нормы. Стало быть, соответствие $L \rightarrow L_{\mathbb{C}}$ является вещественной линейной изометрией между пространством вещественных линейных функционалов на X и вещественным банаховым пространством комплексных линейных функционалов на X .

Например, H^p как вещественное банахово пространство при $1 < p < \infty$ изоморфно пространству $L^p_{\mathbb{R}}$ вещественных функций из L^p . Изоморфизм снова получается из теоремы Рисса с помощью формулы

$$L^p_{\mathbb{R}} \ni u \rightarrow u + iHu.$$

Стало быть, любой вещественный линейный функционал на H^p дается формулой

$$L(u + iHu) = \int uv \, dt$$

при единственном $v \in L^q_{\mathbb{R}}$. Соответствующий комплексный линейный функционал равен

$$L_{\mathbb{C}}(u + iHu) = \int uv \, dt + i \int (Hu)v \, dt.$$

Равенства

$$\int (Hu)v \, dt = - \int uHv \, dt, \quad \int (Hu)(Hv) \, dt = \int uv \, dt,$$

вытекающие из леммы 4.1 или из формул (1.9) и (1.10) гл. III, показывают, что

$$L_{\mathbb{C}}(u + iHu) = \int (u + iHu)g \, dt, \quad g = (v - iHv)/2 \in \bar{H}^q.$$

Это возвращает нас к (4.3); на самом деле мы просто перефразировали доказательство теоремы 4.2. Но в случае $p = 1$

вещественные линейные функционалы упрощают проблему двойственности.

Пусть $p = 1$. Как вещественное банахово пространство H^1 изоморфно $H^1_{\mathbb{R}} = \{u \in L^1_{\mathbb{R}}: Hu \in L^1_{\mathbb{R}}\}$, если наделить $H^1_{\mathbb{R}}$ нормой графика $\|u\|_{H^1} = \|u\|_1 + \|Hu\|_1$. Эта норма выбрана так, что соответствие $f \rightarrow \operatorname{Re} f$ оказывается изоморфизмом H^1 на $H^1_{\mathbb{R}}$.

Напомним, что по следствию II.3.3 множество

$$\mathfrak{A} = \{u \in H^1_{\mathbb{R}}: (1 + t^2)|u + iHu| \in L^\infty\}$$

плотно в $H^1_{\mathbb{R}}$ по норме.

Лемма 4.3. Если L — непрерывный вещественный линейный функционал на $H^1_{\mathbb{R}}$, то существуют такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty_{\mathbb{R}}$, что

$$\|\varphi_1\|_\infty \leq \|L\|, \quad \|\varphi_2\|_\infty \leq \|L\|$$

и

$$(4.4) \quad L(u) = \int (u\varphi_1 - (Hu)\varphi_2) dt, \quad u \in H^1_{\mathbb{R}}.$$

При $u \in \mathfrak{A}$

$$(4.5) \quad L(u) = \int u(\varphi_1 + H\varphi_2) dt.$$

Далее, существует единственная вещественная функция $\varphi \in \text{ВМО}$, такая, что

$$\|\varphi\|_* \leq C\|L\|$$

с универсальной постоянной C и

$$(4.6) \quad L(u) = \int u\varphi dt, \quad u \in \mathfrak{A}.$$

По теоремам 1.2 и 1.5 интегралы в (4.5) и (4.6) абсолютно сходятся.

Доказательство. Пространство $H^1_{\mathbb{R}}$ — замкнутое подпространство в $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$ с нормой $\|(u, v)\| = \|u\|_1 + \|v\|_1$. Продолжим L с сохранением нормы до ограниченного линейного функционала Φ на $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$. Тогда Φ имеет представление

$$\Phi(u, v) = \int (u\varphi_1 - v\varphi_2) dt,$$

где $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^\infty_{\mathbb{R}} \oplus L^\infty_{\mathbb{R}}$ и $\|\Phi\| = \max(\|\varphi_1\|_\infty, \|\varphi_2\|_\infty)$ ввиду выбора нормы в $L^1_{\mathbb{R}} \oplus L^1_{\mathbb{R}}$. Значит, $\|\varphi_1\|_\infty \leq \|L\|$, $\|\varphi_2\|_\infty \leq \|L\|$, и выполнено (4.4), откуда следует и (4.5). Тогда $\varphi = \varphi_1 + H\varphi_2 \in \text{ВМО}$ и $\|\varphi\|_* \leq C\|L\|$ по теореме 1.5. Теперь (4.6) очевидно как переформулировка (4.5).

Осталось доказать, что функция φ определяется по L однозначно. Пара $(\varphi_1, \varphi_2) \in L_R^\infty \oplus L_R^\infty$, соответствующая L , конечно, не единственна. Пара (φ_1, φ_2) определяет на H_R^1 нулевой функционал тогда и только тогда, когда

$$(4.7) \quad \int u(\varphi_1 + H\varphi_2) dt = 0, \quad u \in \mathfrak{A}.$$

Но любая разность $P_z(t) - P_{z_1}(t)$ ядер Пуассона лежит в $\mathfrak{A}$, и (4.7) означает, что функция $\varphi_1 + H\varphi_2$ имеет постоянный интеграл Пуассона. Таким образом, $\varphi_1 + H\varphi_2$ — постоянная. Но постоянные имеют нулевую норму в ВМО, так что как элемент ВМО функция φ определяется из (4.6) однозначно. $\square$

Отметим мимоходом, что $\varphi_1 + H\varphi_2$ постоянна тогда и только тогда, когда $\varphi_1 + i\varphi_2 \in H^\infty$, так что доказательство леммы снова показывает, что $(H^1)^* = L^\infty/H^\infty$.

Теорема 4.4 (Фефферман). *Пространство, сопряженное с H_R^1 , совпадает с ВМО. Точнее, если $\varphi \in \text{ВМО}$ — вещественная функция и*

$$(4.8) \quad L(u) = \int u\varphi dt, \quad u \in \mathfrak{A},$$

то $|L(u)| \leq C_1 \|\varphi\|_* \|u\|_{H^1}$. Обратно, если $L \in (H_R^1)^*$, то найдется единственная вещественная функция $\varphi \in \text{ВМО}$, для которой $\|\varphi\|_* \leq C\|L\|$ и выполняется (4.8).

Хотя интеграл в (4.8) имеет смысл только для $u \in \mathfrak{A}$, плотность $\mathfrak{A}$ в H_R^1 и неравенство $|L(u)| \leq C_1 \|\varphi\|_* \|u\|_{H^1}$ позволяют нам рассматривать $\varphi \in \text{ВМО}$ как непрерывный линейный функционал на всем H_R^1 .

Доказательство. По лемме 4.3 каждый функционал $L \in (H_R^1)^*$ определяется единственной функцией $\varphi \in \text{ВМО}$ с $\|\varphi\| \leq C\|L\|$, для которой выполняется (4.8). Главное, что нам осталось доказать, — это оценка

$$(4.9) \quad \left| \int u\varphi dt \right| \leq C_1 \|\varphi\|_* \|u\|_{H^1}, \quad u \in \mathfrak{A}, \varphi \in \text{ВМО}.$$

Доказательство соответствующего неравенства в единичном круге технически немножко проще, и вместо (4.9) мы доказываем

$$(4.10) \quad \left| \int u\varphi \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq C \|\varphi\|_* \|u + i\bar{u}\|_1, \quad u \in L_R^2(T),$$

где $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ и $\int \varphi d\theta = 0$. Тогда если $u \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \text{ВМО}(\mathbb{R})$, то, так как при $e^{i\theta} = (t-i)/(t+i)$ будет $d\theta = 2dt/(1+t^2)$,

$$\begin{aligned} \int u\varphi dt &= \int u(\varphi - \varphi(i)) dt = \int (1+t^2)u(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(i)}{1+t^2} dt = \\ &= \int U(\theta)\Phi(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

где $\Phi(\theta) = \varphi(t) - \varphi(i) \in \text{ВМО}(T)$ с нулевым средним, а $U(\theta) = (1 + t^2)u(t) \in L^2_{\mathbb{R}}(T)$. Теперь (4.9) вытекает из (4.10) по следствиям 1.3 и II.3.3.

Итак, пусть $u \in L^2_{\mathbb{R}}(T)$ и $\varphi \in \text{ВМО}(T)$. Отметим, что по следствиям 2.4 и 1.3 интеграл (4.10) абсолютно сходится. Положим $f = u + iHu$; тогда $f \in H^1$ и

$$\int u \varphi \frac{d\theta}{2\pi} = \text{Re} \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Преимущество работы с f вместо u состоит в том, что мы можем считать $f = g^2$, $g \in H^2$. В самом деле, пусть $f = BF$, где B — произведение Бляшке, а $F \in H^1$ не имеет нулей в D и $\|F\|_1 = \|f\|_1$. Положим $f_1 = (B-1)F$, $f_2 = (B+1)F$. Тогда $\|f_1\|_1 \leq 2\|f\|_1$, $\|f_2\|_1 \leq 2\|f\|_1$ и $f = (f_1 + f_2)/2$. Но f_1 и f_2 не имеют нулей в D , и поэтому обе имеют вид g^2 , $g \in H^2$. При оценке $\int f \varphi d\theta$ мы можем заменить f на f_1 и f_2 , так что мы будем предполагать, что $f = g^2$, $g \in H^2$.

Можно также считать, что $\varphi(0) = 0$. Билинейная поляризация тождества Литтлвуда — Пэли (лемма 3.1) дает

$$\int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi} = \int (f - f(0)) \varphi \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \iint \nabla f \cdot \nabla \varphi \log \frac{1}{|z|} dx dy.$$

Но $f(z)$ аналитична и

$$\nabla f \cdot \nabla \varphi = f_x \varphi_x + f_y \varphi_y = f'(z)(\varphi_x + i\varphi_y) = 2g(z)g'(z)(\varphi_x + i\varphi_y),$$

так что

$$|\nabla f \cdot \nabla \varphi| \leq 2|g(z)||g'(z)||\nabla \varphi(z)|.$$

По неравенству Коши — Шварца

$$\begin{aligned} \left| \int f \varphi \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq \left(\frac{2}{\pi} \iint_D |g'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\frac{2}{\pi} \iint_D |g(z)|^2 |\nabla \varphi(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

По лемме 3.1 первый множитель равен

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int |g(e^{i\theta}) - g(0)|^2 d\theta \right)^{1/2} = \|f\|_1^{1/2}.$$

По теореме 3.4 и теореме о мерах Карлесона в круге второй множитель ограничен сверху величиной $C\|\varphi\|_* \|f\|_1^{1/2}$. Следовательно, мы получили (4.10), и теорема доказана. $\square$

Доказательство оценки (4.9) без перехода в круг см. в упр. 6. Комплексный линейный функционал на H^1 , определяе-

мый функцией $\varphi \in \text{ВМО}$ в соответствии с (4.8), равен

$$L_{\mathbb{C}}(u + iHu) = \int (u + iHu) \varphi dt,$$

потому что $\text{Re}(-i(H + iHu)) = Hu$. Мы имеем теперь вещественный линейный изоморфизм между комплексным банаховым пространством $(H^1)^*$ и вещественным пространством вещественных функций из ВМО. Чтобы рассматривать ВМО как комплексное пространство, изоморфное $(H^1)^*$, заметим, что

$$iL_{\mathbb{C}}(u + iHu) = L_{\mathbb{C}}(-Hu + iu) = \int (-Hu + iu) \varphi dt.$$

Согласно (4.4) и (4.6), последний интеграл равен

$$\int (u + iHu) H\varphi dt$$

по крайней мере для $u \in \mathfrak{A}$. Если бы мы определили в пространстве вещественных функций из ВМО умножение на i формулой $i\varphi = H\varphi$, то вещественное ВМО стало бы комплексным банаховым пространством, изоморфным $(H^1)^*$ при комплексном линейном изоморфизме $L^\infty/H^\infty \ni f \rightarrow \text{Re } f + H(\text{Im } f) \in \text{ВМО}$. Необычное правило умножения на комплексные скаляры, которое возникает при отождествлении $H^1_{\mathbb{R}}$ с H^1 , — одна из причин, по которым вещественные линейные функционалы на H^1 обсуждать легче.

Следствие 4.5. Если $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$, то $\varphi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда

$$(4.11) \quad \varphi = \varphi_1 + H\varphi_2 + \alpha,$$

где α — постоянная, а $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty$. Если $\varphi \in \text{ВМО}$, то φ_1 и φ_2 можно выбрать так, чтобы

$$(4.12) \quad \|\varphi_1\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*, \quad \|\varphi_2\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*,$$

при некоторой постоянной C .

Доказательство. Это следствие равносильно самой теореме. Теорема 1.5 говорит, что любая функция вида (4.11) лежит в ВМО и

$$(4.13) \quad \|\varphi\|_* \leq C(\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty).$$

Если $\varphi \in \text{ВМО}$, то, согласно (4.9), функционал $L(u) = \int u\varphi dt$ ограничен в $\mathfrak{A}$ по норме $\|u\|_{H^1}$, и по лемме 4.3 найдутся φ_1 и $\varphi_2 \in L^\infty$, такие, что

$$L(u) = \int u(\varphi_1 + H\varphi_2) dt.$$

Как мы заметили после доказательства леммы 4.3, это означает, что $\varphi - (\varphi_1 + H\varphi_2)$ имеет постоянный интеграл Пуассона, что и доказывает (4.11) и (4.12). $\square$

Конструктивное доказательство представления (4.11), а значит, и самой теоремы двойственности будет дано в гл. VIII.

Согласно (4.12) и (4.13), выражение

$$\inf \{ \|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty : \varphi = \varphi_1 + H\varphi_2 + \alpha \}$$

определяет в ВМО норму, эквивалентную $\|\varphi\|_*$.

Следствие 4.6. Пусть $f \in L^\infty$ и

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} \|f - g\|_\infty.$$

Тогда

$$(4.14) \quad C_1 \|f - iHf\|_* \leq \text{dist}(f, H^\infty) \leq C_2 \|f - iHf\|_*$$

с абсолютными постоянными C_1 и C_2 .

Доказательство. По (4.2) и по теореме Хана — Банаха

$$\text{dist}(f, H^\infty) = \sup \left\{ \left| \int fF dt \right| : F \in H^1, \|F\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Мы можем считать, что $F = u + iHu$ и $u \in \mathfrak{A}$. Тогда

$$\int fF dt = \int fu dt + i \int fHu dt = \int (f - iHf)u dt.$$

Беря вещественную и мнимую части этого интеграла, мы видим, что (4.14) следует прямо из теоремы двойственности. $\square$

Следствие 4.7. Пусть функция $f \in L^\infty$ вещественна и

$$\text{dist}(f, \text{Re } H^\infty) = \inf_{g \in H^\infty} \|f - \text{Re } g\|_\infty,$$

$$\text{dist}_*(Hf, L^\infty) = \inf_{\varphi \in L^\infty} \|Hf - \varphi\|_*.$$

Тогда

$$C_1 \text{dist}(f, \text{Re } H^\infty) \leq \text{dist}_*(Hf, L^\infty) \leq C_2 \text{dist}(f, \text{Re } H^\infty)$$

с абсолютными постоянными C_1 и C_2 .

Доказательство. Если $g \in H^\infty$, то $\text{Im } g \in L^\infty$ и $Hf - \text{Im } g = H(f - \text{Re } g)$, так что по теореме 1.5

$$\|Hf - \text{Im } g\|_* \leq C_2 \|f - \text{Re } g\|_\infty$$

и

$$\text{dist}_*(Hf, L^\infty) \leq C_2 \text{dist}(f, \text{Re } H^\infty).$$

Второе неравенство этого следствия глубже и использует теорему двойственности. Если $\varphi \in L^\infty$, то по следствию 4.5

$$Hf - \varphi = \varphi_1 + H\varphi_2 + \alpha,$$

где

$$\|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty \leq C\|Hf - \varphi\|_*.$$

Тогда

$$u = \varphi + \varphi_1 + \alpha \in L^\infty \text{ и } Hu = H\varphi + H\varphi_1 = \varphi_2 - f,$$

так что $g = -Hu + iu \in H^\infty$. Далее,

$$\|f - \operatorname{Re} g\|_\infty = \|f + Hu\|_\infty = \|\varphi_2\|_\infty \leq C\|Hf - \varphi\|_*.$$

Таким образом,

$$C_1 \operatorname{dist}(f, \operatorname{Re} H^\infty) \leq \operatorname{dist}_*(Hf, L^\infty)$$

и следствие 4.7 доказано. $\square$

Один метод оценки $\operatorname{dist}_*(\varphi, L^\infty)$ в терминах экспоненциальной интегрируемости $|\varphi - \varphi_I|$ будет дан в разд. 6.

5. Исчезающая средняя осцилляция

Пусть $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\delta > 0$. Положим

$$(5.1) \quad M_\delta(\varphi) = \sup_{|I| < \delta} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| dt,$$

где I обозначает интервал. Тогда $\varphi \in \text{ВМО}$ в том и только том случае, когда $M_\delta(\varphi)$ ограничена, и $\|\varphi\|_* = \lim_{\delta \rightarrow \infty} M_\delta(\varphi)$. Мы гово-

рим, что φ имеет *исчезающую среднюю осцилляцию*, или $\varphi \in \text{ВМО}^1$, если

(i) $\varphi \in \text{ВМО}$ и

(ii) $M_0(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta(\varphi) = 0$.

Легко видеть, что ВМО — замкнутое подпространство в ВМО . Связь между ВМО и ВМО очень похожа на связь между L^∞ и его подпространством ограниченных равномерно непрерывных функций. Обозначим через UC пространство равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$, и пусть $\text{BUC} = \text{UC} \cap L^\infty$.

Теорема 5.1. *Следующие условия на функцию $\varphi \in \text{ВМО}$ эквивалентны:*

(a) $\varphi \in \text{ВМО}$;

(b) если $\varphi_x(t) = \varphi(t - x)$ — сдвиг φ на величину x , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|\varphi_x - \varphi\|_* = 0;$$

(c) если $\varphi(t, y) = P_y * \varphi(t)$ — интеграл Пуассона от φ , то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\varphi(t) - \varphi(t, y)\|_* = 0;$$

¹⁾ ВМО — Vanishing Mean Oscillation. — Прим. ред.

(d) φ входит в замыкание множества $UC \cap BMO$ в BMO :

$$\inf_{g \in UC \cap BMO} \|\varphi - g\|_* = 0.$$

Доказательство. Мы проверим цепочку импликаций $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

Пусть выполнено (a). Выберем $\delta > 0$ и разобьем $\mathbb{R}$ на интервалы

$$I_j = (j\delta/2, (j+1)\delta/2), \quad -\infty < j < \infty,$$

длины $\delta/2$. В силу (5.1)

$$(5.2) \quad |\varphi_{I_j} - \varphi_{I_{j+1}}| \leq 2M_\delta(\varphi).$$

Положим

$$h(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_{I_j} \chi_{I_j}(t).$$

Мы покажем сначала, что

$$(5.3) \quad \|\varphi - h\|_* \leq 5M_\delta(\varphi).$$

Если $|I| \leq \delta$, то, согласно (5.2),

$$\frac{1}{|I|} \int_I |h - h_I| dt \leq 4M_\delta(\varphi),$$

так что

$$\frac{1}{|I|} \int_I |(\varphi - h) - (\varphi - h)_I| dt \leq 5M_\delta(\varphi).$$

Если $|I| > \delta$ и $J = \bigcup_{I_j \cap I \neq \emptyset} I_j$, то $|J| \leq 2|I|$. Полагая $J = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$, имеем,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |(\varphi - h) - (\varphi - h)_I| dt &\leq \frac{2}{|I|} \int_I |\varphi - h| dt \leq \\ &\leq \frac{4}{|I|} \int_I |\varphi - h| dt \leq \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |\varphi - \varphi_{I_j}| dt \leq 4M_\delta(\varphi), \end{aligned}$$

что доказывает (5.3). Теперь, если $|x| < \delta$, то в силу (5.2) $\|h - h_x\|_\infty \leq 2M_\delta(\varphi)$, так что $\|h - h_x\|_* \leq 2M_\delta(\varphi)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_x\|_* &\leq \|\varphi - h\|_* + \|h - h_x\|_* + \|h_x - \varphi_x\|_* = \\ &\leq 2\|\varphi - h\|_* + \|h - h_x\|_* \leq 10M_\delta(\varphi). \end{aligned}$$

Итак, (a) влечет за собой (b).

Пусть теперь выполняется (b). Тогда

$$\varphi(t, y) = \int \varphi(t - x) P_y(x) dx$$

— взвешенное среднее сдвигов φ_x функции φ . По (b) величина $\|\varphi - \varphi_x\|_*$ мала при $|x| < \delta$, в то время как для любого x имеет место неравенство $\|\varphi - \varphi_x\|_* \leq 2\|\varphi\|_*$. Но при малом y большая часть веса $P_y(x)$ сосредоточена при $|x| < \delta$, и поэтому $\|\varphi(t) - \varphi(t, y)\|_*$ мало. Точнее,

$$\|\varphi(t) - \varphi(t, y)\|_* \leq \int_{|x| < \delta} \|\varphi - \varphi_x\|_* P_y(x) dx + 2\|\varphi\|_* \int_{|x| > \delta} P_y(x) dx,$$

так что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|\varphi(t) - \varphi(t, y)\|_* \leq \sup_{|x| < \delta} \|\varphi - \varphi_x\|_*$$

и (b) влечет за собой (c).

Чтобы доказать, что из (c) вытекает (d), мы используем несложную оценку

$$(5.4) \quad y|\nabla\varphi(x, y)| \leq c\|\varphi\|_*.$$

Для $\varphi \in L^\infty$ неравенство (5.4) следует из неравенства Гарнака после замены переменной, а распространение сго на ВМО вытекает из следствия 4.5. Есть, однако, элементарное доказательство оценки (5.4), которое опирается вместо теоремы двойственности на теорему 1.2. Простое неравенство $y|\nabla P_y(x - t)| \leq cP_y(x - t)$, в котором производные берутся по x и по y , вместе с теоремой 1.2 дает

$$\begin{aligned} y|\nabla\varphi(x, y)| &\leq y \int |\varphi(t) - \varphi(x, y)| |\nabla P_y(x - t)| dt \leq \\ &\leq c \int |\varphi(t) - \varphi(x, y)| P_y(x - t) dt \leq c\|\varphi\|_*. \end{aligned}$$

Из (5.4) видно, что $\varphi(x, y)$ — равномерно непрерывная функция от x . Поскольку $\varphi(x, y) \in \text{ВМО}$, то мы убеждаемся, что (d) следует из (c).

Наконец, (d) очевидным образом влечет за собой (a), потому что $\text{УС} \cap \text{ВМО} \subset \text{ВМО}$, а ВМО замкнуто в ВМО . $\square$

Теорема 5.2. Если φ — локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, то $\varphi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда

$$(5.5) \quad \varphi = \varphi_1 + H\varphi_2 + \alpha,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{ВУС}$ и α — постоянная. Если $\varphi \in \text{ВМО}$, то $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{ВУС}$ можно выбрать так, чтобы

$$(5.6) \quad \|\varphi_1\|_\infty + \|\varphi_2\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*,$$

где C — постоянная, не зависящая от φ .

Доказательство. Пусть φ имеет вид (5.5) с $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{BUC}$. Тогда $\varphi \in \text{BMO}$ и при малых $|x|$ имеем $\|\varphi_j - (\varphi_j)_x\|_\infty < \varepsilon$, $j = 1, 2$. Значит,

$$\|\varphi_1 - (\varphi_1)_x\|_* < \varepsilon, \quad \|(H\varphi_2) - (H\varphi_2)_x\|_* < \varepsilon$$

при малых $|x|$, и $\varphi \in \text{VMO}$ по теореме 5.1 (b).

Обратно, если $\varphi \in \text{VMO}$, то по следствию 4.5 $\varphi = u_1 + Hu_2 + \alpha$, где $\|u_1\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*$, $\|u_2\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*$ и α — постоянная. По теореме 5.1 $\|\varphi(x) - \varphi(x, y_0)\|_* \leq \|\varphi\|_*/2$ при некотором $y_0 > 0$. Положим $\varphi_1^1(x) = u_1(x, y_0)$, $\varphi_2^1(x) = u_2(x, y_0)$. Тогда $\varphi_j^1 \in \text{BUC}$,

$$\|\varphi_j^1\|_\infty \leq \|u_j\|_\infty \leq C\|\varphi\|_*, \quad j = 1, 2,$$

и $\varphi(x, y_0) = \varphi_1^1(x) + H\varphi_2^1(x) + \alpha$, так что

$$\|\varphi - (\varphi_1^1 + H\varphi_2^1 + \alpha)\|_* = \|\varphi(x) - \varphi(x, y_0)\|_* \leq \|\varphi\|_*/2.$$

Значит,

$$R_1 = \varphi - (\varphi_1^1 + H\varphi_2^1 + \alpha) = (u_1 - \varphi_1^1) + H(u_2 - \varphi_2^1)$$

лежит в VMO и $\|R_1\|_* \leq \|\varphi\|_*/2$. Повторяя предыдущее рассуждение с R_1 и итерируя этот процесс, мы получим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^k + H\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_2^k\right) + \alpha,$$

где $\varphi_1^k \in \text{BUC}$, $\varphi_2^k \in \text{BUC}$ и

$$\sum_k \|\varphi_1^k\|_\infty + \sum_k \|\varphi_2^k\|_\infty \leq 4C\|\varphi\|_*.$$

Это доказывает теорему 5.2. $\square$

Для круга доказательства теорем 5.1 и 5.2 показывают, что VMO совпадает с замыканием множества $C = C(T)$ в BMO , и $\text{VMO} = C + \mathcal{C}$.

В гл. IX мы увидим, что VMO оказывается важным средством при изучении алгебры $H^\infty + C$.

6. Неравенства с весовыми нормами для максимальных и сопряженных функций

Пусть $1 < p < \infty$, а μ — положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$, конечная на компактных множествах. Мы рассмотрим две проблемы.

Проблема 1. Когда максимальный оператор Харди — Литтлвуда ограничен в $L^p(\mu)$? То есть когда существует постоянная B_p , такая, что

$$\int |Mf|^p d\mu \leq B_p \int |f|^p d\mu$$

для всех измеримых функций $f(x)$, где

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f| dt$$

Проблема 2. Когда оператор Гильберта ограничен в $L^p(\mu)$? То есть когда существует постоянная C_p , такая, что

$$\int |Hf|^p d\mu \leq C_p \int |f|^p d\mu$$

для всех функций $f \in L^2(dx)$, где

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} f(t) \frac{dt}{x-t}$$

Мы знаем, что при $d\mu = dx$ оба оператора ограничены в L^p , $1 < p < \infty$. В случае $p = 2$ теорема Хелсона — Сегё IV.3.4 дает необходимое и достаточное условие ограниченности оператора Гильберта в $L^2(\mu)$. Оно состоит в том, что μ абсолютно непрерывна, $d\mu = w(x)dx$ и плотность $w(x)$ должна иметь вид

$$\log w = u + Hv, \quad u \in L^\infty, \quad \|v\|_\infty < \pi/2.$$

Доказательство этой теоремы было дано в гл. IV для единичной окружности, но теперь читателю должно быть нетрудно перенести теорему на прямую. При $p \neq 2$ метод Хелсона — Сегё не дает удовлетворительных ответов на вопросы, поставленные в проблеме 2.

С другой стороны, весьма успешным оказался вещественный подход к этим проблемам, предпринятый Макенхауптом и другими. Удивительным образом для обеих проблем получилось одно и то же решение: мера должна быть абсолютно непрерывной:

$$d\mu = w(x)dx, \quad w \in L^1_{\text{loc}},$$

и вес $w(x)$ должен удовлетворять так называемому условию (A_p) :

$$(6.1) \quad \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

Теорема 6.1. Пусть μ — положительная мера, конечная на компактных множествах, и $1 < p < \infty$. В таком случае

$$\int |Mf|^p d\mu \leq B_p \int |f|^p d\mu$$

с B_p , не зависящим от f , тогда и только тогда, когда μ абсолютно непрерывна, $d\mu = w(x)dx$, и w удовлетворяет условию (6.1).

Теорема 6.2. Пусть μ — положительная мера, конечная на компактных множествах, и $1 < p < \infty$. В таком случае

$$\int |Hf|^p d\mu \leq C_p \int |f|^p d\mu$$

с C_p , не зависящим от f , тогда и только тогда, когда μ абсолютно непрерывна, $d\mu = w(x)dx$, и w удовлетворяет условию (6.1).

Прежде чем двигаться дальше, попытаемся понять, откуда берется условие (A_p) , т. е. (6.1).

Лемма 6.3. Если $1 < p < \infty$, а μ — такая положительная мера на $\mathbb{R}$, что

$$\int |Mf|^p d\mu \leq C \int |f|^p d\mu, \quad f \in L^p(\mu),$$

то μ абсолютно непрерывна, $d\mu = w(x)dx$, и $w(x)$ удовлетворяет условию (6.1).

Доказательство. Пусть E — компактное множество, $|E| = 0$, $\varepsilon > 0$, и V — открытая окрестность множества E , $\mu(V \setminus E) < \varepsilon$. Тогда $\int |f|^p d\mu < \varepsilon$, где $f = \chi_{V \setminus E}$. С другой стороны, $Mf(x) = 1$ при $x \in E$, потому что $|E| = 0$. По предположению

$$\mu(E) \leq \int |Mf|^p d\mu \leq C \|f\|_p^p < C\varepsilon,$$

так что $\mu(E) = 0$, и μ абсолютно непрерывна.

Положим $d\mu = w(x)dx$, где $w \in L^1_{\text{loc}}$ и $w(x) \geq 0$. Выберем интервал I и положим $f(x) = w(x)^{\alpha} \chi_I(x)$. Тогда

$$\int |f|^p d\mu = \int_I w^{1+p\alpha} dx,$$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|I|} \int_I f dt \geq \frac{1}{|I|} \int_I w^{\alpha} dt, \quad x \in I.$$

Приближая $f(x)$ снизу ограниченными функциями, получим

$$\left(\int_I w dx \right) \left(\int_I w^{\alpha} dx \right)^p \leq |I|^p \int_I |Mf|^p d\mu \leq C |I|^p \int_I w^{1+p\alpha} dx.$$

Выберем $\alpha = -1/(p-1) = 1 + p\alpha$. Тогда

$$\left(\int_I w dx \right) \left(\int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C |I|^p,$$

а это и есть условие (A_p) . $\square$

Лемма 6.4. Если $1 < p < \infty$, а μ — такая положительная мера на $\mathbb{R}$, конечная на компактных множествах, что для всех f

$$\int |Hf|^p d\mu \leq C \int |f|^p d\mu,$$

то $d\mu = w(x)dx$, где w удовлетворяет условию (6.1) (условию (A_p)).

Доказательство. Полагая $f = \chi_{[0,1]}$, мы видим, что

$$(6.2) \quad \int \frac{d\mu(x)}{(1+|x|)^p} < \infty.$$

Пусть g — вещественная функция из $L^q(\mu)$, $q = p/(p-1)$. Тогда по предположению леммы и из соображений двойственности найдется такая функция $h \in L^q(\mu)$, что

$$\int (Hf)g d\mu = \int fh d\mu, \quad f \in L^p(\mu).$$

Если $f \in H^2 \cap L^p(\mu)$, то $Hf = -if$, и это тождество принимает вид

$$(6.3) \quad \int f(g - ih) d\mu = 0.$$

Но, согласно (6.2) и неравенству Гёльдера, мера

$$d\nu(x) = \frac{(g - ih)(x) d\mu(x)}{x + i}$$

конечна и $\int (x - z)^{-1} d\nu(x) = 0$ при $\text{Im } z < 0$ в силу (6.3). Значит, по теореме Ф. и М. Риссов мера ν абсолютно непрерывна. Значит, и мера $g(x)d\mu(x) = \text{Re}((x + i)d\nu(x))$ абсолютно непрерывна. Раз $g \in L^q(\mu)$ произвольна, то и сама μ должна быть абсолютно непрерывна.

Пусть $d\mu = w(x)dx$. Возьмем интервал I и разобьем его на две равные части $I = I_1 \cup I_2$, $|I_1| = |I_2| = |I|/2$. Пусть функция $f \geq 0$ сосредоточена на I_1 . Тогда при $x \in I_2$

$$(6.4) \quad |Hf(x)| = \frac{1}{\pi} \int_{I_1} \frac{f(t)}{|x-t|} dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_{I_1} \frac{f(t)}{|I_1|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{I_1} f.$$

Выбирая $f = \chi_{I_1}$, получим

$$\int_{I_2} w dx \leq C \int_{I_1} w dx.$$

Но по симметрии должно быть и

$$\int_{I_1} w dx \leq C \int_{I_2} w dx.$$

Выбирая $f(x) = w(x)^\alpha \chi_I$, мы далее получим

$$\left(\int_I w dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^\alpha dx \right)^p \leq C \int_I w^{1+\alpha p} dx.$$

Снова полагая $\alpha = -1/(p-1)$, имеем

$$\left(\int_I w dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^p \leq C \int_I w^{-1/(p-1)} dx,$$

а это и есть условие (A_p) . $\square$

Итак, условие (A_p) необходимо как в теореме 6.1, так и в теореме 6.2.

Предположим теперь, что w удовлетворяет (A_p) . Пусть

$$\varphi = \log w, \quad \psi = \log (w^{-1/(p-1)}) = -\frac{\varphi}{p-1}.$$

Тогда φ и ψ локально интегрируемы, поскольку локально интегрируемы w и $w^{-1/(p-1)}$. Очевидно, что для любого интервала I

$$e^{\varphi_I} (e^{\psi_I})^{p-1} = 1,$$

так что (A_p) можно переписать в виде

$$(6.5) \quad \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I e^{\varphi - \varphi_I} dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I e^{\psi - \psi_I} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

По неравенству Йенсена

$$\frac{1}{|I|} \int_I e^{\varphi - \varphi_I} dx \geq 1, \quad \frac{1}{|I|} \int_I e^{\psi - \psi_I} dx \geq 1.$$

Следовательно, (A_p) выполняется тогда и только тогда, когда каждый сомножитель в (6.5) ограничен по отдельности, и мы имеем следующую лемму.

Лемма 6.5. Если $w \geq 0$ и $\varphi = \log w$, то w удовлетворяет условию (A_p) , $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{\varphi - \varphi_I} dx < \infty \quad \text{и} \quad \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{-(\varphi - \varphi_I)/(p-1)} dx < \infty.$$

Таким образом, если w удовлетворяет (A_p) , то $\varphi = \log w \in \text{ВМО}$. Обратно, если $\log w \in \text{ВМО}$, то по теореме Джона — Ниренберга w^δ удовлетворяет (A_p) при некотором $\delta > 0$.

Прежде чем обращаться к более трудному доказательству достаточности условия (A_p) , отметим два следствия. Случай $p = 2$ теоремы 6.2 можно объединить с теоремой Хелсона — Сегё, чтобы получить конкретные выражения для расстояния в метрике ВМО от $\varphi \in \text{ВМО}$ до L^∞ и расстояния от $f \in L^\infty$ до

$\operatorname{Re} H^\infty$. Причина здесь та, что условие Хелсона — Сегё по теореме 6.2 равносильно условию

$$(A_2) \quad \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \, dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I \frac{1}{w} \, dx \right) < \infty.$$

Если $\varphi \in \text{ВМО}$, то $\varphi = f + Hg + \alpha$, где $f, g \in L^\infty$ и α — постоянная, причем

$$\|\varphi\|' = \inf \{ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty : \varphi = f + Hg + \alpha \}$$

— норма в ВМО, эквивалентная $\|\varphi\|_*$. В метрике $\|\cdot\|'$ расстояние от φ до L^∞ равно

$$\operatorname{dist}(\varphi, L^\infty) = \inf_{f \in L^\infty} \|\varphi - f\|' = \inf \{ \|g\|_\infty : \varphi - Hg \in L^\infty \}.$$

По теореме Джона — Ниренберга существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\lambda(\varepsilon) > 0$, что

$$(6.6) \quad \sup_I \frac{|\{x \in I : |\varphi - \varphi_I| > \lambda\}|}{|I|} \leq e^{-\lambda/\varepsilon}, \quad \lambda > \lambda(\varepsilon).$$

Положим

$$\varepsilon(\varphi) = \inf \{ \varepsilon > 0 : (6.6) \text{ выполняется} \}.$$

Ясно, что $\varepsilon(\varphi) = 0$ для $\varphi \in L^\infty$. По теореме Джона — Ниренберга

$$\varepsilon(\varphi) \leq C \|\varphi\|_* \leq C' \|\varphi\|'.$$

Следствие 6.6. Если $\varphi \in \text{ВМО}$ — вещественная функция, то $\operatorname{dist}(\varphi, L^\infty) = (\pi/2)\varepsilon(\varphi)$.

Доказательство. Из условия (6.6) мы видим, что

$$(6.7) \quad \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I \exp |A\varphi - A\varphi_I| \, dx < \infty$$

при $A < 1/\varepsilon(\varphi)$, а неравенство Чебышева показывает, что $A \leq 1/\varepsilon(\varphi)$, если выполняется (6.7). Значит,

$$1/\varepsilon(\varphi) = \sup \{ A : (6.7) \text{ выполняется} \}.$$

Из (6.7) и неравенства Йенсена получаем для любого интервала

$$(6.8) \quad 1 \leq \frac{1}{|I|} \int_I e^{\pm A(\varphi - \varphi_I)} \, dx \leq M.$$

Обратно, так как при $a \geq 1$, $b \geq 1$ будет $a + b \leq 2ab$, то

$$\frac{1}{|I|} \int_I e^{A|\varphi - \varphi_I|} \, dx \leq \frac{1}{|I|} \int_I e^{A(\varphi - \varphi_I)} \, dx + \frac{1}{|I|} \int_I e^{-A(\varphi - \varphi_I)} \, dx.$$

Стало быть, (6.8) и (6.7) равносильны. Значит, по лемме 6.5 при данном $A > 0$ условие (6.7) выполняется тогда и только тогда, когда вес $w = e^{A\varphi}$ удовлетворяет условию (A_2) , так что

$$1/\varepsilon(\varphi) = \sup \{A: e^{A\varphi} \text{ удовлетворяет } (A_2)\}.$$

Но (A_2) равносильно условию Хелсона — Сегё, и поэтому

$$1/\varepsilon(\varphi) = \sup \{A: A\varphi = f + Hg, f \in L^\infty, \|g\|_\infty < \pi/2\},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} \varepsilon(\varphi) = \inf \{\|g\|_\infty: \varphi = f + Hg, f \in L^\infty\}. \quad \square$$

Следствие 6.7. Если $f \in L^\infty$ — вещественная функция, то

$$\text{dist}(f, \text{Re } H^\infty) = \inf_{F \in H^\infty} \|f - \text{Re } F\|_\infty = \frac{\pi}{2} \varepsilon(H\varphi).$$

Доказательство. Это сразу вытекает из следствия 6.6 и доказательства следствия 4.7. $\square$

Расстояния из следствий 6.5 и 6.6 можно также связать с ростом локальных L^p -колебаний функции $\varphi(x)$ с помощью тождества

$$\frac{\varepsilon(\varphi)}{e} = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I|^p dx \right)^{1/p}.$$

Установление этого тождества предоставляется читателю для отдыха (см. упр. 17).

Для того чтобы вывести из (A_p) ограниченность операторов M и H в $L^p(w dx)$, нам понадобятся четыре следствия условия

$$(A_p) \quad \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I w dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

Два первых следствия совсем тривиальны.

Лемма 6.8. Если $1 < p < \infty$, а w удовлетворяет условию (A_p) , то

(а) w удовлетворяет (A_r) при всех $r > p$;

(б) $w^{-1/(p-1)}$ удовлетворяет (A_q) , где $q = p/(p-1)$.

Доказательство. Для (а) заметим, что $1/(r-1) < 1/(p-1)$, так что по неравенству Гёльдера

$$\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(r-1)} dx \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(r-1)}.$$

Для (б) заметим, что $q-1 = 1/(p-1)$, так что если $v = w^{-1/(p-1)}$, то $v^{-1/(q-1)} = w$. $\square$

Два других следствия (A_p) глубже, но их можно вывести из прекрасного неравенства, принадлежащего Герингу.

Теорема 6.9. Пусть $p > 1$. Если $v(x) \geq 0$ и

$$(6.9) \quad \left(\frac{1}{|I|} \int_I v^p dx \right)^{1/p} \leq K \frac{1}{|I|} \int_I v dx$$

для всех подынтервалов некоторого интервала I_0 , то

$$(6.10) \quad \left(\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} v^r dx \right)^{1/r} \leq C(p, K, r) \left(\frac{1}{|I_0|} \int_{I_0} v dx \right)$$

при $p \leq r < p + \eta$, где $\eta = \eta(p, K) > 0$.

Обратное к (6.9) неравенство — с постоянной 1 — тривиально следует из неравенства Гёльдера. Поэтому постоянная K в (6.9) обязательно должна быть ≥ 1 .

Теорема 6.9 тесно связана с теоремой Джона — Ниренберга; как и там, важно, что (6.9) выполняется для многих подынтервалов I_0 .

Доказательство. Мы можем считать, что $I_0 = [0, 1]$ и $\int_0^1 v^p dx = 1$. Положим при $\lambda > 0$

$$E_\lambda = \{x \in I_0: v(x) > \lambda\}.$$

Мы хотим **доказать** оценку

$$(6.11) \quad \int_{E_\lambda} v^p dx \leq A \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v dx, \quad \lambda \geq 1,$$

с некоторой постоянной $A = A(p, K)$. Но сначала посмотрим, как (6.10) следует из (6.11). При $r > p$

$$\begin{aligned} \int_{E_1} v^r dx &= \int_{E_1} v^p v^{r-p} dx = (r-p) \int_{E_1} v^p \left(\frac{1}{r-p} + \int_1^v \lambda^{r-p-1} d\lambda \right) dx = \\ &= \int_{E_1} v^p dx + (r-p) \int_1^\infty \lambda^{r-p-1} \int_{E_\lambda} v^p dx d\lambda. \end{aligned}$$

В силу (6.11) последний член этого выражения не превосходит

$$\begin{aligned} A(r-p) \int_1^\infty \lambda^{r-2} \int_{E_\lambda} v dx d\lambda &\leq A(r-p) \int_{E_1} v \int_0^v \lambda^{r-2} d\lambda dx = \\ &= A \frac{r-p}{r-1} \int_{E_1} v^r dx. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left(1 - \frac{A(r-p)}{r-1}\right) \int_{E_1} v^r dx \leq \int_{E_1} v^p dx.$$

При $A > 1$ мы получим $A(r-p)/(r-1) < 1$, если $r < p + (p-1)/(A-1) = p + \eta$, $\eta > 0$. Для таких значений r

$$\int_{I_0} v^r dx \leq \int_{v \leq 1} v^p dx + C_r \int_{E_1} v^p dx.$$

Ввиду (6.9) и нормировок $|I_0| = 1$, $\int_{I_0} v^p dx = 1$ это доказывает (6.10) и теорему в целом.

Для доказательства (6.11) положим $\beta = 2K\lambda > \lambda \geq 1$. Очевидно, что

$$(6.12) \quad \int_{E_\lambda \setminus E_\beta} v^p dx \leq \beta^{p-1} \int_{E_\lambda \setminus E_\beta} v dx \leq (2K)^{p-1} \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v dx.$$

Значит, нам нужна только оценка величины $\int_{E_\beta} v^p dx$. По лемме

Кальдерона — Зигмунда 2.2 найдутся такие непересекающиеся интервалы $\{I_j\}$, $I_j \subset I_0$, что

$$(6.13) \quad \beta^p \leq \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} v^p dx < 2\beta^p$$

и $v \leq \beta$ почти всюду в $I_0 \setminus \bigcup I_j$. Значит, $E_\beta \subset \bigcup I_j$ с точностью до множества меры 0, и по (6.13)

$$(6.14) \quad \int_{E_\beta} v^p dx \leq \sum_j \int_{I_j} v^p dx \leq 2\beta^p \sum_j |I_j|.$$

Но по (6.9) и (6.13)

$$\beta \leq \left(\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} v^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{K}{|I_j|} \int_{I_j} v dx.$$

Это означает, что

$$|I_j| \leq \frac{K}{\beta} \int_{I_j} v dx \leq \frac{K}{\beta} \int_{I_j \cap E_\lambda} v dx + \frac{K\lambda}{\beta} |I_j|,$$

так что ввиду нашего выбора β

$$|I_j| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{I_j \cap E_\lambda} v dx.$$

Подставляя это в (6.14), получаем

$$\int_{E_\beta} v^p dx \leq \frac{2\beta^p}{\lambda} \int_{E_\lambda} v dx \leq 2^{p+1} K^p \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v dx,$$

что вместе с (6.12) и дает нам искомое неравенство (6.11). $\square$

Следствие 6.10. Если $1 < p < \infty$, а вес w удовлетворяет условию (A_p) , то

(а) существуют $\delta > 0$ и $C > 0$, при которых для любого интервала I

$$(6.15) \quad \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{1+\delta} dx \right)^{1/(1+\delta)} \leq \frac{C}{|I|} \int_I w dx;$$

(б) существует такое $\varepsilon > 0$, что w удовлетворяет и условию $(A_{p-\varepsilon})$.

Доказательство. По лемме 6.8(а) в части (а) мы можем считать $p > 2$. Неравенство Коши — Шварца показывает, что

$$1 \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{1/(p-1)} dx \right),$$

а это вместе с неравенством (A_p) дает

$$\frac{1}{|I|} \int_I w dx \leq K \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{1/(p-1)} dx \right)^{p-1}.$$

Поскольку $p-1 > 1$, то мы можем применить теорему 6.9 к функции $v = w^{1/(p-1)}$ и получить

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{r/(p-1)} dx \right)^{1/r} \leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_I w dx \right)^{1/(p-1)}$$

с $p-1 < r < p-1 + \eta$, $\eta > 0$. При $1 + \delta = r/(p-1)$ это дает (6.15). Чтобы доказать (б), мы применим (6.15) к весу $w^{-1/(p-1)}$, удовлетворяющему (A_q) , $q = p/(p-1)$. Тогда

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-(1+\delta)(p-1)} dx \right)^{(p-1)/(1+\delta)} \leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1}.$$

Выбирая $\varepsilon = (\delta/(1+\delta))(p-1) > 0$, так что $(p-\varepsilon)-1 = (p-1)/(1+\delta)$, и умножая обе части последнего неравенства

на $|I|^{-1} \int_I w \, dx$, мы получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \, dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-\varepsilon-1)} \, dx \right)^{p-\varepsilon-1} &\leq \\ &\leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \, dx \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \end{aligned}$$

и w удовлетворяет $(A_{p-\varepsilon})$. $\square$

Другое доказательство (b), близкое по духу к доказательству теоремы Джона — Ниренберга, описано в упр. 15.

Доказательство теоремы 6.1. Мы предположим, что $w(x)$ удовлетворяет (A_p) , и докажем, что

$$\int_I |Mf|^p \, d\mu \leq B_p \int_I |f|^p \, d\mu, \quad d\mu = w(x) \, dx.$$

Обратное было доказано в лемме 6.3.

Применяя к $|f|w^{1/p}$ и $w^{-1/p}$ неравенство Гёльдера и замечая, что $q/p = 1/(p-1)$, мы получаем

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f| \, dx \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^p w \, dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{(p-1)/p}.$$

Второй сомножитель можно оценить с помощью (A_p) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \, dx &\leq K \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \, dx \right)^{-1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^p w \, dx \right)^{1/p} = \\ &= K \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $d\mu = w(x) \, dx$. Положим

$$M_\mu g(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |g| \, d\mu.$$

Переходя к верхней грани по всем интервалам $I \ni x$ в последнем неравенстве, получаем

$$(6.16) \quad Mf(x) \leq K (M_\mu(|f|^p))^{1/p}.$$

Лемма о покрытии I.4.4 применима к мере μ , и доказательство максимальной теоремы I.4.3 без труда приспособливается для того, чтобы получить

$$(6.17) \quad \int (M_\mu g)^r \, d\mu \leq C_r \int |g|^r \, d\mu, \quad 1 < r < \infty$$

(см. упр. I.13). Но поскольку w удовлетворяет еще и условию

$(A_{p-\varepsilon})$, то (6.16) можно заменить неравенством

$$Mf(x) \leq K' M_\mu(|f|^{p-\varepsilon})^{1/(p-\varepsilon)}.$$

Это неравенство и (6.17) с $r = p/(p-\varepsilon)$ вместе дают

$$\int |Mf|^p d\mu \leq K'^p \int (M_\mu(|f|^{p-\varepsilon}))^{p/(p-\varepsilon)} d\mu \leq C_r K'^p \int |f|^p d\mu,$$

что и доказывает теорему 6.1. $\square$

Для доказательства теоремы 6.2 нам нужны еще одна лемма и одна дополнительная теорема. Говорят, что мера $d\mu = w dx$ удовлетворяет условию (A_∞) , если

$$(6.18) \quad \mu(E)/\mu(I) \leq C(|E|/|I|)^\alpha,$$

где E — произвольное борелевское подмножество интервала I . Постоянные $C > 0$ и $\alpha > 0$ должны не зависеть от E и I .

Лемма 6.11. Если w удовлетворяет условию (A_p) , $p < \infty$, то мера $d\mu = w dx$ удовлетворяет условию (A_∞) .

Доказательство. Неравенство Гёльдера и следствие 6.10(a) дают для $E \subset I$

$$\begin{aligned} \frac{\mu(E)}{|I|} &= \frac{1}{|I|} \int_E w dx \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I w^{1+\delta} dx \right)^{1/(1+\delta)} \left(\frac{|E|}{|I|} \right)^{\delta/(1+\delta)} \leq \\ &\leq \left(\frac{C}{|I|} \int_I w dx \right) \left(\frac{|E|}{|I|} \right)^{\delta/(1+\delta)} = C \frac{\mu(I)}{|I|} \left(\frac{|E|}{|I|} \right)^{\delta/(1+\delta)}, \end{aligned}$$

а это и есть условие (A_∞) , т. е. (6.18) с $\alpha = \delta/(1+\delta)$. $\square$

Теорема 6.12. Если мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию (A_∞) , то при $1 < p < \infty$

$$\int |Hf|^p w dx \leq C_p \int |Mf|^p w dx.$$

Интересующая нас теорема 6.2 сразу следует из леммы 6.11 и теорем 6.12 и 6.1. Наше единственное незаконченное дело — это доказательство теоремы 6.12.

Доказательство. Максимальное преобразование Гильберта

$$H^*f(x) = \sup_e \left| \int_{|x-t|>e} f(t) \frac{dt}{x-t} \right|$$

по теореме III.2.1 допускает оценку слабого типа

$$(6.19) \quad |\{x: H^*f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int |f(x)| dx.$$

Комбинируя (6.19) с (A_∞) , мы покажем, что при $0 < \gamma < 1$

$$(6.20) \quad \mu \{x: H^*f(x) > 2\lambda, Mf(x) \leq \gamma\lambda\} \leq A\gamma^\alpha \mu \{H^*f(x) > \lambda\},$$

где постоянная A не зависит от γ . Теорема легко выводится из (6.20), потому что

$$\begin{aligned} \int |H^*f|^p d\mu &= p2^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu \{H^*f(x) > 2\lambda\} d\lambda \leq \\ &\leq Ap2^p \gamma^\alpha \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu \{H^*f(x) > \lambda\} d\lambda + \\ &+ p2^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu \{Mf(x) > \gamma\lambda\} d\lambda = \\ &= A2^p \gamma^\alpha \int |H^*f|^p d\mu + 2^p \gamma^{-p} \int |Mf|^p d\mu. \end{aligned}$$

Выбирая столь малое $\gamma > 0$, чтобы $A2^p \gamma^\alpha < 1$, мы получим

$$\int |H^*f|^p d\mu \leq C_p \int |Mf|^p d\mu,$$

а поскольку, очевидно, $|Hf| \leq H^*f$, то это доказывает теорему.

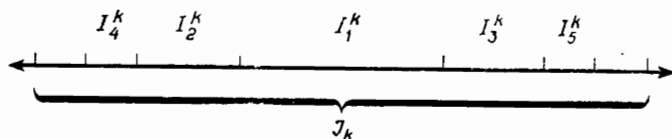


Рис. VI. 1.

Чтобы доказать (6.20), представим открытое множество $U_\lambda = \{x: H^*f(x) > \lambda\}$ как объединение непересекающихся открытых интервалов $\{J_k\}$. Разобьем каждый J_k на замкнутые интервалы $\{I_j^k\}$ с непересекающимися внутренностями так, чтобы

$$|I_j^k| = \text{dist}(I_j^k, \mathbb{R} \setminus J_k).$$

Это семейство интервалов $\{I_j\} = \bigcup_k \{I_j^k\}$, показанное на рис. VI. 1, называется *разбиением Уитни* множества U_λ . Оно обладает тремя свойствами:

$$U_\lambda = \bigcup_j I_j;$$

$$I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset, \quad i \neq j;$$

$$\text{dist}(I_j, \mathbb{R} \setminus U_\lambda) = |I_j|.$$

Главный шаг доказательства оценки (6.20) — это установление неравенства

$$(6.21) \quad |\{x \in I_j: H^*f(x) > 2\lambda, \quad Mf(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq B\gamma|I_j|.$$

Действительно, (6.21) вместе с условием (6.18) дает

$$\mu\{x \in I_j: H^*f(x) > 2\lambda, \quad Mf(x) \leq \gamma\lambda\} \leq CB^{\alpha}\gamma^{\alpha}\mu(I_j),$$

откуда (6.20) выводится суммированием по j .

Таким образом, доказательство теоремы 6.12 сведено благодаря условию (A_{∞}) к проверке неравенства (6.21), куда весовые функции не входят. Никакие дальнейшие редукции доказательства не нужны, и мы переходим к доказательству оценки (6.21). Поскольку $\{I_j\}$ — разбиение Уитни для U_{λ} , то существуют точки x_j , такие, что

$$\text{dist}(x_j, I_j) = |I_j| \quad \text{и} \quad H^*f(x_j) \leq \lambda.$$

Можно считать, что $Mf(\xi_j) \leq \gamma\lambda$ при некотором $\xi_j \in I_j$, так как иначе (6.21) становится тривиальным. Можно также считать, что γ мало, потому что при $B\gamma > 1$ неравенство (6.21) снова становится тривиальным. Пусть I_j^* — концентрический с I_j интервал длины $|I_j^*| = 3|I_j|$. Тогда $x_j \in I_j^*$. Пусть далее $I_j^{\tilde{}}$ — концентрический интервал длины $|I_j^{\tilde{}}| = 9|I_j|$. Положим $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = f\chi_{I_j^*}$, $f_2 = f\chi_{R \setminus I_j^*}$. Поскольку $\xi_j \in I_j^*$, то

$$\frac{1}{|I_j^*|} \|f_1\|_1 = \frac{1}{|I_j^*|} \int_{I_j^*} |f| dx \leq 2Mf(\xi_j) \leq 2\gamma\lambda,$$

так что (6.19) дает

$$(6.22) \quad |\{x: H^*f_1(x) > \lambda/2\}| \leq (2C/\lambda) \|f_1\|_1 \leq 4C\gamma|I_j^*|.$$

При $x \in I_j$ интеграл $Hf_2(x)$ не имеет особенностей, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \int_{|x-t|>\varepsilon} f_2(t) \frac{dt}{x-t} \right| &\leq \int_{R \setminus I_j^*} |f(t)| \frac{dt}{|x-t|^2} \leq \\ &\leq C_1 \int_{|t-\xi_j|>4|I_j|} |f(t)| \frac{dt}{|t-\xi_j|^2} \leq \frac{C_2}{|I_j|} Mf(\xi_j), \end{aligned}$$

потому что последний интеграл можно рассматривать как сумму средних значений по интервалам с центром ξ_j . Следовательно,

$$\begin{aligned} H^*f_2(x) &\leq \sup_{\varepsilon} \left| \int_{|x-t|>\varepsilon} f_2(t) \frac{dt}{x-t} - \int_{|x_j-t|>\varepsilon} f_2(t) \frac{dt}{x_j-t} \right| + H^*f_2(x_j) \leq \\ &\leq \frac{C_2}{|I_j|} Mf(\xi_j) |x - x_j| + H^*f_2(x_j) \leq 3C_2\gamma\lambda + H^*f_2(x_j). \end{aligned}$$

С другой стороны, раз $\text{dist}(x_j, \mathbb{R} \setminus I_j^*) = 3|I_j|$, то $H^*f_2(x_j)$ не может быть намного больше, чем $H^*f(x_j)$. Точнее,

$$\begin{aligned} H^*f_2(x_j) &= \sup_{\varepsilon > 3|I_j|} \left| \int_{|x_j - t| > \varepsilon} f_2(t) \frac{dt}{x_j - t} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 3|I_j|} \left| \int_{|x_j - t| > \varepsilon} f(t) \frac{dt}{x_j - t} \right| + \frac{1}{3|I_j|} \int_{3|I_j| < |x_j - t| < 6|I_j|} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Первый из этих интегралов ограничен величиной $H^*f(x_j) \leq \lambda$, а второй не превосходит $C_3 Mf(\xi_j) \leq C_3 \gamma \lambda$. Значит,

$$(6.23) \quad H^*f_2(x) \leq (3C_2 + C_3) \gamma \lambda + \lambda, \quad x \in I_j.$$

Поскольку $H^*f \leq H^*f_1 + H^*f_2$, то из (6.22) и (6.23) следует неравенство

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in I_j: H^*f(x) > (3C_2 + C_3) \gamma \lambda + \frac{3}{2} \lambda \right\} \right| &\leq \\ &\leq \left| \left\{ x: H^*f_1(x) > \frac{1}{2} \lambda \right\} \right| \leq 12C\gamma |I_j|, \end{aligned}$$

что дает (6.21) при $(3C_2 + C_3) \gamma < 1/2$. $\square$

Замечания

Сейчас существует обширная литература о ВМО и его связях с теорией однолистных функций, квазиконформных отображений, уравнений с частными производными и с теорией вероятностей. В большой степени именно теорема двойственности и конформная инвариантность делают ВМО важным в столь многих областях. Часть этой литературы приведена в библиографии.

Конформная инвариантность ВМО, которую использовали многие авторы, кажется, впервые появилась в заметках Гарсия [1971]. Большая часть материала разд. 1—4 заимствована из фундаментальной статьи Феффермана и Стейна [1972], где впервые была доказана теорема двойственности. Теорема 1.5 впервые доказана Спанне [1966] и независимо Стейном [1967].

Теорема 2.1 принадлежит Джону и Ниренбергу [1961]. Их простое доказательство имеет широкие применения. Кампанато [1963] и Мейерс [1964] дали аналогичное описание классов Гёльдера¹⁾.

Доказательство теоремы двойственности было бы проще, если бы мера $|\nabla \varphi(z)| dx dy$ была мерой Карлесона при $\varphi \in \text{ВМО}(T)$. В упр. 9 показано, что это не так, даже если φ — произведение Бляшке. Выражение Литтлвуда — Пэли $|\nabla \varphi(z)|^2 \log(1/|z|) dx dy$ — полезное средство для преодоления

¹⁾ См. историю вопроса и обзор в статье Брудного [1971*]. — Прим. перев.

этой трудности. Другое средство принадлежит Варопулосу [1977]; оно описано в упр. 12 и 13. Доказательство теоремы о короне дает еще и другой путь в обход этой трудности (см. разд. VIII.6).

Не считая преобразования Фурье, преобразование Гильберта — это, возможно, самый важный оператор в вещественном или комплексном анализе. Главная сила теоремы двойственности состоит в том, что она характеризует $BMO(\mathbb{R})$ как множество функций вида $\varphi = u + Hv$, $u, v \in L^\infty$. Более конструктивное доказательство такого разложения будет дано в гл. VIII.

Результаты о BMO и их приложения в гл. IX ниже заимствованы из статьи Сарасона [1975].

Теорема 6.1 принадлежит Макенхаупту [1972], а теорема 6.2 впервые доказана Хантом, Макенхауптом и Виденом [1973]. Абсолютная непрерывность меры μ установлена ранее Форелли [1963]. Приведенные в тексте доказательства теорем 6.1 и 6.2 следуют Койфману и Фефферману [1974]. Неравенство Геринга из теоремы 6.9 — это, по существу, некоторый результат о максимальных функциях (см. Геринг [1973]). Имеются несколько важных неравенств для весов, удовлетворяющих (A_p) (см. Ганди и Виден [1974], Макенхаупт и Виден [1974]).

Никто пока не нашел прямого доказательства равносильности (A_2) условию Хелсона — Сегё. Статьи Гарнетта и Джонса [1978], Джонса [1980b], Утиямы [1982] и Варопулоса [1980] проливают некоторый свет на эту проблему; там исследуется многомерная форма следствия 6.6. Бернштейн в связи с этим поставил очень интересную задачу: если функция $\varphi \in BMO$ такова, что

$$\sup_I \frac{1}{|I|} |\{x \in I: |\varphi(x) - \varphi_I| > \lambda\}| \leq Ce^{-\lambda},$$

то можно ли представить ее в виде $\varphi = u + Hv$, $u \in L^\infty$, $\|v\|_\infty \leq \pi/2$? (См. Никольский, Хавин и Хрущев [1978], стр. 230.¹⁾) Предложение, обратное гипотезе Бернштейна, очень простое (упр. 18). Теорема 6.2 вместе с теоремой Хелсона — Сегё дают другое доказательство двойственности H^1 — BMO на прямой.

Неравенство (6.21) объясняет, почему преобразование Гильберта и максимальная функция часто бывают ограничены в одних и тех же пространствах. Дальнейшие сведения о неравенствах такого типа, которые называются «неравенствами для хороших λ »²⁾, см. у Буркхольдера [1973] и Буркхольдера и Ганди [1972]. Рассуждение в доказательстве (6.20) — это мощный метод, развившийся из вещественного доказательства не-

¹⁾ Недавно Т. Волф дал отрицательный ответ на этот вопрос. — *Прим. ред.*

²⁾ Good λ inequalities. — *Прим. перев.*

равенства слабого типа (1—1) для оператора Гильберта (см. Кальдерон и Зигмунд [1952], Стейн [1970]).

Большинство результатов этой главы на самом деле относится к функциям в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или даже в пространствах однородного типа, введенных Койфманом и Вейсом [1971]. Так они и изложены во многих цитированных работах¹⁾. Мы ограничились наше обсуждение случаем $\mathbb{R}^1$ и T , чтобы сохранить простоту изложения и не отрываться от последующих применений.

Имеются красивые связи между аналитическими функциями из ВМО, однолиственными функциями и функциями Блоха. Очерк некоторых из этих результатов дан в упр. 22—25. Заметки Сарасона [1979] и лекция Бернштейна [1980] дают хороший обзор этого предмета.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Если $\varphi \in \text{ВМО}$ вещественна, то $\max(\varphi, 0) \in \text{ВМО}$.

2. ВМО полно.

3. (а) Если $\varphi \in \text{ВМО}$, $\chi_I \varphi \in \text{ВМО}$ и $\|\chi_I \varphi\|_* \leq C \|\varphi\|_*$ для любого интервала I , то φ ограничена и $\|\varphi\|_\infty \leq C' \|\varphi\|_*$.

(б) Если h — измеримая функция на T , то $h\varphi \in \text{ВМО}(T)$ для всех $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ тогда и только тогда, когда $h \in L^\infty$ и

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \log \frac{1}{|I|} \right) \int_I |h_I - h| dx < \infty$$

(Стегенга [1976]).

(с) Сформулируйте и докажите подобный результат на прямой.

(d) Пусть $\varphi \in \text{ВМО}$, а I — такой интервал, что $\varphi_I = 0$. Пусть J — концентрический с I интервал длины $|J| = 3|I|$. Тогда существует такая функция $\psi \in \text{ВМО}$, что $\psi = \varphi$ на I ,

$\psi = 0$ на $\mathbb{R} \setminus J$ и $\|\psi\|_* \leq C \|\varphi\|_*$. (Указание. Пусть $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$,

где $\text{dist}(J_n, \partial I) = |J_n|$, как на рис. VI.1. Пусть $|J_0| > |J_n|$, $n \neq 0$, т. е. J_0 — средняя треть J . Пусть K_n , $n > 0$, — интервал, симметричный J_n относительно ближайшего конца I . Положим $\psi(x) = \varphi_{J_n}$, $x \in K_n$; $\psi(x) = 0$, $x \notin I \cup \bigcup K_n$.)

4. Пусть $f(x)$ — измеримая функция на $\mathbb{R}$. Предположим, что существуют такие $\alpha < 1/2$ и $\lambda > 0$ и для каждого интервала I существует такая постоянная a_I , что

$$|\{x \in I: |f(x) - a_I| > \lambda\}| \leq \alpha |I|.$$

¹⁾ См. также Фолланд и Стейн [1982*]. Тематика, связанная с условием (A_p) , продолжает интенсивно разрабатываться; см. обзор Дынькина и Осиленкера [1983*]. — Прим. ред.

Тогда $f \in \text{ВМО}$. Доказательство похоже на доказательство теоремы Джона — Ниренберга. Этот результат уже неверен при замене $1/2$ большим числом (Стремберг [1976]).

5. На окружности имеем $(H^1_R)^* = \text{ВМО}$, причем билинейное спаривание между $u \in H^1_R$ и $\varphi \in \text{ВМО}(T)$ дается формулой

$$\frac{1}{2\pi} \int u \varphi d\theta,$$

а постоянные функции из ВМО не отождествляются между собой, т. е. ВМО снабжается нормой

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int \varphi d\theta \right| + \|\varphi\|_*$$

С той же нормой $\text{ВМОА} = H^2 \cap \text{ВМО}$ сопряжено с классическим пространством H^1 со спариванием

$$\int f \bar{\varphi} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad f \in H^1, \quad \varphi \in \text{ВМОА}.$$

6. Положим для $\varphi \in L^1(dt/(1+t^2))$

$$\nabla \varphi(z) = (\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial y), \quad z \in \mathcal{H},$$

где $\varphi(z)$ — интеграл Пуассона от $\varphi(t)$.

(а) Покажите с помощью теоремы Грина или преобразования Фурье, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt = 2 \iint_{\mathcal{H}} y |\nabla \varphi(z)|^2 dx dy.$$

(б) Покажите, что $\varphi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда $y |\nabla \varphi|^2 dx dy$ — карлесоновская мера (не обязательно конечная).

(с) Если $\varphi \in \text{ВМО}$, а f — голоморфная функция из H^1 без нулей в $\mathcal{H}$, то

$$\iint_{\mathcal{H}} y |\nabla f \cdot \nabla \varphi| dx dy \leq C \|\varphi\|_* \|f\|_{H^1}.$$

Далее, если $f \in \mathcal{A}$, то

$$\begin{aligned} \left| \int f(t) \varphi(t) dt \right| &= \left| \lim_{y \rightarrow 0} \int f(x + iy) \varphi(x + iy) dx \right| \leq \\ &\leq C \iint_{\mathcal{H}} y |\nabla f \cdot \nabla \varphi| dx dy, \end{aligned}$$

что доказывает теорему двойственности на прямой.

Отметим, что последнее неравенство не следует непосредственно из (а) при помощи поляризации, потому что не предполагается, что $\varphi \in L^2$. Однако для непрерывных f и φ по тео-

реме Грина тождество $\Delta(f(z)\varphi(z)) = 2\nabla f(z) \cdot \nabla \varphi(z)$ дает

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) \varphi(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \iint_{\mathbb{R} \cap \{|z| < R\}} y \nabla f(z) \cdot \nabla \varphi(z) dx dy.$$

7. (а) Пусть $\mathcal{T}$ — пространство двусторонних последовательностей

$$F = \{f_n: -\infty < n < \infty\}$$

измеримых функций на $\mathbb{R}$, таких, что конечна норма

$$\|F\| = \int \sup_n |f_n(x)| dx.$$

С этой нормой $\mathcal{T}$ является банаховым пространством.

(б) Пусть $\mathcal{T}_0$ — замыкание в $\mathcal{T}$ множества таких последовательностей F , что

$$f_n = f_N, \quad n \geq N; \quad f_n = 0, \quad n \leq -N,$$

при некотором $N = N(F)$. Если $F \in \mathcal{T}_0$, то существует предел (в L^1) $f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Сопряженное с $\mathcal{T}_0$ пространство состоит

из последовательностей L^∞ -функций $G = \{g_n: -\infty < n \leq \infty\}$ с нормой

$$\|G\| = \left\| |g_\infty(x)| + \sum_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)| \right\|_\infty;$$

двойственность задается формулой

$$\langle F, G \rangle = \int f_\infty(x) g_\infty(x) dx + \sum_{-\infty}^{\infty} \int f_n(x) g_n(x) dx.$$

(с) Выберем $\{y_n: -\infty < n < \infty\}$ так, чтобы $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $y_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow -\infty$) и $0 < y_n - y_{n+1} \leq \min(y_n^2, 1)$. Определим оператор $S: H_R^1 \rightarrow \mathcal{T}$ формулой¹⁾ $[S(u)]_n(x) = u(x, y_n)$. Тогда S отображает H_R^1 на замкнутое подпространство в $\mathcal{T}_0$. (Используйте вертикальную максимальную функцию $u^+(x) = \sup_{y>0} |u(x, y)|$.)

(д) Согласно (б) и (с), каждый ограниченный линейный функционал на H_R^1 имеет вид

$$L(u) = \int u(x) g_\infty(x) dx + \sum_{-\infty}^{\infty} \int u(x, y_n) g_n(x) dx,$$

где $\frac{1}{|I|} \int_I \left(|g_\infty(x)| + \sum_{-\infty}^{\infty} |g_n(x)| \right) dx \leq C \|L\|,$

¹⁾ Здесь $u(x, y)$ — интеграл Пуассона функции $u(x)$ — Прим. ред.

и обратно. Вместе с теоремой двойственности это доказывает обратное утверждение к теореме 1.6. Если $\varphi \in \text{ВМО}$, то

$$\varphi(t) = g_{\infty}(t) + \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) d\sigma(x, y),$$

где $|\sigma|$ — мера Карлесона. Здесь

$$d\sigma = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(x) ds_n,$$

где $ds_n = dx$ на прямой $\{y = y_n\}$. Отметим, что мера $|\sigma|$ даже более чем карлесонова, потому что

$$|\sigma|(I \times (0, \infty)) \leq C|I|.$$

Это отражает тот факт, что пространство H^1 определяется через вертикальную максимальную функцию, равно как и через некасательную. Намеченное выше доказательство принадлежит Фефферману (не опубликовано).

*** (е) Карлесон [1976] конструктивно получил разложение

$$\varphi(t) = g_{\infty}(t) + \sum_{-\infty}^{\infty} \int P_{y_n}(x-t) g_n(t) dt,$$

$|g_{\infty}| + \sum_{-\infty}^{\infty} |g_n| \in L^{\infty}$, для любой функции $\varphi \in \text{ВМО}$.

(f) Предполагая результат (е) доказанным, докажите следующую максимальную характеристику H^1 : если $u \in L^1 \cap L^2$, то $\|Hu\|_1 \leq C\|u^+\|_1$. (Указание. Пусть $g \in L^2 \cap L^{\infty}$, $\|g\|_{\infty} = 1$, и $\varphi = Hg \in \text{ВМО}$. Тогда

$$\left| \int (Hu) g dt \right| = \left| \int u \varphi dt \right| \leq C\|u^+\|_1.$$

Верхняя грань левой части равна $\|Hu\|_1$.)

(g) Выведите из части (е) трудную половину теоремы двойственности.

8. Пусть $f = \sum_0^{\infty} a_n e^{in\theta} \in H^1$. Докажите при помощи двойственности, что

$$\sum_{k \geq 0} |a_{2k}|^2 \leq C\|f\|_1^2 \quad (\text{Пэли}),$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{n+1} \leq C\|f\|_1 \quad (\text{Харди}).$$

9. Существуют такие функции $u \in \text{ВМО}$, что $|\nabla u| dx dy$ не является мерой Карлесона. Существует даже такое произведе-

ние Бляшке $B(z)$, что

$$\iint_D |B'(z)| dx dy = \infty.$$

(а) Пусть $f(e^{i\theta}) = \sum_1^\infty (1/n) e^{i2^n\theta}$. Тогда $f \in \text{ВМО}$. Обозначим кольцо $\{1 - 2^{-n} \leq |z| \leq 1 - 2^{-n-1}\}$ через A_n . Тогда

$$\iint_{A_n} |f'(z)| dx dy \geq c/n.$$

Полагая $\operatorname{Re} f = u_1 + \tilde{u}_2$, покажите, что существует ограниченная гармоническая функция $u(z)$, у которой $\iint_D |\nabla u| dx dy = \infty$.

Тогда $F = \exp(u + i\tilde{u})$ — функция из H^∞ с

$$\iint_D |F'(z)| dx dy = \infty.$$

(b) $g(e^{i\theta}) = \sum a_n e^{i2^n\theta} \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_n|^2 < \infty$, но $\iint |g'(z)| dx dy < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_n| < \infty$.

(с) Если $\sum |a_n|^2 < \infty$, то существует функция $F \in H^\infty$ с $F(2^n) = a_n$ (см. Фурнье [1974]). Если при этом $\sum |a_n| = \infty$, то $\iint |F'(z)| dx dy = \infty$.

(d) Существует такое произведение Бляшке $B(z)$, что

$$\iint_D |B'(z)| dx dy = \infty.$$

Самый ранний пример принадлежит Рудину¹⁾ [1955b].

10. Существуют такие функции $f_1(z), f_2(z) \in H^\infty$, что

$$\int_\Gamma (|f'_1(z)| + |f'_2(z)|) ds = \infty$$

вдоль всякой гладкой кривой $\Gamma \subset D$ с концом на T .

Следовательно, отображение $z \rightarrow (z, f_1(z), f_2(z))$ есть вложение единичного круга в $\mathbb{C}^3$. Соответствующее многообразие

¹⁾ Первый пример функции класса H^∞ с несуммируемой производной принадлежит С. Н. Мергеляну (см. Мергелян [1951*]), где дана конструкция, близкая к намеченной в п. (а). В связи с утверждением п. (с) см. Виноградов [1970*]. Описание коэффициентов аналитических функций с суммируемой производной, из которого легко следуют результаты (а)—(с), см. в статье Пеллера и Хрушева [1982*], стр. 58—59. См. также Андрианова [1976*]. — *Прим. ред.*

ограничено и полно относительно внутренней метрики, индуцированной евклидовой метрикой пространства $\mathbb{C}^3$.

Чтобы построить f_1 и f_2 , возьмите сначала

$$\varphi(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{10^n}}{n} \cos(10^n \theta).$$

Тогда

$$|\nabla \varphi(z)| \geq \frac{10^n}{100n}, \quad z \in A_n = \{9 \cdot 10^{-n-1} \leq 1 - |z| \leq 11 \cdot 10^{-n-1}\},$$

так что

$$\int_{\Gamma} |\nabla \varphi(z)| ds = \infty$$

вдоль всякой кривой $\Gamma \subset D$ с концом на T . С другой стороны, $\varphi(e^{i\theta}) \in \text{ВМО}$, $\varphi = u + \bar{v}$. Возьмите $f_1 = e^{u+i\bar{v}}$, $f_2 = e^{v+i\bar{u}}$. Этот пример принадлежит Джонсу [1979a]. Происхождение этой задачи см. у Янга [1977].

11. Атомом называется функция $a(x)$, сосредоточенная на интервале I и такая, что

$$\int a(x) dx = 0, \quad |a(x)| \leq 1/|I|.$$

Если $\{a_j\}$ — последовательность атомов, а $\sum |\lambda_j| < \infty$, то

$$f(x) = \sum \lambda_j a_j(x) \in H_R^1$$

и $\|f\|_{H^1} \leq C \sum |\lambda_j|$. Обратно, по теореме двойственности каждая функция из H_R^1 имеет такой вид, причем $\sum |\lambda_j| \leq C \|f\|_{H^1}$. Прямое доказательство атомного разложения, которое снова влечет за собой двойственность H^1 — ВМО, см. у Койфмана [1974] или Лэттера [1978].

12 (диадическое ВМО). Диадический интервал — это интервал вида $\omega = (j2^{-n}, (j+1)2^{-n})$ с целыми j и n . Положим для $\varphi \in L_{loc}^1$

$$\|\varphi\|_d = \sup_{\omega} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} |\varphi - \varphi_{\omega}| dx,$$

где верхняя грань берется только по диадическим интервалам. Диадическое ВМО (ВМО_d) состоит из всех функций φ с конечным $\|\varphi\|_d$.

(а) $\text{ВМО} \subset \text{ВМО}_d$, но в ВМО_d есть функции, не входящие в ВМО.

(б) Если $\varphi \in \text{ВМО}_d$, то $\varphi \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда $|\varphi_{\omega_1} - \varphi_{\omega_2}| \leq A$ для любых смежных диадических интервалов ω_1 и ω_2 равной длины. При этом $C_1 \|\varphi\|_* \leq A + \|\varphi\|_d \leq C_2 \|\varphi\|_*$.

(с) Пусть функция $\varphi \in \text{ВМО}_d$ сосредоточена на $[0, 1]$. Существует семейство $\mathcal{J}$ диадических интервалов ω , такое, что

$$(E.1) \quad \sum_{\substack{\omega \subseteq I \\ \omega \in \mathcal{J}}} |\omega| \leq C \|\varphi\|_d |I|$$

для любого диадического интервала I , и существуют числа α_ω , $\omega \in \mathcal{J}$, такие, что $|\alpha_\omega| \leq C \|\varphi\|_d$ и

$$\varphi = \psi + \sum_{\omega \in \mathcal{J}} \alpha_\omega \chi_\omega, \quad \psi \in L^\infty, \quad \|\psi\|_\infty \leq C \|\varphi\|_d.$$

Обратно, любая функция такого вида входит в ВМО_d . Для доказательства этого разложения имитируйте доказательство теоремы Джона — Ниренберга. Пусть $\|\varphi\|_d = 1$. Возьмите $\mathcal{J} = \{I_j^n\}$ из этого доказательства и $\alpha_\omega = \varphi_{I_j^n} - \varphi_{I_k^{n-1}}$, $I_j^n \subset I_k^{n-1}$.

(d) Диадическая максимальная функция — это

$$f^d(x) = \sup_{\omega \ni x} \frac{1}{|\omega|} \left| \int_{\omega} f \, dt \right|,$$

где верхняя грань берется по диадическим интервалам. Пространство H_d^1 состоит из функций $f \in L^1[0, 1]$ с

$$\|f^d\|_1 = \int_0^1 |f^d(x)| \, dx < \infty.$$

$\|f^d\|_1$ — норма в H_d^1 . Пространство, сопряженное с H_d^1 , согласно (с), совпадает с ВМО_d .

Диадические пространства H_d^1 и ВМО_d являются частными случаями мартингалов пространств H^1 и ВМО (см. Гарсия [1973]). Технически с ВМО_d гораздо легче работать, чем с ВМО . Например, часть (с) выше довольно проста, а прямое доказательство аналогичного факта для ВМО — упражнение 7(e) — довольно трудно.

13. (а) Пусть носитель функции $\varphi \in \text{ВМО}$ содержится в $[0, 1]$. Существует функция $F \in C^\infty(\mathcal{H})$, у которой $|\nabla F(x, y)| \, dx \, dy$ — мера Карлесона,

$$(E.2) \quad \iint_Q |\nabla F(x, y)| \, dx \, dy \leq A \|\varphi\|_* h, \quad Q = [a, a+h] \times (0, h],$$

$$(E.3) \quad \sup_{y>0} |F(x, y)| \in L^1$$

и

$$(E.4) \quad \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} F(x, y) + \psi(x), \quad \|\psi\|_\infty \leq C \|\varphi\|_*.$$

Согласно 12(c), мы можем считать, что

$$\varphi(x) = \sum_{\omega \in \mathcal{J}} \alpha_{\omega} \chi_{\omega}(x),$$

где семейство интервалов $\mathcal{J}$ удовлетворяет (E.1). Положим

$$F_0(x, y) = \sum_{\omega \in \mathcal{J}} \alpha_{\omega} \chi_{\omega}(x) \chi_{(0, 1/\omega)}(y).$$

Функция F_0 удовлетворяет (E.2) и (E.3), но не принадлежит C^{∞} . Тем не менее градиент $|\nabla F_0(x, y)|$ в смысле обобщенных функций является мерой Карлесона (используйте упр. 12(b) для контроля над $|\partial F_0/\partial x|$). Гладкая функция $F(x, y)$ получается сглаживанием из F_0 . Пусть $h \in C^{\infty}(\mathbb{C})$, $h(z) \geq 0$, $\int h dx dy = 1$ и $h(z) = 0$ при $|z| > 1/2$. Положим $h_n(z) = 2^{2n} h(2^n z)$, $F_n(z) = F_0(z) \chi_{\{2^{-n} < y < 2^{-n+1}\}}(z)$ и

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n * F_n)(z).$$

Функция $F \in C^{\infty}(\mathcal{H})$ удовлетворяет (E.2)–(E.4) (Варопулос [1977a]).

(b) Используйте (a), чтобы дать другое доказательство двойственности $H_{\mathbb{R}}^1$ — ВМО.

14. (a) Пространство, сопряженное с $\text{ВМО}(T)$, есть $H_{\mathbb{R}}^1(T)$.

(b) Пусть $f \in \text{ВМО}$. Тогда $f \in \text{ВМО}$ в том и только том случае, когда

$$\int_a^{a+h} \int_0^h y |\nabla u(z)|^2 dx dy = o(h), \quad h \rightarrow 0,$$

равномерно по $a \in \mathbb{R}$, где $u(z)$ — интеграл Пуассона от $f(t)$.

*15. (a) Пусть $\psi \in \text{ВМО}$, $\|\psi\|_* \leq B_0$. Если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{\psi - \psi_I} dx = B_1 < \infty,$$

то существуют такие $\delta = \delta(B_0, B_1)$ и $B_2 = B_2(B_0, B_1)$, что

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{(1+\delta)(\psi - \psi_I)} dx \leq B_2.$$

Доказательство является вариантом доказательства теоремы Джона — Ниренберга. Достаточно показать, что при некотором $\alpha > 1$

$$(E.5) \quad |\{x \in I: \psi(x) - \psi_I > n\alpha\}| \leq e^{-(1+2\delta)n\alpha} |I|, \quad n = 1, 2, \dots$$

для любого интервала I .

Возьмем такое $\lambda > 0$, чтобы

$$(E.6) \quad |\psi_I - \psi_J| \leq \frac{1}{2} \lambda, \quad I \subset J, \quad |J| = 2|I|,$$

и чтобы

$$(E.7) \quad \left| \left\{ x \in I: |\psi(x) - \psi_I| \geq \frac{1}{2} \lambda \right\} \right| \leq \frac{1}{2} |I|$$

для всех I . Выберем интервал I_0 ; можно считать, что $I_0 = [0, 1]$ и $\psi_{I_0} = 0$. При $n = 1, 2, \dots$ пусть $\{I_{nj}\}$ — максимальные диадические подынтервалы в I_0 , такие, что $\psi_{I_{nj}} \geq n\lambda$. По (E.6)

$$n\lambda \leq \psi_{I_{nj}} \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

и в силу (E.7) существуют подмножества $E_{nj} \subset I_{nj}$, такие, что $|E_{nj}| \geq |I_{nj}|/2$ и $\psi(x) \geq (n - 1/2)\lambda$, $x \in E_{nj}$. Интервалы $\{I_{nj}\}$ при данном n попарно не пересекаются, поэтому для любого интервала I_{mk}

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|I_{mk}|} \sum_{n \geq m} e^{(n-m-1)\lambda} \sum_{I_{nj} \subset I_{mk}} |I_{nj}| \leq \\ & \leq \frac{2}{|I_{mk}|} \sum_{n \geq m} e^{(n-m-1)\lambda} \sum_{I_{nj} \subset I_{mk}} |E_{nj}| \leq \\ & \leq \frac{2}{|I_{mk}|} \sum_{n \geq m} e^{(n-m-1)\lambda} \left| \left\{ x \in I_{mk}: \psi(x) \geq \left(n - \frac{1}{2}\right) \lambda \right\} \right| \leq \\ & \leq \frac{2}{|I_{mk}|} \sum_{n \geq m} e^{(n-m-1)\lambda} \left| \left\{ x \in I_{mk}: \psi(x) - \psi_{I_{mk}} \geq (n-m-1)\lambda \right\} \right| \leq \\ & \leq C \frac{1}{|I_{mk}|} \int_{I_{mk}} e^{\psi - \psi_{I_{mk}}} dx \leq CB_1, \quad C = C(\lambda). \end{aligned}$$

В частности, при $n \geq m$

$$(E.8) \quad \sum_{I_{nj} \subset I_{mk}} \frac{|I_{nj}|}{|I_{mk}|} \leq CB_1 e^{-(n-m-1)\lambda}.$$

Более того, для любого $s \geq 2$ найдется такое n_0 , $m \leq n_0 \leq m + s$, что

$$\sum_{I_{nj} \subset I_{mk}} \frac{|I_{n_0 j}|}{|I_{mk}|} \leq \frac{1}{s} CB_1 e^{-(n_0-m-1)\lambda}.$$

В частности,

$$\sum_{I_{m+s, j} \subset I_{mk}} \frac{|I_{m+s, j}|}{|I_{mk}|} \leq \frac{CB_1}{s} e^{\lambda} e^{-s\lambda}.$$

Выбирая s достаточно большим, получим

$$\sum_{I_{m+s}, j \in I_{mk}} \frac{|I_{m+s, j}|}{|I_{mk}|} \leq e^{-(1+2\delta)s\lambda}, \quad \delta > 0,$$

откуда (Е.5) при $\alpha = s\lambda$ следует по индукции.

Это рассуждение принадлежит П. Джонсу и имеет несколько интересных следствий.

(b) Если $\psi \in \text{ВМО}$ и

$$(E.9) \quad \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{A|\psi - \psi_I|} dx < \infty,$$

то при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{(A+\varepsilon)|\psi - \psi_I|} dx < \infty.$$

Таким образом, множество $\{A: \text{выполняется (Е.9)}\}$ не содержит своей верхней грани.

(c) Если вес w удовлетворяет (A_p) , то w удовлетворяет $(A_{p-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. (Используйте часть (a) и лемму 6.5 с $\psi = \log(w^{-1/(p-1)})$.)

16. Пусть H — преобразование Гильберта, а B — оператор умножения на функцию $b(x)$, $Bg(x) = b(x)g(x)$. Коммутатор $[B, H]$ определяется формулой

$$[B, H]g = B(Hg) - H(Bg) = b(x)Hg(x) - H(bg)(x).$$

Оператор $[B, H]$ ограничен в L^2 тогда и только тогда, когда $b(x) \in \text{ВМО}$, причем

$$C_1 \|b\|_* \leq \| [B, H] \| \leq C_2 \|b\|_*.$$

(Указание. Используйте двойственность и факторизацию Рисса; см. Койфман, Рохберг и Вейсс [1976].) Следующее доказательство оценки $\| [B, H] \| \leq C \|b\|_*$ принадлежит Рохбергу. Согласно разд. 6, найдется такое $\delta > 0$, что если $\|b\|_* < \delta$, то e^{2b} удовлетворяет условию (A_2) . Значит, по теореме 6.2

$$Tf(x) = \int \frac{e^{b(x)-b(y)}}{x-y} f(y) dy$$

допускает оценку $\|Tf\|_2 \leq C \|f\|_2$, поскольку

$$\|Tf\|_2^2 = \int e^{2b(x)} |H(e^{-b}f)(x)|^2 dx \leq C \int e^{2b(x)} e^{-2b(x)} |f(x)|^2 dx.$$

При $|z| = 1$ то же самое верно и для оператора T_z , в котором $b(x)$ заменено на $zb(x)$. Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} T_z f \frac{dz}{z^2} = \int \frac{b(x) - b(y)}{x-y} f(y) dy = [B, H]f.$$

17. Если μ — вероятностная мера, а функция $f \geq 0$ измерима, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\int |f|^n d\mu \right)^{1/n} = \frac{1}{eA(f)},$$

где

$$A(f) = \sup \left\{ A : \int e^{Af} d\mu < \infty \right\}.$$

(Разложите e^{Af} в степенной ряд и используйте признак Коши и формулу Стирлинга.)

18. (а) Пусть $u \in L^\infty(T)$, $\|u\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$, $f = e^{-i(u+i\bar{u})}$. Тогда $|f|$ — функция из слабого L^1 , поскольку $\operatorname{Re} f \geq 0$. Значит,

$$|\{\theta : |\tilde{u}(e^{i\theta})| > \lambda\}| \leq Ce^{-\lambda}.$$

Ввиду конформной инвариантности

$$\omega_z\{\theta : |\tilde{u}(e^{i\theta}) - \tilde{u}(z)| > \lambda\} \leq Ce^{-\lambda}, \quad z \in D,$$

где $\omega_z(E) = \frac{1}{2\pi} \int_E P_z d\theta$. Следовательно, для любой дуги I

$$|\{\theta \in I : |\tilde{u}(e^{i\theta}) - \tilde{u}_I| > \lambda\}| \leq Ce^{-\lambda}|I|.$$

(б) Подобным же образом из условия Хелсона — Сегё вытекает и условие (A_2) .

19. (а) Пусть μ — локально конечная положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$, а ее максимальная функция

$$M\mu(x) = \sup_{I \ni x} \frac{\mu(I)}{|I|}$$

конечна почти всюду по мере Лебега. Тогда $\log M\mu \in \text{ВМО}$ (Койфман и Рохберг [1980]).

(б) Пусть $E \subset [0, 1]$ и $|E| \leq 4^{-1/\varepsilon}$. Тогда существует такая функция $\varphi \in \text{ВМО}$, что

$$0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$\varphi(x) = 1, \quad x \in E; \quad \varphi(x) = 0, \quad x \notin [-1, 2],$$

$$\|\varphi\|_* \leq c\varepsilon,$$

где c — абсолютная постоянная. (Указание. Возьмите $\varphi = (\alpha + \beta \log M\chi_E)^+$. Другое доказательство дали Гарнетт и Джонс [1978].)

*20. (а) Положим при $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$$f^\#(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| dt.$$

Таким образом, $f \in \text{ВМО}$ тогда и только тогда, когда $f^\# \in L^\infty$. По максимальной теореме $\|f^\#\|_p \leq C_p \|f\|_p$, $1 < p < \infty$. Докажите обратное:

$$\|f\|_p \leq C'_p \|f^\#\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

(Фефферман и Стейн [1972]).

(b) Пусть T — такое сублинейное отображение пространства $L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ в пространство измеримых функций на $\mathbb{R}$, что

$$\|Tf\|_2 \leq A_0 \|f\|_2, \quad \|Tf\|_* \leq A_1 \|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty \cap L^2.$$

Тогда $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$, $2 \leq p \leq \infty$. (Используйте $(Tf)^\#$ и интерполяционную теорему Марцинкевича.) Следовательно, теорема М. Рисса вытекает из теоремы 1.5.

21. Говорят, что положительная локально интегрируемая весовая функция $w(x)$ удовлетворяет условию (A_1) , если

$$\sup_I \left\{ \left(\frac{1}{|I|} \int_I w \, dx \right) \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} \frac{1}{w(x)} \right\} < \infty.$$

(a) $w(x)$ удовлетворяет условию (A_1) тогда и только тогда, когда

$$Mw(x) \leq Cw(x),$$

где M — максимальная функция Харди — Литтлвуда.

(b) Если $w(x)$ удовлетворяет условию (A_1) , то $w(x)$ удовлетворяет (A_p) при всех $p > 1$.

(c) $w(x)$ удовлетворяет условию (A_1) тогда и только тогда, когда максимальный оператор или оператор Гильберта имеют слабый тип $(1-1)$ в $L^1(w \, dx)$ (Макенхаупт [1972], Хант, Макенхаупт и Виден [1973]).

(d) Пусть $\varphi = \log w$; w удовлетворяет условию (A_1) тогда и только тогда, когда

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I e^{\varphi - \varphi_I} \, dx < \infty, \quad \sup_I (\varphi_I - \operatorname{ess\,inf}_{x \in I} \varphi(x)) < \infty.$$

Пространство функций, удовлетворяющих последнему условию, называется пространством функций ограниченной нижней осцилляции (BLO)¹⁾. Если $\varphi \in \text{BLO}$, то $\varphi \in \text{ВМО}$, и поэтому e^{φ} удовлетворяет условию (A_1) при некотором $\varepsilon > 0$.

*** (e) Если w_1 и w_2 удовлетворяют условию (A_1) , то $w = w_1 w_2^{-p}$ удовлетворяет (A_p) по неравенству Гёльдера. Обратное тоже верно, но очень трудно. См. Джонс [1980с]. Вместе с теоремой Хелсона — Сегё обратное означает, что при $\|v\|_\infty < 1$

$$Hv = u - Hu_1 + Hu_2,$$

¹⁾ Bounded Lower Oscillation, — Прим. перев.

где $u \in L^\infty$, $\|u_j\|_\infty \leq 1$ и $Hu_j \in \text{BLO}$, $j = 1, 2$.

(f) Если w удовлетворяет (A_1) , то $w^{1+\delta}$ тоже удовлетворяет (A_1) при некотором $\delta > 0$. (Используйте часть (b) и следствие 6.10.)

(g) Если μ — локально конечная положительная борелевская мера и $M(d\mu) < \infty$ почти всюду, то $(M(d\mu))^\alpha$ удовлетворяет условию (A_1) при $0 < \alpha < 1$ (Койфман и Рохберг [1980]).

** (h) Положим для любой функции $w(x)$ и любого $s > 1$

$$A_s(w) = M(Mw^s)^{1/s}.$$

Тогда при $1 < p < \infty$

$$\int |Hf|^p w dx \leq C_{p,s} \int |f|^p A_s(w) dx$$

(см. Кордоба и Фефферман [1976]). Из части (a) легко вытекает, что

$$\int |Hf|^p w dx \leq C_p \int |f|^p w dx,$$

если $1 < p < \infty$, а w удовлетворяет (A_1) .

22. Положим на единичной окружности $\text{ВМОА} = H^2 \cap \text{ВМО}$. При $f \in \text{ВМОА}$

$$\inf_{g \in H^\infty} \|f - g\|_* \leq C \inf_{g \in L^\infty} \|f - g\|_*,$$

*23. (a) Пусть $f(z)$ — однолиственная функция в единичном круге. Если она не имеет нулей, то $\log f(e^{i\theta}) \in \text{ВМО}$. Далее при $0 < p < 1/2$ функция $|f(e^{i\theta})|^p$ удовлетворяет условию (A_2) (Бернштейн [1976], см. также Чима и Петерсен [1976], Чима и Шобер [1976]).

(b) Функция $f(z)$, аналитическая в D , принадлежит ВМОА тогда и только тогда, когда $f(z) = \alpha \log g'(z)$, где α — постоянная, а g — конформное отображение круга D на жорданову область со спрямляемой границей Γ , такой, что

$$l(w_1, w_2) \leq c |w_1 - w_2|, \quad w_1, w_2 \in \Gamma,$$

где $l(w_1, w_2)$ — кратчайшая дуга кривой Γ , соединяющая w_1 и w_2 (Поммеренке [1977]). См. также у Поммеренке [1978] подобное описание ВМОА.

*24. Пусть E — замкнутое множество на римановой сфере и $\infty \in E$. Каждая аналитическая в D функция со значениями в $\mathbb{C} \setminus E$ входит в ВМОА тогда и только тогда, когда

$$\text{сар}(E \cap \{|z - z_0| < r\}) > \delta, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus E,$$

при некоторых $r > 0$, $\delta > 0$. Здесь $\text{сар}(S)$ — логарифмическая емкость множества S . (Хейман и Поммеренке [1978], Стегенга [1979]; Бернштейн [1980] дал другое доказательство.)

25. Классом Блоха B называется множество всех таких аналитических функций $f(z)$ в D , что

$$\sup_z (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty.$$

(а) Если $f(z)$ аналитична в D , то $f \in B$ тогда и только тогда, когда семейство функций

$$\left\{ f\left(\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right) : w \in D \right\}$$

нормально.

(b) $\text{ВМОА} \subset B$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n} \in B \setminus \text{ВМОА}$.

*(d) Пусть F аналитична в D и $f = F'$. Тогда $f \in B$ в том и только том случае, когда F входит в класс Зигмунда Λ^* :

$$F(e^{i(\theta+h)}) + F(e^{i(\theta-h)}) - 2F(e^{i\theta}) = O(h)$$

(см. Дьюрен [1970], Зигмунд [1968]). Раз Λ^* содержит сингулярные функции (Кахан [1969], Пирамян [1966], Дьюрен, Шапиро и Шилдс [1966]), мы снова видим, что $B \neq \text{ВМОА}$.

(е) $f(z) \in B$ тогда и только тогда, когда $f(z) = \alpha \log g'(z)$, где α — постоянная, а функция $g(z)$ однолистка в D . (См. Дьюрен, Шапиро и Шилдс [1966], Поммеренке [1970]. Ср. с 23(b).)

(f) С другой стороны, B совпадает с множеством всех аналитических функций из «плоского» ВМО, определенного в единичном круге условием

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D \cap \{|z-z_0| < r\}} |f(z) - f(z_0)| dx dy \leq C, \quad |z_0| < 1, \quad r > 0$$

(Койфман, Рохберг и Вейсс [1976])¹⁾.

*(g) Пусть $f(z)$ аналитична в D , а $n(w)$ — число решений уравнения $f(z) = w$, $z \in D$. Предположим, что

$$\sup_{w_0 \in \mathbb{C}} \iint_{|w-w_0| < 1} n(w) du dv < \infty, \quad w = u + iv.$$

Тогда $f \in \text{ВМОА}$ в том и только том случае, когда $f \in B$, и $f \in \text{ВМОА} = H^2 \cap \text{ВМО}$ в том и только том случае, когда $f \in B_0$, т. е.

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0$$

(см. Поммеренке [1977]).

Андерсон, Клуни и Поммеренке [1974] дали прекрасный обзор теории функций Блоха.

¹⁾ О классе Блоха см. также статьи Сарасона и Андерсона на стр. 233—236 сборника под ред. Никольского, Хамина и Хрущева [1978]. — Прим. перев.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{z_j\}$ в круге или верхней полуплоскости называется *интерполяционной последовательностью*, если каждая интерполяционная задача

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

с ограниченными данными $\{a_j\}$ имеет решение $f(z) \in H^\infty$.

Интерполяционные последовательности очень интересны сами по себе и играют решающую роль в исследовании H^∞ в последующих главах. Например, мы используем их в гл. IX, чтобы описать все замкнутые алгебры между H^∞ и L^∞ , и они окажутся неожиданно важными при обсуждении пространства максимальных идеалов в гл. X.

В этой главе вводится понятие поколений. Так же как моменты остановки в доказательстве теоремы Джона — Ниренберга, поколения естественно появляются в некоторых наиболее глубоких доказательствах в нашей области. Они часто используются в следующей главе. Вводятся и некоторые другие важные технические приемы, в частности:

(i) решение экстремальных задач с помощью вариационных методов (разд. 2) и

(ii) использование некоторых идей, пришедших из гармонического анализа, таких, как процесс усреднения в доказательстве теоремы 2.2 и неравенство Хинчина в разд. 4.

Приводятся два доказательства теоремы об интерполяции. Первоначальное доказательство Карлесона, опирающееся на двойственность, помещено в разд. 1, потому что оно проливает свет на геометрию интерполяционных последовательностей. Элементарное доказательство Эрла, напоминающее теорему Неванлинны — Пика, помещено в разд. 5.

1. Теорема Карлесона об интерполяции

Пусть $\{z_j\}$ — последовательность точек верхней полуплоскости. Мы хотим узнать, когда любая интерполяционная задача

$$(1.1) \quad f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

с ограниченными данными $\{a_j\}$ имеет решение $f(z) \in H^\infty$. Последовательность $\{z_j\}$ называется *интерполяционной*, если задача (1.1) имеет решение в H^∞ при любых $\{a_j\} \in l^\infty$. В таком случае ограниченный линейный оператор $T: f \rightarrow \{f(z_j)\}$ отображает H^∞ на l^∞ . По теореме об открытом отображении сущест-

вует такая постоянная M , что задача (1.1) всегда имеет решение $f(z)$, у которого

$$\|f\|_{\infty} \leq M \sup_j |a_j| = M \|a_j\|_{\infty}.$$

Наименьшее возможное значение M называется *константой интерполяции*:

$$M = \sup_{\|a_j\|_{\infty} \leq 1} \inf \{ \|f\|_{\infty} : f \in H^{\infty}, f(z_j) = a_j, j = 1, 2, \dots \}.$$

Если z_j и z_k — две различные точки интерполяционной последовательности, то существует такая функция $f \in H^{\infty}$, что $f(z_j) = 0$, $f(z_k) = 1$ и $\|f\|_{\infty} \leq M$. По лемме Шварца это означает, что

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| = \rho(z_j, z_k) \leq \frac{|f(z_j)/M - f(z_k)/M|}{|1 - \bar{f}(z_j)f(z_k)/M^2|} = \frac{1}{M},$$

так что

$$(1.2) \quad \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq a > 0, \quad j \neq k,$$

при $a = 1/M$. Последовательность $\{z_j\}$ называется *отделимой* или *редкой*, если для нее при некотором $a > 0$ выполняется условие (1.2). Мы только что доказали, что любая интерполяционная последовательность является редкой.

Предыдущие рассуждения можно продолжить и получить такое необходимое условие интерполяционности, которое окажется и достаточным. Зафиксируем z_k , и пусть $f \in H^{\infty}$, $\|f\|_{\infty} \leq M$, интерполирует значения

$$f(z_k) = 1, \quad f(z_j) = 0, \quad j \neq k.$$

Если $B^{(k)}$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j, j \neq k\}$ (оно существует, так как $f \neq 0$), то $f = B^{(k)}g$, $g \in H^{\infty}$, $\|g\|_{\infty} \leq M$ и

$$1 = |f(z_k)| = |B^{(k)}(z_k)| |g(z_k)| \leq M |B^{(k)}(z_k)|,$$

откуда $|B^{(k)}(z_k)| \geq 1/M$. Поскольку z_k выбиралось произвольно, то мы можем заключить, что для интерполяционной последовательности

$$(1.3) \quad \inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{\bar{z}_j - z_k} \right| \geq \delta > 0$$

при $\delta = 1/M$. Теорема Карлесона утверждает, что и, обратно, необходимое условие (1.3) достаточно для того, чтобы последовательность $\{z_j\}$ была интерполяционной.

Прежде чем полностью формулировать теорему, попробуем интерпретировать (1.3) геометрически,

В единичном круге условие (1.3) превращается в

$$(1.4) \quad \inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| = \delta > 0.$$

Обозначим через $B(z)$ полное произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Если, полагая $w = (z - z_k)/(1 - \bar{z}_k z)$, мы рассматриваем z_k как начало координат, то нулями B будут точки

$$w_j = \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_k z_j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и (1.4) равносильно тому, что

$$\prod_{j, j \neq k} |w_j| \geq \delta.$$

Но $1 - |w| \leq \log 1/|w|$, и это дает

$$(1.5) \quad \sum_j (1 - |w_j|) \leq 1 + \log 1/\delta,$$

так что (1.4) выполняется тогда и только тогда, когда сумма Бляшке (1.5) ограничена величиной, не зависящей от выбора точки z_k . Этот факт, конечно, отражает конформную инвариантность интерполяционной задачи (1.1). Вместе с тождеством

$$1 - \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_k z_j} \right|^2 = \frac{(1 - |z_k|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_j|^2}$$

из разд. 1.1 условие (1.5) дает

$$\sup_k \sum_j \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k z_j|^2} (1 - |z_j|^2) \leq C(\delta).$$

Если заменить здесь верхнюю грань по точкам z_k верхней гранью по всем точкам круга, мы получаем

$$(1.6) \quad \sup_{z_0 \in D} \sum_j \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z_j|^2} (1 - |z_j|^2) \leq C'(\delta).$$

В силу конформно-инвариантного описания мер Карлесона (лемма VI.3.3) (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда мера $\sum (1 - |z_j|) \delta_{z_j}$ является мерой Карлесона в круге. Теперь нетрудно убедиться, что из (1.4) вытекает (1.6), и, наоборот, если последовательность редкая, то из (1.6) вытекает (1.4). (Полное доказательство приведено ниже, в доказательстве теоремы.) Это обсуждение не доказывает теорему, но проясняет связь

между мерами Карлесона и интерполяцией. Исторически меры Карлесона возникли именно в теореме об интерполяции.

Чтобы сформулировать теорему, мы возвращаемся в полу^аплоскость.

Теорема 1.1. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность точек верхней полуплоскости. Тогда следующие три условия равносильны:

(а) Последовательность является интерполяционной: каждая интерполяционная задача

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, \{a_j\} \in l^\infty,$$

разрешима в H^∞ .

(b) При некотором $\delta > 0$

$$(1.3) \quad \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta, \quad k = 1, 2, \dots$$

(с) Последовательность $\{z_j\}$ редкая:

$$\rho(z_j, z_k) = \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| \geq a > 0, \quad j \neq k,$$

и существует такая постоянная A , что для каждого квадрата $Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + l(Q), 0 < y \leq l(Q)\}$

$$(1.7) \quad \sum_{z_j \in Q} y_j \leq A l(Q).$$

Постоянная δ из (1.3) и константа интерполяции

$$M = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \inf \{\|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, j = 1, 2, \dots\}$$

связаны неравенствами

$$(1.8) \quad \frac{1}{\delta} \leq M \leq \frac{c}{\delta} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)$$

с абсолютной постоянной c .

Не считая числовой постоянной c , (1.8) дает точную верхнюю границу для M . Иллюстрирующий это пример будет дан после доказательства.

Конечно, (1.7) означает, что мера $\sum y_j \delta_{z_j}$ карлесона. Условие (с) геометричнее и часто бывает полезнее, чем (b). Прежде чем переходить к доказательству, рассмотрим два примера. Во-первых, предположим, что точки $\{z_j\}$ лежат на горизонтальной прямой $\{y_j = y > 0\}$. Тогда (1.7) будет выполняться, коль скоро точки $\{z_j\}$ отделимы. Таким образом, горизонтальная последовательность является интерполяционной тогда и только тогда, когда она редкая. Этот факт без особого

труда можно вывести и из (1.3). Во-вторых, предположим, что точки $\{z_j\}$ лежат на вертикальной прямой $\{x = 0\}$. Тогда (1.7) означает, что

$$\sum_{y_j \leq y_k} y_j \leq Ay_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если последовательность редкая, то это условие выполняется. Если y_j ограничены сверху и так пронумерованы, что $y_{j+1} \leq y_j$, то (1.7) выполняется тогда и только тогда, когда точки сходятся к границе экспоненциально: $y_{j+1}/y_j \leq \alpha < 1$. Таким образом, вертикальная последовательность тоже является интерполяционной тогда и только тогда, когда она редкая. Конечно, не каждая редкая последовательность удовлетворяет условию (1.7). Последовательность, удовлетворяющая только условию (1.2), не обязательно является последовательностью Бляшке; ее подпоследовательности могут некасательно сходиться ко всем точкам прямой.

Доказательство теоремы 1.1. Мы уже видели, что (а) влечет за собой (b) с оценкой $M \geq 1/8$.

Остались два шага доказательства. Во-первых, мы покажем, что (b) и (c) эквивалентны. Для этого нужно только сравнить бесконечные произведения с бесконечными суммами. Во-вторых, мы должны показать, что из (b) и (c) вместе следует (а). Это делается при помощи двойственной экстремальной задачи.

Для доказательства эквивалентности (b) и (c) нам понадобится одна элементарная лемма.

Лемма 1.2. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$ в верхней полуплоскости. Тогда

$$(1.9) \quad -\log |B(z)|^2 \geq \sum_j \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}, \quad z = x + ty.$$

Обратно, если

$$\inf_j \rho(z, z_j) = \inf_j \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right| = a > 0,$$

то

$$(1.10) \quad -\log |B(z)|^2 \leq \left(1 + 2 \log \frac{1}{a}\right) \sum_j \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}.$$

Доказательство. Неравенство $-\log t \geq 1 - t$, $t > 0$, дает

$$-\log \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 \geq 1 - \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 = \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}.$$

Суммируя, получаем (1.9). Обратное неравенство

$$-\log t \leq \frac{-2 \log a}{1-a^2} (1-t) \leq \left(1 + 2 \log \frac{1}{a}\right) (1-t),$$

верное при $a^2 < t < 1$, таким же образом дает (1.10). $\square$

Теперь допустим, что выполняется (с). Тогда, согласно (1.7) и формуле (3.8) гл. VI,

$$(1.11) \quad \sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_k - \bar{z}_j|^2} = \sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_j - \bar{z}_k|^2} \leq C', \quad k = 1, 2, \dots$$

Для удобства читателя мы непосредственно выведем (1.11) из (1.7), повторяя, по существу, доказательство из гл. VI. Фиксируем $z_k = x_k + iy_k$ и положим $S_n = \{z \in \mathcal{H}: |z - x_k| \leq 2^n y_k\}$, $n = 0, 1, \dots$. В силу (1.7) $\sum_{S_n} y_j \leq c 2^{n+1} y_k$. При $z_j \in S_0$ имеем $|z_j - \bar{z}_k|^2 \geq y_k^2$, а если $z_j \in S_n \setminus S_{n-1}$, $n \geq 1$, то $|z_j - \bar{z}_k|^2 \geq 2^{2n-2} y_k^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_j - \bar{z}_k|^2} &\leq 4 \sum_{z_j \in S_0} \frac{y_j}{y_k} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{z_j \in S_n \setminus S_{n-1}} \frac{y_j}{2^{2n} y_k} \right) \leq \\ &\leq 8A + 32A \sum_1^{\infty} 2^{-n} = A'. \end{aligned}$$

Поскольку $\inf_{j, j \neq k} |(z_k - z_j)/(z_k - \bar{z}_j)| \geq a$, то можно применить (1.10) к произведению Бляшке $B^{(k)}$ с нулями $\{z_j: j \neq k\}$ и получить

$$\prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta = \delta(a, A).$$

Значит, (с) влечет за собой (b).

Теперь предположим, что выполняется (b), т. е.

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta.$$

Тогда, очевидно,

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta, \quad j \neq k,$$

и наша последовательность редкая. Применяя (1.9) к произведению Бляшке $B^{(k)}(z)$, полученному удалением одного нуля z_k , получим

$$\sum_{j, j \neq k} \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq 2 \log \frac{1}{\delta}.$$

Рассмотрим квадрат

$$Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y \leq \ell(Q)\}.$$

Вначале мы изучим частный случай, когда его верхняя половина

$$T(Q) = \{z \in Q: y > \ell(Q)/2\}$$

содержит некоторую точку последовательности z_k . Тогда $|z_k - \bar{z}_j|^2 \leq 5\ell(Q)^2$, $z_j \in Q$, так что

$$y_j \leq \frac{5\ell(Q)^2}{4y_k} \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2}.$$

Значит,

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \sum_j \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \left(1 + 2 \log \frac{1}{\delta}\right),$$

и для квадратов с $T(Q) \cap \{z_j\} \neq \emptyset$ выполняется (1.7) с постоянной $A = c(1 + \log(1/\delta))$.

Чтобы получить (1.7) для всех квадратов, мы применим рассуждение с «моментом остановки». Пусть $Q = Q_0 = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y \leq \ell(Q)\}$. Разобьем $Q \setminus T(Q)$ на два квадрата Q_1 со стороной $\ell(Q)/2$, каждый прямоугольник $Q_1 \setminus T(Q_1)$ разобьем на два квадрата Q_2 со стороной $\ell(Q_1)/2$ и так далее. На шаге n мы получим 2^n квадратов Q_n со стороной $2^{-n}\ell(Q)$, верхние половины которых $T(Q_n)$ конгруэнтны $T(Q)$ относительно гиперболической метрики. Эти квадраты Q_n имеют попарно непересекающиеся внутренности и вместе покрывают полосу $\{z \in Q: 0 < y \leq 2^{-n}\ell(Q)\}$. Обозначим через $Q^1, Q^2, \dots$ те из квадратов $\{Q_n\}$, $n \geq 0$, у которых

$$(i) \quad T(Q_n) \cap \{z_j\} \neq \emptyset,$$

(ii) Q_n не содержится ни в каком большем квадрате, удовлетворяющем (i).

Тогда $Q \cap \{z_j\} \subset Q^1 \cup Q^2 \cup \dots$, и внутренности проекций квадратов $Q^1, Q^2, \dots$ на ось $\{y = 0\}$ не пересекаются, так что

$$\sum \ell(Q^k) \leq \ell(Q)$$

(см. рис. VII.1). Мы уже видели, что для каждого Q^k (1.7) выполняется с $A = c(1 + \log(1/\delta))$. Суммируя по всем Q^k , получаем

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq c \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right) \ell(Q),$$

т. е. (1.7) в общем случае. Значит, (b) влечет за собой (c)¹⁾.

Чтобы получить точное неравенство (1.8), мы должны использовать тот факт, что постоянная A в (1.7) имеет вид

$$(1.12) \quad A \leq c \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right).$$

Теперь нам нужно показать, что из (b) и (c) следует (a). Пусть $\{a_j\} \in l^\infty$, $|a_j| \leq 1$; рассмотрим конечную задачу

$$(1.13) \quad f(z_j) = a_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Поскольку точки различны, задача (1.13), очевидно, имеет ре-

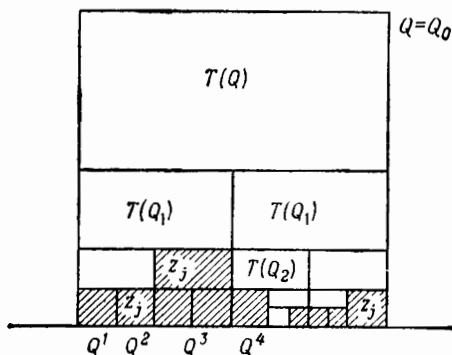


Рис. VII. 1. Заштрихованные квадраты $Q^1, Q^2, \dots$ максимальны среди тех Q_n , для которых $T(Q_n) \cap \{z_j\} \neq \emptyset$.

шение $f(z) \in H^\infty$ (например, можно взять $f(z) = p(z)/(z+i)^n$, где $p(z)$ — некоторый полином степени n). Положим

$$M_n(\{a_j\}) = \inf \{ \|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, \quad j = 1, \dots, n \},$$

$$M_n = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} M_n(\{a_j\}).$$

Согласно теории нормальных семейств теорема будет доказана и неравенство (1.8) будет установлено, если мы покажем, что

$$\lim_n M_n \leq \frac{c}{\delta} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right).$$

Пусть

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}.$$

¹⁾ Простое доказательство импликации (b) $\Rightarrow$ (c), не использующее «диагностических» рассуждений с «моментами остановки», дал С. А. Виноградов (Никольский [1980 *], лекция VII). — Прим. ред.

При фиксированных $\{a_j\}$ пусть $f_0 \in H^\infty$ — решение задачи (1.13). Тогда

$$M_n(\{a_j\}) = \inf \{\|f_0 + B_n g\|_\infty : g \in H^\infty\} = \inf \{\|\bar{B}_n f_0 + g\|_\infty : g \in H^\infty\}.$$

Но

$$H^\infty = \left\{ g \in L^\infty : \int g G dx = 0, \quad G \in H^1 \right\},$$

и по соображениям двойственности

$$M_n(\{a_j\}) = \sup \left\{ \left| \int f_0 \bar{B}_n G dx \right| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Теперь теорема Коши дает при $G \in H^1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_0 \bar{B}_n G dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_0(x) G(x)}{B_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{f_0(z_j) G(z_j)}{B'_n(z_j)}.$$

(В контурном интеграле вклад большой полуокружности с бесконечно возрастающим радиусом рассматривать не нужно, потому что можно выбрать $G(z)$ из плотного в H^1 подмножества функций $G_1(z)$, у которых $|G_1(z)| = O(|z|^{-2})$.)

Поскольку $f_0(z_j) = a_j$, то это дает

$$M_n = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \sup \left\{ 2\pi \left| \sum_{j=1}^n \frac{a_j G(z_j)}{B'_n(z_j)} \right| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Для фиксированного $G(z)$ можно так выбрать $\{a_j\}$ с $|a_j| = 1$, чтобы $a_j G(z_j)/B'_n(z_j) \geq 0$. Тогда

$$(1.14) \quad M_n = \sup \left\{ 2\pi \sum_{j=1}^n \left| \frac{G(z_j)}{B'_n(z_j)} \right| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Но

$$B'_n(z_j) = \frac{-i}{2y_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k},$$

так что из (b) следует

$$|B'_n(z_j)| \geq \delta/2y_j.$$

Значит,

$$M_n \leq \frac{4\pi}{\delta} \sup \left\{ \sum_{j=1}^n y_j |G(z_j)| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

По условию (c) $\sum y_j \delta_{z_j}$ — мера Карлесона, и по теореме II.3.9

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^n y_j |G(z_j)| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\} \leq CA,$$

где A — постоянная из (1.7). Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq 4\pi CA/\delta,$$

и (а) доказано.

Итак, мы показали, что условия (а) — (с) равносильны. Далее ввиду оценки (1.12) для постоянной A мы получаем

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq \frac{c}{\delta} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right). \quad \square$$

Вот пример, демонстрирующий точность оценки (1.8). Пусть $\omega = \exp(2\pi i/N)$ — первообразный корень N -й степени из единицы. Возьмем в круге конечную последовательность

$$z_j = r\omega^j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где параметры N и $r < 1$ будут выбраны позже. Произведение Бляшке с нулями z_j равно

$$B(z) = \frac{z^N - r^N}{1 - r^N z^N}.$$

Согласно (1.4),

$$\delta = \inf (1 - |z_j|^2) |B'(z_j)| = Nr^{N-1} \frac{1 - r^2}{1 - r^{2N}}.$$

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$f(z_j) = a_j = \omega^{-j}.$$

По теореме I.2.4 или IV.1.8 эта конечная задача имеет только одно решение минимальной нормы, которое имеет вид $f(z) = mB_1(z)$, где B_1 — произведение Бляшке с не более чем $N-1$ нулями. Поскольку $z_{j+1} = \omega z_j$, $a_{j+1} = \omega^{-1} a_j$, то эта единственность требует, чтобы $f(z) = \omega f(\omega z)$. Значит, множество нулей функции $B_1(z)$ инвариантно относительно умножения на ω . Но раз нулей не более $N-1$, то все они совпадают с $z = 0$, и $f(z) = mz^p$, $p \leq N-1$. Простое вычисление дает $f(z) = r^{1-N} z^{N-1}$. Пусть $r \rightarrow 1$, а $N \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы $m = r^{1-N}$ оставалось постоянным. Тогда

$$\delta = Nm \frac{1 - r^2}{m^2 - r^2} \quad \text{и} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - r^2) = 2 \log m,$$

так что при больших N имеем $\delta \geq (\log m)/m$. Следовательно, существуют такие конечные интерполяционные последовательности, что

$$M \geq m \geq \frac{1}{\delta} \log \frac{1}{\delta} \quad ^1).$$

¹⁾ Представляет интерес оценка величины M при δ , близких к единице. Из доказательства Эрла (см ниже разд. 5, а также Эрл [1970]) видно, что $M - 1 \leq A\sqrt{1 - \delta}$, если $\delta \in [1/2, 1]$; здесь A — абсолютная постоянная. В. А. Толоконников заметил, что эта оценка точна (в том же смысле, что и (1.8)) (см. Никольский [1983 *]). — Прим. ред.

2. Линейный оператор интерполяции

Пусть $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность в верхней полуплоскости. В этом разделе мы докажем, что существуют интерполирующие функции, которые линейно зависят от данных интерполяции $\{a_j\}$. Этот полезный результат будет получен с помощью нелинейной экстремальной задачи.

Теорема 2.1. Пусть $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность в верхней полуплоскости с константой интерполяции

$$M = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \inf \{\|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, j = 1, 2, \dots\}.$$

Существуют такие функции $f_j(z) \in H^\infty$, что

$$(2.1) \quad f_j(z_j) = 1, \quad f_j(z_k) = 0, \quad k \neq j,$$

$$(2.2) \quad \sum_j |f_j(z)| \leq M.$$

Прежде чем доказывать теорему, укажем два ее применения. Пусть $\{a_j\} \in l^\infty$, тогда в силу (2.2) функция

$$(2.3) \quad f(z) = \sum_j a_j f_j(z)$$

входит в H^∞ и, согласно (2.1),

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, (2.3) определяет интерполирующие функции, линейно зависящие от $\{a_j\}$, и мы имеем линейный оператор интерполяции $S: l^\infty \rightarrow H^\infty$, заданный формулой $S(\{a_j\}) = \sum_j a_j f_j$,

норма которого по (2.2) не превосходит M , $\|S\| \leq M$, и

$$(2.4) \quad S(\{a_j\})(z_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку M — константа интерполяции, то на самом деле $\|S\| = M$ — ведь для любого, даже нелинейного, оператора со свойством (2.4) по определению M должно быть

$$\sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \|S(\{a_j\})\|_\infty \geq M.$$

Таким образом, линейный оператор (2.3), решающий интерполяционную задачу (1.1), имеет наименьшую возможную норму. Неравенства

$$\|a_j\|_\infty \leq \|S(\{a_j\})\|_\infty \leq M \|a_j\|_\infty$$

показывают, что образ $S(l^\infty)$ является замкнутым подпространством в H^∞ , изоморфным l^∞ как банахово пространство. Линейный оператор $P: H^\infty \rightarrow S(l^\infty)$, такой, что $Pg = \sum_j g(z_j) f_j$, отображает H^∞ на $S(l^\infty)$, и $P^2 = P$. Иными словами, P — проектор, а $S(l^\infty)$ — дополняемое подпространство в H^∞ (ядро оператора P служит дополнением). Значит, согласно теореме 2.1,

H^∞ содержит дополняемые подпространства, изоморфные l^∞ .

Второе применение касается интерполяции ограниченными аналитическими функциями со значениями в банаховом пространстве. Функция $f(z)$, отображающая открытое плоское множество в банахово пространство Y , называется аналитической, если локально $f(z)$ представляется как сумма абсолютно сходящегося степенного ряда с коэффициентами из Y . Равносильное определение состоит в том, что комплекснозначная функция $z \rightarrow \langle y^*, f(z) \rangle$ должна быть аналитической при всех $y^* \in Y^*$. Пр процитируем Гофмана [1962a]: «Любые два разумно звучащие определения аналитических функций со значениями в банаховом пространстве эквивалентны».

Пусть $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность в верхней полуплоскости, Y — банахово пространство и $\{a_j\}$ — ограниченная последовательность в Y , $\sup_j \|a_j\|_Y < \infty$. Если $\{f_j\}$ — скалярные функции из теоремы 2.1, то

$$f(z) = \sum_j f_j(z) a_j$$

— аналитическая функция в верхней полуплоскости со значениями в Y . Согласно (2.1), она решает интерполяционную задачу

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а согласно (2.2), она ограничена:

$$(2.5) \quad \|f\| = \sup_z \|f(z)\|_Y \leq \sup_z \sum_j |f_j(z)| \|a_j\|_Y \leq M \sup_j \|a_j\|_Y.$$

Мы заключаем, что последовательность $\{z_j\}$ является интерполяционной и для Y -значных ограниченных аналитических функций. Обратное очевидно — последовательность, интерполяционная для Y -значных функций, будет интерполяционной и для скалярных (нужно только проинтерполировать скалярные кратные одного какого-нибудь вектора из Y). Неравенство (2.5) показывает, что константа интерполяции в случае банахова пространства такая же, как и в скалярном случае.

Доказательство теоремы 2.1. При $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ определим функционал

$$\varphi(G) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |G(z_j)|, \quad G \in H^1,$$

и поставим экстремальную задачу

$$(2.6) \quad m_n = m_n(\{\lambda_j\}) = \sup \{\varphi(G) : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1\}.$$

Это нелинейная задача, к которой методы гл. IV неприменимы. Но мы можем использовать более старый метод вариационного

характера. Очевидно, что экстремальная функция G_0 для (2.6) существует и должна быть внешней, $G_0 = e^{U_0 + i\tilde{U}_0}$. Пусть $u(x)$ — вещественная непрерывная функция с компактным носителем. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ функция $G_t = G_0 e^{tu + i\tilde{t}u}$ тоже входит в H^1 и должно быть $m_n \|G_t\|_1 \geq \varphi(G_t)$, причем при $t = 0$ здесь достигается равенство. Перепишем это неравенство в виде $m_n \|G_t\|_1 - \varphi(G_t) \geq 0$ и вычислим производную по t при $t = 0$; она должна обратиться в 0, так что

$$\begin{aligned} m_n \int |G_0(x)| u(x) dx &= \sum_{j=1}^n \lambda_j |G_0(z_j)| u(z_j) = \\ &= \int \sum \frac{\lambda_j |G_0(z_j)|}{\pi} \frac{y_j}{(x-x_j)^2 + y_j^2} u(x) dx. \end{aligned}$$

Но $u(x)$ произвольна, а это значит, что

$$m_n |G_0(x)| = \frac{1}{\pi} \sum_j \frac{\lambda_j |G_0(z_j)| y_j}{(x-x_j)^2 + y_j^2},$$

и почти всюду

$$(2.7) \quad m_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{|G_0(z_j)|}{|G_0(x)|} \frac{\lambda_j y_j}{(x-x_j)^2 + y_j^2}.$$

Положим теперь

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}$$

и возьмем $\lambda_j = 2\pi |B'_n(z_j)|^{-1}$ в (2.6). Тогда экстремальная задача (2.6) совпадает с (1.14) и, стало быть,

$$m_n = M_n = \sup_{|a_j| \leq 1} \inf \{ \|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, 1 \leq j \leq n \}.$$

Тогда из (2.7) имеем

$$(2.8) \quad M_n = \sum_{j=1}^n \frac{|G_0(z_j)|}{|G_0(x)|} \frac{1}{|B'_n(z_j)|} \frac{2y_j}{|x - z_j|^2}$$

почти всюду. Положим теперь

$$f_j^{(n)}(z) = \frac{G_0(z_j)}{G_0(z)} \frac{B_n(z)}{B'_n(z_j)} \frac{2iy_j}{(z - z_j)(z - \bar{z}_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно (2.8), почти всюду

$$\sum_j |f_j^{(n)}(x)| = M_n.$$

Но функция G_0 внешняя, поэтому $f_j^{(n)} \in N^+$ и

$$\sum_j |f_j^{(n)}(z)| \leq \sum_j \int |f_j^{(n)}(t)| P_z(t) dt \leq M_n.$$

Ясно, что $f_j^{(n)}(z_k) = 0$, $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$, и непосредственное вычисление $B_n(z_j)$ показывает, что $f_j^{(n)}(z_j) = 1$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получим функции, удовлетворяющие (2.1) и (2.2). $\square$

Вообще говоря, линейный оператор продолжения существует не во всех ситуациях. Однако в теории равномерных алгебр есть один элегантный результат, из которого вытекает теорема 2.1 с несколько худшей оценкой для $\sum |f_j(z)|$. Его идея заимствована из гармонического анализа.

Теорема 2.2. Пусть A — равномерная алгебра на компактном пространстве X , $\{p_1, \dots, p_n\}$ — конечное подмножество в X и

$$M = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \inf \{ \|g\| : g \in A, g(p_j) = a_j, 1 \leq j \leq n \}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ существуют такие $f_1, \dots, f_n \in A$, что

$$(2.9) \quad f_j(p_j) = 1, \quad f_j(p_k) = 0, \quad k \neq j,$$

и

$$\sup_{x \in X} \sum_{j=1}^n |f_j(x)| \leq M^2 + \varepsilon.$$

Согласно теории нормальных семейств, теорема 2.1 следует из теоремы 2.2 с заменой точного неравенства (2.2) на более слабое

$$\sum_{j=1}^n |f_j(z)| \leq M^2.$$

В случае равномерной алгебры общего вида распространить теорему 2.2 на бесконечные интерполяционные последовательности невозможно.

Доказательство. Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень n -й степени из 1, и пусть $g_j \in A$, $\|g_j\| \leq M + \delta$ (здесь $\delta > 0$) интерполирует значения

$$g_j(p_k) = \omega^{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положим

$$f_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega^{-jk} g_k \right)^2.$$

Тогда $f_j \in A$ и $f_j(p_j) = 1$. Поскольку при $l \neq j$ имеем $\sum_{k=1}^n \omega^{(l-k)} = 0$, то $f_j(p_l) = 0$ при $l \neq j$. Наконец, при малом δ

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |f_j| &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \omega^{-jk} g_k \sum_{l=1}^n \omega^{jl} \bar{g}_l \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g_k \bar{g}_l \sum_{j=1}^n \omega^{j(l-k)} = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n |g_k|^2 n \leq (M + \delta)^2 \leq M^2 + \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

3. Поколения

Пусть $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости, которую мы предположим редкой:

$$(3.1) \quad |z_j - z_k| \geq b y_j, \quad k \neq j,$$

где $b > 0$. Это условие (3.1), очевидно, эквивалентно (1.2), но будет удобнее для наших ближайших целей. Тогда последовательность $\{z_j\}$ будет интерполяционной в том и только том случае, когда

$$(3.2) \quad \sum_{z_j \in Q} y_j \leq A \ell(Q)$$

для любого квадрата $Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y \leq \ell(Q)\}$ с постоянной A , не зависящей от Q . Условия, подобные (3.2), будут часто встречаться в оставшейся части книги, и мы подробно проанализируем здесь (3.2). Уяснение геометрического смысла условия (3.2) делает построение интерполяционных последовательностей очень легким.

Пусть Q — квадрат с основанием на оси $\{y = 0\}$, а $T(Q) = \{z \in Q: \ell(Q)/2 < y \leq \ell(Q)\}$ — его верхняя половина. Разобьем $Q \setminus T(Q)$ на два квадрата Q_1 со стороной $\ell(Q)/2$ и будем продолжать, как в доказательстве теоремы 1.1. На шаге n мы получим 2^n квадратов Q_n со стороной $2^{-n} \ell(Q)$ (см. рис. VII.1).

В гиперболической геометрии все верхние половины $T(Q_n)$ конгруэнтны $T(Q)$. Если последовательность $\{z_j\}$ редкая, то каждая половина $T(Q)$ или $T(Q_n)$ может содержать самое большее $C(b)$ точек $\{z_j\}$, где b — постоянная из (3.1). В самом деле, если разбить $T(Q_n)$ на $C(b)$ квадратов со сторонами $2^{-(p+n)} \ell(Q)$, где $2^{-p} < b/2 \sqrt{2}$, то каждый из этих квадратиков в силу (3.1) может содержать не более одной точки z_j , потому что $y_j > \ell(Q_n)/2$ (см. рис. VII.2).

Первое поколение $G_1(Q)$ состоит из тех $Q_n \subset Q$, у которых

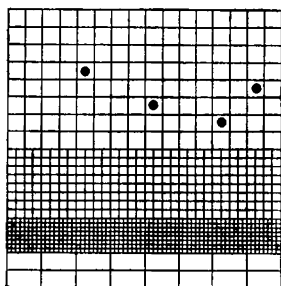
(i) $Q_n \neq Q$,

(ii) $T(Q_n) \cap \{z_j\} \neq \emptyset$,

(iii) Q_n не содержится ни в каком большем квадрате со свойствами (i) и (ii).

Квадраты $Q^1, Q^2, \dots$, образующие $G_1(Q)$, имеют непересе-

Рис. VII.2. Каждый малый квадрат в $T(Q_n)$ содержит не более одной точки z_j .



кающиеся ~~внутренности~~ с непересекающимися проекциями на ось $\{y=0\}$. Значит,

$$\sum_{G_1(Q)} \ell(Q^k) \leq \ell(Q).$$

Далее,

$$\{z_j: z_j \in Q\} \subset T(Q) \cup \bigcup_{G_1(Q)} Q^k.$$

Квадраты первого поколения на рис. VII.1 заштрихованы.

Теперь таким же образом определим $G_1(Q^k)$ для каждого $Q^k \in G_1(Q)$: оно состоит из всех $Q_n \subsetneq Q^k$, у которых $T(Q_n) \cap \{z_j\} \neq \emptyset$ и которые максимальны относительно этих двух свойств. Второе поколение — это

$$G_2(Q) = \bigcup_{G_1(Q)} G_1(Q^k).$$

Следующие поколения $G_3(Q)$, $G_4(Q)$, ... определяются по индукции:

$$G_{p+1}(Q) = \bigcup_{G_p(Q)} G_1(Q^k).$$

Если $z_j \in Q$, то или $z_j \in T(Q)$, или $z_j \in T(Q^k)$ для какого-нибудь квадрата Q^k в одном из поколений $G_p(Q)$; в этом случае y_j сравнимо с $\ell(Q^k)$. Положим

$$t_p = \sum_{G_p(Q)} \ell(Q^k).$$

Из определений ясно, что $t_{p+1} \leq t_p \leq \ell(Q)$.

Теорема 3.1. *Предположим, что последовательность $\{z_j\}$ точек верхней полуплоскости удовлетворяет условию редкости (3.1). Она будет интерполяционной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое q , что для любого квадрата Q*

$$(3.3) \quad t_q = \sum_{Q^k \in Q} \ell(Q^k) \leq \varepsilon \ell(Q).$$

Наименьшее возможное значение q связано с постоянной A из (3.2) неравенствами

$$q \leq 1 + \frac{2A}{\varepsilon}, \quad A \leq C(b, \varepsilon, q),$$

где b — постоянная из (3.1).

Доказательство. При $z_j \in T(Q_n)$ имеем $y_j \leq \ell(Q_n) \leq 2y_j$. Каждое $T(Q_n)$ (или $T(Q)$) содержит не более $C(b)$ точек z_j , а каждое $T(Q^k)$, $Q^k \in G_p(Q)$, содержит хотя бы одну точку z_j . Поэтому

$$\sum_{p=1}^{\infty} t_p \leq 2 \sum_{z_j \in Q} y_j \leq 2C(b) \left(\ell(Q) + \sum_{p=1}^{\infty} t_p \right).$$

Если последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная, то, согласно (3.2),

$$qt_q \leq \sum_{p=1}^q t_p \leq 2A\ell(Q),$$

что при $q \geq 2A/\varepsilon$ дает (3.3). Обратно, если для всех квадратов выполняется (3.3), то по определению поколений $t_{p+q} \leq \varepsilon t_p$, $p = 1, 2, \dots$, так что

$$\sum_{Nq+1}^{Nq+q} t_p \leq \varepsilon^N \sum_1^q t_p \leq q\varepsilon^N \ell(Q).$$

Стало быть,

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq C(b) \left(\ell(Q) + \sum_{N=0}^{\infty} q\varepsilon^N \ell(Q) \right) \leq C(b) \left(1 + \frac{q}{1-\varepsilon} \right) \ell(Q),$$

и мы получаем (3.2). $\square$

4. Гармоническая интерполяция

Доказательство нашей следующей теоремы использует технику рандомизации, которая бывает очень полезна во многих областях анализа. Поэтому прежде, чем обратиться к теореме о

гармонических интерполяционных последовательностях, мы коротко обсудим неравенство Хинчина.

Задавшись конечным набором комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, рассмотрим всевозможные суммы вида

$$\sum_{j=1}^n \pm \alpha_j,$$

где знаки $\pm$ пробегает все 2^n возможных комбинаций. Пусть $p > 0$. Неравенство Хинчина — это оценка математического ожидания

$$\mathcal{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n \pm \alpha_j \right|^p \right),$$

т. е. среднего арифметического всех 2^n возможных значений $\left| \sum \pm \alpha_j \right|^p$. Точнее, пусть Ω — множество 2^n точек вида $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j = \pm 1$. Определим на Ω вероятностную меру μ , полагая $\mu(\{\omega\}) = 2^{-n}$, $\omega \in \Omega$. Положим

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j,$$

так что $X(\omega)$ — это более строгое определение для $\sum \pm \alpha_j$, и

$$\mathcal{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n \pm \alpha_j \right|^p \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\Omega} |X(\omega)|^p = \int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mu.$$

Неравенством Хинчина называется следующая лемма.

Лемма 4.1. При $0 < p < \infty$

$$(4.1) \quad \left(\mathcal{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n \pm \alpha_j \right|^p \right) \right)^{1/p} \leq C_p \left(\sum |\alpha_j|^2 \right)^{1/2},$$

где C_p не зависит от n .

В (4.1) важно, что C_p не увеличивается при возрастании n . Мы докажем лемму 4.1 только в простом случае $p \leq 2$, потому что именно он нам здесь понадобится (см. полное доказательство и применения в книге Зигмунда [1968]).

Доказательство для $p \leq 2$. Случай $p \leq 2$ легче, потому что представляет собой замаскированное неравенство Гёльдера. Пусть $X_j(\omega) = \omega_j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $|X_j^2(\omega)| = 1$ и $\mathcal{E}(X_j X_k) = 0$, $j \neq k$, потому что $X_j X_k$ принимает значения ± 1 с одинаковой вероятностью $1/2$. Значит, последовательность

$\{X_1, \dots, X_n\}$ ортонормирована в $L^2(\mu)$. Но $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$, а $p \leq 2$, так что по неравенству Гёльдера

$$\left(\mathcal{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n \pm \alpha_j \right|^p \right) \right)^{1/p} = \left(\int |X(\omega)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \\ \leq \left(\int |X(\omega)|^2 d\mu \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Это доказывает (4.1) при $p \leq 2$ с $C_p = 1$. $\square$

Пусть теперь $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости. Назовем ее *гармонически интерполяционной*, если любая интерполяционная задача

$$(4.2) \quad u(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, \{a_j\} \in l^\infty,$$

имеет решение $u(z)$, которое является ограниченной гармонической функцией в верхней полуплоскости. Ясно, что любая H^∞ -интерполяционная последовательность будет и гармонически интерполяционной. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 4.2. Если $\{z_j\}$ — гармонически интерполяционная последовательность, то она будет интерполяционной и для H^∞ .

Доказательство. Так как каждая ограниченная гармоническая функция является интегралом Пуассона функции из L^∞ , то (4.2) равносильно разрешимости в L^∞ любой проблемы моментов

$$(4.3) \quad \int u(t) P_j(t) dt = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, \{a_j\} \in l^\infty,$$

где

$$P_j(t) = \frac{1}{\pi y_j} \frac{1}{1 + ((t - x_j)/y_j)^2}$$

— ядро Пуассона для z_j . Мы покажем, что тогда выполняются геометрические условия (1.2) и (1.7), так что последовательность $\{z_j\}$ является интерполяционной по теореме 1.1.

Для начала нам нужно одно неравенство. Рассмотрим линейный оператор $T: L^\infty \rightarrow l^\infty$, действующий по формуле

$$Tu(j) = u(z_j) = \int u(t) P_j(t) dt.$$

Этот оператор ограничен, потому что $\|P_j\|_1 = 1$. Предположим, что T отображает L^∞ на l^∞ . По теореме об открытом отображении тогда найдется такая константа M , что проблема моментов (4.3) всегда имеет решение $u(t)$ с

$$(4.4) \quad \|u\|_\infty \leq M \sup_j |a_j|.$$

Нужное нам неравенство имеет вид

$$(4.5) \quad \sum |\lambda_j| \leq M \left\| \sum \lambda_j P_j \right\|$$

и является двойственным к (4.4). Равносильность (4.4) и (4.5) следует из того, что линейный оператор и его сопряженный одновременно имеют замкнутую область значений (Данфорд и Шварц [1958]). (T сопряжен с некоторым оператором из l^1 в L^1 .) Но (4.5) легко вывести и прямо из (4.4). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ даны; пусть $u \in L^\infty$, $\|u\|_\infty \leq M$, решает проблему моментов

$$\int u(t) P_j(t) dt = \bar{\lambda}_j / |\lambda_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j| = \left| \int u \sum \lambda_j P_j dt \right| \leq \|u\|_\infty \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right\|,$$

а это и есть (4.5).

При $j \neq k$ (4.5) дает $\|P_j - P_k\|_1 \geq 2/M$, и, хотя бы по неравенству Гарнака, это означает, что

$$|z_j - z_k| / y_j \geq b(M) > 0, \quad j \neq k,$$

и для последовательности $\{z_j\}$ выполняется условие (1.2).

Доказательство (1.7) использует неравенство Хинчина. Пусть Q — квадрат $\{x \in I, 0 < y \leq |I|\}$, а $z_1, \dots, z_n$ — конечное число точек последовательности $\{z_j\}$, лежащих в Q . Положим $\lambda_j = \pm y_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда по (4.5)

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq M \int \left| \sum_{j=1}^n \pm y_j P_j(t) \right| dt.$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей этого неравенства и при каждом $t \in \mathbb{R}$ применим (4.1):

$$(4.6) \quad \sum_{j=1}^n y_j \leq M \int \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 P_j^2(t) \right)^{1/2} dt.$$

Пусть I — концентрический с I интервал длины $|I| = 3|I|$. Правая часть в (4.6) равна

$$M \int_{\tilde{I}} \left(\sum y_j^2 P_j^2(t) \right)^{1/2} dt + M \int_{\mathbb{R} \setminus \tilde{I}} \left(\sum y_j^2 P_j^2(t) \right)^{1/2} dt.$$

Для первого интеграла неравенство Шварца дает оценку

$$M |\tilde{I}|^{1/2} \left(\int_{\tilde{I}} \sum y_j^2 P_j^2(t) dt \right)^{1/2} \leq cM |I|^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^{1/2}.$$

потому что

$$\int P_j^2(t) dt = \frac{1}{y_j} \int P^2(t) dt, \quad P(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Во втором интеграле имеем

$$P_j^2(t) \leq \frac{cy_j^2}{(t-x_0)^4}, \quad t \notin \tilde{I},$$

где x_0 — центр I , так как $z_j \in Q$. При $t \notin \tilde{I}$

$$\left(\sum y_j^2 P_j^2(t)\right)^{1/2} \leq c \left(\sum y_j^4\right)^{1/2} \frac{1}{(t-x_0)^2} \leq c |I|^{3/2} \left(\sum y_j\right)^{1/2} \frac{1}{(t-x_0)^2}.$$

Значит, второй интеграл не превосходит

$$cM |I|^{3/2} \left(\sum y_j\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R} \setminus \tilde{I}} \frac{dt}{(t-x_0)^2} \leq cM |I|^{1/2} \left(\sum y_j\right)^{1/2}.$$

Теперь (4.6) дает

$$\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)^{1/2} \leq 2cM |I|^{1/2},$$

откуда следует (1.7). $\square$

В доказательстве теоремы 4.2 мы оказались в состоянии заключить, что $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность, только благодаря геометрическим условиям (1.2) и (1.7). Гармонические функции использовались лишь в доказательстве (4.5). Справедливо обобщение теоремы 4.2 приблизительно с тем же доказательством, которое совсем не обращается к гармоничности. Пусть $\mathcal{P}(t) \in L^1(\mathbb{R})$; мы будем трактовать $\mathcal{P}(t)$ как ядро, полагая

$$\mathcal{P}_z(t) = \frac{1}{y} \mathcal{P}\left(\frac{x-t}{y}\right), \quad z = x + iy, \quad y > 0.$$

Поскольку $\|\mathcal{P}_z\|_1 = \|\mathcal{P}\|_1$, то оператор

$$Tu(z) = \int u(t) \mathcal{P}_z(t) dt$$

отображает непрерывно L^∞ в пространство всех ограниченных (на самом деле непрерывных) функций в верхней полуплоскости. В частном случае $\mathcal{P}(t) = 1/\pi(1+t^2)$, разумеется, $\mathcal{P}_z$ есть ядро Пуассона, а оператор T решает задачу Дирихле.

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{P}(t) \in L^1$, а $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости. Если каждая интерполяционная задача

$$(4.7) \quad Tu(z_j) = \int u(t) \mathcal{P}_{z_j}(t) dt = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, \{a_j\} \in l^\infty,$$

имеет решение $u(t) \in L^\infty$, то $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность для H^∞ .

Доказательство. Мы покажем с помощью (4.7), что распределение точек $\{z_j\}$ удовлетворяет (1.2) и (1.7). Теорема 1.1 позволит заключить, что последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная.

По теореме об открытом отображении каждая проблема моментов (4.7) имеет решение с $\|u\|_\infty \leq M \sup |a_j|$, где M не зависит от $\{a_j\}$. Двойственное рассуждение, как и в доказательстве теоремы 4.2, дает при всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$(4.8) \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathcal{P}_{z_j} \right\|_1.$$

Для упрощения оценок в конце доказательства выберем непрерывную функцию $K(t)$ с компактным носителем, такую, что $\|\mathcal{P} - K\|_1 \leq 1/2M$. Полагая

$$K_{z_j}(t) = \frac{1}{y_j} K\left(\frac{x_j - t}{y_j}\right),$$

мы получим заменой переменных неравенство $\|\mathcal{P}_{z_j} - K_{z_j}\| \leq 1/2M$. Теперь (4.8) дает

$$(4.9) \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \leq 2M \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j K_{z_j} \right\|_1.$$

При $j \neq k$ из (4.9) следует $\|K_{z_k} - K_{z_j}\|_1 \geq 1/2M$. Пусть $x_0 = (x_k - x_j)/y_j$, $y_0 = y_k/y_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|K_{z_k} - K_{z_j}\|_1 &= \int \left| K(s) - \frac{1}{y_0} K\left(\frac{s + x_0}{y_0}\right) \right| ds \leq \\ &\leq \|K(s) - K(s + x_0)\|_1 + \left\| K(s + x_0) - \frac{1}{y_0} K\left(\frac{s + x_0}{y_0}\right) \right\|_1 = \\ &= \|K(s) - K(s + x_0)\|_1 + \left\| K(s) - \frac{1}{y_0} K\left(\frac{s}{y_0}\right) \right\|_1. \end{aligned}$$

Поскольку K — непрерывная функция с компактным носителем, то при достаточно малом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \|K(s) - K(s + x_0)\|_1 &\leq 1/4M, \quad |x_0| < \delta, \\ \left\| K(s) - \frac{1}{y_0} K\left(\frac{s}{y_0}\right) \right\|_1 &\leq 1/4M, \quad |1 - y_0| < \delta. \end{aligned}$$

Значит,

$$\max \left(\frac{|x_j - x_k|}{y_j}, \frac{|y_j - y_k|}{y_j} \right) \geq \delta,$$

так что $|z_j - z_k| \geq \delta y_j$ и последовательность $\{z_j\}$ редкая.

Доказательство условия (1.7) теперь проще, чем в теореме 4.2, потому что носитель $K(t)$ компактен. (4.9) вместе с неравенством Хинчина дает

$$(4.10) \quad \sum_{j=1}^n y_j \leq 2M \int \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 K_{z_j}^2(t) \right)^{1/2} dt,$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — точки последовательности $\{z_j\}$, лежащие в квадрате $Q = \{x \in I, 0 < y \leq |I|\}$. Пусть $A > 0$ таково, что $K(t) = 0$ при $|t| > A$. Поскольку $z_j \in Q$, это означает, что $K_{z_j}(t) = 0$ при $t \notin J$,

$$J = \{t: \text{dist}(t, I) < A|I|\}.$$

По неравенству Коши — Шварца

$$\int \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 K_{z_j}^2(t) \right)^{1/2} dt \leq |J|^{1/2} \left(\int \sum_{j=1}^n y_j^2 K_{z_j}^2(t) dt \right)^{1/2} \leq |J|^{1/2} \left(\sum y_j \right)^{1/2} \|K\|_2,$$

потому что $\int K_{z_j}^2(t) dt = \frac{1}{y_j} \int K^2(t) dt$. Из (4.10) мы теперь получаем

$$\left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^{1/2} \leq (2A + 1)^{1/2} 2M \|K\|_2 |I|^{1/2},$$

что дает (1.7). $\square$

В только что законченном доказательстве условие (4.9) означало, что каждая интерполяционная задача вида (4.7) с заменой $\mathcal{P}_{z_j}$ на K_{z_j} имеет решение в L^∞ . Этот прием с заменой одного ядра — даже ядра Пуассона — на другое, более простое, ядро часто бывает полезен.

Теорема, обратная к теореме 4.3, вообще говоря, неверна. Если $\mathcal{P}(t) = \chi_{(-1, 1)}(t)$, то интерполяция невозможна уже на конечном множестве $\{i, (1+i)/2, (-1+i)/2\}$, потому что ядра для этих точек линейно зависимы.

Приведенное доказательство теоремы 4.2 принадлежит Варопулосу [1972], который также нашел и другое элегантное доказательство той же теоремы. Его второе доказательство использует корни из единицы подобно теореме 2.2. Мы дадим это доказательство для более общей теоремы 4.3, но при дополнительном предположении, что $\mathcal{P} \in L^2$. Мы знаем, что каждая ограниченная интерполяционная задача

$$u(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

имеет решение с

$$\|u\|_\infty \leq M \sup_j |a_j|.$$

Оценка (1.2) следует отсюда тривиальным образом, и наша настоящая задача — установить (1.7). Фиксируем квадрат $Q = \{x \in I, 0 < y \leq |I|\}$ и конечное число точек $z_1, \dots, z_n$ нашей последовательности в этом квадрате. Пусть функции $u_j \in L^\infty$, $\|u_j\|_\infty \leq M$ решают интерполяционные задачи

$$u_j(z_k) = \omega^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \omega = \exp \frac{2\pi i}{n}.$$

Тогда для функций

$$U_j(z) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \omega^{-lj} u_l(z)$$

имеем $U_j(z_j) = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, и, как в теореме 2.2,

$$(4.11) \quad \sum_{j=1}^n |U_j(t)|^2 \leq M^2 + \varepsilon$$

почти всюду. Пусть J — интервал $\{t: \text{dist}(t, I) \leq cM|I|\}$, где c выбрано так, чтобы при $z \in Q$

$$\int_{R \setminus J} \mathcal{P}_z(t) dt \leq 1/2M.$$

Тогда

$$1 \leq \int |U_j(t)| \mathcal{P}_{z_j}(t) dt,$$

и по (4.1)

$$\int_{R \setminus J} |U_j(t)| \mathcal{P}_{z_j}(t) dt \leq M/2M \leq 1/2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \int_j |U_j(t)| \mathcal{P}_{z_j}(t) dt \leq \left(\int_j |U_j(t)|^2 dt \right)^{1/2} \|\mathcal{P}_{z_j}\|_2 \leq \\ &\leq \frac{c'}{y_j^{1/2}} \left(\int_j |U_j(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$y_j \leq (4c')^2 \int_j |U_j(t)|^2 dt,$$

и по (4.11)

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq (4c')^2 M^2 |J| \leq (4c')^2 M^3 c |I|,$$

что доказывает (1.7). Такое же рассуждение дает и теорему 4.3.

Уточнение теоремы 4.2 будет другим методом получено в гл. X,

5. Элементарное доказательство Эрла

Существует другое доказательство основной теоремы 1.1, которое не использует двойственности. Это конструктивное доказательство, принадлежащее Дж. П. Эрлу, показывает, что если последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная, то интерполирующую функцию можно выбрать в виде $CB(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, а C — постоянная. Произведение Бляшке $B(z)$ имеет простые нули $\{\xi_j\}$, которые очень близки в гиперболической метрике к $\{z_j\}$. Отсюда следует, что последовательность $\{\xi_j\}$ тоже интерполяционная.

Теорема 5.1. Пусть $\{z_j\}$ — такая последовательность в верхней полуплоскости, что

$$(5.1) \quad \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Существует такая постоянная K , что для любой последовательности $\{a_j\} \in l^\infty$ найдется функция $f(z) \in H^\infty$, для которой

$$(5.2) \quad f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и при этом

$$(5.3) \quad f(z) = K \left(\sup_j |a_j| \right) B(z),$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке. Нули $\{\xi_j\}$ произведения $B(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$\rho(\xi_j, z_j) = \left| \frac{\xi_j - z_j}{\xi_j - \bar{z}_j} \right| \leq \delta/3$$

и

$$(5.4) \quad \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_k - \bar{\xi}_j} \right| \geq \delta/3,$$

так что $\{\xi_j\}$ — тоже интерполяционная последовательность.

Постоянная K , которая получится в доказательстве теоремы 5.1, не будет минимальной константой интерполяции: у нас получится $K = O(\delta^{-2})$, в то время как константа интерполяции M — это $O(\delta^{-1} \log 1/\delta)$.

Лемма 5.2. Если $0 < \alpha < \beta_n < 1$, то

$$(5.5) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha}{1 - \alpha\beta_n} \geq \frac{(\prod \beta_n) - \alpha}{1 - \alpha \prod \beta_n}.$$

Доказательство. Левая часть (5.5) равна $B(\alpha)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{\beta_n\}$. По лемме Шварца

$\rho(B(\alpha), B(0)) \leq \alpha$, и приведенное в разд. 1.1 евклидово описание неевклидова круга $\{\rho(w, B(0)) \leq \alpha\}$ дает

$$|B(\alpha)| \geq \frac{|B(0)| - \alpha}{1 - \alpha |B(0)|},$$

что совпадает с (5.5). $\square$

Лемма 5.3. Пусть $0 < \lambda < 2\lambda/(1 + \lambda^2) < \delta < 1$, а $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости, удовлетворяющая условию (5.1). Если точки $\{\xi_j\}$ таковы, что $\rho(\xi_j, z_j) \leq \lambda$, $j = 1, 2, \dots$, то

$$(5.6) \quad \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_k - \bar{\xi}_j} \right| \geq \frac{\delta - 2\lambda/(1 + \lambda^2)}{1 - 2\lambda\delta/(1 + \lambda^2)}.$$

В частности, если $\rho(\xi_j, z_j) \leq \delta/3$, $j = 1, 2, \dots$, то

$$\prod_{j, j \neq k} \left| \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_k - \bar{\xi}_j} \right| \geq \delta/3.$$

Доказательство. При $j \neq k$ по лемме I.1.4

$$\rho(\xi_j, \xi_k) \geq \frac{\rho(\xi_j, z_k) - \rho(z_k, \xi_k)}{1 - \rho(\xi_j, z_k)\rho(z_k, \xi_k)} \geq \frac{\rho(\xi_j, z_k) - \lambda}{1 - \lambda\rho(\xi_j, z_k)}$$

и

$$\rho(\xi_j, z_k) \geq \frac{\rho(z_j, z_k) - \lambda}{1 - \lambda\rho(z_j, z_k)}.$$

Полагая $\alpha = 2\lambda/(1 + \lambda^2)$, имеем

$$\begin{aligned} \rho(\xi_j, \xi_k) &\geq \left(\frac{\rho(z_j, z_k) - \lambda}{1 - \lambda\rho(z_j, z_k)} - \lambda \right) / \left(1 - \lambda \frac{\rho(z_j, z_k) - \lambda}{1 - \lambda\rho(z_j, z_k)} \right) = \\ &= \frac{\rho(z_j, z_k) - \alpha}{1 - \alpha\rho(z_j, z_k)}. \end{aligned}$$

Лемма 5.2 теперь дает

$$\prod_{j, j \neq k} \left| \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_k - \bar{\xi}_j} \right| = \prod_{j, j \neq k} \rho(\xi_j, \xi_k) \geq \frac{\delta - \alpha}{1 - \alpha\delta},$$

что совпадает с (5.6). При $\lambda = \delta/3$ прямое вычисление дает $(\delta - \alpha)/(1 - \alpha\delta) > \delta/3$, так что и заключительное утверждение леммы верно. $\square$

Зафиксируем $\lambda = \delta/3$ и рассмотрим замкнутый круг

$$\Delta_j = \{\xi: \rho(\xi, z_j) \leq \delta/3\}.$$

Пусть при $\xi_j \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$(5.7) \quad B_{\{\xi_1, \dots, \xi_n\}}(z) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - \xi_j}{z - \bar{\xi}_j} \right) \frac{\bar{\xi}_j}{\xi_j}.$$

Тогда $B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}$ — конечное произведение Бляшке, $B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}(0) = 1$ и

$$\overline{B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}(\bar{z})} = B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}(z)^{-1},$$

Следовательно, если

$$B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}(z_j) = B_{\{\zeta'_1, \dots, \zeta'_n\}}(z_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то непременно $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} = \{\zeta'_1, \dots, \zeta'_n\}$, потому что разность этих двух произведений Бляшке — рациональная функция степени не выше $2n$, которая обращается в 0 в $2n+1$ точках $\{0, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n\}$.

Главным шагом доказательства является следующая лемма, в которой показано, что при малых $|a_j|$ каждая конечная интерполяционная задача вида (5.2) разрешима при помощи произведения Бляшке вида (5.7).

Лемма 5.4. Пусть при $j = 1, 2, \dots, n$

$$(5.8) \quad |a_j| \leq \frac{\delta}{3} \inf_{\zeta_k \in \Delta_k} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left| \frac{z_j - \zeta_k}{z_j - \bar{\zeta}_k} \right|.$$

Тогда существуют такие точки $\zeta_j \in \Delta_j$, $j = 1, \dots, n$, что

$$B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}}(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Используем индукцию по n . При $n=1$ отображение

$$\zeta_1 \rightarrow w = w(z_1) = B_{\{\zeta_1\}}(z_1) = \left(\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 - \bar{\zeta}_1} \right) \frac{\bar{\zeta}_1}{\zeta_1}$$

переводит Δ_1 в круг $\{|w| \leq \delta/3\}$. Оно взаимно однозначно и переводит $\partial\Delta_1 = \{\zeta_1: \rho(\zeta_1, z_1) = \delta/3\}$ в окружность $\{|w| = \delta/3\}$. Хотя w не аналитично как функция от ζ_1 , но принцип аргумента можно применить для доказательства того, что образ $w(\Delta_1)$ покрывает весь круг $\{|w| < \delta/3\}$. Поскольку $w(z_1) = 0$, то кривая $w(\partial\Delta_1)$ имеет ненулевое число вращения относительно точки 0, а значит, и относительно a_1 при $|a_1| < \delta/3$. Поэтому a_1 попадает в образ $w(\Delta_1)$, и при $n=1$ наша лемма верна.

Предположим, что лемма верна для $n-1$. Для любого $\zeta_n \in \Delta_n$ мы тогда можем найти такие точки $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta_n) \in \Delta_1, \dots, \zeta_{n-1} = \zeta_{n-1}(\zeta_n) \in \Delta_{n-1}$, что

$$B_{\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}\}}(z_j) = a_j \left(\frac{z_j - \bar{\zeta}_n}{z_j - \zeta_n} \right) \frac{\zeta_n}{\bar{\zeta}_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

потому что для этих значений условие (5.8) выполняется. Точки $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ определяются однозначно и непрерывно зависят от ξ_n . Рассмотрим непрерывное отображение

$$\xi_n \rightarrow w = w(\xi_n) = \frac{z_n - \xi_n}{z_n - \bar{\xi}_n} \frac{\bar{\xi}_n}{\xi_n} B_{\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}}(z_n).$$

Это — значение в точке z_n произведения Бляшке вида (5.7), которое независимо от выбора $\xi_n \in \Delta_n$ интерполирует данные $a_1, \dots, a_{n-1}$ в точках $z_1, \dots, z_{n-1}$. Достаточно проверить, что $w(\xi_n) = a_n$ при некотором $\xi_n \in \Delta_n$. В силу (5.8) $|a_n| \leq \leq \inf \{ |w(\xi_n)| : \xi_n \in \partial \Delta_n \}$. Но $w(z_n) = 0$, и поэтому кривая $w(\partial \Delta_n)$ имеет ненулевой индекс относительно 0. Следовательно, она имеет ненулевой индекс и относительно a_n , так что в Δ_n найдется точка ξ_n , в которой $w(\xi_n) = a_n$. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Достаточно показать, что для

$$|a_j| \leq \frac{\delta}{3} \frac{\delta - \delta/3}{1 - \delta^2/3} = \frac{2\delta^2}{3(3 - \delta^2)}$$

найдутся такие $\xi_j \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \dots$, что $e^{i\theta} B(z_k) = a_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{\xi_j\}$, а θ — вещественная постоянная. По (5.7), (5.8) и лемме 5.4 найдутся такие $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$, $\xi_j^{(n)} \in \Delta_j$, что

$$B_{\{\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}\}}(z_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

После замены переменной мы можем считать, что $i = \sqrt{-1} \notin \bigcup_j \Delta_j$. Положим

$$B_{\{\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}\}}(z) = e^{i\theta_n} B_n(z), \quad B_n(i) > 0.$$

Выберем такую подпоследовательность $\{n_k\}$, чтобы $e^{i\theta_{n_k}} \rightarrow e^{i\theta}$, $\xi_j^{(n_k)} \rightarrow \xi_j \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \dots$. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{\xi_j\}$, нормированное так, чтобы все его частичные произведения были положительны в точке $z = i$. Покажем, что

$$(5.9) \quad e^{i\theta} B(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Из доказательства леммы 5.3 видно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\xi_j \in \Delta_j} \prod_{j \geq N} \left| \frac{z - \xi_j}{z - \bar{\xi}_j} \right| = 1$$

равномерно на компактных множествах. Но поскольку все произведения нормированы условием положительности при $z = i$,

отсюда следует, что $B_{n_k}(z) \rightarrow B(z)$, $k \rightarrow \infty$, так что (5.9) верно. Мы получаем (5.3) с $K = 3(3 - \delta^2)/2\delta^2$. По лемме 5.3 нули $\{\xi_j\}$ удовлетворяют условию (5.4). $\square$

Замечания

Доказательство в разд. 1 следует оригинальной статье Карлесона [1958], но меры Карлесона изложены здесь иначе. Статья Хермандера [1967b] проясняет геометрию задачи. Шапиро и Шилдс [1961], а позднее Амар [1977a] подошли к интерполяционным последовательностям с помощью гильбертовых пространств. Рассуждение из раздела 1 дает результаты и в том случае, когда последовательность не является интерполяционной (см. упр. 9 и Гарнетт [1977]). Интерполяционные последовательности можно охарактеризовать и в терминах H^p (см. Дьюрен [1970] и пр. 11). Пример, показывающий, что $M \geq (1/\delta) \log(1/\delta)$, принадлежит А. М. Глисону. Другие современные изложения теории интерполяции можно найти у Виноградова и Хавина [1974] и Сарасона [1979].

Теорема 2.1 принадлежит П. Бёрлингу (см. Карлесон [1962b]). Общее обсуждение линейных операторов интерполяции дано Дэви [1972]. О теореме 2.2 см. Варопулос [1971a] и Бернар [1971]. Источником этой идеи является гармонический анализ (см. Друри [1970] и Варопулос [1970]).

Другое доказательство теоремы 4.2 дано Гарнеттом [1971b]. Об обобщениях теоремы 4.2 на L^p , $p > 1$, и ВМО см. Гарнетт [1978] и упражнение 12.

Теорема 5.1 принадлежит Эрлу [1970], который нашел элементарный подход и к теореме 2.1 (Эрл [1976]). П. Джонс уточнил метод Эрла и получил интерполирующие функции, норма которых минимальна по порядку величины (см. упр. 10).

Интересная открытая проблема связана с гармонической интерполяцией в высших размерностях. Рассмотрим верхнее полупространство $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$. Каждая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ является интегралом Пуассона функции из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если последовательность точек $\{p_j\} = \{(x_j, y_j)\} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ является интерполяционной для ограниченных гармонических функций, то выполняется аналог условия (с) из теоремы 1.1:

$$(i) |p_j - p_k|/y_j \geq a > 0, j \neq k,$$

$$(ii) \sum_{p_j \in Q} y_j^n \leq C \ell(Q)^n$$

для любого куба $Q = \{(x, y): |x_i - x_i^0| \leq \ell(Q)/2, 1 \leq i \leq n, 0 \leq y \leq \ell(Q)\}$.

Это следует из доказательства теоремы 4.2. Нерешенной проблемой является обратное: будет ли последовательность с условиями (i) и (ii) интерполяционной для ограниченных гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$? (см. Карлесон и Гарнетт [1975].)¹⁾

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$ в $\mathcal{H}$. Последовательность $\{z_j\}$ будет интерполяционной тогда и только тогда, когда

$$\inf_j y_j |B'(z_j)| > 0.$$

2. Если S и T — две непересекающиеся интерполяционные последовательности, то последовательность $S \cup T$ будет интерполяционной тогда и только тогда, когда

$$\rho(S, T) = \inf\{\rho(z, w): z \in S, w \in T\} > 0.$$

3. Пусть $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность в $\mathcal{H}$, а $\{a_j^{(n)}\}, n = 0, 1, \dots, N$, — конечный набор последовательностей, причем $y_j^n |a_j^{(n)}| \leq 1$. Существует такая функция $f \in H^\infty$, что

$$f^{(n)}(z_j) = a_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots, N$$

($f^{(n)}$ есть n -я производная функции f)²⁾.

4. Пусть нули $\{z_j\}$ произведения Бляшке $B(z)$ различны и образуют интерполяционную последовательность. Если идеал $m \in \mathcal{M}_{H^\infty}$ таков, что $B(m) = 0$, то m лежит в замыкании множества $\{z_j\}$ в топологии $\mathcal{M}_{H^\infty}$.

5 (Нафтаевич). Если $|z_j| < 1$ и $\sum (1 - |z_j|) < \infty$, то найдется интерполяционная последовательность $\{w_j\}$ с $|w_j| = |z_j|^3$.

¹⁾ Тематика этой главы имеет обширные и важные связи с теорией операторов и с проблемами базисности систем функций (см. Никольский [1980*], [1983*], Никольский, Павлов и Хрушев [1981*], Виноградов [1976*], Васюнин [1978*]). Теорема 1.1 послужила образцом для многочисленных теорем о свободной интерполяции, относящихся к классам функций, отличным от H^∞ (см. Виноградов и Хавин [1974], [1976*], Коточигов [1972*], Дынькин [1979*], Бруна [1980*], Широков [1982*], Виноградов и Хрушев [1981*]). О «свободной интерполяции» гармоническими функциями см. Толоконников [1982*] (близкие результаты независимо получили Маршалл, Стрэй и Сандберг [1982*] и Девиз и Хавин [1983*]). — *Прим. ред.*

²⁾ Разнообразные результаты и библиографические указания, относящиеся к «свободной интерполяции с кратностями», можно найти в работах Джрбашяна [1978*], Шамомяна [1976*], Айрапетяна [1980*], Мартиросяна [1981]. Обобщения теоремы 1.1, охватывающие в качестве частного случая кратную интерполяцию без ограничений величин кратностей узлов, содержатся в работах Васюнина [1978*], Никольского [1980*], [1983*], Виноградова и Рукшина [1982*]. — *Прим. ред.*

³⁾ См. Никольский [1980*], стр. 208, 224. — *Прим. ред.*

6. Если $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости и $\sum y_j \delta_{z_j}$ — мера Карлесона, то $\{z_j\}$ есть объединение конечного числа интерполяционных последовательностей.

7. Если $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность, а $\{w_j\}$ — редкая последовательность (т. е. $\{w_j\}$ удовлетворяет условию (1.2)) и $\rho(z_j, w_j) < \lambda < 1$, то $\{w_j\}$ тоже интерполяционная последовательность.

8. Пусть X — банахово пространство, а $\{z_j\}$ — последовательность линейных функционалов на X , $\|z_j\| = 1$. Предположим, что для любого $\{a_j\} \in l^\infty$ найдется такой $x \in X$, что

$$|z_j(x) - a_j| \leq \frac{1}{2} \|a_j\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и $\|x\| \leq K \|a_j\|_\infty$. Докажите, что последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная, т. е. что при $\{a_j\} \in l^\infty$ найдется $x \in X$ с $z_j(x) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$. Предположим теперь что интерполяция возможна для идемпотентных последовательностей, т. е. когда $a_j = 0$ или $a_j = 1$ для любого j . Тогда снова последовательность $\{z_j\}$ оказывается интерполяционной. (Используйте теорему Бэра о категории, чтобы показать, что все идемпотенты интерполируются равномерно ограниченным подмножеством в X .)

9. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости и

$$\delta_k = \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| > 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

но $\inf_k \delta_k = 0$. Если $|a_j| \leq \delta_j (1 + \log(1/\delta_j))^{-2}$, то найдется функция $f \in H^\infty$, $f(z_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$. Вообще, пусть $h(t)$ — положительная убывающая функция на $[0, \infty)$ и $\int_0^\infty h(t) dt < \infty$.

Если $|a_j| \leq \delta_j h(1 + \log(1/\delta_j))$, то интерполяционная задача $f(z_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots$, разрешима в H^∞ . Чтобы это доказать, покажите, что $\sum (|a_j| y_j / \delta_j) \delta_{z_j}$ — мера Карлесона.

Приведенный результат точен: если $\int_0^\infty h(t) dt = \infty$, то найдутся редкая последовательность $\{z_j\}$ и такие значения a_j , что $|a_j| = \delta_j h(1 + \log(1/\delta_j))$, но интерполяция в H^∞ невозможна (см. детали у Гарнетта [1977]).

10. Если $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность и

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| = \delta > 0,$$

то ее можно разбить на $K \log(1/\delta)$ (K — абсолютная постоянная) подпоследовательностей, и для каждой такой подпоследовательности $\{w_j\}$

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{w_k - w_j}{w_k - \bar{w}_j} \right| \geq 1/2.$$

Если $Y_1, \dots, Y_N$ — эти подпоследовательности, B_k — произведение Бляшке с нулями $\bigcup_{j \neq k} Y_j$, а f_k интерполируют значения $a_j/B_k(z_j)$ на Y_k , то $\sum B_k f_k$ — интерполирующая функция, норма которой не превосходит $C\delta^{-1} \left(\log \frac{1}{\delta} \right) \sup |a_j|$.

11. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости и $0 < p < \infty$. Определим на H^p линейный оператор

$$T_p f(j) = y_j^{1/p} f(z_j).$$

Ясно, что $\|T_p f\|_\infty \leq C \|f\|_p$, $f \in H^p$.

(а) Если T_p ограничен как оператор из H^p в l^p , то $\sum y_j \delta_{z_j}$ — мера Карлесона. Используя теорему о замкнутом графике, покажите то же самое при условии $T(H^p) \subset l^p$.

(б) Если $T_p(H^p) = l^p$, то последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная.

(с) Если $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность, то $T_p(H^p) = l^p$, $0 < p < \infty$.

При $p > 1$ используйте соображения двойственности. При $p \leq 1$ пусть $B_k(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j, j \neq k\}$. Поскольку $\sum y_k |a_k|^p < \infty$, то

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k(z)}{B_k(z_k)} \left(\frac{2iy_k}{z - \bar{z}_k} \right)^{2/p} a_k \in H^p$$

и $f(z_k) = a_k$, $k = 1, 2, \dots$ (См. Шапиро и Шилдс [1961].)

12. При $p \geq 1$ оператор T_p из упр. 11 имеет естественное продолжение на L^p с помощью интеграла Пуассона.

(а) Если $T_p(L^p) = l^p$, то $T_p: L^p \rightarrow l^p$ ограничен, а последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная.

(б) Если $1 < p < \infty$, а $T_p(L^p) \supset l^p$ или $T_\infty(\text{ВМО}) \supset l^\infty$, то последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная. Результат о ВМО или L^p при $p \geq 2$ получается небольшим изменением доказательства теоремы 4.2. При $p < 2$ нужно другое рассуждение. (См. детали и обобщения у Гарнетта [1978].)

(с) Если $T_1(L^1) \supset l^1$, последовательность $\{z_j\}$ не обязательно интерполяционная.

13. (а) Докажите неравенство Хинчина для $p = 4$:

$$\left(\mathcal{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n \pm a_j \right|^4 \right) \right)^{1/4} \leq C_4 \left(\sum |a_j|^2 \right)^{1/2},$$

где C_4 не зависит от n .

(б) Докажите неравенство Хинчина для всех $p \geq 2$, начиная со случая целого четного p .

14. Последовательность $\{z_j\}$ в круге называется *некасательно плотной*, если почти каждая точка $e^{i\theta} \in T$ является некасательным пределом подпоследовательности из $\{z_j\}$. Следующие условия для дискретной последовательности $\{z_j\}$ в круге эквивалентны.

(i) $\{z_j\}$ некасательно плотна.

(ii) Для любой точки $z \in D$ найдутся такие веса $\lambda_j \geq 0$, что

$$u(z) = \sum \lambda_j u(z_j)$$

для всех ограниченных гармонических функций u .

(iii) Для некоторой точки $z_0 \notin \{z_j\}$ найдутся комплексные числа β_j , $\sum |\beta_j| < \infty$, такие, что

$$f(z_0) = \sum \beta_j f(z_j), \quad f \in H^\infty.$$

(См. Браун, Шилдс и Целлер [1960] и Гофман и Росси [1967]¹⁾.)

15. Пусть $\{z_j\}$ — интерполяционная последовательность в круге, $\{a_j\} \in l^\infty$ и $f \in H^\infty$ — функция с минимальной нормой $\|f\|_\infty$, интерполирующая данные $\{a_j\}$:

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(а) Если $\lim a_j = 0$, то f — единственная интерполирующая функция с минимальной нормой. Если, кроме того, $\lim z_j = 1$ некасательно, то f лишь постоянным множителем отличается от произведения Бляшке.

(б) Для некоторых $\{z_j\}$ и $\{a_j\}$ нет единственной интерполирующей функции минимальной нормы (см. Эйма [1977]²⁾).

Добавление редактора перевода. П. Джонс недавно предложил явную конструкцию функций f_j , $f_j \in H^\infty$, удовлетворяющих условию (2.1) и неравенству (2.2), в котором M нужно заменить на $M = e/\delta e$, где $e = (2 \log(e\delta^{-2}))^{-1}$ (так что $M = O(\delta^{-1} |\log \delta|)$ при $\delta \rightarrow 0$). Мы изложим эту конструкцию для случая круга D и в упрощенной редакции (Виноградов, Горин и Хрущев [1981*]). Положим

$$f_j(z) = \left(\frac{1 - |z_j|^2}{1 - \bar{z}_j z} \right) \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)} \exp [\varepsilon (a_j(z_j) - a_j(z))],$$

¹⁾ А также Рубел и Шилдс [1966]. — Прим. ред.

²⁾ А также Стрэй и Эйма [1978*]. — Прим. ред.

где

$$\alpha_l(z) = \sum_{k \geq l} \frac{1 + \bar{z}_k z}{1 - \bar{z}_k z} (1 - |z_k|^2).$$

Можно считать, что $|z_k| \leq |z_n|$ при $k \leq n$, так что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \alpha_n(z_n) &= \sum_{k \geq n} \frac{1 - |z_n|^2 |z_k|^2}{|1 - \bar{z}_k z_n|^2} (1 - |z_k|^2) \leq \\ &\leq \sum_{k \geq n} \frac{(1 - |z_n|^4)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_n|^2} \leq 2 \sum_{k \geq n} \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_n|^2} \leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством, предшествующим оценке (1.6)). Положим

$$\gamma_n(\xi) = \sum_{k \geq n} \frac{(1 - |z_k|^2 |\xi|^2)(1 - |z_k|^2)}{|1 - \bar{z}_k \xi|^2}.$$

Если $|\xi| < 1$, то $1 - |z_k|^2 \leq 1 - |z_k|^2 |\xi|^2$. Кроме того,

$$\operatorname{Re} \alpha_k(\xi) \geq \frac{1 - |z_k|^2 |\xi|^2}{|1 - \bar{z}_k \xi|^2}.$$

Поэтому

$$S_n(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n |f_n(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_n (\gamma_n - \gamma_{n+1}) e^{-\varepsilon \gamma_n}.$$

Из (1.4) и неравенства $t \leq e^t - 1$ следует (при $t = \varepsilon(\gamma_n - \gamma_{n+1})$), что

$$S(\xi) \leq \frac{\varepsilon}{\delta e} \sum_n (e^{\varepsilon(\gamma_n - \gamma_{n+1})} - 1) e^{-\varepsilon \gamma_n} \leq e(\delta e)^{-1}. \quad \square$$

Эта глава представляет собой развернутое обсуждение теоремы Карлесона о короне. Мы приведем несколько ее доказательств, потому что идеи, стоящие за каждым из них, полезны и в других проблемах. Вначале мы излагаем недавнее элегантное доказательство Т. Волфа, которое опирается на интегралы Литтлвуда — Пэли и в котором аналитичность играет решающую роль. Затем мы приводим оригинальное доказательство Карлесона. Оно заключается в геометрической конструкции, которая привела ко многим более глубоким результатам теории и применяется к гармоническим функциям и к более общим ситуациям.

Мы начинаем с двух теорем об оценке решений некоторых неоднородных уравнений Коши — Римана. Одна из них используется в разд. 2 в доказательстве теоремы о короне и одного ее обобщения.

В разд. 3 содержатся две теоремы о минимуме модуля. Упрощенный вариант основной конструкции затем используется для доказательства теоремы об отделимости для произведений Бляшке. В следующей главе появятся важные приложения этой теоремы.

В разд. 5 обсуждается оригинальное доказательство Карлесона, а в разд. 6 — несколько иной, в меньшей степени теоретико-функциональный подход к конструкции. В разд. 7 мы обходим соображения двойственности, использованные в первоначальном доказательстве, и тем самым делаем доказательство вполне конструктивным. В этом месте снова появляются и играют решающую роль интерполяционные последовательности.

1. Неоднородные уравнения Коши — Римана

Положим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

функция $h(z)$ аналитична тогда и только тогда, когда $\partial h / \partial \bar{z} = 0$. Пусть функция $G(\zeta)$ ограничена и непрерывно дифференцируема в открытом круге D . Мы хотим решить *неоднородное уравнение Коши — Римана*

$$(1.1) \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = G(z), \quad |z| < 1,$$

с хорошей оценкой величины $\|F\|_\infty = \sup_{|z|=1} |F(z)|$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$, $d\zeta = d\xi + id\eta$, $d\bar{\zeta} = d\xi - id\eta$. Если $\varphi \in C^\infty$ — функция с компактным носителем в D , то по формуле Грина

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} &= -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \varphi(z). \end{aligned}$$

Значит, если уравнение (1.1) имеет решения в D , то одно из них должно иметь вид

$$(1.2) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{|\zeta| < 1} G(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Легко видеть, что определяющая $F(z)$ свертка (1.2) непрерывна во всей плоскости, а в открытом круге $F \in C^2$. Далее, $F(z)$ является решением уравнения (1.1). В самом деле, если функция $\varphi \in C^\infty$ имеет компактный носитель в единичном круге, то

$$\begin{aligned} \iint F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} + \iint \varphi \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} &= - \iint \frac{\partial F \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = \\ &= - \int_{|z|=1} F \varphi dz = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\iint F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = - \iint \varphi \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Если мы покажем, что

$$\iint F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = - \iint \varphi G dz \wedge d\bar{z},$$

то (1.1) можно будет получить, выбирая сдвиги подходящей аппроксимативной единицы в качестве φ . Но в силу (1.2) и теоремы Фубини

$$\begin{aligned} \iint F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} &= \iint_{|\zeta| < 1} G(\zeta) \left(\frac{-1}{2\pi i} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= - \iint_{|\zeta| < 1} G(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \end{aligned}$$

так что функция (1.2) действительно удовлетворяет уравнению (1.1). Конечно, (1.2) — не единственное решение уравнения (1.1) в круге $D = \{|z| < 1\}$. Но если $b(z)$ — любая функция, непрерывная в $\bar{D}$, непрерывно дифференцируемая в D и такая, что

$$(1.3) \quad \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = G(z), \quad |z| < 1,$$

то она обязательно имеет вид $b(z) = F(z) + h(z)$, где $\partial h / \partial \bar{z} = 0$, и поэтому $h(z)$ принадлежит диск-алгебре $A_0 = H^\infty \cap C(\bar{D})$. Мы хотим оценить наименьшую возможную норму решений (1.3); поскольку в конце концов мы будем изучать функции, аналитические в D , то наиболее интересная для нас норма равна

$$\|b\|_\infty = \sup_{|z|=1} |b(z)|.$$

Мы используем двойственность и меры Карлесона, чтобы дать две разные оценки минимальной нормы решений уравнения (1.3).

Теорема 1.1. *Предположим, что функция $G(z)$ ограничена в круге D и $|G|dx dy$ — мера Карлесона, т. е.*

$$(1.4) \quad \int_S |G| dx dy \leq A \ell(S)$$

для любого сектора

$$S = \{re^{i\theta}: 1 - \ell(S) < r < 1, |\theta - \theta_0| < \ell(S)\}.$$

Тогда существует функция $b(z) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, такая, что

$$\frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = G(z), |z| < 1, \text{ и } \|b\|_\infty = \sup_{|z|=1} |b(z)| \leq CA$$

с абсолютной постоянной C .

В этой (и в следующей) теореме ограниченность G несущественна и верхняя граница функции $|G(z)|$ не входит в оценку для $\|b\|_\infty$. Мы предположим функцию G ограниченной только ради уверенности в существовании хотя бы одного ограниченного решения уравнения (1.1) (см. упр. 1).

Доказательство. Общее решение (1.3) имеет вид

$$b(z) = F(z) + h(z), \quad h \in A_0,$$

где $F(z)$ определяется формулой (1.2). Минимальная норма решения равна $\inf_{h \in A_0} \|F + h\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ обозначает существенную верхнюю грань на ∂D . Но в силу двойственности

$$\begin{aligned} \inf_{h \in A_0} \|F + h\|_\infty &= \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k F d\theta \right| : k \in H_0^1, \|k\|_1 \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} k(z) F(z) dz \right| : k \in H^1, \|k\|_1 \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

(см. теорему IV.1.3 и лемму IV.1.6).

Так как $\partial k / \partial \bar{z} = 0$, то по формуле Грина

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} k(z) F(z) dz &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} k(z) F(z) dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint_{|z|<1} k(z) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\inf_{h \in A_0} \|F + h\|_{\infty} \leq \sup \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |G(z)| |k(z)| dx dy : k \in H^1, \|k\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Но по теореме II.3.8 о мерах Карлесона в круге

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |G(z)| |k(z)| dx dy \leq C_1 A \|k\|_1, \quad k \in H^1.$$

Выбирая $C > C_1$, мы получаем решение $b = F + h$, $h \in A_0$, уравнения (1.3) с оценкой $\|b\|_{\infty} \leq CA$. $\square$

Вторая оценка включает некоторые идеи из доказательства двойственности H^1 — ВМО. Положим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Теорема 1.2 (Волф). *Предположим, что функция $G(z)$ ограничена и непрерывно дифференцируема в круге D и что*

$$|G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| \log \frac{1}{|z|} dx dy$$

— меры Карлесона в D , т. е.

$$(1.5) \quad \iint_S |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq B_1 \ell(S),$$

$$(1.6) \quad \iint_S \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq B_2 \ell(S)$$

для любого сектора

$$S = \{re^{i\theta} : 1 - \ell(S) < r < 1, |\theta - \theta_0| < \ell(S)\}.$$

Существует функция $b(z) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, такая, что

$$\partial b / \partial \bar{z} = G(z), \quad |z| < 1,$$

$$\|b\|_{\infty} = \sup_{|z|=1} |b(z)| \leq C_1 \sqrt{B_1} + C_2 B_2$$

с абсолютными постоянными C_1 и C_2 .

Доказательство. Как и выше,

$$\inf \left\{ \|b\|_{\infty} : \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = G \right\} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k F d\theta \right| : k \in H_0^1, \|k\|_1 \leq 1 \right\},$$

где $F(z)$ определяется формулой (1.2). Функция $F(z)$ дважды дифференцируема в D , потому что $G(z) \in C^1$. Она непрерывна в $\bar{D}$, потому что G ограничена. Мы можем считать функцию $k \in H_0^1$ гладкой вплоть до ∂D ; тогда по формуле Грина

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(e^{i\theta}) F(e^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta(k(z) F(z)) \log \frac{1}{|z|} dx dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \iint_D k(z) \frac{\partial G}{\partial z} \log \frac{1}{|z|} dx dy + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \iint_D k'(z) G(z) \log \frac{1}{|z|} dx dy = \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

потому что $\Delta k = 0$, $\Delta F = 4(\partial/\partial z)(\partial/\partial \bar{z})F = 4\partial G/\partial z$ и $\nabla F \cdot \nabla k = F_x k_x + F_y k_y = 4(\partial F/\partial \bar{z})(\partial k/\partial z) = 4G(z)k'(z)$. Ввиду (1.6) по теореме о мерах Карлесона

$$|I_1| \leq C_2 B_2 \|k\|_1 \leq C_2 B_2.$$

Для оценки I_2 положим $k = (k_1 + k_2)/2$, где $k_j \in H^1$ не имеют нулей в D и $\|k_j\|_1 \leq 2$ (см. доказательство теоремы VI.4.4). Тогда $k_j(z) = g_j^2(z)$, где $g_j \in H^2$, $\|g_j\|_2^2 \leq 2$ и

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{\pi} \iint_D k'_j G \log \frac{1}{|z|} dx dy \right| &= \left| \frac{4}{\pi} \iint_D g_j g'_j G \log \frac{1}{|z|} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{\pi} \iint_D |g'_j|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \left(\frac{4}{\pi} \iint_D |g_j|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Согласно (1.5), второй множитель не превосходит $(CB_1 \|g_j\|_2^2)^{1/2} \leq C \sqrt{B_1} \|g_j\|_2$, а в силу тождеств Литтлвуда — Пэли (лемма VI.3.1) первый множитель равен

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi} \iint_D |\nabla g_j|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} &= \left(\frac{1}{\pi} \int |g_j(e^{i\theta}) - g_j(0)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|g_j\|_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $I_2 \leq C_1 \sqrt{B_1}$, и теорема 1.2 доказана. $\square$

Хотя теорема 1.2 несколько сложнее теоремы 1.1, мы увидим, что условие (1.5) и (1.6) бывает легче проверить, чем (1.4). С другой стороны, теорема 1.1 сильнее, потому что условие (1.4) зависит только от $|G|$, в то время как (1.6) может выполняться для G , но не для $\bar{G}$.

2. Теорема о короне

Единичный круг D гомеоморфно вкладывается в пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ алгебры H^∞ . Знаменитая теорема Карлесона о короне утверждает, что круг D плотен в $\mathfrak{M}$. Иными словами, «корона» $\mathfrak{M} \setminus D$ пуста. По определению топологии в $\mathfrak{M}$ эту теорему можно сформулировать следующим образом: если $f_1, \dots, f_n$ — такие функции из H^∞ , что

$$(2.1) \quad \|f_j\|_\infty \leq 1$$

$$(2.2) \quad \max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in D,$$

то $f_1, \dots, f_n$ не лежат ни в каком максимальном идеале алгебры H^∞ . Это значит, что порожденный функциями $f_1, \dots, f_n$ идеал содержит постоянную 1, так что в H^∞ существуют функции $g_1, \dots, g_n$, для которых

$$(2.3) \quad f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1.$$

На самом деле верно формально более сильное утверждение: функции $g_1, \dots, g_n$ допускают оценку, зависящую только от числа функций n и значения δ из (2.2). Однако это утверждение сильнее лишь по видимости, оно равносильно теореме о короне (см. ниже упр. 2).

Теорема 2.1. *Существует постоянная $C(n, \delta)$, такая, что для любых функций $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$, удовлетворяющих неравенствам (2.1) и (2.2), найдутся функции $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$, удовлетворяющие условию (2.3) и такие, что*

$$(2.4) \quad \|g_j\|_\infty \leq C(n, \delta), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Мы будем называть $f_1, \dots, f_n$ *данными*, а $g_1, \dots, g_n$ — *решениями задачи о короне*. В силу теории нормальных семейств решения с оценкой (2.3) достаточно найти для функций $f_1, \dots, f_n$, аналитических в окрестности множества $\bar{D}$.

Сейчас мы сведем теорему о короне к решению некоторых неоднородных уравнений Коши — Римана. Предположим, что $f_1, \dots, f_n$ — данные задачи о короне, т. е. выполняются (2.1) и (2.2). Далее предположим, что функции $f_1, \dots, f_n$ аналитичны в некоторой окрестности замкнутого круга $\bar{D}$. Можно найти функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(\bar{D})$, для которых

$$f_1 \varphi_1 + \dots + f_n \varphi_n = 1, \quad z \in \bar{D},$$

и при этом

$$(2.5) \quad |\varphi_j(z)| \leq C_1(n, \delta), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Этого легко достичь с помощью (2.1) и (2.2), например, можно взять

$$(2.6) \quad \varphi_j(z) = \bar{f}_j(z) / \sum_k |f_k(z)|^2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Трудность состоит, конечно, в том, что $\varphi_j(z)$ не будут аналитическими; чтобы исправить дело, положим

$$(2.7) \quad g_j(z) = \varphi_j(z) + \sum_{k=1}^n a_{jk}(z) f_k(z),$$

где функции $a_{jk}(z)$ еще предстоит определить. Потребуем, чтобы

$$(2.8) \quad a_{jk}(z) = -a_{kj}(z),$$

откуда следует, что

$$f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1, \quad z \in \bar{D}.$$

Условие антисимметричности (2.8) заведомо выполняется при $a_{jk}(z) = b_{jk}(z) - b_{kj}(z)$. Если мы еще потребуем, чтобы

$$(2.9) \quad \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = G_{jk}(z), \quad |z| < 1,$$

то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} + \sum_{k=1}^n f_k \cdot \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \right) = \\ &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} + \varphi_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k = 0, \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

потому что $\partial f_k / \partial \bar{z} = 0$, $\sum f_k \varphi_k = 1$ и $(\partial / \partial \bar{z}) \sum f_k \varphi_k = 0$. Стало быть, наши функции $g_j(z)$ дают аналитическое решение задачи о короне (2.3). (Более систематическое изложение перехода от φ_j к g_j см. в приложении к этой главе.)

Но нам еще нужны оценки $\|g_j\|_\infty \leq C(n, \delta)$ (не только для теоремы 2.1, но и для того, чтобы можно было сослаться на теорию нормальных семейств и доказать саму теорему о короне). Поскольку все φ_j ограничены, то взгляд на (2.7) убеждает нас, что нужно только оценить $|a_{jk}|$ или, еще лучше, $|b_{jk}|$. Таким образом, доказательство теоремы 2.1 свелось к нахождению решений $b_{jk}(z)$ уравнений (2.9), допускающих оценку

$$(2.10) \quad |b_{jk}(z)| \leq C_2(n, \delta), \quad |z| = 1.$$

Мы собираемся решить эту задачу четырьмя разными способами. В каждом случае важен правильный выбор гладких решений φ_j . Первое решение будет изложено сейчас же, остальные появятся в разд. 5—7.

Доказательство теоремы 2.1 (Волф). Положим

$$\varphi_j(z) = \overline{f_j(z)} / \sum_{l=1}^n |f_l(z)|^2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Согласно (2.2), знаменатель ограничен снизу, $\varphi_j \in C^2(\bar{D})$,

$$|\varphi_j(z)| \leq \delta^{-2} \text{ и } f_1 \varphi_1 + \dots + f_n \varphi_n = 1 \text{ в } \bar{D}.$$

Как видно из предыдущего, теорема 2.1 будет доказана, если мы установим, что уравнения

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = G_{jk}(z), \quad |z| < 1, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

имеют решения, удовлетворяющие (2.10).

Мы используем теорему 1.2. Ясно, что $G_{jk} \in C^1(\bar{D})$. Поскольку $|\varphi_j| \leq \delta^{-2}$, то

$$|G_{jk}|^2 \log \frac{1}{|z|} \leq \delta^{-2} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} \right|^2 \log \frac{1}{|z|}.$$

Но $\partial \bar{f}_l / \partial \bar{z} = \bar{f}'_l$, $\partial f_l / \partial \bar{z} = 0$ и

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{f}'_k}{\sum |f_l|^2} - \frac{\bar{f}_k \sum f_l \bar{f}'_l}{(\sum |f_l|^2)^2} = \frac{\sum \bar{f}_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}_k \bar{f}'_l)}{(\sum |f_l|^2)^2}.$$

По (2.2)

$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} \right|^2 \leq \frac{2(\sum |f_l|^2)^2 \sum |\bar{f}'_l|^2}{(\sum |\bar{f}'_l|^2)^4} \leq 2\delta^{-4} \sum |\bar{f}'_l|^2,$$

$$|G_{jk}|^2 \leq 2\delta^{-6} \sum |\bar{f}'_l|^2.$$

По теореме VI.3.4 $d\lambda_l = |\bar{f}'_l|^2 \log(1/|z|) dx dy$ — мера Карлесона с постоянной $N(\lambda_l) \leq C \|f_l\|_\infty^2$. Значит, мера

$$|G_{jk}|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy$$

— мера Карлесона, и условие (1.5) выполняется с $B_1 \leq Cn\delta^{-6}$.

Далее, так как $\frac{\partial \bar{f}_l}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}_l}{\partial \bar{z}} = 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} + \varphi_j \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z \partial \bar{z}} = \\ &= \left(\frac{-\bar{f}'_j \sum \bar{f}_l \bar{f}'_l}{(\sum |f_l|^2)^2} \right) \left(\frac{\sum \bar{f}_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}_k \bar{f}'_l)}{(\sum |f_l|^2)^2} \right) + \\ &+ \frac{\bar{f}_j}{\sum |f_l|^2} \left(\frac{\sum \bar{f}'_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}_k \bar{f}'_l)}{(\sum |f_l|^2)^2} - \frac{2(\sum \bar{f}'_l \bar{f}_l) \sum \bar{f}_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}_k \bar{f}'_l)}{(\sum |f_l|^2)^3} \right). \end{aligned}$$

Все члены выглядят более или менее одинаково, и мы получаем

$$\left| \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} \right| \leq C \frac{\sum |\bar{f}'_p| |\bar{f}'_q|}{(\sum |f_l|^2)^2} \leq Cn\delta^{-4} \sum |\bar{f}'_l|^2.$$

Снова применяя теорему VI.3.4, мы получим (2.6) с $B_2 \leq Cn\delta^{-4}$. В силу теоремы 1.2 решения с оценкой (2.10) существуют, и

$C_2(n, \delta) \leq Cn^{1/2}\delta^{-3} + Cn\delta^{-4}$. Это дает оценку (2.4) с $C(n, \delta) \leq C(n^{3/2}\delta^{-3} + n^2\delta^{-4})$. $\square$

Если повторить все доказательство, заменив теорему VI.3.4 на следующую лемму, то мы получим более точную оценку

$$C(n, \delta) \leq C(n^{3/2}\delta^{-2} + n^2\delta^{-3})$$

для постоянной из (2.4). Эта лемма используется и в теореме 2.3 ниже.

Лемма 2.2. Если $f \in H^2$ и $f(e^{i\theta}) \in \text{ВМО}$, то

$$\frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} \log \frac{1}{|z|} dx dy$$

— мера Карлесона в D , карлесона норма которой не превосходит $K\|f\|_*$, где K — абсолютная постоянная.

Доказательство. Мы можем считать, что $f(z)$ аналитична на $\bar{D}$. Тогда $f(z)$ имеет конечное число нулей $z_1, \dots, z_N \neq 0$ в D . При $f(z) \neq 0$

$$\Delta(|f(z)|) = |f'(z)|^2 / |f(z)|.$$

Пусть Ω_ε при малом $\varepsilon > 0$ — это область

$$D \setminus \bigcup_{j=0}^N \Delta_j,$$

где $\Delta_0 = \{|z| < \varepsilon\}$, $\Delta_j = \{|z - z_j| < \varepsilon\}$, $j = 1, 2, \dots, N$. По формуле Грина (см. разд. VI.3)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} \log \frac{1}{|z|} dx dy &= \int |f(e^{i\theta})| d\theta - \\ &- \sum_{j=0}^N \int_{\partial\Delta_j} \left(\frac{\partial|f|}{\partial n} \log \frac{1}{|z|} - |f| \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|z|} \right) ds, \end{aligned}$$

где $\partial/\partial n$ означает производную в направлении внешней нормали к $\partial\Delta_j$. Устремим ε к нулю. При $j > 0$ подынтегральные выражения остаются ограниченными, а длины $\partial\Delta_j$ стремятся к 0. При $j = 0$ мы получаем

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |f(\varepsilon e^{i\theta})| d\theta = -2\pi |f(0)|.$$

В точках z_j функция $|f'(z)|^2 / |f(z)|$ имеет особенность не сильнее $O(|z - z_j|^{-1})$, и интеграл по площади сходится. Стало быть, мы получаем

$$\begin{aligned} (2.11) \quad \iint_D \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} \log \frac{1}{|z|} dx dy &\leq \int |f(e^{i\theta})| d\theta - 2\pi |f(0)| \leq \\ &\leq \int |f(e^{i\theta}) - f(0)| d\theta. \end{aligned}$$

Теперь наша лемма не что иное, как конформно-инвариантная формулировка оценки (2.11). Положим

$$S = \{re^{i\theta}: 1-h \leq r < 1, |\theta - \theta_0| \leq h\}.$$

В силу (2.11) мы можем считать, что $h < 1/2$. Возьмем $z_0 = (1-h)e^{i\theta_0}$ и $w = (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$. При $z \in S$

$$\frac{|1 - \bar{z}_0 z|^2}{1 - |z_0|^2} \leq ch,$$

так что по формуле (1.5) гл. I

$$\log \frac{1}{|z|} \leq c(1 - |z|^2) = c \frac{(1 - |w|^2)|1 - \bar{z}_0 z|^2}{1 - |z_0|^2} \leq ch(1 - |w|^2) \leq ch \log \frac{1}{|w|}.$$

Поскольку $|f'(z)|^2 dx dy = |g'(w)|^2 du dv$, $g(w) = f(z)$, $w = u + iv$, то

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} \log \frac{1}{|z|} dx dy &\leq ch \iint_D \frac{|g'(w)|^2}{|g(w)|} \log \frac{1}{|w|} dx dy \leq \\ &\leq 2\pi ch \int |g - g(0)| d\theta \leq c \|f\|_* h. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть теперь $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$, а функция $g(z) \in H^\infty$ такова, что

$$(2.12) \quad |g(z)| \leq |f_1(z)| + \dots + |f_n(z)|.$$

В свете теоремы о короне естественно спросить, лежит ли g в идеале $J(f_1, \dots, f_n)$, порожденном функциями $f_1, \dots, f_n$, т. е. возможно ли представление

$$g = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n$$

с $g_j \in H^\infty$, $1 \leq j \leq n$? К сожалению, ответ здесь отрицательный (см. упр. 3). Однако Т. Волф доказал, что $g^3 \in J(f_1, \dots, f_n)$. Вопрос о g^2 остается неразрешенным (см. упр. 4)¹⁾.

Теорема 2.3. Пусть для функций $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ выполняется условие (2.12). Тогда существуют функции $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$, для которых

$$(2.13) \quad g^3 = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n.$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 2.1, мы превратим гладкие решения (2.13) в аналитические, используя теорему 1.2 для контроля за нормами поправок. Предположим,

¹⁾ Обозначим через $(2.12)_\alpha$ неравенство, полученное из (2.12) после замены $|g(z)|$ на $|g(z)|^\alpha$. Тогда $(2.12)_\alpha \Rightarrow g \in J(f_1, \dots, f_n)$ при $\alpha \in (0, 1/2)$. Если $\alpha > 1/2$, то это уже неверно (Толоконников [1981*], Утияма [1981*]; об этой импликации при $\alpha = 1/2$ см. Шамоян [1981*], при $\alpha = 1$ — Толоконников [1983*]. — Прим. ред.

что $\|f_j\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$. Согласно теории нормальных семейств, мы можем считать функции g и $f_1, \dots, f_n$ аналитическими на $\bar{D}$, потому что мы намерены получить априорные оценки для g_j . Положим

$$\psi_j = g \bar{f}_j / \sum |f_l|^2 = g \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда $|\psi_j| \leq 1$, $\psi_j \in C^\infty(\bar{D})$ (рассмотрите степенные ряды в общих нулях функций $f_1, \dots, f_n$) и

$$\psi_1 f_1 + \dots + \psi_n f_n = g.$$

Предположим, что найдены решения уравнений

$$(2.14) \quad \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{z}} = g \psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} = g^3 G_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

с оценкой

$$(2.15) \quad |b_{jk}| \leq M.$$

Тогда для функций

$$g_j = g^2 \psi_j + \sum_{k=1}^n (b_{jk} - b_{kj}) f_k$$

имеем

$$\sum g_j f_j = g^2 \sum \psi_j f_j = g^3$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} &= g^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} + \sum_{k=1}^n g f_k \left(\psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} - \psi_k \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} \right) = \\ &= g^2 \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} - g \left(\sum f_k \psi_k \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}} + g \psi_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sum f_k \psi_k = 0. \end{aligned}$$

Далее, $|g_j| \leq 1 + 2Mn$, и поэтому $g_j \in H^\infty$.

Оглядываясь на доказательство теоремы 2.1, мы видим, что

$$|g^3 G_{jk}|^2 \leq \frac{|g|^6 |\bar{f}_j|^2}{(\sum |f_l|^2)^2} \frac{|\sum f_l (\bar{f}'_l \bar{f}_k - \bar{f}_l \bar{f}'_k)|^2}{(\sum |f_l|^2)^4} \leq (\sum |f'_l|^2),$$

так что $|g^3 G_{jk}|^2 \log(1/|z|) (dx dy - \text{мера Карлесона})$. Далее,

$$\frac{\partial}{\partial z} (g^3 G_{jk}) = 3g^2 g' G_{jk} + g^3 \frac{\partial G_{jk}}{\partial z}$$

и, согласно вычислениям из доказательства теоремы 2.1,

$$\begin{aligned} |g^2 g' G_{jk}| &\leq \frac{|g^2| |g'| |\bar{f}_j|}{\sum |f_l|^2} \frac{|\sum \bar{f}_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}_k \bar{f}'_l)|}{(\sum |f_l|^2)^2} \leq \\ &\leq \frac{C(|g'|^2 + \sum |f'_l|^2)}{(\sum |f_l|^2)^{3/2}} \leq C \frac{|g'|^2}{|g|} + C \sum \frac{|f'_l|^2}{|f_l|}, \\ \left| g^3 \frac{\partial G_{jk}}{\partial z} \right| &\leq \frac{C |g|^3 \sum_{p,q} |f'_p| |f'_q|}{(\sum |f_l|^2)^2} \leq C n \sum \frac{|f'_l|^2}{|f_l|}. \end{aligned}$$

Значит, по лемме 2.2 $\left| \frac{\partial}{\partial z} (g^3 G_{jk}) \right| \log(1/|z|) dx dy$ — мера Карлесона с постоянной, зависящей только от n , и по теореме 1.2 уравнения (2.14) имеют решения с оценкой (2.15). $\square$

Недавно Гамелин [1981] и, независимо, Дэви улучшили доказательство Волфа и сумели даже устранить из него понятия меры Карлесона (см. упр. 5).

Между теоремой о короне и двойственностью H^1 — ВМО существует тесная связь. Теорема была сведена к нахождению таких функций b_{jk} , что

$$(2.16) \quad \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = G_{jk}, \quad |z| < 1,$$

и

$$\|b_{jk}\|_\infty = \sup_{|z|=1} |b_{jk}(z)| \leq C_2(n, \delta).$$

Пусть

$$(2.17) \quad F_{jk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|<1} G_{jk}(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

— то решение (2.16), которое дает интегральная формула (1.2). Произвольное решение имеет вид $b_{jk} = F_{jk} - h_{jk}$, $h_{jk} \in H^\infty$, и по следствию VI.4.6

$$\begin{aligned} c_1 \|F_{jk} - i\tilde{F}_{jk}\|_* &\leq \inf \{ \|b_{jk}\|_\infty : b_{jk} \text{ удовлетворяет (2.16)} \} \leq \\ &\leq c_2 \|F_{jk} - i\tilde{F}_{jk}\|_*, \end{aligned}$$

где $\tilde{F}_{jk}$ — функция, сопряженная с F_{jk} , а c_1, c_2 — постоянные. Ввиду (2.17) функция F_{jk} аналитична при $|z| > 1$, и поэтому $\tilde{F}_{jk} \in H^\infty$ (рассматриваем $\tilde{F}_{jk}$ как функцию только на окружности $\{|z| = 1\}$). Снова по (2.17) $\int F_{jk} d\theta = 0$. Значит, $\tilde{F}_{jk} = iF_{jk}$, и минимальная норма решений (2.16) сравнима с $2\|F_{jk}\|_*$. Если функции φ_j определить формулами (2.5), то доказательства теорем 2.1 и 1.2 показывают, что нормы $\|F_{jk}\|_*$ ограничены. Мы увидим ниже, что при подходящем выборе φ_j меры

$|G_{jk}|dx dy$ будут мерами Карлесона, и в таком случае можно непосредственно проверить, что $\|F_{jk}\|_* \leq C(n, \delta)$.

Задача о короне равносильна задаче о нахождении оценок для решений уравнений типа (2.16). Чтобы это доказать, рассмотрим случай двух функций f_1, f_2 , которые аналитичны в окрестности замкнутого круга $\bar{D}$,

$$\max(|f_1(z)|, |f_2(z)|) > \delta > 0, \quad |z| \leq 1, \quad \|f_1\| \leq 1, \quad \|f_2\| \leq 1.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty$ таковы, что

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 = 1 \quad \|\varphi_j\|_\infty \leq C_1(2, \delta), \quad j = 1, 2.$$

Если g_1 и g_2 — аналитические решения задачи о короне, то

$$g_1 = \varphi_1 + f_2 \left(\frac{\varphi_2 - g_2}{f_1} \right), \quad g_2 = \varphi_2 - f_1 \left(\frac{g_1 - \varphi_1}{f_2} \right),$$

так как $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$.

Функция

$$R = \frac{\varphi_2 - g_2}{f_1} = \frac{g_1 - \varphi_1}{f_2}$$

допускает оценку $\|R\|_\infty \leq C_2(2, \delta)$ тогда и только тогда, когда $\|g_j\|_\infty \leq C(2, \delta)$, $j = 1, 2$. Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{f_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2}{f_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} = \\ &= \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\varphi_2}{f_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (1 - f_1 \varphi_1) = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Значит, ограниченные аналитические решения g_1, g_2 существуют тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{z}} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}}$$

имеет решение с оценкой $\|R\|_\infty \leq C_2(2, \delta)$, где φ_1, φ_2 — гладкие ограниченные решения задачи о короне.

3. Две теоремы о минимуме модуля

Пусть $u(z)$ — ограниченная комплекснозначная гармоническая функция в верхней полуплоскости. Предположим, что $\|u\|_\infty \leq 1$. Пусть Q — квадрат с основанием Q^* на оси $\{y = 0\}$. При $0 < \alpha < 1$ положим

$$E_\alpha = \{z \in Q: |u(z)| \leq \alpha\},$$

$$E_\alpha^* = \{x: x + iy \in E_\alpha \text{ при некотором } y > 0\}.$$

Ясно, что E_α^* — ортогональная проекция множества E_α на ось $\{y = 0\}$. Через $T(Q)$ будем обозначать верхнюю половину квадрата Q . Выберем $\beta > 0$ и предположим, что $|u(z_0)| > \beta$ при некотором $z_0 \in T(Q)$ (см. рис. VIII.1). Если $1 - \beta$ достаточно

мало, то в силу интегрального представления Пуассона из оценки $\|u\|_\infty \leq 1$ следует, что при $t \in Q^*$ величина $|u(t) - u(z_0)|$ может быть велика только на множестве малой меры. Это значит, что отношение $|E_\alpha^*|/|Q^*|$ мало. Это рассуждение уточняется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть функция $u(z)$ гармонична в верхней полуплоскости и $\|u\|_\infty \leq 1$. При $0 < \alpha < 1$, $0 < \varepsilon < 1$, существует

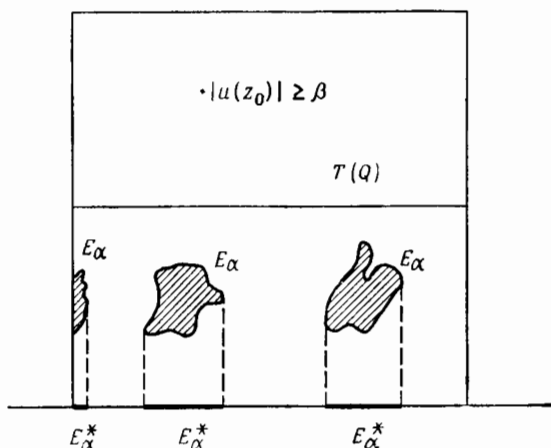


Рис. VIII. 1. Ситуация из теоремы 3.1.

число $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon)$, $0 < \beta < 1$, со следующим свойством: если Q — квадрат с основанием Q^* на оси $\{y = 0\}$ и стороной $\ell(Q) = |Q^*|$, в котором $\sup_{T(Q)} |u| \geq \beta$, то

$$(3.1) \quad |E_\alpha^*| \leq \varepsilon \ell(Q).$$

Доказательство. Вертикальная максимальная функция

$$u^+(x) = \sup |u(x, y)|$$

для гармонической в верхней полуплоскости функции $u(z)$ — подходящее средство для нашего доказательства.

Мы можем считать, что $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$; пусть $z_0 \in T(Q)$ и $|u(z_0)| \geq \beta$. Тогда

$$(3.2) \quad \left(\int |u(t) - u(z_0)| P_{z_0}(t) dt \right)^2 \leq \int |u(t) - u(z_0)|^2 P_{z_0}(t) dt = \\ = \int |u(t)|^2 P_{z_0}(t) dt - |u(z_0)|^2 \leq 1 - \beta^2.$$

Пусть $I = [-1, 2] = 3Q^*$ и $f(t) = (u(t) - u(z_0))\chi_I(t)$. На I мы имеем $|P_{z_0}| \geq c_1$, и по (3.2) $\|f\|_1 \leq c_1^{-1}(1 - \beta^2)^{1/2}$. Но $P_z(t)/P_{z_0}(t) \leq c_2$ при $z \in Q$ и $t \notin I$, и, значит, при $z \in E_\alpha \subset Q$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \int f(t) P_z(t) dt \right| \geq \\ &\geq \left| \int (u(t) - u(z_0)) P_z(t) dt \right| - \int_{\mathbb{R} \setminus I} |u(t) - u(z_0)| P_z(t) dt \geq \\ &\geq (\beta - \alpha) - c_2 \int_{\mathbb{R} \setminus I} |u(t) - u(z_0)| P_{z_0}(t) dt \geq \\ &\geq (\beta - \alpha) - c_2(1 - \beta^2)^{1/2} = \gamma \end{aligned}$$

снова в силу (3.2). При данном α можно выбрать настолько близкое к 1 значение β , что $\gamma > 0$. Тогда $E_\alpha^* \subset \{t: f^+(t) > \gamma\}$, и оценка слабого типа для f^+ дает

$$|E_\alpha^*| \leq C c_1^{-1} (1 - \beta^2)^{1/2} / \gamma.$$

При достаточно малом $1 - \beta$ мы заключаем, что $|E_\alpha^*| < \varepsilon$. $\square$

В теореме 3.1 β обязательно должно быть велико. Например, если $u(t) = 1 - \chi_I(t)$, $I = [0, 1]$, то $E_\alpha^* = I$ при всех $\alpha > 0$, в то время как для единичного квадрата Q имеем $\sup_{T(Q)} |u(z)| > 1/2$.

Значит, мы обязаны взять $\beta > 1/2$ независимо от малости α . Однако если заменить гармоническую функцию ограниченной аналитической функцией $f(z)$, то субгармоничность $\log |f(z)|$ позволяет зафиксировать произвольное $\beta > 0$ и найти такое $\alpha = \alpha(\beta) > 0$, что (3.1) останется в силе.

Теорема 3.2. Пусть $f(z)$ — ограниченная аналитическая функция в верхней полуплоскости и $\|f\|_\infty \leq 1$. Для любых β и ε , $0 < \beta < 1$, $0 < \varepsilon < 1$, существует такое $\alpha = \alpha(\beta, \varepsilon)$, $0 < \alpha < 1$, что для всякого квадрата Q с основанием на оси $\{y = 0\}$, в котором $\sup_{T(Q)} |f(z)| \geq \beta$, справедлива оценка

$$|E_\alpha^*| < \varepsilon \ell(Q),$$

где E_α^* — проекция на ось $\{y = 0\}$ множества $E_\alpha = \{z \in Q: |f(z)| \leq \alpha\}$.

Доказательство. Снова предположим, что $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$, и пусть $f = Bg$, где B — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$, а функция $g(z)$ не имеет нулей и $\|g\|_\infty \leq 1$. Тогда $E_\alpha \subset F_\alpha \cup G_\alpha$, где

$$F_\alpha = \{z \in Q: |B(z)| \leq \sqrt{\alpha}\}, \quad G_\alpha = \{z \in Q: |g(z)| \leq \sqrt{\alpha}\}.$$

Ясно, что $E_a^* \subset F_a^* \cup G_a^*$; мы оценим $|F_a^*|$ и $|G_a^*|$ по отдельности.

Для оценки $|G_a^*|$ применим теорему 3.1 к функции $u(z) = g(z)^p$, где $p > 0$ будет определено ниже. Выберем $\alpha_1 > 0$, и пусть $\beta_1 = \beta(\alpha_1, \varepsilon/3)$ определяется по теореме 3.1. Если теперь определить $p > 0$ условием $\beta^p = \beta_1$, а α — условием $\alpha^{p/2} = \alpha_1$, то $|G_a^*| < \varepsilon/3$ в силу (3.1).

Оценка $|F_a^*|$ опирается на тот факт, что $|B(z_0)| > \beta$ при некотором $z_0 = x_0 + iy_0 \in T(Q)$. По лемме VII.1.2

$$(3.3) \quad \sum \frac{4y_0 y_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \leq 2 \log \frac{1}{\beta}.$$

Положим $S = \{z_j: \text{dist}(z_j, Q) < 1\}$. Тогда $|z_0 - \bar{z}_j|^2/4y_0 \leq 7$ при $z_j \in S$ и, значит,

$$(3.4) \quad \sum_{z_j \in S} y_j \leq 14 \log \frac{1}{\beta}.$$

Рассмотрим кружки

$$\Delta_j = \left\{ z: |z - z_j| < \frac{\varepsilon}{6} \left(14 \log \frac{1}{\beta} \right)^{-1} y_j \right\}.$$

При достаточно малом ε можно предполагать, что $F_a \cap \Delta_j = \emptyset$ для $z_j \notin S$, так что $F_a \setminus \bigcup \Delta_j = F_a \setminus \bigcup_S \Delta_j$. По (3.4) имеем

$$\sum_{z_j \in S} |\Delta_j^*| < \varepsilon/3,$$

и поэтому нам осталось оценить меру проекции $F_a \setminus \bigcup \Delta_j$. Но при $z \in F_a \setminus \bigcup \Delta_j$ по той же лемме VII.1.2

$$\log \frac{1}{\alpha} \leq \log \frac{1}{|B(z)|^2} \leq c(\varepsilon, \beta) \sum \frac{4y y_j}{|z - \bar{z}_j|^2}.$$

Главный вклад в эту сумму вносят $z_j \in S$, потому что при $z_j \notin S$ (т. е. при $\text{dist}(z_j, Q) > 1$)

$$\sup_{z \in Q} \frac{y y_j}{|z - \bar{z}_j|^2} \leq c_1 \frac{y_0 y_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}$$

и в силу (3.3)

$$\sup_{z \in Q} \sum_{z_j \in S} \frac{4y y_j}{|z - \bar{z}_j|^2} \leq c_1 \sum \frac{4y_0 y_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \leq 2c_1 \log \frac{1}{\beta}.$$

Выбирая достаточно малое $\alpha < \alpha_0(\beta, \varepsilon)$, мы заключаем, что

$$(3.5) \quad \frac{2}{c(\varepsilon, \beta)} \log \frac{1}{\alpha} \leq \sum_{z_j \in S} \frac{4y y_j}{|z - \bar{z}_j|^2}, \quad z \in F_a \setminus \bigcup \Delta_j.$$

Неравенство (3.5) позволяет нам оценить $|(F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j)^*|$ через максимальную функцию, как в теореме 3.1. Рассмотрим положительную дискретную меру $\mu = \sum_{z_j \in S} 4y_j \delta_{z_j}$. Согласно (3.5),

$$(3.6) \quad \int \frac{y}{|z - \bar{\xi}|^2} d\mu(\xi) \geq \frac{2}{c(\varepsilon, \beta)} \log \frac{1}{\alpha}, \quad z \in F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j.$$

Но, с другой стороны, (3.4) дает

$$\int d\mu \leq 56 \log \frac{1}{\beta}.$$

Если спроектировать меру μ на ось $\{y = 0\}$, то интеграл в (3.6) только увеличится, и мы получим положительную меру σ на $\mathbb{R}$, у которой $\int d\sigma \leq 56 \log(1/\beta)$ и

$$\int P_z(t) d\sigma(t) \geq \frac{2}{\pi c(\varepsilon, \beta)} \log 1/\alpha, \quad z \in F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j.$$

Следовательно,

$$(F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j)^* \subset \{x: M(d\sigma)(x) > (2/\pi c(\varepsilon, \beta)) \log 1/\alpha\},$$

где $M(d\sigma)$ — максимальная функция Харди — Литтлвуда для меры σ . Оценка слабого типа для $M(d\sigma)$ дает

$$|(F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j)^*| \leq \frac{C\pi c(\varepsilon, \beta)}{2} \log \frac{1}{\beta} / \log \frac{1}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3},$$

если выбрать α достаточно малым.

Итак, при достаточно малом α

$$|E_\alpha^*| \leq |G_\alpha^*| + \sum_S |\Delta_j^*| + |(F_\alpha \setminus \bigcup \Delta_j)^*| \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

4. Интерполяционные произведения Бляшке

Произведение Бляшке называется *интерполяционным*, если все его нули различны и образуют интерполяционную последовательность. Неизвестно, плотно ли в H^∞ линейное подпространство, порожденное интерполяционными произведениями Бляшке (для всех произведений Бляшке это так). Однако интерполяционные произведения Бляшке в очень сильном смысле разделяют точки верхней полуплоскости. Вот точный результат.

Теорема 4.1. Пусть $u(z)$ — ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости и $|u(t)| = 1$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Пусть $\delta > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда существуют такое число $\beta = \beta(\alpha)$, $0 < \beta < 1$, и такое интерполяционное произведение Бляшке $B(z)$, что

$$(4.1) \quad |B(z)| \leq \delta \text{ при } |u(z)| \leq \alpha$$

и

$$(4.2) \quad |u(z)| \leq \beta \text{ при } B(z) = 0.$$

Далее, если $B(z)$ имеет нули $\{z_k\}$, то

$$(4.3) \quad \delta(B) = \inf_n \prod_{k, k \neq n} \left| \frac{z_n - z_k}{z_n - \bar{z}_k} \right| \geq \delta_0(\alpha, \beta, \delta) > 0.$$

Теорема 4.1 может показаться читателю чересчур специальной. Мы поместили ее здесь по двум причинам. Во-первых, она будет существенным этапом в описании всех замкнутых подалгебр алгебры L^∞ , содержащих H^∞ , в следующей главе. Вторая причина — педагогическая. Доказательство этой теоремы использует теорему 3.1 и поколения, введенные в предыдущей главе, и является упрощенным вариантом первоначальной конструкции Карлесона.

Прежде чем доказывать теорему 4.1, мы применим ее, чтобы получить принадлежащее Зискинду уточнение ньюменовской характеристики границы Шилова алгебры H^∞ (см. теорему V. 2.2).

Теорема 4.2. *Комплексный гомоморфизм t алгебры H^∞ принадлежит ее границе Шилова тогда и только тогда, когда $|t(B)| = 1$ для любого интерполяционного произведения Бляшке $B(z)$.*

Доказательство. По теореме Ньюмена $|t(B)| = 1$ для всех t из границы Шилова и любого произведения Бляшке. Поэтому нужно только доказать обратное.

Если t не принадлежит границе Шилова, то по теореме Ньюмена найдется такое произведение Бляшке $B_0(z)$, что $t(B_0) = 0$. Применяя теорему 4.1 к $u(z) = B_0(z)$ и $\alpha = \delta = 1/2$, мы получим интерполяционное произведение Бляшке $B(z)$, для которого $|B(z)| \leq 1/2$ при $|B_0(z)| \leq 1/2$. По теореме о короне найдется (обобщенная) последовательность точек $\{z_j\}$ верхней полуплоскости, сходящаяся к t в топологии пространства $\mathfrak{M}$, т. е.

$$\lim_j f(z_j) = m(f), \quad f \in H^\infty.$$

Однако $t(B_0) = 0$, а значит, $|B_0(z_j)| \leq 1/2$ для достаточно далеких значений j . Но тогда и $|B(z_j)| \leq 1/2$, и $|m(B)| = \lim_j |B(z_j)| \leq 1/2$. □

Для некоторых точек $t \in \mathfrak{M}$, не лежащих в границе Шилова, может и не найтись такого интерполяционного произведения Бляшке $B(z)$, что $t(B) = 0$. Это одно из загадочных свойств пространства максимальных идеалов, которыми мы займемся позднее (см. упр. X. 2(c)).

Доказательство теоремы 4.1. Пусть Q — замкнутый квадрат с основанием на оси $\{y = 0\}$ и, как и выше, $T(Q)$ —

его верхняя половина. Простое сравнение ядер Пуассона показывает, что при подходящем $\alpha' = \alpha'(\alpha) < 1$ для любой гармонической в верхней полуплоскости функции $u(z)$, такой, что $|u(z)| \leq 1$,

$$(4.4) \quad \inf_{T(Q)} |u(z)| < \alpha \Rightarrow \sup_{T(Q)} |u(z)| < \alpha'.$$

Это значение $\alpha'(\alpha)$ не зависит ни от функции $u(z)$, ни от квадрата Q , потому что (4.4) конформно-инвариантно. Поло-

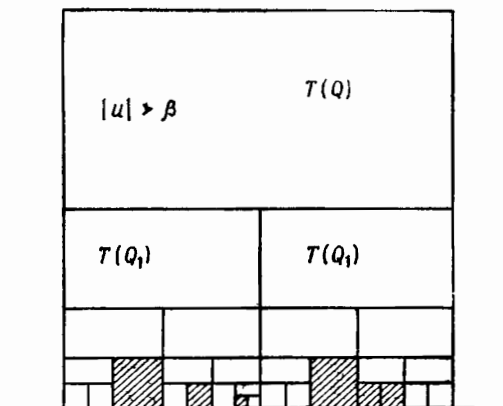


Рис. VIII.2. Случай I: шесть заштрихованных квадратов образуют $G_1(Q)$. Это красные квадраты.

жим $\beta = \beta(\alpha', 1/2)$, так что заключение теоремы 3.1 справедливо для α' и $\varepsilon = 1/2$.

При $n = 1, 2, \dots$ образуем 2^n замкнутых квадратов Q_n с непересекающимися внутренностями, со стороной $\ell(Q_n) = 2^{-n} \ell(Q)$, которые лежат в Q и имеют основания на оси $\{y = 0\}$. Их основания Q_n^* дают разбиение Q^* . Для специальных квадратов Q_n мы отметим некоторые подквадраты Q_n с помощью моментов остановки. Будем различать два случая.

Случай I. $\sup_{T(Q)} |u(z)| \geq \beta$.

Определим первое поколение $G_1(Q)$ как множество тех $Q_j \subset Q$, в которых $\sup_{T(Q_j)} |u(z)| < \alpha'$ и которые максимальны по

отношению к этому свойству. Назовем эти квадраты Q_j красными. См. рис. VIII.2. Внутренности квадратов из $G_1(Q)$ не пересекаются. По теореме 3.1 ввиду нашего выбора β

$$(4.5) \quad \sum_{Q_1(Q)} \ell(Q_j) \leq \frac{1}{2} \ell(Q).$$

Согласно (4.4),

$$\{z \in Q: |u(z)| < \alpha\} \subset \bigcup_{G_1(Q)} Q_j.$$

Случай II. $\sup_{T(Q)} |u(z)| < \beta$.

В таком случае первое поколение $G_1(Q)$ состоит из тех $Q_j \subset Q$, в которых $\sup_{T(Q_j)} |u(z)| \geq \beta$ и которые максимальны по отношению к этому свойству. Назовем их синими квадратами.

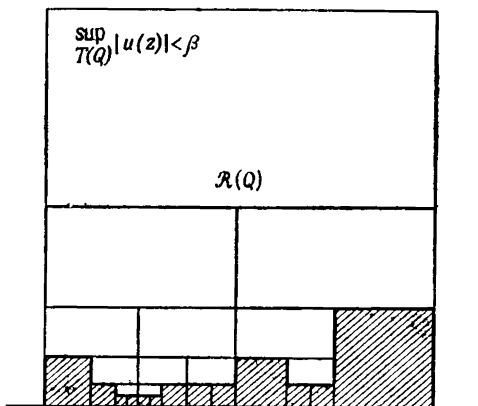


Рис. VIII.3. Случай II: заштрихованные квадраты образуют $G_1(Q)$. Это синие квадраты. В области $\mathcal{R}(Q)$ над синими квадратами $|u(z)| < \beta$.

См. рис. VIII.3. Их внутренности не пересекаются. Положим

$$\mathcal{R}(Q) = (\text{int } Q) \setminus \bigcup_{G_1(Q)} Q_j.$$

Область $\mathcal{R}(Q)$ имеет спрямляемую границу и

$$(4.6) \quad \ell(\partial \mathcal{R}(Q)) \leq 6\ell(Q),$$

где $\ell(\partial \mathcal{R})$ — длина $\partial \mathcal{R}$. В области $\mathcal{R}(Q)$ имеем $|u(z)| < \beta$. Поскольку $u(z)$ почти всюду имеет некасательные пределы с абсолютной величиной 1, а $\beta < 1$, то

$$(4.7) \quad |\partial \mathcal{R}(Q) \cap \{y = 0\}| = 0.$$

Начнем с единичного квадрата Q^0 . Применив случай I или II, получим первое поколение $G_1 = \{Q_1^1, Q_2^1, \dots\}$. К каждому квадрату Q_j^1 мы снова применим случай I или II и получим новое семейство поколений $G_1(Q_j^1)$. Определим теперь второе поколение $G_2(Q) = \bigcup \{G_1(Q_j^1): Q_j^1 \in G_1\} = \{Q_1^2, Q_2^2, \dots\}$. Повторяя этот процесс, мы по индукции получим поколения $G_p = \{Q_1^p, Q_2^p, \dots\}$. Поскольку $\alpha' \leq \beta$, случаи I и II будут чере-

доваться при смене поколений, а все квадраты одного поколения подпадают под один и тот же случай. Иными словами, поколения поочередно состоят только из красных и только из синих квадратов, и следующее поколение состоит целиком из квадратов другого цвета. По построению

$$(4.8) \quad \{z \in Q^0: |u(z)| < \alpha\} \subset \bigcup_{\text{Случай II}} \mathcal{R}(Q_j^p) \subset \{z \in Q^0: |u(z)| < \beta\}.$$

Положим

$$\Gamma = Q^0 \cap \bigcup_{\text{Случай II}} \partial \mathcal{R}(Q_j^p).$$

Вот два важных свойства этой конструкции:

- (а) *длина дуги на Γ есть мера Карлесона и*
 (б) *если $B(z)$ — ограниченная гармоническая функция в полуплоскости и $|B(z)| \leq \delta$ на Γ , то $|B(z)| \leq \delta$ в области*

$$\bigcup_{\text{Случай II}} \mathcal{R}(Q_j^p).$$

Чтобы доказать (а), достаточно проверить, что $\ell(\Gamma \cap Q) \leq C\ell(Q)$ для любого квадрата $Q = Q_n$ из разбиения Q^0 , потому что произвольный квадрат $Q \subset Q^0$ можно покрыть двумя такими Q_n с $\ell(Q_n) \leq 2\ell(Q)$. Итак, пусть $Q = Q_n$ и p — наименьший номер, при котором Q содержит квадраты из поколения G_p . Согласно (4.5) и (4.6), вклад квадратов из $G_p \cup G_{p+1} \cup \dots$ в длину $\Gamma \cap Q$ не превышает

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6\ell(Q)}{2^k} = 12\ell(Q).$$

Оставшуюся часть $\Gamma \cap Q$ доставляет одно из поколений G_{p-1} или G_{p-2} , и их вклад не превышает $6\ell(Q)$. Итак, $\ell(\Gamma \cap Q) \leq 18\ell(Q)$ и (а) доказано.

Для доказательства (б) достаточно рассмотреть одно множество $\mathcal{R}(Q)$ и показать, что $|B(z)| \leq \delta$ в $\mathcal{R}(Q)$, если $|B(z)| \leq \delta$ на $\partial \mathcal{R}(Q) \cap \{y > 0\}$. Это следует из (4.7) и рассуждения Фрагмена — Линделёфа, которое мы сейчас напомним. Ввиду (4.7) существуют такие положительные гармонические функции $V_n(z)$ в верхней полуплоскости, что

$$\lim_{z \rightarrow t} V_n(t) = +\infty, \quad t \in \mathbb{R} \cap \partial \mathcal{R}(Q),$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(z) = 0, \quad z \in \mathcal{H}$$

(см. упр. 1.10). Тогда при $\zeta \in \partial \mathcal{R}(Q)$

$$\overline{\lim}_{\mathcal{R}(Q) \ni z \rightarrow \zeta} |B(z) + V_n(z)| \leq \delta + \lim_{\mathcal{R}(Q) \ni z \rightarrow \zeta} V_n(z).$$

В самом деле, при $\operatorname{Im} \xi > 0$ это следует из непрерывности $B(z) + V_n(z)$, а при $\operatorname{Im} \xi = 0$ это очевидно, так как $\lim_{z \rightarrow \xi} V_n(z) = +\infty$. По принципу максимума для субгармонических функций

$$|B(z) + V_n(z)| \leq \delta + V_n(z), \quad z \in \mathcal{R}(Q);$$

устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем (b).

Теперь уже нетрудно построить интерполяционное произведение Бляшке $B(z)$. Сначала построим интерполяционное произведение Бляшке $B_1(z)$, для которого (4.1) и (4.2) выполня-

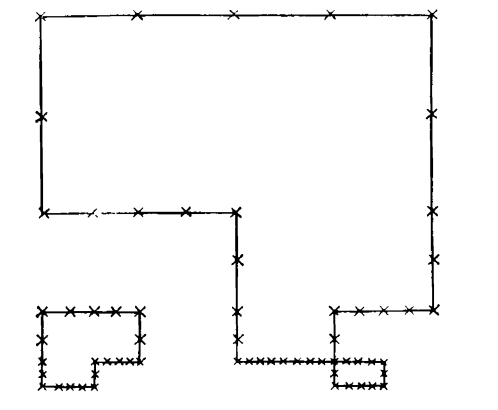


Рис. VIII. 4. Нули $B_1(z)$ при $N = 2$. Показаны три области $\mathcal{R}(Q)$.

ются только в точках единичного квадрата Q^0 . Пусть $\{Q_n\}$ — всевозможные квадраты из разбиений Q^0 , включая сам квадрат Q^0 . Выберем точки $\{z_j\}$ на $\bigcup \partial T(Q_n)$ таким образом, чтобы

$$(4.9) \quad \inf_j \rho(z_j, z) < \delta, \quad z \in \bigcup \partial T(Q_n),$$

и

$$(4.10) \quad \rho(z_j, z_k) \geq \eta > 0, \quad j \neq k.$$

Для этого отметим на каждом контуре $\partial T(Q_n)$ равноотстоящие точки на расстоянии $2^{-N} \ell(Q_n)$ друг от друга, включая углы квадрата Q_n . Пусть $\{z_j\}$ — множество всех отмеченных точек во всех квадратах. Тогда (4.10), очевидно, справедливо, а при достаточно большом $N = N(\delta)$ будет справедливо и (4.9). Мы определим $B_1(z)$ как произведение Бляшке с нулями $\{z_j: z_j \in \Gamma\}$ (см. рис. VIII. 4).

В силу (4.10) и условия (a) нули $B_1(z)$ удовлетворяют геометрическому условию (c) из теоремы VII.1.1. Значит, последовательность нулей $B_1(z)$ интерполяционная, и, поскольку все оценки зависят только от α , β и δ , для $B_1(z)$ выполняется условие (4.3). Согласно (4.8), (4.9) и условию (b), мы имеем

$|B_1(z)| < \delta$, если $z \in Q^0$ и $|u(z)| \leq \alpha$. Согласно (4.8), нули функции $B_1(z)$ лежат в множестве $\{|u(z)| \leq \beta\}$.

Мы нашли интерполяционное произведение Бляшке $B_1(z)$, удовлетворяющее условиям (4.1) и (4.2) в точках Q^0 . Чтобы получить (4.1) и (4.2) во всей верхней полуплоскости, найдем такое интерполяционное произведение Бляшке $B_2(z)$, для которого условия (4.1) и (4.2) выполняются с заменой δ на $\delta/2$ во всех точках $z \notin Q^0$. После конформного отображения конструкция $B_2(z)$ не отличается от конструкции $B_1(z)$. Наконец, произведение $B(z) = B_1(z)B_2(z)$ всюду удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2). Оно будет интерполяционным, если $\inf_{k,j} \rho(\omega_k, z_j) > 0$

где $\{z_j\}$ — нули $B_1(z)$, а $\{\omega_k\}$ — нули $B_2(z)$. Чтобы этого добиться, выберем $\varepsilon > 0$ и устраним из произведения $B_2(z)$ все нули ω_k , у которых $\inf_j \rho(\omega_k, z_j) < \varepsilon$. Оставшееся произведение

$B = B_1 B_2$ будет интерполяционным произведением Бляшке, удовлетворяющим (4.2) и (4.3). Поскольку для исходного B_2 условие (4.1) выполнялось вне Q^0 с заменой δ на $\delta/2$, то при достаточно малом ε (4.1) будет выполняться и для нового произведения $B = B_1 B_2$. $\square$

5. Конструкция Карлесона

Теорема 5.1. Пусть $\delta > 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в D и $|f(z)| \leq 1$, то существует такая функция $\psi(z) \in C^\infty(D)$, что

$$(a) \quad 0 \leq \psi(z) \leq 1,$$

$$(b) \quad \psi(z) = 1 \quad \text{при} \quad |f(z)| \geq \delta,$$

$$(c) \quad \psi(z) = 0 \quad \text{при} \quad |f(z)| < \varepsilon = \varepsilon(\delta),$$

$$(d) \quad \iint_S |\partial \psi / \partial \bar{z}| dx dy \leq A(\delta) \ell$$

для любого сектора

$$S = \{z = re^{i\theta} : \theta_0 < \theta < \theta_0 + \ell, 1 - \ell < r < 1\}.$$

Постоянные $\varepsilon(\delta) > 0$ и $A(\delta)$ зависят только от δ .

Отметим, что теорема 2.1 сразу следует из этого результата. Пусть $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ таковы, что $\|f_j\|_\infty \leq 1$ и

$$\max_j |f_j(z)| \geq \delta > 0, \quad z \in D.$$

Теорема 5.1 дает нам при этом δ свою функцию $\psi_j(z)$ для каждой функции $f_j(z)$. Положим $\varphi_j = \psi_j / f_j \sum \psi_l$. Тогда $|\varphi_j(z)| \leq \leq 1/\varepsilon$, $z \in D$, и $\varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_n f_n = 1$. Чтобы заменить φ_j функциями из H^∞ , нужно найти ограниченные решения уравнений

$$(5.1) \quad \frac{\partial b_{jk}}{\partial \bar{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Но поскольку

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} = \sum \left(\psi_l \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} - \psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial \bar{z}} \right) / f_k \left(\sum \psi_l \right)^2,$$

то условие (d) и теорема 1.1 гарантируют существование ограниченного решения для (5.1).

Доказательство теоремы 5.1. Мы проведем построение в верхней полуплоскости и построим ψ только в единичном квадрате $Q^0 = \{0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$. Простое конформное отображение и разбиение единицы в D позволяют построить ψ и в круге.

Для каждого диадического квадрата $Q = \{j2^{-k} \leq x \leq (j+1)2^{-k}, 0 < y \leq 2^{-k}\} \subset Q^0$ снова обозначим через $T(Q)$ его верхнюю половину и образуем 2^n диадических квадратов $Q_n \subset Q$ с основаниями на оси $\{y=0\}$ и стороной $\ell(Q_n) = 2^{-n-k} = 2^{-n} \ell(Q)$. Таким образом, $Q \setminus T(Q)$ есть объединение двух квадратов Q_1 .

Пусть $N = N(\delta)$ — целое положительное число. Для каждого диадического квадрата Q разобьем $T(Q)$ на 2^{2N-1} диадических квадратов S_j со стороной $\ell(S_j) = 2^{-N} \ell(Q)$, которые назовем малыми квадратами. В гиперболической метрике квадраты из разных $T(Q)$ имеют примерно одинаковые размеры. Пусть $\tilde{S}_j$ — открытый квадрат, концентрический с S_j , со стороной $\ell(\tilde{S}_j) = 3\ell(S_j)$. По лемме Шварца $N = N(\delta)$ можно выбрать таким, чтобы для каждого S_j

$$(5.2) \quad \sup_{z, w \in \tilde{S}_j} |f(z) - f(w)| \leq 6 \cdot 2^{-N} < \delta/10.$$

Еще увеличивая N , мы можем добиться, чтобы для любого квадрата Q с $\sup_{T(Q)} |f(z)| \geq \delta/2$ множество $E = \{z \in Q: |f(z)| < 2^{-N+2}\}$ имело проекцию E^* на ось $\{y=0\}$ с

$$(5.3) \quad |E^*| \leq \ell(Q)/2.$$

Это можно сделать по теореме 3.2.

Мы определим область $\mathcal{R} \subset Q^0$ как объединение некоторых из малых квадратов. Она будет обладать следующими двумя свойствами:

(i) Если $S_k \subset Q^0$ и $\inf_{S_k} |f(z)| \leq 2^{-N}$, то $S_k \subset \mathcal{R}$.

(ii) Если, с другой стороны, $S_k \subset \mathcal{R}$, то $\sup_{\tilde{S}_k} |f(z)| < \delta$.

В силу (5.2) условия (i) и (ii) совместимы. Полагая $\varepsilon = \varepsilon(\delta) = 2^{-N}$, мы видим, что контур $\partial \mathcal{R}$ отделяет множество $\{z \in Q: |f(z)| \geq \delta\}$ от $\{z \in Q: |f(z)| \leq 2^{-N} = \varepsilon\}$. Условие (5.3)

показывает, что длина дуги на $\partial\mathcal{R}$ является мерой Карлесона с постоянной $A_1(\delta)$. Это значит, что функция $\psi_0 = \chi_{Q_0 \setminus \mathcal{R}}$ имеет все нужные свойства (а) — (d), не считая гладкости. Окончательная функция ψ получается как сглаживание ψ_0 относительно гиперболической метрики¹⁾. Чтобы определить $\mathcal{R}$, мы будем различать два случая по отношению к квадрату Q из разбиения Q^0 .

Случай I. $\sup_{T(Q)} |f(z)| \geq \delta/2$.

Рассмотрим те из малых квадратов $S_j \subset Q$, в которых $\inf_{S_j} |f(z)| \leq 2^{-N}$ и которые не лежат ниже никакого другого подобного квадрата с тем же свойством. Пусть $A(Q)$ — семейство таких S_j . Согласно (5.2) и (5.3),

$$(5.4) \quad \sum_{A(Q)} \ell(S_j) \leq \frac{1}{2} \ell(Q),$$

потому что проекции S_j^* квадратов S_j имеют непересекающиеся внутренности. Рассмотрим для каждого $S_j \in A(Q)$ квадрат Q_j^1 с основанием S_j^* . Это диадические квадраты с основаниями на оси $\{y = 0\}$ и с непересекающимися внутренностями. Определим первое поколение

$$G_1(Q) = \{Q_j^1: S_j \in A(Q)\}.$$

Согласно (5.4),

$$(5.5) \quad \sum_{G_1(Q)} \ell(Q_j^1) \leq \frac{1}{2} \ell(Q).$$

Пусть, далее, $B(S_j)$ — это множество таких S_k , что

$$S_k^* \subset S_j^*, \quad \ell(S_j) \leq \inf_{S_k} y \leq \inf_{S_j} y.$$

Таким образом, $B(S_j)$ состоит из самого S_j и всех S_k , лежащих под S_j , кроме тех, которые содержатся в Q_j^1 . (Если S_j — кабина лифта на верхнем этаже, то Q_j^1 — кабина лифта на нижнем, а $B(S_j)$ — разбиение шахты лифта, за исключением нижнего этажа. См. рис. VIII.5). Заметим, что

$$(5.6) \quad \sum_{S_k \in B(S_j)} \ell(S_k) \leq 2^{2N} \ell(S_j),$$

потому что очень малые квадраты S_k , лежащие в Q_j^1 , исключены.

¹⁾ Гладкость ψ существенного значения не имеет. Это оплата за отказ от обобщенных производных. Можно работать прямо с ψ_0 , если заменить формулу Грина теоремой Коши в доказательстве теоремы 1.1.

Если $z \in Q$, то неравенство $|f(z)| \leq 2^{-N}$ возможно только при $z \in \bigcup Q_j^1$ или при $z \in S_k \in B(S_j)$, $S_j \in A(Q)$. Положим

$$\mathcal{R}(Q) = \bigcup_{S_j \in A(Q)} \{S_k \in B(S_j) : \inf_{S_k} |f(z)| \leq 2^{-N}\}.$$

Если $S_k \subset Q \setminus \bigcup Q_j^1$ и $\inf_{S_k} |f(z)| \leq 2^{-N}$, то $S_k \subset \mathcal{R}(Q)$. С другой

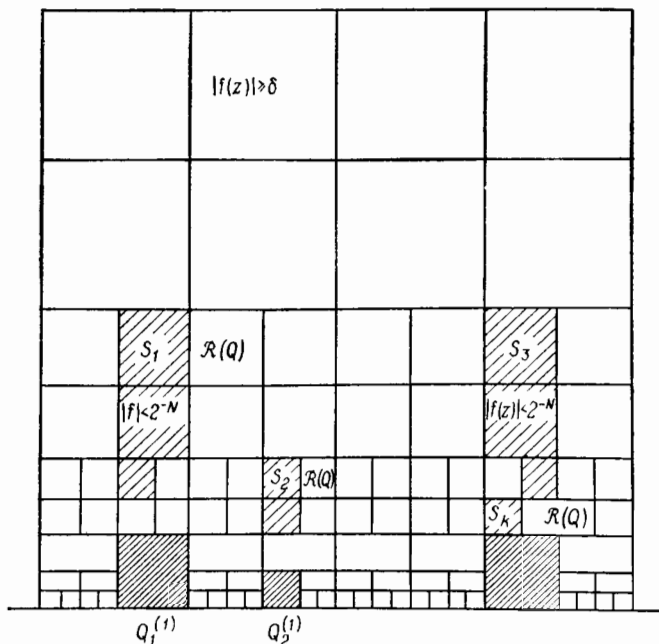


Рис. VIII. 5. Квадрат Q в случае I при $N = 2$. Первое поколение $G_1(Q)$ состоит из густо заштрихованных квадратов. Квадраты S_k из $\mathcal{R}(Q)$, где $\inf |f(z)| < 2^{-N}$, заштрихованы редко.

стороны, в силу (5.2) $\sup_{S_k} |f(z)| < \delta$ при $S_k \subset \mathcal{R}(Q)$. Таким образом (i) и (ii) выполняются для $S_k \subset Q \setminus \bigcup Q_j^1$. Согласно (5.4) и (5.6),

$$(5.7) \quad \ell(\partial \mathcal{R}(Q)) \leq 2^{2N+1} \ell(Q).$$

Случай II. $\sup_{T(Q)} |f(z)| < \delta/2$.

В этом случае первое поколение $G_1(Q)$ состоит из максимальных среди тех квадратов $Q_n \subset Q$, в которых $\sup_{Q_n} |f(z)| \geq \delta/2$.

Квадраты Q_j^1 из $G_1(Q)$ имеют попарно непересекающиеся внутренности. Положим

$$\mathcal{R}(Q) = Q \setminus \bigcup_{G_1(Q)} Q_j^1.$$

В этом случае картина похожа на рис. VII.3. На $\mathcal{R}(Q)$ $|f(z)| \leq \delta/2$ и при $S_k \subset \mathcal{R}(Q)$ ввиду (5.2) $\sup_{\tilde{S}_k} |f(z)| < \delta$. Поэтому

$$(5.8) \quad \ell(\partial \mathcal{R}(Q)) \leq 6\ell(Q) \leq 2^{2N+1}\ell(Q).$$

Отправляясь от единичного квадрата Q^0 и применяя случай I или II, мы построим область $\mathcal{R}(Q^0)$. Затем применим случай I или II к каждому квадрату Q_j^1 первого поколения $G_1 = G_1(Q^0)$. Мы получим новые области $\mathcal{R}(Q_j^1)$ и второе поколение, состоящее из всех потомков первого поколения, порожденных квадратами из G_1 . Бесконечно продолжая этот процесс, получим дальнейшие поколения $G_3, G_4, \dots$. Положим

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(Q^0) \cup \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup \{\mathcal{R}(Q_j^p): Q_j^p \in G_p\}.$$

По построению для $S_k \supset Q^0$ выполняются (i) и (ii).

Ко всем квадратам данного поколения не обязательно применим один и тот же случай, но каждый квадрат случая II порождает первое поколение, состоящее из квадратов случая I. Поэтому нам никогда не придется применять случай II два раза подряд. Из (5.7), (5.8) и особенно из (5.5) мы видим, что длина дуги на $\partial \mathcal{R}$ является мерой Карлесона. В самом деле,

$$\ell(Q \cap \partial \mathcal{R}) \leq 2^{2N+1}\ell(Q) + 2^{2N+1} \sum \{\ell(Q_j^p): Q_j^p \subset Q\},$$

но, так как квадраты из разных поколений образуют «гнезда», то в силу (5.5)

$$\sum \{\ell(Q_j^p): Q_j^p \subset Q\} \leq 2 \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-q}\ell(Q) = 2\ell(Q).$$

Следовательно,

$$(5.9) \quad \ell(Q \cap \partial \mathcal{R}) \leq 3 \cdot 2^{2N+1}\ell(Q),$$

так что длина дуги на $\partial \mathcal{R}(Q)$ — мера Карлесона с постоянной $A = 3 \cdot 2^{2N+1}$, зависящей только от δ . Но нам нужна гладкая функция $\psi(z)$, и поэтому мы используем несколько иную формулировку (5.9). Положим для любого Q

$$\mathcal{S}(Q) = \{S_k: \tilde{S}_k \cap Q \cap \partial \mathcal{R} \neq \emptyset\}.$$

Если $S_k \in \mathcal{S}(Q)$ и $\tilde{S}_k$ — в девять раз больший концентрический с S_k квадрат, то $\ell(S_k) \leq c\ell(\tilde{S}_k \cap Q \cap \partial \mathcal{R})$, потому что вклад

в длину $\partial\mathcal{R}$ внутри $\tilde{S}_k$ могут дать только квадраты S_j с $\ell(S_j) \geq \ell(S_k)/2$. Любая точка лежит не более чем в девяти квадратах S_k , так что из (5.9) следует

$$(5.10) \quad \sum_{z \in Q} \ell(S_k) \leq c \cdot 2^{2N+1} \ell(Q).$$

Для каждого малого квадрата S_j пусть $\psi_j \in C^\infty(\{y > 0\})$ — такая функция, что $\psi_j = 0$ на S_j , $\psi_j \equiv 1$ вне $\tilde{S}_j$ и $0 \leq \psi_j \leq 1$, $|\nabla \psi_j| \leq c/\ell(S_j)$. Поскольку любая точка лежит не более чем в девяти квадратах S_j , то функция

$$\psi(z) = \prod_{S_j \in \mathcal{R}} \psi_j(z)$$

бесконечно дифференцируема в полуплоскости и

$$(5.11) \quad |\nabla \psi(z)| \leq c/\ell(S_k), \quad z \in S_k.$$

Далее $\nabla \psi(z) = 0$ вне квадратов S_k , пересекающихся с $\partial\mathcal{R}$. Согласно (5.10) и (5.11), это значит, что

$$\iint_Q |\nabla \psi| dx dy \leq C \cdot 2^{2N+1} \ell(Q)$$

для любого квадрата Q с основанием на оси $\{y = 0\}$. Стало быть, $|\nabla \psi| dx dy$ — мера Карлесона с постоянной $A(\delta)$. Очевидно, что $0 \leq \psi \leq 1$, и (а) выполняется. Ввиду (i) и (ii) для точек Q^0 выполняются также условия (b) и (c). $\square$

6. Градиенты ограниченных гармонических функций

Основная трудность в теореме о короне происходит оттого, что мера $|f'(z)| dx dy$ для функции $f \in H^\infty$ не обязательно является мерой Карлесона. См., например, упр. VI.9. Теорема этого параграфа указывает путь в обход этого препятствия.

Теорема 6.1. Пусть $u(z)$ — ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ и $\varepsilon > 0$. Существует такая функция $\varphi(z) \in C^\infty(\mathcal{H})$, что

$$(6.1) \quad |\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon,$$

и $|\nabla \varphi| dx dy$ — мера Карлесона, а именно

$$(6.2) \quad \iint_Q |\nabla \varphi| dx dy \leq C \varepsilon^{-6} \|u\|_\infty^5 \ell(Q)$$

для любого квадрата $Q = \{a \leq x \leq a + \ell(Q), 0 < y \leq \ell(Q)\}$. Постоянная C в (6.2) не зависит от ε и $u(z)$.

Эта теорема — компромисс между желаемым и действительным, между истинным утверждением о карлесоновости меры

$y|\nabla u|^2 dx dy$ и ложной надеждой на то, что $|\nabla u| dx dy$ — мера Карлесона. Теорема 5.1 — ее непосредственное следствие. В самом деле, пусть $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$, и $\delta > 0$. Возьмем функцию $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, у которой $h(x) = 1$ при $x > 3\delta/4$, $h(x) = 0$ при $x < \delta/2$ и $0 \leq h(x) \leq 1$ всюду. Если φ есть C^∞ -функция из теоремы 6.1 при $\varepsilon = \delta/4$, то функция $\psi = h \circ \varphi$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.1 при том же значении ε .

Наша теорема остается в силе и тогда, когда $u(z)$ является интегралом Пуассона функции из ВМО, и этот результат, даже при больших ε , дает еще одно доказательство двойственности H^1 — ВМО (см. упр. 11). В гл. VI доказательство двойственности опиралось на аналог (в круге) неравенства

$$(6.3) \quad \iint_Q y |\nabla u|^2 dx dy \leq C \|u\|_*^2 t(Q),$$

которое гораздо доступнее, чем (6.2). (См. теорему VI.3.4 и упр. VI.5.)

Существуют примеры, в которых функция $\varphi(z)$ из теоремы 6.1 не может быть гармонической (см. упр. 12).

В теореме 6.1 содержится количественная формулировка теоремы Фату. Пусть $u(z)$ — ограниченная гармоническая функция в полуплоскости $\{y > 0\}$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $N_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$, целое число, указывающее, сколько раз функция $u(x + iy)$ на отрезке $0 < y \leq 1$ изменяется на величину ε . Точнее, мы скажем, что $N_\varepsilon(x) \geq n$, если найдутся такие точки

$$0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1,$$

что $|u(x + iy_j) - u(x + iy_{j+1})| \geq \varepsilon$. Теорема Фату утверждает, что $N_\varepsilon(x) < \infty$ почти всюду при любом ε .

Следствие 6.2. Если $\varepsilon > 0$, $u(z)$ гармонична в полуплоскости $\{y > 0\}$ и $\|u\|_\infty \leq 1$, то для любого интервала I единичной длины

$$\int_I N_\varepsilon(x) dx \leq C\varepsilon^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty$ удовлетворяет условиям (6.1) и (6.2) с заменой ε на $\varepsilon/2$. Если $N_\varepsilon(x) \geq n$, то найдутся точки $y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq 1$, в которых $|\varphi(x + iy_j) - \varphi(x + iy_{j+1})| \geq \varepsilon/3$. Значит,

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x + iy) \right| dy \geq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right| \geq n\varepsilon/3$$

и, стало быть, $\int_0^1 |\partial\varphi/\partial y| dy \geq N_\varepsilon(x) \varepsilon/3$. Но при $|I|=1$ (6.2) дает

$$\int I N_\varepsilon(x) dx \leq \frac{3}{\varepsilon} \int_0^1 \int |\nabla\varphi| dx dy \leq c\varepsilon^{-7}. \quad \square$$

Это следствие напоминает нам о теореме о гармонической интерполяции VII.4.2, потому что оба результата дают оценку колебаний ограниченной гармонической функции, и теорему о гармонической интерполяции легко вывести из следствия 6.2. Связь между теоремой 6.1 и гармонической интерполяцией более полно обсуждается в гл. X. Вовсе не очевидно, что следствие 6.2 вытекает из неравенства (6.3). Однако лемма 6.4 — аналогичный результат для средних по диадическим интервалам — простое следствие мартингального варианта оценки (6.3). См. замечания после доказательства леммы 6.4.

Постоянные ε^{-7} в следствии 6.2 и ε^{-6} в (6.9) не точны. Недавно Дальберг [1980] получил ε^{-1} в (6.2). Его локальная теорема содержит и теорему 6.1, и аналогичный результат об интегралах Пуассона функций из L^p , $p \geq 2$. Он использует интеграл площадей Лузина для липшицевых областей там, где мы будем сравнивать $u(z)$ с более простым мартингалом.

Вот план доказательства теоремы 6.1. Мы знаем, что $y|\nabla u|^2 dx dy$ — мера Карлесона. В точках, где колебание $u(z)$ велико, а именно где $y|\nabla u| \geq \delta(\varepsilon)$, будет $|\nabla u(z)| \leq \delta(\varepsilon)^{-1} y|\nabla u|^2$. Стало быть, сужение меры $|\nabla u(z)| dx dy$ на множество $\{z: y|\nabla u(z)| \geq \delta(\varepsilon)\}$ уже является мерой Карлесона, и на этом множестве можно положить $\varphi(z) = u(z)$. Нам нужно справиться с множеством, где колебание $u(z)$ мало. Временно отбросим условие $\varphi \in C^\infty$; тогда мы построим кусочно постоянную функцию $\varphi(z)$, такую, что $|\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon$ в почти всех точках малого колебания $u(z)$ и что $\varphi(z)$ испытывает скачки на величину порядка ε на границах некоторых диадических квадратов. Эти квадраты определяются с помощью моментов остановки и удовлетворяют условию

$$\sum_{Q_j \in Q} \ell(Q_j) \leq C(\varepsilon) \ell(Q).$$

Как обобщенная функция $|\nabla\varphi(z)|$ ведет себя подобно длине дуги на границах Q_j и поэтому является мерой Карлесона. Таким образом, идея состоит просто в том, чтобы разгладить, насколько возможно, малые колебания $u(z)$.

Нам будет удобно заменить интегралы Пуассона средними значениями $u(t)$ на диадических интервалах.

Лемма 6.3. Пусть $u(z) = P_y * u(x)$ — ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости, а $I \subset \mathbb{R}$ — интервал.

Тогда при любом δ , $0 < \delta < 1/2$,

$$(6.4) \quad \left| \frac{1}{|I|} \int_I u(t) dt - \frac{1}{|I|} \int_I u(x + i\delta |I|) dx \right| \leq C\delta \log \frac{1}{\delta} \|u\|_{\infty},$$

где C не зависит от $u(z)$, δ и I .

Доказательство. Можно считать, что $I = [0, 1]$, $\|u\|_{\infty} = 1$. Точная верхняя грань левой части (6.4) равна $\|F\|_1$, где

$$F(t) = \chi_I(t) - \int_I P_{\delta}(x-t) dx.$$

Если $\text{dist}(t, I) > \delta$, то

$$|F(t)| \leq \frac{\delta}{\pi} \int \frac{dx}{(x-t)^2} = \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\text{dist}(t, I)} - \frac{1}{1 + \text{dist}(t, I)} \right).$$

Значит,

$$\int_{\text{dist}(t, I) > \delta} |F(t)| dt \leq \frac{2\delta}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) ds = \frac{2\delta}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{\delta} \right).$$

Поскольку $\|F\|_{\infty} \leq 1$, то

$$\int_{|t| < \delta} |F(t)| dt + \int_{|1-t| < \delta} |F(t)| dt \leq 4\delta.$$

Остался интервал $I = (\delta, 1 - \delta)$. При $t \in I$

$$F(t) = \int_{-\infty}^0 P_{\delta}(x-t) dx + \int_1^{\infty} P_{\delta}(x-t) dx = G_1(t) + G_2(t)$$

и

$$\begin{aligned} \int_I |G_1(t)| dt &= \int_I |G_2(t)| dt \leq \frac{\delta}{\pi} \int_{\delta}^{1-\delta} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-t)^2} dt \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\pi} \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{dt}{t} \leq \frac{\delta}{\pi} \log \frac{1}{\delta}. \quad \square \end{aligned}$$

Теперь фиксируем диадический интервал I и положительное целое число N . При $k = 1, 2, \dots$ разобьем I на 2^{Nk} замкнутых диадических интервалов I_k длины $|I_k| = 2^{-Nk}|I|$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $u(t)$ — ограниченная функция на I . Определим первое поколение $G_1 = G_1(I)$ как множество максимальных среди интервалов $I_k \subset I$, для которых

$$|u_{I_k} - u_I| \geq \varepsilon.$$

Интервалы из $G_1(I)$ имеют непересекающиеся внутренности. Определим таким же образом $G_1(I_k)$, $I_k \in G_1(I)$, и положим

$$G_2 = G_2(I) = \bigcup \{G_1(I_k) : I_k \in G_1(I)\}.$$

По индукции определяются дальнейшие поколения $G_3, G_4, \dots$, каждый интервал $I_k \in G_{p+1}$ содержится в единственном интервале $I_j \in G_p$ и $|u_{I_k} - u_{I_j}| \geq \varepsilon$. Согласно теореме Лебега, почти каждая точка лежит в конечном числе интервалов из всех поколений. Нам нужна количественная формулировка этой теоремы.

Лемма 6.4. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого N

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{I_j \in G_p} |I_j| \leq \frac{\|u\|_{\infty}^2}{\varepsilon^2} |I|.$$

Доказательство. Пусть $G_0 = \{I\}$ и $E_p = I \setminus \bigcup_{G_p} I_j$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$Y_p(t) = u(t) \chi_{E_p}(t) + \sum_{G_p} u_{I_j} \chi_{I_j}(t).$$

Тогда $|Y_p - Y_{p+1}| \geq \varepsilon$ на $\bigcup_{G_p} I_j$, и поэтому

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{G_p} |I_j| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_I \sum_{p=1}^{\infty} |Y_p - Y_{p-1}|^2 dt.$$

При $I_k \in G_{p-1}$

$$\int_{I_k} Y_p dt = \int_{I_k \cap E_p} u(t) dt + \sum_{\substack{I_j \in G_p \\ I_j \subset I_k}} \int_{I_j} u_{I_j} dt = \int_{I_k} u(t) dt = |I_k| u_{I_k},$$

и поскольку на I_k имеем $Y_{p-1} = u_{I_k}$, то

$$\int_{I_k} Y_p Y_{p-1} dt = |I_k| u_{I_k}^2 = \int_{I_k} Y_{p-1}^2 dt.$$

Точно так же поскольку $E_p \supset E_{p-1}$, то

$$\int_{E_{p-1}} Y_p Y_{p-1} dt = \int_{E_{p-1}} u(t)^2 dt = \int_{E_{p-1}} Y_{p-1}^2 dt.$$

Следовательно,

$$\int_I Y_p Y_{p-1} dt = \int_I Y_{p-1}^2 dt$$

и

$$\begin{aligned}\int_I |Y_p - Y_{p-1}|^2 dt &= \int_I Y_p^2 dt - 2 \int_I Y_p Y_{p-1} dt + \int_I Y_{p-1}^2 dt = \\ &= \int_I Y_p^2 dt - \int_I Y_{p-1}^2 dt.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}\int_I \sum_{p=1}^{\infty} |Y_p - Y_{p-1}|^2 dt &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_I (|Y_p^2| - |Y_0^2|) dt = \\ &= \int_I u^2 dt - u_I^2 |I| \leq \|u\|_{\infty}^2 |I|. \quad \square\end{aligned}$$

На самом деле лемма 6.4 — это теорема о мартингалах. На $\{Y_p\}$ можно смотреть как на мартингал, суженный на последовательность моментов остановки. В приведенном доказательстве мажоранта $\sum |Y_p - Y_{p-1}|^2$ — это квадрат *мартингальной S-функции*. Любопытно, что S-функция — это аналог выражения Литтлвуда — Пэли $y |\nabla u|^2 dx dy$ для мартингалов.

Доказательство теоремы 6.1. Сначала мы найдем разрывную функцию $\varphi_2(z)$, почти всюду удовлетворяющую (6.1), у которой обобщенная функция $|\nabla \varphi_2|$ является мерой Карлесона. Эта функция будет построена только в единичном квадрате $Q_0 = \{0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$. С помощью разбиения единицы можно построить такую функцию во всей верхней полуплоскости. В конце мы ее сгладим и получим C^∞ -функцию, удовлетворяющую условиям (6.1) и (6.2).

Выберем $\delta = 2^{-N}$ так, чтобы в (6.4) было

$$\frac{\varepsilon}{8} < c\delta \log \frac{1}{\delta} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Рассмотрим 2^{Nk} диадических квадратов Q_k вида $Q_k = \{j2^{-Nk} \leq x \leq (j+1)2^{-Nk}, 0 < y \leq 2^{-Nk}\}$ при $k = 1, 2, \dots$. Положим $S(Q_k) = Q_k \setminus \bigcup Q_{k+1} = Q_k \cap \{y > 2^{-N} \ell(Q_k)\}$, и пусть $I_k = Q_k^*$ — проекция Q_k на ось абсцисс. Наконец, пусть

$$a_{Q_k}(u) = \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} u(x + i2^{-N} |I_k|) dx$$

— среднее значение функции $u(z)$ на нижней стороне $S(Q_k)$. По лемме 6.3 и в силу выбора N

$$(6.5) \quad |a_{Q_k}(u) - u_{I_k}| \leq \frac{\varepsilon}{4} \|u\|_{\infty}.$$

Назовем прямоугольник $S(Q_k)$ *синим*, если

$$(6.6) \quad \sup_{S(Q_k)} |u(z) - u(w)| \leq \varepsilon/4;$$

в противном случае назовем его *красным*. Доказательство содержит два шага. На первом шаге мы приближаем $u(z)$ в синих прямоугольниках кусочно постоянной функцией, а на втором исправляем это приближение на красных прямоугольниках.

Мы будем считать, что $\|u\|_\infty = 1$ и $\varepsilon < 1$.

Шаг I. Нулевое поколение G_0 состоит из одного квадрата Q_0 . Первое поколение $G_1 = G_1(Q_0)$ состоит из максимальных квадратов $Q_k \subset Q_0$, для которых

$$(6.7) \quad |u_{I_k} - u_{I_0}| \geq \varepsilon/4.$$

Таким же образом определяется первое поколение $G_1(Q_j)$, если $Q_j \in G_1(Q_0)$. Второе поколение $G_2 = G_2(Q_0)$ есть

$$G_2 = \bigcup \{G_1(Q_j) : Q_j \in G_1\}.$$

Дальнейшие поколения определяются по индукции. Поколения квадратов с точностью до замены ε на $\varepsilon/4$ соответствуют поколениям интервалов I_k из леммы 6.4. Для каждого Q_j образуем область

$$\mathcal{R}(Q_j) = Q_j \setminus \bigcup_{Q_k \in G_1(Q_j)} Q_k.$$

Согласно (6.7), $\mathcal{R}(Q_j)$ совпадает с объединением тех прямоугольников $S(Q_n) \subset Q_j$, для которых $|u_{I_n} - u_{I_j}| < \varepsilon/4$. В силу (6.5) это означает, что при $S(Q_n) \subset \mathcal{R}(Q_j)$

$$(6.8) \quad |a_{Q_n}(u) - a_{Q_j}(u)| < 3\varepsilon/4.$$

Каждый прямоугольник $S(Q_n)$ содержится в единственной области $\mathcal{R}(Q_j)$. Если $Q_j \neq Q_k$, то области $\mathcal{R}(Q_j)$ и $\mathcal{R}(Q_k)$ имеют непересекающиеся внутренности. В открытой верхней полуплоскости граница $\partial\mathcal{R}(Q_j)$ состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков. Для любого квадрата Q пересечение $Q \cap \partial\mathcal{R}(Q_j)$ имеет суммарную длину не более $6\ell(Q)$. См. рис. VIII. 6.

Для каждого квадрата Q_j любого поколения, включая сам квадрат Q_0 , положим $\varphi_1(z) = a_{Q_j}(u)$ во внутренней $\mathcal{R}^0(Q_j)$ области $\mathcal{R}(Q_j)$. Таким образом,

$$\varphi_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{Q_j \in G_p} a_{Q_j}(u) \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)}(z).$$

Функция $\varphi_1(z)$ плохо определена на множестве $\bigcup \partial\mathcal{R}(Q_j)$, но это множество имеет нулевую площадь, а мы пока хотим только найти функцию φ , для которой $|\varphi - u| < \varepsilon$ почти всюду.

Предположим, что прямоугольник $S(Q_n)$ синий. Тогда в силу (6.6) $\sup_{S(Q_n)} |u(z) - a_{Q_n}(u)| \leq \varepsilon/4$. Существует единственный квадрат Q_j , для которого $S(Q_n) \subset \mathcal{R}(Q_j)$; при этом $|a_{Q_n}(u) - a_{Q_j}(u)| < 3\varepsilon/4$ по (6.8) и, стало быть,

$$(6.9) \quad |\varphi_1(z) - u(z)| < \varepsilon$$

в $S(Q_n) \cap \mathcal{R}^0(Q_j)$. Значит, (6.9) выполняется почти всюду в каждом синем прямоугольнике.

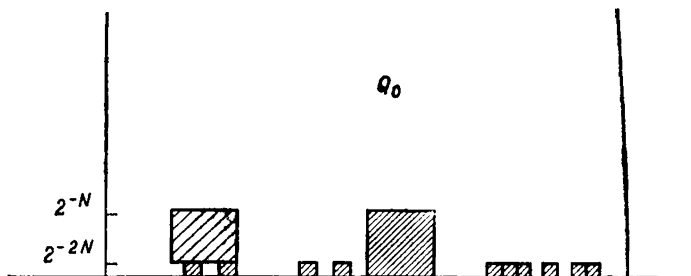


Рис. VIII.6. Квадраты Q_k при $N = 3$. Прямоугольник $S(Q_0)$ синий. Красный прямоугольник $S(Q_1)$ слева заштрихован редко; в нем $\sup_{S(Q_1)} |u(z) - u(w)| > \varepsilon/4$. Густо заштрихованы квадраты из первого поколения $G_1(Q_0)$. В точках незаштрихованной области $|u(z) - a_{Q_0}(u)| < \varepsilon$. Область $\mathcal{R}(Q_0)$ — это объединение незаштрихованной области и красного прямоугольника.

Градиент $|\nabla \varphi_1|$ интересует нас как обобщенная функция в открытой верхней полуплоскости $\{y > 0\}$. Но

$$\nabla \varphi_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{Q_j \in G_p} a_{Q_j}(u) \left(\frac{\partial \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)}}{\partial x}, \frac{\partial \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)}}{\partial y} \right).$$

Производная $\partial \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)} / \partial y$ как обобщенная функция в области $\{y > 0\}$ — это мера $(-dx)$ на верхнем основании квадрата Q_j плюс сумма мер dx на остальных горизонтальных отрезках $\partial \mathcal{R}(Q_j) \cap \{y > 0\}$. Аналогично, $\partial \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)} / \partial x$ — это знакопеременная сумма мер dy на вертикальных отрезках $\partial \mathcal{R}(Q_j)$. Следовательно, мера $|\nabla \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)}|$ — это длина дуги на кривой $\Gamma_j = \partial \mathcal{R}(Q_j) \cap \{y > 0\}$. Поскольку $|a_{Q_j}(u)| \leq \|u\|_{\infty} = 1$, то

$$|\nabla \varphi_1| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{Q_j \in G_p} |\nabla \chi_{\mathcal{R}^0(Q_j)}|$$

и

$$(6.10) \quad \int_Q |\nabla \varphi_1| \leq \sum \ell(Q \cap \Gamma_j),$$

где сумма берется по всем квадратам Q_j всех поколений.

Мы покажем, что для любого квадрата Q с основанием на оси $\{y = 0\}$

$$(6.11) \quad \sum \ell(Q \cap \Gamma_j) \leq C\varepsilon^{-2} \ell(Q).$$

Вместе с (6.10) это доказывает, что $|\nabla \varphi_1|$ есть мера Карлесона. В доказательстве (6.11) можно считать квадрат Q диадическим: $Q = \{j2^{-n} \leq x \leq (j+1)2^{-n}, 0 < y \leq 2^{-n}\}$. Рассмотрим вначале те Q_j , для которых $Q \cap \Gamma_j = Q \cap \partial \mathcal{R}(Q_j) \cap \{y > 0\} \neq \emptyset$, но $Q_j \not\subset Q$. Если при этом $\ell(Q_j) \leq \ell(Q)$, то $Q \cap \Gamma_j$ — это отрезок на боковой стороне Q . Эти отрезки попарно не пересекаются, и совместный вклад таких Q_j в сумму (6.11) не превышает $2\ell(Q)$. Может быть не более двух квадратов Q_j с $\ell(Q_j) > \ell(Q)$ и $Q \cap \Gamma_j \neq \emptyset$. В каждом из них $\ell(Q \cap \Gamma_j) \leq 6\ell(Q)$, и их общий вклад в (6.11) не превышает $12\ell(Q)$. Наконец, для квадратов $Q_j \subset Q$ по лемме 6.4

$$\sum_{Q_j \subset Q} \ell(Q \cap \Gamma_j) \leq 6 \sum_{Q_j \subset Q} \ell(Q_j) \leq 6\ell(Q) + \frac{16}{\varepsilon^2} \ell(Q).$$

Но $\varepsilon < 1$, поэтому мы получаем неравенство (6.11), и мера $|\nabla \varphi_1|$ оказывается карлесоновской.

Шаг II. Мы нашли такую функцию $\varphi_1(z)$, что $|\nabla \varphi_1|$ — мера Карлесона, $\varphi_1(z)$ постоянна внутри каждого прямоугольника $S(Q_k)$ и $|\varphi_1 - u| < \varepsilon$ почти всюду в синих прямоугольниках $S(Q_k)$. Теперь мы приблизим $u(z)$ на красных прямоугольниках $S(Q_k) = \{x \in I_k, 2^{-N}|I_k| < y \leq |I_k|\}$, где $\sup_{S(Q_k)} |u(z) - u(w)| > \varepsilon/4$.

Объединение всех красных прямоугольников обозначим через $\mathcal{R}$.

Пусть $S(Q_k)$ — красный прямоугольник и точки $z_1, z_2 \in S(Q_k)$ таковы, что $|u(z_1) - u(z_2)| > \varepsilon/4$. На отрезке, соединяющем z_1 и z_2 , есть точка z_0 , в которой $|z_1 - z_2| |\nabla u(z_0)| > \varepsilon/4$. Но $|z_1 - z_2| < \sqrt{2} \ell(Q_k) < 2^{N+1} \text{Im } z_0 = 2^{N+1} y_0$, так что $2^{N+3} y_0 |\nabla u(z_0)| > \varepsilon$, и ввиду субгармоничности $|\nabla u|^2$

$$\iint_{|z - z_0| < y_0/2} y |\nabla u|^2 dx dy \geq \frac{1}{2} y_0 \iint_{|z - z_0| < y_0/2} |\nabla u|^2 dx dy \geq c\varepsilon^2 2^{-2N} y_0.$$

Положим $\tilde{S}(Q_k) = \bigcup_{z_0 \in S(Q_k)} \{z: |z - z_0| < \text{Im } z_0/2\}$; тогда

$$(6.12) \quad \iint_{\tilde{S}(Q_k)} y |\nabla u|^2 dx dy \geq c\varepsilon^2 2^{-3N} \ell(Q_k).$$

Никакая точка не лежит более чем в четырех областях $S(Q_k)$. Раз $y|\nabla u|^2 dx dy$ — мера Карлесона, то (6.12) дает

$$(6.13) \quad \sum \{\ell(Q_k): Q_k \subset Q, S(Q_k) \text{ — красный}\} \leq c\epsilon^{-2^{23N}} \ell(Q)$$

для любого квадрата Q . В частности, длина дуги на $\partial\mathcal{R}$ — мера Карлесона с постоянной $c\epsilon^{-2^{23N}}$.

С другой стороны, $y|\nabla u| \leq c$, и поэтому для любого прямоугольника $S(Q_k)$

$$(6.14) \quad \iint_{S(Q_k)} |\nabla u| dx dy \leq c \iint_{S(Q_k)} \frac{dx dy}{y} = cN\ell(Q_k).$$

Если прямоугольник $S(Q_k)$ красный, то (6.12) и (6.14) дают

$$(6.15) \quad \iint_{S(Q_k)} |\nabla u| dx dy \leq cN\epsilon^{-2^{23N}} \iint_{\mathcal{S}(Q_k)} y |\nabla u|^2 dx dy,$$

так что $|\nabla u(z)| \chi_{\mathcal{R}}(z) dx dy$ — мера Карлесона с постоянной $cN\epsilon^{-2^{23N}}$.

Положим теперь

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \varphi_1(z), & z \notin \mathcal{R}, \\ u(z), & z \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

Тогда $|\varphi_2(z) - u(z)| < \epsilon$ почти всюду в Q_0 . В смысле обобщенных функций

$$\nabla \varphi_2 = \chi_{Q_0 \setminus \mathcal{R}} \nabla \varphi_1 + \chi_{\mathcal{R}} \nabla u + J,$$

где остаточный член J учитывает скачки $\varphi_2(z)$ на $\partial\mathcal{R}$. Но $|\varphi_2| < 1 + \epsilon$, поэтому J — мера и $|J|$ не превосходит длины дуги на $\partial\mathcal{R}$ с коэффициентом $1 + \epsilon$. Следовательно, в силу (6.13) это мера Карлесона с постоянной $C2^{3N}\epsilon^{-2}$. По (6.15) $\chi_{\mathcal{R}}|\nabla u| dx dy$ — тоже мера Карлесона с постоянной $CN2^{3N}\epsilon^{-2}$. На первом шаге доказательства мы установили, что $|\nabla \varphi_1|$ — мера Карлесона с постоянной $C\epsilon^{-2}$. Но N выбиралось так, чтобы $N2^{-N} \sim \epsilon$, и наихудшая постоянная во всех трех оценках отвечает $\chi_{\mathcal{R}}|\nabla u| dx dy$. Поэтому

$$(6.16) \quad \iint_Q |\nabla \varphi_2| dx dy \leq C\epsilon^{-6}\ell(Q)$$

для любого квадрата Q .

Мы построили функцию φ_2 в единичном квадрате Q_0 , у которой $|\nabla \varphi_2|$ удовлетворяет (6.16) и $|\varphi_2 - u| < \epsilon$ почти всюду в Q_0 . Используя разбиение единицы, легко получить функцию φ_3 в $\mathcal{H}$, удовлетворяющую (6.16), для которой $|\varphi_3 - u| < \epsilon$ почти

всюду в $\mathcal{H}$. Функцию $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H})$ со свойствами (6.1) и (6.2) мы получим сглаживанием φ_3 . Пусть $h(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $h(z) \geq 0$, $\int h(z) dx dy = 1$ и $h(z) = 0$ при $|z| \geq 1$. Пусть, кроме того, функция h радиальна: $h(z) = h(|z|)$. Положим $h_\delta(z) = (1/\delta^2)h(z/\delta)$ при $\delta > 0$. Тогда $\varphi_3 * h_\delta \in C^\infty$. Если $\delta < \text{Im } z$, то $|\varphi_3 * h_\delta(z) - u(z)| < \varepsilon$, потому что $u * h_\delta \equiv u$ в силу гармоничности $u(z)$ и радиальной симметрии h_δ . Чтобы сохранить условие $\delta < \text{Im } z$, разобьем полуплоскость $\mathcal{H}$ на полосы $T_n = \{2^{-n} \leq y \leq 2^{-n+1}\}$ и положим $\tilde{T}_n = T_{n-1} \cup T_n \cup T_{n+1}$. Выберем такие функции $g_n = g_n(y) \in C^\infty$, сосредоточенные на $\tilde{T}_n$, что $0 \leq g_n \leq 1$, $|\nabla g_n| = |\partial g_n / \partial y| \leq C2^n$ и $\sum_{-\infty}^{\infty} g_n(y) \equiv 1$. Тогда функция

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(y) (\varphi_3 * h_{2^{-n-2}})(z) \in C^\infty(\mathcal{H})$$

такова, что $|\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon$. Если $z \in \tilde{T}_n$, то $\varphi_3 * h_{2^{-n-2}}(z) = \varphi_3(z)$ при

$$\text{dist}(z, \partial\mathcal{H} \cup \bigcup \Gamma_j) \geq 2^{-n-2},$$

потому что функция φ_3 гармонична в круге $\{|w - z| < 2^{-n-2}\}$. Поэтому оценить $|\nabla \varphi| dx dy$ нужно только в области

$$V = \bigcup_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_n \cap \{z: \text{dist}(z, \partial\mathcal{H} \cup \bigcup \Gamma_j) < 2^{-n-2}\}.$$

Зафиксируем диадический квадрат $Q = \{j2^{-p} \leq x \leq (j+1)2^{-p}, 0 < y \leq 2^{-p}\}$. Тогда

$$\nabla \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi_3 * h_{2^{-n-2}}(z)) \nabla g_n(z) + \sum_{-\infty}^{\infty} g_n(z) (\nabla \varphi_3 * h_{2^{-n-2}})(z),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{Q \cap V} |\nabla \varphi| dx dy &\leq c \sum_{n=p-1}^{\infty} 2^n |Q \cap V \cap \tilde{T}_n| + \\ &+ \sum_{n=p-1}^{\infty} \int_{Q \cap \tilde{T}_n} |\nabla \varphi_3| * h_{2^{-n-2}} dx dy. \end{aligned}$$

Поскольку $|Q \cap V \cap \tilde{T}_n| \leq c2^{-n} \ell(Q \cap \tilde{T}_n \cap (\partial\mathcal{H} \cup \bigcup \Gamma_j))$, то первый член не превосходит $c\varepsilon^{-\delta} \ell(Q)$. Вторая сумма не превышает

$$\sum_{n=p-1}^{\infty} \int_{W_n} |\nabla \varphi_3|,$$

где $W_n = \{z: \text{dist}(z, Q \cap T_n) \leq 2^{-n-2}\}$. Но никакая точка не лежит более чем в пяти множествах W_n . Объединение $\bigcup_{n \geq p-1} W_n$ содержится в концентрическом с Q и в 16 раз большем квадрате. Значит,

$$\sum_{n=p-1}^{\infty} \int_{W_n} |\nabla \varphi_3| \leq C e^{-6} 2^{-p}.$$

Так как $\ell(Q) = 2^{-p}$, то мы видим, что $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству (6.2). $\square$

7. Конструктивное решение уравнения $\partial b / \partial \bar{z} = \mu$

В доказательстве теоремы о короне мы использовали **соображения** двойственности, чтобы получить решающую **оценку**

$$(7.1) \quad \|b\|_{\infty} \leq C \sup_S \frac{1}{\ell(S)} \int_S |G| dx dy$$

для некоторого решения уравнения

$$\partial b / \partial \bar{z} = G(z), \quad |z| < 1.$$

Недавно Питер Джонс нашел прямой путь к доказательству (7.1). Его метод одновременно дает конструктивное доказательство основного разложения

$$(7.2) \quad \varphi = u + H v, \quad u, v \in L^{\infty},$$

для функций из ВМО. Эта конструкция довольно явная и должна иметь дальнейшие приложения.

Пусть μ — мера Карлесона в верхней полуплоскости; мы предположим ее положительной и нормированной условием

$$N(\mu) = \sup_Q \mu(Q) / \ell(Q) \leq 1.$$

Джонс решил уравнение

$$(7.3) \quad \partial b / \partial \bar{z} = \mu, \quad \text{Im } z > 0,$$

и получил решение с $|b(t)| \leq C$ почти всюду на $\mathbb{R}$, используя связь между мерами Карлесона и интерполяционными последовательностями. Рассмотрим вначале очень специальный случай.

Случай I. $\mu = \sum \alpha_j y_j \delta_{z_j}$, где $\{z_j\}$ — такая конечная последовательность точек, что

$$(7.4) \quad \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta > 0$$

(δ — фиксированная постоянная) и $0 \leq \alpha_j \leq 1$. Пусть $B_1(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_j\}$. По формуле Грина обоб-

шенная функция $(\partial / \partial \bar{z})(1/B_1(z))$ равна

$$\sum_j \frac{\pi}{B_1'(z_j)} \delta_{z_j} = \sum_j \beta_j y_j \delta_{z_j}, \quad 1 \leq |\beta_j| \leq 1/\delta.$$

Как показывает доказательство Эрла теоремы об интерполяции (теорема VII.5.1), существует другое произведение Бляшке $B_2(z)$ с нулями $\{\xi_j\}$, $\rho(\xi_j, z_j) \leq \delta/3$, для которого

$$K\delta^{-3}B_2(z_j) = \alpha_j/\beta_j,$$

где K — абсолютная постоянная. Рациональная дробь

$$b(z) = K\delta^{-3}B_2(z)/B_1(z)$$

решает уравнение (7.3), и $|b(t)| \leq K\delta^{-3}$, $t \in \mathbb{R}$.

Случай II. Снова μ — положительная дискретная мера с конечным носителем, $\mu = \sum \alpha_j y_j \delta_{z_j}$, но $N(\mu) \leq 1$ и коэффициенты α_j рациональны: $\alpha_j = k_j/N$. Основное отличие от случая I здесь в том, что постоянная δ в (7.4) может быть очень мала. Так как $N(\mu) \leq 1$, то $1 \leq k_j \leq N$. Перенумеруем точки так, чтобы точка z_j повторялась с кратностью k_j . Тогда

$$\mu = \frac{1}{N} \sum y_j \delta_{z_j}.$$

Поскольку $N(\mu) \leq 1$, то верхняя половина любого квадрата Q с основанием на оси $\{y=0\}$ содержит не более $2N$ точек z_j с учетом кратностей. Сейчас мы разобьем $\{z_j\}$ на $4N$ интерполяционных последовательностей с равномерно ограниченными константами интерполяции. Положим

$$S_n = \{z_j: 2^{-n-1} < y_j \leq 2^{-n}\}$$

и перенумеруем $z_j \in S_n$ в порядке возрастания вещественных частей: $S_n = \{z_{kn} = x_{kn} + iy_{kn}\}$, $x_{k-1n} \leq x_{kn} \leq x_{k+1n}$. Разделим $\{z_j\}$ на $2N$ подпоследовательностей $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2N}$, равномерно распределяя точки в каждом S_n . Точнее, отнесем $z_j = x_{kn} + iy_{kn}$ к Y_p , если (и только если) $k \equiv p \pmod{2N}$. Пусть Q — диадический квадрат и $M_n(Q)$ — число точек z_j в $S_n \cap Q$. Наши подпоследовательности выбраны так, что число точек в каждом множестве $Y_p \cap S_n \cap Q$ не превышает $1 + M_n(Q)/2N$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{Y_p \cap Q} y_j &\leq \sum_{2^{-n} \leq \ell(Q)} \left(1 + \frac{M_n(Q)}{2N}\right) 2^{-n} \leq \\ &\leq \sum_{2^{-n} \leq \ell(Q)} 2^{-n} + \frac{1}{2N} \sum_{z_j \in Q} 2y_j \leq 2\ell(Q) + \mu(Q) \leq 3\ell(Q). \end{aligned}$$

Далее, точки $Y_p \cap \bigcup_{n \text{ четно}} S_n$ хорошо отделены; для любых двух

точек z_j, z_k из этой подпоследовательности

$$|z_j - z_k| \geq y_j/2.$$

Таким образом, каждая последовательность Y_p есть объединение двух интерполяционных последовательностей с большими постоянными δ в (7.4). Согласно очень специальному случаю I, найдется такая рациональная функция $b_p(z)$, $|b_p(t)| \leq C'$, $t \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{\partial b_p}{\partial \bar{z}} = \sum_{Y_p} y_j \delta_{z_j}.$$

Тогда функция

$$b(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{2N} b_p(z)$$

является решением (7.3) и $|b(t)| \leq C$, $t \in \mathbb{R}$, где C не зависит от N .

Случай III. Пусть теперь μ — произвольная положительная мера на $\mathcal{H}$ с $N(\mu) \leq 1$. Существует последовательность мер $\{\mu_n\}$, подпадающих под действие случая II, для которых

$$\int \varphi d\mu_n \rightarrow \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{H})$$

и

$$\int |f| d\mu_n \rightarrow \int |f| d\mu, \quad f \in H^1.$$

(Сначала нужно ограничить μ на компактное подмножество полуплоскости $\mathcal{H}$, а затем разбить $\mathcal{H}$ на гиперболически малые квадраты и сконцентрировать меру каждого квадрата в его центре.) Пусть $b_n(z)$ — полученное выше решение уравнения $\partial b_n / \partial \bar{z} = \mu_n$ (случай II). Тогда функции $\{b_n(t)\}$ имеют L^1 -слабую предельную точку $b(t)$ в L^∞ и $\|b\|_\infty \leq C$. Далее $\{b_n(z)\}$ сходятся как обобщенные функции к решению уравнения (7.3) в верхней полуплоскости. Для приложений нужно связать эту обобщенную функцию в $\mathcal{H}$ с ее граничной функцией $b(t)$, но это несущественная трудность. Во избежание технических сложностей перейдем в единичный круг. Функция $b_n(z)$ рациональна, и по формуле вычетов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) b_n(z) dz = \int_D f(z) d\mu_n(z), \quad f \in H^1.$$

Следовательно,

$$(7.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) b(z) dz = \int_D f(z) d\mu(z), \quad f \in H^1.$$

Равенство (7.5) представляет собой достаточную для наших целей интерпретацию уравнения $\partial b/\partial \bar{z} = \mu$. $\square$

В задаче о короне $d\mu = (1/\pi) G dx dy$, где $G \in C^\infty(\bar{D})$, и, согласно (1.2), существует функция $F \in C(\bar{D}) \cap C^\infty(D)$ с $\partial F/\partial \bar{z} = G(z)$. По формуле Грина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) F(z) dz = \frac{1}{\pi} \iint_D f(z) G(z) dx dy, \quad f \in H^1.$$

Ввиду (7.5) это значит, что $h(e^{i\theta}) = F(e^{i\theta}) - b(e^{i\theta}) \in H^\infty$, и, стало быть, функция $b(z) = F(z) - h(z)$ дает гладкое решение, ограниченное в круге, для которого $|b(e^{i\theta})| \leq C$ почти всюду. Если подставить такие функции $b(z)$ в (2.7), то мы получим доказательство теоремы о короне, не использующее двойственности.

Подход Джонса особенно выразителен в терминах обобщенных производных. Наше дифференциальное уравнение имеет вид $\partial b/\partial \bar{z} = \mu$, где меру μ можно взять абсолютно непрерывной относительно длины дуги на контуре Γ типа построенных в разд. 4 или 5. На Γ длина дуги — мера Карлесона, а плотность μ ограничена сверху и снизу. В таком случае появляющиеся произведения Бляшке легко обозримы, они напоминают произведение Бляшке, построенное в разд. 4. Решение $b(z)$ можно представить как среднее интерполяционных произведений Бляшке. (См. пример в конце раздела.)

Переходя к доказательству разложения (7.2), предположим, что φ — вещественная функция из $BMO(T)$, $\|\varphi\|_* \leq 1$. Согласно упражнению VI.13, существуют функции $\psi \in L^\infty$, $\|\psi\|_\infty \leq A$, $F(z) \in C^\infty(D)$ и $g \in L^1$, такие, что

$$|F(re^{i\theta})| \leq g(e^{i\theta}),$$

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) + \lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = \psi(\theta) + F(\theta)$$

и что $|\nabla F| dx dy$ — мера Карлесона с $N(|\nabla F| dx dy) \leq A$. Пусть $b(z)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx dy,$$

доставляемое процедурой Джонса. Тогда $|b(\theta)| \leq CA$ и

$$\varphi = \psi + b + (F - b)$$

почти всюду на T . Рассуждая формально, имеем $(F - b)^\sim = -i(F - b)$, поскольку функция $F - b$ аналитична. Поэтому

$$\varphi = \psi + b + iF - i\bar{b},$$

что после отделения вещественных частей дает

$$\varphi = (\psi + \operatorname{Re} b) + (\operatorname{Im} b)^\sim,$$

а это и есть (7.2). Уточняя эти рассуждения, заметим, что в силу (7.5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int z^n b(z) dz = \frac{1}{\pi} \iint_D z^n \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

С другой стороны, поскольку $|F(re^{i\theta})| \leq g(\theta) \in L^1$, то по теореме об ограниченной сходимости

$$\frac{1}{2\pi i} \int z^n F(z) dz = \frac{1}{\pi} \iint_D z^n \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

Следовательно, $F(e^{i\theta}) - b(e^{i\theta}) \in H^1$, а поэтому и в самом деле $(F - b)^\sim = -i(F - b)$.

Привлекательная сторона такого подхода к (7.2) состоит в том, что конструкция Варопулоса для $F(z)$ вполне явная. Метод настоящего раздела дает также конструктивную процедуру для нахождения по данной функции $f \in L^\infty$ такой функции $g \in H^\infty$, что

$$\|f - g\|_\infty \leq C \operatorname{dist}(f, H^\infty).$$

Например, запишем число $x \in [0, 1]$ в виде дроби по основанию 5, $x = \sum \alpha_k 5^{-k}$, и положим $\varphi(x) = \sum \chi_{E_k}(x)$, $E_k = \{x: \alpha_k = 1 \text{ или } \alpha_k = 3\}$. Тогда $\varphi \in \text{ВМО}$ (см. рис. VIII.7).

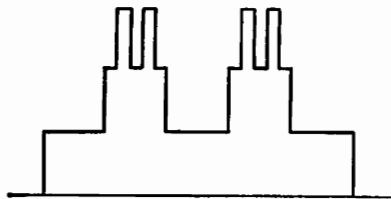


Рис. VIII.7. Функция $\varphi(x)$.

Если построить функцию $F(x, y)$ с помощью 5-адических квадратов вместо днадических, то

$$F(x, y) = \sum_k \chi_{E_k}(x) \chi_{(0, 5^{-k})}(y).$$

Тогда $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} F(x, y)$, а мера $|\nabla F|$ ограничена длиной дуги на кривых в $\mathcal{H}$, нарисованных на рис. VIII.8. Разделим эти кривые на отрезки ограниченной гиперболической длины и параметризуем каждый вещественным параметром t , $0 < t < 1$. При каждом t пусть $B_1(t, z)$ — произведение Бляшке с одним нулем в положении t на каждом таком отрезке. Нули $B_1(t, z)$ образуют интерполяционную последовательность с константой интерполяции, не зависящей от t . На рис. VIII.8 они отмечены

крестиками при $t = 0,8$. Ограниченное решение уравнения $\partial b / \partial \bar{z} = \partial F / \partial \bar{z}$ имеет вид

$$b(x) = c \int_0^1 \frac{B_2(t, x)}{B_1(t, x)} dt,$$

где $B_2(t, x)$ — другое интерполяционное произведение Бляшко. Его нули отмечены точками на рис. VIII.8. Разложение (7.2)

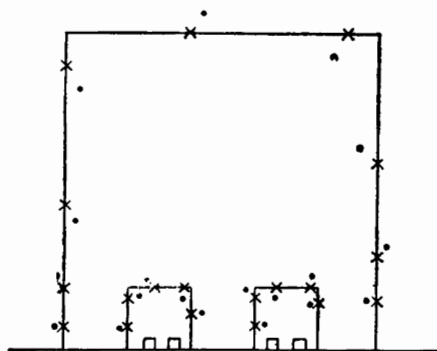


Рис. VIII.8. Нули $B_1(t, z)$ отмечены крестиками, нули $B_2(t, z)$ — точками.

имеет вид

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} b(x) + (\operatorname{Im} b(x))^\sim.$$

Приложение. Комплекс Кошуля

Комплекс Кошуля — это общий алгебраический механизм, который в случае задачи о короне ведет от гладких решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ к соответствующим дифференциальным уравнениям (2.9). В нашей ситуации он работает так. Пусть $\mathfrak{A}$ — кольцо всех аналитических функций в D и $\mathcal{E}$ — кольцо всех бесконечно дифференцируемых функций в D ; $\mathfrak{A}$ — подкольцо кольца $\mathcal{E}$. Далее пусть $\mathcal{E}_{(0,1)}$ есть $\mathcal{E}$ -модуль форм типа $(0, 1)$ вида $g d\bar{z}$, $g \in \mathcal{E}$. В нашем случае $\mathcal{E}_{(0,1)}$ и $\mathcal{E}$ изоморфны, но нам будет удобно различать функции $h(z)$ и дифференциальные формы $h(z) d\bar{z}$ типа $(0, 1)$. Определим оператор $\bar{\partial}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{(0,1)}$ формулой

$$\bar{\partial}h = (\partial h / \partial \bar{z}) d\bar{z}.$$

Тогда $\mathfrak{A} \subset \mathcal{E}$ — ядро этого оператора.

Ниже пусть $\mathcal{R}$ обозначает или $\mathfrak{A}$, или $\mathcal{E}$, или $\mathcal{E}_{(0,1)}$. Положим $\Lambda^0(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, и пусть $\Lambda^1(\mathcal{R})$ обозначает модуль всех комбинаций вида

$$\sum_{j=1}^n h_j e_j, \quad h_j \in \mathcal{R},$$

где e_j — формальные базисные элементы. Таким образом, $\Lambda^1(\mathcal{R})$ — прямая сумма n экземпляров $\mathcal{R}$. Далее, пусть $\Lambda^2(\mathcal{R})$ —

модуль всех комбинаций вида

$$\sum_{j, k=1}^n h_{jk} e_j \wedge e_k, \quad h_{jk} \in \mathcal{R},$$

где мы предполагаем выполнение обычной аксиомы внешней алгебры

$$(A.1) \quad e_j \wedge e_k = -e_k \wedge e_j.$$

Размерность $\Lambda^2(\mathcal{R})$ над $\mathcal{R}$ равна $n(n-1)/2$. Определим оператор $\bar{\partial}: \Lambda^p(\mathcal{E}) \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{E}_{(0,1)})$, $p = 0, 1, 2$, как почленное дифференцирование коэффициентов при e_j или $e_j \wedge e_k$:

$$\bar{\partial}(\sum h_j e_j) = \sum (\bar{\partial} h_j) e_j, \quad \bar{\partial}(\sum h_{jk} e_j \wedge e_k) = \sum \bar{\partial} h_{jk} e_j \wedge e_k.$$

Тогда ядро оператора $\bar{\partial}$ есть $\Lambda^p(\mathcal{U}) \subset \Lambda^p(\mathcal{E})$. Используя (1.2) и разбиение единицы (если наши функции неограничены), мы видим, что отображение $\bar{\partial}$ при всех p сюръективно. Это означает, что последовательность

$$0 \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{U}) \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^p(\mathcal{E}_{(0,1)}) \rightarrow 0$$

точна: ядро каждого следующего отображения равно образу предыдущего. Пусть $\tau \in \Lambda^p(\mathcal{E})$, $p = 0, 1$, а $\omega \in \Lambda^q(\mathcal{R})$, $q = 0, 1$, где $\mathcal{R}$ обозначает или $\mathcal{E}$, или $\mathcal{E}_{(0,1)}$. Внешнее произведение $\tau \wedge \omega \in \Lambda^{p+q}(\mathcal{R})$ определяется правилами

$$f \wedge g = fg, \quad f \wedge g e_j = f e_j \wedge g = f g e_j, \quad f e_j \wedge g e_k = f g e_j \wedge e_k$$

и требованием $\mathcal{E}$ -билинейности отображения $(\tau, \omega) \rightarrow \tau \wedge \omega$ (т. е. оно должно быть $\mathcal{E}$ -линейным по каждому аргументу).

Пусть теперь $f_1, \dots, f_n$ — данные задачи о короне. При $p = 1, 2$ определим оператор $J: \Lambda^p(\mathcal{R}) \rightarrow \Lambda^{p-1}(\mathcal{R})$ формулой

$$J(h e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} f_{j_k} h e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_k} \wedge \dots \wedge e_{j_p},$$

где «крышка» над сомножителем e_{j_k} означает, что его нужно вычеркнуть. Отображение J определяется на всем модуле $\mathcal{R}$ условием $\mathcal{E}$ -линейности. Множители $(-1)^{k+1}$ делают определение J совместимым с (A.1). В частности,

$$J\left(\sum_{j=1}^n g_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n f_j g_j.$$

Простое вычисление показывает, что $J^2 = 0$, и возникает еще одна последовательность

$$\Lambda^2(\mathcal{R}) \xrightarrow{J} \Lambda^1(\mathcal{R}) \xrightarrow{J} \mathcal{R} \rightarrow 0.$$

Пусть теперь $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения задачи о короне. Тогда $\varphi = \sum \varphi_j e_j \in \Lambda^1(\mathcal{E})$ и $J(\varphi) = \sum f_j \varphi_j = 1$. Если $\lambda \in \Lambda^p(\mathcal{R})$ и $J(\lambda) = 0$, то

$$J(\varphi \wedge \lambda) = J(\varphi) \wedge \lambda - \varphi \wedge J(\lambda) = \lambda.$$

Следовательно, J -последовательность точна при $\mathcal{R} = \mathcal{E}$ или $\mathcal{R} = \mathcal{E}_{(0,1)}$. Наконец, поскольку f_j аналитичны, то $J\bar{\partial} = \bar{\partial}J$, и мы приходим к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Lambda^2(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{J} & \Lambda^1(\mathfrak{M}) & \xrightarrow{J} & \mathfrak{M} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \Lambda^2(\mathcal{E}) & \xrightarrow{J} & \Lambda^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{E} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \\
 \Lambda^2(\mathcal{E}_{(0,1)}) & \xrightarrow{J} & \Lambda^1(\mathcal{E}_{(0,1)}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{E}_{(0,1)} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

В этой диаграмме точны столбцы и точны две последние строки. Мы хотим найти такое $g = \sum g_j e_j \in \Lambda^1(\mathfrak{M})$, чтобы $J(g) = \sum f_j g_j = 1$. Но $\varphi = \sum \varphi_j e_j \in \Lambda^1(\mathcal{E})$, $J(\varphi) = 1$, и диаграммный поиск сейчас даст нам и g , и дифференциальные уравнения (2.9). Поскольку $J\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}J\varphi = 0$, то $\bar{\partial}\varphi = J\omega$, $\omega = \varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \in \Lambda^2(\mathcal{E}_{(0,1)})$. Существует $b = \sum b_{jk} e_j \wedge e_k \in \Lambda^2(\mathcal{E})$, для которого $\bar{\partial}b = \omega$. Это в точности система (2.9). Тогда $\bar{\partial}Jb = J\bar{\partial}b = J\omega = \bar{\partial}\varphi$, так что $\bar{\partial}(\varphi - Jb) = 0$ и $g = \varphi - Jb \in \Lambda^1(\mathfrak{M})$. Но $J^2 = 0$, и поэтому

$$Jg = J(\varphi - Jb) = J\varphi = 1.$$

Компоненты вектора $g \in \Lambda^1(\mathfrak{M})$ как раз и дают решения (2.7), (2.8) задачи о короне.

Для задачи о короне в области в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, комплекс Кошуля содержит больше столбцов и строк, но и там он сводит задачу к системе дифференциальных уравнений.

Замечания

Теорема 1.1 есть у Карлесона [1962a], а теорема 1.2 — это недавняя идея Волфа из [1980]. Теорема 2.1 принадлежит Карлесону [1962a], но доказательство в разд. 2 заимствовано у Волфа [1980].

Связь между теоремой о короне, дифференциальными уравнениями и комплексом Кошуля отметил Хермандер [1967a] (см. также Карлесон [1970]), но основные трудности при этом остались теми же, что и у Карлесона [1962a].

Теорема 3.2 почерпнута у Карлесона [1970]. Теоремы разд. 3 можно также вывести из теоремы о гармонических мерах, известной как *лемма Халла*. Пусть E — такое компактное подмножество верхней полуплоскости, что область $\Omega = \mathbb{H} \setminus E$ связна, и пусть $\omega(z)$, $z \in \Omega$, — гармоническая мера E . Леммой Халла называется оценка

$$\omega(z) \geq \frac{2}{3} \frac{1}{\pi} \int_{\hat{E}} \frac{y}{(|x|+t)^2 + y^2} dt,$$

где $\hat{E} = \{|z|: z \in E\}$ — угловая проекция E на положительную вещественную ось, а ядро Пуассона представляет образ $-|x|+iy$ точки $z = x+iy$ при складке. Доказательство см. у Дьюрена [1970] или Халла [1937]. После элементарных конформных отображений это неравенство дает оценки для длины вертикальной проекции. Лемма Халла имеет некоторые преимущества, потому что она дает простые соотношения между α и β в теоремах 3.1 и 3.2 (см. упражнение 7). С другой стороны, доказательство в тексте иллюстрирует мощь максимальных функций. Кстати, наилучшая постоянная вместо $2/3$ в лемме Халла неизвестна (Хейман [1974]).

Теорема 4.1 принадлежит Маршаллу [1976b]. Зискинд [1976] получил чуть более слабый результат в ходе доказательства теоремы 2.2. Конструкция контура Γ происходит из фундаментальной статьи Карлесона [1962a]. Если в качестве Γ взять линию уровня $|u(z)| = v$, то ничего не получится и придется приближать линию уровня более короткой кривой (см. упр. 8).

Теорема 6.1 подсказана работами Варопулоса [1977a, b]. Мысль о том, что гармонические функции подражают очень простым мартингалам, блестяще развита в лекции Фейффермана [1974]. Дальберг [1980] существенно усилил теорему 6.1.

Результаты разд. 7 заимствованы у Джонса [1980b]. Столь эффективное в доказательстве (7.2) продолжение $F(z)$ принадлежит Варопулосу [1977a]. Конструктивное доказательство аналога (7.2) для n -мерного евклидова пространства — важная открытая проблема вещественного анализа. Как это часто бывает с многомерными обобщениями, главный вопрос состоит в устранении произведений Бляшке¹⁾.

¹⁾ Еще одну важную открытую проблему составляет вопрос о справедливости теоремы о короне для H^∞ в шаре или полукруге пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (см. Варопулос [1977a]). Существуют ограниченные области голоморфности, обладающие короной (Гамелин [1979]). Короной обладают и некоторые римановы поверхности (Гамелин [1979], гл. IV). Теорема о короне для

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Пусть функция $G(z)$ непрерывна в открытом единичном круге. Предположим, что существуют функции $b_n(z) \in C^1\{|z| < 1 - 1/n\}$, такие, что $\partial b_n / \partial \bar{z} = G$ и $|b_n| \leq K$, где K не зависит от n . Тогда рассуждение с нормальными семействами показывает, что существует функция $b(z) \in C^1(D)$, у которой $\partial b / \partial \bar{z} = G$.

2. (а) Если G — ограниченная функция с компактным носителем на плоскости и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint G(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

то F ограничена, непрерывна и $\partial F / \partial \bar{z} = G$ в смысле обобщенных функций.

(б) Пусть $f(z)$ — ограниченная аналитическая функция в открытом множестве W комплексной плоскости и $\lambda \in \partial W$. Положим $f = 0$ в $\mathbb{C} \setminus W$. Пусть $\chi(z) \in C_0^\infty$ имеет носитель в $\{|z - \lambda| < \varepsilon\}$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ при $|z - \lambda| < \varepsilon/2$ и $|\partial \chi / \partial \bar{z}| \leq c/\varepsilon$. Тогда функция

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

обладает следующими свойствами:

- (i) $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \chi \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ в смысле обобщенных функций,
- (ii) $F(z)$ аналитична в $W \cup \{|z - \lambda| > \varepsilon\}$,
- (iii) $|F(z)| \leq C \sup \{|f(\zeta)| : |\zeta - \lambda| < \varepsilon\}$,
- (iv) $F(z) - f(z) \in C\{|z - \lambda| < \varepsilon/2\}$.

(с) Пусть Ω — открытое плоское множество и $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\Omega)$ — ограниченные аналитические функции в Ω . Если существуют конечное открытое покрытие $\{U_k\}_1^N$ области Ω и функции $g_j^k \in H^\infty(\Omega \cap U_k)$, такие, что $\sum_j f_j g_j^k = 1$ в $\Omega \cap U_k$, то существуют такие функции $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\Omega)$, что $\sum f_j g_j = 1$. Пусть $\chi_k \in C_0^\infty(U_k)$, $\sum \chi_k = 1$ в Ω . Исправьте гладкие решения

многосвязных областей обсуждается (с помощью «оператора математического ожидания» Форелли [1966*]) в работах Толоконникова [1981*], Кшиштофа [1982*]. Интересное теоретико-операторное обобщение задачи о короне предложил Б. С.-Надь (Никольский, Хавин и Хрушев [1978], с. 99); частичное решение задачи Надя дал В. И. Васюнин (Толоконников [1981*]). Зависимость гладкости решения задачи о короне от гладкости данных изучалась в работах Шамомяна [1981*], Толоконникова [1983*]. — Прим. ред.

$\varphi_j = \sum_k \chi_k g_j^k$, чтобы получить аналитические решения g_j . Используйте часть (а) для решения возникающих уравнений Коши — Римана (2.9).

(d) Из предположения, что круг плотен в $\mathfrak{M}$, вытекает существование такой постоянной $C(n, \delta)$, что каждая задача о короне (2.1), (2.2) имеет решение с оценкой $\|g\|_\infty \leq C(n, \delta)$. Для доказательства достаточно установить теорему о короне для открытого множества $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-1 < x < 1, 2^{-k-1} < y < 2^{-k}\}$,

которое конформно-эквивалентно счетному объединению непесекающихся кругов. Итак, пусть $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(W)$, $\|f_j\|_\infty \leq 1$, $\max_j |f_j(z)| \geq \delta$, $z \in W$. По теореме о локализации из части

(с) достаточно найти решения в $W \cap \{|z - \lambda| < \eta\}$ при некотором $\eta > 0$ и $-1 \leq \lambda \leq 1$. Согласно (b), существуют ограниченная односвязная область $\Omega_\lambda \supset W \cap \{|z - \lambda| < \varepsilon\}$ и функции $F_1, \dots, F_n \in H^\infty(\Omega_\lambda)$, для которых $\lim_{z \rightarrow \lambda} F_j(z) - f_j(z) = 0$. В Ω_λ функции $F_0(z) = z - \lambda$ и $F_1, \dots, F_n$ образуют данные задачи о короне. Из решений $G_0, \dots, G_n$, у которых $\sum F_j G_j = 1$, можно получить решения исходной задачи в $W \cap \{|z - \lambda| < \eta\}$.

*(e) Существуют такие постоянные $C(n, \delta, m)$, что любая задача о короне в любой плоской m -связной области имеет решения с $\|g_j\| \leq C(n, \delta, m)$.

Части (с) — (е) заимствованы у Гамелина [1970]; он также заметил, что теорема о короне справедлива во всех плоских областях тогда и только тогда, когда постоянные в части (е) можно выбирать не зависящими от m ; см. также Беренс [1971]. Для общих равномерных алгебр часть (е) неверна (см. Розэй [1968]¹⁾).

3. Пусть $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$, $\|f_j\| \leq 1$, $g \in H^\infty$ и

$$|g(z)| \leq \max_j |f_j(z)|.$$

Отсюда не следует, что g лежит в идеале, порожденном функциями $f_1, \dots, f_n$. Если B_1 и B_2 — такие два произведения Бляшке с различными нулями, что $\inf(|B_1(z)| + |B_2(z)|) = 0$, то $|B_1 B_2| \leq \max(|B_1|^2, |B_2|^2)$, но $B_1 B_2$ нельзя представить в виде $g_1 B_1^2 + g_2 B_2^2$. Этот пример принадлежит Рао [1967].

4. Пусть $g, f_1, f_2 \in H^\infty$, $\|g\|_\infty \leq 1$, $\|f_j\|_\infty \leq 1$ и

$$|g(z)| \leq \max(|f_1(z)|, |f_2(z)|).$$

¹⁾ Оценки решения задачи о короне, не зависящие от количества данных, получили Толоконников (см. Никольский [1980*], с. 101, Толоконников [1980*], [1981*]), Розенблум [1980] и Утияма [1981*]. Оценки решений рассмотрены также в работе Джонса [1980d]. — *Прим. ред.*

Представление $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2$, $g_j \in H^\infty$, возможно тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = \frac{g^2 (\bar{f}_1 \bar{f}'_2 - \bar{f}'_1 \bar{f}_2)}{(|\bar{f}_1|^2 + |\bar{f}_2|^2)^2}$$

имеет решение, ограниченное на ∂D .

5. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — данные задачи о короне. Тогда, согласно (2.6),

$$\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{f}_j}{\psi^3} \sum_{l \neq j} f_l (\bar{f}_l \bar{f}'_k - \bar{f}'_l \bar{f}_k), \quad \psi = \sum |f_l|^2,$$

и аналитичность f_l можно использовать для того, чтобы решить уравнение

$$\frac{\partial b}{\partial \bar{z}} = \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}}$$

с оценкой вообще без обращения к мерам Карлесона. Благодаря двойственности и формуле Грина, как и в теореме 1.2, достаточно оценить величины

$$J_1 = \left| \iint_D k'(z) \varphi_j(z) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} \log \frac{1}{|z|} dx dy \right|,$$

$$J_2 = \left| \iint_D k(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} \right) \log \frac{1}{|z|} dx dy \right|, \quad k \in H_0^1, \quad \|k\|_1 \leq 1.$$

Но $k(z)$ можно представить в виде $k = (k_1 + k_2)/2$, где k_j не имеют нулей; поэтому мы можем заменить $k(z)$ на $g(z)^2$, где $g \in H^2$, $\|g\|_2^2 \leq 1$. Тогда J_1 не превышает суммы $2(n-1)$ членов вида

$$\begin{aligned} 2\delta^{-3} \iint |g g' \bar{f}'_l| \log \frac{1}{|z|} dx dy &\leq \\ &\leq 2\delta^{-3} \left(\iint |g'|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \left(\iint |g f'_l|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Но $g f'_l = (g f_l)' - g' f_l$, и второй множитель ограничен величиной

$$\left(\iint |(g f_l)'|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} + \left(\iint |g'|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2},$$

так что $J_1 \leq 2\delta^{-3} \|g\|_2 (\|g f_l\|_2 + \|g\|_2) \leq 8\delta^{-3}$. Вид выражения $(\partial/\partial z)(\varphi_j \partial \varphi_k / \partial \bar{z})$ определен в доказательстве теоремы 2.1; он

показывает, что J_2 не превосходит суммы $2n^2$ членов вида

$$\delta^{-4} \iint |g^2 f'_p f'_q| \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq \\ \leq \delta^{-4} \left(\iint |g f'_p|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \left(\iint |g f'_q|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2}.$$

Дважды повторяя примененный выше прием, получаем $J_2 \leq \leq Cn^2 \delta^{-4}$ (см. Гамелин [1980]).

6. (а) Вертикальную проекцию в теореме 3.1 можно заменить некасательной. Пусть $E_a^* = \{t: \Gamma_a(t) \cap E_a \neq \emptyset\}$, где $\Gamma_a(t) =$ — это сектор $\{z: |t - x| < ay\}$, $a > 0$. Если $\|u\|_\infty \leq 1$ и $\sup_{T(Q)} |u(z)| \geq \geq \beta = \beta(\alpha, \varepsilon, a)$, то $|E_a^*| < \varepsilon$.

(б) В теореме 3.2 положение с некасательной проекцией немного сложнее. Пусть N — положительное целое число, $\delta > 0$ и $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{j\delta/N + i\delta, -\infty < j < \infty\}$. Тогда $B(z)$ имеет нуль в каждом секторе $\Gamma_{1/N}(t) = \{z: |x - t| < < y/N\}$, $t \in \mathbb{R}$. Значит, какое бы $\alpha > 0$ мы ни выбрали, множество $E_\alpha = \{|B(z)| < \alpha\}$ пересекает все секторы $\Gamma_{1/N}(t)$. Однако при фиксированном N

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |B(i)| = e^{-2\pi N}.$$

Таким образом, при $\beta < e^{-2\pi N}$ заключение теоремы 3.2 не может оставаться справедливым для секторов с углом $2 \arctg(1/N)$.

(с) Однако при данном $\beta > 0$ существуют такие $N = N(\beta, \varepsilon)$ и $\alpha = \alpha(\beta, \varepsilon)$, что если $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ и $\sup_{T(Q)} |f(z)| \geq \geq \beta$, то $|\{t: \Gamma_{1/N}(t) \cap E_\alpha \neq \emptyset\}| < \varepsilon$.

7. Выведите из леммы Халла следующий вариант теоремы 3.2. Пусть R — прямоугольник $\{0 \leq x \leq A, 0 < y \leq 1\}$ и $0 < \beta < 1$. Если $f(z) \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ и $|f(z_0)| \geq \geq \beta$ в некоторой точке z_0 верхней половины R , то при достаточно большом A мера вертикальной проекции множества $\{z \in R: |f(z)| \leq \beta^7\}$ не превосходит $0,9A$. Получите аналогичный результат, в котором функция $\log|f(z)|$ заменена произвольной отрицательной субгармонической функцией.

8. Пусть $u(z)$ — ограниченная гармоническая функция в $\mathcal{H}$ с граничными значениями

$$u(t) = \begin{cases} +1, & 2n \leq t < 2n+1, \\ -1, & 2n-1 \leq t < 2n, \end{cases}$$

где n — целое число. Длина дуги на линии уровня $\{u = 0\}$ не является мерой Карлесона, потому что $u(z) = 0$ на каждой вертикальной прямой $\{x = n\}$. Значит, существуют внешние функции, модули которых имеют большие множества уровня.

Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{n+i, -\infty < n < \infty\}$. На линии уровня $\{|B(z)| = e^{-2\pi}\}$ длина дуги не является мерой Карлесона. Переносим эти функции в круг, мы получаем множества уровня бесконечной длины. (См. Пираниян и Вейцман [1978], а также Белна и Пираниян [1981].) Отыскать функцию, у которой все множества уровня имеют бесконечную длину, гораздо труднее. (См. статью Джонса [1980].)

9. Докажите с помощью следствия 6.2, что каждая гармонически интерполяционная последовательность является H^∞ -интерполяционной.

10. Пусть $1/\varepsilon$ — положительное целое число и

$$u(e^{i\theta}) = \prod_{n=1}^{1/\varepsilon} (1 + i(10\varepsilon \cos 4^n \theta)).$$

Тогда $|u(e^{i\theta})| \leq C_1$, где C_1 не зависит от ε . Пусть число $N_\varepsilon(\theta)$ указывает, сколько раз гармоническое продолжение функции $u(e^{i\theta})$ на радиусе $\{re^{i\theta}, 0 < r < 1\}$ колеблется на величину ε (ср. следствие 6.2). Тогда

$$\int_0^{2\pi} N_\varepsilon(\theta) d\theta \geq c_2/\varepsilon^2,$$

где c_2 не зависит от ε .

11. (а) Если $u(x) \in \text{ВМО}$, $u(z) = P_y * u(x)$ и $0 < \delta < 1/2$, то для каждого интервала I

$$\left| u_I - \frac{1}{|I|} \int_I u(x + i\delta|I|) dx \right| \leq C\delta \left(\log \frac{1}{\delta} \right) \|u\|_*,$$

где C не зависит от I и $u(z)$.

(б) Если $\|u\|_* \leq 1$ и $0 < \varepsilon < 1$, то найдется такая функция $\varphi(z) \in C^\infty\{y > 0\}$, что $|\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon$ и

$$\iint_Q |\nabla \varphi(z)| dx dk \leq C(\varepsilon) \ell(Q).$$

Можно следовать доказательству теоремы 6.1, но теперь нужно использовать условие ВМО для контроля за скачками функций φ_1 и φ_2 .

(с) Используйте (б) при $\varepsilon = 1$ для доказательства двойственности между H^1 и ВМО.

12. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Предположим, что для любой ограниченной гармонической функции $u(z)$ в круге, $\|u\|_\infty \leq 1$, существует другая гармоническая функция $\varphi(z)$, для которой $|\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon$ и $\iint_Q |\nabla \varphi| dx dy \leq C(\varepsilon)$. Тогда если $f \in L^1$ и

среднее значение f равно 0, то

$$\|f\|_1 \leq C' \sup_{|z| < 1} (1 - |z|) |\nabla f(z)|,$$

где через $f(z)$ обозначено гармоническое продолжение функции $f(t)$. Но для функции $f(z) = \sum_{k \leq N} z^{2^k}$ это неравенство неверно, если N достаточно велико. Это значит, что функция $\varphi(z)$ из теоремы 6.1 не может всегда быть гармонической.

13. Если функция $G(z)$ непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости и имеет компактный носитель, то методы разд. 7 доставляют такую непрерывную функцию $b(z)$, что $\partial b / \partial \bar{z} = G$ и $\|b\|_\infty \leq CN(|G| dx dy)$, где $N(\mu)$ обозначает карлесонову норму меры μ .

14. При данной функции $f \in L^\infty$ используйте методы разд. 7 для построения такой функции $g \in H^\infty$, что

$$\|f - g\|_\infty \leq C \operatorname{dist}(f, H^\infty)$$

с постоянной C , не зависящей от f .

15. Пусть B — наименьшая замкнутая подалгебра в H^∞ , содержащая функции z и $(1 - z)^i$. Тогда круг D будет открытым подмножеством в $\mathfrak{M}_B$, функция $|(1 - z)^i|$ ограничена в D снизу, но $(1 - z)^{-i} \notin B$. Значит, D не плотен в $\mathfrak{M}_B$ (Доусон [1975]).

Мы переходим к изложению теории Д. Сарасона, С.-Ю. Чанг и Д. Маршалла о равномерных алгебрах, заключенных между H^∞ и L^∞ . Эти результаты прекрасны сами по себе, а их доказательства представляют замечательное переплетение конкретного с абстрактным. Теорема о короне и доказательство теоремы двойственности для ВМО из гл. VI дают сложную технику, но теория максимальных идеалов скрепляет доказательство в целом.

В разд. 5 излагается локальная теорема Фату, фундаментальный результат о гармонических функциях. На самом деле она могла бы появиться еще в первой главе, но обсуждается здесь по техническим причинам.

1. Проблема Дугласа

Пусть A — равномерно замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ . Например, пусть $\mathcal{B}$ — некоторое множество внутренних функций из H^∞ и $A = [H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]$ — замкнутая алгебра, порожденная множеством $H^\infty \cup \overline{\mathcal{B}}$. Так как $f_1 \bar{b}_1 + f_2 \bar{b}_2 = (f_1 b_2 + f_2 b_1) \overline{b_1 b_2}$ при $f_i \in H^\infty$, $b_i \in \mathcal{B}$, то A совпадает с равномерным замыканием множества функций

$$\mathfrak{A} = \{f \bar{b}_1^{n_1} \bar{b}_2^{n_2} \dots \bar{b}_k^{n_k} : f \in H^\infty, b_1, \dots, b_k \in \mathcal{B}\}.$$

Алгебры вида $[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]$ называются *алгебрами Дугласа*. Простейший пример — алгебра $[H^\infty, \bar{z}]$ — изучается в разд. 2. Верна замечательная теорема о том, что вообще каждая замкнутая алгебра, заключенная между H^∞ и L^∞ , является алгеброй Дугласа. Это утверждение было впервые высказано Р. Дж. Дугласом как гипотеза, а затем доказано С.-Ю. Чанг и Д. Маршаллом, на которых большое влияние оказала ранняя работа Д. Сарасона.

Для данной замкнутой алгебры A , $H^\infty \subset A \subset L^\infty$, положим

$$\mathcal{B}_A = \{b : b \in H^\infty, b \text{ — внутренняя функция и } b^{-1} \in A\}.$$

(В этой главе мы обозначаем внутренние функции строчной буквой b , а привычный символ B обозначает алгебру, расположенную между H^∞ и L^∞ .) Ясно, что $\mathcal{B}_A$ — наибольшее возможное множество $\mathcal{B}$, для которого $A \supset [H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]$, и A является алгеброй Дугласа тогда и только тогда, когда $A = [H^\infty, \overline{\mathcal{B}_A}]$. Если

$A = H^\infty$, то $\mathcal{B}_A$ состоит из постоянных, равных по модулю 1, а вопрос Дугласа становится тривиальным. Если $A = L^\infty$, то $\mathcal{B}_A$ содержит все внутренние функции, и $L^\infty = [H^\infty, \overline{\mathcal{B}}_A]$ по теореме Дугласа — Рудина V.2.1. Положим $A^{-1} = \{f \in A: f^{-1} \in A\}$ и

$$\mathcal{U}_A = \{u \in A^{-1}: |u| = 1 \text{ почти всюду}\}.$$

Теорема 1.1. *Если A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , то она порождена множествами H^∞ и $\mathcal{U}_A$, т. е. $A = [H^\infty, \mathcal{U}_A]$.*

Доказательство. Если $f \in A^{-1}$, то $\log|f| \in L^\infty$ и найдется функция $g \in (H^\infty)^{-1}$, для которой $|g| = |f|$ почти всюду. Тогда $u = g^{-1}f \in \mathcal{U}_A$ и $f = gu \in [H^\infty, \mathcal{U}_A]$. Но каждая функция из A является суммой постоянной и обратимой функций, что доказывает теорему. $\square$

Поскольку $A \subset L^\infty$, то $b^{-1} = \bar{b}$ при $b \in \mathcal{B}_A$, и поэтому $\overline{\mathcal{B}}_A \subset \mathcal{U}_A$. Для решения проблемы Дугласа нужно показать, что после уменьшения множества $\mathcal{U}_A$ до $\overline{\mathcal{B}}_A$ алгебра A по-прежнему будет им порождаться как модуль над H^∞ .

Центральную роль в доказательстве гипотезы Дугласа играют пространства максимальных идеалов. Напомним наши обозначения $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{H^\infty}$ для спектра, или пространства максимальных идеалов, алгебры H^∞ , и $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$ — для спектра алгебры L^∞ , который совпадает с границей Шилова для H^∞ .

Теорема 1.2. *Если A — замкнутая подалгебра L^∞ , содержащая H^∞ , то ее пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}_A$ отождествляется с некоторым замкнутым подмножеством в $\mathfrak{M}$, содержащим X , причем X является границей Шилова для A .*

Доказательство. X можно отождествить с замкнутым подмножеством в $\mathfrak{M}_A$, потому что A — замкнутая подалгебра в $L^\infty = C(X)$, и поскольку $A \supset H^\infty$, то A разделяет точки множества X . Это означает, что X — замкнутая граница для A . Но A — логмодулярная подалгебра в $C(X)$ (разд. V.4), и поэтому X — ее граница Шилова.

Естественное отображение сужения $\pi: \mathfrak{M}_A \rightarrow \mathfrak{M}$ тождественно на X ; нам нужно показать, что оно взаимно однозначно на $\mathfrak{M}_A$. Причина этого в том, что любой гомоморфизм $m \in \mathfrak{M}_{H^\infty}$ имеет по теореме V.4.2 единственную представляющую меру на X . Пусть $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}_A$ и μ_1, μ_2 — их представляющие меры на X по отношению к алгебре A . Если $\pi(m_1) = \pi(m_2)$, то

$$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2, \quad f \in H^\infty.$$

Значит, $\mu_1 = \mu_2$ ввиду единственности представляющих мер для H^∞ и

$$\int_X g d\mu_1 = \int_X g d\mu_2, \quad g \in A.$$

Стало быть, $m_1 = m_2$, и π взаимно однозначно. Так как отображение π еще и непрерывно, а $\mathfrak{M}_A$ — компакт, то π гомеоморфно отображает $\mathfrak{M}_A$ на некоторое подмножество в $\mathfrak{M}$. $\square$

Для любого гомоморфизма $m \in \mathfrak{M}$ обозначим через μ_m его представляющую меру на X . Конечно, если $m \in \mathfrak{M}_A$, то μ_m будет его (единственной) представляющей мерой и по отношению к A . Из соображений компактности соответствие $m \rightarrow \mu_m$ является гомеоморфизмом между $\mathfrak{M}$ и некоторым слабо компактным множеством вероятностных мер на X . Если отождествить каждую точку $x \in X$ с точечной нагрузкой δ_x , то этот гомеоморфизм окажется тождественным на X . По двойственности существует изометрия $L^\infty = C(X)$ в пространство $C(\mathfrak{M})$, и мы можем отождествить L^∞ с его образом в $C(\mathfrak{M})$ по формуле

$$(1.1) \quad f(m) = \int f d\mu_m, \quad f \in L^\infty.$$

Если $m \in D$, то (1.1) — это просто замаскированная формула Пуассона. Отображение (1.1) не является ни сюръективным, ни мультипликативным. Действительно, если A — алгебра и $H^\infty \subset A \subset L^\infty$, то по теореме 1.2

$$(1.2) \quad \mathfrak{M}_A = \{m \in \mathfrak{M}: f(m)g(m) = (fg)(m), f, g \in A\}.$$

Следовательно, если A и B — две алгебры и $H^\infty \subset B \subset A \subset L^\infty$, то $\mathfrak{M}_A \subset \mathfrak{M}_B$.

Теорема 1.3. Если A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , и $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_A$ — такое множество функций из A^{-1} , унимодулярных на X , что $A = [H^\infty, \mathcal{U}]$, то

$$\mathfrak{M}_A = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} \{m \in \mathfrak{M}: |u(m)| = 1\}.$$

Доказательство. Так как $A \subset L^\infty$, то $u^{-1} = \bar{u}$ при $u \in \mathcal{U}_A$. Для всякого $m \in \mathfrak{M}$ мера μ_m вещественна, поэтому $\bar{u}(m) = \overline{u(m)}$, $u \in L^\infty$. Стало быть, $1 = u(m)\bar{u}(m) = |u(m)|^2$ для $m \in \mathfrak{M}$ и $u \in \mathcal{U}_A$. Обратно, если $|u(m)| = \|u\| = 1$, то $u = u(m)$ на замкнутом носителе меры μ_m , потому что она вероятностная. Тогда если $|u(m)| = 1$ для всех $u \in \mathcal{U}$, то сужение алгебры $A = [H^\infty, \mathcal{U}]$ на замкнутый носитель меры μ_m совпадает с сужением H^∞ , и гомоморфизм m оказывается мультипликативным на A . $\square$

По теореме 1.3 разные алгебры Дугласа имеют и разные пространства максимальных идеалов, потому что $\mathfrak{M}_A$ опреде-

ляется внутренними функциями, обратимыми в A . Таким образом, вследствие теоремы Чанг — Маршалла каждая замкнутая алгебра между H^∞ и L^∞ однозначно определяется своим спектром. Это очень похоже на теорему Вермера о максимальности: каждая замкнутая алгебра между диск-алгеброй A_0 и $C(T)$ совпадает или с алгеброй A_0 , или с $C(T)$. Выбор одного из вариантов зависит от того, будет ли внутренняя функция z обратима в данной алгебре, т. е. будет ли пространство максимальных идеалов содержать точку 0. Гофман и Зингер дали доказательство теоремы Вермера, основанное именно на этом различии. В наших условиях их рассуждение дает следующий результат.

Теорема 1.4. Если A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , то или $A = H^\infty$, или $A \supset [H^\infty, \bar{z}]$.

Доказательство. Если $z \in A^{-1}$, то $\bar{z} \in A$ и $A \supset [H^\infty, \bar{z}]$. Если $z \notin A^{-1}$, то z лежит в некотором максимальном идеале алгебры A и найдется точка $m \in \mathfrak{M}_A$, в которой $z(m) = 0$. Но $\mathfrak{M}_A \subset \mathfrak{M}$, и поэтому гомоморфизм m может быть только вычислением значения функции в точке 0 (т. е. $m(f) = f(0)$). Значит, ввиду единственности представляющей меры мера $d\theta/2\pi$ мультипликативна на A и

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{in\theta} f(\theta) d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \dots, f \in A.$$

Следовательно, $A \subset H^\infty$. $\square$

Итак, существует много алгебр между H^∞ и L^∞ , но по теореме Чанг — Маршалла каждая такая алгебра определяется своими обратимыми в ней внутренними функциями, или, что то же самое, своим пространством максимальных идеалов. Доказательство Чанг и Маршалла состоит из двух шагов.

(i) Если A — алгебра Дугласа, а B — другая алгебра с тем же спектром, то $B = A$.

(ii) Для любой алгебры B , $H^\infty \subset B \subset L^\infty$, найдется алгебра Дугласа с тем же спектром, что и B .

Доказательство теоремы 1.4 состоит из двух похожих шагов, и, глядя в прошлое, можно сказать, что стратегия доказательства Чанг — Маршалла происходит из рассуждений Гофмана — Зингера о максимальных идеалах.

С алгеброй A , $H^\infty \subset A \subset L^\infty$, можно связать две C^* -алгебры. Первая из них — это

$$Q_A = A \cap \bar{A}$$

— наибольшая самосопряженная подалгебра в A . Вторая — это

$$C_A = [\mathcal{B}_A, \bar{\mathcal{B}}_A]$$

— самосопряженная алгебра (C^* -алгебра), порожденная множеством $\mathcal{B}_A$ всех обратимых в A внутренних функций. Для

$A = H^\infty$ имеем $Q_A = C_A = \mathbb{C}$. Если $A = L^\infty$, то $Q_A = L^\infty$, и по теореме Дугласа — Рудина $C_A = L^\infty$. Но вообще Q_A и C_A не совпадают. По ходу решения проблемы Дугласа мы намерены изучить C^* -алгебры Q_A и C_A . Вначале займемся простейшим частным случаем; тогда мы сможем узнать, что ждет нас в общем случае.

2. $H^\infty + C$

Пусть $C = C(T)$ — пространство всех непрерывных функций на единичной окружности, и пусть

$$H^\infty + C = \{f + g: f \in H^\infty, g \in C\}.$$

Это — линейное подпространство в L^∞ .

Лемма 2.1. *Подпространство $H^\infty + C$ равномерно замкнуто.*

Доказательство. Напомним, что по теореме IV.1.6 при $g \in C$

$$\text{dist}(g, H^\infty) = \text{dist}(g, A_0),$$

где A_0 обозначает диск-алгебру. Если $h \in L^\infty$ лежит в замыкании $H^\infty + C$, то найдутся такие функции $f_n \in H^\infty$ и $g_n \in C$, что $\|h - (g_n + f_n)\| < 2^{-n}$. Тогда $\text{dist}((g_n - g_{n+1}), H^\infty) < 2^{-n+1}$ и найдутся такие $k_n \in A_0$, что $\|g_n - g_{n+1} - k_n\|_\infty < 2^{-n+1}$. Положим $K_1 = 0$ и $K_n = k_1 + \dots + k_{n-1}$, $n > 1$. Тогда $G_n = g_n + K_n \in C$ и $\|G_n - G_{n+1}\|_\infty < 2^{-n+1}$. Значит, $G_n \Rightarrow g \in C$. Но $F_n = f_n - K_n = (f_n + g_n) - G_n \in H^\infty$, и F_n по норме сходятся к $h - g$. Поскольку сама алгебра H^∞ замкнута, то $h - g \in H^\infty$ и $h \in H^\infty + C$. $\square$

Теорема 2.2. $H^\infty + C$ является замкнутой подалгеброй в L^∞ , и

$$H^\infty + C = [H^\infty, \bar{z}].$$

Пространство максимальных идеалов алгебры $H^\infty + C$ совпадает с $\mathfrak{M} \setminus D$, т. е. с дополнением единичного круга в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. По определению множество функций

$$f(z) + \sum_{k=1}^N a_k \bar{z}^k, \quad f \in H^\infty,$$

плотно в $[H^\infty, \bar{z}]$, а по теореме Вейерштрасса оно плотно в $H^\infty + C$. Но $H^\infty + C$ замкнуто, и поэтому $H^\infty + C = [H^\infty, \bar{z}]$. Теорема 1.3 теперь показывает, что спектр алгебры $H^\infty + C$ совпадает с $\mathfrak{M} \setminus D$. $\square$

Следовательно, $H^\infty + C$ — алгебра Дугласа. Внутренняя функция $b(z)$ обратима в $H^\infty + C$ тогда и только тогда, когда

$|b(m)| > 0$ на $\mathfrak{M} \setminus D$, а это возможно тогда и только тогда, когда $b(z)$ — конечное произведение Бляшке. Значит, $\mathfrak{B}_{H^\infty + C}$ состоит из всех конечных произведений Бляшке, а соответствующая самосопряженная алгебра $C_{H^\infty + C}$ совпадает с C .

Теперь опишем $Q_{H^\infty + C}$. Это пространство обозначается символом QC и называется пространством *квазинепрерывных функций*. Конформное отображение $f(z)$ круга D на область $\{0 < x < 1, -2 < y < \sin(1/x)\}$ является функцией из H^∞ с непрерывной вещественной частью, но разрывной мнимой. Значит, $\operatorname{Im} f \in H^\infty + C$, и так как эта функция вещественна, то $\operatorname{Im} f \in QC$. Следовательно, $QC \neq C$.

Теорема 2.3. $QC = L^\infty \cap \operatorname{VMO}$.

Доказательство. Если $f \in L^\infty \cap \operatorname{VMO}$, то по теореме VI.5.2 существуют такие функции $\varphi, \psi \in C$, что $f = \varphi + H\psi$. Но тогда $H\psi \in L^\infty$ и $\psi + iH\psi \in H^\infty$. Таким образом,

$$f = -i(\psi + iH\psi) + (\varphi + i\psi) \in H^\infty + C.$$

То же самое верно и для $\bar{f}$, так что $f \in (H^\infty + C) \cap (\overline{H^\infty + C}) = QC$. Обратно, предположим, что f — вещественная функция из $H^\infty + C$. Тогда

$$f = (u + iHu) + (v + i\omega),$$

где $u + iHu \in H^\infty$, $v + i\omega \in C$. Но f вещественна, и поэтому $Hu = -\omega \in C$ и $u = H\omega$. Стало быть, $f = v + H\omega$, $v \in C$, $\omega \in C$ и $f \in \operatorname{VMO}$. Так как вещественные функции из $H^\infty + C$ порождают линейное пространство QC , то $QC \subset L^\infty \cap \operatorname{VMO}$. $\square$

Следствие 2.4. Пусть $f(z)$ — интеграл Пуассона функции $f \in L^\infty$. Если функция $|f(z)|$ имеет непрерывное продолжение на $\bar{D}$, то $f \in QC$.

Доказательство. По предположению $|f(e^{i\theta})|$ близко к $|f(z)|$, если $1 - |z|$ мало, а $e^{i\theta}$ близко к $z/|z|$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int |f(e^{i\theta}) - f(z)|^2 P_z(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int |f(e^{i\theta})|^2 P_z(\theta) d\theta - |f(z)|^2 < \varepsilon,$$

потому что основная масса ядра $P_z(\theta) d\theta / 2\pi$ сосредоточена вблизи $z/|z|$. Значит, $f \in \operatorname{VMO}$, и $f \in QC$ по теореме 2.3. $\square$

Следствие 2.5. Пусть A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ . Если $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M} \setminus D$, то $A = H^\infty + C$.

Доказательство. $H^\infty + C \subset A$, потому что $z \in A^{-1}$. Если $f, g \in A$, то функция $d(m) = (fg)(m) - f(m)g(m)$ непрерывна на $\mathfrak{M}$ и $d(m) = 0$ на $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M} \setminus D$. По непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что

$$(2.1) \quad |(fg)(z) - f(z)g(z)| < \varepsilon, \quad 1 - |z| < \delta.$$

Полагая $f = u$, $g = \bar{u}$, где $u \in \mathcal{U}_A$, мы получим $|1 - |u(z)|^2| < \varepsilon$ при $1 - |z| < \delta$. По следствию 2.4 $\mathcal{U}_A \subset H^\infty + C$ и по теореме 1.1 $A \subset H^\infty + C$. $\square$

Обратите внимание, как абстрактное условие $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M} \setminus D$ проявилось в этом доказательстве. Оно было превращено в более обозримое условие (2.1), условие «асимптотической мультипликативности» на A интеграла Пуассона. Поскольку условие (2.1) равносильно по теореме о короне условию $\mathfrak{M}_A \supset \mathfrak{M} \setminus D$, мы видим, что если $H^\infty \subset A \subset L^\infty$ и интеграл Пуассона асимптотически мультипликативен на A , то или $A = H^\infty$, или $A = H^\infty + C$.

Доказательство теоремы Чанг — Маршалла во многом будет состоять в обобщении теоремы 2.3 и следствия 2.5 на произвольные алгебры Дугласа.

3. Теорема Чанг и Маршалла

Теорема 3.1. *Если B — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , то существует множество $\mathcal{B}$ внутренних функций из H^∞ , для которого $B = [H^\infty, \bar{\mathcal{B}}]$.*

Иными словами, каждая равномерная алгебра между H^∞ и L^∞ является алгеброй Дугласа. Доказательство этой теоремы разбивается на две части. Мы нарушим исторический порядок и изложим часть Маршалла первой.

Теорема 3.2. *Если B — равномерная алгебра и $H^\infty \subset B \subset L^\infty$, то существует такое множество $\mathcal{B}$ интерполяционных произведений Бляшке, что $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_{[H^\infty, \bar{\mathcal{B}}]}$.*

Теорема утверждает, что найдется алгебра Дугласа с тем же спектром, что и B .

Лемма 3.3. *Если $b(z)$ — интерполяционное произведение Бляшке с нулями $\{z_n\} \subset D$, $t \in \mathfrak{M}$ и $b(t) = 0$, то t принадлежит замыканию множества $\{z_n\}$ в топологии пространства $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если предположить противное, то найдутся такие функции $f_1, \dots, f_k \in H^\infty$, что $f_j(t) = 0$, а множество $\{z_n\}$ не пересекается с

$$\bigcap_{j=1}^k \{z: |f_j(z)| < 1\}.$$

Тогда $\max |f_j(z_n)| \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, и так как последовательность $\{z_n\}$ интерполяционная, то можно найти функции $g_1, g_2, \dots, g_k \in H^\infty$, такие, что функция $G = f_1 g_1 + \dots + f_k g_k$ удовлетворяет условиям $G(z_n) = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Значит, $1 = G + bh$ при некотором $h \in H^\infty$, а это противоречит тому, что $G(t) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Мы уже проделали всю тяжелую работу в доказательстве теоремы VIII.4.1. Для каждой функции $u \in \mathcal{U}_B$ и каждого α , $0 < \alpha < 1$, теорема VIII.4.1 дает нам такое интерполяционное произведение Бляшке $b_{\alpha, u}$, что в D

$$(3.1) \quad |b_{\alpha, u}(z)| \leq 1/2, \text{ если } |u(z)| \leq \alpha,$$

и

$$(3.2) \quad |u(z)| \leq \beta(\alpha) < 1, \text{ если } b_{\alpha, u}(z) = 0.$$

Положим $\mathcal{B} = \{b_{\alpha, u} : u \in \mathcal{U}_B, 0 < \alpha < 1\}$. Мы убедимся в том, что спектры алгебр $[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]$ и B совпадают.

Если $b_{\alpha, u}(m) = 0$, то, согласно (3.2) и лемме 3.3, $|u(m)| \leq \beta(\alpha) < 1$. По теореме 1.3 это означает, что $m \notin \mathcal{M}_B$. Значит, все $b_{\alpha, u}$ обратимы в B , $[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}] \subset B$ и $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}_{[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]}$ ввиду (1.2).

Пусть теперь $m \in \mathcal{M}_{[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]}$. По теореме 1.3 $|b_{\alpha, u}(m)| = 1$ при всех $b_{\alpha, u} \in \mathcal{B}$. По теореме о короне найдется направление $\{z_j\} \subset D$, которое сходится к m . Следовательно, $\lim_j |b_{\alpha, u}(z_j)| = 1$ и (3.1) дает $|u(m)| = 1$ для всех функций $u \in \mathcal{U}_B$. Тогда по теореме 1.3 $m \in \mathcal{M}_B$ и $\mathcal{M}_{[H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]} \subset \mathcal{M}_B$. $\square$

Теперь мы переходим к той половине теоремы 3.1, которая принадлежит Чанг.

Теорема 3.4. Пусть A и B — две подалгебры в L^∞ , содержащие H^∞ . Если $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B$ и A — алгебра Дугласа, то $A = B$.

Ясно, что теоремы 3.2 и 3.4 вместе доказывают основную теорему 3.1. На самом деле можно утверждать даже больше, так как в теореме 3.2 говорится конкретно об интерполяционных произведениях Бляшке: Каждая равномерная алгебра A , $H^\infty \subset A \subset L^\infty$, порождена H^∞ и некоторыми функциями, комплексно сопряженными с интерполяционными произведениями Бляшке.

Доказательство теоремы 3.4 зависит от описания алгебры Дугласа $A = [H^\infty, \overline{\mathcal{B}}]$ в терминах интегралов Пуассона. Пусть $b(z)$ — внутренняя функция и $0 < \delta < 1$; определим область

$$G_\delta(b) = \{z : |b(z)| > 1 - \delta\}.$$

Например, $G_\delta(z)$ — это кольцо $\{1 - \delta < |z| < 1\}$, а $G_\delta(b)$, где $b(z) = \exp((z+1)/(z-1))$, — это область между T и окружностью в D , которая касается T в точке $z = 1$. Положим для $f \in L^1(T)$

$$dv_f = \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy.$$

В разд. VI.3 аналогичная мера, но с $|\nabla f|^2$ вместо $|\partial f/\partial \bar{z}|^2$, обозначалась через λ_f . Поскольку

$$|\nabla f|^2 = 2(|\partial f/\partial z|^2 + |\partial f/\partial \bar{z}|^2)$$

и $\partial f/\partial z = \overline{\partial \bar{f}/\partial \bar{z}}$, то $\lambda_f = 2(v_f + \bar{v}_f)$. В частности, меры λ_f и v_f эквивалентны для вещественной функции f . Мы знаем из упражнения VI.14, что $f \in \text{VMO}$ тогда и только тогда, когда каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое δ , $0 < \delta < 1$, что при $0 < h < \delta$

$$\lambda_f(S(\theta_0, h)) < \varepsilon h,$$

где $S(\theta_0, h)$ — сектор $\{re^{i\theta}: |\theta - \theta_0| \leq h, 1 - h \leq r < 1\}$. Стало быть, по теореме 2.3 пространство $QC = (H^\infty + C) \cap (\overline{H^\infty} + \bar{C})$ состоит из всех таких $f \in L^\infty$, что $\lambda_f(S(\theta_0, h)) < \varepsilon h$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, f)$. Произвольную алгебру Дугласа можно описать похожим способом, но кольцо $\{1 - \delta < |z| < 1\}$ нужно заменить некоторой областью $G_\delta(b)$, $b \in \mathcal{B}_A$. Поскольку мы должны описать саму алгебру A вместо самосопряженной алгебры $Q_A = A \cap \bar{A}$, нам еще придется заменить λ_f на v_f .

Теорема 3.5. Пусть $A = [H^\infty, \bar{\mathcal{B}}]$ — алгебра Дугласа. Для функции $f \in L^\infty$ следующие условия равносильны:

$$(i) \quad f \in A;$$

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, что

$$(3.3) \quad \inf_{g \in H^\infty} \frac{1}{2\pi} \int |f - g|^2 P_z(\theta) d\theta < \varepsilon, \quad z \in G_\delta(b);$$

(iii) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, что

$$(3.4) \quad v_f(G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)) < \varepsilon h$$

для любого сектора

$$S(\theta_0, h) = \{re^{i\theta}: |\theta - \theta_0| \leq h, 1 - h \leq r < 1\}.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, мы выведем из нее теорему 3.4.

Доказательство теоремы 3.4. Пусть A — алгебра Дугласа, B — другая алгебра, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$, и $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B$. По теореме 1.3 $\bar{\mathcal{B}}_A \subset B$ и $A = [H^\infty, \bar{\mathcal{B}}_A] \subset B$.

Для доказательства обратного включения напомним, что алгебра B порождена H^∞ и множеством $\mathcal{U}_B$ унитарных функций из B^{-1} . Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ функции $u \in \mathcal{U}_B$ удовлетворяют (3.3). Раз $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_A$, то по теореме 1.3 на множестве

$$\mathfrak{M}_A = \bigcap_{b \in \mathcal{B}_A} \{m: |b(m)| = 1\}$$

мы имеем равенство $|u(m)| = 1$. Благодаря компактности это означает, что $|u| > 1 - \varepsilon/2$ на пересечении некоторого конечного числа множеств вида $\{|b(m)| = 1\}$, $b \in \mathcal{B}_A$. Перемножая эти b , мы получим одну такую функцию $b \in \mathcal{B}_A$, что $|u(m)| > 1 - \varepsilon/2$ при $|b(m)| = 1$. Следовательно, $|u(z)| > 1 - \varepsilon/2$ для некоторого $\delta > 0$ при $z \in G_\delta(b)$. Но тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |u(\theta) - u(z)|^2 P_z(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int |u(\theta)|^2 P_z(\theta) d\theta - |u(z)|^2 = \\ &= 1 - |u(z)|^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

при $z \in G_\delta(b)$. Таким образом, условие (3.3) выполняется с постоянной функцией $g = u(z)$. По теореме 3.5 $B \subset A$, и теорема 3.4 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.5. Мы докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что верно (i). Тогда $\|f - \bar{b}h\|_\infty < \varepsilon$ при некоторых $b \in \mathcal{B}_A$ и $h \in H^\infty$. Пусть $z_0 \in G_\delta(b)$ и $g = \bar{b}(z_0)h$. Тогда $g \in H^2$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |\bar{b}h - g|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta &\leq \frac{\|h\|_\infty^2}{2\pi} \int |b(\theta) - b(z_0)|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta = \\ &= \|h\|_\infty^2 (1 - |b(z_0)|^2) \leq 2\delta \|h\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int |f - g|^2 P_{z_0}(\theta) d\theta \leq 2\varepsilon^2 + 4\delta \|h\|_\infty^2,$$

что и дает (3.3) при $\varepsilon < 1/2$ и достаточно малом δ .

Теперь предположим, что верно (ii), и выберем $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, для которых условие (3.3) выполняется. Предположим временно, что $G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h) \subset \{|z| > 1/4\}$. Рассуждение с моментами остановки, уже привычное для нас, позволяет ограничиться доказательством (3.4) только для сектора, внутренняя половина которого $\{|\theta - \theta_0| \leq h, 1 - h \leq r < 1 - h/2\}$ содержит точку $z_1 \in G_\delta(b)$. (В противном случае разобьем внешнюю половину $S(\theta_0, h)$ на два сектора $S(\theta_1, h/2)$ и т. д., остановившись на максимальных секторах, внутренние половины которых пересекают $G_\delta(b)$.) Пусть $k(z) = f(z) - g(z)$, где функция $g \in H^2$ выбрана так, чтобы доставить минимум (3.3) в точке z_1 . В гильбертовом пространстве $L^2(P_z, d\theta)$ функция g является ортогональной проекцией функции f на H^2 , поэтому функция $k(z)$ сопряжена с аналитической и $k(z_1) = 0$. Следовательно,

$$|\nabla k(z)|^2 = 2|\partial k/\partial \bar{z}|^2 = 2|\partial f/\partial \bar{z}|^2,$$

и тождество Литтлвуда — Пэли (3.3) из гл. VI дает

$$(3.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int |f - g|^2 P_{z_1}(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \iint \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \right| dx dy.$$

На $G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h) \subset \{|z| > 1/4\}$ выполняются знакомые нам неравенства

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|z|} &\leq C(1 - |z|^2) \leq Ch \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\bar{z}_1 z|^2)}{|1 - \bar{z}_1 z|^2} = \\ &= Ch \left(1 - \frac{|z - z_1|^2}{|1 - \bar{z}_1 z|^2}\right) \leq Ch \log \left| \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \right|, \end{aligned}$$

так что по (3.5)

$$\begin{aligned} \nu_f(G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)) &= \iint_{G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \leq \\ &\leq Ch \int |f - g|^2 P_{z_1}(\theta) d\theta \leq C\epsilon h \end{aligned}$$

согласно (3.3). Это — в точности нужное нам неравенство (3.4).

Нам остался случай, когда $G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h) \cap \{|z| \leq 1/4\} \neq \emptyset$. Если функция $b(z)$ не постоянна, ее можно заменить на $b(z)^N$ и $G_\delta(b^N) \subset \{|z| > 1/4\}$ при большом N . Если же $b(z) = \text{const}$, то $0 \in G_\delta(b)$, и (3.3) при $z = 0$ дает (3.4) для всех секторов, пересекающих $\{|z| \leq 1/4\}$. Итак, (iii) вытекает из (ii).

Мы переходим к главному шагу доказательства: (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\epsilon > 0$, а $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, выбраны в соответствии с (3.4). Мы оценим расстояние

$$\text{dist}(f, A) \leq \text{dist}(f, \bar{b}^n H^\infty) = \text{dist}(b^n f, H^\infty) = \sup_{\substack{F \in H_0^\infty \\ \|F\|_1 = 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int f \bar{b}^n F d\theta \right|,$$

как мы это уже делали в доказательстве двойственности H^1 — ВМО в разд. VI. 4. При $F \in H^1$

$$\nabla \bar{f} \cdot \nabla b^n F \equiv \bar{f}_x (b^n F)_x + \bar{f}_y (b^n F)_y = 2 \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial}{\partial z} (b^n F).$$

Поскольку $F(0) = 0$, то билинейная поляризация тождества Литтлвуда — Пэли дает

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int f \bar{b}^n F d\theta &= \frac{2}{\pi} \iint \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} b^n \frac{\partial F}{\partial z} \log \frac{1}{|z|} dx dy + \\ &+ \frac{2}{\pi} \iint \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} n b^{n-1} \frac{\partial b}{\partial z} F(z) \log \frac{1}{|z|} dx dy. \end{aligned}$$

Если $F = b_0 H$, где b_0 — произведение Бляшке, а у H нулей нет, то $F = ((b_0 - 1)H + (b_0 + 1)H)/2 = (G_1^2 + G_2^2)/2$, где $G_j \in H^2$, $\|G_j\|_2^2 \leq 2\|F\|_1$. Поэтому мы можем считать $F = G^2$, $G \in H^2$.

так что нам нужно оценить

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \iint_{G_\delta(b)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} b^n G(z) \frac{\partial G}{\partial z} \log \frac{1}{|z|} dx dy + \\ & + \frac{4}{\pi} \iint_{D \setminus G_\delta(b)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} b^n G(z) \frac{\partial G}{\partial z} \log \frac{1}{|z|} dx dy + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{G_\delta(b)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial b^n}{\partial z} G^2(z) \log \frac{1}{|z|} dx dy + \\ & + \frac{2}{\pi} \iint_{D \setminus G_\delta(b)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} n b^{n-1} \frac{\partial b}{\partial z} G^2(z) \log \frac{1}{|z|} dx dy = \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Применим к этим четырем интегралам неравенство Шварца. Тогда

$$\begin{aligned} |I_1| & \leq C \left(\iint_{G_\delta(b)} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 |b^n G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\iint \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \leq \\ & \leq C (e \|b^n G\|_2^2)^{1/2} \|G\|_2 = C e^{1/2} \|F\|_1 \end{aligned}$$

благодаря (3.4), теореме о мерах Карлесона и тождеству Литтл-вуда — Пэли. Аналогично

$$\begin{aligned} |I_2| & \leq C (1 - \delta)^n \left(\iint \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\iint \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \leq \\ & \leq C (1 - \delta)^n (\|f\|_\bullet \|G\|_2) \|G\|_2 \leq C (1 - \delta)^n \|f\|_\infty \|F\|_1, \end{aligned}$$

но вместо (3.4) здесь нужно воспользоваться теоремой VI.3.4.

Чтобы оценить I_3 и I_4 , применим неравенство Шварца по отношению к мере $|G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy$. Мы получим

$$\begin{aligned} |I_3| & \leq C \left(\iint_{G_\delta(b)} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\iint \left| \frac{\partial b^n}{\partial z} \right|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \leq \\ & \leq C (e \|G\|_2^2)^{1/2} (\|b^n\|_\bullet^2 \|G\|_2^2)^{1/2} \leq C e^{1/2} \|F\|_1 \end{aligned}$$

снова по (3.4) и теореме VI.3.4. Наконец, поступая с I_4 так же,

как с I_2 , и применяя дважды теорему VI.3.4, имеем

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq Cn(1-\delta)^{n-1} \left(\iint \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\iint \left| \frac{\partial b}{\partial z} \right|^2 |G|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy \right)^{1/2} \leq \\ &\leq Cn(1-\delta)^{n-1} (\|f\|_* \|G\|_2) (\|b\|_* \|G\|_2) \leq Cn(1-\delta)^{n-1} \|f\|_\infty \|F\|_1. \end{aligned}$$

Все оценки вместе дают

$$\begin{aligned} \text{dist}(f, A) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (C\varepsilon^{1/2} + C(1-\delta)^{n-1} \|f\|_\infty + Cn(1-\delta)^{n-1} \|f\|_\infty) = \\ &= C\varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит, $f \in A$. $\square$

Стоит разобраться в том, какую роль в доказательстве теоремы 3.1 играет пространство максимальных идеалов. Можно объединить обе части доказательства и изложить его, почти не обращаясь к теории банаховых алгебр (см. упр. 13). В настоящее время единственное место в доказательстве, где необходимы пространства максимальных идеалов, — это применение леммы 3.3. Вполне возможно, что в будущем появится доказательство, вовсе не упоминающее банаховы алгебры¹⁾. Такое доказательство стоило бы найти ради новых идей, которые оно могло бы принести. Но первое доказательство теоремы трудно представить себе без максимальных идеалов. Теория банаховых алгебр устанавливает каркас, на котором может быть построено доказательство; она показывает, какие неравенства должны быть нашей целью, и обеспечивает экономию мысли, необходимую в столь длинном и трудном доказательстве.

4. Строение алгебр Дугласа

Многие результаты Сарасона из разд. 2 допускают обобщение на произвольные алгебры Дугласа. Мы начнем с аналога теоремы 2.3, поскольку он у нас почти готов. Пусть A — алгебра Дугласа; напомним, что $Q_A = A \cap \bar{A}$ — это наибольшая C^* -подалгебра в A и $\mathcal{B}_A = \{b \in H^\infty: b \text{ — внутренняя функция, } \bar{b} \in A\}$. Определим ВМО_A как множество таких функций $f \in \text{ВМО}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, для которых

$$(4.1) \quad \lambda_f(C_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)) = \iint_{G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)} |\nabla f|^2 \log \frac{1}{|z|} dx dy < \varepsilon h$$

для всякого сектора $S(\theta_0, h)$. Если $A = H^\infty + C$, то ВМО_A — это в точности наш старый друг ВМО .

¹⁾ Такое доказательство уже появилось — см. Сандберг [1982*]. — Прим. ред.

Теорема 4.1. Если A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , то

$$Q_A = L^\infty \cap VMO_A.$$

Доказательство. Эта теорема прямо следует из теоремы 3.5. Поскольку $\lambda_f = 2(v_f + v_{\bar{f}})$, а меры v_f и $v_{\bar{f}}$ положительны, то условие (4.1) означает, что как f , так и $\bar{f}$ удовлетворяют условию (3.4), так что $f \in A \cap \bar{A} = Q_A$. Обратно, если $f \in Q_A$ и $\varepsilon > 0$, то условие (3.4) выполняется для f при некоторых $b_1 \in \mathcal{B}_A$ и δ_1 , $0 < \delta_1 < 1$. Далее, условие (3.4) выполняется и для $\bar{f}$ при некоторых $b_2 \in \mathcal{B}_A$ и δ_2 , $0 < \delta_2 < 1$. Тогда (4.1) выполняется при $b = b_1 b_2$ и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. $\square$

Пространство VMO_A можно описать и в терминах проекторов в гильбертовом пространстве. Если $f \in VMO$, то $f \in VMO_A$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, что

$$(4.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int |f - f(z)|^2 P_z(\theta) d\theta < \varepsilon, \quad z \in G_\delta(b).$$

Вывод оценки (4.2) предоставляется читателю как упражнение.

Напомним обозначение $C_A = [\mathcal{B}_A, \bar{\mathcal{B}}_A]$ для C^* -алгебры, порожденной множеством $\mathcal{B}_A$.

Теорема 4.2. Если A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , то $A = H^\infty + C_A$.

Нам нужна лемма, доказательство которой мы временно отложим.

Лемма 4.3. Пусть $u \in L^\infty$ и $|u| = 1$ почти всюду. Если

$$(4.3) \quad \text{dist}(u, H^\infty) < 1,$$

то

$$(4.4) \quad \text{dist}(u, H_0^\infty) = 1,$$

где $H_0^\infty = \{f \in H^\infty : f(0) = 0\}$, то $\bar{u} \in [H^\infty, u]$.

Доказательство теоремы 4.2. Мы утверждаем, что для $f \in C_A$

$$(4.5) \quad \text{dist}(f, H^\infty) = \text{dist}(f, H^\infty \cap C_A).$$

Это обобщает лемму IV.1.6. Ясно, что $\text{dist}(f, H^\infty) \leq \text{dist}(f, H^\infty \cap C_A)$. Так как при $\text{dist}(f, H^\infty) = 0$ равенство (4.5) очевидно, то мы можем считать, что $\text{dist}(f, H^\infty) = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ мало. Поскольку $f \in C_A$, существуют функции $g = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$, $b_j \in \mathcal{B}_A$, и $b_0 \in \mathcal{B}_A$, такие, что $\|f - b_0 g\|_\infty < \varepsilon$. Тогда $\text{dist}(b_0 g, H^\infty) < 1$. Вспоминая теорию двойственных экстремальных задач, в част-

ности случай 1 из теоремы IV.4.3, мы видим, что найдется функция $u \in L^\infty$, такая, что $|u| = 1$ почти всюду и

$$(4.6) \quad u - \bar{b}_0 g \in H^\infty,$$

а это значит, что $\text{dist}(u, H^\infty) < 1$ и что

$$(4.7) \quad \text{dist}(u, H_0^\infty) = 1.$$

В силу (4.6) $b_0 u \in H^\infty$ (на самом деле $b_0 u$ — внутренняя функция) и $u \in [H^\infty, \bar{b}_0] \subset A$, так что, согласно (4.7) и лемме 4.3, $\bar{u} \in A$. Стало быть, $\bar{b}_0 \bar{u} \in A$ и $b_0 u \in \mathcal{B}_A$. Значит, $u = \bar{b}_0(b_0 u) \in C_A$ и $u - \bar{b}_0 g \in C_A$. Это дает

$$\text{dist}(f, H^\infty \cap C_A) \leq \|f - (\bar{b}_0 g - u)\|_\infty \leq \varepsilon + \|u\|_\infty \leq \text{dist}(f, H^\infty) + 2\varepsilon,$$

и (4.5) установлено.

Теперь из (4.5) вытекает равномерная замкнутость $H^\infty + C_A$. Это доказывается так же, как лемма 2.1, но мы проведем это рассуждение из педагогических соображений. Ядром естественного отображения $\pi: C_A \rightarrow A/H^\infty$ будет $H^\infty \cap C_A$, и (4.5) показывает, что образ $\pi(C_A)$ этого отображения замкнут в A/H^∞ . Множество $H^\infty + C_A$ — это прообраз множества $\pi(C_A)$ при факторизации $A \rightarrow A/H^\infty$. Поэтому $H^\infty + C_A$ — замкнутое подпространство в A .

Чтобы закончить доказательство теоремы 4.2, надо показать, что $H^\infty + C_A$ плотно в A . Но A — алгебра Дугласа, и достаточно проверить, что $f = \bar{b}g \in H^\infty + C_A$ при $b \in \mathcal{B}_A$ и $g \in H^\infty$. Предположим, что $\|f\| < 1$. Снова случай 1 теоремы IV.4.3 доставляет нам унимодулярную функцию $u \in L^\infty$, для которой

$$(4.8) \quad u - f = u - \bar{b}g \in H^\infty, \quad \text{dist}(u, H_0^\infty) = 1.$$

Тогда bu — внутренняя функция из H^∞ и $u \in A$. По лемме 4.3 $\bar{u} \in [H^\infty, u] \subset A$, так что $bu \in \mathcal{B}_A$. Но $u = \bar{b}(bu) \in C_A = [\mathcal{B}_A, \bar{\mathcal{B}}_A]$, и в силу (4.8) $f = \bar{b}g \in H^\infty + C_A$. $\square$

Доказательство леммы 4.3. Пусть $f \in H^\infty$ и $\|u - f\|_\infty = \alpha < 1$. Покажем сначала, что $\inf_z |f(z)| \geq 1 - \alpha$, так что функция f обратима в H^∞ . Если $z_0 \in D$ и $|f(z_0)| < 1 - \alpha$, то $\|u - (f - f(z_0))\| < 1$. Но $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)g(z)$, $g \in H^\infty$, и тогда при $|z| = 1$

$$\left\| 1 - \bar{u}z \frac{|1 - z_0 \bar{z}|^2}{1 - \bar{z}_0 z} g \right\| = \|u - (z - z_0)g\| < 1.$$

При $(1 - |z_0|)^2 / (1 + |z_0|)^2 \leq t \leq 1$ отсюда следует, что

$$\left\| 1 - t \bar{u}z \frac{|1 - z_0 \bar{z}|^2}{1 - \bar{z}_0 z} g \right\| < 1,$$

потому что круг — выпуклое множество. Полагая $t = (1 - |z_0|)^2 / |1 - z_0 \bar{z}|^2$, мы получим

$$\left\| u - \frac{z(1 - |z_0|^2)}{1 - \bar{z}_0 z} g \right\| = \left\| 1 - t \bar{u} z \frac{1 - \bar{z}_0 z}{1 - \bar{z}_0 z} g \right\| < 1$$

в противоречие с (4.4). Значит, $\inf_z |f(z)| \geq 1 - \alpha$ и $f \in (H^\infty)^{-1}$.

Поскольку $|1 - \bar{u}f| \leq \alpha$ и поскольку при отображении $w \rightarrow (1 - \alpha^2)/w$ круг $\{|1 - w| < \alpha\}$ сохраняется, то

$$\left| 1 - \frac{(1 - \alpha^2)u}{f} \right| = \left| 1 - \frac{1 - \alpha^2}{\bar{u}f} \right| < \alpha.$$

Следовательно, функция u/f обратима в $[H^\infty, u]$, так что

$$\bar{u} = f^{-1}(u/f)^{-1} \in [H^\infty, u]. \quad \square$$

Заметим, что проведенное доказательство дает больше: если $|u| = 1$, $\text{dist}(u, H^\infty) = \alpha < 1$ и $\text{dist}(u, H_0^\infty) = 1$, то $\text{dist}(\bar{u}, H^\infty) = \alpha$.

Теорема 4.4. Пусть A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , и $f \in \text{ВМО}$. Следующие условия равносильны:

- (i) $f \in \text{ВМО}_A$,
- (ii) $f = u + \bar{v}$, $u, v \in Q_A$,
- (iii) $f = u + \bar{v}$, $u, v \in C_A$,

где $\bar{v}$ обозначает преобразование Гильберта или функцию, сопряженную к v .

Доказательство. Ясно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii), и поскольку пространство ВМО_A самосопряженное, то по теореме 4.1 (ii) $\Rightarrow$ (i). Нам нужно показать, что (i) $\Rightarrow$ (iii).

Лемма 4.5. Если функция $f \in \text{ВМО}$ удовлетворяет условию (4.1) при некотором $b \in \mathcal{B}_A$, то при больших n

$$(4.9) \quad \sup_{\substack{F \in H_0^1 \\ \|F\|_0 \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) b^n(\theta) F(\theta) d\theta \right| \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Доказательство этой леммы в точности повторяет доказательство теоремы 3.5. Детали оставляются как упражнение читателю.

Пусть $f \in \text{ВМО}_A$; мы можем считать функцию f вещественной. Положим $f = u + \bar{v}$, $u, v \in L^\infty$. Тогда $g = u + iv \in L^\infty$ и для любой функции $F \in H_0^1 \cap L^2$

$$\int (f - g) F \frac{d\theta}{2\pi} = \int (\bar{v} - iv) F \frac{d\theta}{2\pi} = 0,$$

потому что $\bar{v} - iv \in H^2$. По определению VMO_A для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, удовлетворяющие (4.1). Ввиду (4.9) и благодаря плотности $H_0^1 \cap L^2$ в H_0^1 , при больших n

$$\sup_{\substack{F \in H_0^1 \\ \|F\|_1 \leq 1}} \left| \int gb^n F \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Это значит, что $\text{dist}(g, [H^\infty, \bar{b}]) \leq C\varepsilon^{1/2}$, и ввиду произвольности ε отсюда следует, что $g \in A$. Тогда по теореме 4.2 $g = k + h$, $k \in H^\infty$, $h \in C_A$ и

$$f - i\bar{f} = (u - i\bar{u}) + (\bar{v} + iv) = g - i\bar{g} = h - i\bar{h},$$

потому что $k - i\bar{k} = 0$. Значит, $f = \text{Re}(h - i\bar{h})$, и (iii) доказано. $\square$

5. Локальная теорема Фату и ее приложение

Оставим на короткое время алгебры Дугласа ради фундаментального, но элементарного результата — локальной теоремы Фату. Впервые ее доказал И. И. Привалов, и набросок его доказательства можно найти в упражнении II.10. Ниже приводится более общее рассуждение А. Кальдерона.

Пусть G — открытое множество в верхней полуплоскости $\mathcal{H}$. Мы назовем G *некасательно плотным* в точке $t \in \mathbb{R}$, если существуют такие $\alpha = \alpha(t) > 0$ и $h = h(t) > 0$, что G содержит усеченный сектор

$$\Gamma_\alpha^h(t) = \{x + iy : |x - t| < \alpha y, 0 < y < h\}.$$

Функция $u(z)$ называется *некасательно ограниченной* в точке t , если она определена и ограничена в некотором секторе $\Gamma_\alpha^h(t)$. С другой стороны, $u(z)$ имеет в точке t *некасательный предел*, если для всякого $\beta > 0$ найдется такое $h = h(\beta, t) > 0$, что $u(z)$ определена в $\Gamma_\beta^h(t)$ и существует предел

$$\lim_{\Gamma_\beta^h(t) \ni z \rightarrow t} u(z).$$

Таким образом, понятие некасательной ограниченности связано только с одним сектором, а некасательная сходимость — со сколь угодно широкими секторами.

Теорема 5.1. Пусть E — измеримое подмножество прямой $\mathbb{R}$, и пусть G — область в $\mathcal{H}$, некасательно плотная во всех точках множества E . Если $u(z)$ — гармоническая функция в G , некасательно ограниченная во всех точках множества E , то в почти всех точках этого множества $u(z)$ имеет некасательный предел.

В заключении теоремы неявно предполагается, что область G содержит секторы $\Gamma_\beta^h(t)$ с произвольно большими значениями β в почти каждой точке $t \in E$, хотя в посылке требуется только, чтобы G содержала при каждом $t \in E$ хотя бы один сектор положительного раствора. Однако простое геометрическое рассуждение о точках плотности позволяет перейти от узких секторов к широким. Действительное содержание теоремы состоит в переходе к некасательной сходимости от некасательной ограниченности, а открытое множество G включено в формулировку только из-за дальнейших приложений.

Доказательство. Мы можем считать, что E ограничено, $E \subset [-A, A]$. Если $h_n \searrow 0$ и $\alpha_n \searrow 0$, то

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \in [-A, A]: \Gamma_{\alpha_n}^{h_n}(t) \subset G, |u(z)| \leq n, z \in \Gamma_{\alpha_n}^{h_n}(t)\}.$$

Поскольку эти множества с ростом n возрастают, то, исключая подмножество малой меры, мы можем считать, что при неко-

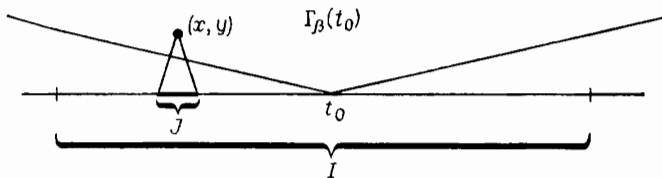


Рис. IX. 1. $(x, y) \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $J \cap F \neq \emptyset$.

торых $\alpha > 0$, $h > 0$ и $M < \infty$

$$\Gamma_\alpha^h(t) \subset G, \quad t \in E; \quad |u(z)| \leq M, \quad z \in \Gamma_\alpha^h(t), \quad t \in E.$$

Еще раз исключая множество малой меры, мы можем заменить E его компактным подмножеством F . Положим

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t \in F} \Gamma_\alpha^h(t).$$

Если t_0 — точка плотности для F (т. е. точка Лебега функции χ_F) и $\beta > 0$, то существует такое $h_0 = h_0(\beta, t_0)$, что $\Gamma_\beta^{h_0}(t_0) \subset \mathcal{R}$. В самом деле, пусть $(x, y) \in \Gamma_\beta^{h_0}(t_0)$. Если $(x, y) \notin \mathcal{R}$, то интервал $J = \{t: |t - x| < \alpha y\}$ не пересекается с F (см. рис. IX. 1). Но $J \subset I = \{t: |t - t_0| < (\alpha + \beta)y\}$, и это значит, что

$$\frac{|J \cap F|}{|I|} \leq 1 - \frac{|J|}{|I|} = \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

что невозможно при $y < h_0$ и достаточно малом h_0 . Значит, в каждой точке Лебега для F область $\mathcal{R}$ содержит секторы сколь угодно большого раствора.

На $\mathcal{R}$ гармоническая функция $u(z)$ определена и ограничена: $|u(z)| \leq M$. Мы должны показать, что для любого β и почти каждой точки $t \in F$ существует предел

$$(5.1) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \mathcal{R} \cap \Gamma_\beta(t)}} u(z).$$

Положим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} u(t + i/n), & t + i/n \in \mathcal{R}, \\ 0, & t + i/n \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Тогда $\varphi_n \in L^\infty$, $\|\varphi_n\|_\infty \leq M$ и $\{\varphi_n\}$ должны иметь L^1 -слабую предельную точку $\varphi \in L^\infty$, $\|\varphi\|_\infty \leq M$. Заменим $\{\varphi_n\}$ слабо сходящейся подпоследовательностью и положим

$$\varphi(z) = \int P_z(t) \varphi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int P_z(t) \varphi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z)$$

и

$$\psi(z) = u(z) - \varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u(z + i/n) - \varphi_n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z).$$

Функция $\psi(z)$ гармонична в $\mathcal{R}$ и $|\psi| \leq 2M$. Мы покажем, что

$$(5.2) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \in \mathcal{R} \cap \Gamma_\beta(t)}} \psi(z) = 0$$

почти всюду на F . Поскольку $\varphi(z)$ почти всюду имеет некасательный предел $\varphi(t)$, то (5.2) влечет за собой и (5.1), причем предел (5.1) равен $\varphi(t)$. Положим

$$(5.3) \quad k(z) = c \left(y + \int P_z(t) \chi_{\mathcal{R} \setminus F}(t) dt \right),$$

где постоянную $c > 0$ мы вскоре определим. Функция $k(z)$ почти всюду на F имеет некасательный предел 0, и поэтому (5.2), а значит, и теорема следуют из оценки

$$(5.4) \quad |\psi(z)| \leq k(z), \quad z \in \mathcal{R}.$$

Наконец, (5.4) справедливо, потому что при больших n

$$(5.5) \quad |\psi_n(z)| \leq k(z)$$

при $z \in \mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cap \{y < h - 1/n\}$ (это та часть $\mathcal{R}$, где определена функция ψ_n).

Чтобы убедиться в том, что имеет место (5.5), мы должны так выбрать постоянную c в (5.3), чтобы

$$(5.6) \quad k(z) \geq 2M, \quad z \in \partial \mathcal{R}_n \cap \mathcal{H}.$$

Возьмем $c > 3M/h$. Тогда $k(z) \geq 2M$ при $y > h - 1/n$ и достаточно большом n . В остальных точках $z \in \mathcal{H} \cap \partial \mathcal{R}_n$ мы имеем

$0 < y < h$, и интервал $J = \{t: |t - x| < \alpha y\}$ попадает в $R \setminus F$. Тогда

$$k(z) \geq \frac{c}{\pi} \int \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{2c}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha,$$

и (5.6) выполняется при достаточно большом c .

Теперь если (5.5) не справедливо, то найдутся точки $z_j \in \mathcal{R}_n$, такие, что $|\psi_n(z_j)| \geq a + k(z_j)$ при некотором постоянном $a > 0$. По принципу максимума точки $\{z_j\}$ имеют предельную точку $\xi \in \partial \mathcal{R}_n$. Не может быть, чтобы $\operatorname{Im} \xi > 0$, так как в силу (5.6)

$$|\psi_n(z_j)| \leq 2M < a + k(\xi).$$

Значит, $\operatorname{Im} \xi = 0$ и $\xi \in R \cap \partial \mathcal{R} = F$. Но тогда, поскольку $\varphi_n(t) = u(t + i/n)$ в $\{|t - \xi| < \alpha/n\}$, наша функция

$$\psi_n(z) = u(z + i/n) - \int P_z(t) \varphi_n(t) dt$$

непрерывна в точке ξ и $\psi_n(\xi) = 0$. Следовательно, $\lim_{z \rightarrow \xi} \psi_n(z) = 0$.

Это противоречие подтверждает (5.5) и доказывает теорему. $\square$

Пусть теперь $b(z)$ — внутренняя функция в круге и $0 < \delta < 1$. Область $G_\delta(b)$ некасательно плотна почти в каждой точке окружности, потому что $|b(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду. Мы будем писать $F \in H^\infty(G_\delta(b))$, если $F(z)$ — ограниченная аналитическая функция в $G_\delta(b)$. По теореме 5.1 функция $F \in H^\infty(G_\delta(b))$ почти всюду на T имеет некасательный предел $F(e^{i\theta})$.

Теорема 5.2. Пусть A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , и $f \in L^\infty$. Функция f принадлежит A тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $b \in \mathcal{A}_A$, δ , $0 < \delta < 1$, и $F \in H^\infty(G_\delta(b))$, что почти всюду

$$|f(e^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сначала сделаем легкую часть доказательства. Если $f \in A$, то существуют такие $b \in \mathcal{A}_A$ и $g \in H^\infty$, что $\|f - \bar{b}g\|_\infty < \varepsilon$. Пусть $F(z) = g(z)/b(z)$. Для любого δ , $0 < \delta < 1$, почти всюду $F \in H^\infty(G_\delta(b))$ и $|F(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| < \varepsilon$.

Чтобы доказать обратное, мы используем конструкцию из теоремы о короне. Если $b(z)$ — внутренняя функция и $0 < \delta < 1$, то существует область $U \subset D$ с границей Γ , такая, что

$$(5.7) \quad \{|b(z)| < 1 - \delta\} \subset U,$$

$$(5.8) \quad U \subset \{|b(z)| < \eta\}, \quad 0 < \eta < 1, \quad \eta = \eta(\delta),$$

$$(5.9) \quad \Gamma \cap D \text{ есть счетное объединение спрямляемых жордановых кривых,}$$

$$(5.10) \quad \text{длина дуги на } \Gamma \text{ есть мера Карлесона.}$$

См. разд. VIII. 4. Мы можем считать, что каждая компонента множества U , содержащаяся в области $\{|z| < r\}$, $0 < r < 1$, односвязна. Действительно, принцип максимума позволяет заделать дыры в любой такой компоненте, не нарушая (5.7) — (5.10). При любом $r < 1$ область $\{|z| < r\}$ содержит лишь конечное число компонент множества U . Положим $V = D \setminus \bar{U}$. Согласно (5.7), $V \subset G_\delta(b)$ и $F(z) \in H^\infty(V)$. Мы хотим применить к границе V теорему Коши, но, чтобы избежать несущественных технических подробностей, мы будем работать с $V_r = V \cap \{|z| < r\}$. По двойственности

$$\begin{aligned} \text{dist}(f, A) &\leq \lim_n \text{dist}(f, \bar{b}^n H^\infty) = \\ &= \lim_n \sup_{\substack{k \in H_0^1 \\ \|k\|_1 = 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) b^n(\theta) k(\theta) d\theta \right|, \end{aligned}$$

и по предположению

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) b^n(\theta) k(\theta) d\theta \right| \leq \varepsilon + \left| \frac{1}{2\pi} \int F(\theta) b^n(\theta) k(\theta) d\theta \right|.$$

Зафиксируем $k \in H_0^1$, $\|k\|_1 = 1$. По теореме об ограниченной сходимости и максимальной теореме

$$\frac{1}{2\pi} \int F(\theta) b^n(\theta) k(\theta) d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z|=r\} \setminus U} F(z) b^n(z) k(z) \frac{dz}{z},$$

потому что, согласно (5.8), $|U \cap \{|z| = r\}| \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 1$). Область $V_r = V \cap \{|z| < r\}$ конечносвязна и $\partial V_r = (\Gamma \cap \{|z| < r\}) \cup (U \cap \{|z| = r\}) \setminus U = \Gamma_r \cup J_r$. При надлежащем выборе ориентации теорема Коши дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{J_r} F(z) b^n(z) k(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} F(z) b^n(z) k(z) \frac{dz}{z}.$$

Однако $k(z)/z \in H^1$ и $\|k(z)/z\|_1 = 1$, так что благодаря (5.8) и (5.10) при достаточно больших n

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} F(z) b^n(z) \frac{k(z)}{z} dz \right| \leq \|F\|_\infty \eta^n \int_{\Gamma} \left| \frac{k(z)}{z} \right| \frac{ds}{2\pi} \leq C \|F\|_\infty \eta^n < \varepsilon,$$

так что $f \in A$. $\square$

Теоремы 5.2 и 3.5 дают нам три необходимых и достаточных условия принадлежности функции $f \in L^\infty$ алгебре Дугласа A . Каждое из них требует, чтобы функция f была в каком-то смысле близка к аналитической. Ясно, что означает это заме-

чение в случае теоремы 5.2. В теореме же 3.5 условие (ii) требует близости f к H^2 во всех гильбертовых пространствах $L^2(P_z d\theta)$, $z \in G_\delta(b)$, а условие (iii) требует малости $\partial f / \partial \bar{z}$ в области $G_\delta(b)$, $b \in \mathcal{B}_A$. Таким образом, мы имеем три разных описания алгебр Дугласа в терминах аналитичности функций. Каждое из этих условий можно сформулировать так, чтобы они давали оценку сверху и снизу для $\text{dist}(f, A)$ (см. упр. 11).

Замечания

Дуглас [1969] сформулировал свою гипотезу под влиянием теории операторов. Так же как теорема о короне и теорема Гофмана из гл. X, решение проблемы Дугласа является важнейшим продвижением в теории. Структура H^∞ так богата, что даже очень общие гипотезы, которые вначале кажутся сомнительными, оказываются замечательным образом верными. Влияние Сарасона на решение проблемы Дугласа трудно переоценить, и выше мы следовали его изложению ([1973, 1976, 1979]).

Гофман и Зингер обсуждают свое доказательство теоремы Вермера в [1957, 1960], а его связь с проблемой Дугласа отмечалась Сарасоном [1976]. Используя теорему Чанг, но не теорему Маршалла, С. Акслер показал, что каждая алгебра между H^∞ и L^∞ определяется своим спектром.

Основной источник по поводу $H^\infty + C$ — Сарасон [1973, 1975]. Поучительно, как тщательный анализ подобного примера приводит к богатой общей теории.

Источниками разд. 3 являются работы Чанг [1976] и Маршалла [1976b]. Теоремы 4.2 и 4.4 принадлежат Чанг [1977a], а теорема 5.2 и наше доказательство теоремы 4.2 заимствованы у Чанг и Гарнетта [1978].

Дальнейшее развитие локальной теоремы Фату можно найти в книгах Стейна [1970] и Стейна и Вейсса [1971].

Чанг и Маршалл [1977] изучали алгебры $H^\infty \cap C_A$. Если $A = H^\infty + C$, то $H^\infty \cap C_A$ совпадает с диск-алгеброй A_0 , а если $A = L^\infty$, то $H^\infty \cap C_A = H^\infty$. Их теоремы обобщают результаты этой главы и соответствующие классические результаты об A_0 . Чанг и Маршалл показали, что круг плотен в $\mathfrak{M}_{H^\infty \cap C_A}$ и что $H^\infty \cap C_A$ порождается внутренними функциями. Вторым результатом обобщает теоремы Фишера [1958] и Маршалла [1976a]. Они также доказали, что любая алгебра между C_A и $H^\infty \cap C_A$ является алгеброй Дугласа над $H^\infty \cap C_A$, т. е. она получается обращением некоторых внутренних функций из $H^\infty \cap C_A$. Теорема Вермера о максимальности и теорема 3.1 являются частными случаями этой теоремы. Чанг и Маршалл получили также аналог теоремы 4.2 для алгебр между C_A и $H^\infty \cap C_A$.

Мы игнорировали в нашем изложении теоретико-операторные аспекты проблемы Дугласа и отсылаем читателя к недавнему обзору Сарасона [1979] и обширной библиографии в нем¹⁾.

Упражнения и дальнейшие результаты

1. (а) Пусть B — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая A_0 . Предположим, что линейный функционал $\varphi_0(f) = f(0)$ допускает единственное продолжение с A_0 на B с сохранением нормы. Тогда или $B \supset C$, или $B \subset H^\infty$. (Указание. Если $\bar{z} \notin B$, то идеал $J = \{zf: f \in B\}$ удален от постоянной 1 на расстояние 1. Существует функционал $\varphi \in B^*$, для которого $\varphi(J) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и $\|\varphi\| = 1$. Отсюда следует, что $B \subset H^\infty$.)

*(b) Если B — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая A_0 , и B содержит хотя бы одну интегрируемую по Риману функцию, не входящую в H^∞ , то $B \supset C$. (Указание. Функционал φ_0 имеет единственное продолжение на B с сохранением нормы тогда и только тогда, когда

$$\sup \{\operatorname{Re} \varphi_0(g): g \in A_0, \operatorname{Re} g \leq \operatorname{Re} f\} = \\ = \inf \{\operatorname{Re} \varphi_0(g): g \in A_0, \operatorname{Re} g \geq \operatorname{Re} f\}$$

для всех $f \in B$.)

(с) Пусть K — замкнутое нигде не плотное подмножество T положительной меры, а B — замкнутая подалгебра в L^∞ , порожденная функциями z и χ_K . Тогда $\bar{z} \notin B$. (См. Люмер [1965] и Сарасон [1973].) Часть (а) обобщает теорему 1.4, а часть (с) показывает, что в этой теореме H^∞ нельзя заменить на A_0 .

2. (а) Пусть E и F — замкнутые подпространства банахова пространства X . Сумма $E + F$ замкнута в X тогда и только тогда, когда при некотором $c > 0$

$$\operatorname{dist}(x, F) \leq c \operatorname{dist}(x, E \cap F), \quad x \in E.$$

(b) Если E — замкнутое подпространство в L^∞ , содержащее константы и выдерживающее комплексное сопряжение, то $E + H(E)$ замкнуто в ВМО тогда и только тогда, когда $E + H^\infty$ замкнуто в L^∞ . Здесь $H(E) = \{Hu: u \in E\}$, где H — преобразование Гильберта. (См. Чанг [1977a].)

3. Пусть $\mathfrak{M}_\alpha = \{m \in \mathfrak{M}: m(z) = \alpha\}$ — слой в $\mathfrak{M}$ над α , $|\alpha| = 1$, и $H^\infty|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ — сужение алгебры H^∞ на $\mathfrak{M}_\alpha$. Тогда $H^\infty|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ — замкнутая подалгебра в $C(\mathfrak{M}_\alpha)$ с границей Шилова $X_\alpha = X \cap \mathfrak{M}_\alpha$. Если $f \in L^\infty$, то $f \in H^\infty + C$ тогда и только тогда, когда $f|_{X_\alpha} \in H^\infty|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ при всех α . Вообще

$$\operatorname{dist}(f, H^\infty + C) = \sup_{|\alpha|=1} \operatorname{dist}(f|_{X_\alpha}, H^\infty|_{\mathfrak{M}_\alpha}).$$

¹⁾ См. по этому поводу также Никольский [1984*]. — Прим. ред.

(Указание. Крайняя точка единичного шара в $(H^\infty + C)^\perp$, т. е. в пространстве мер на X , имеет как мера носитель в одном X_α .)

4. Пусть $f \in H^\infty + C$. Функция f обратима в $H^\infty + C$ тогда и только тогда, когда $|\hat{f}(z)| \geq \delta > 0$ в некотором кольце $\{r < |z| < 1\}$. Следовательно, любая функция $f \in (H^\infty + C)^{-1}$ имеет корректно определенное число вращения на T . Далее, $f \in (H^\infty + C)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $f = z^n g e^{i(u+Hv)}$, где n — число вращения f , $g \in (H^\infty)^{-1}$ и $u, v \in C$ (см. Сарасон [1973]).

5. (а) Каждая функция $f \in L^\infty$ имеет вид $f = \bar{b}g$, где b — произведение Бляшке, а $g \in H^\infty + C$. Каждое измеримое подмножество окружности T с точностью до множества меры 0 совпадает с множеством нулей некоторой функции из $H^\infty + C$ (Акслер [1977]).

(б) Если $\{I_j\}$ — последовательность дуг окружности T и $\sum |I_j| < \infty$, то существует функция $\varphi \in \text{VMO}$, $\varphi \geq 0$, для которой $\varphi_{I_j} \rightarrow \infty$.

(с) Если $f \in L^\infty$, то существует функция $h \in QA = QC \cap H^\infty$, такая, что $hf^n \in QC$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, каждое измеримое подмножество окружности T с точностью до множества меры 0 есть множество нулей функции из QC , а каждая последовательность Бляшке является частью множества нулей некоторой функции из QA .

(д) Каждая унимодулярная функция из $H^\infty + C$ является произведением внутренней функции на функцию из QC , а каждая внутренняя функция является произведением функции из QC на произведение Бляшке. Следовательно, если $u \in L^\infty$ — унимодулярная функция, то $u = (b_1/b_2) e^{i(f+\bar{g})}$, где b_1 и b_2 — произведения Бляшке, а $f, g \in C$. Части (б) — (д) см. у Т. Волфа [1979].

****6.** Всякая функция $f \in L^\infty$ имеет наилучшее приближение из $H^\infty + C$, т. е. существует такая функция $g \in H^\infty + C$, что

$$\|f - g\| = \text{dist}(f, H^\infty + C).$$

Если при этом $f \notin H^\infty + C$, то это наилучшее приближение не единственно. Как следствие получаем, что для любого $\alpha \in T$ существует $h \in H^\infty$, для которого

$$\sup_{x_\alpha} |f - h| = \text{dist}(f|_{x_\alpha}, H^\infty|_{\mathfrak{M}_\alpha})$$

(см. Акслер, Берг, Джуэлл и Шилдс [1979]). Люкинг [1980] получил соответствующее доказательство с помощью теории M -идеалов. Если заменить $H^\infty + C$ произвольной алгеброй Дугласа, то существование элементов наилучшего приближения станет интересной нерешенной проблемой.

***7.** В этом упражнении описывается работа Сарасона об алгебре B_1 . Рассуждения Сарасона не использовали решения

проблемы Дугласа, и мы предлагаем читателю проработать детали доказательства без обращения к разд. 3.

Пусть C_1 обозначает пространство всех комплекснозначных функций на единичной окружности, непрерывных всюду, кроме, может быть, точки $z = 1$, но имеющих в этой точке односторонние пределы. Обозначим через $B_1 = [H^\infty, C_1]$ замкнутую алгебру, порожденную H^∞ и C_1 .

(a) Пусть $\sigma(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}$. Тогда $B_1 = [H^\infty, \sigma]$.

(b) Пусть G_ε , $\varepsilon > 0$, — область, ограниченная единичной

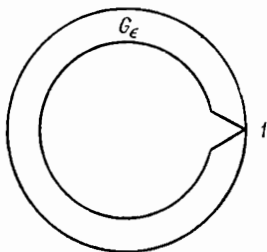


Рис. IX.2. Область G_ε .

окружностью, круговой дугой $\{e^{i\theta} \cos \varepsilon : \varepsilon \leq |\theta| \leq \pi\}$ и двумя отрезками $[1, e^{\pm i\varepsilon} \cos \varepsilon]$ (см. рис. IX.2). Если $f, g \in B_1$, то

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{G_\varepsilon} |f(z)g(z) - (fg)(z)| = 0.$$

(c) Существует постоянная K , для которой

$$\text{dist}(h\sigma, H^\infty) \leq K \sup_{0 < x < 1} |h(x)|, \quad h \in H^\infty.$$

(Указание. Используйте двойственность и примените теорему Коши к $D \setminus \{0 < x < 1\}$. На самом деле можно взять $K = 1$.)

(d) Если $b(z)$ — внутренняя функция и $\sup_{0 < x < 1} |b(x)| < 1$, то $B_1 \subset [H^\infty, b]$.

(e) Произведение Бляшке $b(z)$ с нулями $1 - 2^{-n}$, $n \geq 1$, лежит в C_1 . Значит, $b \in B_1^{-1}$ и $b_1 = [H^\infty, b]$. Таким образом, B_1 — алгебра Дугласа.

(f) Если $g(z) \in H^\infty(G_\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $g(e^{i\theta}) \in B_1$. (Указание. Используйте двойственность и примените теорему Коши к G_ε .)

(g) Пространство максимальных идеалов алгебры B_1 равно

$$X_1^+ \cup X_1^- \cup \bigcup_{\alpha \in T \setminus \{1\}} \mathfrak{M}_\alpha,$$

где $\mathfrak{M}_\alpha$ — слой $z^{-1}(\alpha)$ пространства $\mathfrak{M}$ над α , X_1 — слой пространства $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$ над точкой 1, а $X_1^\pm = X_1 \cap \{\hat{\sigma} = \pm 1\}$, где $\hat{\sigma} \in C(X)$ — преобразование Гельфанда элемента $\sigma \in L^\infty$.

(h) $H^\infty + C_1$ — замкнутое подпространство в L^∞ , но не алгебра. Часть (h) принадлежит Чанг [1977b], а остальные части и другие результаты о B_1 — Сарасону [1972].

8. Пусть A_1 обозначает алгебру, порожденную на вещественной оси алгеброй H^∞ и всеми равномерно непрерывными ограниченными функциями. Тогда $A_1 = [H^\infty, e^{-ix}]$. Если $f \in A_1$, то эта функция обратима в A_1 тогда и только тогда, когда ее модуль $|f(z)|$ отделен от нуля в некоторой полосе $\{0 < y < a\}$. Если $b(z)$ — произведение Голяшке, нули которого стремятся к ∞ , то следующие условия равносильны:

- (i) $b \in (A_1)^{-1}$,
- (ii) функция $b(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$,
- (iii) производная $b'(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$.

Считая, что произведение Бляшке $b(z)$ обратимо в A_1 , докажите, что следующие условия равносильны:

- (1) $A_1 = [H^\infty, b]$,
 - (2) $|b(z)|$ отделен от нуля в каждой полуплоскости $\{y > a > 0\}$,
 - (3) производная $b'(x)$ отделена от нуля на $\mathbb{R}$.
- (См. Сарасон [1973].)

9. Если $f \in L^\infty$ — непостоянная простая функция, то существует такое интерполяционное произведение Бляшке $b(z)$, что

$$[H^\infty, f] = [H^\infty, b].$$

(См. Маршалл [1976c].) Неизвестно, какие алгебры имеют вид $[H^\infty, b]$ с одним интерполяционным произведением Бляшке $b(z)$.

10. Пусть A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , и $f \in \text{ВМО}$. Покажите, что $f \in \text{ВМО}_A$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$, что

$$\frac{1}{2\pi} \int |f - f(z)|^2 P_z(\theta) d\theta < \varepsilon, \quad z \in G_\delta(b).$$

11. Пусть A — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ , а $f \in L^\infty$.

(а) Обозначим через ε_1 точную нижнюю грань тех $\varepsilon > 0$, для которых

$$\inf_{g \in H^1} \frac{1}{2\pi} \int |f - g|^2 P_z(\theta) d\theta < \varepsilon, \quad z \in G_\delta(b),$$

при некоторых $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$.

Тогда $\text{dist}(f, A) \sim \varepsilon_1^{1/2}$.

(б) Обозначим через ε_2 точную нижнюю грань тех $\varepsilon > 0$, для которых $v_f(G_\delta(b) \cap S(\theta_0, h)) < \varepsilon h$ при некоторых $b \in \mathcal{B}_A$ и δ , $0 < \delta < 1$.

Тогда $\text{dist}(f, A) \sim \varepsilon_2^{1/2}$.

(с) Обозначим через ε_3 точную нижнюю грань тех $\varepsilon > 0$,

для которых почти всюду

$$|f(e^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| < \varepsilon$$

при некоторых $b \in \mathcal{B}_A$, δ , $0 < \delta < 1$, $F \in H^\infty(G_\delta(b))$. Тогда $\text{dist}(f, A) = \varepsilon_3$.

12. Докажите лемму 4.5.

13. Можно объединить оба этапа доказательства теоремы Чанг — Маршалла, чтобы получить доказательство, более независимое от банаховых алгебр. В частности, можно обойтись без теоремы о короне. Рассуждение, которое мы вкратце приведем, принадлежит Джуэллу [1976]. Пусть B — замкнутая подалгебра в L^∞ , содержащая H^∞ .

(а) Для каждой функции $u \in \mathcal{U}_B$ и каждого α , $0 < \alpha < 1$, существует интерполяционное произведение Бляшке $b_{\alpha, u}$, удовлетворяющее условиям (3.1) и (3.2).

(б) По лемме 3.3 $b_{\alpha, u} \in B^{-1}$.

(с) Пусть $G_{\alpha, u} = \{z: |b_{\alpha, u}(z)| > 1/2\}$. Если $1 - \alpha$ мало, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(u, \bar{b}_{\alpha, u}^n H^\infty) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\mathcal{U}_B \subset [H^\infty, \{\bar{b}_{\alpha, u}\}]$, что доказывает теорему Чанг — Маршалла.

14. Если A — алгебра Дугласа, то ее единичный шар является замкнутой по норме выпуклой оболочкой множества $\{b_1 \bar{b}_2\}$, где b_1 — произведение Бляшке, а $b_2 \in \mathcal{B}_A$ — интерполяционное произведение Бляшке. (См. Маршалл [1976с].)

*15. (а) Пусть A — алгебра Дугласа, $u \in \mathcal{U}_A$ и $\varepsilon > 0$. Существуют такие $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_A$, что

$$\|u^2 - b_1 \bar{b}_2\|_\infty < \varepsilon$$

(см. Маршалл [1976с]). Возможное в этой ситуации обобщение теоремы Дугласа — Рудина, состоящее в том, что $\|u - b_1 \bar{b}_2\|_\infty < \varepsilon$, остается открытой проблемой.

(б) Приведенная выше гипотеза, однако, оказывается верной в одном интересном частном случае. Пусть E — произвольное подмножество окружности T . Мы скажем, что $f \in L_E^\infty$, если $f \in L^\infty$ и для каждого $\alpha \in E$ можно переопределить f на множестве меры 0 так, чтобы она стала непрерывной в точке α . Любую функцию из L_E^∞ можно приблизить по норме L^∞ функциями, непрерывными в открытой окрестности множества E . Если теперь функция $u \in L_E^\infty$ унимодулярна и $\varepsilon > 0$, то существуют произведения Бляшке b_1, b_2 , которые аналитически продолжаются в точки множества E и $\|u - b_1 \bar{b}_2\|_\infty < \varepsilon$ (см. Дэви, Гамелин и Гарнетт [1973]).

(с) $H^\infty + L_E^\infty$ — замкнутая алгебра, и часть (б) показывает, что $H^\infty + L_E^\infty$ — алгебра Дугласа. Стало быть, $C_{(H^\infty + L_E^\infty)} = L_E^\infty$.

ГЛАВА X

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ

Мы возвращаемся к интерполяционным последовательностям и их произведениям Бляшке и, в частности, к неожиданной роли, которую они играют в изучении запутанного строения пространства максимальных идеалов. В этой главе обсуждаются три темы.

1. Аналитическая структура в $\mathfrak{M} \setminus D$ и ее связи с интерполяционными последовательностями. Эта теория принадлежит Кеннету Гофману и занимает разд. 1 и 2. Она опирается на две теоремы о факторизации произведений Бляшке:

2. Два обобщения теоремы о том, что гармонически интерполяционная последовательность является и H^∞ -интерполяционной. Одно из этих обобщений утверждает, что последовательность является интерполяционной, если ее замыкание в $\mathfrak{M}$ гомеоморфно компактификации Стоуна — Чеха множества целых чисел. Ключевым оказывается чисто вещественное рассуждение, которое показывает, когда можно приблизить ядро Пуассона выпуклой комбинацией других ядер Пуассона. Эта идея развивается в разд. 3 и 4.

3. Совсем недавняя теорема Питера Джонса, уточняющая теорему Дугласа — Рудина. Весь анализ в ней проводится не в верхней полуплоскости, а на границе.

Эти три темы мало зависят друг от друга, и их можно изучать по отдельности.

1. Аналитические круги в $\mathfrak{M}$

Нам будет удобно представлять себе два экземпляра единичного круга. Один из них, $D = \{z: |z| < 1\}$, является естественной областью определения функций из H^∞ и вкладывается в $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{H^\infty}$ как открытое плотное подмножество. Второй круг, $\mathcal{D} = \{\xi: |\xi| < 1\}$, будет координатным пространством для всевозможных абстрактных кругов в $\mathfrak{M}$, в том числе и для D . Точки круга $\mathcal{D}$ всегда будут обозначаться через ξ . При $z \in D$ отображение $L_z: \mathcal{D} \rightarrow D$,

$$L_z(\xi) = \frac{\xi + z}{1 + \bar{z}\xi},$$

задает параметризацию в D с точкой z в начале координат.

Непрерывное отображение $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *аналитическим*, если все функции $f \circ F$, $f \in H^\infty$, аналитичны в $\mathcal{D}$. Анали-

тическим кругом в $\mathfrak{M}$ называется взаимно однозначное аналитическое отображение $L: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$. Не предполагается, что L — гомеоморфизм, и есть примеры (см. упр. 8), когда L не может им быть. Приведенные выше отображения L_z являются примерами аналитических кругов. В этом и следующем разделах мы опишем все аналитические отображения в пространство $\mathfrak{M}$ и изложим очаровательную теорию Гофмана, которая связывает аналитические круги с интерполяционными последовательностями. Но вначале нам нужны некоторые общие факты о возможных аналитических структурах в $\mathfrak{M}$.

Определим *псевдогиперболическое расстояние* между точками $m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$ формулой

$$\rho(m_1, m_2) = \sup \{ |f(m_2)| : f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1, f(m_1) = 0 \}.$$

На D это определение совпадает с прежним, из гл. 1, потому что при $m_j = z_j \in D$ по лемме Шварца

$$\rho(m_1, m_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|.$$

Расстояние $\rho(m_1, m_2)$ сохраняет многие свойства $\rho(z_1, z_2)$. Если $f \in H^\infty$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, то

$$\rho(f(m_1), f(m_2)) \leq \rho(m_1, m_2),$$

потому что для функции $g(z) = (f(z) - f(m_1)) / (1 - \overline{f(m_1)} f(z))$ будет $\|g\|_\infty \leq 1$, $g(m_1) = 0$ и $|g(m_2)| = \rho(f(m_1), f(m_2))$. Выбирая $\{f_n\}$ так, чтобы $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $f_n(m_1) = 0$ и $|f_n(m_2)| \rightarrow \rho(m_1, m_2)$, мы видим, что

$$\rho(m_1, m_2) = \sup \{ \rho(f(m_1), f(m_2)) : f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

По лемме I.1.4 при $m_0, m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$

$$(1.1) \quad \frac{\rho(m_0, m_2) - \rho(m_2, m_1)}{1 - \rho(m_0, m_2) \rho(m_2, m_1)} \leq \rho(m_0, m_1) \leq \frac{\rho(m_0, m_2) + \rho(m_2, m_1)}{1 + \rho(m_0, m_2) \rho(m_2, m_1)}.$$

В самом деле, доказательство левого неравенства получается прямо из леммы, если взять $\rho(f(m_0), f(m_2))$ очень близким к $\rho(m_0, m_2)$ и заметить, что функция $t \rightarrow (s - t) / (1 - st)$ убывает при $0 \leq s, t \leq 1$; в правом же неравенстве нужно взять $\rho(f(m_0), f(m_1))$ близким к $\rho(m_0, m_1)$ и заметить, что функция $(s + t) / (1 + st)$ возрастает при $0 \leq s, t \leq 1$ по обоим аргументам.

Ясно, что $\rho(m_1, m_2) \leq 1$, и, согласно (1.1), отношение

$$m_1 \sim m_2, \text{ если } \rho(m_1, m_2) < 1,$$

является отношением эквивалентности в $\mathfrak{M}$. Соответствующие классы эквивалентности называются *долями Глисона* пространства $\mathfrak{M}$. Пусть

$$P(m) = \{m' \in \mathfrak{M} : \rho(m, m') < 1\}$$

— доля Глисона, содержащая m . Если m принадлежит X — границе Шилова алгебры H^∞ , то $P(m) = \{m\}$. В самом деле, если $m' \neq m$, то $\mu_{m'}(\{m\}) \neq 1$ для представляющей меры точки m' , и ввиду свойства логмодулярности найдется функция $f \in H^\infty$, $\|f\| = 1$, для которой $|f(m)| = 1$, но

$$|f(m')| \leq \int |f| d\mu_{m'} < 1,$$

так что $\rho(m, m') = 1$. Нетривиальную долю Глисона представляет собой открытый круг D , поскольку $|z(m)| = 1$ при $m \in \mathfrak{M} \setminus D$.

Лемма 1.1. Если $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ — аналитическое отображение, то $F(\mathcal{D})$ лежит в одной доле Глисона.

Доказательство. Это в точности лемма Шварца. Если отображение $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ аналитично и $m_j = F(\xi_j)$, $\xi_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2$, то

$$\rho(m_1, m_2) = \sup \{ |f \circ F(\xi_2)| : f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1, f \circ F(\xi_1) = 0 \} \leq \\ \leq \sup \{ |g(\xi_2)| : g \in H^\infty(\mathcal{D}), \|g\|_\infty \leq 1, g(\xi_1) = 0 \} = \rho(\xi_1, \xi_2) < 1,$$

так что точки m_1 и m_2 лежат в одной доле Глисона. $\square$

Таким образом, аналитический круг не может проходить через одноточечную долю Глисона. Как мы видели, каждая точка границы Шилова X составляет отдельную долю, и единственный круг D — это невырожденная доля и аналитический круг. Теперь нам нужно искать аналитические структуры в оставшейся части $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$ пространства максимальных идеалов, которая является объединением долей Глисона. Это множество непусто; любая предельная точка m нулей бесконечного произведения Бляшке лежит в $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$. Если эти нули образуют интерполяционную последовательность, то множество всех ее предельных точек гомеоморфно $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Значит, множество $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$ очень и очень велико.

Одна теорема из общей теории логмодулярных алгебр (Гофман [1962b]) утверждает, что каждая доля Глисона в $\mathfrak{M}$ либо состоит из одной точки, либо является аналитическим кругом. Вскоре мы получим для H^∞ более полный результат и поэтому не будем доказывать эту общую теорему. Давайте, однако, применим ее для нахождения одноточечных долей в $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$. Предположим, что $S(z)$ — непостоянная сингулярная внутренняя функция. Тогда все степени $S^\alpha(z)$, $\alpha > 0$, определены и $\|S^\alpha\| = 1$. Значит, множество

$$K = \{m : S(m) = 0\}$$

есть объединение долей Глисона. В самом деле, если $S(m) = 0$, то

$$\rho(m, m') \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0} |S^\alpha(m')|,$$

и либо $\rho(m, m') = 1$, либо $S(m') = 0$. Множество K непусто, потому что $S^{-1} \notin H^\infty$, и $K \subset \mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$, потому что $|S| = 1$ на X . Замыкание множества $H^\infty|_K$ в $C(K)$ дает равномерную алгебру A с пространством максимальных идеалов K . Тогда K содержит сильную граничную точку для алгебры A (упр. V.10), и по принципу максимума эта точка не может лежать в каком-либо аналитическом круге алгебры $H^\infty|_K$. По цитированной общей теореме это значит, что в $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$ есть одноточечные доли Глисона. Другой путь к этому факту описан в упр. 2.

Один шаг приведенного рассуждения еще понадобится нам позже. Напомним, что через $P(m)$ обозначается доля Глисона, содержащая $m \in \mathfrak{M}$.

Лемма 1.2. Пусть $m \in \mathfrak{M}$, а $g \in H^\infty$, $\|g\|_\infty \leq 1$ и $g(m) = 0$. Предположим, что при всех $n = 2, 3, \dots$ возможна факторизация

$$g = g_1^{(n)} g_2^{(n)} \dots g_n^{(n)}$$

с $g_j^{(n)} \in H^\infty$, $\|g_j^{(n)}\|_\infty \leq 1$ и $g_j^{(n)}(m) = 0$. Тогда $g \equiv 0$ на $P(m)$.

Доказательство. Если $m' \in \mathfrak{M}$, то

$$|g(m')| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n |g_j^{(n)}(m')| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(m, m'))^n,$$

так что или $\rho(m, m') = 1$, или $|g(m')| = 0$. $\square$

Множество $\mathfrak{M}^\mathcal{D}$ всех (непрерывных или нет) отображений из $\mathcal{D}$ в $\mathfrak{M}$ в топологии произведения является компактным хаусдорфовым пространством. Направление $\{F_j\}$ имеет в нем предел F , если $F_j(\xi) \rightarrow F(\xi)$ при всех $\xi \in \mathcal{D}$, т. е. если $f \circ F_j(\xi) \rightarrow f \circ F(\xi)$ при всех $\xi \in \mathcal{D}$ и $f \in H^\infty$. Направления нужны нам здесь потому, что пространство $\mathfrak{M}^\mathcal{D}$ не метрическое. Чтобы отличить направления от последовательностей, будем обозначать направления через (z_j) или (F_j) , а последовательности — через $\{z_n\}$. Наш основной объект изучения — множество $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}^\mathcal{D}$ всех максимальных аналитических кругов в $\mathfrak{M}$. Максимальность круга $L \in \mathcal{L}$ означает, что его образ $L(\mathcal{D})$ не содержится ни в каком большем аналитическом круге. Будет показано, что множество $\{\alpha L_z: z \in D, |\alpha| = 1\}$ плотно в $\mathcal{L}$; этот факт можно рассматривать как уточнение теоремы о короне.

Нетривиальные аналитические отображения в $\mathfrak{M} \setminus (X \cup D)$ были явно указаны в гл. V посредством следующего рассуждения. Пусть $B(z)$ — интерполяционное произведение Бляшке с

множеством нулей $S = \{z_n\}$. Тогда

$$\inf_n (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = \delta > 0.$$

Пусть $m \in \mathfrak{M} \setminus D$ лежит в замыкании множества S , и пусть (z_j) — поднаправление, извлеченное из $\{z_n\}$, которое сходится к m . Еще раз переходя к поднаправлению, мы можем считать, что и отображения (L_{z_j}) сходятся к $L_m \in \mathfrak{M}^{\mathcal{D}}$. Тогда $L_m(0) = \lim L_{z_j}(0) = m$, и при $f \in H^\infty$ функция $f \circ L_m(\xi) = \lim f \circ L_{z_j}(\xi)$ аналитична в $\mathcal{D}$. Отображение L_m непостоянно, потому что

$$|(B \circ L_m)'(0)| = \lim |(B \circ L_{z_j})'(0)| = \lim (1 - |z_j|^2) |B'(z_j)| \geq \delta.$$

Вот то место, до которого мы продвинулись в гл. V. Давайте теперь изучим отображение L_m более тщательно. Последовательность S интерполяционная, и поэтому ее замыкание $\bar{S}$ в $\mathfrak{M}$ гомеоморфно стоун-чеховской компактификации $b\mathbb{N}$ натурального ряда. Следовательно, любое отображение S в компактное хаусдорфово пространство, подобное $\mathfrak{M}^{\mathcal{D}}$, можно единственным образом продолжить до непрерывного отображения из $\bar{S}$ в это пространство (теорема V.1.4). В случае отображения $z_n \rightarrow L_{z_n}$ это означает, что L_m не зависит от выбора сходящегося поднаправления (z_j) . Мы доказали такую лемму:

Лемма 1.3. *Если S — интерполяционная последовательность, а $m \in \bar{S}$, то существует единственное непостоянное аналитическое отображение $L_m: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$, такое, что*

$$\lim_j L_{z_j} = L_m$$

для любого направления в S , сходящегося к m .

Более точные сведения о L_m дадут нам две леммы о произведениях Бляшке, первая из которых продолжает тему разд. VII.5.

Лемма 1.4. *Пусть $B(z)$ — интерполяционное произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$ и*

$$\inf_n (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| \geq \delta > 0.$$

Существуют такие $\lambda = \lambda(\delta)$, $0 < \lambda < 1$, и $r = r(\delta)$, $0 < r < 1$, что

$$(1.2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 1} \lambda(\delta) = 1.$$

$$(1.3) \quad \lim_{\delta \rightarrow 1} r(\delta) = 1,$$

и множество $B^{-1}(\Delta(0, r)) = \{z: |B(z)| < r\}$ есть объединение попарно не пересекающихся областей V_n , таких, что $z_n \in V_n$ и

$$(1.4) \quad V_n \subset \{z: \rho(z, z_n) < \lambda\}.$$

$B(z)$ однолистно отображает каждую область V_n на $\Delta(0, r) = \{w: |w| < r\}$, и при $|w| < r$ функция

$$B_w(z) = \frac{B(z) - w}{1 - \bar{w}B(z)}$$

является (с точностью до постоянного множителя, равного по модулю 1) интерполяционным произведением Бляшке, имеющим один нуль в каждой области V_n .

Доказательство. Если $h_n(\xi) = B((\xi + z_n)/(1 + \bar{z}_n\xi)) = B \circ L_{z_n}(\xi)$, то $\|h_n\|_\infty = 1$, $h_n(0) = 0$ и $|h'_n(0)| \geq \delta$. По лемме Шварца

$$\rho\left(\frac{h_n(\xi)}{\xi}, h'_n(0)\right) \leq |\xi|,$$

так что при $|\xi| = \lambda = \lambda(\delta) < \delta$

$$\frac{|h_n(\xi)|}{|\xi|} \geq \frac{|h'_n(0)| - |\xi|}{1 - |\xi||h'_n(0)|} \geq \frac{\delta - \lambda}{1 - \lambda\delta},$$

откуда

$$(1.5) \quad |h_n(\xi)| \geq \frac{\delta - \lambda}{1 - \lambda\delta} \lambda = r = r(\delta), \quad |\xi| = \lambda.$$

Согласно принципу аргумента, уравнение $h_n(\xi) = w$, $|w| < r$, имеет в $\{|\xi| < \lambda\}$ точно один корень. Значит, $B(z)$ однолистно отображает область

$$V_n = L_{z_n}(h_n^{-1}(\Delta(0, r)))$$

на $\Delta(0, r)$, $z_n \in V_n$, и условие (1.4) выполняется.

Если $z \in V_n \cap V_k$, $n \neq k$, то, согласно (1.4),

$$\rho(z_n, z_k) \leq \frac{\rho(z_n, z) + \rho(z, z_k)}{1 + \rho(z_n, z)\rho(z, z_k)} \leq \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Выбирая такое $\lambda = \lambda(\delta)$, чтобы

$$(1.6) \quad \lambda < \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} < \delta,$$

мы убеждаемся, что $V_n \cap V_k = \emptyset$, $n \neq k$. Выбирая λ еще и так, чтобы $\lambda = \lambda(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 1$ и

$$\frac{\delta - \lambda}{1 - \lambda\delta} \rightarrow 1, \quad \delta \rightarrow 1,$$

мы получим, что в (1.5) $\lim_{\delta \rightarrow 1} r(\delta) = 1$. Мы обеспечили выполнение (1.2) и (1.3).

Если $|w| < r$, то функция $B_w(z) = (B(z) - w)/(1 - \bar{w}B(z))$

имеет в каждой области V_n точно один нуль $z_n(\omega)$, который является голоморфной функцией от ω . Пусть $A_\omega(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n(\omega)\}$. Тогда $B_\omega(z) = A_\omega(z)g_\omega(z)$, где $\|g_\omega\| \leq 1$. Нужно доказать, что $B_\omega = cA_\omega$, $|c| = 1$, и для этого мы покажем, что $|g_\omega(0)| = 1$. Но

$$|B_\omega(0)| = |g_\omega(0)| \prod_{n=1}^{\infty} |z_n(\omega)|.$$

Положим

$$H(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{|z_n|} z_n(\omega), \quad |\omega| < r.$$

Это произведение сходится в круге $\{|\omega| < r\}$, потому что все его частичные произведения ограничены и оно сходится при $\omega = 0$. Теперь, поскольку $\|g_\omega\| \leq 1$,

$$(1.7) \quad |H(\omega)| = \prod_{n=1}^{\infty} |z_n(\omega)| \geq |B_\omega(0)| = \frac{|B(0) - \omega|}{|1 - \bar{B}(0)\omega|}.$$

Обе части этого неравенства — модули аналитических функций от ω , а при $\omega = 0$ здесь достигается равенство

$$|H(0)| = \prod |z_n| = |B(0)|.$$

Мы можем считать, что $B(0) \neq 0$, но тогда равенство в (1.7) должно иметь место при всех ω , $|\omega| < r$, а потому $|g_\omega(0)| = 1$ при всех ω , за возможным исключением тех, где $H(\omega) = 0$, т. е. $\omega = B(0)$. Но

$$|g_\omega(0)| = \frac{|1 - \bar{B}(0)\omega|}{|B(0) - \omega|} |H(\omega)|.$$

Это модуль мероморфной функции в круге $\{|\omega| < r\}$; следовательно, $|g_\omega(0)| \equiv 1$ и $B_\omega(z)$ только постоянным множителем c , $|c| = 1$, может отличаться от $A_\omega(z)$. В частности, функция $B_\omega(z)$ не имеет нулей вне $\bigcup V_n$ и $B^{-1}(|\omega| < r) = \bigcup V_n$. Нули функции $B_\omega(z)$ образуют интерполяционную последовательность, так как по лемме VII.5.3 любая последовательность $\{\xi_n\}$ с $\rho(\xi_n, z_n) < \lambda(\delta)$ будет интерполяционной. $\square$

Наша вторая лемма использует остроумное комбинаторное рассуждение В. Миллса.

Лемма 1.5. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с различными нулями $\{z_n\}$. Оно допускает такую факторизацию $B = B_1 B_2$, что

$$(1.8) \quad \text{если } B_1(z_n) = 0, \quad \text{то } (1 - |z_n|^2) |B'_1(z_n)| \geq |B_2(z_n)|,$$

$$(1.9) \quad \text{если } B_2(z_n) = 0, \quad \text{то } (1 - |z_n|^2) |B'_2(z_n)| \geq |B_1(z_n)|.$$

Следствие 1.6. Если $B(z)$ — интерполяционное произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$ и

$$\delta(B) = \inf_n (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)|,$$

то возможна такая факторизация $B = B_1 B_2$, что

$$\delta(B_j) \geq \delta(B)^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство. Это сразу вытекает из леммы. Если $B_1(z_n) = 0$, то по (1.8)

$$(1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = (1 - |z_n|^2) |B'_1(z_n)| |B_2(z_n)| \leq \leq \{(1 - |z_n|^2) |B'_1(z_n)|\}^2,$$

и $\delta(B_1) \geq \delta(B)^{1/2}$. То же верно и для B_2 . $\square$

Доказательство леммы 1.5. Положим

$$a_{kn} = \log \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right|, \quad k \neq n; \quad a_{nn} = 0.$$

Матрица $[a_{kn}]$ вещественна, симметрична ($a_{kn} = a_{nk}$), имеет нули на главной диагонали и абсолютно суммируемые строки. Мы покажем, что существует такое множество E натуральных чисел, что

$$(a) \quad \sum_{k \in E} a_{kn} \geq \sum_{k \notin E} a_{kn}, \quad n \in E;$$

$$(b) \quad \sum_{k \notin E} a_{kn} \geq \sum_{k \in E} a_{kn}, \quad n \notin E.$$

Это доказывает лемму, потому что если $B_1(z)$ имеет нули $\{z_n: n \in E\}$, то в силу (a)

$$(1 - |z_n|^2) |B'_1(z_n)| = \prod_{\substack{k \in E \\ k \neq n}} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| \geq \prod_{k \notin E} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \bar{z}_k z_n} \right| = |B_2(z_n)|,$$

что совпадает с (1.8). Точно так же (1.9) следует из (b).

Чтобы установить (a) и (b), предположим сначала, что $a_{kn} = 0$ при $k > N$ или $n > N$. Получается конечная задача; возьмем то множество E , для которого максимальна функция

$$h(E) = \sum_{k, n \in E} a_{kn} + \sum_{k, n \notin E} a_{kn}.$$

Если $n \in E$ и $F = E \setminus \{n\}$, то

$$h(F) = h(E) - 2 \sum_{k \in E} a_{kn} + 2 \sum_{k \notin E} a_{kn}.$$

Поскольку $h(F) \leq h(E)$, то выполняется условие (a), а поскольку $h(E) = h(\mathbb{N} \setminus E)$, то выполняется и (b).

Мы имеем при каждом N подмножество $E_N \subset \{1, 2, \dots, N\}$, для которого (а) и (б) выполняются при дополнительном ограничении $k, n \leq N$. Но пространство подмножеств $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — компакт в топологии произведения, в которой последовательность $\{E_j\}$ имеет предел E тогда и только тогда, когда

$$n \in E \Leftrightarrow n \in E_j, \quad j \geq j_0(n).$$

(Соответствие $E \rightarrow \chi_E$ между подмножествами и их характеристическими функциями устанавливает гомеоморфизм между пространством подмножеств и пространством $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.) Выберем подпоследовательность $\{E_{N_j}\}$, которая имеет предел E . Поскольку $\sum_k |a_{nk}| < \infty$, то

$$\sum_{k \in E} a_{kn} - \sum_{k \notin E} a_{kn} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in E_{N_j}} a_{kn} - \sum_{\substack{k \notin E_{N_j} \\ k \leq N_j}} a_{kn} \right).$$

При $n \in E$ этот предел будет неотрицательным, а при $n \notin E$ — неположительным. Поэтому оба условия (а) и (б) выполняются для множества E . $\square$

Мы возвращаемся к аналитическому отображению $L_m = \lim L_{z_j}$, где (z_j) — поднаправление интерполяционной последовательности $S = \{z_n\}$ и $\lim z_j = m$.

Теорема 1.7. *Отображение L_m взаимно однозначно и аналитически отображает $\mathcal{D}$ на $P(m)$, долю Глисона, содержащую m . Для любого $r < 1$ существует произведение Бляшке B_r , такое, что $B_r(m) = 0$ и функция $B_r \circ L_m$ взаимно однозначна в круге $\{|\xi| < r\}$. Если (w_j) — произвольное направление в D , сходящееся к m , то*

$$L_m = \lim_j L_{w_j}.$$

Доказательство. Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$ и $\delta = \delta(B) = \inf (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| > 0$. Тогда $|(B \circ L_m)'(0)| = \lim |(B \circ L_{z_j})'(0)| \geq \delta$. По лемме Шварца, как и в начале доказательства леммы 1.4, функция $B \circ L_m$ является однолистной в области $(B \circ L_m)^{-1}(\{|w| < r(\delta)\})$. Поскольку $|B \circ L_m(\xi)| \leq |\xi|$, это означает, что отображения $B \circ L_m$ и L_m взаимно однозначны в круге $\{|\xi| < r(\delta)\}$.

Пусть $r < 1$. Согласно (1.3) и следствию 1.6, возможна факторизация $B = B_1 B_2 \dots B_N$ с $r(\delta(B_k)) > r$, $k = 1, 2, \dots, N$. Заменим (z_j) на такое поднаправление, что $B_k(z_j) = 0$ при некотором k и при всех j . Предыдущее рассуждение показывает,

что отображения $B_k \circ L_m$ и L_m взаимно однозначны в круге $\{|\xi| < r\}$. Следовательно, L_m взаимно однозначно в $\mathcal{D}$.

По лемме 1.1 $L_m(\mathcal{D}) \subset P(m)$. Нам нужно показать, что $L_m(\mathcal{D}) = P(m)$. Если $m' \in P(m)$, то $\rho(m, m') < 1$. По (1.2) и по следствию 1.6 мы можем считать, что $\rho(m, m') < \lambda = \lambda(\delta(B))$, а по (1.3) мы можем также считать, что $|B(m')| < r(\delta(B))$. Значит, по лемме 1.4 функция

$$\frac{B - B(m')}{1 - \overline{B(m')} B}$$

есть (с точностью до постоянного множителя) интерполяционное произведение Бляшке с нулями $z'_n \in V_n$. Тогда m' лежит в замыкании множества $\{z'_n\}$ в силу леммы IX.3.3 и можно выбрать поднаправление (z'_{n_i}) , сходящееся к m' . Мы проверим, что если поднаправление (z_{n_i}) исходной последовательности $\{z_n\}$ определить по правилу $z'_{n_i} \in V_{n_i}$, то

$$(1.10) \quad \lim z_{n_i} = m.$$

Пусть m'' — любая предельная точка для (z_{n_i}) . Тогда

$$\rho(m'', m') \leq \overline{\lim} \rho(z_{n_i}, z'_{n_i}) \leq \lambda(\delta)$$

и в силу (1.6)

$$(1.11) \quad \rho(m, m'') \leq \frac{\lambda(\delta) + \rho(m, m')}{1 + \lambda(\delta) \rho(m, m')} \leq \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} < \delta(B).$$

С другой стороны, если бы m'' и m были разными предельными точками $S = \{z_n\}$, то нашлось бы подмножество $T \subset S$, замыкание которого содержит m , но не m'' . Тогда, если $B_T(z)$ — произведение Бляшке с нулями из T , то

$$(1.12) \quad \rho(m, m'') \geq \lim_{z_n \notin T} |B_T(z_n)| \geq \delta(B).$$

Неравенства (1.11) и (1.12) показывают, что $m'' = m$, и поэтому (1.10) верно.

Окончательно мы имеем

$$z_{n_i} \rightarrow m, \quad z'_{n_i} \rightarrow m', \quad z_{n_i}, z'_{n_i} \in V_{n_i}.$$

Существуют такие точки ξ_i , $|\xi_i| \leq \lambda(\delta)$, что $L_{z_{n_i}}(\xi_i) = z'_{n_i}$. Мы можем считать, что $\xi_i \rightarrow \xi$, $|\xi| \leq \lambda(\delta)$. Тогда $\rho(\xi_i, \xi) \rightarrow 0$, а по лемме 1.3 $L_{z_{n_i}} \rightarrow L_m$. Следовательно,

$$L_m(\xi) = \lim_i L_{z_{n_i}}(\xi) = \lim_i L_{z_{n_i}}(\xi_i) = \lim_i z'_{n_i} = m',$$

так что $L_m(\mathcal{D}) = P(m)$.

Если (w_i) — произвольное направление в D с пределом m , то $\lim B(w_i) = 0$ и $|B(w_i)| < r(\delta(B))$ при достаточно больших i . По лемме 1.4 $w_i \in V_{n_i}$. Так как функция $B(z)$ на V_{n_i} однолистка, то $\rho(w_i, z_{n_i}) \leq c |B(w_i)| \rightarrow 0$.

Значит,

$$(1.13) \quad \rho(L_{w_i}(\xi), L_{z_{n_i}}(\xi)) \rightarrow 0, \quad \xi \in \mathcal{D}.$$

В частности, $z_{n_i} \rightarrow m$ и по лемме 1.3 $L_{z_{n_i}} \rightarrow L_m$. Тогда (1.13) показывает, что $L_{w_i} \rightarrow L_m$. $\square$

Между прочим, теорема 1.7 приводит к одному интересному наблюдению, касающемуся размеров пространства $\mathfrak{M}$. Если интерполяционное произведение Бляшке $B(z)$ с нулями $\{z_n\}$ таково, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = 1,$$

и $m \in \mathfrak{M} \setminus D$ лежит в замыкании множества $\{z_n\}$, то отображение $L_m: \mathcal{D} \rightarrow P(m)$ — гомеоморфизм (упр. 8). Далее, отображение $f \rightarrow f \circ L_m$ является изоморфизмом алгебр $\overline{H^\infty}|_{P(m)}$ и H^∞ . Это означает, что нигде не плотное множество $\overline{P(m)}$ гомеоморфно самому $\mathfrak{M}$. Более того, $\overline{P(m)} \setminus P(m)$ снова содержит гомеоморфные копии $\mathfrak{M}$, и так до бесконечности.

2. Теорема Гофмана

Гофман доказал, что все аналитические структуры в $\mathfrak{M}$ получаются по способу разд. 1. Иными словами, каждый аналитический круг в $\mathfrak{M} \setminus D$ имеет вид $L_m = \lim L_{z_j}$, где (z_j) — поднаправление некоторой интерполяционной последовательности. Это — замечательное достижение: вспомним о размерах пространства $\mathfrak{M} \setminus D$ и его неописуемой сложности. Обозначим через G множество всех $m \in \mathfrak{M}$, лежащих в замыкании какой-либо интерполяционной последовательности. Какое-то геометрическое представление об этом множестве доставляет упр. 2(d). Мы знаем, что каждая точка $m \in G$ лежит в аналитическом круге. Вот главное обстоятельство, которое мы должны установить: если $m \in \mathfrak{M} \setminus G$, то доля Глисона $P(m)$ сводится к одной точке, $P(m) = \{m\}$. Из леммы 1.1 следует, что никакое непостоянное аналитическое отображение $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ не может содержать m в своем образе. Следовательно, m тогда и только тогда лежит в некотором аналитическом круге, когда $m \in G$.

Нашим основным средством будет еще одна теорема о факторизации для произведений Бляшке. Пусть $B(z)$ — произведе-

ние Бляшке с нулями $\{z_n\}$; положим при $\delta > 0$

$$K_\delta(B) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z: \rho(z, z_n) \geq \delta\}.$$

Теорема 2.1. *Возможна такая факторизация $B = B_1 B_2$, что при $0 < \delta < 1$*

$$(2.1) \quad a |B_1(z)|^{1/b} \leq |B_2(z)| \leq \frac{1}{a} |B_1(z)|^b, \quad z \in K_\delta(B),$$

где постоянные $a = a(\delta)$ и $b = b(\delta)$ зависят только от δ . (Множители B_1 и B_2 от δ не зависят.)

Доказательство. Перейдем в верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$. При $z \in K_\delta(B)$, как показано в доказательстве леммы VII. 1.2,

$$c(\delta) \log \left| \frac{z - \bar{z}_n}{z - z_n} \right| \leq \frac{2yy_n}{|z_n - \bar{z}|^2} \leq \log \left| \frac{z - \bar{z}_n}{z - z_n} \right|.$$

Мы покажем, что любую последовательность Бляшке $\{z_n\}$ можно разбить на две части S_1 и S_2 , такие, что при $z \in \mathcal{H}$

$$(a) \quad \sum_{S_1} \frac{2yy_n}{|z_n - \bar{z}|^2} \leq C_1 + C_2 \sum_S \frac{2yy_n}{|z_n - \bar{z}|^2},$$

$$(b) \quad \sum_{S_1} \frac{2yy_n}{|z_n - \bar{z}|^2} \leq C_1 + C_2 \sum_{S_1} \frac{2yy_n}{|z_n - \bar{z}|^2}$$

с абсолютными постоянными C_1 и C_2 . Образова произведения Бляшке B_1 и B_2 с множествами нулей S_1 и S_2 , мы получим (2.1) с $a = \exp(C_2/C_1)$ и $b = c(\delta)/C_2$. Выберем 7 , $0 < \lambda < 1$, образуем полосы $T_k = \{z: \lambda^{k+1} \leq y < \lambda^k\}$, $k = 0, \pm 1, \dots$ и перенумеруем точки $z_n \in T_k$ в виде (возможно, двусторонней) последовательности z_{kj} (j целое) в порядке возрастания их абсцисс: $x_{kj} \leq x_{kl}$ при $j < l$. (Благодаря условию Бляшке в каждой полосе T_k находится лишь конечное число точек z_n с данной абсциссой.) Отнесем точку z_{nj} к S_1 , если j нечетно, и к S_2 , если j четно.

Доказательство оценок (a) и (b) начнем с частного случая, когда $y_n = \lambda^{k+1}$ для всех $z_n \in T_k$.

Тогда

$$(2.2) \quad \left| \sum_{S_1} - \sum_{S_2} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad z \in \mathcal{H}.$$

В самом деле, при фиксированном z вклад полосы T_k в (2.2) состоит из знакопередающихся членов, модули которых равны

$$\frac{2y\lambda^{k+1}}{(x - x_{kj})^2 + (y + \lambda^{k+1})^2}.$$

Эти величины убывают с ростом $|x - x_{kj}|$ и стремятся к 0 на бесконечности. Поэтому общий вклад полосы T_k не превосходит наибольшего из этих слагаемых:

$$\left| \sum_{T_k \cap S_1} - \sum_{T_k \cap S_2} \right| \leq \frac{2y\lambda^{k+1}}{(y + \lambda^{k+1})^2}.$$

Суммирование по k даст нам (2.2), потому что при $\lambda^{n+1} < y \leq \lambda^n$

$$\frac{2y\lambda^{k+1}}{(y + \lambda^{k+1})^2} \leq \frac{2}{\lambda} \frac{\lambda^{k-n}}{(1 + \lambda^{k-n})^2}$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(1 + \lambda^j)^2} = \sum_0^{\infty} + \sum_{-\infty}^{-1} \leq \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

Возвращаясь к общему случаю, положим $z'_{kj} = x_{kj} + i\lambda^{k+1}$ и сравним наши суммы с теми, которые получаются для $\{z'_n\}$. Если $y > 0$ и $z_n \in T_k$, то

$$\frac{2yy_n}{(x - x_n)^2 + (y + y_n)^2} \leq \frac{1}{\lambda} \frac{2y\lambda^{k+1}}{(x - x_n)^2 + (y + \lambda^{k+1})^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} \frac{2yy_n}{(x - x_n)^2 + (y + y_n)^2},$$

так что

$$\sum_{S_p} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{S'_p} \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum_{S_p}, \quad p = 1, 2.$$

Ввиду (2.2) получаем

$$\sum_{S_1} \leq \frac{2}{\lambda^2} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{S_2}, \quad \sum_{S_2} \leq \frac{2}{\lambda^2} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{S_1},$$

а это и есть (а) и (б). $\square$

Теорема 2.2. Пусть $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ и $m \in \mathbb{M} \setminus G$. Если $f(m) = 0$, то возможна факторизация $f = f_1 f_2$, где $f_j \in H^\infty$, $\|f_j\|_\infty \leq 1$ и $f_j(m) = 0$.

Доказательство. Прежде всего сведем задачу к тому основному случаю, когда $f(z)$ является произведением Бляшке с простыми нулями. Пусть $f(z) = B(z)g(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, а $g(z)$ не имеет нулей. Если $g(m) = 0$, то искомая факторизация дается формулой $f = (Bg^{1/2})g^{1/2}$. Теперь можно считать, что $f(z) = B(z)$. Пусть $B = B_1 B_2^2$, где B_1 и B_2 — произведения Бляшке, причем B_1 имеет только простые нули. Если $B_2(m) = 0$, то $B = (B_1 B_2) B_2$ дает искомую факторизацию.

Таким образом, можно считать, что $f(z) = B(z)$ и все нули $B(z)$ просты.

Представим $B(z)$ согласно теореме 2.1: $B = B_1 B_2$. Можно считать, что $B_1(m) = 0$, а $B_2(m) \neq 0$. Согласно (2.1), m не принадлежит замыканию в $\mathfrak{M}$ множества $K_\delta(B)$ ни при каком $\delta > 0$. Это значит, что m попадает в замыкание множества нулей функции B : $m \in \bar{S} = \{\bar{z}_n\}$. В самом деле, если направление (z_j) в D сходится к m , то по теореме 2.1 найдутся такие z_{nj} , $B(z_{nj}) = 0$, что $\rho(z_j, z_{nj}) \rightarrow 0$, так что (z_{nj}) тоже будет сходиться к m . При факторизации $B = B_1 B_2$ множество S было разбито на два подмножества S_1 и S_2 , где S_j — это множество нулей для $B_j(z)$. Раз $B_2(m) \neq 0$, то $m \notin S_2$, а поэтому обязательно $m \in \bar{S}_1$.

Факторизуем теперь B_1 согласно лемме 1.5: $B_1 = B_{11} B_{12}$. Снова пусть $B_{11}(m) = 0$, $B_{12}(m) \neq 0$. Выберем $\varepsilon < |B_{12}(m)|$. Тогда m не лежит в замыкании множества $\{z: |B_{12}(z)| < \varepsilon\}$, но лежит в замыкании множества S_1 . Значит, множество

$$T = \{z_n \in S_1: |B_{12}(z_n)| \geq \varepsilon\}$$

содержит m в своем замыкании. Но лемма 1.5 показывает, что T — интерполяционная последовательность, потому что

$$(1 - |z_n|^2) |B_{11}(z_n)| \geq \varepsilon, \quad z_n \in T.$$

Стало быть, m лежит в замыкании интерполяционной последовательности в противоречие с предположением $m \in \mathfrak{M} \setminus G$. $\square$

Следствие 2.3. Если $m \in \mathfrak{M} \setminus G$, то доля Глисона $P(m)$ сводится к одной точке $\{m\}$.

Доказательство. Пусть $m' \neq m$. Мы покажем, что $m' \notin P(m)$. Существует функция $g \in H^\infty$, $\|g\|_\infty = 1$, для которой $g(m) = 0$, но $g(m') \neq 0$. По теореме 2.2 при каждом n возможна факторизация

$$g = g_1^{(n)} \dots g_n^{(n)},$$

где $g_j^{(n)} \in H^\infty$, $\|g_j^{(n)}\|_\infty \leq 1$ и $g_j^{(n)}(m) = 0$. Тогда $m' \notin P(m)$ по лемме 1.2. $\square$

Подытоживая эти результаты, мы можем дать различные характеристики точек из $\mathfrak{M} \setminus G$.

Теорема 2.4. Пусть $m \in \mathfrak{M}$. Следующие условия равносильны:

- (i) $P(m) = \{m\}$.
- (ii) Если (z_j) — направление в D с пределом m , то отображения L_{z_j} стремятся к постоянному отображению $L(\xi) \equiv m$.
- (iii) $m \notin G$.
- (iv) Если $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leq 1$ и $f(m) = 0$, то $f = f_1 f_2$, где $f_j \in H^\infty$, $\|f_j\| \leq 1$ и $f_j(m) = 0$.

(v) Идеал $J_m = \{f \in H^\infty: f(m) = 0\}$ совпадает с замыканием своего квадрата $J_m^2 = \left\{ \sum_{j=1}^n f_j g_j: f_j, g_j \in J_m \right\}$.

Условия (iv) и (v) — это соответственно сильнейшая и слабейшая формы выражения для равенства $J_m = J_m^2$.

Доказательство. Ясно, что из (i) следует (ii), потому что любая предельная точка отображений L_{z_j} в $\mathfrak{M}^{\mathcal{D}}$ аналитически отображает $\mathcal{D}$ в $P(m)$ по лемме 1.1. По лемме 1.3 из (ii) вытекает (iii). По теореме 2.2 (iv) следует из (iii), а (iv) влечет за собой (i) согласно доказательству следствия 2.3. Итак, из логического круга выпадает только (v).

Очевидно, что (v) следует из (iv). Для завершения доказательства мы покажем, что из (v) следует (iii). Если условие (iii) нарушено, то найдутся аналитический круг L_m с $L_m(0) = m$ и произведение Бляшке $B(z) \in J_m$ с $(B \circ L_m)'(0) \neq 0$. Так как непрерывный линейный функционал $f \rightarrow (f \circ L_m)'(0)$ на J_m^2 обращается в 0, то J_m^2 не может быть плотно в J_m . $\square$

Теперь мы можем определить все аналитические структуры в $\mathfrak{M}$. Напомним, что при $m \in G$ существует аналитический круг $L_m: \mathcal{D} \rightarrow P(m)$, $L_m(0) = m$. По теореме 1.7 m однозначно определяет L_m в том смысле, что $L_m = \lim L_{z_j}$, каково бы ни было направление (z_j) в D , сходящееся к m .

Теорема 2.5. Пусть $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{M}$ — непостоянное аналитическое отображение и $F(0) = m$. Тогда $m \in G$ и существует такая аналитическая функция $\tau: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $\tau(0) = 0$, что

$$(2.3) \quad F(\xi) = L_m \circ \tau(\xi), \quad \xi \in \mathcal{D}.$$

В частности, если L — аналитический круг с образом $P(m)$, $m = L(0)$, то

$$L(\xi) = L_m(\alpha\xi), \quad \xi \in \mathcal{D},$$

при некоторой постоянной α , $|\alpha| = 1$.

Доказательство. Отображение F непостоянно, поэтому доля $P(m)$ нетривиальна по лемме 1.1. Значит, $m \in G$ по теореме 2.4, и имеется взаимно однозначное аналитическое отображение L_m . Равенство (2.3) определяет тогда функцию $\tau: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $\tau(0) = 0$, и нужно проверить ее аналитичность. При любом $r < 1$ по теореме 1.7 существует такое произведение Бляшке $B_r(z)$, что функция

$$h_r(\xi) = B_r \circ L_m(\xi)$$

однолистка в круге $\{|\xi| < r\}$. Но, согласно (2.3),

$$\tau(\xi) = h_r^{-1} \circ B_r \circ F(\xi), \quad |\xi| < r,$$

так что функция τ аналитична в области $h_r\{|\xi| < r\}$. Поскольку $h_r(0) = 0$ и $\|h_r\|_\infty \leq 1$, то она будет аналитична и в круге $\{|\xi| < r\}$. Устремляя r к 1, мы видим, что функция τ аналитична в $\mathcal{D}$.

Если F взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}$ на $P(m)$, то τ становится однолиственным отображением круга $\mathcal{D}$ на себя, а поскольку $\tau(0) = 0$, то по лемме Шварца $\tau(\xi) = \alpha\xi$, $|\alpha| = 1$. $\square$

Следствие 2.6. Множество аналитических отображений $\mathcal{D}$ в D плотно в топологии пространства $\mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ в множестве аналитических отображений из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{M}$. Множество отображений

$$\{\alpha L_z(\xi) = \alpha \frac{\xi + z}{1 + \bar{z}\xi} : z \in D, |\alpha| = 1\}$$

плотно в множестве $\mathcal{L}$ максимальных аналитических кругов в $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть отображение $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}$ аналитично. Если F постоянно, то теорема о короне доставляет сходящееся к F направление постоянных из D . Если F непостоянно, то оно имеет вид (2.3) с $L_m = \lim L_{z_j}$. Тогда направление (F_j) , $F_j(\xi) = L_{z_j} \circ \tau(\xi)$, сходится к F . Если L — максимальный аналитический круг в $\mathcal{M}$, то $L(\mathcal{D}) = P(m)$, $m = L(0)$, и найдутся α , $|\alpha| = 1$, и направление (z_j) , $z_j \rightarrow m$, для которых

$$L(\xi) = L_m(\alpha\xi) = \lim L_{z_j}(\alpha\xi) = \alpha \lim L_{\bar{a}z_j}(\xi). \quad \square$$

В упр. 7 дается эквивалентная формулировка теоремы 2.5, не упоминающая максимальных идеалов.

3. Приближенная зависимость между ядрами

Пусть $\{z_j\}$ — редкая последовательность в верхней полуплоскости, т. е.

$$|z_j - z_k| \geq \alpha y_j, \quad j \neq k,$$

при некотором $\alpha > 0$. Она будет интерполяционной тогда и только тогда, когда

$$(3.1) \quad \sup_Q \sum_{z_j \in Q} y_j / \ell(Q) \leq A < \infty,$$

где Q пробегает множество всех квадратов вида $Q = \{a \leq x \leq a + \ell(Q), 0 < y \leq \ell(Q)\}$. В этом и следующем разделах мы докажем, что условие (3.1) выполняется, когда точки $\{z_j\}$ можно разделить (в двух различных смыслах) ограниченными гармоническими функциями. Эти результаты обобщают теорему из разд. VII.4 о том, что гармонически интерполяционные последовательности являются и H^∞ -интерполяционными. Их до-

казательства представляют самостоятельный интерес, потому что каждое из них дает количественную формулировку теоремы Фату. Ключевая идея появляется в лемме 3.3 и состоит в том, что при нарушении условия (3.1) ядро Пуассона, представляющее точку z_j , можно приблизить выпуклой комбинацией ядер, представляющих другие точки z_k .

Сначала мы покажем, что если условие (3.1) нарушается для некоторой редкой последовательности $\{z_j\}$, то оно нарушается и для некоторой ее подпоследовательности, распределенной удобным образом.

Лемма 3.1. Пусть N — положительное целое число, $N \equiv 1 \pmod{3}$. Пусть $\{z_j\}$ — редкая последовательность, т. е.

$$(3.2) \quad |z_j - z_k| > \alpha y_j, \quad k \neq j, \quad \alpha > 0.$$

Тогда ее можно разбить на $n_0 = n_0(\alpha, N)$ непересекающихся подпоследовательностей $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_0}$ со следующими свой-

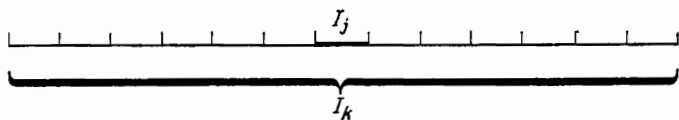


Рис. X. 1. Два интервала из одной последовательности Y_i .

вами. Каждому z_j соответствует интервал I_j , $|I_j| = 3N^m$, где m целое, для которого

$$(3.3) \quad 3Ny_j \leq |I_j| \leq 3N^2y_j$$

и

$$(3.4) \quad \text{dist}(x_j, \partial I_j) \geq \frac{1}{3} |I_j|, \quad x_j = \text{Re } z_j \in I_j.$$

Если z_j и z_k принадлежат одной подпоследовательности Y_i и $I_j \cap I_k \neq \emptyset$, то

$$(3.5) \quad I_j \subset I_k \text{ или } I_k \subset I_j,$$

причем если $I_j \subset I_k$, то

$$(3.6) \quad |I_j| \leq N^{-3} |I_k|$$

и I_j входит в разбиение интервала I_k на $|I_k|/|I_j|$ подынтервалов длины $|I_j|$.

Два интервала I_j и I_k изображены на рис. X.1.

Вероятно, эта лемма покажется слишком технической и некоторые читатели захотят отложить изучение ее доказательства до того, как они увидят ее приложения. Условия (3.3) и (3.4) гарантируют при большом N малость гармонической меры множества $\mathbb{R} \setminus I_j$ в точке z_j . Условие (3.5) позволяет четко разбить

точки z_j на поколения, а благодаря условию (3.6) при $I_j \subset I_k$ ядро Пуассона для z_k будет почти постоянным на I_j .

Доказательство. Рассмотрим все интервалы вида

$$J_{km} = (kN^m, (k+3)N^m)$$

с целыми k и m . При фиксированном m средние трети интервалов J_{km} образуют замощение прямой $\mathbb{R}$. Каждой точке z_j сопоставим тот единственный интервал $I_j = J_{km}$, для которого $x_j \in [(k+1)N^m, (k+2)N^m]$ (это — средняя треть J_{km}) и $N^{m-2} \leq y_j < N^{m-1}$. Условия (3.3) и (3.4) при этом будут выполнены.

Распределим интервалы J_{km} по трем семействам в соответствии с остатком 0, 1 или 2 от деления k на 3. В каждом семействе интервалы данной длины образуют разбиение прямой $\mathbb{R}$. Далее, если интервалы J_{pn} и J_{qm} принадлежат одному семейству и $|J_{qm}| < |J_{pn}|$, то или $J_{qm} \subset J_{pn}$, или $J_{qm} \cap J_{pn} = \emptyset$. Действительно, $N \equiv 1 \pmod{3}$. Пусть $pN^n = kN^m$, $k = pN^{n-m}$. Поскольку $n > m$, то k целое. Раз $N^{n-m} \equiv 1 \pmod{3}$, то $k \equiv p \pmod{3}$. Значит, точка pN^n — конец некоторого интервала J_{km} из того же самого семейства. То же будет и на другом конце $(p+3)N^n$ интервала J_{pn} , так что J_{qm} не может покрывать ни один из концов J_{pn} .

Распределим теперь и точки z_j по трем подпоследовательностям, смотря по тому, в какое семейство попадут соответствующие им интервалы $I_j = J_{km}$, т. е. будет $k \equiv 0, 1$ или $2 \pmod{3}$. Если z_j и z_k принадлежат одной подпоследовательности, то или $I_j \subset I_k$, или $I_k \subset I_j$, или $I_j \cap I_k = \emptyset$, а если $I_j \subset I_k$, то I_j появляется в разбиении I_k на равные подынтервалы длины $|I_j|$.

Чтобы получить (3.6), мы используем условие редкости (3.2) для дальнейшего разбиения множества $\{z_j\}$. В гиперболической метрике все прямоугольники вида $R_{kn} = \{kN^n < x < (k+3)N^n, 3N^{n-5} < y \leq 3N^{n-1}\}$ конгруэнтны, и в силу (3.2) каждый из них содержит не более $n_1 = n_1(\alpha, N)$ точек последовательности $\{z_j\}$. Разобьем каждую из трех уже построенных подпоследовательностей на n_1 подпоследовательностей так, чтобы любой прямоугольник R_{kn} содержал не более одной точки из каждой. Мы получим $n_0 = 3n_1$ подпоследовательностей $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_0}$, для которых выполняются условия (3.5) и (3.6). $\square$

Ввиду (3.5) точки z_j каждой подпоследовательности Y_i и соответствующие им интервалы I_j естественно делятся на поколения. Если $z_j, z_k \in Y_i$, то мы скажем, что $z_k \in G_1(z_j)$ и $I_k \in G_1(I_j)$, если $I_k \subsetneq I_j$ и интервал I_k максимален среди всех таких интервалов. Дальнейшие поколения, как всегда, определяются по индукции: $G_p(I_j) = \bigcup_{I_k \subsetneq I_j} G_1(I_k)$.

Лемма 3.2. Пусть последовательность точек $\{z_j\}$ удовлетворяет условию (3.2), N целое и $Y_1, \dots, Y_{n_0}$ — подпоследователь-

ности, построенные в лемме 3.1. Пусть $0 < \gamma < 1$ и r — положительное целое число. Существует такое $A = A(\alpha, N, \gamma, r)$, что если условие (3.1) при этом значении A нарушается, т. е.

$$\sup_Q \sum_{z_j \in Q} y_j / \ell(Q) > A,$$

то

$$\sum_{g_r(I_j)} \frac{|I_k|}{|I_j|} > \gamma$$

для одной из подпоследовательностей Y_i и одной из точек $z_j \in Y_i$.

Эта лемма утверждает, что в количественном смысле для установления (3.1) достаточно работать со специальными последовательностями Y_i .

Доказательство. Если предположить противное, то по индукции

$$\sum_{g_q(I_j)} \frac{|I_k|}{|I_j|} \leq \gamma^n, \quad nr \leq q < (n+1)r,$$

для всех Y_i и $z_j \in Y_i$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{I_k \subset I_j \\ z_k \in Y_i}} \frac{|I_k|}{|I_j|} \leq \frac{r}{1-\gamma}.$$

Суммирование по всем Y_i дает

$$\sum_{I_k \subset I} \frac{|I_k|}{|I|} \leq \frac{n_0 r}{1-\gamma},$$

а поскольку отношение $y_k/|I_k|$ ограничено и сверху и снизу, то отсюда вытекает (3.1) при некотором $A = A(\alpha, N, \gamma, r)$. $\square$

Пусть N велико. Согласно (3.3) и (3.4), интервал I_j содержит большую часть массы ядра Пуассона P_j , представляющего точку z_j :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I_j} P_j(t) dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{t > N y_j / 3} \frac{y_j}{t^2 + y_j^2} dt \leq \frac{c_1}{N}.$$

Разобьем интервал I_j на N^3 подынтервалов I_{jl} длины $|I_{jl}| = N^{-3}|I_j| \leq N^{-1}y_j$ и построим ступенчатую функцию

$$K_j(t) = \sum_{l=1}^{N^3} (\inf_{I_{jl}} P_j) \chi_{I_{jl}}(t).$$

Тогда $K_j(t) \leq P_j(t)$ и на каждом интервале $I_k \subset \bigcup G_q(I_j)$ функция K_j постоянна. При большом N норма $\|P_j - K_j\|_1$ мала:

$$\begin{aligned} \|P_j - K_j\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus I_j} P_j(t) dt + \sum_{l=1}^{N^j} \int_{I_{jl}} (P_j(t) - \inf_{I_{jl}} P_j) dt \leq \\ &\leq \frac{c_1}{N} + 2 \int_0^\infty \left(P_j(t) - P_j\left(t + \frac{y_j}{N}\right) \right) dt \leq \frac{c_2}{N}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $N(\varepsilon)$ так, чтобы при всех j

$$(3.7) \quad \|P_j - K_j\|_1 < \varepsilon/8.$$

См. рис. X.2.

Лемма 3.3. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (3.2). Пусть $\varepsilon > 0$, $N = N(\varepsilon)$ и $Y_1, \dots, Y_{n_0}, n_0 =$

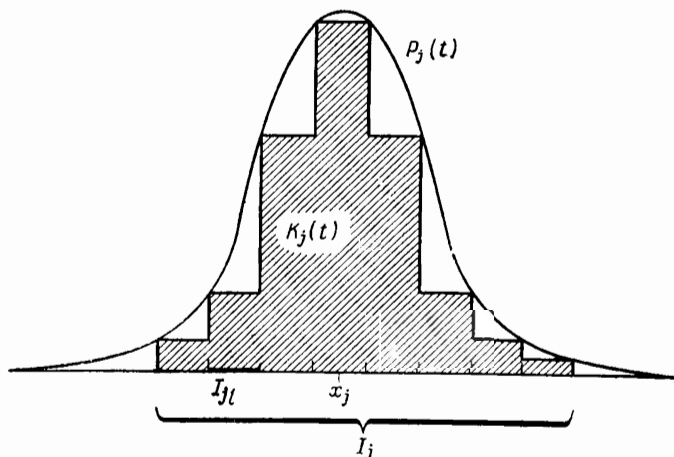


Рис. X.2. Ядра P_j и K_j .

$= n_0(\alpha, N)$, — подпоследовательности, построенные в лемме 3.1. Существуют $\beta = \beta(\varepsilon)$, $0 < \beta < 1$, и положительное целое число $p = p(\varepsilon)$, такие, что если

$$(3.8) \quad \sum_{a_p(I_j)} \frac{|I_k|}{|I_j|} \geq \beta$$

для некоторых Y_i и $z_j \in Y_i$, то существуют такие веса λ_k выпуклой комбинации, $0 \leq \lambda_k < 1$, $\sum \lambda_k = 1$, для которых

$$(3.9) \quad \|P_j - \sum \lambda_k P_k\|_1 < \varepsilon,$$

$$(3.10) \quad \lambda_k = 0, \text{ если } z_k \notin G_1(z_j) \cup \dots \cup G_p(z_j),$$

$$(3.11) \quad \lambda_k \leq b |I_k| / |I_j|,$$

где $b = b(N)$ — постоянная.

Доказательство. Мы хотим найти такие веса λ_k , удовлетворяющие условиям (3.10) и (3.11), чтобы

$$0 \leq \sum \lambda_k K_k \leq K_j$$

$$(3.12) \quad \|K_j - \sum \lambda_k K_k\| < \varepsilon/8.$$

Заменяя λ_k на $\lambda_k / \sum \lambda_l$ и используя (3.7), мы затем получим веса со свойствами (3.9) — (3.11).

Положим $f_0(t) = K_j(t)$. Функция $f_0(t)$ принимает на каждом интервале первого поколения $I_k \in G_1(I_j)$ постоянное зна-

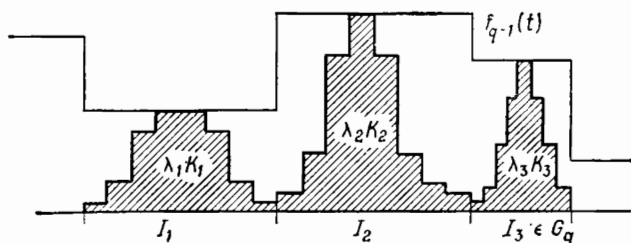


Рис. X. 3. На каждом $I_k \in G_k$ $\lambda_k K_k \leq f_{q-1}(I_k)$, но $\int_{I_k} \lambda_k K_k dt \geq \delta \int_{I_k} f_{q-1} dt$.

чение $f_0(I_k)$. Эти интервалы не пересекаются, и функция K_k сосредоточена на I_k . Положим

$$\lambda_k = f_0(I_k) / \|K_k\|^\infty, \quad z_k \in G_1(z_j),$$

$$f_1 = f_0 - \sum_{G_1} \lambda_k K_k.$$

Тогда $0 \leq f_1 \leq f_0$, и f_1 принимает постоянное значение $f_1(I_k)$ на каждом интервале $I_k \in G_2(I_j)$.

Повторим эту конструкцию с f_1 вместо f_0 и продолжим ее на протяжении p поколений. На этапе q функция f_{q-1} принимает постоянное значение $f_{q-1}(I_k)$ на каждом интервале $I_k \in G_q(I_j)$, и мы полагаем

$$\lambda_k = f_{q-1}(I_k) / \|K_k\|^\infty, \quad z_k \in G_q(z_j),$$

$$f_q = f_{q-1} - \sum_{G_q(I_j)} \lambda_k K_k = K_j - \sum_{r=1}^q \sum_{G_r(I_j)} \lambda_k K_k.$$

Тогда $0 \leq f_q \leq f_{q-1} \leq f_0$. См. рис. X. 3. Согласно (3.4), $f_{q-1}(I_k) \leq \|f_0\|^\infty \leq c_1 / |I_j|$, а согласно (3.3) и (3.4), $\|K_k\|^\infty \geq c_2 / |I_k|$.

Значит, $\lambda_k \leq b|I_k|/|I_j|$, что доказывает (3.11). Условие (3.10) выполняется, потому что процесс останавливается на построении f_p .

Осталось оценить $\|K_j - \sum \lambda_k K_k\|_1 = \int f_p dt$. Поскольку $\|K_k\|_\infty \geq c_2/|I_k|$, то (3.7) дает

$$\int (K_k/\|K_k\|_\infty) dt \geq \frac{(1-\varepsilon)|I_k|}{c_2} = (1-\delta)|I_k|, \quad 0 < \delta < 1.$$

Следовательно, при $I_k \in G_q$

$$\begin{aligned} \int_{I_k} f_q dt &= |I_k| f_{q-1}(I_k) - f_{q-1}(I_k) \int (K_k/\|K_k\|_\infty) dt \leq \\ &\leq \delta |I_k| f_{q-1}(I_k) = \delta \int_{I_k} f_{q-1} dt. \end{aligned}$$

Пусть $E_0 = I_j$, $E_q = \bigcup_{G_q} I_k$, $q = 1, 2, \dots, p$. Тогда $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_p$, и по индукции

$$\int_{E_p} f_p dt \leq \delta \int_{E_p} f_{p-1} dt \leq \delta \int_{E_{p-1}} f_{p-1} dt \leq \delta^p \int_{E_0} f_0 dt \leq \delta^p.$$

Выберем p таким, чтобы $\delta^p < \varepsilon/16$. Напомним, что $\|f_p\|_\infty \leq \|f_0\|_\infty \leq c_1/|I_j|$, где c_1 зависит только от ε . По нашему предположению $|E_p|/|I_j| \geq \beta$, где $\beta = \beta(\varepsilon)$ еще предстоит определить. Так, выберем такое $\beta = \beta(\varepsilon)$, чтобы $(1-\beta)c_1 < \varepsilon/16$. Мы получим $\|f_0\|_\infty |I_j \setminus E_p| < \varepsilon/16$ и

$$\int f_p dt \leq \delta^p + \int_{I_j \setminus E_p} f_p dt \leq \delta^p + \|f_0\|_\infty |I_j \setminus E_p| < \varepsilon/8,$$

что доказывает (3.12). $\square$

Теорема 3.4. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность в верхней полуплоскости. Предположим, что существуют вещественные гармонические функции $\{u_j(z)\}$, для которых

- (i) $\|u_j\|_\infty \leq 1$,
- (ii) $u_j(z_j) \geq \delta > 0$,
- (iii) $u_j(z_k) \leq 0$, $k \neq j$,

где $\delta > 0$ не зависит от j . Тогда $\{z_j\}$ есть H^∞ -интерполяционная последовательность.

Предположения теоремы напоминают условие, характеризующее интерполяционные последовательности:

$$\inf_j \prod_{k, k \neq j} \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| = \delta > 0,$$

но прямого пути для его вывода не видно. Заметим, что эта теорема обобщает теорему VII.4.2.

Доказательство. Ясно, что точки $\{z_k\}$ редки: ограниченная функция $\exp(u_j + i\bar{u}_j)$ отделяет z_j от остальных точек z_k . Мы убедимся, что выполнено условие (3.1), и теорема будет доказана. Если условие (3.1) нарушается, то по леммам 3.2 и 3.3 найдутся точка z_j и веса $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_j = 0$, для которых $\|P_j - \sum \lambda_k P_k\|_1 < \delta$. Но тогда

$$\begin{aligned} \delta &\leq u_j(z_j) - \sum \lambda_k u_j(z_k) = \int u_j \left(P_j - \sum \lambda_k P_k \right) dt \leq \\ &\leq \|u_j\|_\infty \left\| P_j - \sum \lambda_k P_k \right\|_1 < \delta \end{aligned}$$

— это противоречие. $\square$

Лемма 3.3 и теорема 3.4 остаются в силе и для аппроксимативных единиц, более общих, чем ядро Пуассона (см. упр. 12).

4. Интерполяционные последовательности и гармоническая отделимость

Мы продолжаем рассуждения предыдущего раздела. Теперь наша цель — новая характеристика интерполяционных последовательностей.

Теорема 4.1. *Последовательность $\{z_j\}$ в верхней полуплоскости является интерполяционной, если любые непересекающиеся подмножества множества $\{z_j\}$ имеют непересекающиеся замыкания в $\mathfrak{M}$ — пространстве максимальных идеалов алгебры H^∞ .*

Прежде чем углубиться в доказательство, разберемся, что эта теорема означает. Заметим, что обратное к ней утверждение тривиально. Если S и T — два непересекающихся подмножества интерполяционной последовательности, то найдется функция $f \in H^\infty$, равная 0 на S и 1 на T , так что S и T как подмножества $\mathfrak{M}$ лежат в непересекающихся замкнутых множествах $\{f = 0\}$ и $\{f = 1\}$. Если дополнительно предположить, что замыкания K последовательности $\{z_j\}$ в $\mathfrak{M}$ является оболочкой, т. е. что при $m \in \mathfrak{M} \setminus K$ всегда найдется функция $f \in H^\infty$, у которой $f(m) \neq 0$ и $f|_K \equiv 0$, то эта теорема следует из одного общего результата Шилова и из упр. VII.8 (см. Гофман [1962a]).

Как мы видели в гл. V, пространство $\mathfrak{M}$ гомеоморфно слабо компактному подмножеству сопряженного пространства $(L^\infty)^*$, и при этом гомеоморфизме точке z_j соответствует ее ядро Пуассона P_j . Предположение теоремы состоит в том, что непересекающиеся наборы $\{P_j\}$ имеют непересекающиеся слабые замыкания в $(L^\infty)^*$. Это предположение можно переформулировать

двумя способами. Во-первых, оно означает, что слабое замыкание множества $\{P_j\}$ в $(L^\infty)^*$ гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$ — компактификации Стоуна — Чеха натурального ряда, или что замыкание множества $\{z_j\}$ в $\mathfrak{M}$ гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$. Таким образом, последовательность $\{z_j\}$ тогда и только тогда будет интерполяционной, когда ее замыкание в $\mathfrak{M}$ гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$.

Во-вторых, базис слабой топологии в $(L^\infty)^*$ состоит из открытых множеств вида

$$V = V_\alpha = \{\varphi \in (L^\infty)^*: \varphi(u_m) < \alpha, 1 \leq m \leq M\},$$

где α — вещественное число, а $u_1, \dots, u_M \in L^\infty$. Пусть S и T — два подмножества в $\{P_j\}$ с непересекающимися слабыми замыканиями $\bar{S}$ и $\bar{T}$. Каждая точка $\varphi \in \bar{S}$ имеет окрестность V_α с $V_\alpha \cap \bar{T} = \emptyset$. Поскольку $\bar{T}$ компактно, то $V_\beta \cap \bar{T} = \emptyset$ при некотором $\beta > \alpha$. Если $\varphi \in \bar{S} \cup \bar{T}$, то $\varphi(1) = 1$, поэтому, заменяя каждую функцию u_m на $au_m + b$ с постоянными a и b , мы можем считать, что $\alpha = -1$ и $\beta > 1$. Наконец, покрывая $\bar{S}$ конечным числом таких окрестностей $V_{-1}^{(n)}$, $1 \leq n \leq K$, мы приходим к следующей эквивалентной формулировке нашего условия:

Для любых непересекающихся подмножеств S и T последовательности $\{z_j\}$ найдутся такие функции $\{u_m^{(n)}\} \subset L^\infty$, $1 \leq n \leq K$, $1 \leq m \leq M$, что

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \inf_n \sup_m u_m^{(n)}(z_j) &\leq -1, \quad z_j \in S, \\ \sup_n \inf_m u_m^{(n)}(z_j) &> +1, \quad z_j \in T. \end{aligned}$$

Полагая $K = M = 1$, мы видим, что теорема 4.1 обобщает теорему VII.4.2. Грубо говоря, теорема 4.1 утверждает, что последовательность удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2), если она в каком-то разумном смысле отделима посредством ограниченных гармонических функций.

Доказательство теоремы 4.1 опирается на конкретное условие (4.1). Очень важно, что числа K, M и

$$B = \sup_{n, m} \|u_m^{(n)}\|_\infty$$

можно выбрать не зависящими от S и T .

Лемма 4.2. *Если любые два непересекающихся подмножества последовательности $\{z_j\}$ имеют непересекающиеся замыкания в $\mathfrak{M}$, то условие (4.1) выполняется со значениями K, M и $B = \sup \|u_m^{(n)}\|_\infty$, не зависящими от выбора подмножеств S и T .*

Доказательство. Можно считать, что $T = \{z_j\} \setminus S$. Множество $\mathcal{P}$ всех подмножеств $S \subset \{z_j\}$ компактно в топологии произведения, в которой окрестность множества S_0 определяется

конечным набором индексов $j_1, \dots, j_q$ по правилу

$$V = V(S_0; j_1, \dots, j_q) = \{S \in \mathcal{P}: z_{j_l} \in S \Leftrightarrow z_{j_l} \in S_0, 1 \leq l \leq q\}.$$

Пусть K, M и B — положительные целые числа и $\mathcal{E}_{KMB}$ — множество тех $S \in \mathcal{P}$, для которых условие (4.1) выполняется с данными K, M и B . Тогда $\bigcup \mathcal{E}_{KMB} = \mathcal{P}$ и каждое множество $\mathcal{E}_{KMB}$ замкнуто в топологии $\mathcal{P}$ по соображениям теории нормальных семейств. По теореме Бэра о категории одно из $\mathcal{E}_{KMB}$ содержит некоторое открытое множество $V(S_0; j_1, \dots, j_q)$. По определению топологии в $\mathcal{P}$ это означает, что после исключения конечного набора точек $z_{j_1}, \dots, z_{j_q}$ условие (4.1) будет выполняться с K, M и B , не зависящими от подмножеств S и T . Добавляя конечное число функций $u_m^{(n)}$ для разделения точек $z_{j_1}, \dots, z_{j_q}$, мы получим условие (4.1) в полном объеме. $\square$

Мы докажем теорему 4.1, последовательно применяя лемму 3.3. После этого мы покажем, как ее можно вывести из теоремы VIII.6.1.

Доказательство теоремы 4.1. По лемме 4.2 последовательность $\{z_j\}$ является редкой, т. е. выполняется условие (3.2) с некоторым $\alpha = \alpha(B)$. Задача состоит в том, чтобы вывести из (4.1) условие Карлесона (3.1). Пусть $\epsilon = (4BK)^{-1}$, а $N = N(\epsilon)$, $\rho = \rho(\epsilon)$ и $\beta = \beta(\epsilon)$ взяты из леммы 3.3. Наша стратегия такова. Если условие (3.1) нарушается, то подпоследовательность Y_i содержит такую точку z_0 , что

$$\sum_{a_r(z_0)} |I_k|/|I_0| > \gamma,$$

где $r = 2(BK + 1)\rho$, а $1 - \gamma$ очень мало. Это значит, что для большей части точек $z_j \in G_q$ и для большого числа индексов q реализуется условие (3.9). Это противоречит лемме 4.2 при подходящем выборе S и T .

Если бы при некоторых $\rho < 1$ и $q \leq 2BK\rho$ оценка

$$(4.2) \quad \sum_{a_q(z_0)} \left\{ \frac{|I_j|}{|I_0|} : \sum_{G_{2p}(z_j)} \frac{|I_k|}{|I_j|} < \beta \right\} > \rho$$

была верна для всех подпоследовательностей Y_i и всех $z_0 \in Y_i$, то для всех $z_0 \in Y_i$ при каждом i было бы

$$\sum_{a_{q+2p}(z_0)} \frac{|I_k|}{|I_0|} < \rho\beta + (1 - \rho)$$

и по лемме 3.2 мы получили бы условие (3.2).

Предположим, что оценка (4.2) неверна для некоторого $z_0 \in Y_i$ при всех $q \leq 2BK\rho$ и $\rho < 1$. Выберем подмножества $S, T \subset \{z_j\}$ так, чтобы $z_0 \in T$ при $sp < q \leq (s+1)\rho$, $s \geq 0$,

$G_q(z_0) = G_q \subset S$ для четного s и $G_q \subset T$ для нечетного s . Таким образом, S и T сменяют друг друга после каждых p поколений.

Условие (4.1) не изменится, если переставить функции $\{u_1^{(n)}, \dots, u_M^{(n)}\}$ или индексы $\{1, 2, \dots, K\}$. Поэтому мы можем

считать, что $u_1^{(n)}(z_0) > 1$, $1 \leq n \leq K$. Положим $v = \sum_{n=1}^K u_1^{(n)}$.

Тогда $\|v\|_\infty \leq BK$ и $v(z_0) \geq K$. По лемме 3.3 найдутся такие коэффициенты выпуклой комбинации $\lambda_j \geq 0$, что

$$\sum_1^p \sum_{G_q(z_0)} \lambda_j v(z_j) > K - \varepsilon BK = K - 1/4.$$

Поскольку $|v(z_j)| \leq BK$, то отсюда следует (по неравенству Чебышева для меры $\sum \lambda_j \delta_{z_j}$), что

$$\sum_1^p \sum_{G_q(z_0)} \{\lambda_j: v(z_j) \geq K - 1/2\} \geq \frac{1}{4BK}.$$

Тогда по (3.11) найдутся q_1 , $1 \leq q_1 \leq p$, и $E_1 \subset G_{q_1}$, для которых $v(z_j) \geq K - 1/2$ на E_1 и

$$\sum_{E_1} \frac{|I_j|}{|I_0|} \geq \frac{1}{bp} \frac{1}{4BK} = \delta_1,$$

где b — постоянная из (3.11). Допустим, что условие (4.2) нарушается при $1 - \rho < \delta_1/2$. Тогда найдется подмножество $F_1 \subset E_1$, для которого

$$\sum_{F_1} |I_j|/|I_0| \geq \frac{1}{2} \delta_1$$

и

$$\sum_{G_{2p}(z_j)} |I_k|/|I_j| \geq \beta, \quad z_j \in F_1.$$

При $z_j \in F_1 \subset S$ условие (3.9) будет выполняться с весами λ_k , отнесенными только к точкам из $G_{p+1} \cup \dots \cup G_{2p} \subset T$, потому что если $q_1 < p$, то (3.8) все еще останется справедливым после вычеркивания $G_1(z_j) \cup \dots \cup G_{p-q_1}(z_j)$. (По этой причине $2p$ и появилось в (4.2).)

Зафиксируем $z_j \in F_1$. Тогда $z_j \in S$, и после перестановки индексов $\{1, 2, \dots, K\}$ можно считать, что $u_1^{(1)}(z_j) < -1$. Эта перестановка зависит от точки z_j , что не меняет дела, так как различные точки $z_j \in F_1$ имеют непересекающиеся поколения $\cup G_q(z_j)$. Положим

$$v' = v - u_1^{(1)} = \sum_2^K u_1^{(n)}.$$

Тогда $\|v'\|_\infty < BK$, но $v'(z_j) > K + 1/2$. При подходящих весах из леммы 3.3

$$\sum_{p-q_1+1}^{2p-q_1} \sum_{G_q(z_j)} \lambda_k v'(z_k) > K + \frac{1}{4}$$

и из неравенства Чебышева следует, что

$$\sum_{p-q_1+1}^{2p-q_1} \sum_{G_q(z_j)} \{\lambda_k: v'(z_k) > K\} \geq \frac{1}{4BK}.$$

Рассуждая, как и выше, с помощью (3.11) мы получим $q_1(z_j)$, $p < q_1(z_j) \leq 2p$, и $E_1(z_j) \subset G_{q_1}(z_j)$, для которых $v'(z_k) > K$ на $E_1(z_j)$ и

$$\sum_{E_1(z_j)} |I_k|/|I_j| \geq \delta_1.$$

Суммируя по F_1 , мы найдем индекс q_2 , $p < q_2 \leq 2p$, и множество $E_2 \subset G_{q_2}$, такие, что

$$\sum_{E_1} |I_k|/|I_0| \geq \frac{\delta_1}{p} \sum_{F_1} |I_j|/|I_0| \geq \frac{\delta_1^2}{2p} = \delta_2$$

и что $v'(z_k) > K$ для каждого $z_k \in E_2$ (после надлежащей перестановки множества $\{1, \dots, K\}$). Теперь мы допустим, что условие (4.2) нарушается при $1 - \rho < \delta_2/2$. Тогда получим подмножество $F_2 \subset E_2$, такое, что

$$\sum_{F_2} |I_k|/|I_0| \geq \delta_2/2$$

и что для каждого $z_k \in F_2$

$$\sum_{G_{2p}(z_k)} |I_j|/|I_k| \geq \beta.$$

Далее, поскольку $F_2 \subset T$, то для каждого $z_k \in F_2$ можно так переставить функции $\{u_1^{(1)}, \dots, u_M^{(1)}\}$, чтобы $u_1^{(1)}(z_k) > 1$. Тогда

$v(z_k) = \sum_{n=1}^K u_1^{(n)}(z_k) > K + 1$. Если условие (4.2) нарушается при достаточно малом $1 - \rho$, то можно повторить все рассуждения, заменяя z_0 каждым $z_k \in F_2$ и получить множество $F_4 \subset G_{q_4} \subset T$, для которого при некотором $\delta_4 = \delta_4(\delta_2, \rho)$

$$\sum_{F_4} |I_j|/|I_0| \geq \delta_4/2$$

и (после подходящей перестановки $\{u_m^{(n)}\}$) $v(z_j) > K + 2$, $z_j \in F_4$. Если теперь условие (4.2) нарушается при всех ρ , близ-

ких к 1, то все это можно повторить $(B-1)K$ раз и получить точку z_k , в которой (после надлежащей перестановки функций $\{u_m^{(n)}\}$) $v(z_k) > BK$. Это противоречие доказывает теорему. $\square$

Чтобы вывести теорему 4.1 из теоремы VIII.6.1, разобьем верхнюю половину каждого диадического квадрата $Q = \{k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n}, 0 < y \leq 2^{-n}\}$ на 2^{2N-1} малых квадратов S_j со стороной 2^{-n-N} . Выберем N таким, чтобы

$$(4.3) \quad \sup_{z, w \in S_j} |u(z) - u(w)| \leq 1/2$$

для любой гармонической функции $u(z)$ с $|u(z)| \leq B$, где B — постоянная из леммы 4.2.

Зафиксируем диадический квадрат Q . Первое поколение $G_1 = \{S_j^1\}$ состоит из тех малых квадратов $S_j \subset Q$, которые содержат хотя бы одну точку z_j^1 нашей последовательности и не лежат ни под одним малым квадратом с тем же свойством. Выберем по одной точке z_j^1 нашей последовательности в каждом квадрате S_j^1 и положим $F_1 = \{z_j^1\}$. Пусть Q_j^1 — диадический квадрат, основанием которого служит проекция квадрата S_j^1 на ось $\{y = 0\}$. Внутренности квадратов Q_j^1 попарно не пересекаются.

Внутри каждого квадрата Q_j^1 выберем малые квадраты S_k^2 таким же образом. Положим $G_1(S_j^1) = \{S_k^2\}$ и

$$G_2 = \bigcup \{G_1(S_j^1) : S_j^1 \in G_1\}.$$

Выберем по точке $z_k^2 \in S_k^2$ и положим $F_2 = \{z_k^2 : S_k^2 \in G_2\}$. Спуская S_k^2 на ось, образуем новые диадические квадраты Q_j^2 . Продолжая этот процесс, мы получим поколения квадратов $G_3, G_4, \dots$ и подмножеств $F_3, F_4, \dots$ нашей исходной последовательности $\{z_j\}$.

Последовательность $\{z_j\}$ является редкой согласно лемме 4.2. Если R_k^p — это прямоугольник со сторонами, параллельными осям, соединяющий верхнюю сторону Q_k^1 с верхней стороной S_k^p , то

$$\sum_{z_j \in R_k^p} y_j \leq C_1 \ell(S_k^p),$$

так как наша последовательность редкая. Следовательно, последовательность $\{z_j\}$ тогда и только тогда является интерполяционной, когда

$$(4.4) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{Q_p} \ell(S_k^p) \leq C_2 \ell(Q)$$

для каждого диадического квадрата Q с основанием на оси. Поскольку $\sum_{G_1} \ell(S_j^1) \leq \ell(Q)$, то в (4.4) оценке подлежит лишь $\sum_2^\infty$.

Сумма (4.4) не изменится, если заменить последовательность $\{z^j\}$ ее подпоследовательностью $F_1 \cup F^2 \cup \dots$. Отнесем все точки

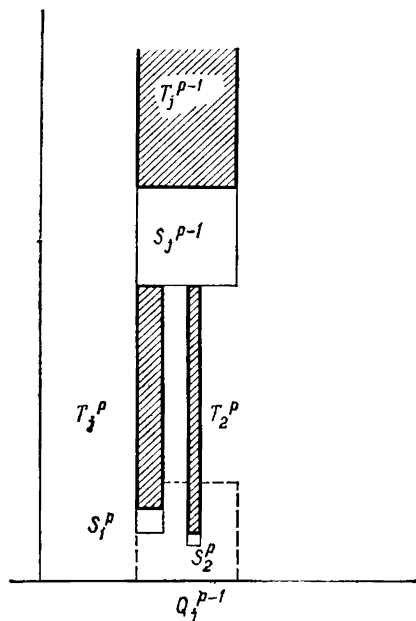


Рис. X. 4. Из теоремы VIII. 6.1 вытекает теорема 4.1.

$z_j \in F_p$ при нечетном p к множеству S , а при четном p — к множеству T . Согласно (4.1) и (4.3), найдется конечный набор ограниченных гармонических функций $u_m^{(n)}$, для которых

$$\inf_{m, n} \{ \max |u_m^{(n)}(z) - u_m^{(n)}(w)| : z \in S_k^p, w \in S_j^{p-1} \} \geq 1$$

при $S_k^p \in G_1(S_j^{p-1})$. По теореме VIII. 6.1 существуют гладкие функции $\varphi_m^{(n)}(z)$, такие, что

$$(4.5) \quad \inf_{m, n} \{ \max |\varphi_m^{(n)}(z) - \varphi_m^{(n)}(w)| : z \in S_k^p, w \in S_j^{p-1} \} \geq 1/2,$$

$$(4.6) \quad \iint_Q \sum_{m, n} |\nabla \varphi_m^{(n)}| dx dy \leq C_3 \ell(Q)$$

для любого квадрата Q с основанием на оси $\{y = 0\}$.

Пусть $S_k^p \in G_p$, $p \geq 2$. Тогда $S_k^p \in G_1(S_j^{p-1})$ при некотором $S_j^{p-1} \in G_{p-1}$, и квадрат S_k^p лежит ниже квадрата S_j^{p-1} . Пусть T_k^p — прямоугольник, соединяющий верхнюю сторону S_k^p с соот-

ветствующим диадическим интервалом на нижнем основании S_j^{p-1} . Эти прямоугольники имеют непересекающиеся внутренности. См. рис. X.4. Согласно (4.5),

$$\sum_{m, n} \iint_{T_k^p} |\nabla \Phi_m^{(n)}| dx dy \geq \max_{m, n} \iint_{T_k^p} \left| \frac{\partial \Phi_m^{(n)}}{\partial y} \right| dx dy \geq \frac{1}{2} \epsilon (S_k^p).$$

Поскольку T_k^p не пересекаются, то (4.4) следует из (4.6). $\square$

Из двух приведенных доказательств теоремы 4.1 второе кажется более прозрачным, но на самом деле не ясно, какое рассуждение сильнее. Так, например, теорему 3.4, кажется, нельзя вывести из теоремы VIII.6.1.

5. Конструктивная теорема Дугласа — Рудина

Теорема 5.1. Пусть $u \in L^\infty$, $|u| = 1$ почти всюду и $\epsilon > 0$. Существуют такие интерполяционные произведения Бляшке $B_1(z)$ и $B_2(z)$, что

$$\|u - B_1/B_2\|_\infty < \epsilon.$$

Этот результат уточняет теорему Дугласа — Рудина из разд. V.2. Прежде чем доказывать эту теорему, мы приведем одно ее следствие и две нерешенные проблемы.

Следствие 5.2. Интерполяционные произведения Бляшке разделяют точки пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ алгебры H^∞ .

Доказательство. Пусть $m_1 \neq m_2 \in \mathfrak{M}$. Возможны три случая.

Случай 1. $m_1 \in X$, $m_2 \in X$, где $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$ — граница Шилова для алгебры H^∞ . По теореме 5.2 самосопряженная замкнутая алгебра, порожденная интерполяционными произведениями Бляшке, совпадает с L^∞ . Следовательно, интерполяционные произведения Бляшке разделяют точки в $X = \mathfrak{M}_{L^\infty}$.

В двух оставшихся случаях $m_1 \in \mathfrak{M} \setminus X$ или $m_2 \in \mathfrak{M} \setminus X$ можно считать, что $m_1 \in \mathfrak{M} \setminus X$. Напомним обозначение G для множества всех $m \in \mathfrak{M}$, попадающих в замыкание какой-либо интерполяционной последовательности.

Случай 2. $m_1 \in G$. Тогда $B(m_1) = 0$ для некоторого интерполяционного произведения Бляшке $B(z)$. Если и $B(m_2) = 0$, то m_1 и m_2 лежат в замыкании $\bar{S}$ множества нулей функции $B(z)$, а тогда найдутся такие непересекающиеся подмножества T_1 , $T_2 \subset S$, что $m_1 \in \bar{T}_1$, $m_2 \in \bar{T}_2$. Произведение Бляшке с множест-

вом нулей T_1 отделяет m_1 от m_2 . (См. также конец доказательства теоремы 1.7.)

Случай 3. $m_1 \notin X \cup G$. Тогда m_1 и m_2 лежат в разных долях Глисона, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in H^\infty$, $\|f_\varepsilon\| = 1$, для которой $f_\varepsilon(m_1) = 0$ и $|f_\varepsilon(m_2)| > 1 - \varepsilon$. Согласно следствию V. 2.6, тогда найдется и внутренняя функция $u_\varepsilon \in H^\infty$ с $u_\varepsilon(m_1) = 0$, $|u_\varepsilon(m_2)| > 1 - \varepsilon$. По теореме VIII. 4.1 существует интерполяционное произведение Бляшке $B_\varepsilon(z)$, такое, что

$$(5.1) \quad |B_\varepsilon(z)| < 1/4, \text{ если } |u_\varepsilon(z)| < 1/4,$$

$$(5.2) \quad |u_\varepsilon(z)| < \beta, \text{ если } B_\varepsilon(z) = 0,$$

где $\beta = \beta(1/4)$ — постоянная. Далее

$$(5.3) \quad \delta(B_\varepsilon) \geq \delta_0 > 0,$$

где δ_0 не зависит от ε . Сейчас мы покажем, что можно выбрать $\eta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$(5.4) \quad |B_\varepsilon(z)| \geq 1 - \eta(\varepsilon), \text{ если } |u_\varepsilon(z)| \geq 1 - \varepsilon.$$

Считая (5.4) доказанным, мы выберем столь малое ε , чтобы $1 - \eta(\varepsilon) \geq 1/2$. В силу (5.1) и по теореме о короне $|B_\varepsilon(m_1)| \leq 1/4$, а в силу (5.4) $|B_\varepsilon(m_2)| \geq 1/4$. Произведение Бляшке $B_\varepsilon(z)$ интерполяционное, и оно разделяет точки m_1 и m_2 .

Для доказательства (5.4) мы используем кое-что из разд. VIII. 3. Пусть $|u_\varepsilon(z)| \geq 1 - \varepsilon$. Применяя преобразование Мёбиуса, мы можем считать, что $z = 0$. Пусть

$$E_\beta = \{\theta: \inf_{\Gamma(\theta)} |u_\varepsilon(z)| < \beta\},$$

где $\Gamma(\theta)$ — сектор

$$\Gamma(\theta) = \left\{ z: \frac{|z - e^{i\theta}|}{1 - |z|} < 2 \right\}.$$

Положим $v(\theta) = |u_\varepsilon(e^{i\theta}) - u_\varepsilon(0)|^2$. Тогда

$$\int v(\theta) d\theta/2\pi = 1 - |u_\varepsilon(0)|^2 < 2\varepsilon,$$

и при $|u_\varepsilon(z)| < \beta$

$$\frac{1}{2\pi} \int v(\theta) P_z(\theta) d\theta \geq |u_\varepsilon(z) - u_\varepsilon(0)|^2 \geq (1 - \varepsilon - \beta)^2.$$

Оценка слабого типа для некасательной максимальной функции теперь дает

$$(5.5) \quad |E_\beta| \leq \frac{2c\varepsilon}{(1 - \varepsilon - \beta)^2}.$$

Представим E_β как объединение непересекающихся открытых дуг окружности, $E_\beta = \bigcup I_j$, и положим

$$S_j = \{re^{i\theta}: \theta \in I_j, 1 - |I_j| < r < 1\}.$$

Согласно (5.2), нули $\{z_n\}$ произведения Бляшке $B_\varepsilon(z)$ лежат в $\bigcup S_j$, и в силу (5.3) и (5.5)

$$\sum (1 - |z_n|) \leq C(\delta_0) \frac{2c\varepsilon}{(1 - \varepsilon - \beta)^2}.$$

Поскольку $\beta = \beta(1/4)$ фиксировано, мы заключаем, что $|B_\varepsilon(0)| \geq 1 - \eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Проблема 5.3. Порождают ли интерполяционные произведения Бляшке все H^∞ как равномерную алгебру?

Проблема 5.4. Можно ли произвольное произведение Бляшке равномерно приблизить интерполяционными?

Поскольку произведения Бляшке порождают H^∞ , то положительное решение проблемы 5.4 дает положительный ответ и в проблеме 5.3.

Доказательство теоремы 5.1 отличается от тех построений, с которыми мы уже имели дело.

Лемма 5.5. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\eta > 0$, и пусть $I_1, \dots, I_K$ — попарно не пересекающиеся замкнутые ограниченные интервалы в $\mathbb{R}$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ — вещественные числа, $0 < \alpha_j < 2\pi$. Существуют такие конечные произведения Бляшке $B_1(z)$ и $B_2(z)$ с простыми нулями, что

$$(5.6) \quad \sum_j |\{x \in I_j : |\alpha_j - \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x)| \geq \varepsilon/2\}| < \eta$$

и

$$(5.7) \quad 0 < \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x) < \delta, \quad x \notin \bigcup I_j.$$

Нули $\{z_n\}$ произведения $B_1(z)$ или $B_2(z)$ таковы, что

$$(5.8) \quad \rho(z_n, z_m) \geq c\varepsilon, \quad n \neq m,$$

с абсолютной постоянной c и

$$(5.9) \quad x_n = \operatorname{Re} z_n \in \bigcup I_j.$$

Далее, если $0 < y < y_0(\varepsilon, \delta, \eta, K)$, то все нули z_n можно выбрать на горизонтальной прямой $y_n = \operatorname{Im} z_n = y$.

Здесь $\operatorname{Arg} w$ означает главную ветвь аргумента, $0 \leq \operatorname{Arg} w < 2\pi$.

Доказательство. Интервалы I_j не пересекаются, поэтому достаточно доказать лемму для одного интервала I (с заменой η на η/K , ε на $\varepsilon/2$ и δ на $\min(\delta/K, \varepsilon/2K)$). Пусть I — замкнутый интервал; можно считать, что

$$I = [-\eta/4, A + \eta/4].$$

Пусть еще $0 < \alpha < 2\pi$.

Стало быть, условие (5.7) будет выполнено, если

$$(5.11) \quad y \leq c_2 \delta \eta.$$

Пусть теперь $J = [\eta/4, A - \eta/4]$, так что $J \subset I$ и $|I \setminus J| = \eta$. Мы получим (5.6), если

$$(5.12) \quad |\alpha - \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x)| < \varepsilon/2, \quad x \in J.$$

Возьмем в качестве первого приближения $F = [0, x_{k_0} + 1/N]$ и положим

$$V(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_F \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Выбирая

$$(5.13) \quad N \geq 8/\eta,$$

имеем $x_{k_0} + 1/N \geq A - 1/N > A - \eta/8$ и $\operatorname{dist}(J, \mathbb{R} \setminus F) > \eta/8$.

Тогда, как и выше,

$$|V(x) - \alpha| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\eta/8}^{\infty} \frac{y dt}{t^2 + y^2} \leq \frac{c_3 y}{\eta}, \quad x \in J,$$

так что $|V(x) - \alpha| < \varepsilon/4$, $x \in J$, при

$$(5.14) \quad y \leq c_4 \varepsilon \eta.$$

Но для любого x

$$(5.15) \quad \left| V(x) - \operatorname{Arg} \frac{B_1(x)}{B_2(x)} \right| = \left| \frac{\alpha}{\pi} \int_F \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt - \right. \\ \left. - 2 \int_E \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \right| \leq \sum_{k=0}^{k_0} \left| \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{y dt}{(x-t)^2 + y^2} - \right. \\ \left. - 2 \int_{x_k}^{x_k + \lambda} \frac{y dt}{(x-t)^2 + y^2} \right| = \sum_{k=0}^{k_0} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g_k(t) y}{(x-t)^2 + y^2} dt \right|,$$

где $|g_k(t)| \leq 2$ и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(t) dt = 0$. Следовательно,

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{g_k(t) y}{(x-t)^2 + y^2} dt \right| \leq \frac{2}{N} \left\{ \max_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - \right. \\ \left. - \min_{x_k \leq t \leq x_{k+1}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right\}.$$

Складывая эти величины, мы — ввиду монотонности ядра Пуассона — получим знакопередающийся ряд, так что

$$|V(x) - \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x)| \leq 4/Ny,$$

и мы получим как (5.12), так и (5.6), выбирая

$$(5.16) \quad Ny = c_5/\varepsilon.$$

Условия (5.11), (5.13) и (5.14) на параметры y и N совместимы с (5.16), и мы получаем (5.6) и (5.7) с произвольно малым y . Наконец, из (5.16)

$$\rho(z_n, z_m) \geq c_6 |x_n - x_m|/y \geq c\varepsilon, \quad m \neq n. \quad \square$$

Доказательство теоремы 5.1. Вначале рассмотрим важнейший частный случай, когда носитель функции $v_0 = \operatorname{Arg} u$ лежит в интервале $(-1, 1)$.

Шаг 1. Положим $\eta_0 = 1$, $\eta_2 = 1/4$. Выберем попарно непересекающиеся замкнутые интервалы $I_1^1, I_2^1, \dots, I_{K_1}^1$ и числа $\alpha_1^1, \dots, \alpha_{K_1}^1$, $0 < \alpha_i^1 < 2\pi$, для которых

$$\left| \left\{ x: \left| v_0(x) - \sum_1^{K_1} \alpha_i^1 \chi_{I_i^1}(x) \right| \geq \varepsilon/4 \right\} \right| < \eta_1/2.$$

Это возможно, потому что ступенчатые функции плотны в L^∞ , а любое измеримое множество можно приблизить по мере конечным объединением интервалов. По лемме 5.5 найдутся такие конечные произведения Бляшке $B_1^1(z)$ и $B_2^1(z)$, что

$$\left| \left\{ x: \left| \sum \alpha_i^1 \chi_{I_i^1}(x) - \operatorname{Arg} B_1^1(x)/B_2^1(x) \right| \geq \varepsilon/2 \right\} \right| < \frac{\eta_1}{2}.$$

Положим

$$E_1 = \{x: |v_0(x) - \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x)| > 3\varepsilon/4\}.$$

Тогда $|E_1| < \eta_1$. Кроме того, нули $z_n^1 = x_n^1 + iy_n^1$ произведения $B_1^1(z)$ таковы, что

$$\rho(z_n^1, z_m^1) \geq c\varepsilon, \quad m \neq n, \quad \text{и} \quad x_n^1 \in \bigcup I_j^1.$$

Выбирая достаточно малое $\eta_2 < \eta_1/4$, мы можем взять

$$y_n^1 = \eta_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нули $B_2^1(z)$ обладают теми же тремя свойствами.

Шаг 2. Положим

$$v_1(x) = \operatorname{Arg} \left(\frac{u(x) B_2^1(x)}{B_1^1(x)} \right) \chi_{E_1}(x).$$

Выберем теперь попарно непересекающиеся замкнутые интервалы $I_1^2, \dots, I_{K_2}^2$ и числа $\alpha_1^2, \dots, \alpha_{K_2}^2$ так, чтобы

$$\sum |I_j^2| \leq 4|E_1| < 4\eta_1$$

и чтобы

$$(5.17) \quad |E_1 \Delta \bigcup I_j^2| = |E_1 \setminus \bigcup I_j^2| + |\bigcup I_j^2 \setminus E_1| < \eta_2/2,$$

$$(5.18) \quad \left| \left\{ x: \left| v_1(x) - \sum \alpha_j^2 \chi_{I_j^2}(x) \right| > \varepsilon/8 \right\} \right| < \eta_2/2.$$

По лемме 5.5 найдутся такие конечные произведения Бляшке $B_1^2(z)$ и $B_2^2(z)$, что

$$(5.19) \quad \left| \left\{ x: \left| \sum \alpha_j^2 \chi_{I_j^2}(x) - \operatorname{Arg} B_1^2(x)/B_2^2(x) \right| > \varepsilon/2 \right\} \right| < \eta_2/2$$

и что

$$(5.20) \quad 0 < \operatorname{Arg} B_1^2(x)/B_2^2(x) < \varepsilon/8, \quad x \notin \bigcup I_j^2.$$

Введем множество

$$E_2 = \left\{ x: \left| v_0(x) - \operatorname{Arg} \left(\frac{B_1^1(x) B_1^2(x)}{B_2^1(x) B_2^2(x)} \right) \right| > \frac{7\varepsilon}{8} \right\}.$$

Тогда

$$E_2 = [E_2 \cap E_1 \cap \bigcup I_j^2] \cup [E_2 \setminus (E_1 \cap \bigcup I_j^2)] \cup [E_2 \cap (E_1 \Delta \bigcup I_j^2)].$$

На $E_1 \cap \bigcup I_j^2$, согласно (5.18) и (5.19),

$$\left| v_0(x) - \operatorname{Arg} \left(\frac{B_1^1(x) B_1^2(x)}{B_2^1(x) B_2^2(x)} \right) \right| = \left| v_1 - \operatorname{Arg} \frac{B_1^2(x)}{B_2^2(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{8}$$

по модулю 2π , за исключением множества меры $\leq \eta_2/2$. Значит,

$$|E_2 \cap E_1 \cap \bigcup I_j^2| < \eta_2/2.$$

Ввиду (5.20) $E_2 \setminus \bigcup I_j^2 \subset E_1$, так что $E_2 \setminus (E_1 \cup \bigcup I_j^2) = \emptyset$. Ввиду (5.17)

$$|E_2 \cap (E_1 \Delta \bigcup I_j^2)| < \eta_2/2,$$

откуда можно заключить, что $|E_2| < \eta_2$. Нули $z_n^2 = x_n^2 + iy_n^2$ произведения $B_1^2(z)$ (или $B_2^2(z)$) таковы, что $\rho(z_n^2, z_m^2) \geq c\varepsilon$, $n \neq m$, $x_n^2 \in \bigcup I_j^2$ и что $y_n^2 = \eta_3$, где $0 < \eta_3 < \eta_2/4$ и η_3 сколь угодно мало.

Шаг p. По индукции мы получаем конечные произведения Бляшке $B_1^1(z), \dots, B_1^p(z)$ и $B_2^1(z), \dots, B_2^p(z)$, для которых множество

$$E_p = \left\{ x: \left| v_0(x) - \operatorname{Arg} \left(\frac{B_1^1(x) \dots B_1^p(x)}{B_2^1(x) \dots B_2^p(x)} \right) \right| > (1 - 2^{-p-1})\varepsilon \right\}$$

имеет меру

$$(5.21) \quad |E_p| < \eta_p \leq 4^{-p}.$$

Шаг индукции в точности совпадает с шагом 2, но в (5.18) и (5.20) нужно писать $\varepsilon \cdot 2^{-p-1}$ вместо $\varepsilon/8$, а в (5.19) всегда нужно писать $\varepsilon/2$. На шаге p лемма 5.5 применяется с тем же ε , но с $\delta = \varepsilon \cdot 2^{-p-1}$ и $\eta = \eta_p/2$.

Поскольку ε на всех шагах одно и то же, нули $z_n^p = x_n^p + iy_n^p$ произведений $B_1^p(z)$ (или $B_2^p(z)$) таковы, что

$$(5.22) \quad \rho(z_n^p, z_m^p) \geq c\varepsilon, \quad n \neq m,$$

где c не зависит от p . Далее,

$$(5.23) \quad x_n^p \in \bigcup I_j^p,$$

где

$$(5.24) \quad \left| \bigcup I_j^p \right| \leq 4 |E_{p-1}| \leq 4\eta_{p-1},$$

и

$$(5.25) \quad y_n^p = \eta_{p+1} < \eta_p/4.$$

Положим теперь

$$B_1(z) = \prod_{p=1}^{\infty} B_1^p(z), \quad B_2(z) = \prod_{p=1}^{\infty} B_2^p(z).$$

Дополнительные множители для сходимости здесь не нужны, потому что все нули лежат в ограниченном множестве, и произведения сходятся, если полное множество нулей удовлетворяет условию Бляшке. Мы докажем больше: нули функции $B_1(z)$ (и $B_2(z)$) образуют интерполяционную последовательность. Рассмотрим только $B_1(z)$. Его нули — это $\bigcup_{p=1}^{\infty} \{z_n^p\}$. Это множество редкое в силу (5.22) и (5.25). Пусть Q — квадрат $\{a < x < a+h, 0 < y < h\}$. Можно считать, что $h < \eta_2$, потому что $y_n^p < \eta_2$. Выберем такое q , чтобы $\eta_{q+1} \leq h < \eta_q$, тогда в силу (5.25)

$$\sum_{z_n^p \in Q} y_n^p = \sum_{p=q}^{\infty} \eta_{p+1} N_p(Q),$$

где $N_p(Q)$ — число точек z_n^p в Q . Согласно (5.22) и (5.25), $|x_n^p - x_m^p| \geq c_1 \varepsilon \eta_{p+1}$, так что ввиду (5.23) и (5.24)

$$N_p(Q) \leq \frac{\min(|\bigcup I_j^p|, h)}{c_1 \varepsilon \eta_{p+1}} \leq \frac{c_2 \min(4\eta_{p-1}, h)}{\varepsilon \eta_{p+1}}.$$

Но так как $\pi_p \leq 4^{-p}$,

$$\begin{aligned} \sum_{z_n^p \in Q} y_n^p &\leq \frac{c_2}{\varepsilon} \sum_{p=q+2}^{\infty} \min(4\eta_{p-1}, h) \leq \frac{2c_2}{\varepsilon} h + \frac{c_2}{\varepsilon} \sum_{p=q+2}^{\infty} 4\eta_{p-1} \leq \\ &\leq \frac{c_3}{\varepsilon} h \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \end{aligned}$$

и последовательность $\bigcup \{z_n^p\}$ — интерполяционная. Итак, $B_1(z)$ и $B_2(z)$ — интерполяционные произведения Бляшке.

Частичные произведения $(B_1^1 \dots B_1^p)/(B_2^1 \dots B_2^p)$ сходятся к B_1/B_2 в $L^2(dx/(1+x^2))$, так что некоторая их подпоследовательность сходится к B_1/B_2 почти всюду. Значит, ввиду (5.21) почти всюду

$$|v_0(x) - \operatorname{Arg} B_1(x)/B_2(x)| \leq \varepsilon.$$

В общем случае положим $u = u_1 u_2$, где

$$u_1(x) = 1, \quad |x| > 1, \quad u_2(x) = 1, \quad |x| < 1.$$

Мы уже знаем, что почти всюду

$$\left| u_1(x) - \frac{B_{11}(x)}{B_{12}(x)} \right| < \varepsilon/2$$

для некоторых интерполяционных произведений Бляшке $B_{11}(z)$ и $B_{12}(z)$. Используя инверсию $z \rightarrow -1/z$, мы получим и такие интерполяционные произведения Бляшке $B_{21}(z)$ и $B_{22}(z)$, что почти всюду

$$\left| u_2(x) - \frac{B_{21}(x)}{B_{22}(x)} \right| < \varepsilon/2.$$

Теорема будет доказана, если произведения Бляшке $B_1 = B_{11}B_{21}$ и $B_2 = B_{12}B_{22}$ тоже окажутся интерполяционными. Для этого достаточно оценить снизу псевдогиперболическое расстояние между нулями $B_{1j}(z)$ и $B_{2j}(z)$, $j = 1, 2$. Нули функций B_{11} и B_{12} лежат в полосе $\{|x| < 1\}$ на горизонтальных прямых $\{y = \eta_p\}$, $p = 2, 3, \dots$ с $\eta_{p+1} < \eta_p/4$. Нули функций B_{21} и B_{22} лежат в области $\{|x| > 1\}$ на больших окружностях, касающихся оси абсцисс в начале координат. В области $\{y \leq \eta_2\}$ эти окружности пересекаются с прямыми $\{x = \pm 1\}$ в точках с ординатами $y = y_q$, $q = 1, 2, \dots$. По лемме 5.5 можно сделать y_1 и y_{q+1}/y_q сколь угодно малыми. Выбирая их так, чтобы

$$\inf_p \frac{|y_q - \eta_p|}{y_q} \geq c\varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots,$$

мы добьемся того, чтобы $B_1(z)$ и $B_2(z)$ были интерполяционными произведениями Бляшке. $\square$

Замечания

Разделы 1 и 2 взяты у Гофмана [1967]. Дальнейшие результаты из его статьи изложены в упр. 1—8. Лемма 3.3 принадлежит Карлесону [1972]. Теорему 4.1 см. у Карлесона и Гарнетта [1975], которые также рассмотрели гармоническую интерполяцию в $\mathbb{R}_+^{d+1}$. Теорема 5.1 есть у Джонса [1981]. Идея следствия 5.2 принадлежит Дэви (см. Дэви, Гамелин и Гарнетт [1973]).

Упражнения и дальнейшие результаты

1. Пусть $m \in \mathfrak{M}$.

(а) Назовем точку m *некасательной*, если m лежит в замыкании некоторого сектора

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \left\{ z: \frac{|z - e^{i\theta}|}{1 - |z|} < \alpha, \quad |z| < 1 \right\}, \quad \alpha > 1.$$

Каждая некасательная точка лежит в замыкании некоторой интерполяционной последовательности и, следовательно, в аналитическом круге. (Указание. Существует конечное число интерполяционных произведений Бляшке $B_j(z)$, $1 \leq j \leq N$, с нулями $\{z_{jk}\}$ и число r , $0 < r < r(\delta(B_j))$ (см. лемму 1.4), такие, что

$$\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) \subset \bigcup_{j=1}^N \{z: \rho(z, z_{jk}) < r\}.$$

(b) Назовем точку m *орициклической*, если она лежит в замыкании области, которую образуют две окружности, касающиеся T изнутри в одной точке. Каждая орициклическая точка лежит в замыкании интерполяционной последовательности.

(с) Пусть функция $r(\theta)$ непрерывна и убывает при $0 \leq \theta \leq 1$, $r(0) = 1$, а γ — кривая $\{r(\theta)e^{i\theta}, 0 < \theta \leq 1\}$ с концом в точке $z = 1$. Если точка $m \in \mathfrak{M}$ лежит в замыкании кривой γ , то m лежит в аналитическом диске.

2. Обозначим через V круг, касающийся единичной окружности в точке $e^{i\theta}$, а через $\bar{V}$ — его замыкание в $\mathfrak{M}$.

(а) $\bar{V}$ не пересекается с границей Шилова X .

(b) Существуют точки $m \in \bar{V}$, не лежащие в замыкании какой-либо интерполяционной последовательности. (Иначе V при любом $\varepsilon > 0$ можно было бы покрыть псевдогиперболическими кругами $\{\rho(z, z_j) < \varepsilon\}$, где $\{z_j\}$ является конечным объединением интерполяционных последовательностей. Но это несовместимо с геометрической характеристикой интерполяционных последовательностей.)

(с) Таким образом, существуют одноточечные доли Глисона, не лежащие в границе Шилова.

(d) Можно обобщить часть (b) и упр. 1. Пусть S — произвольное подмножество круга D , а $\{z_j\} \subset S$ — редкая последовательность и $S \subset \bigcup \{z: \rho(z, z_j) < 1/2\}$. В таком случае каждая точка замыкания множества S в $\mathbb{M}$ лежит в аналитическом круге тогда и только тогда, когда мера $\sum (1 - |z_j|) \delta_{z_j}$ карлесона.

Пусть в верхней полуплоскости $Q_{nj} = \{j2^{-n} \leq x \leq (j+1)2^{-n}, 2^{-n-1} \leq y \leq 2^{-n}\}$, $-\infty < n < \infty$, $-\infty < j < \infty$. Гиперболически конгруэнтные прямоугольники Q_{nj} образуют замощение полуплоскости $\mathcal{H}$.

Пусть $S \subset \mathcal{H}$; рассмотрим последовательность $\{z_k\}$, образованную центрами тех Q_{nj} , которые пересекаются с S . Каждая точка замыкания множества S в $\mathbb{M}$ лежит в аналитическом круге тогда и только тогда, когда последовательность $\{z_k\}$ интерполяционная.

3. Отображение $z \rightarrow Lz: D \rightarrow \mathbb{M}^\mathbb{D}$ единственным образом продолжается до непрерывного отображения $L: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^\mathbb{D}$. Если $m \in G$, то $L(m) = L_m$, если же $m \notin G$, то $L(m)(\xi) \equiv m$.

4. Обозначим через $\mathcal{E}_\mathbb{M}$ алгебру всех комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на D , которые продолжаются до непрерывных функций на $\mathbb{M}$.

(a) $\mathcal{E}_\mathbb{M}$ — наименьшая равномерно замкнутая алгебра, содержащая H^∞ и $\bar{H}^\infty$.

(b) $\mathcal{E}_\mathbb{M}$ — наименьшая равномерно замкнутая алгебра, содержащая все ограниченные гармонические функции.

(c) Если $f \in H^\infty$ и $\alpha \in D$, то

$$g(z) = f\left(\frac{\alpha + z}{1 + \bar{\alpha}z}\right) \in \mathcal{E}_\mathbb{M}$$

и

$$h_n(z) = (1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \in \mathcal{E}_\mathbb{M}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Пусть $S \subset D$; предположим, что при некотором ε , $0 < \varepsilon < 1$, псевдогиперболическая ε -окрестность $\{z: \inf_S \rho(z, w) < \varepsilon\}$ множества S покрывает D . Тогда замыкание S в $\mathbb{M}$ содержит все точки, не лежащие в замыкании никакой интерполяционной последовательности. (Используйте тот факт, что $P(m) = \{m\}$ для таких точек.)

6. Пусть $m \in \mathbb{M}$. Вот необходимое и достаточное условие принадлежности m замыканию какой-либо интерполяционной последовательности: если $E, F \subset D$ и $m \in \bar{E} \cap \bar{F}$, то $\rho(E, F) = \inf \{\rho(z, w): z \in E, w \in F\} = 0$.

7. Пусть T — гомоморфизм алгебры H^∞ в себя, т. е. ограниченный линейный оператор из H^∞ в H^∞ , для которого

$$T(fg) = T(f)T(g), \quad f, g \in H^\infty.$$

Существуют такое аналитическое отображение $\tau: D \rightarrow D$, $\tau(0) = 0$ и такое направление (z_i) в D , что

$$(E.1) \quad Tf(z) = \lim_i f\left(\frac{\tau(z) + z_i}{1 + \bar{z}_i \tau(z)}\right).$$

Функция Tf будет непостоянна для некоторого $f \in H^\infty$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (i) (z_i) можно выбрать постоянным, $z_i = \zeta$, $\zeta \in D$.
- (ii) (z_i) является поднаправлением некоторой интерполяционной последовательности.

Альтернатива (i) имеет место тогда и только тогда, когда оператор T непрерывен в слабой L^1 -топологии.

Пусть $H^\infty(V)$ — кольцо всех ограниченных аналитических функций на римановой поверхности (или на аналитическом пространстве) V . Если $T: H^\infty(D) \rightarrow H^\infty(V)$ — гомоморфизм, то существуют аналитическое отображение $\tau: V \rightarrow D$ и направление (z_i) в D , удовлетворяющие условию (E.1).

8. (a) Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2) |B'(z_n)| = 1.$$

Если m лежит в замыкании множества $\{z_n\}$, то L_m гомеоморфно отображает D на $P(m)$ (в обычной гельфандовской топологии $\mathfrak{M}$), а $L_m^{-1} = \text{const} \cdot B$.

(b) Обращаясь к верхней полуплоскости, рассмотрим двустороннюю последовательность $S = \{z_k = k + i, k \in \mathbb{Z}\}$. Это интерполяционная последовательность, и каждая точка $m \in \bar{S} \setminus S$ лежит в аналитическом круге. Назовем подпоследовательность $\{z_{k_n}\} \subset S$ тонкой, если $|k^{n+1} - k^n| \rightarrow \infty$. Если m лежит в замыкании тонкой подпоследовательности, то L_m — гомеоморфизм.

(c) Для $z_k = k + i \in \mathcal{H}$ координатное отображение (на верхнюю полуплоскость) имеет вид

$$L_{z_k}(\zeta) = k + i \left(\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right), \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

Если $F(z) = e^{2\pi iz}$, то

$$F \circ L_{z_k}(\zeta) = \exp \left(-2\pi \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)$$

независимо от k , а поэтому и

$$F \circ L_m(\zeta) = \exp \left(-2\pi \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right), \quad m \in \bar{S}.$$

Пусть $m, m' \in \bar{S} \setminus S$. Точки m и m' лежат в одной доле Глисона тогда и только тогда, когда

$$L_m(\xi) = L_{m'}(\xi')$$

при некоторых $\xi, \xi' \in \mathcal{D}$. А это значит, что при некотором целом n , не зависящем от ξ и ξ' ,

$$i \frac{1+\xi'}{1-\xi'} = n + i \frac{1+\xi}{1-\xi}.$$

Пусть $\sigma(z_k) = z_{k+1}$, $\sigma: S \rightarrow S$. Отображение σ продолжается до гомеоморфизма $\bar{S} \setminus S$ на себя, и $m' = \sigma^n(m)$. Обратно, если $m' = \sigma^n(m)$, то

$$m' = L_m \left(\frac{n}{n+2i} \right)$$

и $m' \in P(m)$. Таким образом, точки $m, m' \in \bar{S} \setminus S$ лежат в одной доле Глисона тогда и только тогда, когда они лежат на одной орбите группы $\mathcal{G} = \{\sigma^n, -\infty < n < \infty\}$.

(д) Пусть K — минимальное замкнутое подмножество в $\bar{S} \setminus S$, инвариантное относительно группы $\mathcal{G}$; оно существует по лемме Цорна. Если $m \in K$, то m лежит в замыкании множества $\{\sigma^n(m)\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому некоторое поднаправление последовательности $\{L_m(n/(n+2i))\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $L_m(0)$ и L_m не может быть гомеоморфизмом. Учитывая часть (б), мы видим, что если m лежит в замыкании тонкой подпоследовательности, то замыкание $\{\sigma^n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит замкнутое собственное подмножество, инвариантное относительно $\mathcal{G}$.

См. Гофман [1967].

****9.** Любое аналитическое отображение $\tau: D \rightarrow D$ продолжается до непрерывного отображения $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ по формуле

$$\tau(m)(f) = m(f \circ \tau).$$

(а) Если $\tau(m) = m$ для некоторой точки $m \in G$, то $\inf_D \rho(\tau(z), z) = 0$. Для доказательства предположим, что $\{z_n\}$ —

интерполяционная последовательность и $m \in \{\bar{z}_n\}$. При малых $\varepsilon > 0$ кружки $K_n = K(z_n, \varepsilon) = \{\rho(z, z_n) < \varepsilon\}$ не пересекаются и m не лежит в замыкании множества $D \setminus \bigcup K_n$. Следовательно, $\tau(z_n) \in \bigcup K_j$ для бесконечно многих n , множество которых обозначим через S . При $n \in S$ и $\tau(z_n) \in K_j$ положим $T(n) = j$. Наша задача — показать, что T имеет неподвижную точку. Определим отношение эквивалентности на S , полагая $n_1 \sim n_2$, если $T^p(n_1) = T^q(n_2)$ при каких-либо натуральных p и q . Заметим, что $n \sim T(n)$, если $n \in S$ и $T(n) \in S$. Пусть n^* — наименьший элемент в S , эквивалентный n . Пусть p и q таковы, что $T^p(n) = T^q(n^*)$ и $p+q$ принимает наименьшее возможное значение. Обозначим через E множество тех $n \in S$, для которых $p+q$

четно. Если T не имеет в S неподвижных точек, то при $n \in S$ и $T(n) \in S$ только один из номеров n и $T(n)$ лежит в E .

Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке с множеством нулей S . Тогда $B(m) = 0$ и $B = B_1 B_2$, где нули B_1 образуют множество $\{z_n: n \in E\}$, а нули B_2 — множество $\{z_n: n \in S \setminus E\}$. Если ε мало, то предположение об отсутствии у T неподвижных точек ведет к противоречию.

(b) Если τ имеет две неподвижные точки, лежащие в G в разных слоях, то $\tau(z) \equiv z$. (Используйте упражнение 1.2(b).)

(c) Пусть $\mathfrak{M}_\lambda$ — слой $\mathfrak{M}$ над λ , $|\lambda| = 1$. Отображение τ имеет неподвижную точку в $G \cap \mathfrak{M}_\lambda$ тогда и только тогда, когда в точке λ существует и равна 1 угловая производная функции τ . (Обсуждение угловых производных см. в упражнении 1.7.)

(d) τ отображает границу Шилова в себя тогда и только тогда, когда функция $\tau(z)$ внутренняя. (Эти результаты принадлежат Беренсу.)

10. Пусть $m \in \mathfrak{M}$, $f \in H^\infty$ и $f(m) = 0$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow m} (1 - |z|^2) f'(z) = 0$$

в том и только том случае, когда $f = f_1 f_2$, где $f_i \in H^\infty$ и $f_i(m) = 0$. (Интересен только случай произведения Бляшке, потому что при $f^{1/2} \in H^\infty$ оба условия тривиально выполняются. Если $m \notin G$, то оба условия следуют из теоремы 2.4, а при $m \in G$ они означают, что $(f \circ L_m)'(0) = 0$.)

11. Обозначим через B_0 класс всех аналитических функций $f(z)$ в D , удовлетворяющих условию

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0,$$

а через $VMOA$ — класс аналитических функций вида $u + \bar{v}$, где u и v гармоничны в D и непрерывны в $\bar{D}$. Буква B употреблена в честь Блоха.

(a) $VMOA \subset B_0$.

(b) $f(z) \in H^\infty \cap B_0$ тогда и только тогда, когда функция $f(m)$ постоянна на каждой доле Глисона в $\mathfrak{M} \setminus D$.

Поэтому Беренс назвал этот класс COP (constant on parts).

(c) Пусть $g(z)$ лежит в диск-алгебре. Класс Зигмунда Λ_* определяется условием

$$|g(\theta + h) + g(\theta - h) - 2g(\theta)| = O(h).$$

Функция $g(e^{i\theta})$ принадлежит Λ_* тогда и только тогда, когда

$$\sup_z (1 - |z|^2) |g''(z)| < \infty$$

(см. Зигмунд [1968], т. 1). Аналогично $g'(z) \in B_0$ тогда и только тогда, когда $g(e^{i\theta}) \in \lambda_*$, где класс Зигмунда λ_* определяется условием

$$|g(\theta + h) + g(\theta - h) - 2g(\theta)| = o(h).$$

(d) Существует такая непрерывная возрастающая функция $F(\theta)$ на $[0, 2\pi]$, что F сингулярна, $F'(\theta) = 0$ почти всюду, но $F \in \lambda_*$ (см. Кахан [1969], Пираниян [1966]). Таким образом, $F(\theta) = \mu([0, \theta])$, где μ — некоторая сингулярная мера, и внутренняя функция, определенная μ , лежит в $H^\infty \cap B_0$. Следовательно, $H^\infty \cap B_0$ содержит бесконечные произведения Бляшке и $VMOA \neq B_0$. Сарасон поставил проблему характеристики произведений Бляшке из B_0 в терминах их нулей (см. Никольский, Хавин и Хрущев [1978]).

12. Пусть функция $\mathcal{P}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ неотрицательна и $\int \mathcal{P}(t) dt = 1$. Пусть $\{z_j\}$ — последовательность точек верхней полуплоскости; положим

$$\mathcal{P}_j(t) = \frac{1}{y_j} \mathcal{P}\left(\frac{t - x_j}{y_j}\right).$$

(a) Предположим, что существуют вещественные функции $u_j(t) \in L^\infty$, для которых $\|u_j\|_\infty \leq 1$, $\int u_j(t) \mathcal{P}_j(t) dt > \delta > 0$ и $\int u_j(t) \mathcal{P}_k(t) dt \leq 0$, $k \neq j$, где δ не зависит от j . Тогда последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная.

(b) Если слабое замыкание множества $\{\mathcal{P}_j\}$ в $(L^\infty)^*$ гомеоморфно $\beta\mathbb{N}$ (компактификации Стоуна — Чеха натурального ряда), то последовательность $\{z_j\}$ интерполяционная.

ЛИТЕРАТУРА

- Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.
[1968*] О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори — Фейера и Ф. Рисса. — Функци. анализ и прил., 1968, т. 2, № 1, с. 1—19.
- [1968] Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори — Фейера и И. Шура. — Функци. анализ и прил., 1968, т. 2, № 4, с. 1—17.
- [1971] Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения. — Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1971, т. 6, № 2—3, с. 87—112.
- Айрапетян Г. М.
[1980*] О представлении некоторых подклассов класса H_1 Харди посредством систем рациональных дробей. — Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1980, т. 15, № 1, с. 3—14.
- Акслер (Axler S.)
[1977] Factorization of L^∞ functions. — Ann. Math., 1977, 106, 567—572.
- Акслер, Берг, Джуэлл, Шилдс (Axler S., Berg I. D., Jewell N. P., Shields A.)
[1979] Approximation by compact operators and the space $H^\infty + C$. — Ann. Math., 1979, 109, 601—612.
- Акслер, Чанг, Сарасон (Axler S., Chang S.-Y., Sarason D.)
[1978] Products of Toeplitz operators. — Integr. Equat. Oper. Theory, 1978, 1/3, 285—309.
- Александр, Тейлор, Вильямс (Alexander H., Taylor B. A., Williams D. L.)
[1971] The interpolating sets for A^∞ . — J. Math. Anal. Appl., 1971, 36, 556—566.
- Александров А. Б.
[1975*] Нормы преобразования Гильберта в пространстве гильбертовых функций. — Функци. анализ и прил., 1975, т. 9, № 2, с. 1—4.
- [1981a*] Essays on non locally convex Hardy classes. — Lecture Notes Math. № 864, 1981, 1—89.
- [1981b*] Об A -интегрируемости граничных значений гармонических функций. — Матем. заметки, 1981, т. 30, № 1, с. 59—72.
- Аллен, Белна (Allen H. A., Belna C. L.)
[1972] Singular inner functions with derivatives in B^p . — Michigan Math. J., 1972, 19, 185—188.
- Альфоре (Ahlfors L. V.)
[1966] Complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [1973] Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill, New York 1973.
- Амар (Amar E.)
[1973] Sur un théorème de Mooney relatif aux fonctions analytiques bornées. — Pacific J. Math., 1973, 16, 191—199.
- [1977a] Thèse, Fac. des Sciences d'Orsay, Univ. de Paris XI, 1977.
- [1977b] Suites d'interpolation harmoniques. — J. Analyse Math., 1977, 32, 197—211.
- Амар, Ледерер (Amar E., Lederer A.)
[1971] Points exposés de la boule unité de $H^\infty(D)$. — C. R. Acad. Sci. Paris, sér. A., 1971, 272, 1449—1552.
- Андерсон (Anderson J. M.)

- [1975] A note on a basis problem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **51**, 330—334.
- [1979] On division by inner factors. — Comment. Math. Helv., 1979, **54**, 309—317.
- Андерсон, Клуни, Поммеренке (Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch.)
- [1974] On Bloch functions and normal functions. — J. Reine Angew. Math., 1974, **270**, 12—37
- Андо (Андо Т.)
- [1977] Uniqueness of predual of H^∞ , preprint.
- Андрианова Т. Н.
- [1976*] Коэффициенты Тейлора с редкими номерами для функций, суммируемых по площади — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1976, т. **65**, с. 161—163.
- Аров Д. З.
- [1978*] Аппроксимационная характеристика функций класса ВП. — Функци. анализ и прил., 1978, т. **12**, № 1, с. 70—71.
- Ахерн, Кларк (Ahern P. R., Clark D. N.)
- [1970a] On functions orthogonal to invariant subspaces. — Acta Math., 1970, **124**, 191—204.
- [1970b] Radial limits and invariant subspaces. — Amer. J. Math., 1970, **92**, 332—342.
- [1971] Radial N th derivatives of Blaschke products. — Math. Scand., 1971, **28**, 189—201.
- [1974] On inner functions with H^p derivatives. — Michigan Math. J., 1974, **21**, 115—127.
- [1976] On inner functions with B^p derivatives. — Michigan Math. J., 1976, **23**, 107—118.
- Ахизер Н. И.
- [1961*] Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961.
- Багемил, Зейдель (Bagemihl F., Seidel W.)
- [1954] Some boundary properties of analytic functions. — Math. Zeit., 1954, **61**, 186—189.
- Барби (Barbey K.)
- [1975] Ein Satz über abstrakte analytische Funktionen. — Arch. Math. (Basel), 1975, **26**, 521—527.
- Барби, Кёниг (Barbey K., König H.)
- [1977*] Abstract analytic function theory and Hardy algebras. — Lecture Notes Math. № 593, 1977.
- Бари Н. К.
- [1961*] Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
- Безикович А. С. (Besicovitch A. S.)
- [1923] Sur la nature des fonctions à carré sommable mesurables. Fund. Math., 1923, **4**, 172—195.
- [1926*] A general property of summable functions. — J. London Math. Soc., 1926, **1**, 120—128.
- Белна, Пираяни (Belna C. L., Piranian C.)
- [1981] A Blaschke product with a level-set of infinite length, to be published.
- Беренс (Behrens M.)
- [1971] The maximal ideal space of algebras of bounded analytic functions on infinitely connected domains. — Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **161**, 358—380.
- [1981] Interpolation and Gleason parts in L -domains. — Trans. Amer. Math. Soc., in press.
- Бёрлинг (Beurling A.)
- [1939*] Ensembles exceptionnels. — Acta Math., 1939, **72**, 1—13.
- [1949] On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. — Acta Math., 1949, **81**, 239—255.
- Бернар (Bernard A.)

- [1971] Algèbres quotients d'algèbres uniformes. — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1971, 272, 1101—1104.
- Бернар, Гарнетт, Маршалл (Bernard A., Garnett J. B., Marshall D. E.)
- [1977] Algebras generated by inner functions. — J. Funct. Anal., 1977, 25, 275—285.
- Бернштейн (Baernstein A.)
- [1974] Integral means, univalent functions and circular symmetrization. — Acta Math., 1974, 133, 139—169.
- [1976] Univalence and bounded mean oscillation. — Michigan Math. J., 1976, 23, 217—223.
- [1979] Some sharp inequalities for conjugate functions. — Proc. Symp. Pure Math., 1979, 35(1), 409—416.
- [1980] Analytic functions of bounded mean oscillation. — Aspects of contemporary complex analysis, Academic Press, New York 1980.
- Бессага, Пелчинский (Bessaga C., Pelczynski A.)
- [1960] Spaces of continuous functions (IV). — Studia Math., 1960, 19, 53—62.
- Бишоп (Bishop E.)
- [1959] A minimal boundary for function algebras. — Pacific J. Math., 1959, 9, 629—642. [Имеется перевод: Бишоп Е. Минимальная граница функциональных алгебр — В сб.: Некоторые вопросы теории приближений. — М.: ИЛ, 1963, с. 101—119.]
- [1962] A general Rudin — Carleson theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13, 140—143.
- [1963] Holomorphic completions, analytic continuations and the interpolation of seminorms. — Ann. Math., 1963, 78, 468—500.
- [1964] Representing measures for points in a uniform algebra. — Bull. Amer. Math. Soc., 1964, 70, 121—122.
- [1965] Abstract dual extremal problems. — Notices Amer. Math. Soc., 1965, 12, 123.
- Бишоп, Фелпс (Bishop E., Phelps R. R.)
- [1961] A proof that every Banach space is subreflexive. — Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67, 97—98.
- Бляшке (Blaschke W.)
- [1915] Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. — S.-B. Sächs Akad. Wiss. Leipzig Math-Natur. Kl., 1915, 67, 194—200.
- Бойд (Boyd D.)
- [1979] Schur's algorithm for bounded holomorphic functions. — Bull. London Math. Soc., 1979, 11, 145—150.
- Бочкарев С. В.
- [1974] Существование базиса в пространстве функций, аналитических в круге, и некоторые свойства системы Франклина. — Матем. сб., 1974, т. 95, № 1, с. 3—18.
- Браудер (Browder A.)
- [1969] Introduction to function algebras, Benjamin, New York, 1969.
- Браун (Brown L.)
- [1970] Subalgebras of L^∞ of the circle group. — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 25, 585—587.
- Браун, Шилдс, Целлер (Brown L., Shields A., Zeller K.)
- [1960] On absolutely convergent exponential sums. — Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, 162—183.
- Брудный Ю. А.
- [1971*] Пространства, определяемые с помощью локальных приближений. Труды Моск. Матем. об-ва, 1971, т. 24, с. 69—132.
- Бруна (Bruna J.)
- [1980*] Les ensembles d'interpolation des $A^p(D)$. — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A., 1980, 290, № 1, 25—27.
- Буль (Boole G.)

- [1857*] On the comparison of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals. — Phil. Trans. Roy Soc., 1857, 147, 754—803.
- Бургэн (Bourgain J.)
- [1981*] Sur les projections dans H^∞ et la propriété de Grothendieck. — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A., 1981, 293, № 1, 47—49.
- Буркхольдер (Burkholder D. L.)
- [1973] Distribution function inequalities for martingales. — Ann. Probab., 1973, 1, 19—42.
- [1976] Harmonic analysis and probability. — Studies in Harmonic Analysis, ed. J. M. Ash, Studies in Math., 1976, 13, 136—149.
- [1979] Martingale theory and harmonic analysis in Euclidean spaces. — Proc. Symp. Pure Math., 1979, 35 (2), 283—302.
- Буркхольдер, Ганди (Burkholder D. L., Gundy R. F.)
- [1972] Distribution function inequalities for the area integral. — Studia Math., 1972, 44, 527—544.
- Буркхольдер, Ганди, Сильверстейн (Burkholder D. L., Gundy R. F., Silverstein M. L.)
- [1971] A maximal function characterization of the class H^p . — Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 157, 137—153.
- Бэр (Bear H. S.)
- [1970] Lecture on Gleason parts. — Lecture Notes Math № 121, 1970.
- Варопулос (Varopoulos N. Th.)
- [1970] Groups of continuous functions in harmonic analysis. — Acta Math., 1970, 125, 109—154.
- [1971a] Ensembles pics et ensembles d'interpolation pour les algèbres uniformes — C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A., 1971, 272, 866—867.
- [1971b] Sur la reunion de deux ensembles d'interpolation d'une algèbre uniforme — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A., 1971, 272, 950—952.
- [1971c] Un problème d'extension linéaire dans les algèbres uniformes. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1971, 21, 263—270.
- [1972] Sur un problème d'interpolation. — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A., 1972, 274, 1539—1542.
- [1977a] BMO functions and the $\bar{\partial}$ equation. — Pacific J. Math., 1977, 71, 221—273.
- [1977b] A remark on BMO and bounded harmonic functions. — Pacific J. Math., 1977, 73, 257—259.
- [1980] A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO. — Pacific J. Math., 1980, 90, 201—221.
- Васюнин В. И.
- [1978*] Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции. — Труды мат. ин-та АН СССР, 1978, т. 130, с. 5—49.
- Вейс (Weiss G.)
- [1979] Some problems in the theory of Hardy spaces. — Proc. Symp. Pure Math., 1979, 35 (1), 189—200.
- Вермер (Wermer J.)
- [1953] On algebras of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, 866—869.
- [1960] Dirichlet algebras. — Duke Math. J., 1960, 27, 373—382.
- [1964] Seminar über Funktionen-Algebren. — Lecture Notes Math., № 1, 1964.
- [1971] Banach algebras and several complex variables, Markham, Chicago, 1971.
- Виноградов С. А.
- [1970*] Интерполяционные теоремы Банаха — Рудина — Карлесона и нормы операторов вложения для некоторых классов аналитических функций. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1970, т. 19, с. 6—54.
- [1976a*] Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L^p -нормой. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1976, т. 65, с. 17—68.

- [1976b*] Свойства мультипликаторов интегралов типа Коши — Стильеса и некоторые задачи факторизации аналитических функций. — Математическое программирование и смежные вопросы. Труды Седьмой зимней школы. Дрогобыч, 1974, Теория функций и функц. анализ. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1976, с. 5—39.
- Виноградов С. А., Горин Е. А., Хрушев С. В.
- [1981*] Свободная интерполяция в H^∞ по П. Джонсу. — Записки научн. семина. ЛОМИ, 1981, т. 113, с. 212—214.
- Виноградов С. А., Рухшин С. Е.
- [1982*] О свободной интерполяции ростков аналитических функций в пространствах Харди. — Записки научн. семина. ЛОМИ, 1982, т. 107, с. 36—45.
- Виноградов С. А., Хавин В. П.
- [1974] Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. I. — Записки научн. семина. ЛОМИ, 1974, т. 47, с. 15—54.
- [1976*] Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II. — Записки научн. семина. ЛОМИ, 1976, т. 56, с. 12—58.
- Виноградов С. А., Хрушев С. В.
- [1981*] Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series. — Lecture Notes Math. № 864, 1981, 169—213.
- Войташик (Wojtaszczyk P.)
- [1979*] On weakly compact operators from some uniform algebras. — Studia Math., 1979, 64, № 2, 105—116.
- Волф (Wolff T.)
- [1979] Some theorems on vanishing mean oscillation. — Thesis, Univ. California, Berkeley, 1979.
- [1980] Устное сообщение.
- Гамелин (Gamelin T. W.)
- [1964] Restrictions of subspaces of $C(X)$. — Trans. Amer. Math. Soc., 1964, 112, 278—286.
- [1969] Uniform algebras, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969. [Имеется перевод: Гамелин Т. Равномерные алгебры. — М.: Мир, 1973.]
- [1970] Localization of the corona problem. — Pacific J. Math., 1970, 34, 73—81.
- [1972] Lectures on $H^\infty(D)$, Univ. Nacional de la Plata, Argentine, 1972.
- [1973] Extremal problems in arbitrary domains. — Michigan Math. J., 1973, 20, 3—11.
- [1974] The Silov boundary of $H^\infty(U)$. — Amer. J. Math., 1974, 94, 79—103.
- [1979] Uniform algebras and Jensen measures. — London Math. Soc. Lecture notes № 32, 1979.
- [1980] Wolff's proof of the corona theorem. — Isr. J. Math. 1980, v. 37, № 1—2, p. 113—120.
- Гамелин, Гарнетт (Gamelin T. W., Garnett J. B.)
- [1970] Distinguished homomorphisms and fiber algebras. — Amer. J. Math., 1970, 92, 455—474.
- Гамелин, Гарнетт, Рубел, Шилдс (Gamelin T. W., Garnett J. B., Rubel L. A., Shields A. L.)
- [1976] On badly approximable functions. — J. Approx. Theory, 1976, 17, 280—296.
- Ганди, Виден (Gundy R. F., Wheeden R. L.)
- [1974] Weighted integral inequalities for the non-tangential maximal function, Lusin area integral and Walsh-Paley series. — Studia Math., 1974, 49, 107—124.
- Гарнетт (Garnett J. B.)
- [1971a] Vitushkin's localization operator. — Indiana Univ. Math. J., 1971, 20, 905—907.
- [1971b] Interpolating sequences for bounded harmonic functions. — Indiana Univ. Math. J., 1971, 21, 187—192.

- [1977] Two remarks on interpolation by bounded analytic functions. — Lecture Notes Math. № 604, 1977.
- [1978] Harmonic interpolating sequences, L^p and BMO. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1978, 28, 215—228.
- Гарнетт, Джонс (Garnett J. B., Jones P. W.)
- [1978] The distance in BMO to L^∞ . — Ann. Math., 1978, 108, 373—393.
- Гарнетт, Лэттер (Garnett J. B., Latter R. H.)
- [1978] The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables. — Duke Math. J., 1978, 45, 815—845.
- Гарсиа (Garsia A.)
- [1970] Topics in almost everywhere convergence, Markham, Chicago, 1970.
- [1971] A presentation of Fefferman theorem, unpublished.
- [1973] Martingale inequalities. Benjamin, New York, 1973.
- Геринг (Gehring F. W.)
- [1973] The L^p integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. — Acta Math., 1973, 130, 265—277.
- Гинзбург Ю. П., Талюш Н. А.
- [1973*] Матричный аналог теоремы Хейнса и типичная спектральная структура сжатий. — Функц. анализ и прил., 1973, т. 7, № 1, с. 66—67.
- Гликсберг (Glicksberg I.)
- [1962] Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry. — Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 105, 415—435.
- [1967] The abstract F. Riesz and M. Riesz theorem. — J. Funct. Anal. 1967, 1, 109—122.
- Голузин Г. М.
- [1966] Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.
- Гофман (Hoffman K.)
- [1962a] Banach spaces of analytic functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962. [Имеется перевод: Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. — М.: ИЛ, 1963.]
- [1962b] Analytic functions and logmodular Banach algebras. — Acta Math., 1962, 108, 271—317.
- [1967] Bounded analytic functions and Gleason parts. — Ann. Math., 1967, 86, 74—111.
- Гофман, Зингер (Hoffman K., Singer I. M.)
- [1957] Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$. — Amer. J. Math., 1957, 79, 295—305.
- [1960] Maximal algebras of continuous functions. — Acta Math., 1960, 103, 217—241.
- Гофман, Рамсей (Hoffman K., Ramsey A.)
- [1965] Algebras of bounded sequences. — Pacific J. Math., 1965, 5, 1239—1248.
- Гофман, Росси (Hoffman K., Rossi H.)
- [1967] Extensions of positive weak *-continuous functionals. — Duke Math. J., 1967, 34, 453—466.
- Гренандер, Розенблатт (Grenander U., Rosenblatt M.)
- [1957] Statistical analysis of stationary time series, Wiley, New York, 1957.
- Гротендик (Grothendieck A.)
- [1955] Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 . — Canad. J. Math., 1955, 7, 552—561.
- Дальберг (Dahlberg B. J. E.)
- [1980] Approximation of harmonic functions. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1980, 30, № 2, 97—107.
- Данжуа (Denjoy A.)
- [1929] Sur une classe de fonctions analytiques. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A.—B., 1929, 188, 140, 1084.
- Данфорд, Шварц (Dunford N., Schwartz J.)
- [1958] Linear operators, part I, Miley (Interscience); New York, 1958. [Име-

- ется перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.]
- Дельбэн (Delbaen F.)
[1979*] The Pelczynski property for some uniform algebras. — *Studia Math.*, 1979, **64**, № 2, 117—125.
- де Леу, Рудин (de Leeuw K., Rudin W.)
[1958] Extreme points and extreme problems in H_1 . — *Pacific J. Math.*, 1958, **8**, 467—485.
- Дервиз А. О., Хавин В. П.
[1983*] Задача Дирихле и свободная интерполяция. — Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астр., 1983, № 7.
- Джерисон (Jerison D.)
[1976] Sur un théorème d'interpolation de R. Nevanlinna. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A.*, 1976, **282**, 1291—1293.
- Джон, Ниренберг (John F., Nirenberg L.)
[1961] On functions of bounded mean oscillation. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, **14**, 415—426.
- Джонс (Jones P. W.)
[1979a] A complete bounded complex submanifold of C^3 . — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, **76**, 305—306.
[1979b] Constructions for $BMO(\mathbb{R}^n)$ and $A_p(\mathbb{R}^n)$. — *Proc. Symp. Pure Math.*, 1979, **35**(1), 409—416.
[1979c] Extension theorems for BMO . — *Indiana Univ. Mat. J.*, 1979, **29**, 41—66.
[1980a] Bounded holomorphic functions with all level sets of infinite length. — *Michigan Math. J.*, 1980, **27**, 75—79.
[1980b] Carleson measures and the Fefferman—Stein decomposition of $BMO(\mathbb{R})$. — *Ann. Math.* 1980, **111**, 197—208.
[1980c] Factorization of A_p weights. — *Ann. Math.*, 1980, **111**, 511—530.
[1980d] Estimates for the corona problem. — *J. Funct. Anal.*, 1980, **39**, 162—181.
[1981] Ratios of interpolating Blaschke products. — *Pacific J. Math.* 1981, **95**, № 2, 311—321.
- Джрбашян М. М.
[1978*] Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, т. 43, № 6, с. 1322—1384.
- Джуэлл (Jewell N.)
[1976] Continuity of derivations and uniform algebras on odd spheres. — Thesis, Univ. Edinburgh, 1976.
- Диксмье (Dixmier J.)
[1951] Sur certains espaces considérés par M. H. Stone. — *Summa Brasil Math.*, 1951, **2**, 151—82.
- Дим, Маккин (Dym H., McKean H. P.)
[1976] Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem. — Academic Press, New York, 1976.
- Донохью (Donoghue W. F.)
[1974] Monotone matrix functions and analytic continuation. — Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.
- Досс (Doss R.)
[1981*] Elementary proof of the Rudin-Carleson and F. and M. Riesz theorems. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1981, **82**, № 4, 599—602.
- Доусон (Dawson D. W.)
[1975] Subalgebras of H^∞ . — Thesis. Indiana Univ., 1975.
- Друри (Drury S.)
[1970] Sur les ensembles de Sidon. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A.*, 1970, **271**, 162—163.
- Дуглас (Douglas R. G.)

- [1969] On the spectrum of Toeplitz and Wiener-Hopf operators. — «Abstract Spaces and Approximation theory», Birkhäuser, Basel, 1969, 53—66.
- [1972] Banach algebra techniques in operator theory. — Academic Press, New York, 1972.
- Дуглас, Рудин (Douglas R. G., Rudin W.)
- [1969] Approximation by inner functions. — Pacific J. Math., 1969, 31, 313—320.
- Дуглас, Шапиро, Шилдс (Douglas R. G., Shapiro H. S., Shields A. L.)
- [1970] Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1970, 20, 1, 37—76.
- Дынькин Е. М.
- [1979*] Множества свободной интерполяции для классов Гельдера. — Матем. сб., 1979, т. 109 (151), № 1, с. 107—128.
- Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.
- [1983*] Весовые оценки сингулярных интегралов и некоторые их приложения. — Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 21. — М.: ВИНТИ, 1983.
- Дьюрен (Duren P. L.)
- [1970] Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.
- Дьюрен, Ромберг, Шилдс (Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.)
- [1969] Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. — J. Reine Angew. Math., 1969, 238, 32—60.
- Дьюрен, Шапиро, Шилдс (Duren P. L., Shapiro H. S., Shields A. L.)
- [1966] Singular measures and domains not of Smirnov type. — Duke Math. J., 1966, 33, 247—254.
- Дэви (Davie A. M.)
- [1972] Linear extension operators for spaces and algebras of functions. — Amer. J. Math., 1972, 94, 156—172.
- Дэви, Гамелин, Гарнетт (Davie A. M., Gamelin T. W., Garnett J. B.)
- [1976] On Kolmogorov's inequalities $\|f\|_p \leq C_p \|f\|_1$, $0 < p < 1$. — Trans. Math. Soc., 1973, 175, 37—68.
- Дэвис (Davis B. J.)
- [1974] On the weak type (1,1) inequality for conjugate function. — Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 44, 307—311.
- [1934] On the distribution of values of bounded analytic functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1976, 222, 179—192.
- Жюлиа (Julia G.)
- [1920] Extension d'un lemme de Schwartz. — Acta Math., 1920, 42, 349—355.
- [1935*] Геометрические принципы анализа. — М.: ОНТИ, 1935.
- Зейдель (Seidel W.)
- [1934] On the distribution of values of bounded analytic functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, 201—226.
- Зигмунд (Zygmund A.)
- [1929] Sur les fonctions conjuguées. — Fund. Math., 1929, 13, 284—303.
- [1955] Trigonometrical series. — Dover, New York, 1955.
- [1968] Trigonometric series 2nd ed. — Cambridge Univ. Press, London and New York 1968. [Имеется перевод: Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965.]
- Зискинд (Ziskind S.)
- [1976] Interpolating sequences and the Shilov boundary of $H^\infty(\Delta)$. — J. Funct. Anal., 1976, 21, 380—388.
- Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.
- [1970*] Гауссовские случайные процессы. — М.: Наука, 1970.
- Йенсен (Jensen J. L. W. V.)
- [1899] Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. — Acta Math., 1899, 22, 219—251.
- [1906] Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. — Acta Math., 1906, 30, 175—193.

Кальдерон (Calderón A. P.)

[1950a] On theorems of M. Riesz and Zygmund. — Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 533—535.

[1950b] On the behavior of harmonic functions near the boundary. — Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 47—54.

Кальдерон, Зигмунд (Calderón A. P., Zygmund A.)

[1952] On the existence of certain singular integrals. — Acta Math., 1952, 88, 85—139.

[1956] On singular integrals. — Amer. J. Math., 1956, 78, 249—271.

Кампанато (Campanato S.)

[1963] Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1963, (3) 17, 175—188.

Кантор (Cantor D. G.)

[1981] Устное сообщение.

Каратеодори (Carathéodory C.)

[1911] Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1911, 32, 193—217.

[1929] Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. — Sitz. Preuss. Akad. Phys.-Math., 1929, 4, 1—18.

[1954] Theory of functions of a complex variable, vols. 1, 2. — Chelsea, New York, 1954.

Карпо (Cargo G. T.)

[1962] Angular and tangential limits of Blaschke products and their successive derivatives. — Canad. J. Math., 1962, 14, 334—348.

Карлесон (Carleson L.)

[1952] Sets of uniqueness for functions analytic in the unit disc. — Acta Math., 1952, 87, 325—345.

[1957] Representations of continuous functions. — Math. Zeit., 1957, 66, 447—451.

[1958] An interpolation problem for bounded analytic functions. — Amer. J. Math., 1958, 80, 921—930.

[1962a] Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. — Ann. Math., 1962, 76, 547—559.

[1962b] Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. — Proc. Int. Congr. Math Stockholm, 1962, 314—316.

[1967] Selected problems on exceptional sets. — Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1967. [Имеется перевод: Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств. — М.: Мир, 1971.]

[1970] The corona theorem. — Lect. Notes Math. № 118, 1970.

[1972] A moment problem and harmonic interpolation, preprint.

[1976] Two remarks on H^1 and BMO. — Adv. Math., 1976, 22, 269—277.

Карлесон, Гарнетт (Carleson L., Garnett J. B.)

[1975] Interpolating sequences and separation properties. — J. Analyse Math., 1975, 28, 273—299.

Карлесон, Якобс (Carleson L., Jacobs S.)

[1972] Best approximation by analytic functions. — Arkiv Mat., 1972, 10, 219—229.

Кахан (Kahane J.-P.)

[1967] Another theorem on bounded analytic functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18, 818—826.

[1969] Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. — Enseign. Math., 1969, 15, 185—192.

[1974] Best approximation in $L^1(T)$. — Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80, 788—804.

Кахан, Салем (Kahane J. P., Salem R.)

[1963*] Ensembles parfaits et séries trigonométriques. — Hermann, Paris, 1963.

Кацнельсон (Katznelson Y.)

- [1968] An introduction to harmonic analysis, Wiley, New York, 1968.
- Келлерер, Тейлор (Kelleher J. J., Taylor B. A.)
- [1971] Finitely generated ideals in rings of analytic functions. — *Math. Ann.*, 1971, **193**, 225—237.
- Келли (Kelley J. L.)
- [1955] General topology, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1955.
[Имеется перевод: Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968 и 1982.]
- Керр-Лоусон (Kerr-Lawson A.)
- [1965] A filter description of the homomorphisms of H^∞ . — *Canad. J. Math.*, 1965, **17**, 734—757.
- [1969] Some lemmas on interpolating Blaschke products and a correction. — *Canad. J. Math.*, 1969, **21**, 531—534.
- Кёниг (König H.)
- [1969] On the Gleason and Harnack metrics for uniform algebras. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1969, **22**, 100—101.
- Кларк (Clark D. N.)
- [1968a] Hankel forms, Toeplitz forms and meromorphic functions. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, **134**, 109—116.
- [1968b] On the spectra of bounded hermitian Hankel matrices. — *Amer. J. Math.*, 1968, **90**, 627—656.
- [1968c] On matrices associated with generalized interpolation problems. — *Pacific J. Math.*, 1968, **27**, 241—253.
- [1970] On interpolating sequences and the theory of Hankel and Toeplitz matrices. — *J. Func. Anal.*, 1970, **5**, 247—258.
- Кофман, Шилдс (Caughran J. G., Shields A. L.)
- [1969] Singular inner factors of analytic functions. — *Michigan Math. J.*, 1969, **16**, 409—410.
- Койфман (Coifman R. R.)
- [1974] A real variable characterization of H^p . — *Studia Math.*, 1974, **51**, 269—274.
- Койфман, Вейсс (Coifman R. R., Weiss G.)
- [1971] Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes. — *Lecture Notes Math.*, № 242, 1971.
- [1977] Extensions of Hardy spaces and their uses in analysis. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977, **83**, 569—646.
- Койфман, Мейер (Coifman R. R., Meyer Y.)
- [1975] On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **212**, 315—331.
- Койфман, Рохберг (Coifman R. R., Rochberg R.)
- [1980] Another characterization of BMO. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, **79**, 249—254.
- Койфман, Рохберг, Вейсс (Coifman R. R., Rochberg R., Weiss G.)
- [1976] Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables. — *Ann. Math.*, 1976, **103**, 611—635.
- Койфман, Фейфман (Coifman R. R., Fefferman Ch.)
- [1974] Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. — *Studia Math.*, 1974, **51**, 241—250.
- Коллингвуд, Ловатер (Collingwood E. F., Lohwater A. J.)
- [1966] The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, London, 1966.
[Имеется перевод: Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. — М.: Мир, 1971.]
- Колмогоров А. Н.
- [1925] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier. — *Fund. Math.*, 1925, **7**, 24—29.
- [1941] Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве. — *Бюлл. МГУ*, т. 2, № 6.
- Кордоба, Фейфман (Córdoba A., Fefferman Ch.)

- [1976] A weighted norm inequality for singular integrals. — *Studia Math.*, 1976, 57, 97—101.
- Коточигов А. М.
- [1972*] Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы. — *Записки научн. семин. ЛОМИ*, 1972, т. 30, с. 167—169.
- Коэн (Cohen P. J.)
- [1961] A note on constructive methods in Banach algebras. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1961, 12, 159—163.
- Крейн М. Г., Нудельман А. А.
- [1973*] Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
- Кусис (Koosis P.)
- [1971] Weighted quadratic means of Hilbert transforms. — *Duke Math. J.*, 1971, 38, 609—634.
- [1973] Moyennes quadratiques de transformées de Hilbert et fonctions de type exponentiel. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1973, sér. A., 276, 1201—1204.
- [1978] Sommabilité de la fonction maximale et appartenance à H_1 . — *C. R. Acad. Sci. Paris*, ser. A., 1978, 286, 1041—1043.
- [1979] Sommabilité de la fonction maximale et appartenance à H_1 . — Cas de plusieurs variables. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1979, ser. A., 288, 489—492.
- [1980] Lectures on H_p spaces. *Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series*, № 40, Cambridge Univ. Press, London, 1980. [Готовится русский перевод в издательстве «Мир».]
- Кшиштоф (Krzysztof R.)
- [1982*] Corona theorem for sequences of functions on a finitely connected domains. — *Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. math.*, 1982, 30, 1—2, 59—61.
- Ландау (Landau E.)
- [1913] Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. — *Arch. Math. Phys.*, 1913, 21, 42—50, 250—255.
- [1916] Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1916, Chelsea, New York, 1946.
- Ландкоф Н. С.
- [1966*] Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
- Левинсон (Levinson N.)
- [1940*] Gap and density theorems. — *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, 1940, v. 26.
- Линделёф (Lindelöf E.)
- [1915] Sur un principe générale de l'analyse et ces applications à la théorie de la représentation conforme. — *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 1915, 46, № 4.
- Литтлвуд (Littlewood J. E.)
- [1929] On functions subharmonic in a circle, II. — *Proc. London Math. Soc.*, 1929, 28, 383—394.
- Литтлвуд, Пэли (Littlewood J. E., Paley R. E. A. C.)
- [1931] Theorems on Fourier series and power series. — *J. London Math. Soc.*, 1931, 6, 230—233; 42, 52—89; 43, 105—126.
- Лузин Н. Н.
- [1951*] Интеграл и тригонометрический ряд — М.: ГИТТЛ, 1951.
- Люкинг (Luecking D.)
- [1980] The compact Hankel operators form an M -ideal in the space of Hankel operators. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, 79, 222—224.
- Люмер (Lumer G.)
- [1965] Analytic functions and the Dirichlet problem. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1965, 70, 98—104.
- [1969] Algèbres de fonctions et espaces de Hardy. — *Lect. Notes. Math.*, № 75, 1969.
- Люмис (Loomis L. H.)
- [1946] A note on the Hilbert transform. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1946, 52, 1082—1086.

- Лэттер (Latter R. H.)
 [1978] A decomposition of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms. — *Studia Math.*, 1978, 62, 92—101.
- Макенхаупт (Muckenhoupt B.)
 [1972] Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, 165, 207—226.
 [1974] The equivalence of two conditions for weighted functions. — *Studia math.*, 1974, 49, 101—106.
 [1979] Weighted norm inequalities for classical operators. — *Proc. Symp. Pure Math.*, 1979, 35(1), 69—84.
- Макенхаупт, Виден (Muckenhoupt B., Wheeden R. L.)
 [1974] Weighted norm inequalities for fractional integrals. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, 192, 261—274.
- Макинтайр, Порозинский (Macintyre A. J., Rogosinski W. W.)
 [1950] Extremum problems in the theory of analytic functions. — *Acta Math.*, 1950, 82, 275—325.
- Марден (Marden M.)
 [1966] Geometry of polynomials. — *Amer. Math. Soc., Surveys*, 1966, № 3.
- Маркушевич А. И.
 [1967*] Теория аналитических функций, т. 1 и 2. — М.: Наука, 1967.
- Мартиросян В. М.
 [1981*] Эффективное решение задачи кратной интерполяции в H^∞ с применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна. — *Изв. АН Арм. ССР, Сер. мат.*, 1981, т. 16, № 5, с. 339—357.
- Маршалл (Marshall D. E.)
 [1974] An elementary proof of the Pick-Nevanlinna interpolation theorem. — *Michigan Math. J.*, 1974, 21, 219—233.
 [1976a] Blaschke products generate H^∞ . — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1976, 82, 494—496.
 [1976b] Subalgebras of L^∞ containing H^∞ . — *Acta Math.*, 1976, 137, 91—98.
 [1976c] Approximation and interpolation by inner functions. — Thesis, Univ. of California, Los Angeles, 1976.
- Маршалл, Стрей, Сандберг (Marshall D. E., Stray A., Sundberg G.)
 [1982*] Nondiscriminating sets for H^∞ . — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1982, 86, № 2, 267—273.
- Мейерс (Meyers N. G.)
 [1964] Mean oscillation over cubes and Hölder continuity. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1964, 15, 717—721.
- Мергелян С. Н.
 [1951*] Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями. — *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1951, № 4, с. 395—400.
- Муни (Mooney M. C.)
 [1973] A theorem on bounded analytic functions. — *Pacific J. Math.*, 1973, 43, 457—463.
- Натцич (Natzitz B.)
 [1970] A note on interpolation. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, 25, 918.
- Неванлинна Р. (Nevanlinna R.)
 [1919] Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. — *Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A*, 1919, 13, № 1.
 [1929] Über beschränkte analytische Funktionen. — *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 1929, 32, № 7.
 [1953] Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1953. [Имеется перевод 1-го издания: Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. — М.: ГИИТЛ, 1941.]
- Неванлинна Ф., Неванлинна Р. (Nevanlinna F., Nevanlinna R.)
 [1922] Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. — *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 1922, 50, № 5.
- Нерепонтис (Negrepontis S.)

- [1967] On a theorem of Hoffman and Ramsey. — *Pacific J. Math.*, 1967, 20, 281—282.
- Нери (Neri U.)
- [1977] Some properties of functions with bounded mean oscillation. — *Studia Math.*, 1977, 61, 63—75.
- Никольский Н. К.
- [1974*] Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций. — Итоги науки, Матем. анализ. 12. — М.: ВИНТИ, 1974.
- [1980*] Лекции об операторе сдвига. — М.: Наука, 1980.
- [1984*] Treatise on the shift operator. Spectral function theory. — Springer, Berlin and New York, 1984.
- Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрушев С. В.
- [1981*] Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels. *Lecture Notes Math.* № 864, 1981, 214—335.
- Никольский Н. К., Хавин В. П., Хрушев С. В. (ред.)
- [1978] 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1978, 81. [Имеется расширенное издание: *Linear and Complex Analysis Problem Book. — Lecture Notes Math.*, № 1043, 1984.]
- Нойвирт, Ньюмен (Neuwirth J., Newman D. J.)
- [1967] Positive $H^{1/2}$ functions are constant. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1967, 18, 958.
- Носиро (Noshiro K.)
- [1960] Cluster sets, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1960. [Имеется перевод: Носиро К., Предельные множества. — М.: ИЛ, 1963.]
- Ньюмен (Newman D. J.)
- [1959a] Interpolation in H^∞ . — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, 92, 501—507.
- [1959b] Some remarks on the maximal ideal space structure of H^∞ . — *Ann. Math.*, 1959, 70, 438—445.
- Оберлин (Oberlin D. M.)
- [1980*] A Rudin-Carleson theorem for uniformly convergent Taylor series. — *Michigan Math. J.*, 1980, 27, № 3, 309—313.
- Оцука (Ohtsuka M.)
- [1954] Note on functions bounded and analytic in the unit circle. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1954, 5, 533—535.
- Парро (Parreau M.)
- [1951] Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann — *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1951, 3, 108—197.
- Пеллер В. В., Хрушев С. В.
- [1982*] Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы. — *Успехи матем. наук*, 1982, т. 37, № 1, с. 53—124.
- Пелчинский (Pelczynski A.)
- [1964a*] On simultaneous extension of continuous functions. — *Studia Math.*, 1964, 24, 285—304.
- [1964b] Supplement to my paper on simultaneous extension of continuous functions. — *Studia Math.*, 1964, 25, 157—161.
- [1977] Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R. I., 1977.
- Петерсен (Petersen K. E.)
- [1977] Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation, *Lond. Math. Soc. Lect. Notes*, 28, Cambridge Univ. Press, 1977.
- Пик (Pick G.)
- [1916] Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden — *Math. Ann.*, 1916, 77, 7—23.
- Пикоридес (Pichorides S. K.)
- [1972] On the best values of constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov. — *Studia Math.*, 1972, 44, 165—179.

Пираниян (Piranian G.)

[1966] Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions. — *Duke Math. J.*, 1966, 33, 255—262.

Пираниян, Вейцман (Piranian G., Weitsman A.)

[1978] Level sets of infinite length. — *Comment. Math. Helv.*, 1978, 53, 161—164.

Пираниян, Шилдс, Уэллс (Piranian G., Shields A. L., Wells I. H.)

[1967] Bounded analytic functions and absolutely continuous measures. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1967, 18, 818—826.

Плеснер А. И.

[1927] Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs. — *J. Reine Angew. Math.*, 1927, 158, 219—227.

Поллард (Pollard S.)

[1927*] Extension to Steiltjes integral of a theorem due to Plessner. — *J. London Math. Soc.*, 1927, 2, 37—41.

Поллард, Янг Р. (Pollard S., Young R. C.)

[1928*] On the integral $\int_a^b \frac{dF(t)}{x-t}$. — *Proc. London Math. Soc.*, 1928, (2) 28, 293—300.

Поммеренке (Pommerenke Ch.)

[1970] On Bloch functions. — *J. London Math. Soc.*, 1970, (2) 2, 689—695.

[1977] Schlichte Funktionen und analytische Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation. — *Comment. Math. Helv.*, 1977, 52, 591—602.

[1978] On univalent functions, Bloch functions and VMOA. — *Math. Ann.*, 1978, 236, 199—208

Пореда (Poreda S. I.)

[1972] A characterization of badly approximable functions. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, 169, 249—256.

Привалов И. И.

[1916] Sur les fonctions conjuguées. — *Bull. Soc. Math. France*, 1916, 44, 100—103.

[1919] Интеграл Коши, Саратовский ун-т, Саратов, 1919.

[1950] Граничные свойства аналитических функций. — М.: ГИТТЛ, 1950.

Протас (Protas D.)

[1973] Blaschke products with derivative in H^p and B^p . — *Michigan Math. J.*, 1973, 20, 393—396.

Пэли (Paley R. E. A. C.)

[1933] On the lacunary coefficients of power series. — *Ann. Math.*, 1933, 34, 615—616.

Рао (Rao K. V. R.)

[1967] On a generalized corona problem. — *J. Analyse Math.*, 1967, 18, 277—278.

Рисс М. (Riesz M.)

[1924] Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A — B.*, 1924, 178, 1464—1467.

[1927] Sur les fonctions conjuguées. — *Math. Zeit.*, 1927, 27, 218—244.

Рисс Ф. (Riesz F.)

[1920] Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern. — *Acta Math.*, 1920, 42, 147—171.

[1923] Über die Randwerte einer analytischen Funktion. — *Math. Zeit.*, 1923, 18, 87—95.

[1926] Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. I. — *Acta Math.*, 1926, 48, 329—343.

[1930] Ibid., II. — *Acta Math.*, 1930, 54, 321—360.

Рисс Ф., Рисс М. (Riesz F., Riesz M.)

[1916] Über Randwerte einer analytischen Funktion. — *Quatrième Congrès des Math. Scand.*, Stockholm, 1916, 27—44.

- Рогозинский, Шапиро (Rogosinski W. W., Shapiro H. S.)
 [1953] On certain extremum problems for analytic functions. — *Acta Math.*, 1953, **90**, 287—318.
- Розенблум (Rosenblum M.)
 [1980] A corona theorem for countably many functions. — *Integral equat. oper. theory*, 1980, **3**, № 1, 125—137.
- Розэй (Rosay J. P.)
 [1968] Sur un problème posé par W. Rudin. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A.*, 1968, **267**, 922—925.
- Ройден (Royden H.)
 [1962] The boundary values of analytic and harmonic functions. — *Math. Zeit.*, 1962, **78**, 1—24.
 [1965] Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces. — *Acta Math.*, 1965, **144**, 113—141.
- Рубел, Шилдс (Rubel L. A., Shields A. L.)
 [1966] The space of bounded analytic functions on a region. — *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1966, **16**, № 1, 235—277.
- Рудин (Rudin W.)
 [1955a] Analytic functions of class H^p . — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1955, **78**, 46—56.
 [1955b] The radial variation of analytic functions. — *Duke Math. J.*, 1955, **22**, 235—242.
 [1956] Boundary values of continuous analytic functions. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1956, **7**, 808—811.
 [1967] A generalization of a theorem of Frostman. — *Math. Scand.* 1967, **21**, 136—143.
 [1969] Convex combinations of unimodular functions. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1969, **75**, 795—797.
 [1974a] Real and complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1974.
 [1974b*] Теория функций в полнотросте. — М.: Мир, 1974.
- Сайн (Sine R.)
 [1967] On a paper of Phelps. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1967, **18**, 484—486.
- Сакс С.
 [1949*] Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
- Сандберг (Sundberg C.)
 [1982*] A constructive proof of the Chang-Marshall theorem. — *J. Funct. Anal.*, 1982, **46**, № 2, 239—245.
- Сарасон (Sarason D.)
 [1967] Generalized interpolation in H^∞ . — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1967, **127**, 179—203.
 [1972] Approximation of piecewise continuous functions by quotients of bounded analytic functions. — *Canad. J. Math.*, 1972, **24**, 642—657.
 [1973] Algebras of functions on the unit circle. — *Bull. Amer. Math. Soc.* 1973, **79**, 286—299.
 [1975] Functions of vanishing mean oscillation. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **207**, 391—405.
 [1976] Algebras between L^∞ and H^∞ . — *Lect. Notes Math.* № 512, 1976, 117—129.
 [1979] Function theory on the unit circle, Virginia Poly. Inst. State Univ., Virginia, 1979.
- Серё (Szegő G.)
 [1920] Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, I. — *Math. Zeit.*, 1920, **6**, 167—202.
 [1921] Über die Randwerte einer analytischen Funktion. — *Math. Ann.*, 1921, **84**, 232—244.
- Секефальви-Надь, Кораньи (Cz.-Nagy B., Koranyi A.)
 [1956] Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace Hilbertien. — *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1956, **7**, 295—303.

Сидней, Стаут (Sidney S. J., Stout E. L.)

[1968] A note on interpolation. — Proc. Amer. Math. Soc., 1968, 19, 380—382.

Смирнов В. И.

[1929] Sur les valeurs limites des fonctions, régulières à l'intérieur d'un cercle. — Ж. Ленингр. физ.-мат. об-ва, 1929, 2: 2, с. 22—37.

[1933] Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. — Math. Ann., 1933, 107, 313—323.

Сомадаса (Somadasa H.)

[1966] Blaschke products with zero tangential limits. — J. London Math. Soc., 1966, 41, 293—303.

Санне (Spanne S.)

[1966] Sur l'interpolation entre les espaces $\mathcal{L}_k^p \Phi$. — Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1966, (3) 20, 625—648.

Сринивасан, Ванг (Srinivasan T., Wang J.-K.)

[1965] On closed ideals of analytic functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1965, 16, 49—52.

Стаут (Stout E. L.)

[1971] The theory of uniform algebras, Bogden and Quigley, Belmont, 1971.

Стегенга (Stegenga D. A.)

[1976] Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation. — Amer. J. Math., 1976, 98, 573—589.

[1979] A geometric condition which implies BMOA. — Proc. Symp. Pure Math., 1979, 35(1), 427—430.

Стейн Е. М. (Stein E. M.)

[1967] Singular integrals, harmonic functions and differentiability properties of functions of several variables. — Proc. Symp. Pure Math., 1967, 10, 316—335.

[1969] Note on the class $L \log L$. — Studia Math., 1969, 31, 305—310.

[1970] Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970. [Имеется перевод: Стейн Е. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.]

Стейн Е. М., Вейс (Stein E. M., Weiss G.)

[1959] An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications. — J. Math. Mech., 1959, 8, 263—284.

[1960] On the theory of harmonic functions of several variables. — Acta Math., 1960, 103, 26—62.

[1971] Introduction to Fourier analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971. [Имеется перевод: Стейн Е. М., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.]

Стейн П. (Stein P.)

[1933] On a theorem of M. Riesz. — J. London Math. Soc., 1933, 8, 242—247.

Стрёмберг (Strömberg J.-O.)

[1976] Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces. — Bull. Amer. Math. Soc., 1976, 82, 953—955.

[1979] Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces. — Indiana Univ. Math. J., 1979, 28, 511—544.

Стрэй, Эйма (Stray A., Оума К.)

[1978*] On interpolating functions with minimal norm. — Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 68, № 1, 75—78.

Тейлор, Вильямс (Taylor B. A., Williams D. L.)

[1970] The peak sets of A^∞ . — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 24, 604—606.

[1971] Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc. — Michigan Math. J., 1971, 18, 129—139.

Тёплиц (Toeplitz O.)

- [1911] Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1911, **32**, 191—192.
- Толоконников В. А.
- [1980*] Оценки в теореме Карлесона о короне и конечнопорожденные идеалы алгебры H^∞ . — Функци. анализ и прил., 1980, т. **14**, № 4, с. 85—86.
- [1981*] Оценки в теореме Карлесона о короне. Идеалы алгебры H^∞ , задача Секефальви-Надя. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1981, т. **113**, с. 178—198.
- [1982*] Свободная интерполяция гармонических функций аналитическими. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1982, т. **107**, с. 209—212.
- [1983a*] Интерполяционные произведения Бляшке и идеалы в H^∞ . — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1983, т. **126**, с. 196—201.
- [1983b*] Теорема о короне в подалгебрах алгебры H^∞ , в печати.
- Тумаркин Г. Ц.
- [1966*] Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами. — Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., 1966, т. **1**, № 2, с. 89—105.
- Уолш (Walsh J. L.)
- [1960] Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1960. [Имеется перевод: Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: ИЛ, 1961.]
- Утияма (Uchiyama A.)
- [1981*] Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions. — Univ. California, preprint, 1981.
- [1982] The construction of certain BMO functions and the corona problem. — Pacific J. Math., 1982, **99**, N 1, 183—204.
- Фату (Fatou P.)
- [1906] Séries trigonométriques et séries de Taylor. — Acta Math., 1906, **30**, 335—400.
- Фелпс (Phelps R. R.)
- [1965] Extreme points in function algebras. — Duke Math. J., 1965, **32**, 267—277.
- Фефферман (Fefferman Ch.)
- [1971] Characterizations of bounded mean oscillation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, 587—588.
- [1974] Harmonic analysis and H^p spaces. — Studies in Harm. Analysis, Ash J. M., ed., Studies in Math., 1974, **13**, 38—75.
- Фефферман, Стейн (Fefferman Ch., Stein E. M.)
- [1972] H^p spaces of several variables. — Acta Math., 1972, **129**, 137—193.
- Фишер (Fisher S.)
- [1968] The convex hull of the finite Blaschke products. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, 1128—1129.
- [1969a] Another theorem on convex combinations of unimodular functions. — Bull. Amer. Math. Soc., 1969, **75**, 1037—1039.
- [1969b] Exposed points in spaces of bounded analytic functions. — Duke Math. J., 1969, **36**, 479—484.
- [1971] Approximation by unimodular functions. — Canad. J. Math., 1971, **23**, 257—296.
- Фолланд, Стейн (Folland G. B., Stein E. M.)
- [1982*] Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1982.
- Форелли (Forelli F.)
- [1963a] The Marcel Riesz theorem on conjugate functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **106**, 369—390.
- [1963b] Analytic measures. — Pacific J. Math., 1963, **13**, 571—578.
- [1964] The isometries of H^p . — Canad. J. Math., 1964, **16**, 721—728.
- [1966*] Bounded holomorphic functions and projections. — Illinois J. Math.,

1966, 10, 367—380.

Фростман (Frostman O.)

[1935] Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. — Medd. Lunds. Univ. Mat. Sem., 1935, 3, 1—118.

Фурнье (Fournier J.)

[1974] An interpolation problem for coefficients of H^∞ functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 42, 402—408.

Хавин В. П.

[1973] Слабая полнота пространства L^1/H_0^1 . — Вестник ЛГУ, сер. матем., 1973, т. 13, с. 77—81.

[1974] Пространства H^∞ и L^1/H_0^1 . — Записки научн. семина. ЛОМИ, 1974, т. 39, с. 120—148.

Хавинсон С. Я.

[1949] Об одной экстремальной проблеме в теории аналитических функций. — Успехи матем. наук, 1949, т. 4, № 4, с. 158—159.

[1951] О некоторых экстремальных проблемах в теории аналитических функций. — Уч. зап. МГУ, Матем., 1951, т. 148, № 4, с. 133—143.

[1955*] Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях. — Матем. сб., 1955, т. 36, с. 3, 445—478.

[1963*] Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области. — Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 2, с. 25—98.

[1965*] Аналитические функции ограниченного вида. — Итоги науки. Матем. анализ, 1963. — М.: ВИНТИ, 1965, с. 5—80.

[1981*] Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. — М.: МИСИ, 1981.

Халл (Hall T.)

[1937] Sur la mesure harmonique de certains ensembles. — Ark. Mat. Astr. Fys., 1937, 25A, 28.

Хант, Макенхаупт, Виден (Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L.)

[1973] Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. — Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 176, 227—251.

Харди, Литтлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.)

[1927] Some new properties of Fourier constants. — Math. Ann., 1927, 97, 159—209.

[1930] A maximal theorem with function-theoretic applications. — Acta Math., 1930, 54, 81—116.

[1932] Some properties of conjugate functions. — J. Reine Angew. Math., 1932, 167, 405—423.

[1936] Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series. — Duke Math. J., 1936, 2, 354—382.

Хартман (Hartman P.)

[1958] On completely continuous Hankel matrices. — Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, 862—866.

Хейман (Hayman W. K.)

[1974] On a theorem of Tord Hall. — Duke Math. J., 1974, 41, 25—26.

Хейман, Кеннеди (Hayman W. K., Kennedy P. L.)

[1976] Subharmonic functions, Academic Press, New York, 1976. [Имеется перевод: Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.]

Хейман, Поммеренке (Hayman W. K., Pommerenke Ch.)

[1978] On analytic functions of bounded mean oscillation. — Bull. London Math. Soc., 1978, 10, 219—224.

Хейнс (Heins M.)

[1955*] On the Lindelöf principle. — Ann. Math., 1955, 61, № 3, 440—473.

- Хелсон (Helson H.)
[1964] Lectures on invariant subspaces, Academic Press, New York, 1964.
- Хелсон, Сарасон (Helson H., Sarason D.)
[1967] Past and future. — Math. Scand., 1967, 21, 5—16.
- Хелсон, Серё (Helson H., Szegő G.)
[1960] A problem in prediction theory. — Ann. Mat. Pura Appl., 1960, 51, 107—138.
- Херд, Уэллс (Heard E. A., Wells J. H.)
[1969] An interpolation problem for subalgebras of H^∞ . — Pacific J. Math., 1969, 28, 543—553.
- Хёрмандер (Hörmander L.)
[1966] An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1966. [Имеется перевод: Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968.]
- [1967a] Generators for some rings of analytic functions. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, 943—949.
- [1967b] L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions. — Math. Scand., 1967, 20, 65—78.
- Хрушев С. В.
[1977a*] Энтропийный смысл суммируемости логарифма. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1977, т. 73, с. 152—187.
- [1977b*] Sets of uniqueness for the Gevrey classes. — Arkiv Mat. 1977, 15, № 2, 253—304.
- [1978*] Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенностей интегралов типа Коши. — Труды матем. ин-та АН СССР, 1978, т. 130, с. 124—195.
- Цудзи (Tsuji M.)
[1959] Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
- Чанг (Chang S.-Y.)
[1976] A characterization of Douglas subalgebras. — Acta Math., 1976, 137, 81—89.
- [1977a] Structure of subalgebras between L^∞ and H^∞ . — Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 227, 319—332.
- [1977b] On the structure and characterization of some Douglas subalgebras. — Amer. J. Math., 1977, 99, 530—578.
- Чанг, Гарнетт (Chang S.-Y., Garnett J. B.)
[1978] Analyticity of functions and subalgebras of L^∞ containing H^∞ . — Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 72, 41—46.
- Чанг, Маршалл (Chang S.-Y., Marshall D. E.)
[1977] Some algebras of bounded analytic functions containing the disc algebra. — Lect. Notes Math. № 604, 1977, 12—20.
- Чима, Петерсен (Cima J. A., Petersen K. E.)
[1976] Some analytic functions whose boundary values have bounded mean oscillation. — Math. Zeit., 1976, 147, 237—247.
- Чима, Шобер (Cima J. A., Schober G.)
[1976] Analytic functions with bounded mean oscillation and logarithms of H^p -functions. — Math. Zeit., 1976, 151, 295—300.
- Шамоян Ф. А.
[1976*] Теоремы вложения, связанные с задачей кратной интерполяции в пространствах H^p . — Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1976, т. 11, № 2, с. 124—131.
- [1981*] Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 3, с. 557—561.
- Шапиро (Shapiro H. S.)
[1968] Generalized analytic continuation. — «Symp. Theoretical Phys. Math.», vol. 8, Plenum Press, New York, 1968.
- [1971*] Topics in approximation theory. — Lect. Notes Math. № 187, 1971.

- Шапиро, Шилдс (Shapiro H. S., Shields A. L.)
[1961] On some interpolation problems for analytic functions. — Amer. J. Math., 1961, 83, 513—532.
- Шарк (Scharf I. J.)
[1961] The maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions. — J. Math. Mech., 1961, 10, 735—746.
- Широков Н. А.
[1981a] О модуле граничных значений аналитических функций класса Λ_{ω}^n . — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1981, т. 113, с. 258—260.
[1981b*] Division and multiplication by inner functions in spaces of analytic functions smooth up to the boundary. — Lect. Notes Math. № 864, 1981, 413—480.
- [1982*] Свободная интерполяция в пространствах $C_{r, \omega}^A$. — Матем. сб., 1982, т. 117, № 3, с. 337—358.
- Шома (Chaumat J.)
[1978] Quelques proprietes du couple d'espaces vectoriels $(L^1(m)/H^{\infty \perp}, H^{\infty})$. — preprint, Univ. Paris — Sud, 1978.
- Шур (Schur I.)
[1917] Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. — J. Reine Angew. Math., 1917, 147, 205—232.
[1918] Ibid, II. — J. Reine Angew. Math., 1918, 148, 122—145.
- Эйма (Øyma K.)
[1977] Extremal interpolatory functions in H^{∞} . — Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 64, 272—276.
- Эксендаль (Øksendal B. K.)
[1971] A short proof of the F. and M. Riesz theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 30, 204.
- Эрл (Earl J. P.)
[1970] On the interpolation of bounded sequences by bounded functions. — J. London Math. Soc., 1970, (2)2, 544—548.
[1976] A note on bounded interpolation in the unit disk. — J. London Math. Soc., 1976, (2)13, 419—423.
- Янг П. (Yang P.)
[1977] Curvature of complex manifolds. — Proc. Symp. Pure Math., 1977, 30(2), 135—137.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамян В. М. 154, 159, 175, 176, 440
Айрапетян Г. М. 311, 440
Акслер (Axler S.) 390, 392, 440
Александр (Alexander H.) 131, 440
Александров А. Б. 127, 128, 440
Аллен (Allen H. A.) 440
Альфортс (Ahlfors L. V.) 46, 48, 98, 194, 440
Амар (Amar E.) 207, 214, 222, 310, 440
Андерсон (Anderson J. M.) 281, 440, 441
Андо (Ando T.) 214, 441
Андрянова Т. Н. 272, 441
Аренс (Arens R.) 220
Аров Д. З. 154, 155, 175—176, 219, 440, 441
Ахерн (Ahern P. R.) 441
Ахизер Н. И. 48, 176, 441

Багемил (Bagemihl F.) 100, 441
Барби (Barbey K.) 128, 213, 214, 441
Барн Н. К. 128, 441
Безикович А. С. (Besicovitch A. S.) 127, 128, 441
Белна (Belna C. L.) 367, 440, 441
Берг (Berg I. D.) 392, 440
Беренс (Behrens M.) 364, 438, 441
Бёрлинг А. (Beurling A.) 93, 131, 441
Бёрлинг П. (Beurling P.) 310
Бернар (Bernard A.) 196, 197, 207, 213, 310, 441, 442
Бернштейн (Baernstein A.) 128, 267, 268, 280, 442
Бессага (Bessaga C.) 212, 442
Бишоп (Bishop E.) 130, 217, 219, 222, 242
Бляшке (Blaschke W.) 93, 442
Бойд (Boyd D.) 182, 442
Бохнер (Bochner S.) 93
Бочкарев С. В. 442
Браудер (Browder A.) 183, 213, 442
Браун (Brown L.) 314, 442
Брудный Ю. А. 266, 442
Бруна (Bruna J.) 311, 442
Буль (Boole G.) 128, 442
Бургэн (Bourgain J.) 214, 443
Буркгольдер (Burkholder D. L.) 120, 128, 267, 443
Бэр (Bear H. S.) 51, 443

Валле-Пуэссен (Vallée-Poussin Ch. T.) 55
Ванг (Wang T.-K.) 455
Варопулос (Varopoulos N. Th.) 10, 267, 275, 304, 310, 362, 443
Васюнин В. И. 311, 363, 443
Вейсс (Weiss G.) 8, 49, 127, 129, 132, 268, 277, 282, 350, 443, 449, 455
Вейцман (Weitsman A.) 367, 453
Вермер (Wermer J.) 216, 443
Виден (Wheeden R. L.) 267, 279, 444, 451, 457
Вильямс (Williams D. L.) 131, 440, 455
Винер (Wiener N.) 214
Виноградов С. А. 42, 53, 128, 130, 239, 272, 289, 310, 311, 314, 413
Войташик (Wojtaszczyk P.) 214, 444
Волф (Wolff T.) 316, 322, 325, 327, 361, 192, 444

Гамелин (Gamelin T. W.) 10, 128, 131, 178, 183, 207, 213, 218, 327, 362, 334, 366, 395, 434, 444, 417
Ганди (Gundy R. F.) 120, 128, 267, 443, 444
Гарнетт (Garnett J. B.) 129, 178, 207, 213, 218, 267, 278, 310—313, 390, 395, 434, 442, 444, 445, 447, 448, 458
Гарсиа (Garsia A.) 49, 128, 266, 274, 445
Гельфанд И. М. 214
Геринг (Gehring F. W.) 267, 415
Гинзбург Ю. П. 93, 445
Гликсберг (Glicksberg I.) 20, 130, 220, 445
Глисон (Gleason A. M.) 310
Голузин Г. М. 92, 175, 194, 445
Горин Е. А. 314, 444
Гофман (Hoffman K.) 9, 93, 213, 216, 218, 220, 293, 314, 372, 390, 396, 398, 434, 437, 445
Гренандер (Grenander U.) 179, 445
Гротендик (Grothendieck A.) 445

Дальберг (Dahlberg B. J. E.) 362, 445
Данжуа (Denjoy A.) 445

- Данфорд (Dunford N.) 156, 208, 219, 445
 Девис (Devis B. J.) 128, 447
 Дельбэн (Delbaen F.) 214, 446
 Дервиз А. О. 311, 446
 Джерисон (Jarison D.) 446
 Джиббонс (Gibbons G.) 10
 Джон (John F.) 9, 266, 446
 Джонс (Jones P. W.) 10, 267, 273, 277, 279, 310, 314, 354, 362, 364, 367, 396, 434, 445, 446
 Джрбашян М. М. 311, 446
 Джуэлл (Jewell N. P.) 392, 395, 440, 446
 Диксмье (Dixmier J.) 446
 Дим (Dym H.) 176, 446
 Донохью (Donoghue W. F.) 48, 446
 Досс (Doss R.) 130, 446
 Доусон (Dawson D. W.) 358, 446
 Дрейсин (Drasin D.) 10
 Друри (Drury S.) 310, 446
 Дуглас (Douglas R. G.) 213, 219, 369, 390, 446, 447
 Дынькин Е. М. 130, 268, 311, 447
 Дюрен (Duren P. L.) 9, 93, 97, 128, 175, 281, 310, 382, 447
 Дэви (Davie A. M.) 178, 310, 327, 395, 434, 447
- Жюлиа (Julia G.) 48, 51, 53, 447
- Зейдель (Seidel W.) 93, 100, 441, 447
 Зигмунд (Zygmund A.) 36, 49, 93, 100, 127, 128, 132, 267, 281, 299, 447, 448
 Зингер (Singer I. M.) 216, 272, 390, 445
 Зискинд (Ziskind S.) 333, 362, 447
- Ибрагимов И. А. 176, 447
 Пенсен (Jensen J. L. W. V.) 71, 447
- Кальдерон (Calderón A. P.) 128, 135, 267, 385, 448
 Кампанато (Campanato S.) 266, 448
 Кантор (Cantor D. G.) 48, 448
 Каратеодори (Carathéodory C.) 48, 50, 51, 98, 448
 Карбери (Carbery A.) 10
 Карго (Cargo G. T.) 448
 Карлесон (Carleson L.) 8—10, 42, 49, 85, 101, 128, 130, 131, 175, 178, 271, 310, 311, 316, 338, 361, 362, 434, 448
 Кахан (Kahane J.-P.) 131, 175, 214, 281, 439, 448
 Кацнельсон (Katzneson Y.) 128, 448
- Кей (Kay L.) 10
 Келлерер (Kelleher J. J.) 449
 Келли (Kelley J. L.) 213, 449
 Кёниг (König H.) 51, 128, 213, 441, 449
 Кеннеди (Kennedy P. L.) 49, 457
 Керр-Лоусон (Kerr-Lawson A.) 449
 Кларк (Clark D. N.) 441, 449
 Клуни (Clunie J.) 281, 441
 Когрэн (Caughran J. G.) 449
 Койфман (Goifman R. R.) 129, 267, 268, 273, 277, 278, 280, 281, 449
 Коллингвуд (Collingwood E. F.) 88, 93, 449
 Колмогоров А. Н. 127, 128, 132, 179, 449
 Кораньи (Koranyi A.) 48, 454
 Кордоба (Cordoba A.) 280, 449
 Коточигов А. М. 311, 450
 Коул (Cole B.) 128
 Коэн (Cohen P. J.) 216, 450
 Крац (Krantz S.) 10
 Крейн М. Г. 48, 154, 159, 175, 176, 440, 450
 Кусис (Koosis P.) 9, 10, 101, 120, 128, 129, 163, 180, 450
 Кшиштоф (Krzysztof R.) 363, 450
- Ландау (Landau E.) 175, 178, 450
 Ландкоф Н. С. 85, 450
 Левинсон (Levinson N.) 128, 450
 Ледерер (Lederer A.) 207, 214, 222, 440
 де Лей (de Leeuw K.) 159, 175, 178, 180, 181, 446
 Линделеф (Lindelof E.) 97, 450
 Литтлвуд (Littlewood J. E.) 8, 49, 93, 96, 98, 103, 179, 450, 457
 Ловатер (Lohwater A. J.) 88, 93, 449
 Лузин Н. Н. 128, 450
 Лэттер (Latter R. H.) 10, 128, 273, 445, 451
 Люкинг (Luecking D.) 392, 450
 Люмер (Lumer G.) 213, 214, 391, 450
 Люмис (Loomis L. H.) 128, 450
- Макенхаупт (Muckenhoupt B.) 253, 267, 279, 451, 457
 Макинтайр (Macintyre A. J.) 175, 451
 Маккин (McKean H. P.) 176, 446
 Марден (Marden M.) 451
 Маркушевич А. И. 98, 451
 Мартиросян В. М. 311, 451
 Маршалл (Marshall D.) 10, 48, 183, 193, 207, 213, 218, 311, 362, 369, 375, 390, 394, 395, 442, 451, 458
 Мейер (Meyer Y.) 449

- Мейерс (Mayers N. G.) 26, 451
 Мергелян С. Н. 272, 451
 Миллс (Mills W.) 402
 Муни (Mooney M. C.) 208, 214, 451
- Натцич (Natzitz B.) 451
 Нафтаевич А. Г. 311
 Неванлинна Р. (Nevanlinna R.) 48, 50, 85, 103, 163, 166, 173, 175, 451
 Неванлинна Ф. (Nevanlinna F.) 103, 451
 Негрепонтис (Negrepotis S.) 451
 Нери (Neri U.) 452
 Никольский Н. К. 8, 42, 48, 93, 176, 219, 239, 267, 281, 289, 291, 311, 363, 364, 391, 439, 452
 Ниренберг (Nirenberg L.) 9, 266, 446
 Нойвирт (Neuwirth J.) 101, 452
 Носиро (Noshiro K.) 88, 93, 452
 Нудельман А. А. 48, 176, 450
 Ньюмен (Newman D. J.) 101, 195, 213, 333, 452
- Оберлин (Oberlin D. M.) 130, 452
 Осиленкер Б. П. 268, 447
 Оуэнс (Owens R.) 10
 Оцука (Otsuka M.) 452
- Павлов Б. С. 176, 311, 452
 Парро (Parrean M.) 92, 452
 Пеллер В. В. 176, 272, 452
 Пелчинский (Pelczynski A.) 130, 212, 214, 442, 452
 Перрон ((Perron O.) 46
 Петерсен (Petersen K. E.) 280, 452, 458
 Пик (Pick G.) 11, 16, 48, 452
 Пикоридес (Pichorides S. K.) 128, 452
 Пираяни (Piranian G.) 281, 367, 439, 441, 453
 Плеснер А. И. 100, 453
 Поллард (Pollard S.) 128, 453
 Поммеренке (Pommerenke Ch.) 280, 283, 441, 453, 457
 Поредя (Poreda S. J.) 178, 453
 Привалов И. И. 77, 92, 93, 100, 127, 385
 Протас (Protas D.) 453
 Пэли (Paley R. E. A. C.) 8, 271, 453
- Рамсей (Ramsey A.) 445
 Рао (Rao K. V. R.) 364, 453
 Реметч Д. (Remetch D.) 10
 Реметч С. (Remetch S.) 10
 Рисс М. (Riesz M.) 93, 99, 107, 127—129, 132, 453
 Рисс Ф. (Riesz F.) 56, 71, 93, 99, 106, 129, 178, 453
 Рогозинский (Rogosinski W. W.) 175, 451, 454
 Розанов Ю. А. 176, 447
 Розенблатт (Rosenblatt M.) 179, 445
 Розенблум (Rosenblum M.) 364, 453
 Розэй (Rosay J. P.) 218, 334, 454
 Ройден (Royden H.) 454
 Ромберг (Romberg B. W.) 97, 447
 Росси (Rossi H.) 314, 445
 Рохберг (Rochberg R.) 277, 278, 280, 281, 449
 Рубел (Rubel L. A.) 178, 314, 444, 454
 Рудин (Rudin W.) 9, 92, 93, 130, 159, 175, 178, 180, 181, 213, 272, 446, 447, 454
 Рукшин С. Е. 311, 444
- Сайн (Sine R.) 454
 Сакс (Saks S.) 55, 454
 Салем (Salem R.) 131, 448
 Сандберг (Sundberg G.) 311, 381, 451, 454
 Сарасон (Sarason D.) 8, 10, 48, 101, 178, 180, 213, 267, 268, 281, 312, 369, 381, 390—392, 394, 439, 440, 454, 458
 Сегё (Szegő G.) 71, 93, 175, 179, 454, 458
 Секефальви-Надь (Sz. Nagy B.) 48, 363, 454
 Сидней (Sidney S. J.) 455
 Сильверштейн (Silverstein M. L.) 120, 128, 443
 Смирнов В. И. 77, 92, 93, 98—100, 455
 Сомадаса (Somadasa H.) 455
 Спанне (Spanne S.) 256, 455
 Сринивасан (Srinivasan T.) 455
 Стаут (Stout E. L.) 183, 213, 220, 455
 Стегенга (Stegenga D. A.) 268, 280, 455
 Стейн Е. М. (Stein E. M.) 8, 32, 49, 55, 125, 127—129, 132, 135, 266—268, 279, 390, 455, 456
 Стейн П. (Stein P.) 128, 455
 Стремберг (Strömberg J.-O.) 269, 455
 Стрэй (Stray A.) 311, 314, 451, 455
- Талюш Н. А. 93, 455
 Тейлор (Teylor B. A.) 131, 440, 449, 455
 Теплиц (Toeplitz O.) 48, 455

- Толоконников В. А. 291, 311, 325, 363, 364, 456
Тумаркин Г. Ц. 219, 456
- Ульянов П. Л. 128
Уолш (Walsh J. L.) 48, 176, 456,
Утияма (Uchiyama A.) 267, 325, 364, 456
Уэллс (Wells I. H.) 453, 458
- Фагарасон (Fagarason J.) 10
Фату (Fatou P.) 49, 129, 456
Фелпс (Phelps R. R.) 213, 222, 442, 456
Фефферман (Fefferman Ch.) 125, 129, 266, 271, 279, 280, 362, 449, 456
Фишер (Fischer S.) 213, 222, 390, 456
Фолланд (Folland G. B.) 268, 456
Форрелли (Forelli F.) 267, 263, 456
Фурнье (Fournier J.) 272, 457
Фразье (Frazier M.) 10
Фростман (Frostman O.) 93, 213, 457
- Хавин В. П. 130, 214, 221, 222, 267, 281, 310, 311, 363, 439, 444, 446, 452, 457
Хавинсон С. Я. 92, 175, 176, 457
Халл (Hall T.) 362, 457
Хант ((Hunt R.) 267, 279, 457
Харди (Hardy G. H.) 9, 49, 93, 96, 98, 179, 271, 457
Хартман (Hartman P.) 457
Хейман (Heyman W.) 49, 280, 362, 457
Хейнс (Heins M.) 93, 457
Хелсон (Helson H.) 93, 101, 175, 179, 180, 213, 458
Херд (Heard E. A.) 458
Хермандер (Hörmander L.) 213, 310, 362, 458
- Хрущев С. В. 128, 130, 131, 176, 267, 272, 281, 311, 314, 363, 439, 444, 452, 458
- Целлер (Zeller K.) 314, 442
Цудзи (Tsuji M.) 46, 48, 49, 85, 93, 98, 100, 458
- Чанг (Chang S.-Y.) 369, 376, 390, 391, 394, 440, 458
Чима (Cima T. A.) 280, 458
- Шамоян Ф. А. 311, 325, 363, 459
Шапиро (Shapiro H. S.) 175, 176, 219, 282, 310, 313, 447, 454, 459
Шарк (Schark I. J.) 213, 459
Шварц (Schwartz J.) 156, 208, 219, 445
Шилдс (Shields A.) 10, 97, 219, 281, 310, 313, 314, 440, 442, 444, 447, 449, 453, 454
Шилов Г. Е. 213
Широков Н. А. 83, 130, 131, 311, 459
Шобер (Schober G.) 280, 458
Шома (Chaumat J.) 214, 458
Шур (Schur I.) 16, 48, 175, 182, 459
- Эйма (Øyma K.) 314, 455, 459
Эксендаль (Øksendal B. K.) 459
Эрл (Earl J. P.) 291, 306, 310, 459
- Юнг (Young W. H.) 49
- Якобс (Jacobs S.) 175, 178, 448
Янг П. (Yang P.) 273, 459
Янг Р. (Young R. C.) 128, 453

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамяна — Арова — Крейна** теорема 154
— — — параметризация 162, 163
Аналитический круг 200, 397
Аппроксимативная единица 29
Атом 273
- Банаха — Алаоглу** теорема 28
Банахова алгебра 183
Банахово свойство аппроксимации 214
Бёрлинга теорема 88, 149
Бляшке произведение 15, 85
— — бесконечное 61
— — интерполяционное 332, 425
— — конечное 15
— условие 60
Блоха класс 281, 438
Буркгольдера — Ганди — Сильверштейна теорема 120
- Вермера** теорема о максимальнойности 216, 372
Витали лемма о покрытиях 33
Внешняя функция 73, 74, 98
Внутренняя функция 81
Выметание меры 230
Выступающая точка 161, 222
- Гармоническая мжоранта 46
— — наименьшая 46
— мера 22, 50
Гармонически интерполяционная последовательность 300, 310, 417, 418
Гарнака расстояние 50
Гельфанда преобразование 185
— топология 185
Геринга лемма 259
Гильберта преобразование 109, 114, 127
— — максимальное 133
Глисона доли 397
— расстояние 50
Граница равномерной алгебры 186
— **Шилова** 189
— — для H^∞ 192, 333
- Двойственность экстремальных задач 136—140, 175
Джона — Ниренберга теорема 231, 266
Дирихле алгебра 202
Диск-алгебра 190
Дугласа алгебра 369, 377, 388
Дугласа — Рудина теорема 193, 197, 213, 425
- Жюлиа** лемма 51
- Изометрия 242
Изоморфные пространства 242
Инвариантное подпространство 88
Интеграл **Пуассона** 20, 21, 25
Интерполяционная задача бесконечная 136, 154, 191, 282
— — конечная 16, 48, 142
— — единственность 19, 142
— последовательность 191, 215, 282
Исчезающая средняя осцилляция 249
Иенсена неравенство 42, 49
- Кальдерона — Зигмунда** лемма 232
Каноническая факторизация 62, 80, 83, 93
Карлесона мера 40, 239, 285, 343
— норма 40, 239
— разложение для ВМО 271
— теорема вложения 41, 49, 70
— — об интерполяции 282, 285, 306, 310
— — о короне 192, 321, 361, 362
Карлесона — Якобсона теорема 143
Комплексный гомоморфизм 183
Константа интерполяции 283
Кошуля комплекс 359, 362
Крайняя точка 159
- Лебеговское множество 54
Литтлвуда теорема 103
Литтлвуда — Пэли тождество 237
Логарифмическая емкость 84
Логарифмический потенциал 84
Логмодулярная алгебра 73, 202
Локально интегрируемая функция 223

- Макенхаупта** теорема 253
 Максимальная теорема 32, 33, 55
 — функция вертикальная 125
 — — некасательная 36, 64
 — — Харди — Литтлвуда 29, 30, 55
 Марцинкевича теорема 34, 49
 Мёбиуса преобразование 11
 Минковского неравенство 24
 Множество нулей 129
 — пика 129, 207, 216
 Модуль непрерывности 110, 144
 Моменты остановки 213, 233
 Морера теорема 100
 Мультипликативный функционал 183
 Мультипликатор Фурье 112
- Наибольший общий делитель 89, 90
 Наилучшее приближение 139
 — — непрерывность 143, 188
 Неванлинны параметризация 163, 171
 — класс 75
 — теорема 154, 173, 197
 Неевклидов круг 12, 13
 Некасательная точка 434
 Некасательно ограниченная функция 385
 — плотная последовательность 314
 — плотное множество 385
 Некасательный предел 38, 39, 64, 385
 Непрерывность по Дини 110, 144
 Неравенства для хороших λ 261, 267
- Обратимый элемент 183
 Обратное неравенство Гёльдера 261
 Ограниченная средняя осцилляция 224
 Оператор сдвига 88
 — слабого типа 33
 — сопряжения 108
 Орицикл 51, 82
 Орициклическая точка 434
 Ортогональная мера 204
- Пика теорема 15—17, 48
 Плеснера теорема 100
 — точка 100
 Плохо приближаемая функция 178, 180
 Повторяющихся значений множество 86
 Поколения 296
 Потенциал Грина 84, 103
 Предельное множество 86
 Представляющая мера 201
 Пространство абстрактное 213
 — максимальных идеалов см. Спектр
- Харди 57, 58, 92
 — BLO 279
 — BMO 223, 266
 — — диадическое 273
 — — эквивалентные нормы 225, 227, 237
 — VMO 180, 249
 Псевдогиперболическое расстояние 12, 13, 297
 — — геодезические 14, 15, 49, 50
 Пуанкаре метрика 14
- Равномерная алгебра 185, 187
 Разложение функций из BMO 247, 267, 357
 — — — VMO 251
 Распределения функция 29
 Редкая последовательность 283
 Рисса М. теорема 113, 117, 127
 Рисса Ф. разложение 56
 Риссов Ф. и М. теорема 68, 70, 72, 129, 205
- Свободная интерполяция 311
 Сегё теорема 148
 Сильная граничная точка 217
 Сингулярная функция 80, 81
 Слабая сходимости мер 25
 — L^1 -топология 25, 91
 Слабое пространство L^p 30
 Слабый лапласиан 56
 Смирнова класс 77, 78
 Сопряженная функция 107, 114
 — — максимальная 125
 Спектр алгебры 185
 — — L^∞ 188
 — — H^∞ 92, 190
 Стоуна — Чеха компактификация 187, 213
 Строго логмодулярная алгебра 73
 Субгармоническая функция 42
- Теорема о скачке 94, 132
 Точка пика 190
- Угловая производная 51—53
 Угол между подпространствами 150
 Уитни разбиение 264
 Уравнения Коши — Римана 316—319, 354
 Условие (A_p) 253
 — (A_2) 257
 — (A_1) 279
 — (A_∞) 263

Фату теорема 38, 49, 344
— — локальная 99, 385
Феффермана теорема двойственности
241, 245, 266
Фростмана теорема 85

Халла лемма 362, 366
Ханта — Макенхаупта — Видена теорема 254
Харди неравенство 98, 217
Харди — Литтлвуда неравенство для гармонических функций 195
Хелсона — Сегё теорема 148, 150, 152, 175, 253

Чанг — Маршалла теорема 372, 375
Чебышева неравенство 30

Шварца лемма 11, 12, 48
Шура теорема 48

Экстремально несвязное пространство 215

Ядро Пуассона 20—23
— — сопряженное 107, 114

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	8
Благодарности	10
 Гл. I. Предварительные сведения	11
1. Лемма Шварца	11
2. Теорема Пика	15
3. Интеграл Пуассона	20
4. Максимальная функция Харди — Литтлвуда	29
5. Некасательная максимальная функция и теорема Фату	36
6. Субгармонические функции	42
Замечания	48
Упражнения и дальнейшие результаты	49
 Гл. II. Пространства H^p	57
1. Определения	57
2. Произведения Бляшке	60
3. Максимальные функции и граничные значения	64
4. $(1/\pi) \int (\log f(t) / (1+t^2)) dt > -\infty$	71
5. Класс Неванлинны	75
6. Внутренние функции	81
7. Теорема Бёрлинга	88
Замечания	92
Упражнения и дальнейшие результаты	93
 Гл. III. Сопряженные функции	107
1. Предварительные сведения	107
2. L^p -теоремы	115
3. Сопряженные функции и максимальные функции	119
Замечания	127
Упражнения и дальнейшие результаты	129
 Гл. IV. Некоторые экстремальные задачи	136
1. Двойственные экстремальные задачи	136
2. Теорема Карлесона — Якобса	143
3. Теорема Хелсона — Сегё	148
4. Интерполирующие функции постоянного модуля	153
5. Параметризация множества K	159
6. Доказательство Неванлинны	166
Замечания	175
Упражнения и дальнейшие результаты	176

Гл. V. Немного равномерной алгебры	183
1. Пространства максимальных идеалов	183
2. Внутренние функции	193
3. Аналитические круги в слоях	199
4. Представляющие меры и ортогональные меры	201
5. Пространство L^1/H_0^1	207
Замечания	213
Упражнения и дальнейшие результаты	214
Гл. VI. Ограниченная средняя осцилляция	223
1. Предварительные сведения	223
2. Теорема Джона — Ниренберга	231
3. Интегралы Литтлвуда — Пэли и меры Карлесона	236
4. Теорема двойственности Феффермана	241
5. Исчезающая средняя осцилляция	249
6. Неравенства с весовыми нормами для максимальных и со- пряженных функций	252
Замечания	266
Упражнения и дальнейшие результаты	268
Гл. VII. Интерполяционные последовательности	283
1. Теорема Карлесона об интерполяции	283
2. Линейный оператор интерполяции	292
3. Поколения	296
4. Гармоническая интерполяция	298
5. Элементарное доказательство Эрла	306
Замечания	310
Упражнения и дальнейшие результаты	311
Гл. VIII. Теорема о короне	315
1. Неоднородные уравнения Коши — Римана	315
2. Теорема о короне	321
3. Две теоремы о минимуме модуля	328
4. Интерполяционные произведения Бляшке	332
5. Конструкция Карлесона	338
6. Градиенты ограниченных гармонических функций	343
7. Конструктивное решение уравнения $\partial b/\partial \bar{z} = \mu$	354
Приложение. Комплекс Кошуля	359
Замечания	361
Упражнения и дальнейшие результаты	363
Гл. IX. Алгебры Дугласа	369
1. Проблема Дугласа	369
2. $H^\infty + C$	373
3. Теорема Чанг и Маршалла	375
4. Строение алгебр Дугласа	381
5. Локальная теорема Фату и ее приложение	385
Замечания	390
Упражнения и дальнейшие результаты	391

Гл. X. Интерполяционные последовательности и максимальные иде- алы	396
1. Аналитические круги в $\mathfrak{M}$	396
2. Теорема Гофмана	406
3. Приближенная зависимость между ядрами	411
4. Интерполяционные последовательности и гармоническая отделимость	418
5. Конструктивная теорема Дугласа — Рудина	425
Замечания	434
Упражнения и дальнейшие результаты	434
Литература	440
Именной указатель	460
Предметный указатель	464

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Дж. Гарнетт

ОГРАНИЧЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Научный редактор Г. М. Цукерман. Мл. научный редактор Э. Г. Иванова.
Художник Г. М. Чеховский. Художественный редактор В. И. Шаповалов.
Технический редактор Г. Б. Алюлина. Корректор В. И. Киселева.

ИБ № 3445

Сдано в набор 17.10.83. Подписано к печати 24.05.84. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 14,75 бум. л. Усл. печ. л. 29,50. Усл. кр.-отт. 29,50. Уч.-изд. л. 26,46. Изд. № 1/2607. Тираж 4100 экз. Зак. 829. Цена 3 р. 60 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.