

В. П. МАСЛОВ

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного руководства
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Прикладная математика»*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1973

Операторные методы. В. П. Маслов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1973.

Книга написана на основе курса лекций, прочитанных автором на факультете прикладной математики МИЭМ и на физическом факультете МГУ.

В книге излагаются основы функционального анализа с точки зрения приложений к задачам физики и вычислительной математики. Развивается общий метод исчисления линейных некоммутирующих операторов для решения дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами и дифференциально-разностных уравнений, подобный методу Хевисайда для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоретический материал иллюстрируется на конкретной физической задаче, являющейся модельной задачей для этого метода, причем формулы операторного метода сравниваются с численным решением.

Книга предназначена для студентов 3—5 курсов, специализирующихся по математике, прикладной математике и теоретической физике. Она представляет интерес также для научных работников.

Книга содержит 12 рис.

© Издательство «Наука», 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение в операторное исчисление	11
§ 1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений операторным методом Хевисайда (11). § 2. Разностные уравнения (17). § 3. Решение систем дифференциальных уравнений методом Хевисайда (19). § 4. Алгебра сходящихся степенных рядов от некоммутирующих операторов (21). § 5. Спектр пары упорядоченных операторов (31). § 6. Алгебры с μ -структурами (35). § 7. Пример асимптотического решения дифференциального уравнения (51). § 8. Предельный переход уравнений колебаний кристаллической решетки и волновое уравнение (53). § 9. Понятие квазиобратимости оператора и формулировка основной теоремы (93).	
Глава I. Абстрактные пространства	118
§ 1. Алгебраические системы (118). § 2. Банаховы пространства (122). § 3. Гильбертовы пространства (129). § 4. Линейные функционалы и сопряженные пространства (137). § 5. Линейные операторы (142). § 6. Сопряженные операторы (154). § 7. Функции со значениями в банаховом пространстве (160). § 8. Анализ в банаховом пространстве (163). § 9. Нормированные и банаховы алгебры (167).	
Глава II. Функциональные пространства	169
§ 1. Пространства Соболева (169). § 2. Двойственность пространств Соболева (174). § 3. Некоторые пространства непрерывных функций и связанные с ними пространства (178). § 4. Теоремы вложения (184). § 5. δ_ξ -функция Дирака в пространствах Соболева (191). § 6. Гладкие функции в пространствах Соболева (193).	
Глава III. Функции от регулярных операторов	201
§ 1. Алгебра функций от производящего оператора (203). § 2. Расширение класса допустимых символов (217). § 3. Гомоморфизм асимптотических формул. Метод стационарной фазы (224). § 4. Функции от оператора дифференцирования. Оператор Гильберта (231). § 5. Спектр производящего оператора (239). § 6. Некоторые свойства производящего оператора (244). § 7. Самосопряженные операторы (257). § 8. Регулярные операторы (264). § 9. Обобщенные собственные и присоединенные функции (268). § 10. Самосопряженные операторы как трансформаторы в пространстве Гильберта—Шмидта (274).	
Глава IV. Исчисление некоммутирующих операторов	279
§ 1. Предварительные определения (279). § 2. Функции от двух некоммутирующих самосопряженных операторов (282). § 3. Функции от некоммутирующих операторов (286). § 4. Спектр вектор-оператора (289).	

§ 5. Функции двух производящих наборов (291). § 6. Псевдодифференциальные операторы (297). § 7. Примеры (304). § 8. Дифференцирование функций от оператора, зависящего от параметра (312). § 9. Формулы коммутации (323). § 10. Растущие символы (327). § 11. Фактор-спектр (330). § 12. Операторнозначные символы (331). § 13. Функции от образующих нильпотентной алгебры Ли и их представлении (336).

Глава V. Асимптотические методы 342

§ 1. Канонические преобразования псевдодифференциального оператора (342). § 2. Гомоморфизм асимптотических формул (359). § 3. Геометрическая интерпретация метода стационарной фазы (365). § 4. Канонический оператор на незамкнутой кривой (367). § 5. Метод стационарной фазы (375). § 6. Канонический оператор на незамкнутой кривой, зависящей от параметров, определенный с точностью до $O(1/\omega)$ (378). § 7. V -объекты на кривой (384). § 8. Канонический оператор на семействе незамкнутых кривых (389). § 9. Канонический оператор на семействе замкнутых кривых (395). § 10. Пример на коммутацию канонического оператора с гамильтонианом (400). § 11. Коммутация оператора Гамильтона с каноническим оператором (406). § 12. Общее каноническое преобразование псевдодифференциального оператора (408).

Глава VI. Обобщенные уравнения Гамильтона—Якоби 415

§ 1. Основные определения и формулировки теорем (415). § 2. Решение в малом уравнения Гамильтона—Якоби с диссипацией (426). § 3. Решение уравнения Гамильтона—Якоби с диссипацией в зоне (443). § 4. γ -перестройки как адиабатические преобразования (454). § 5. Решение уравнения переноса с диссипацией в зоне (460). § 6. Операция обхода фокусов и глобальное определение ростка (468).

Глава VII. Канонический оператор на лагранжевом многообразии с комплексным ростком и доказательство основной теоремы 478

§ 1. Формулы коммутации гамильтониана с комплексной экспонентой (478). § 2. Квантовая операция обхода фокусов (482). § 3. Индекс комплексного ростка и канонический оператор (495). § 4. Доказательство основной теоремы (509).

Приложение 1. Ангармонические колебания кристаллической решетки 521

Приложение 2. Вспомогательные предложения 524

Предметный указатель 539

Указатель обозначений 542

ПРЕДИСЛОВИЕ

Операторные методы — это методы, позволяющие сводить дифференциальные задачи к алгебраическим. Поэтому эти методы особенно полезны для математиков — прикладников.

Книга посвящена одному, но достаточно общему операторному методу, который поглощает многие известные до сих пор операторные методы и позволяет единообразно решать как классические задачи дифференциальных уравнений с частными производными, так и совершенно новые задачи математической физики, в том числе и связанные с нелинейными уравнениями в частных производных.

К изложению этого общего метода мы перейдем, предварительно изучив хорошо известные в математике методы исчисления операторов (в основном самосопряженных), источником которых послужил метод Хевисайда.

Основная теорема, изложенная в настоящей книге, относится к теории операторов и доказывается в последней главе, но ее формулировка приводится также и во введении. Эта теорема может привести, в частности, к теоремам существования и единственности для гиперболических, эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами и позволяет сводить их к интегральным уравнениям второго рода с гладкими ядрами, т. е. давать эффективное решение этих уравнений. Имеется в виду, что выделив из решения негладкую (или быстро осциллирующую) часть, мы можем свести тем самым задачу к такой, которая легко решается на ЭВМ. Сравнение же выделенной из решений быстро осциллирующей части с точным решением, проводимое с помощью численного эксперимента в одномерном примере § 8 Введения, показывает их хорошее совпадение. При этом оказывается, однако, что проделать такой эксперимент даже в двумерном случае машина бессильна из-за большого объема операций. В таких случаях остается только пользоваться подходящей асимптотикой и сведением исходной задачи к интегральному уравнению. Таким образом, построенное в основной теореме приближенное решение, выделяющее негладкую или быстро осциллирующую часть, является как бы естественным дополнением к ЭВМ: вместе они дают численный ответ.

Предлагаемая книга по операторным методам должна быть доступной студентам старших курсов математических и физических факультетов университетов и факультетов прикладной математики. Имеется в виду, что для ее изучения читателю необходимо владеть лишь классическим анализом. В нужном объеме в книге излагаются понятия группы, кольца, алгебры, основы функционального анализа (глава I), теория обобщенных функций и пространств Соболева (глава II), теория линейных дифференциальных и разностных уравнений (§§ 1, 2, 3 Введения) и нелинейных дифференциальных уравнений (§ 8 главы I), теория нелинейных уравнений первого порядка с частными производными (глава VI).

Это изложение небесполезно и для читателя, знакомого с данными вопросами, поскольку оно ведется подчас не в традиционном стиле и приспособлено для дальнейших ссылок. Читатель, изучивший книгу целиком, будет подготовлен для проведения собственных исследований в современной теории линейных, нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений с частными производными. Кроме того, изучение изложенных здесь конкретных задач может быть хорошим трамплином для дальнейшего изучения под некоторым определенным углом зрения теории представлений, топологии и теории пучков. Примером последних служит теория V -объектов (глава V). Что же касается приложения изложенных методов в физике, то оно, по-видимому, не исчерпывается теми примерами, которые приводятся в книге. Так, можно дополнительно отметить асимптотику решений в зонной теории твердого тела, в задачах о столкновении с молекулами, в теории лазерных резонаторов, в уравнениях цепной реакции в химии, в задачах рефракции и дифракции, при выводе интегральных уравнений типа Липмана — Швингера и Фаддеева, при вычислении квазиклассических поправок к уравнению Томаса — Ферми, поправок к уравнениям электронной плазмы, асимптотику решений уравнений Хартри, в электронной оптике, в задачах надбарьерного отражения и во многих других задачах современной математической физики.

Эта книга построена так, чтобы она могла служить возможно более широкому кругу читателей. В ней проводятся как бы два способа обучения. Читатель, который хочет избежать изучения тонких оценок и предельных переходов, но который хочет овладеть практической техникой получения асимптотических решений, может пропустить всю часть, посвященную функциональному анализу. Для этого «Введение в операторное исчисление» написано с таким расчетом, чтобы можно было, изучив его, овладеть операторной техникой (пропустив главы I—IV), сразу перейдя к изучению способов сведения конкретных задач к интегральному уравнению и выделения негладкой части решения.

При втором способе обучения, состоящем в постепенном и более глубоком изучении операторных методов, следует начи-

нать с первой главы и лишь после главы IV прочитать Введение.

Однако самый эффективный путь овладения предметом скорее всего заключается в том, чтобы сначала ознакомиться с Введением, а затем последовательно читать всю книгу.

Следует все же предупредить читателя, что все эти способы нелегки, ибо в книге излагается некое новое операторное исчисление — исчисление упорядоченных операторов.

Настоящая книга представляет собой запись курса лекций, читавшихся автором в течение трех лет на факультете прикладной математики Московского института электронного машиностроения последовательно третьему, четвертому и пятому курсам, а последние главы также пятому курсу (в течение трех лет) выпускников кафедры математики физического факультета Московского государственного университета. Кроме того, этот курс лекций (в сокращенном варианте) был прочитан автором в нескольких математических школах (на международной математической школе в Сопоте в 1971 г., в Пушкино в 1971 г., в Воронеже в 1972 г. и др.).

Опыт чтения этого курса лекций показал, что, вопреки ожиданиям, операторное исчисление при параллельном рассмотрении сравнительно небольшого числа примеров на семинарских занятиях воспринимается даже легче, чем вопросы, связанные с традиционным функциональным анализом, тонкими оценками, функциональными пространствами и предельными переходами.

Студенты старших курсов и аспиранты могут быстро научиться решать сложные задачи, связанные с операторными методами. В этой книге, в частности, читатель найдет важные формулы, полученные М. В. Карасевым (теоремы 4.4 и 6.6 Введения) и В. Г. Даниловым (теорема 1.1 главы V).

Если провести аналогию между изложением операторного исчисления во «Введении в операторное исчисление» с гипотетическим изложением дифференциального исчисления (см. левый столбец), то получится примерно следующее.

В §§ 1—3 излагается кольцо полиномов.

В §§ 4—5 приводятся правила формального дифференцирования полиномов и выводятся различные формулы дифференцирования для полиномов: формулы дифференцирования произведения, сложной функции, разложение в ряд Тейлора.

В §§ 1—3 излагается метод Хевисайда и исчисление операторов с постоянными коэффициентами.

В §§ 4—5 выводятся правила нового исчисления на примере формальных степенных рядов от упорядоченных операторов. Вводятся формулы для коммутаторов от рядов, формулы для сложной функции и разложения в ряды Ньютона.

В § 6 вводится система аксиом и те же формулы выводятся для произвольных функций в виде теорем, и, тем самым, определяются все формулы техники дифференцирования.

В § 7 дается простой пример.

В § 8 с помощью введенной техники получается новое решение классической физической задачи.

В § 9 ставится задача на простейшее дифференциальное уравнение. Вводится основное понятие характеристического полинома и обсуждается физический смысл начальных условий. Формулируется основная теорема существования и приводится формула для решения уравнения в частном случае.

Далее (если продолжить аналогию) последовательно проводится как бы теория пределов (глава I), затем производной как предела (глава II) и частных производных как многократных пределов (глава III).

По сути дела глава I посвящена традиционному функциональному анализу, причем последовательно проводится концепция «пополнения пределами», подобно тому, как в теории Кантора действительные числа являются пополнением последовательностей рациональных чисел. Это позволяет полностью избежать теории меры (в частности, меры Лебега). С этой же точки зрения строится и теория функций в главе II, что согласуется с первоначальной концепцией физиков относительно δ -функции Дирака как предела колоколообразных функций.

Глава III посвящена исчислению функций от одного оператора. Вводятся понятия производящего и регулярного операторов, обобщающих соответственно понятия самосопряженного и нормального операторов. Для регулярных операторов доказывается теорема, показывающая их общность в случае дискретного спектра: регулярность оператора — необходимое и достаточное условие полноты собственных и присоединенных элементов. Как следствие выводится известное исчисление самосопряженных операторов.

В § 6 вводится система аксиом и те же формулы для произвольных функций в виде теорем, и, тем самым, определяются все формулы техники исчисления упорядоченных операторов.

В § 7 дается простой пример.

В § 8 с помощью введенной техники получают новые физические эффекты при изучении классической задачи вывода волнового уравнения из уравнений колебаний кристаллической решетки.

В § 9 формулируется основная задача, вводится основное понятие характеристик для функции от упорядоченного набора операторов и обсуждается физический смысл условий поглощения. Формулируется основная теорема и приводится явная формула решения основной задачи в частном случае (общая формула приводится в последней главе).

В главе IV вначале подробно изучается исчисление функций от двух некоммутирующих упорядоченных операторов, их совместный спектр и спектральное разложение. Далее рассматриваются функции от нескольких регулярных операторов и выводятся для них формулы, которые во введении были получены из аксиоматики. Тем самым строится, уже на функциональной основе, вся техника исчисления некоммутирующих операторов. На этом заканчивается собственно операторное исчисление.

Дальнейшая часть книги посвящена специальному преобразованию, позволяющему доказать основную теорему. Это преобразование называется каноническим оператором.

В главе V проводится большая подготовительная работа. Вводится канонический оператор в простейшем действительном одномерном случае (зависящий от упорядоченных операторов).

На главе VI следует остановиться более подробно. Она необходима для окончательного построения комплексного канонического оператора, но, вообще говоря, совершенно обособлена и никак не связана с техникой упорядоченных операторов. Она даже может быть прочитана сразу. Эта глава посвящена конструкции решения в целом уравнений, обобщающих уравнения Гамильтона — Якоби. В ней вводится понятие лагранжевой поверхности с комплексным ростком. Это позволяет дать геометрическую интерпретацию решений уравнений типа Гамильтона — Якоби.

Можно провести следующую физическую аналогию. При падении камня в воду вначале расходятся ровные круги, а затем, после отражения волны, получается картина, которой трудно дать геометрическое истолкование. Точно так же и уравнение Гамильтона — Якоби (частное решение некоторого уравнения Гамильтона — Якоби как раз и будет давать эти круги) при временах, не превышающих некоторого времени t_1 , имеет простое и гладкое решение. Дальше при $t > t_1$ возникает аналог наложения многократно отражённых волн. Чтобы разобраться в многозначных функциях (ветвлениях решения), необходимо провести униформизацию аналогично тому, как это делается при помощи листов Римана для аналитических функций с ветвлением. И именно конструкция объекта в фазовом пространстве лагранжева многообразия с комплексным ростком позволяет «распутать» многозначные решения уравнения типа Гамильтона — Якоби (с поглощением). При этом введённое здесь понятие «индекса» — целого числа — позволяет как бы пронумеровать эти решения (листья) на лагранжевом многообразии с комплексным ростком.

Кроме того, индексы замкнутых путей на лагранжевом многообразии с комплексным ростком представляют собой важную характеристику этого объекта (характеристический класс объекта).

После этого в главе VII строится комплексный канонический оператор и доказывается основная теорема.

Результаты глав III—VII и §§ 4—9 Введения принадлежат в основном автору (за исключением теорем главы III, относящихся к самосопряженным операторам, и отмеченных выше теорем Карасева и Данилова).

Отправным пунктом для настоящего исследования послужило замечание Р. Фейнмана *) о том, что если порядок действия операторов определяется индексами, то операторы становятся как бы коммутирующими.

Теория лагранжева многообразия с комплексным ростком возникла в результате изучения работ Ж. Лере по задаче Коши.

Редактор книги А. А. Кириллов сделал ряд ценных принципиальных указаний, касающихся конструкции книги в целом.

Большую помощь мне оказали консультации А. А. Самарского и дискуссии с Д. В. Аносовым и В. В. Кучеренко. Приношу им свою глубокую благодарность. Я очень благодарен также, П. П. Мосолову, Е. А. Горину и В. Л. Дубнову, сделавшим ряд полезных замечаний по рукописи.

Но эта книга вообще не была бы написана как учебное руководство, если бы не мои ученики, которые записали и обработали этот курс лекций. При этом по главам I, II, V, VII им даже не были предоставлены подробные конспекты. Первая глава была записана В. Л. Дубновым, вторая Е. М. Воробьевым и В. Л. Дубновым, III, IV главы обработал В. Л. Дубнов, V — В. Л. Дубнов и М. В. Карасев, VI — В. Г. Данилов, VII — В. Г. Данилов и М. В. Карасев, § 4 гл. VI — А. Г. Прудковский, который провел также все вычисления на машине. Кроме того, многочисленные дискуссии с В. Л. Дубновым, М. В. Карасевым, В. Г. Даниловым, С. Ю. Доброхотовым, А. Г. Прудковским и Г. А. Воропаевой оказали мне неоценимую помощь. При подготовке рукописи к печати мне помогали также А. Г. Давтян и Г. Ю. Малышева. Моя признательность всем им не знает границ.

В. П. Маслов

*) В статье «Операторное исчисление, имеющее отношение к квантовой электродинамике» (Phys. Rev., 84, 1951; рус. перев. «Проблемы современной физики», № 3, 1955) в параграфе «Описание способа обозначения».

По рекомендации редактора исчисление Фейнмана в эту книгу не включено. Точно так же опущены и физические приложения, перечисленные на стр. 6.

§ 1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений операторным методом Хевисайда

Обозначим через $C^\infty(\mathbb{R})$ (или C^∞) множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$. На C^∞ определена операция (оператор) дифференцирования d/dx , которую мы в дальнейшем будем обозначать через D :

$$D\varphi(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \varphi'(x).$$

Ясно, что для любого полинома $P_n(x)$ имеет смысл оператор $P_n(D)$: $C^\infty \rightarrow C^\infty$ вида

$$P_n(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i, \quad a_i D^0 = a_i,$$

где a_i — комплексные числа, $i=0, 1, \dots, n$. Иначе говоря, по определению,

$$P_n(D) \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n a_i \varphi^{(i)}(x), \quad \varphi^{(0)} = \varphi.$$

Обозначим множество операторов вида $P_n(D)$ через $K_1[D]$; для любых двух элементов из $K_1[D]$ определены их сумма и произведение:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i D^i + \sum_{i=0}^n b_i D^i &= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) D^i, \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i D^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j D^j \right) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j D^{i+j}. \end{aligned}$$

Через $K_1[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел:

$$P_n \in K_1[x], \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Каждому полиному $P_n \in K_1[x]$ можно взаимно однозначно сопоставить оператор $P_n(D) \in K_1[D]$, $P_n(D) = a_0 + a_1 D + \dots + a_n D^n$.

(Для доказательства взаимной однозначности достаточно показать, что если $\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(x) \equiv 0$ для всех $f \in C^\infty$, то $a_n \equiv 0$. Но это очевидно.) Будем называть полином $P(x)$, отвечающий оператору $P(D)$, *символом оператора* $P(D)$. При таком сопоставлении сумма двух полиномов переходит в сумму соответствующих операторов и произведение двух полиномов переходит в произведение соответствующих операторов. Имея в виду это соответствие, будем говорить, что $K_1[x]$ и $K_1[D]$ *изоморфны*.

Из основной теоремы алгебры следует, что любой полином $P_n(x) \in K_1[x]$ может быть представлен в виде

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^m k_i = n, \quad (1.1)$$

где α_i — комплексные корни полинома, k_i — кратность корня. В силу изоморфизма между $K_1[x]$ и $K_1[D]$ для каждого оператора $P_n(D)$ справедливо представление

$$P_n(D) = a_n \prod_{i=1}^m (D - \alpha_i)^{k_i}, \quad (1.2)$$

где α_i — операция (оператор) умножения на постоянную α_i .

Теперь решим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$P_n(D) y(x) = \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(x) = f(x), \quad f \in C^\infty. \quad (1.3)$$

Предположим для упрощения, что все корни α_i полинома $P_n(x)$ являются простыми. Тогда уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$\prod_{i=1}^n (D - \alpha_i) y(x) = f(x)/a_n.$$

Для решения уравнения (1.3) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть $P_n(D) \in K_1[D]$, $f \in C^\infty$. Справедлива формула:

$$P_n(D) e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} P_n(D + \alpha) f(x). \quad (1.4)$$

Доказательство проведем по индукции. Вычислим $De^{\alpha x} f(x)$:
 $De^{\alpha x} f(x) = \alpha e^{\alpha x} f(x) + e^{\alpha x} f'(x) = e^{\alpha x} (\alpha f(x) + f'(x)) = e^{\alpha x} (D + \alpha) f(x).$

Пусть теперь формула (1.4) верна для оператора D^{n-1} . Докажем, что она верна и для оператора D^n . Имеем $D^n e^{\alpha x} f(x) = D[D^{n-1} e^{\alpha x} f(x)] = DF(x)$, где $F(x) = D^{n-1} e^{\alpha x} f(x)$. По предположе-

нию индукции, $D^{n-1}e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}(D + \alpha)^{n-1}f(x)$. Далее имеем

$$DF(x) = De^{\alpha x}[(D + \alpha)^{n-1}f(x)] = \\ = \alpha e^{\alpha x}[(D + \alpha)^{n-1}f(x)] + e^{\alpha x}D[(D + \alpha)^{n-1}f(x)] = e^{\alpha x}(D + \alpha)^n f(x).$$

Таким образом, для любого целого m получена формула

$$D^m e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} (D + \alpha)^m f(x). \quad (1.5)$$

Из равенства (1.5) сразу следует равенство (1.4), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(D - \alpha)y(x) = f(x), \quad f \in C^\infty. \quad (1.6)$$

Используя лемму, получаем

$$(D - \alpha)y(x) = (D - \alpha)e^{\alpha x}e^{-\alpha x}y(x) = e^{\alpha x}De^{-\alpha x}y(x).$$

Таким образом, уравнение (1.6) эквивалентно уравнению

$$De^{-\alpha x}y(x) = f(x)e^{-\alpha x}. \quad (1.6')$$

Как известно, общее решение уравнения $Dy(x) = f(x)$ имеет вид $y(x) = \int f(x) dx + C$, где C — константа. Введем обозначение

$$\int f(x) dx + C = \frac{1}{D} f(x). \quad (1.7)$$

Отметим, что $1/D$ отображает элемент $f \in C^\infty$ в целый класс функций $\frac{1}{D}f \in C^\infty$; если $y_0 \in \frac{1}{D}f$, то $z \in \frac{1}{D}f$ тогда и только тогда, когда $z - y_0 = \text{const}$.

Теперь можно решение уравнения (1.6) (и (1.6')) записать в виде

$$y = e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} f(x). \quad (1.8)$$

Вернемся к уравнению (1.3). Имеем

$$P_n(D)y(x) = a_n \prod_{i=1}^n (D - \alpha_i)y(x) = a_n (D - \alpha_1) \prod_{i=2}^n (D - \alpha_i)y(x) = \\ = a_n e^{\alpha_1 x} D e^{-\alpha_1 x} \prod_{i=2}^n (D - \alpha_i)y(x) = \\ = \dots = a_n e^{\alpha_1 x} D e^{-\alpha_1 x} \dots e^{\alpha_n x} D e^{-\alpha_n x} y(x) = f(x).$$

Применяя последовательно (1.8), получим формулу

$$y = e^{\alpha_n x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_n x} \dots e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_1 x} \frac{f(x)}{a_n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{P_n(D)} f(x). \quad (1.9)$$

Мы получили формулу, выражающую решение уравнения (1.3) через интегралы от правой части. Таким образом, существо-

вание решения установлено. Нетрудно убедиться, что ответ не зависит от порядка нумерации корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ полинома $P_n(x)$. В принятой записи видно, что общее решение уравнения (1.3), определяемое равенством (1.9), зависит не более чем от n постоянных (на самом деле ровно от n).

Формула (1.9) определяет отображение элемента $f \in C^\infty$ в некоторый класс функций. Если уравнение $P_n(x) = 0$ имеет простые корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, разность двух элементов этого класса имеет вид $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + c_n e^{\alpha_n x}$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — константы. Формула (1.9) по самому способу ее получения справедлива и в случае кратных корней: тогда разность двух элементов имеет вид

$$P_1(x) e^{\alpha_1 x} + P_2(x) e^{\alpha_2 x} + \dots + P_m(x) e^{\alpha_m x},$$

где $P_1, P_2, \dots, P_m$ — подходящие полиномы.

Полученное отображение (или оператор) мы обозначаем $1/P_n(D)$.

Покажем, что для единственности решения уравнения (1.3) достаточно задать начальные данные Коши:

$$y(0) = c_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \quad (1.10)$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что задача

$$P_n(D) y(x) = 0, \quad (1.11)$$

$$y(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (1.12)$$

имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$. Заметим, что задача $(D - \alpha) y(x) = 0$, $y(0) = 0$ имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$.

Преобразуем теперь уравнение (1.11):

$$P_n(D) y(x) = \prod_i (D - \alpha_i)^{k_i} y(x) = (D - \alpha_1) W(x) = 0.$$

Очевидно, $W(x)$ является линейной комбинацией производных функции $y(x)$ порядка $\leq n-1$. Значит, в силу условий (1.12), $W(0) = 0$, и следовательно, $W(x) \equiv 0$. Ясно, что продолжая этот процесс, мы получим $y(x) \equiv 0$.

Приведем еще один способ вычисления класса функций $\frac{1}{P_n(D)} f$, использующий некоторое расширение рассмотренного выше отображения $K_1[x] \rightarrow K_1[D]$ на поле рациональных функций переменного x .

Пусть $R(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x), Q(x)$ — полиномы. Функции $R(x)$ сопоставим отображение (оператор) $R(D)$, которое переводит функцию $f \in C^\infty$ в класс функций $P(D) \frac{1}{Q(D)} f \in C^\infty$. Функцию $R(x)$ будем называть *символом отображения* (оператора) $R(D)$. Убедимся, что отображение $R(D)$ не зависит от способа представления его символа $R(x)$ в виде дроби $P(x)/Q(x)$. Действительно, пусть $\bar{P}(x) = P(x) S(x)$, $\bar{Q}(x) = Q(x) S(x)$, где $S(x)$ — некоторый

полином. Покажем, что для любого $f \in C^\infty$ имеет место равенство

$$P(D) \frac{1}{Q(D)} f = \bar{P}(D) \frac{1}{\bar{Q}(D)} f. \quad (1.13)$$

Пусть $y \in P(D) \frac{1}{Q(D)} f$. Тогда $y(x)$ имеет вид $y(x) = P(D) z(x)$, где $z(x)$ — решение уравнения $Q(D) z(x) = f(x)$. Обозначим через $u(x)$ какое-нибудь решение уравнения $S(D) u(x) = z(x)$. Тогда $Q(D) u(x) = Q(D) S(D) u(x) = Q(D) z(x) = f(x)$, так что $u \in \frac{1}{Q(D)} f$. Имеем далее: $y(x) = P(D) z(x) = P(D) S(D) u(x) = \bar{P}(D) u(x)$. Следовательно,

$$y \in \bar{P}(D) \frac{1}{\bar{Q}(D)} f.$$

Обратно, пусть $y \in \bar{P}(D) \frac{1}{\bar{Q}(D)} f$. Тогда $y(x) = \bar{P}(D) u(x)$, где $u(x)$ удовлетворяет уравнению $Q(D) u(x) = f(x)$. Обозначим $z(x) = S(D) u(x)$. Тогда $z(x)$ удовлетворяет уравнению $Q(D) z(x) = f(x)$, и $y(x) = P(D) z(x) \in P(D) \frac{1}{Q(D)} f(x)$; значит, $y \in P(D) \frac{1}{Q(D)} f$, что и требовалось доказать.

Обозначим множество операторов $R(D)$ через $F[D]$. Введем на множестве $F[D]$ операцию суммы, индуцированную соответствующей операцией в поле $F[x]$ ($F[x]$ — поле рациональных функций). Положим по определению, что $R(D) = R_1(D) + R_2(D)$ тогда и только тогда, когда $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2. Пусть $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — элементы поля $F[x]$, $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$. Для того, чтобы функция y принадлежала классу $R(D)f$, необходимо, чтобы она была представима в виде $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, где $y_1 \in R_1(D)f$, $y_2 \in R_2(D)f$.

Доказательство. Пусть $R_1(x) = P_1(x)/Q_1(x)$, $R_2(x) = P_2(x)/Q_2(x)$, где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — полиномы. Тогда $R(x) = R_1(x) + R_2(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x) = P_1(x)Q_2(x) + Q_1(x)P_2(x)$, $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

Будем обозначать класс функций вида $y(x)$ через $R_1(D)f(x) + R_2(D)f(x)$. Докажем, что $R(D)f \subset R_1(D)f + R_2(D)f$. Пусть $y(x) \in R(D)f(x)$. Тогда $y(x) = [P_1(D)Q_2(D) + Q_1(D)P_2(D)]z(x)$, где $z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Q_1(D)Q_2(D)z(x) = f(x). \quad (1.14)$$

Обозначим $P_1(D)Q_2(D)z(x) = y_1(x)$, $P_2(D)Q_1(D)z(x) = y_2(x)$. Функция $u_1(x) = Q_2(D)z(x)$ удовлетворяет уравнению $Q_1(D)u_1(x) = f(x)$, а функция $u_2(x) = Q_1(D)z(x)$ удовлетворяет уравнению $Q_2(D)u_2(x) = f(x)$. Следовательно,

$$y_1(x) \in R_1(D)f(x), \quad y_2(x) \in R_2(D)f(x),$$

и доказываемое включение установлено.

Приведем теперь способ вычисления $1/P_n(D)$ с помощью полученного соответствия $R(x) \rightarrow R(D)$. Для этого разложим символ $1/P_n(x)$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(x-\alpha_i)^{k_i}}, \quad \sum_{i=1}^m k_i = n,$$

где α_i — комплексные корни кратности k_i полинома $P_n(x)$, a_i — комплексные полиномы. Из леммы 1.2 следует, что

$$\frac{1}{P_n(D)} f \subset \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(D-\alpha_i)^{k_i}} f.$$

Это означает, что любое решение $y(x)$ уравнения (1.3) представимо в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^m a_i(D) e^{\alpha_i x} \underbrace{\frac{1}{D} \dots \frac{1}{D}}_{k_i} e^{-\alpha_i x} f(x), \quad (1.15)$$

что непосредственно следует из (1.6), (1.6') и (1.8). В частном случае, когда корни простые, (1.15) принимает вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \left[a_i e^{\alpha_i x} \int_0^x e^{-\alpha_i p} f(p) dp + C_i e^{\alpha_i x} \right]. \quad (1.15')$$

Нетрудно убедиться*) в том, что общее решение уравнения (1.3) содержит ровно n констант. Отсюда следует, что (1.15) дает общее решение (т. е. любой элемент из класса $\frac{1}{P(D)} f$) уравнения (1.3).

Для отыскания решения однородного уравнения также можно пользоваться формулой (1.9).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)y(x) = 0, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

По формуле (1.9) имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_1 x} e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_1 x} 0 = \\ &= e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_1 x} e^{\alpha_1 x} C_1 = e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} C_1 = \\ &= e^{\alpha_1 x} C_1 \int e^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} dx + C_2 e^{\alpha_2 x} = C_1' e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

*) Это немедленно следует из того факта, что любое решение уравнения (1.3) представимо в виде суммы некоторого решения этого уравнения и некоторого решения однородного уравнения. С другой стороны, любой из членов разложения $1/P_n(D)$ на простейшие дроби, примененный к нулю, удовлетворяет однородному уравнению $P_n(D)y=0$, так как $P_n(D)$ можно представить в виде $P_k(D)(D-\alpha_k)^{b_k}$, где $(D-\alpha_k)^{b_k}$ — знаменатель этого члена.

Рассмотрим также на примере случай кратных корней.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(D - \alpha)^3 y(x) = 0.$$

Из равенства (1.9) получаем:

$$y(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} 0 = e^{\alpha x} \frac{1}{D} \frac{1}{D} \frac{1}{D} 0 = e^{\alpha x} (C_0 + C_1 x + C_2 x^2).$$

Замечание. Рассмотрим теперь уравнение

$$P_n(D) y(x) = P_k(x), \quad P_n(0) \neq 0, \quad (1.16)$$

где $P_k(x)$ — полином степени k . Обозначим через $P_{n,s}(x)$ сумму $s+1$ членов разложения в ряд Тейлора с центром в $x=0$ функции $1/P_n(x)$. Из равенства

$$P_n(x) \left[P_{n,s}(x) + \sum_{k=s+1}^{\infty} \left(\frac{1}{P_n(x)} \right)_{x=0}^{(k)} \frac{x^k}{k!} \right] = 1$$

немедленно следует:

$$P_n(x) P_{n,s}(x) = 1 + x^{s+1} P_{n-1}(x), \quad (1.17)$$

где $P_{n-1}(x)$ — полином степени не выше $n-1$.

Покажем, что

$$y(x) = P_{n,s}(D) P_k(x) \quad (1.18)$$

является решением уравнения (1.16) при $s \geq k$. В самом деле, используя (1.17), получаем:

$$\begin{aligned} P_n(D) \bar{y}(x) &= P_n(D) P_{n,s}(D) P_k(x) = \\ &= (1 + P_{n-1}(D) D^{s+1}) P_k(x) = P_k(x) + P_{n-1}(D) D^{s+1} P_k(x). \end{aligned}$$

Но при $s \geq k$ последний член равен 0. Таким образом, при любом $s \geq k$ формула (1.18) дает одно из решений уравнения (1.16), причем любое решение уравнения (1.16) выражается формулой

$$y(x) = P_{n,s}(D) P_k(x) + \varphi(x), \quad \text{где } \varphi \in \frac{1}{P_n(D)} 0.$$

§ 2. Разностные уравнения

Рассмотрим оператор сдвига. Обозначим его через e^{hD} :

$$e^{hD} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+h),$$

где h — действительное число.

Это определение оправдывается следующим эвристическим рассуждением: пусть $f(x)$ — аналитическая функция в $2h$ -окрестности точки x , $-\infty < x < \infty$. Тогда

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x).$$

С другой стороны, разлагая e^{hD} формально в степенной ряд, получим

$$e^{hD} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k D^k}{k!} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x+h).$$

Следовательно, разложению в ряд Тейлора функции $f(x+h)$ отвечает формальное разложение в ряд экспоненты e^{hD} .

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k y(x+kh) = f(x), \quad f \in C_0^\infty, \quad (2.1)$$

где C_0^∞ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций на $\mathbb{R}$ (т. е. с компактным носителем). Перепишем это уравнение в виде

$$P_n(e^{hD}) y(x) = f(x),$$

где

$$P_n(e^{hD}) = \sum_{k=0}^n a_k e^{khD}.$$

Предположим для простоты, что все корни полинома

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ различны. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x - \alpha_i}, \quad (2.2)$$

где A_i — некоторые постоянные.

Если $y(x)$ — решение уравнения

$$(e^{hD} - \alpha) y(x) = f(x), \quad (2.3)$$

то $y(x)$ есть решение уравнения

$$(e^{hD} - \alpha) e^{\frac{x}{h} \ln \alpha} e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} y(x) = f(x).$$

Легко проверить, что

$$(e^{hD} - \alpha) f(x) = \alpha e^{\frac{x}{h} \ln \alpha} (e^{hD} - 1) e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} f(x).$$

Таким образом, (2.3) можно записать в виде

$$(e^{hD} - 1) e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} y(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} f(x).$$

Теперь заметим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} e^{khD}$ является формальным степенным рядом для выражения $(e^{hD} - 1)^{-1}$. Нетрудно убедиться, что

$$e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} y(x) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{khD} e^{-\frac{x}{h} \ln \alpha} f(x) + y_1(x),$$

$$y(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{h} \ln \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} f(x+kh) e^{-\frac{x+kh}{h} \ln \alpha} + y_1(x) e^{\frac{x}{h} \ln \alpha}.$$

где $y_1(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $(e^{hD} - 1)y_1 = 0$; $y_1(x+h) = y_1(x)$. Значит $y_1(x)$ есть любая периодическая функция с периодом h . Точно так же, как и в предыдущем параграфе, можно получить, что решение уравнения (2.1) представимо в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{e^{hD} - \alpha_i} f(x). \quad (2.4)$$

Для функции $y(x)$, определяемой (2.4), положим

$$y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{P_n(e^{hD})} f(x).$$

Тем самым задача сведена к уравнению (2.3).

Задача. Найти частное решение дифференциально-разностного уравнения

$$y''(x) + y(x+1) = x^k e^{\alpha x},$$

где α удовлетворяет соотношению $\alpha = i e^{\alpha/2}$.

§ 3. Решение систем дифференциальных уравнений методом Хевисайда

Любую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$B(D)Y(x) = F(x), \quad (3.1)$$

где $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ — вектор-функции, а $B(D)$ — $n \times n$ -матрицы, элементами которых являются рассмотренные в § 1 операторы.

Легко видеть, что операторы $B(D)$ образуют (некоммутативную) алгебру*). Мы будем обозначать ее через $M[D]$. Обозначим через $M[x]$ алгебру матриц, элементами которых являются полиномы $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$. Очевидно, что изоморфизм $P(x) \rightarrow P(D)$ алгебр $K_1[x]$ и $K_1[D]$, определенный в § 1, можно расширить до изоморфизма алгебр $M[x]$ и $M[D]$.

Пусть

$$B \in M[x], \quad B(x) = \|P''(x)\|.$$

Обозначим через $A_{ij}(x)$ алгебраические дополнения матрицы $B(x)$ и рассмотрим матрицу $A \in M[x]$, $A(x) = \|A_{ij}\|^t = \|A_{ji}\|$. Из линейной алгебры хорошо известно равенство

$$A(x)B(x) = E \cdot \Delta(x), \quad (3.2)$$

* См. § 1 гл. 1.

где E — единичная матрица, а $\Delta(x) = \det B(x)$. Из равенства (3.2) для соответствующих операторов имеем

$$A(D)B(D) = E\Delta(D). \quad (3.3)$$

Используя равенство (3.3), задачу (3.1) можно преобразовать к виду

$$A(D)B(D)Y(x) = A(D)F(x).$$

Обозначим $A(D)F(x) = G(x)$. Тогда

$$E\Delta(D)Y(x) = G(x), \quad (3.4)$$

или

$$\Delta(D)y_i(x) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4')$$

Такие уравнения нами уже изучены. Их решение имеет вид

$$y_i(x) = \frac{1}{\Delta(D)} g_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Из приведенных выше рассуждений видно, что если вектор-функция $Y(x)$ удовлетворяет системе (3.1), то ее компоненты — функции $y_i(x)$ — удовлетворяют уравнениям (3.4'). Отметим однако, что если $y_i(x)$ — общее решение уравнений (3.4'), то функция $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^t$ вообще говоря, не удовлетворяет системе уравнений (3.1). Для того, чтобы функция $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^t$ была решением системы (3.1), необходимо наложить условия на постоянные интегрирования, входящие в решения уравнений (3.5). Если же

$$z_i(x) = \frac{1}{\Delta(D)} f_i(x),$$

то

$$Y(x) = A(D)Z(x),$$

где $Z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))$, очевидно, удовлетворяет системе 3.1:

$$B(D)Y(x) = B(D)A(D)Z(x) = E\Delta(D)Z(x) = F(x).$$

Нетрудно убедиться, что мы получили общее решение системы 3.1.

Пример. Решить систему уравнений

$$Dy_1(x) + y_1(x) + Dy_2(x) = 0,$$

$$D^2y_1(x) - y_1(x) + D^2y_2(x) + y_2(x) = 0.$$

Перепишем систему в виде

$$(D+1)y_1(x) + Dy_2(x) = 0,$$

$$(D^2-1)y_1(x) + (D^2+1)y_2(x) = 0.$$

Легко видеть, что в данном случае $\Delta(D) = (D+1)^2$. Следовательно, решение имеет вид

$$\begin{aligned}y_1(x) &= ae^{-x} + bxe^{-x}, \\y_2(x) &= ce^{-x} + dxe^{-x}.\end{aligned}$$

Подставив эти функции в первое уравнение, после сокращения на e^{-x} получим:

$$b - c - dx + d = 0,$$

т. е. $d=0$, $b=c$. Подстановка $y_1(x)$ и $y_2(x)$ во второе уравнение дает те же условия на коэффициенты. Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned}y_1(x) &= ae^{-x} + bxe^{-x}, \\y_2(x) &= be^{-x}.\end{aligned}$$

Мы убедились, таким образом, что для систем обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами операторный метод Хевисайда позволяет сводить задачу к чисто алгебраической, связанной с линейной алгеброй. Методы же линейной алгебры глубоко изучены и широко известны. Но если бы даже они не были известны, то естественно было бы свести задачу к алгебраической, поставить алгебраическую задачу и далее изучать именно ее. Такой путь был бы наиболее рационален.

В случае переменных коэффициентов дело обстоит значительно сложнее, ибо алгебраическая задача, к которой приводит операторный метод, изложенный ниже, не была до сих пор изучена, так что под операторным методом мы понимаем в дальнейшем не простое сведение дифференциальной задачи к чисто алгебраической, но и метод решения этой последней.

§ 4. Алгебра сходящихся степенных рядов от некоммутирующих операторов

Операторное исчисление Хевисайда позволяет решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Обратимся к уравнению с переменными коэффициентами:

$$\sum_{j=0}^n a_j(x) \frac{d^j y}{dx^j} = f(x).$$

Если оператор дифференцирования снова обозначить через D , то это уравнение естественно записать в виде

$$P(x, D)y(x) = f(x),$$

где P — полином по второму аргументу:

$$P(x, p) = \sum_{j=0}^n a_j(x) p^j.$$

Существенная трудность связана с тем, что операторы дифференцирования и умножения на x не коммутируют. Это видно уже из следующего простейшего примера. Пусть $P(x, p) = xp$; как понимать тогда $P(x, D)$, учитывая, что подстановка x и D в разном порядке дает разные результаты:

$$xDy(x) = xy'(x), \quad Dxy(x) = (xy)' = y(x) + xy'(x)?$$

Ясно, что обозначение $P(x, D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_i(x) D^i$, где $P(x, \xi) = \sum a_i(x) \xi^i$, не имеет смысла, если не подразумевать, что оператор D в обозначении $P(x, D)$ действует первым. Поэтому указав номерами порядок действия операторов x и D , мы однозначно определим оператор

$$P(\overset{x}{x}, \overset{D}{D}) = \sum a_i(x) D^i.$$

Естественное обобщение записи полинома от D в методе Хевисайда приводит нас к определению полиномов от упорядоченных операторов.

Для постоянных коэффициентов мы вывели правила сложения и умножения для полиномов от оператора D . Оказалось, что эти правила совпадают с обычными «правилами» для полиномов.

В этом параграфе мы введем соответствующие правила для полиномов от упорядоченных операторов. Но эти правила приведут нас к новым алгебраическим понятиям, которые мы аксиоматизируем ниже.

Мы будем сразу рассматривать полиномы бесконечного порядка, точнее, сходящиеся операторные степенные ряды. На примере метода Хевисайда мы видели, что иногда (см. например § 2) решение может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда. Читатель, не знакомый с понятием ограниченных операторов, может подразумевать под операторами обычные матрицы.

Вместе с тем, на примере §§ 1—3 мы видели, что понятия полиномов от D , вообще говоря, недостаточно для решения дифференциальных уравнений. Значит, и здесь мы должны будем обобщать полученные правила на случай более общих функций от упорядоченных операторов (в § 6).

Пусть $\mathcal{O}$ — некоторая некоммутативная алгебра с единицей, элементы $A, B, C, \dots$, которой мы будем называть *операторами*. И пусть $\mathcal{A}$ — алгебра сходящихся степенных рядов (целых функций) переменных $x, y, z, \dots$ (этих переменных бесконечно много, но каждый элемент алгебры $\mathcal{A}$ есть степенной ряд, содержащий лишь конечное число переменных).

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество сходящихся степенных рядов от элементов алгебры Op , если Op нормирована (в противном случае $\mathcal{S}$ — множество полиномов). Такие ряды определяются аналогично сходящимся степенным рядам от коммутирующих переменных с естественными изменениями, связанными с тем, что 2 монома — например, A^2B и ABA — с разным порядком сомножителей считаются различными.

В множестве $\mathcal{S}$ естественным образом определена операция умножения; поясним ее на примере произведения двух мономов:

$$2A^2BC \cdot 3CABA = 6A^2BC^2ABA.$$

Это произведение в $\mathcal{S}$ некоммутативно.

Условимся, что буквы a, b, c будут обозначать числа. Для того, чтобы формулы были более наглядными, мы будем приводить определения или правила операторного исчисления, например, только для случая трех некоммутирующих операторов; обобщения на случай произвольного числа операторов будут очевидными.

Здесь будут введены некоторые обозначения, а потом определены правила действий над сходящимися степенными рядами от операторов из алгебры Op . Эти правила действий будут зависеть от способа упорядочения элементов из Op .

Снабдим операторы A, B, C номерами наверху, например,

$$\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C},$$

и будем при этом говорить, что оператор $\overset{1}{A}$ действует первым, $\overset{2}{B}$ — вторым, а $\overset{3}{C}$ — третьим. Рассмотрим следующее отображение μ множества $\mathcal{A}$ в $\mathcal{S}$: если

$$f(x, y, z) = \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k,$$

то

$$\mu: f(x, y, z) \rightarrow f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{ijk} C^k B^j A^i.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$ образ $\mathcal{A}$ при отображении μ . Алгебраические операции в $\mathcal{A}$ индуцируют при отображении μ алгебраические операции в $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$, относительно которых $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$ является, очевидно, коммутативной алгеброй.

Замечание. Вложение $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}) \subset \mathcal{S}$ индуцирует в $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$ операцию умножения, не совпадающую с умножением в $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$, определенным выше. Умножение в $\mathcal{S}$, в отличие от умножения в $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C})$, некоммутативно.

Пример.

$$(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})^2 = \overset{1}{A}^2 + 2\overset{1}{A}\overset{2}{B} + \overset{2}{B}^2 = A^2 + 2BA + B^2.$$

Отметим, что хотя $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} = A + B$, однако элемент $(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})^2$ алгебры $\mathfrak{A}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})$ не совпадает, вообще говоря, с $(A + B)^2$:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq (\overset{1}{A} + \overset{2}{B})^2.$$

До сих пор A, B, C выступали, по существу, как формальные символы. Теперь учтем существование в Op соотношений: два разных выражения, содержащие элементы из Op , могут быть равны друг другу как операторы. Будем говорить, что два элемента из $\mathcal{S}$ эквивалентны и ставить между ними знак $\sim$, если один получается из другого с помощью объединения членов ряда в некоторые конечные группы членов и замены каждой из этих групп на другое конечное выражение, которое равно ей как оператор.

Если

$$f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}) \sim f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}),$$

то будем писать $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; \overset{3}{C}, \overset{4}{D})$ для обозначения каждого из двух эквивалентных рядов.

Пример $(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})\overset{3}{C}$ означает $\overset{1}{A}\overset{3}{C} + \overset{2}{B}\overset{3}{C}$ или $\overset{1}{A}\overset{3}{C} + \overset{2}{B}\overset{3}{C}$.

Отображение μ обладает следующими свойствами:

- 1) $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}) \sim f(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{B}, \overset{n_3}{C})$, если $n_1 < n_2 < n_3$ *).
- 2) Если $B = 0$, то

$$f(\overset{1}{A}, \overset{3}{C})\overset{2}{B} \sim 0, \sum a_{kj} C^k B A^j \sim 0.$$

- 3) Если A и B коммутируют, то

$$f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}) \sim f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}, \overset{3}{C})$$

и, стало быть, каждый из этих двух рядов можно обозначить через $f(\overset{1}{A}, \overset{1}{B}, \overset{3}{C})$. Это обозначение не приводит к противоречию, если $B = A$:

$$f(\overset{1}{A}, \overset{1}{A}, \overset{3}{C}) = g(\overset{1}{A}, \overset{3}{C}),$$

где $g(x, z) = f(x, x, z)$.

* Запись $f(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{B}, \overset{n_3}{C})$ расшифровывается здесь следующим образом. Если $f(x, y, z) = \sum_{i, j, k} a_{ijk} x^i y^j z^k$, то

$$f(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{B}, \overset{n_3}{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i, j, k} C^{k1} \dots 1 B^j 1 \dots 1 A^i 1 \dots 1,$$

где единицы заполняют в каждом мономе все места, кроме n_1 -го, n_2 -го и n_3 -го справа.

Пусть

$$f(x, y, z) = \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Мы можем подставить вместо x и z операторы $\overset{1}{A}$ и $\overset{2}{B}$ соответственно, а y оставить в качестве формальной переменной:

$$f(\overset{1}{A}, y, \overset{2}{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{ijk} B^k y^j A^i.$$

Рассмотрим операцию подстановки *операторного выражения*, действующего вторым, вместо y в $f(\overset{1}{A}, y, \overset{2}{B})$. Пусть $\Phi(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \dots, \overset{k}{E})$ — элемент из $\mathfrak{A}(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \dots, \overset{k}{E})$, где некоторые из операторов $C, D, \dots, E$ могут совпадать между собой, а также с A или B . Положим по определению

$$f(\overset{1}{A}, [\Phi(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \dots, \overset{k}{E})], \overset{3}{B}) = \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{ijk} B^k H^j A^i,$$

где H — элемент из $\mathcal{S}$, равный $\Phi(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \dots, \overset{k}{E})$, H^j — j -я степень H в смысле естественного (некоммутативного) умножения в $\mathcal{S}$. Иными словами, значки, стоящие над операторами в выражении, заключенном в скобки $[\]$, не определяют порядок действия операторов, стоящих вне этих скобок (и наоборот). По этой причине мы будем называть скобки $[\]$ *автономными скобками*.

Совершенно аналогично определяется операция подстановки операторного выражения, действующего первым, третьим, четвертым и т. д.

Примеры. 1) Пусть e^x — сходящийся степенной ряд:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Тогда

$$[\overset{2}{e^B}] [\overset{1}{e^A}] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^j A^k}{j! k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n-k)!} B^k A^{n-k} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})^n}{n!} = e^{\overset{1}{A} + \overset{2}{B}}.$$

2) Разложим произведение

$$T = e^{B^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n B^n A^n}{n!} e^{A^2}$$

в ряд по степеням однородных двучленов от A и B при помощи

операторного метода. Имеем

$$\begin{aligned} T &= e^{B^2} [e^{2\hat{B}\hat{A}}] e^{A^2} = [e^{B^2}] [\hat{e}^{\hat{A}(2\hat{B} + \hat{A})}] = [e^{B^2}] e^{2\hat{B}\hat{A}} [\hat{e}^{A^2}] = \\ &= e^{\hat{B}^2 + 2\hat{B}\hat{A} + \hat{A}^2} = e^{\hat{B}^2 + 2\hat{B}\hat{A} + \hat{A}^2} = e^{(\hat{A} + \hat{B})^2} = \\ &= \sum \frac{(\hat{A} + \hat{B})^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_{2n}^i B^i A^{2n-i}, \end{aligned}$$

где C_{2n}^i — число сочетаний из $2n$ по i .

$$3) [\hat{A} + \hat{B}]^2 = (\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2.$$

$$4) \hat{A} [\hat{A} + \hat{B}]^2 \hat{C} = \hat{A}(\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} + \hat{B})\hat{C}.$$

Введем, наконец, значок (операцию) *исключения из автономных скобок* (операция «штриха»). Пусть

$$f(x, y, z) = \sum_{i, l, k} a_{ijk} x^i y^l z^k.$$

Тогда, например, под

$$f(\hat{A}, [\hat{\Phi}(\hat{B}, \hat{C}, \hat{D})], \hat{E}) \quad (4.1)$$

будем понимать сходящийся степенной ряд из $\mathcal{S}$, который получается с помощью следующей процедуры. Рассмотрим сначала $f(\hat{A}, [\hat{\Phi}(\hat{B}_1, \hat{C}, \hat{D})], \hat{E})$, где B_1 — оператор, который считается не коммутирующим ни с одним из операторов A, C, D, E . Обозначим через S элемент $\Phi(\hat{B}_1, \hat{C}, \hat{D}) \in \mathcal{S}$. Тогда

$$f(\hat{A}, [\hat{\Phi}(\hat{B}_1, \hat{C}, \hat{D})], \hat{E}) = \sum_{i, l, k} a_{ijk} E^k S^l A^i.$$

Перенесем теперь в каждом слагаемом последней суммы оператор B_1 (который входит в S^l) с каждого места, на котором он стоит, направо так, чтобы он действовал сразу вслед за A^i . Получившийся сходящийся степенной ряд мы будем обозначать через

$$f(\hat{A}, [\hat{\Phi}(\hat{B}_1, \hat{C}, \hat{D})], \hat{E}).$$

Для того, чтобы определить ряд (4.1), остается только подставить всюду B вместо B_1 .

Пример.

$$[\hat{A} + \hat{B}\hat{C}^2] = (\hat{A} + \hat{B}\hat{C})(\hat{A} + \hat{B}\hat{C}).$$

Рассмотрим пример, где уже одно введение μ -операции позволяет получить полезную формулу. Возьмем в качестве $\mathcal{O}$ множество всех гомоморфизмов векторного пространства C_0^∞ и положим

$$X\varphi(\xi) = \xi\varphi(\xi), \quad P\varphi(\xi) = -i d\varphi(\xi)/d\xi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Пусть далее A — произвольный оператор из Op ; $f(x, y)$, $S(x, y)$, $g(x, y)$ — полиномы:

$$f(x, y) = \sum_{i, l=0}^m a_{il} x^i y^l, \quad g(x, y) = \sum_{j, l=0}^m c_{jl} x^j y^l;$$

$$e^{tS}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{tS}(x, y), \quad S(x, y) \in C^\infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \llbracket f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \rrbracket \llbracket e^{tS}(\overset{2}{X}, y) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}) \rrbracket &= \\ &= \sum_{j, l=0}^m a_{j, l} \overset{2}{X}^j \llbracket \overset{1}{P}^l e^{tS}(\overset{2}{X}, y) \rrbracket g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}). \end{aligned}$$

Отсюда, используя тождество

$$\overset{1}{P}^l e^{tS}(\overset{2}{X}, y) = e^{tS}(\overset{2}{X}, y) \llbracket P + \frac{\partial S}{\partial X}(X, y) \rrbracket^l, \quad (4.2)$$

получим:

$$\begin{aligned} \llbracket f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \rrbracket \llbracket e^{tS}(\overset{2}{X}, y) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}) \rrbracket &= \\ &= \sum_{j, l=0}^m a_{j, l} \overset{2}{X}^j e^{tS}(\overset{2}{X}, y) \llbracket P + \frac{\partial S}{\partial X}(X, y) \rrbracket^l g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}) = \\ &= e^{tS}(\overset{2}{X}, y) f(\overset{2}{X}, \llbracket P + \frac{\partial S}{\partial X}(X, y) \rrbracket) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}). \end{aligned}$$

(Формулу (4.2) для данных операторов P и X легко получить аналогично 1.4.) Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть X, P — операторы, введенные выше; тогда

$$\begin{aligned} \llbracket f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \rrbracket \llbracket e^{tS}(\overset{2}{X}, y) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \rrbracket &\sim \\ &\sim e^{tS}(\overset{2}{X}, y) f(\overset{2}{X}, \llbracket P + \frac{\partial S}{\partial X}(X, y) \rrbracket) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Задача. Подставим в (4.2) вместо y формально $\overset{1}{P}$:

$$\overset{1}{P}^l e^{tS}(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \sim e^{tS}(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}) \llbracket P + \frac{\partial S}{\partial X}(X, \overset{1}{P}) \rrbracket^l. \quad (4.4)$$

Применяя формально правила и обозначения для μ -операции, получить из (4.4) аналог формулы (4.3).

Оператор $f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P})$ в формуле (4.3) называется *гамильтонианом*. Формулу (4.3) мы будем называть *формулой коммутации гамильтониана с экспонентой*.

Теорема 4.2. Если $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C}_1, \dots, \overset{n+1}{C}_n, \overset{n+2}{B}) \sim 0$, то

$$\varphi(\overset{1}{A}, \overset{n+2}{B}) f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C}_1, \dots, \overset{n+1}{C}_n, \overset{n+2}{B}) \sim 0$$

для любого $\varphi(x, y)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{n+2}{B}\right) f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \dots, \overset{n+1}{C_n}, \overset{n+2}{B}\right) &\sim \\ &\sim \varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{n+4}{B}\right) f\left(\overset{2}{A}, \overset{3}{C_1}, \dots, \overset{n+2}{C_n}, \overset{n+3}{B}\right) \sim \\ &\sim \varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right) \llbracket f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \dots, \overset{n+1}{C_n}, \overset{n+2}{B}\right) \rrbracket \sim 0. \end{aligned}$$

Следствие. Соотношение

$$\llbracket f(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{P}) \rrbracket \llbracket e^{is(\overset{\circ}{X})} g(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{A}) \rrbracket \sim 0$$

эквивалентно соотношению

$$f(\overset{\circ}{X}, \llbracket P + S'(X) \rrbracket) g(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{A}) \sim 0.$$

Доказательство получается из теоремы 4.2, формулы коммутации гамильтониана с экспонентой и очевидного соотношения

$$\begin{aligned} e^{-is(\overset{\circ}{X})} e^{is(\overset{\circ}{X})} f(\overset{\circ}{X}, \llbracket P + S'(X) \rrbracket) g(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{A}) &\sim \\ &\sim f(\overset{\circ}{X}, \llbracket P + S'(X) \rrbracket) g(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{A}). \end{aligned}$$

Приведем теперь два соотношения, играющие важную роль в теории дифференциальных уравнений.

Предварительно заметим, что в исчислении некоммутирующих операторов большое значение имеют разностные производные — они как бы заменяют обычные производные в анализе. Поэтому приведем заранее обозначения для разностных производных, которыми мы будем пользоваться.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция n переменных. Оператор разностного дифференцирования δ_1 переводит эту функцию в следующую функцию $n+1$ переменного:

$$\delta_1 f(x'_1, x'_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x'_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x'_1 - x_1};$$

при этом первый аргумент «раздваивается». Оператор δ_j разностного дифференцирования по j -му аргументу определяется аналогично. При повторных применениях оператора δ_j он действует по любому из «размножившейся» при предыдущих разностных дифференцированиях группы j -х аргументов (предоставляем читателю убедиться, что результат не будет зависеть от выбора одного из j -х аргументов).

Примеры. Если f — функция одной переменной x , то

$$\delta f(x', x'') = \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''},$$

$$\begin{aligned} \delta^2 f(x', x'', x''') &= \frac{f(x')}{(x' - x'')(x' - x''')} + \frac{f(x'')}{(x'' - x')(x'' - x''')} + \\ &+ \frac{f(x''')}{(x''' - x')(x''' - x'')}; \end{aligned}$$

если $f(x, y)$ — функция двух переменных, то

$$\delta_1 \delta_2 f(x', x'', y', y'') = \frac{f(x', y') - f(x', y'') + f(x'', y') - f(x'', y'')}{(x'' - x')(y'' - y')}.$$

Мы будем вместо δ_1, δ_2 использовать и обозначения $\delta/\delta x, \delta/\delta y$.

Теорема 4.3. Справедлива следующая формула изменения порядка аргументов:

$$[f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})] - [f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B})] \sim [A, \overset{3}{B}] \delta_1 \delta_2 f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{2}{B}, \overset{2}{B}),$$

где $[A, \overset{3}{B}] = [AB - BA]$ — коммутатор операторов A и B . $\delta_1 \delta_2 f$ — смешанная вторая разностная производная функции f .

Доказательство. Из свойств μ -операции получаем:

$$\begin{aligned} [AB - BA] \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) + f(\overset{2}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B})}{(\overset{1}{A} - \overset{2}{A})(\overset{2}{B} - \overset{4}{B})} &\sim \\ \sim (\overset{1}{A}\overset{2}{B} - \overset{4}{A}\overset{2}{B}) \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) + f(\overset{2}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B})}{(\overset{1}{A} - \overset{2}{A})(\overset{2}{B} - \overset{4}{B})} &\sim \\ \sim \overset{1}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} - \overset{4}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{4}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} &\sim \\ \sim \overset{1}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} - \overset{4}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} &\sim \\ \sim \frac{\overset{1}{A} - \overset{4}{A}}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} [f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B})] &\sim [f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B})] - [f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]. \end{aligned}$$

Замечание. Аналогичные формулы имеют место в случае перестановки порядка действия двух операторов при наличии других операторных аргументов. Например:

$$f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}) - f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}, \overset{3}{C}) \sim [B, \overset{3}{A}] \delta_1 \delta_2 f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{2}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}).$$

Теорема 4.4. Справедлива формула

$$\begin{aligned} [f(A + B\overset{1}{C})] &\sim [f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}\overset{1}{C})] + \\ &+ [\overset{1}{C} [A, \overset{4}{B}] \delta^2 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}\overset{1}{C}, [A + B\overset{1}{C}], [\overset{1}{A} + B\overset{1}{C}])]. \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что

$$f(A + B) \sim [f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})] + [[A, \overset{3}{B}] \delta^2 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, A + B, A + B)].$$

Имеем соотношение $f(z) \sim f(x + y) + (z - x - y) \delta f(x + y, z)$. Подставляя вместо x, y, z соответственно операторы $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, A + B$, получаем:

$$f(A + B) \sim [f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B})] + [(A + B - \overset{1}{A} - \overset{2}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, A + B)].$$

Используя теперь теорему 4.3 и замечание, получаем

$$\begin{aligned} f(A+B) &\sim \llbracket f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket + \llbracket (\overset{1}{A} + \overset{2}{B} - \overset{3}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket - \\ &\quad - \llbracket \overset{1}{A} \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket \sim \llbracket f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket + \\ &\quad + \llbracket (\overset{1}{A} + \overset{2}{B} - \overset{3}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket - \llbracket \overset{1}{A} \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket + \\ &\quad + \llbracket [A, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}] \delta^2 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что для функции

$$g(x, y, z, v) = x \delta f(z+v, y) = x \frac{f(z+v) - f(y)}{z+v-y}$$

смешанная разностная производная по первым двум аргументам равна

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 g(x_1, x_2; y_1, y_2; z, v) &= \\ &= \frac{\left[\frac{f(z+v) - f(y_1)}{z+v-y_1} - \frac{f(z+v) - f(y_2)}{z+v-y_1} \right] (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} = \delta^2 f(y_1, y_2, z+v). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $[A, A+B] \sim [A, B]$ и что

$$\begin{aligned} &\llbracket (\overset{1}{A} + \overset{2}{B} - \overset{3}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket - \llbracket \overset{1}{A} \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \rrbracket = \\ &= (\overset{1}{A} + \overset{2}{B} - \overset{3}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) - \overset{1}{A} \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) = \\ &= (\overset{1}{A} + \overset{2}{B} - \overset{1}{A} - \overset{3}{B}) \delta f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}) \sim 0 \end{aligned}$$

в силу теоремы 4.2 (точнее, очевидного ее обобщения). Теорема доказана. Полезно доказать следствие.

Следствие. *Справедливо разложение:*

$$f(A+B) = f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + \frac{1}{2} [A, \overset{2}{B}] f'(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + R_2 \quad (4.5)$$

где остаток R_2 задается формулой:

$$\begin{aligned} R_2 &= [A, \overset{2}{B}] \delta^2 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}) + \\ &\quad + [[A, B], \overset{2}{B}] \delta^2 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}) + \\ &\quad + [A, \overset{2}{B}] [A, \overset{2}{B}] \delta^4 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}) + \\ &\quad + [A, \overset{2}{B}] [A, \overset{2}{B}] \delta^4 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}) + \\ &\quad + [A, \overset{2}{B}] [A, \overset{2}{B}] \delta^4 f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{1}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}, \overset{2}{A} + \overset{2}{B}). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Нетрудно выписать следующий член разложения (4.5):

$$f(A+B) = f(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + \frac{1}{2} [A, \overset{2}{B}] f'(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + \\ + \frac{1}{6} ([A, \overset{2}{B}] [A, \overset{2}{B}] + [[A, \overset{2}{B}], \overset{2}{B}]) f''(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + \\ + \frac{1}{8} [A, \overset{2}{B}]^2 f^{(4)}(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}) + R_3, \quad (4.7)$$

где остаток R_3 выражается через коммутаторы третьего порядка аналогично (4.6).

Теорема 4.5. *Справедлива формула*

$$f(\overset{0}{C}, A + \overset{1}{B}) = f(\overset{0}{C}, \overset{1}{A}) + \overset{2}{B} \frac{\delta f}{\delta x_3}(\overset{0}{C}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}) + \\ + \overset{2}{B} \overset{1}{B} \frac{\delta^2 f}{\delta x_3^2}(\overset{0}{C}, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, A + \overset{5}{B}).$$

Доказательство. Имеем тождество

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1, x_2, y_3) + (x_3 - y_3) \frac{\delta \Phi}{\delta x_3}(x_1, x_2; x_3, y_3).$$

Сделаем подстановку $x_1 \rightarrow \overset{0}{C}_1$, $x_2 \rightarrow \overset{1}{C}_2$, $x_3 \rightarrow A + \overset{5}{B}$, $y_3 \rightarrow \overset{2}{A}$. Тогда для любого $T \in \text{Op}$ имеем

$$\overset{2}{T} \Phi(\overset{0}{C}_1, \overset{1}{C}_2, A + \overset{5}{B}) = \\ = \overset{2}{T} \Phi(\overset{0}{C}_1, \overset{1}{C}_2, \overset{2}{A}) + \overset{2}{T} \frac{\delta \Phi}{\delta x_3}(\overset{0}{C}_1, \overset{1}{C}_2; \overset{2}{A}, A + \overset{5}{B})(A + \overset{5}{B} - \overset{2}{A}) = \\ = \overset{2}{T} \Phi(\overset{0}{C}_1, \overset{1}{C}_2, \overset{2}{A}) + \overset{2}{T} \overset{1}{B} \frac{\delta \Phi}{\delta x_3}(\overset{0}{C}_1, \overset{1}{C}_2; \overset{2}{A}, A + \overset{5}{B}). \quad (4.8)$$

Отсюда, в частности, когда Φ не зависит от второго аргумента, а функция $\Phi(x_1, y_2, x_2)$ эквивалентна $f(x_1, x_2)$ и $C_1 \sim C$, $T \sim 1$, имеем:

$$f(\overset{2}{C}, A + \overset{1}{B}) = f(\overset{2}{C}, \overset{1}{A}) + \overset{2}{B} \frac{\delta f}{\delta x_2}(\overset{2}{C}; \overset{1}{A}, A + \overset{5}{B}).$$

К последнему слагаемому снова применяем формулу (4.8) в случае

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_1, x_2, x_3), \quad T \sim B, \quad C_1 \sim C, \quad C_2 \sim A.$$

Тогда из (4.8) сразу следует искомое разложение. Теорема доказана.

§ 5. Спектр пары упорядоченных операторов

Вначале остановимся на спектре матриц. Пусть A — некоторая матрица. Обозначим через K множество всех полиномов P с коэффициентами в S таких, что $P(A) = 0$ (нуль здесь означает нулевую матрицу).

Определение. Спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ матрицы A назовем пересечение множеств нулей полиномов, принадлежащих K : $(z \in \sigma) \Leftrightarrow (P(z) = 0 \text{ для любого } P \in K)$.

Пусть $k_P(\lambda)$ — кратность нуля полинома $P(z) \in K$ в точке $\lambda \in \sigma(A)$. Кратностью точки спектра λ будем называть $\inf_{P \in K} k_P(\lambda)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — собственные значения матрицы A , а $k_1, k_2, \dots, k_s$ — длины цепочек соответствующих им присоединенных векторов. Из линейной алгебры известно, что для полинома

$$Q(z) = \prod_{i=1}^s (z - \lambda_i)^{k_i}$$

имеет место соотношение $Q(A) = 0$. Отсюда можно заключить, что спектр матрицы совпадает со множеством ее собственных значений, а кратности точек λ_j равны k_j . Положим для простоты $s = 3$. Для любого полинома $P(z)$ имеем

$$P(z) = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(\lambda_1) (z - \lambda_1)^i + (z - \lambda_1)^{k_1} P_1(z),$$

где $P_1(z)$ — некоторый полином, коэффициенты которого зависят от λ_1 . Аналогично,

$$P_1(z) = \sum_{i=0}^{k_2-1} \frac{1}{i!} P_1^{(i)}(\lambda_2) (z - \lambda_2)^i + (z - \lambda_2)^{k_2} P_2(z),$$

$$P_2(z) = \sum_{i=0}^{k_3-1} \frac{1}{i!} P_2^{(i)}(\lambda_3) (z - \lambda_3)^i + (z - \lambda_3)^{k_3} P_3(z),$$

где $P_2(z)$ и $P_3(z)$ — некоторые полиномы; коэффициенты P_2 зависят от λ_1 и λ_2 ; тогда учитывая, что $(A - \lambda_1)^{k_1} (A - \lambda_2)^{k_2} (A - \lambda_3)^{k_3} = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{1}{i!} P^{(i)}(\lambda_1) (A - \lambda_1)^i + \\ &+ (A - \lambda_1)^{k_1} \sum_{i=0}^{k_2-1} \frac{1}{i!} P_1^{(i)}(\lambda_2) (A - \lambda_2)^i + \\ &+ (A - \lambda_1)^{k_1} (A - \lambda_2)^{k_2} \sum_{i=0}^{k_3-1} \frac{1}{i!} P_2^{(i)}(\lambda_3) (A - \lambda_3)^i. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Мы получили, что $P(A)$ равен полиному порядка $k_1 + k_2 + k_3 - 1$ и что матрица $P(A)$ зависит только от значений полинома и конечного числа его производных в точках спектра. Формулу (5.1) мы будем называть *спектральным разложением оператора $P(A)$*

Пусть A и B — некоторые элементы алгебры (операторов). Рассмотрим множество K полиномов $P(z_1, z_2)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$, таких, что $P(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) = 0$.

Обобщим приведенное определение спектра и спектрального разложения на случай упорядоченных наборов операторов. Мы ограничимся здесь спектром пары операторов $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$.

Определение. Спектром $\sigma(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \subset \mathbb{C}^2$ упорядоченной пары $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$ будем называть пересечение множеств всех нулей полиномов из K : $(z_1, z_2 \in \sigma(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \Leftrightarrow (P(z_1, z_2) = 0)$ для любого $P(z_1, z_2) \in K$.

Отметим, что в силу теоремы 4.2, если $Q(z_1, z_2) \in K$, то и $Q(z_1, z_2)P(z_1, z_2) \in K$, где $P(z_1, z_2)$ — любой полином.

Пусть A, B, C — некоторые элементы алгебры (операторов). Рассмотрим множество $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$ полиномов $P(z_1, z_2)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ таких, что

$$\overset{1}{C}P(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) = 0.$$

Определение. Спектром $\sigma_C(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \subset \mathbb{C}^2$ пары $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$ относительно $\overset{1}{C}$ будем называть пересечение множеств нулей полиномов из $\mathfrak{S}(z_1, z_2)$:

$$(z_1, z_2 \in \sigma_C(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \Leftrightarrow (P(z_1, z_2) = 0)$$

для любых $P(z_1, z_2) \in \mathfrak{S}(z_1, z_2)$.

Отметим, что если $Q(z_1, z_2) \in \mathfrak{S}(z_1, z_2)$, то и $Q(z_1, z_2)P(z_1, z_2) \in \mathfrak{S}(z_1, z_2)$, где $P(z_1, z_2)$ — любой полином.

Мы рассмотрим теперь важный пример спектрального разложения функции вида $\overset{1}{C}f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})$. Для этого обратимся к формуле (4.3) коммутации гамильтониана с экспонентой. Положим в этой формуле $X = x$, $P = -i\partial/\partial x$; $S(X, P) = S(x)$; $g(X, P) = g(x)$. Тогда в правой части получим выражение

$$e^{iS(x)} f(\overset{1}{x}, \overset{2}{P} + \partial S/\partial x) g(\overset{2}{x}) = e^{iS(x)} [f(\overset{2}{x}, \overset{1}{P} + \partial S/\partial x)] g(x).$$

В силу теоремы 4.5 мы получаем

$$\begin{aligned} f(\overset{2}{x}, \overset{1}{P} + \partial S/\partial x) g(x) = \\ = f(x, \partial S/\partial x) g(x) + \overset{1}{P} \frac{f(\overset{1}{x}, \partial \overset{1}{S}/\partial x) - f(\overset{1}{x}, \partial \overset{2}{S}/\partial x)}{\partial \overset{1}{S}/\partial x - \partial \overset{2}{S}/\partial x} g(x) + \\ + \overset{2}{P} \overset{1}{P} (\delta^2 f / \delta p^2)(\overset{2}{x}; \partial \overset{1}{S}/\partial x, \partial \overset{2}{S}/\partial x, \overset{1}{P} + \partial S/\partial x) g(x). \end{aligned}$$

Вычислим средний член правой части равенства. Для этого воспользуемся очевидным равенством:

$$i \frac{\partial}{\partial x} (\overset{1}{x} - \overset{2}{x})^2 \varphi(x) = i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} x^2 \varphi(x) - 2x \frac{\partial}{\partial x} x \varphi(x) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right\} = 0.$$

Следовательно, спектр $(\overset{1}{x}, \overset{2}{x})$ относительно $i\hbar\partial/\partial x$ в R^2 лежит на биссектрисе координатного угла. В силу теоремы 4.2 имеем

$$i \frac{\partial}{\partial x} (\overset{1}{x} - \overset{2}{x})^n = 0 \text{ при } n \geq 2.$$

Отсюда следует, что для конечного ряда $P(x, y)$ имеет место *спектральное разложение*:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} P(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}) &\sim i P(\overset{2}{x}, \overset{2}{x}) \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial x} P'_x(\overset{2}{x}, \overset{2}{x}) (\overset{1}{x} - \overset{2}{x}) \sim \\ &\sim i P(x, x) \frac{\partial}{\partial x} - i \left[P'_x(x, x) x \frac{\partial}{\partial x} - P'_x(x, x) \frac{\partial}{\partial x} x \right] \sim \\ &\sim i P(x, x) \frac{\partial}{\partial x} + i P'_x(x, x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} f(\overset{1}{x}, \frac{\partial \overset{1}{S}}{\partial x}) - f(\overset{1}{x}, \frac{\partial \overset{2}{S}}{\partial x}) \varphi(x) &\sim \\ &\sim -i \left[\frac{\partial f}{\partial p} \Big|_p = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Big|_p = \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] \varphi(x). \end{aligned}$$

Оператор P , такой, что

$$P \varphi = \frac{\partial f}{\partial p} \Big|_p = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \Big|_p = \frac{\partial S}{\partial x} \varphi,$$

называется оператором переноса (для гамильтониана $f(p, x)$ и данного $S(x)$).

Отметим, что в спектральных разложениях мы пользуемся не только одним понятием спектра. Нам важно знать также число членов разложения в ряд Тейлора, которым можно ограничиться. Это число в случае матрицы было связано с понятием кратности спектра. В приведенном примере естественно считать кратность спектра, расположенного на биссектрисе координатного угла, равной двум. В общем случае вопрос о кратности спектра (т. е. вопрос о числе членов разложения в ряд Тейлора) является весьма сложным. В главах III и IV он сводится к изучению свойств промежуточного банахова пространства B_{mid} , но это уже относится к сфере гармонического анализа, где этот вопрос в значительной степени продвинуто.

Для того, чтобы было направление исследования свойств операторов в главах III и IV, мы проведем некоторые аналогии между приведенным примером и спектральным разложением матриц.

1. Функции, на которые «действует» оператор $\overset{1}{x}$, должны быть дифференцируемы, так как вторым действует оператор $i\hbar\partial/\partial x$. В пространстве дифференцируемых функций оператор умножения на e^{ixt} «растет» как первая степень t , т. к.

$$\left| \frac{d}{dx} (e^{ixt} g(x)) \right| + |e^{ixt} g(x)| \leq (1 + |t|) \max(|g'| + |g|).$$

2. Матрица A , у которой максимальная длина цепочки присоединенных элементов равна 1, удовлетворяет условию

$$|e^{At} g| \leq (1 + |t|) |g|,$$

где g — вектор, $|g|$ — его модуль.

3. Отрезок ряда Тейлора в спектральном разложении сходящегося ряда в обоих случаях состоит из двух членов. Мы увидим в главе IV, что между оценкой роста оператора e^{tA} и числом членов в спектральном разложении существует глубокая связь.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем будет важно для аналогии иметь в виду еще следующие свойства матриц.

1) Всякая матрица A может быть представлена в виде суммы

$$A = A_1 + iA_2, \quad (5.2)$$

где A_1 коммутирует с A_2 , A_2 — эрмитова матрица, а A_1 имеет действительный спектр.

2) Спектр матрицы может быть определен следующим образом. Пусть K — множество таких полиномов $P(x, y)$, что $P(A_1, A_2) = 0$. Спектром $\sigma(A)$ матрицы A назовем пересечение множеств нулей полиномов из K : $x, y \in \sigma(A) \Leftrightarrow P(x, y) = 0$ для любых $P(x, y) \in K$. Собственные значения A в этом случае будут равны $x + iy$, где $x, y \in \sigma(A)$.

Эта интерпретация спектра матрицы показывает, что можно рассматривать лишь действительные корни полиномов от двух переменных. Правда, для разложения вида (5.2) по существу уже требуется «спектральное разложение», однако поскольку наша задача состоит не в исследовании спектра одного оператора, а в исследовании нескольких некоммутирующих операторов, то мы будем помнить, что (по крайней мере в случае матриц) каждый из операторов можно представить как функцию двух коммутирующих операторов с действительным спектром. Более подробно класс таких операторов будет изучен в главе III.

§ 6. Алгебры с μ -структурами

Развитого исчисления нам еще недостаточно, чтобы применить его к решению дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Теперь мы можем ввести аксиоматически те алгебраические объекты, которые возникают при изучении правил обращения со сходящимися рядами от упорядоченных операторов.

Мы введем вначале аксиомы для наиболее простого случая, а затем приведем более сложные формулировки аксиом μ_4 и μ_6 . Мы выведем из них ряд теорем, и затем в § 7 продемонстрируем на совсем простом примере, как они работают.

Далее в § 8 мы подробнейшим образом разберем классическую задачу о выводе волнового уравнения и продемонстрируем на этом примере силу операторного метода и его адекватность математическим и физическим явлениям, которые имеют место при переходе системы уравнений колебаний решетки в волновое уравнение.

Для того, чтобы построить аналог исчисления для сходящихся степенных рядов, нам удобно будет стать на аксиоматическую точку зрения, постулировав ключевые моменты исчисления, доказав с их помощью основные формулы, а затем проверить эти постулаты для конкретных операторов, которые нам понадобятся для решения дифференциальных уравнений. Такое абстрагирование весьма полезно и для выработки навыков обращения

с упорядоченными операторами. Мы будем пользоваться основными элементарными понятиями алгебраических структур.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная, вообще говоря, некоммутативная алгебра с единицей над полем R . Элементы алгебры $\mathcal{A}$ будем называть *операторами*.

Обозначим через $\mathcal{S}^\infty$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in R^k$ (k не фиксировано), растущих на бесконечности вместе со всеми своими производными не быстрее $|x|^l$ (число l — свое для каждой функции f). Функции из $\mathcal{S}^\infty$ будем называть *символами*; символ, зависящий от k переменных, будем называть *k -местным*.

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ наделена μ -структурой, если для любого конечного набора $A_1, \dots, A_k$ операторов из некоторого множества $M \subset \mathcal{A}$ и любого набора номеров $n_1, \dots, n_k$ (удовлетворяющего условию $n_i \neq n_j$, если операторы A_i и A_j не коммутируют), определена операция

$$\mu: (x_1 \rightarrow A_1, \dots, x_k \rightarrow A_k),$$

которая ставит в соответствие каждому символу $f(x_1, \dots, x_k)$ оператор $A \in \mathcal{A}$, обозначаемый

$$A = [f(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k})^*],$$

и которая удовлетворяет следующим аксиомам:

μ_1) Аксиома однородности: если $\alpha \in R$, то

$$[\alpha f(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k})] = \alpha [f(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k})];$$

в частности, если $f(x_1, \dots, x_k) = 0$, то

$$[f(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k})] = 0.$$

μ_2) Аксиома раздвигания индексов: пусть $n_1, \dots, n_k$ и $m_1, \dots, m_k$ — такие два семейства номеров, что, при $i \neq j$, $(n_i < n_j) \Rightarrow (m_i < m_j)$; тогда

$$[f(A_1^{n_1}, \dots, A_k^{n_k})] = [f(A_1^{m_1}, \dots, A_k^{m_k})],$$

причем, если $n_i = n_j$ и $A_i = A_j = A$, то

$$[f(A_1^{n_1}, \dots, A_i^{n_i}, \dots, A_j^{n_j}, \dots, A_k^{n_k})] = [g(A_1^{n_1}, \dots, A_i^{n_i}, \dots, A_k^{n_k})],$$

где

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) = [f(x_1, x_2, \dots, x_k)]_{x_i = x_j}.$$

*) Скобки $[\]$ мы будем опускать там, где это не приводит к путанице.

Пример. Пусть $A, B \in M$. Тогда

$$4 \sin \overset{1}{A} \cos \overset{2}{A} \sin \overset{3}{B} \cos \overset{4}{B} = \sin 2\overset{1}{A} \sin 2\overset{3}{B}.$$

μ_3) Аксиома соответствия: символ, тождественно равный 1, μ -операция переводит в единичный оператор, а $[\overset{1}{A}] = A$.

μ_4) Аксиома суммы: если $n_i \neq m_j$ ни при каких i, j , то

$$\begin{aligned} [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) + g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})] = \\ = [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k})] + [g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})], \quad B_i \in M. \end{aligned}$$

μ_5) Аксиома произведения: если $m_i < n_j$ для любых i, j , то

$$\begin{aligned} [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})] = \\ = [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k})] [g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})]. \end{aligned}$$

Пример. В предыдущем примере

$$\sin 2\overset{1}{A} \sin 2\overset{3}{B} = [\sin 2B][\sin 2A].$$

μ_6) Аксиома нуля: если

$$[f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k})] = 0$$

и $p_1, \dots, p_l, r_1, \dots, r_m$ — такие номера, что $p_i < n_j, r_i > n_j$ для любых i, j , то для любого символа $g(x_1, \dots, x_{l+m})$ и любых операторов $B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m, C_i \in M$,

$$[f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) g(\overset{p_1}{B_1}, \dots, \overset{p_l}{B_l}, \overset{r_1}{C_1}, \dots, \overset{r_m}{C_m})] = 0.$$

Из приведенных аксиом следует, что аксиома суммы на самом деле выполняется для любых n_i и m_j . Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1 (первая теорема о сумме). Для любых n_i и m_j имеет место соотношение

$$\begin{aligned} [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) + g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})] = \\ = [f(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k})] + [g(\overset{m_1}{B_1}, \dots, \overset{m_l}{B_l})]. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть для определенности $n_s \leq m_s \leq n_{s+1} \leq m_{s+1} + 1$ при любых s . (Заметим, что если $n_s = m_s$, то по определению μ -структуры это означает, что B_s и A_s коммутируют.)

Рассмотрим «сумму»

$$[f(A_1, \dots, A_k) + g(B_1, \dots, B_l)] \quad (6.1)$$

По аксиоме о раздвигании эта сумма равна сумме

$$[f(A_1, \dots, A_k) + g(B_1, \dots, B_l)] \quad (6.2)$$

для любых n_i и m_j , таких, что $m_{i+1} > n_{i+1} > m_i > n_i$. Кроме того, отдельно для каждого члена суммы имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(A_1, \dots, A_k) &= f(A_1, \dots, A_k), \\ g(B_1, \dots, B_l) &= g(B_1, \dots, B_l). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Тогда поскольку $n_i \neq m_j$ ни при каких i и j , то в силу аксиомы о сумме сумма (6.2) равна

$$[f(A_1, \dots, A_k)] + [g(B_1, \dots, B_l)]. \quad (6.4)$$

Отсюда и из (6.3) следует утверждение теоремы.

Теорема 6.2 (вторая теорема о сумме).

$$\begin{aligned} &[(A_i + B_i) f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)] = \\ &= [A_i f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)] + \\ &+ [B_i f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)]. \end{aligned}$$

(Здесь $A_i + B_i \stackrel{\text{def}}{=} [A_i + B_i]$.)

Доказательство. В силу μ_2 без ограничения общности можем считать, что $|n_j - n_i| > 2$ при $j \neq i$. Тогда

$$\begin{aligned} &[(A_i + B_i) f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)] - \\ &- [A_i f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)] - \\ &- [B_i f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)] = \\ &= [(A_i + B_i - A_i - B_i) f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k)]. \end{aligned}$$

Используя аксиому суммы, а затем аксиомы раздвигания и соответствия, получаем:

$$\begin{aligned} &[(A_i + B_i) - A_i - B_i] = [A_i + B_i] - [A_i] - [B_i] = \\ &= [A_i + B_i] - [A_i] - [B_i] = A_i + B_i - A_i - B_i = 0. \end{aligned}$$

Применяем аксиому нуля, и теорема доказана.

Теорема 6.3 (теорема о произведении). Пусть $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_l, r_1, \dots, r_m$ — такие номера, что $p_i < n_j, r_i > n_j$ для любых i, j , и пусть $\llbracket f(A_1, \dots, A_k) \rrbracket = F$. Тогда для любого сим-вола $g(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \llbracket f(A_1, \dots, A_k) g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket = \\ = \llbracket F g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно μ_2 мы можем без ограничения общности считать, что существует номер n , отличный от $n_1, \dots, n_k$ и удовлетворяющий условию $p_i < n < r_j$ для любых i, j . Тогда на основании μ_1 и теоремы 6.1 имеем:

$$\begin{aligned} \llbracket f(A_1, \dots, A_k) g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket - \\ - \llbracket F g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket = \\ = \llbracket (f(A_1, \dots, A_k) - F) g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно сослаться на μ_6 .

Теорема 6.4 (формула перестановки индексов).

$$\begin{aligned} \llbracket f(A_1, A_2) \rrbracket - \llbracket f(A_2, A_1) \rrbracket = \\ = \llbracket [A_2, A_1] \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} (A_1, A_1, A_2, A_2) \rrbracket. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Эта теорема имеет место, разумеется, и в случае, когда f зависит еще от упорядоченных операторов $B_1, B_2, \dots, B_N$; отвечающие им переменные просто «замораживаются». После подстановки $B_1, \dots, B_N$ в (6.5) необходимо в правой части формулы (6.5) раздвинуть индексы. Стало быть, в общем случае теорема формулируется следующим образом.

Теорема 6.5 (формула замены индексов). Если $n_i = n_j - 1$ и $|n_l - n_i| > 2$ при $l \neq i, j$, то имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \llbracket f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, \dots, A_j, A_{j+1}, \dots, A_k) \rrbracket - \\ - \llbracket f(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_k) \rrbracket = \\ = \llbracket [A_j, A_i] \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_i, \dots, A_{j-1}, A_j, A_j, A_{j+1}, \dots, A_k) \rrbracket, \end{aligned}$$

где $[A_j, A_i] = A_j A_i - A_i A_j$ — коммутатор операторов A_j и A_i .

Доказательство теоремы 6.4. Пусть $A_1 = A, A_2 = B$. Нужно доказать тождество

$$\llbracket f(A, B) \rrbracket - \llbracket f(B, A) \rrbracket = \llbracket [A, B] \frac{f(A, B) - f(B, A) + f(A, B) - f(B, A)}{(A - B)(B - A)} \rrbracket.$$

Пользуясь аксиомами μ_1 , μ_2 , μ_4 и теоремой 6.3, преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} & \llbracket (\overset{A}{A}\overset{B}{B} - \overset{A}{B}\overset{A}{A}) \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B}) + f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{B}, \overset{B}{B})}{(\overset{A}{A} - \overset{A}{A})(\overset{B}{B} - \overset{A}{B})} \rrbracket = \\ & = \llbracket \overset{A}{A} \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B}) + f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{B}, \overset{B}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket = \llbracket \overset{A}{A} \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket + \\ & + \llbracket \overset{A}{A} \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{B}, \overset{B}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket = \llbracket \overset{A}{A} \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket + \\ & + \llbracket \overset{A}{A} \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{B}, \overset{B}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket = \llbracket (\overset{A}{A} - \overset{A}{A}) \frac{f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) - f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B})}{\overset{A}{A} - \overset{A}{A}} \rrbracket = \\ & = \llbracket -f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) + f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B}) \rrbracket = \llbracket f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) \rrbracket - \llbracket f(\overset{A}{A}, \overset{A}{B}) \rrbracket. \end{aligned}$$

Теорема доказана. На общий случай это доказательство переносится без изменений.

Мы приведем формулу для сложной функции.

Теорема 6.6 (*K-формула*). Пусть f — одноместный символ, g — двуместный символ, A, B — такие операторы из M , что $[A, B] \in M$ и $\llbracket g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) \rrbracket \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\llbracket g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) \rrbracket) &= \llbracket f(g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})) \rrbracket + \llbracket [A, B] \frac{\delta g}{\delta x_1}(\overset{A}{A}, \overset{A}{A}; \overset{B}{B}) \times \\ &\times \frac{\delta g}{\delta x_2}(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{B}{B}) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}), \llbracket g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) \rrbracket, \llbracket g(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) \rrbracket) \rrbracket. \quad (6.6) \end{aligned}$$

В отношении этой теоремы справедливо замечание к предыдущей теореме. А именно, в очевидных предположениях справедлива формула:

$$\begin{aligned} & \llbracket f(\overset{1}{C}_1, \overset{2}{C}_2, \dots, \overset{k}{C}_k, \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket, \overset{k+2}{C}_{k+1}, \overset{k+3}{C}_{k+2}, \dots, \overset{s+1}{C}_s) \rrbracket = \\ & = \llbracket f(\overset{1}{C}_1, \overset{2}{C}_2, \dots, \overset{k}{C}_k, g(\overset{k+1}{A}, \overset{k+2}{B}), \overset{k+3}{C}_{k+1}, \dots, \overset{s+2}{C}_s) \rrbracket + \\ & + \llbracket [A, B] \frac{\delta g}{\delta x_1}(\overset{k+3}{A}, \overset{k+7}{A}, \overset{k+9}{B}) \frac{\delta g}{\delta x_2}(\overset{k+3}{A}, \overset{k+4}{B}, \overset{k+6}{B}) \frac{\delta^2 f}{\delta x_{k+1}^2} \times \\ & \times (\overset{1}{C}_1, \overset{2}{C}_2, \dots, \overset{k}{C}_k, g(\overset{k+1}{A}, \overset{k+9}{B}), \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket, \\ & \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket, \overset{k+8}{C}_{k+1}, \overset{k+10}{C}_{k+2}, \dots, \overset{s+9}{C}_s) \rrbracket. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Формулу (6.7), как и более частную формулу (6.6), также будем называть *K-формулой*.

Доказательство теоремы 6.6. Имеем тождество:

$$f(z) = f(g(x_1, x_2)) + (z - g(x_1, x_2)) \frac{\delta f}{\delta x}(g(x_1, x_2); z).$$

Применяя к обеим частям операцию μ : $(z \rightarrow \overset{B}{g}, x_1 \rightarrow \overset{A}{A}, x_2 \rightarrow \overset{B}{B})$,

где $g = [g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]$, и используя первую теорему о сумме, получаем:

$$[f(g)] = [f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}))] + [(g - g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})].$$

Используя аксиому μ_2) и переставляя индексы у $\overset{1}{A}$ и $\overset{2}{g}$ по теореме 6.5, получаем далее:

$$\begin{aligned} [f(g)] &= [f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}))] + [(g - g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})] = \\ &= [f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}))] + [g \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}}) - g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})] + \\ &\quad + [[A, \overset{4}{g}] \frac{\delta g}{\delta x_1}(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{B}) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}}, g^{\overset{4}{a}})]. \end{aligned}$$

Согласно μ_2) и теореме 6.3,

$$[g \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})] = [g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})].$$

Используя эту формулу и еще раз применяя теоремы 6.3 и 6.5, получаем:

$$\begin{aligned} [f(g)] &= [f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}))] + [(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \frac{\delta f}{\delta x}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}})] + \\ &\quad + [[A, \overset{5}{B}] \frac{\delta g}{\delta x_1}(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{B}) \frac{\delta g}{\delta x_2}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B}) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), g^{\overset{3}{a}}, g^{\overset{4}{a}})]. \end{aligned}$$

Так как $g(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) = 0$, то для завершения доказательства остается сослаться на аксиому μ_1).

Теорема 6.7 (разложение в ряд Ньютона). Пусть $A, (A+B), B \in M$, f — одноместный символ. Тогда

$$\begin{aligned} [f(A+B)] &= [f(A)] + \sum_{k=1}^{m-1} [B \dots B \frac{\delta^k f}{\delta x^k}(\overset{1}{A}, \dots, \overset{2k+1}{A})] + \\ &\quad + [B \dots B \frac{\delta^m f}{\delta x^m}(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \dots, \overset{2m-1}{A}, \overset{2m+1}{A+B})]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Замечание к предыдущим двум теоремам относится и к этой теореме. На этот раз мы не будем приводить общей формулировки, предоставим это читателю.

Доказательство. Прежде всего получим формулу

$$\begin{aligned} [T_1 \dots T_r \varphi(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2r-1}{A_r}, \overset{2r+1}{A+B})] &= \\ &= [T_1 \dots T_r \varphi(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2r-1}{A_r}, \overset{2r+1}{A})] + \\ &\quad + [T_1 \dots T_r \varphi \frac{\delta \varphi}{\delta x_{r+1}}(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2r-1}{A_r}, \overset{2r+1}{A}, \overset{2r+3}{A+B})], \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $B, A_1, \dots, A_r, A, A+B, T_1, \dots, T_r \in M$, φ — $(r+1)$ -местный символ.

Для простоты опустим $T_1, \dots, T_r; A_1, \dots, A_r$, т. е. докажем, что

$$[f(A+B)] - [f(A)] = [B \frac{\delta f}{\delta x}(A, A+B)]. \quad (6.10)$$

Вывод общей формулы (6.9) отличается от вывода формулы (6.10) только более громоздкими выкладками.

Имеем тождество

$$f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) \frac{\delta f}{\delta x}(x_2, x_1) = 0.$$

Применим операцию $\mu: (x_2 \rightarrow A+B, x_1 \rightarrow A)$; в силу аксиомы μ_1 получим:

$$[f(A+B) - f(A) - (A+B - A) \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A)] = 0.$$

Согласно аксиомам μ_1, μ_2 и теореме 6.2, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} [f(A+B)] - [f(A)] &= \\ &= [(A+B) \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A) - A \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A)] = \\ &= [(A+B) \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A)] - [A \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A)]. \end{aligned}$$

Используя еще раз теорему 6.2, приходим к равенству

$$[f(A+B)] - [f(A)] = [B \frac{\delta f}{\delta x}(A+B, A)].$$

Формула (6.9) доказана. Теперь, применяя последовательно формулу (6.9) к последнему члену в правой части (6.8), по индукции получим искомое разложение.

Теорема доказана.

Перейдем к определению спектра для пар операторов в алгебре с μ -структурой, аналогично тому, как мы это делали для случая сходящихся степенных рядов от упорядоченных операторов.

Определение. Пусть $A, B \in M$. Обозначим через K множество всех символов $f(x_1, x_2)$, которые операция $\mu: (x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow B)$ переводит в 0:

$$(f(x_1, x_2) \in K) \Leftrightarrow ([f(A, B)] = 0).$$

Спектром σ пары A, B будем называть пересечение множеств нулей всех функций из K :

$$((x_1, x_2) \in \sigma) \Leftrightarrow (f(x_1, x_2) = 0 \text{ для любого } f \in K).$$

Теорема 6.8. Множество K является идеалом в алгебре двуместных символов.

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2) \in K$; докажем, что $g(x_1, x_2)f(x_1, x_2) \in K$ для любого $g \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Нам надо дока-

зять, таким образом, что если $\llbracket f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = 0$, то и $\llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \times f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = 0$. В силу аксиомы раздвигания индексов

$$\llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{1}{B}) f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket, \quad (6.11)$$

причем, поскольку в силу этой же аксиомы $\llbracket f(\overset{2}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = \llbracket f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = 0$, то в силу аксиомы нуля правая часть равенства (6.11) обращается в нуль. Теорема доказана.

Из этого фундаментального факта можно вывести ряд (стандартных) следствий. Мы остановимся на двух наиболее важных следствиях. Предварительно рассмотрим следующее усиление аксиомы μ_4 .

μ'_4 Если $\{f_j(x_1, \dots, x_k)\}$ — такая последовательность символов, что в окрестности любой фиксированной точки $(x_1^0, \dots, x_k^0)$ лишь конечное число членов ряда $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x_1, \dots, x_k)$ отлично от нуля и что среди операторов $\llbracket f_j(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) \rrbracket$ имеется лишь конечное число отличных от нулевого, то

$$\llbracket \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) (\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) \rrbracket = \sum_{j=1}^{\infty} \llbracket f_j(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_k}{A_k}) \rrbracket.$$

Теорема 6.9. Если выполнена аксиома μ'_4 , то спектр любой пары операторов из M не пуст.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\sigma = \emptyset$. Тогда для любой фиксированной точки $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ найдется функция $f(x_1, x_2) \in K$, строго положительная в некоторой окрестности U точки (x_1^0, x_2^0) . Любое компактное множество в $\mathbb{R}^2$ можно покрыть конечным числом таких окрестностей; следовательно, существует функция из K , строго положительная на этом множестве. Покроем плоскость $\mathbb{R}^2$ квадратами q_{ij}

$$q_{ij} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -e + i \leq x_1 \leq i + 1 + e, j - e \leq x_2 \leq j + 1 + e\},$$

$i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, e > 0$ — фиксированное число.

Рассмотрим для каждого квадрата q_{ij} функцию $f_{ij}(x_1, x_2) \in K$, строго положительную на q_{ij} . Пусть далее $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — такая бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, что $\varphi(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x < -e/2$ и-при $x > 1 + e/2$. Тогда функция

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i, j=-\infty}^{\infty} f_{ij}(x_1, x_2) \varphi(x_1 - i) \varphi(x_2 - j)$$

всюду положительна и $f_{ij}(x_1, x_2)/f(x_1, x_2) \in K$ в силу теоремы 6.8. Так как $\sum f_{ij}(x_1, x_2)/f(x_1, x_2) = 1$, то в силу μ_3 и μ'_4 имеем

$$0 = \llbracket \sum_{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})} \frac{1}{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})} f_{ij}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = \llbracket 1(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket = 1,$$

где $1(x_1, x_2)$ — функция, тождественно равная 1, и 1 в правой части — единичный оператор. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение. Дополнение к спектру σ будем называть резольвентным множеством пары $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$ и обозначать $\rho(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})$.

Мы приведем теперь критерий, с помощью которого можно определять спектр, используя лишь одномерные (т. е. обычные) функции операторов A и B .

Теорема 6.10. Для того, чтобы точка (λ, μ) принадлежала $\rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные ε и δ и такие финитные функции $p_\lambda^\varepsilon(x_1)$ и $p_\mu^\delta(x_2)$, положительные при $x_1 = \lambda$ и $x_2 = \mu$ и равные нулю при $|x_1 - \lambda| > \varepsilon$, $|x_2 - \mu| > \delta$ соответственно, что $p_\mu^\delta(B) p_\lambda^\varepsilon(A) = 0$.

Доказательство. Достаточность. Из аксиомы μ_5) имеем

$$p_\mu^\delta(B) p_\lambda^\varepsilon(A) = [p_\mu^\delta(\overset{\circ}{B}) p_\lambda^\varepsilon(\overset{\circ}{A})].$$

Значит, по условию, $p_\mu^\delta(x_2) p_\lambda^\varepsilon(x_1) \in K$, и эта функция не обращается в нуль в точке (λ, μ) . Следовательно, по определению спектра, $(\lambda, \mu) \notin \sigma$. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть $(\lambda, \mu) \in \rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$; тогда существует функция $\varphi \in K$, положительная в точке (λ, μ) , а значит, положительная и в некоторой ее $(2\varepsilon, 2\delta)$ -окрестности. Пусть p_λ, p_μ — функции из $\mathcal{S}^\infty(R)$, равные нулю соответственно вне ε -окрестности точки λ и вне δ -окрестности точки μ .

Поскольку $\varphi(A, B) = 0$, то

$$[\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) p_\mu(\overset{\circ}{B}) p_\lambda(\overset{\circ}{A})] = p_\mu(B) [\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})] p_\lambda(A) = 0.$$

Пусть $\psi(x_1, x_2) \in \mathcal{S}^\infty(R^2)$ неотрицательна, равна 0 в (ε, δ) -окрестности (λ, μ) и равна 1 — $\varphi(x_1, x_2)$ вне $(2\varepsilon, 2\delta)$ -окрестности точки (λ, μ) . Очевидно, что

$$[\psi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2)] p_\mu(x_2) p_\lambda(x_1) = \psi(x_1, x_2) p_\mu(x_2) p_\lambda(x_1)$$

и

$$[\psi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2)]^{-1} \in \mathcal{S}^\infty(R^2).$$

Значит,

$$[[\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) + \varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})] p_\mu(\overset{\circ}{B}) p_\lambda(\overset{\circ}{A})] = 0,$$

и, в силу аксиом μ_2), μ_8),

$$[[\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) + \varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})]^{-1} [\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) + \psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})] p_\mu(\overset{\circ}{B}) p_\lambda(\overset{\circ}{A})] = 0,$$

следовательно

$$[p_\mu(\overset{\circ}{B}) p_\lambda(\overset{\circ}{A})] = 0,$$

и, наконец, по аксиоме μ_5), $p_\mu(B) p_\lambda(A) = 0$. Теорема доказана.

Определим теперь аналогичным образом спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$ одного оператора A . Очевидно, что для спектра одного оператора будут иметь место аналогичные теоремы. Из теоремы (6.10) при этом будет непосредственно вытекать следующая теорема.

Теорема 6.11. Имеет место включение

$$\sigma(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) \subset \sigma(A) \times \sigma(B).$$

Более содержательные результаты о спектре будут получены в главах III и IV. Это мы сможем сделать лишь после того, как будет введено понятие нормированной алгебры и изучены ее свойства.

Замечание. Пусть $\mathcal{A}$ — топологическая алгебра и пространство символов также снабжено некоторой топологией, такой, что множество функций от фиксированного числа аргументов $x_1, \dots, x_n$ образует топологическую алгебру. В этом случае можно ввести понятие *топологической алгебры с μ -структурой*. Для этого аксиому μ_6) надо заменить на следующую.

T_1) Для любых $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m \in M$ и номеров $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_l, r_1, \dots, r_m$, удовлетворяющих условиям аксиомы μ_0 , и для любого $(l+m)$ -местного символа g из

$$\llbracket f_n(A_1, \dots, A_k) \rrbracket \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

вытекает

$$\llbracket f_n(A_1, \dots, A_k) g(B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m) \rrbracket \rightarrow 0.$$

Кроме того, нужно добавить аксиому:

T_2) Если последовательность символов $f_n(x_1, \dots, x_n)$ сходится к нулю, то и последовательность

$$\llbracket f_n(A_1, \dots, A_k) \rrbracket \rightarrow 0.$$

Многие теоремы о спектре главы IV могут быть перенесены без труда на случай топологической алгебры с μ -структурой.

Рассмотренная аксиоматика не включает операции «штриха», использованной в § 4. Дадим здесь аксиоматическое построение соответствующей структуры, обобщающей μ -структуру.

Пусть $f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$ — символ. Рассматривая $x_1, \dots, x_k$ как параметры и применяя операцию

$$\mu: (x_{k+i} \rightarrow A_1, \dots, x_{k+l} \rightarrow A_l),$$

получаем оператор

$$\llbracket f(x_1, \dots, x_k, A_1, \dots, A_l) \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_k),$$

зависящий от параметров $x_1, \dots, x_k$, т. е. отображение $R^k \rightarrow \mathcal{A}$.

Для простоты ограничимся случаем $k=1$; очевидное обобщение на случай $k>1$ предоставляем читателю. Пусть $g(x_1, x_2)$ — символ, а A — оператор. Рассмотрим упорядоченную пару $\mathcal{F}(x_1)$ и A . Операция μ обобщается на этот случай. Именно, операция

$$\mu: (x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow \mathcal{F}(x_1))$$

ставит в соответствие функции $g(x_1, x_2)$ некоторый оператор, который мы обозначим через

$$\llbracket g(A, \mathcal{F}(A)) \rrbracket = \llbracket g(A, \llbracket f(A, A_1, \dots, A_l) \rrbracket) \rrbracket.$$

Точно так же, если g — $2k$ -местный символ, то операция

$$\mu: (x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow F(x_1), \dots, x_{2k-1} \rightarrow B, x_{2k} \rightarrow H(x_{2k-1})),$$

где

$$F(x_1) = \llbracket f(x_1, A_1, \dots, A_l) \rrbracket, \dots, G(x_{2k-1}) = \llbracket h(x_{2k-1}, B_1, \dots, B_{n_p}) \rrbracket,$$

ставит в соответствие функции g оператор

$$[g(\overset{1}{A}, \overset{2}{F}(\overset{1}{A}), \dots, \overset{2k-1}{B}, \overset{2k}{G}(\overset{2k-1}{B}))].$$

В предлагаемой ниже системе аксиом для того, чтобы избежать громоздких выражений, аксиомы $\mu_1) - \mu_5)$ сформулированы только для двуместных символов, а в аксиоме $\mu_6)$ символ четырехместен.

На самом деле подразумеваются естественные обобщения этих формулировок на случай произвольных $2k$ -местных символов.

$\mu_1)$ Аксиома однородности: если $\alpha \in \mathbf{R}$, то

$$[\alpha g(\overset{1}{A}, \overset{2}{F}(\overset{1}{A}))] = \alpha [g(\overset{1}{A}, \overset{2}{F}(\overset{1}{A}))].$$

$\mu_2)$ Аксиома раздвигания:

$$[g(\overset{1}{A}, \overset{2}{F}(\overset{1}{A}))] = [g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A}))],$$

где $n_1 > n_2$, если $\overset{2}{F}(x)$ и A не коммутируют, и любые, если $\overset{2}{F}(x)$ и A коммутируют (при любом x).

$\mu_3)$ Аксиома соответствия:

$$[\overset{2}{g}(\overset{1'}{A}, \overset{1'}{f}(\overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_l}{A_l}))] = [g(\overset{1}{A}, \overset{2}{f}(\overset{1'}{A}, \overset{n_1}{A_1}, \dots, \overset{n_l}{A_l}))].$$

$\mu_4)$ Аксиома суммы:

$$[g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A})) + f(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}(\overset{m_1}{B}))] = [g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A}))] + [f(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}(\overset{m_1}{B}))].$$

$\mu_5)$ Аксиома произведения: если $m_i < n_j$ при любых i, j , то

$$[g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A})) f(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}(\overset{m_1}{B}))] = [g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A}))][f(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}(\overset{m_1}{B}))].$$

$\mu_6)$ Аксиома нуля: если $[g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A}))] = 0$, $p_i > n_i$, $r_j < n_j$ ($i, j = 1, 2$), то

$$[f(\overset{p_1}{B}, \overset{p_2}{\Phi}(\overset{p_1}{B}), \overset{r_1}{C}, \overset{r_2}{\Psi}(\overset{r_1}{C})) g(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{F}(\overset{n_1}{A}))] = 0.$$

Пример μ -структуры. Пусть $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ — векторное пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{R}^n$ функций $f(x_1, \dots, x_n)$, равных нулю вне некоторого (для каждой функции — своего) шара в $\mathbf{R}^n$. Пусть D_j и $\hat{x}_j$ — операторы, действующие в $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по формулам:

$$D_j f(x) = -i \partial f(x) / \partial x_j, \quad \hat{x}_j f(x) = x_j f(x).$$

Мы будем обозначать также D_j через $-i \partial / \partial x_j$, а $\hat{x}_j$ — через x_j ; последнее обозначение мы будем применять в тех случаях, когда оператор x_j нельзя спутать с независимой переменной x_j .

Пусть $P(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ — полином. Рассмотрим дифференциальный оператор $P(\overset{2}{x}_1, \dots, \overset{2}{x}_n; \overset{1}{D}_1, \dots, \overset{1}{D}_n)$. Этот оператор легко записать с помощью преобразования Фурье. Преобразование Фурье ставит в соответствие функции $f(x_1, \dots, x_n)$ ее Фурье-образ

$$\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot x} f(x) dx,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p \cdot x = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$. При этом имеет место формула обращения:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} \tilde{f}(p) dp.$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{D_j f(x)} = p_j \tilde{f}(p)$. Отсюда вытекает следующая формула:

$$\begin{aligned} P(\overset{2}{x}_1, \dots, \overset{2}{x}_n, \overset{1}{D}_1, \dots, \overset{1}{D}_n) f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} P(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}) f(x) = \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} P(x, p) dp \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot \xi} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Правая часть формулы (6.15) сохраняет смысл, если вместо полинома подставить любую непрерывную функцию, не очень быстро растущую при $|p| \rightarrow \infty$ (например, не быстрее, чем $|p|$ в некоторой степени). Мы приходим к следующему определению.

Определение. Псевдодифференциальным оператором с символом $H(x, p)$ называется оператор $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{D})$, действующий по формуле *)

$$H(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ip \cdot (x - \xi)} H(x, p) f(\xi) d\xi. \quad (6.16)$$

Аналогично определяется оператор $H(\overset{1}{x}, \overset{2}{D})$:

$$H(\overset{1}{x}, \overset{2}{D}) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ip \cdot (x - \xi)} H(\xi, p) f(\xi) d\xi. \quad (6.17)$$

В множестве операторов вида $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{D})$ вводится структура коммутативной алгебры $\mathcal{A}_{ps}(\overset{2}{x}, \overset{1}{D})$. Таким образом,

$$H(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}) L(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}) f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ip \cdot (x - \xi)} H(x, p) L(x, p) f(\xi) d\xi.$$

*) Эта же формула определяет $H(\overset{2}{x}, \overset{1}{D})$ на обобщенных функциях (см. гл. IV).

Аналогично определяются на $f(x, h) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R})$ операторы $p = ih \partial/\partial x$ и x и порожденная ими некоммутативная алгебра. Возьмем теперь в качестве M множество операторов вида

$$A_k = ih \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S_k}{\partial x}, \quad B_k = x;$$

$k = 1, 2, \dots$, $S_k = S_k(x)$ — некоторый набор функций, принадлежащих $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

З а м е ч а н и е. Вектор-оператор $A_k = ih \partial/\partial x + \partial S_k(x)/\partial x$ имеет компоненты $A_k^j = ih \partial/\partial x_j + \partial S_k/\partial x_j$. Эти компоненты, как нетрудно убедиться, коммутируют между собой, поэтому над вектор-оператором A_k можно ставить один номер.

Определим μ -операцию для $\Phi(x) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $F_{x \rightarrow p} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} h^{-n/2} \tilde{f}(p/h)$; $\mathcal{F}_{p \rightarrow x}^* g(p) \stackrel{\text{def}}{=} h^{-n/2} \tilde{g}(-p/h)$. Для простоты рассмотрим случай двух переменных. Примем по определению, при $n_1 < m_1$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi \left(\begin{smallmatrix} n_1 & m_1 \\ A_1 & B_1 \end{smallmatrix} \right) \varphi(x) = \Phi \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ A_1 & B_1 \end{smallmatrix} \right) \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{i}{h} S_1(x)} \Phi \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ p & x \end{smallmatrix} \right) e^{\frac{i}{h} S_1(x)} \varphi(x).$$

Теперь проверим выполнение аксиом $\mu_1) - \mu_6)$.

Все аксиомы, за исключением второго пункта аксиомы раздвигания, выполняются очевидным образом, как это видно из самого определения. Второй пункт аксиомы раздвигания следует непосредственно из соотношения $F_{p \rightarrow x}^* F_{x \rightarrow p} = 1$. Выполнение $\mu_6)$ см. гл. IV.

Заметим, что формула коммутации гамильтониана с экспонентой теперь получена по определению. Аналогично определяется операция, включающая операцию «штриха».

Приведем еще одно обобщение μ -структур, когда в качестве символов можно брать функции на m -мерном торе M^m (произведении m окружностей). Рассмотрим бесконечно дифференцируемые функции на нем со значениями в пространстве $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Такие функции мы будем обозначать $f(\alpha, x_1, \dots, x_k)$, где $\alpha \in M^m$ — угловые координаты на торе, а $x_1, \dots, x_k$ — вещественные переменные, k зависит от f .

Как и ранее, рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ и ее подмножество M . Кроме того, рассмотрим еще подмножество M_m , состоящее из m коммутирующих между собой элементов множества M ; $B = (B_1, \dots, B_m) \subset M_m$. Для любого конечного набора $A_1 \dots A_k \in M$ операторов и любого набора номеров $n_1, \dots, n_{k+1}$, удовлетворяющих условию $n_i \neq n_j$, если A_i и A_j не коммутируют, и условию $n_i \neq n_{k+1}$, если A_i и $B_s \in M_m$ не коммутируют, определена опе-

рация $\mu(x_1 \rightarrow \overset{n_1}{A}_1, \dots, x_k \rightarrow \overset{n_k}{A}_k, \alpha \rightarrow \overset{n_{k+1}}{B})$, которая ставит в соответствие каждому символу $f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$ оператор $A \in \mathcal{A}$, обозначаемый

$$A = \llbracket f(\overset{n_1}{A}_1, \dots, \overset{n_k}{A}_k, \overset{n_{k+1}}{B}) \rrbracket,$$

и которая удовлетворяет всем прежним аксиомам (как если бы $\alpha \in \mathbb{R}^m$) за исключением аксиомы соответствия, справедливость которой мы потребуем лишь по переменной x и которую дополним зато следующим условием:

μ_3' Для любой вещественной бесконечно дифференцируемой функции $f(\alpha)$, $\alpha \in M^m$ и отвечающей ей периодической функции $f_*(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ выполняется условие

$$\llbracket f(\overset{n_k}{B}) \rrbracket = \llbracket f_*(\overset{1}{B}) \rrbracket.$$

Задача. Рассмотрим алгебру M , порожденную элементами x и p , такими, что $[x, p] = i\hbar$. В качестве символа $f(x_1, \alpha)$ возьмем функцию на окружности радиуса 1 со значениями в $\mathbb{S}^\infty$.

Определить μ -структуру с аксиомой μ_3' , выбрав в качестве множества M_1 оператор x так, чтобы элементы $\mathcal{A}$ были операторами, действующими на функции на $\mathbb{R}$, и выполнялось равенство

$$f(\overset{1}{p}, \overset{2}{x}) \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\hbar, \alpha) e^{in\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} \varphi(y) dy.$$

В определении μ -структуры важную роль играет класс $\mathbb{S}^\infty$ символов. Как мы увидим ниже, для наших целей класс $\mathbb{S}^\infty$ является слишком узким. Расширение же этого класса в аксиоматике μ -структур может привести к тому, что для алгебры, содержащей $i \frac{\partial}{\partial x}$ и x , не будет существовать μ -структура.

Приведем поясняющий пример.

Пусть выбранный класс символов содержит функции вида $f(x_1, x_2) = e^{\pm i x_1 x_2}$ и пусть A, B — такие операторы из M , что $[A, B] = -i$ (например, $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$, $B = x$). Применяя к левой части тождества

$$e^{-i} (\overset{1}{A} - \overset{1}{A}) \overset{2}{B} = 1$$

формулу коммутации (6.5), переставим оператор $\overset{1}{A}$ на первое место. Мы получим равенство

$$1 = \llbracket e^{-i} (\overset{1}{A} - \overset{1}{A}) \overset{2}{B} \rrbracket - \llbracket \psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}; \overset{2}{B}; \overset{1}{A}) \rrbracket,$$

где символ оператора $\psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}; \overset{3}{B}; \overset{4}{A})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\psi(p_1, p_2; x; y) &= i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta}{\delta p_s} e^{-i(p-y)x} = \\ &= \frac{(p_1-y)e^{-i(p_1-y)x} - (p_2-y)e^{-i(p_2-y)x}}{p_1-p_2} = \\ &= e^{-i(p_1-y)x} + (p_2-y) \frac{e^{-i(p_1-y)x} - e^{-i(p_2-y)x}}{p_1-p_2}.\end{aligned}$$

Отсюда, используя аксиомы нуля и соответствия, получим:

$$1 = [e^{-i(\overset{1}{A}-\overset{1}{A})\overset{2}{B}}] - [e^{-i(\overset{1}{A}-\overset{1}{A})\overset{2}{B}}] - [(\overset{3}{A}-\overset{4}{A}) \frac{e^{-i(\overset{1}{A}-\overset{1}{A})\overset{2}{B}} - 1}{\overset{1}{A}-\overset{3}{A}}] = 0.$$

Значит, для данных $A, B \in M$ и класса символов, содержащего функции $e^{\pm i x_i x_i}$, μ -структура вообще не существует.

Поэтому нужно внимательно следить, чтобы в процессе получения формул неявно не использовать μ -структуры для символов более широкого класса, чем $\mathcal{S}^\infty$. Ибо это приводит подчас к неверным равенствам для операторов, символы которых принадлежат $\mathcal{S}^\infty$ *).

Теперь мы дадим обобщение μ -структур, использующее расширенный класс символов.

Предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ принадлежит некоторому линейному пространству $\mathcal{L}$, причем для любых $a \in \mathcal{A}$ и $l \in \mathcal{L}$ определено действие (произведение) $al \in \mathcal{L}$ и $la \in \mathcal{L}$, линейное по l . В этом случае говорят, что $\mathcal{L}$ есть двусторонний модуль над алгеброй $\mathcal{A}$.

Пусть X — множество, состоящее из $n+m$ элементов $A_1, \dots, A_n, B$ алгебры $\mathcal{A}$ (n и m — фиксированные), снабженных индексом $k_i < k_{i+1}$ или $(k_i > k_{i+1})$ и пусть $C_{\mathcal{L}}^\infty$ — пространство функций $\varphi(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in M^m$, растущих не быстрее степени x и таких, что

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \alpha^s} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \varphi(x, \alpha) \right| \leq C_{l,s} |x|^{2l+l_0} + Cl, \quad s \leftrightarrow |\varphi| \stackrel{\text{def}}{=} O_{\mathcal{L}}(|x|^{l_0}).$$

Будем говорить, что на $\mathcal{L}$ задана μ -структура, если для набора $A_1 \dots A_k, B$ определена операция μ : $x_1 \rightarrow A_1, \dots, x_n \rightarrow A_n, \alpha \rightarrow B$, которая ставит в соответствие каждому $f(x, \alpha) \in C_{\mathcal{L}}^\infty$ элемент $L \in \mathcal{L}$, обозначаемый

$$L = [f \left(\overset{k_1}{A_1}, \dots, \overset{k_n}{A_n}, \overset{k_{n+1}}{B} \right)],$$

*) Вопросу об определении конкретных функций от упорядоченных операторов и выяснению границ применимости формул μ -структур посвящена гл. IV.

и удовлетворяет аксиомам $\mu_1) - \mu_6)$). (В аксиоме μ_5) левый (или правый) один из сомножителей предполагается элементом алгебры $\mathcal{A}$.)

Модуль $\mathcal{L}$ с указанной операцией μ называется модулем над алгеброй $\mathcal{A}$, наделенным μ -структурой.

§ 7. Пример асимптотического решения дифференциального уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.1)$$

Поставим задачу: найти такую функцию $\bar{u}(x, t)$, которая удовлетворяет начальному условию $\bar{u}(x, 0) = \psi_0(x)$ (где ψ_0 — произвольная k раз непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю при достаточно больших $|x|$), и которая при подстановке в уравнение (7.1) обращает левую часть в k раз непрерывно дифференцируемую функцию. Отметим, что подстановка в уравнение (7.1) произвольной k раз дифференцируемой функции обращает левую часть, вообще говоря, только в $k-2$ раз непрерывно дифференцируемую функцию. Поэтому искомая функция является в некотором смысле приближенным решением уравнения (7.1). Функцию $\bar{u}$ мы будем называть *асимптотикой решения по гладкости*.

Обычная постановка задачи для уравнения (7.1) содержит два начальных условия. Для простоты мы ограничиваемся лишь одним начальным условием. Предлагаемый ниже метод исследования позволяет рассмотреть и полную постановку задачи. Мы хотим этим примером проиллюстрировать технику вычислений с применением операторного метода.

Обозначим $D = -i\partial/\partial x$, $D_0 = -i\partial/\partial t$. Будем искать $\bar{u}(x, t)$ в виде

$$\bar{u}(x, t) = e^{i\hat{D}S(x, t)} \varphi\left(\frac{x}{x}, \frac{t}{t}\right) v(x), \quad (7.2)$$

где

$$S(x, 0) = 0, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad v, \varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad v\varphi_0 = \psi_0.$$

Подставляем функцию (7.2) в левую часть (7.1); при этом пользуемся формулой коммутации гамильтониана с экспонентой:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - x^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) [e^{i\hat{D}S(x, t)} \varphi\left(\frac{x}{x}, \frac{t}{t}\right)] v(x) = \\ = e^{i\hat{D}S(x, t)} \left[\hat{x}^4 \left(D + \hat{D} \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(D_0 + \hat{D} \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right] \varphi\left(\frac{x}{x}, \frac{t}{t}\right) v(x) = [e^{i\hat{D}S(x, t)} L] v(x). \end{aligned}$$

Внимание: здесь L — часть операторного выражения, а не оператор.

*) Если $f(x_1, \dots, x_n, \alpha) \in C_{\mathcal{L}}^\infty$, $g(y_1, \dots, y_p, \alpha) \in \mathcal{S}^\infty$, $C_1, \dots, C_p \in M$, то $f\left(\frac{k_1}{A_1}, \dots, \frac{k_n}{A_n}, \frac{k_{n+1}}{B}\right) g\left(\frac{l_1}{C_1}, \dots, \frac{l_p}{C_p}, \frac{k_{n+1}}{B}\right) \in \mathcal{L}$. Здесь $\{A_1, \dots, A_n\} \in X$ и обязательно либо $k_1 < \dots < k_{n+1}$, либо $k_1 > \dots > k_{n+1}$.

Преобразуем выражение L . Применяя теорему 6.5, а также учитывая, что $\delta^2 f$ в данном случае — единичный оператор и $\left[i \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}\right] = i \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, мы можем переписать L в следующем виде:

$$L = \left[x^4 \left(\overset{3}{D} + \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\overset{4}{x}, \overset{4}{t} \right) \right)^2 - \left(\overset{3}{D}_0 + \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\overset{4}{x}, \overset{4}{t} \right) \right)^2 \right] \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) - \\ - i \overset{1}{D} x^4 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) + i \overset{1}{D} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right).$$

Далее, переставляем в силу теоремы 6.5 в первом слагаемом порядок действия операторов $\overset{3}{D}$, $\overset{3}{D}_0$ и $\overset{2}{x}$, $\overset{2}{t}$. Получаем:

$$L = \left[x^4 \left(\left(\overset{1}{D} + \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right)^2 - \left(\overset{1}{D}_0 + \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right)^2 \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) - \right. \\ \left. - i \left[x^4 \left(\overset{1}{D} + \overset{1}{D} \right) + 2x^4 \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial x} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) + \right. \\ \left. + i \left[\left(\overset{1}{D}_0 + \overset{1}{D}_0 \right) + 2 \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) - \right. \\ \left. - i \overset{1}{D} x^4 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) + i \overset{1}{D} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right].$$

Изменяя еще раз порядок действия тех же операторов, приходим к формуле

$$L = \left[x^4 \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \varphi(x, t) D^2 - \left[\left(\overset{1}{D}_0 + \overset{1}{D} \frac{\partial S}{\partial t} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right)^2 \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t} \right) \right] + \right. \\ \left. + i \left[-2x^4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} D \right) + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial t} D + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} D_0 - \right. \right. \\ \left. \left. - x^4 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi D + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \varphi D \right] + L_0 \right], \quad (7.3)$$

где L_0 — зависящая от S и φ функция от x, t , которая является бесконечно дифференцируемой, если функции S и φ бесконечно дифференцируемы. Требование, чтобы два первых члена не содержали дифференцирования по x , приводит нас к уравнению относительно S :

$$x^4 \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = 0,$$

которое называется D -характеристическим по отношению к уравнению (7.1). Это уравнение распадается на 2 ветви:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \pm x^2 \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right).$$

Решим уравнение со знаком $-$ в правой части. Учитывая начальное условие $S(x, 0) = 0$, получаем:

$$S(x, t) = - \frac{x^2 t}{1 + xt}. \quad (7.4)$$

Требование, чтобы предпоследний член в (7.3) не содержал дифференцирования по x , приводит, с учетом формулы (7.4), к уравнению относительно φ , называемому *уравнением переноса*:

$$-x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + x\varphi = 0.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ имеет вид

$$\varphi(x, t) = (1 + xt) \varphi_0\left(\frac{x}{1+xt}\right).$$

Итак, имеем

$$\bar{u}(x, t) = e^{-iD \frac{x^2}{1+xt}} (1 + xt) \varphi_0\left(\frac{x}{1+xt}\right) v(x).$$

Заметим, что

$$e^{iDf(x)} v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{ipf(x)} \tilde{v}(p) dp = v(x + f(x)).$$

Поэтому окончательно получаем:

$$\bar{u}(x, t) = (1 + xt) \varphi_0\left(\frac{x}{1+xt}\right) v\left(x - \frac{x^2 t}{1+xt}\right) = (1 + xt) \psi_0\left(\frac{x}{1+xt}\right).$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что в данном случае $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (7.1) точно.

§ 8. Предельный переход уравнения колебаний кристаллической решетки в волновое уравнение

Мы применим теперь построенное операторное исчисление к конкретной физической задаче. Именно, рассмотрим уравнения колебаний кристаллической решетки и изучим вопрос о том, какие его решения переходят в пределе (когда шаг решетки стремится к нулю) в решения волнового уравнения.

Такая задача является классической и достаточно стандартной. Разумеется, трудно ожидать, что предложенный операторный метод даст здесь что-либо новое. Но оказывается, этот метод позволяет обнаружить в данной задаче довольно неожиданные физические и математические эффекты. С помощью операторного метода мы найдем «особые» решения уравнения колебаний решетки, которые вообще не имеют предела. Именно такими особыми решениями обуславливаются физические эффекты, разобранные в настоящем параграфе, из которых не все раньше были известны.

Изучаемый здесь пример показывает, что операторный метод в некотором смысле адекватен физической задаче. Именно, мы увидим, что уравнение характеристик для функции от упорядоченных

операторов не только определяет такие фундаментальные явления как эффект типа Черенкова (шлейф осцилляций излучения за разрывной волной), но и дает точные границы области «черенковского излучения». Мы увидим, что результаты хорошо совпадают с численным экспериментом.

В остальных разделах этой книги мы не будем проводить элементарное исследование получаемых формул и тем более их сравнение с результатом численного эксперимента. Однако этот классический и простой пример будет здесь подробно разобран.

1. Переход системы колебаний решетки в волновое уравнение. Мы рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания кристаллической решетки, и получим из нее в пределе волновое уравнение (с частными производными).

Рассмотрим $2N$ атомов массы m , расположенных на окружности радиуса l на одинаковом расстоянии $h = \pi/N$ друг от друга. Предположим, что атомы взаимодействуют лишь с ближайшими атомами. Пусть $u_i(t)$ — отклонение i -го атома в момент времени t от положения равновесия: здесь $i = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, причем $u_{-N} = u_N$. В линейном приближении система уравнений Ньютона для такой решетки имеет вид

$$\ddot{u}_n = c^2 \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (8.1)$$

где $u_N = u_{-N}$, $u_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} u_{-N+1}$, $u_{-N-1} \stackrel{\text{def}}{=} u_{N-1}$; $c = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ — скорость звука.

Систему (8.1) будем рассматривать при условии, что число N очень велико. Рассмотрим гладкую функцию $u(x, t)$, которая принимает в узлах решетки значения u_j , т. е. $u(jh, t) = u_j(t)$. Система (8.1) приобретает при этом вид дифференциально-разностной задачи на окружности, или, что эквивалентно, дифференциально-разностной задачи на прямой с периодическим коэффициентом:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)], \quad t > 0, \\ u(x+2\pi, t) = u(x, t). \quad (8.2)$$

Мы будем предполагать, что, вообще говоря, скорость звука c зависит от x , причем $c(x) \in C^\infty$ есть 2π -периодическая функция, $c(x) \neq 0$.

Поскольку нас интересуют значения $u(x, t)$ лишь в узлах решетки, то естественно рассмотреть «максимально гладкий» класс функций, «натянутых» на значения u_j в узлах. Пусть M_N — векторное пространство, натянутое на векторы e^{ikx} , $k = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1), \pm N$. Легко видеть, что для заданного набора $\{u_j, j = 0, \dots, \pm N, u_N = u_{-N}\}$ существует функция $u \in M_N$, прини-

мающая значения u_j в узлах решетки. Поэтому начальные условия для задачи (8.2) можно задать в виде

$$u(x, 0) = v_1(x) \in M_N, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_2(x) \in M_N. \quad (8.3)$$

Далее, используя соотношение

$$e^{i\left(-ih \frac{\partial}{\partial x}\right)} u(x, t) = u(x+h, t),$$

перепишем задачу (8.2), (8.3) в виде псевдодифференциального уравнения

$$L_h u \stackrel{\text{def}}{=} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4c^2(x) \sin^2\left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad t > 0, \quad (8.4)$$

$$u(x, 0) = v_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_2(x), \quad u(x+2\pi, t) = u(x, t).$$

Положим

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Будем писать $\varphi \in C_{h,t}^{(s)}$, если функция $\varphi = \varphi(x, t, h)$ является s раз дифференцируемой по x , t , 2π -периодической по x , и имеют место оценки

$$\sup_{0 < h < 1} \left\| \frac{\partial^k \varphi(x, t, h)}{\partial x^k} \right\| \leq c_k < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, s.$$

Рассмотрим вначале задачу с гладкой (равномерно по h) правой частью:

$$L_h u = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4c^2(x) \sin^2\left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f, \quad f \in C_{h,t}^{(s)}, \quad (8.5)$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(x+2\pi, t) = u(x, t).$$

Лемма 8.1. Пусть $\varphi \in C_{h,t}^{(m+2)}$. Тогда

$$4 \sin^2\left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi = -h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sum_{k=4}^{m+1} \alpha_k (-ih)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} + h^{m+2} Q_m \varphi,$$

где $\|Q_m \varphi\| \leq c_m \left\| \frac{\partial^{m+2} \varphi}{\partial x^{m+2}} \right\|$, α_k — некоторые фиксированные числа.

Доказательство. По формуле Тейлора имеем:

$$4 \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = z^2 + \sum_{k=4}^{m+1} \alpha_k z^k - 2z^{m+2} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+1}}{(m+1)!} \cos^{(m+2)}(\tau z) d\tau.$$

Отсюда

$$Q_m \varphi = - \frac{2(-i)^{m-2}}{(m+1)!} \left[\int_0^1 (1-\tau)^{m+1} \cos(\tau^{m+2}) \left(-i h \tau \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^{m+2} \varphi}{\partial x^{m+2}} \right) d\tau \right].$$

Очевидно, функцию в квадратных скобках можно представить в виде линейной комбинации функций вида

$$\int_0^1 (1-\tau)^{m+1} e^{\pm i \tau} \left(-i h \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^{m+1} \psi(x \pm \tau h) d\tau,$$

где $\psi = \frac{\partial^{m+2} \varphi}{\partial x^{m+2}}$.

Как нетрудно видеть, имеет место неравенство

$$\left\| \int_0^1 (1-\tau)^{m+1} \psi(x \pm \tau h) d\tau \right\| \leq C \|\psi\|.$$

Отсюда следует искомая оценка для $Q_m \varphi$. Лемма доказана.

Первое приближение при $h \rightarrow 0$ к оператору L_h задачи (8.5) мы будем называть *волновым оператором* и обозначать $\square_c$ или L . Таким образом, по лемме 8.1 имеем:

$$L = \square_c \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 / \partial t^2 - c^2(x) \partial^2 / \partial x^2.$$

Уравнение $\square_c u = f$ называется *волновым уравнением*. В этом смысле мы будем говорить, что система обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний решетки (8.1) переходит при $h \rightarrow 0$ в волновое уравнение. Но мы еще ничего не знаем о поведении решений этой системы. Переходят ли они при $h \rightarrow 0$ в решения волнового уравнения?

Прежде всего нужно установить, что решение задачи (8.2) существует и что решение соответствующего волнового уравнения существует.

Теоремы существования и единственности решений волнового уравнения и уравнения (8.4) мы докажем здесь лишь для достаточно малого t и, главное, приведем формулы для решений.

2. Существование и единственность решения волнового уравнения. Мы докажем здесь следующую теорему.

Теорема 8.1. Пусть $f \in C_{h,t}^{(s)}$ (s достаточно большое). Тогда при $0 < t \leq T$, где T — любое число, существует и единственно решение $u = R_0(f) \in C_{h,t}^{(s)}$ задачи

$$\square_c u = f, \quad (8.6)$$

$$u(x+2\pi, t) = u(x, t), \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (8.6')$$

При этом

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial x^l} R_0(f) \right\| \leq \sum_{k=0}^l c_{l,k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right\|, \quad l = 0, 1, 2, \dots, s,$$

а $R_0(t) = R(x, t)$, где $R(x, t)$ определено в (8.8).

Доказательство этой теоремы (как в дальнейшем и других теорем такого типа) мы проведем с помощью конструкции *регуляризатора задачи* (8.6), (8.6').

Определение. Пусть $A = -i\partial/\partial x \in M$, $B = x \in M_1$, M^1 — окружность, $G(t, x_1, \alpha, s) \in C_{\infty}^{\infty}$, $s = 1, 2, \dots$ — последовательность таких однопараметрических семейств символов, что $G(0, x_1, \alpha, s) = 1$, $G'_t(0, x_1, \alpha, s) = 0$ и что выполняется неравенство

$$|f_1(t, x, \alpha, s)| \leq C(x_1^2 + 1)^{-s/2} \quad (8.7)$$

для символа $f_1 \in C_{\infty}^{\infty}$ оператора

$$f_1(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s) \stackrel{\text{def}}{=} (\partial^2/\partial t^2 + [c^2(B) A^2]) G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s). \quad (8.7')$$

Тогда $G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s)$ называется *регуляризатором задачи* (8.6), (8.6') (аргумент s мы будем опускать).

З а м е ч а н и е. Регуляризатор, очевидно, не единствен. Можно, например, прибавив к G функцию, финитную по $\overset{1}{A}$, получить другой регуляризатор, что мы и будем делать в дальнейшем, так, чтобы носитель нового регуляризатора обращался в нуль в ϵ -окрестности $x_1 = 0$ и, следовательно, его можно было бы умножить на полином от x_1^{-1} или разложить по степеням x_1^{-1} , понимая под символом x_1^{-1} функцию $x_1^{-1} \varphi(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ имеет носитель вне ϵ -окрестности точки $x_1 = 0$, $\varphi(x_1) = 1$ при $x_1 > 2\epsilon$.

Предположим, что такой регуляризатор построен. Покажем, как с помощью регуляризатора можно доказать утверждение теоремы. Подставив функцию

$$R(x, t) = \int_0^t \int_0^{t-\tau} G(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \Phi(x, \tau) d\mu d\tau \quad (8.8)$$

в уравнение (8.6), получим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - c^2(x) \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \int_0^t \int_0^{t-\tau} f_1(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \Phi(x, \tau) d\mu d\tau. \quad (8.8')$$

Таким образом, мы свели задачу (8.6), (8.6') к задаче об определении Φ из уравнения

$$\Phi(x, t) + \int_0^t f_2(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \Phi(x, \tau) d\tau = f(x, t), \quad (8.8'')$$

где

$$f_2(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f_1(\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) d\tau$$

(начальные условия и условия периодичности (8.6') очевидно, выполняются для функции $R(x, t)$).

Уравнение (8.8") является интегральным уравнением типа уравнения Вольтерра и решается итерациями. Именно, положим

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k,$$

где

$$\Phi_0(x, t) = f(x, t),$$

$$\Phi_1(x, t) = - \int_0^t f_2(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) f(x, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, t) = & (-1)^k \int_0^t f_2(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \int_0^{\tau_1} f_2(\tau_1-\tau_2, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \dots \times \\ & \times \int_0^{\tau_{k-1}} f_2(\tau_{k-1}-\tau_k, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) f(x, \tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1, \\ & k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Из (8.7) для любой $\psi(x, t) \in C_{h,t}^s$ имеем оценку для $0 \leq \tau \leq t$, ($t \leq T$) и достаточно большого s

$$\begin{aligned} \|f_2(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \psi(x, \tau)\| &= \left\| \int_0^{t-\tau} f_1(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \psi(x, \tau) d\mu \right\| \leq \\ &\leq \int_0^{t-\tau} \|f_1(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \psi(x, \tau)\| d\mu \leq M_0 T \|\psi(x, \tau)\|, \end{aligned}$$

где $M_0 = \text{const.}$

Отсюда при $0 \leq t \leq T$ имеем

$$\|\Phi_k(x, t)\| \leq \frac{(M_0 T^2)^k}{k!} \max_{0 \leq t \leq T} \|f(x, t)\|.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$ сходится. Более того, из аналогичных оценок для производных Φ_k следует, что ряд из производных Φ_k равномерно (и притом очень быстро) сходится, сумма $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$ принадлежит $C_{h,t}^{(s)}$, и для $R_0(f) \equiv R(x, t)$ справедливы оценки теоремы 8.1.

Точно так же ясно, что уравнение (8.8), а следовательно, и задача (8.6), (8.6'), имеет единственное решение, так как любое его решение представляется единственным образом в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k.$$

Таким образом, чтобы доказать теорему, нам остается построить регуляризатор задачи (8.6), (8.6') (и оценить его). Мы это

проделаем с помощью операторного метода. Будем искать регуляризатор G в виде

$$G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}) = e^{i\overset{1}{A}S(\overset{2}{x}, t)} \varphi(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{A}), \quad (8.9)$$

где $A = -i\partial/\partial x$, а функции S, φ подлежат определению (здесь S, φ — 2π -периодические по x , S — вещественная).

Подставим оператор (8.9) в волновое уравнение и воспользуемся формулой коммутации; получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2(\overset{2}{x}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G = e^{i\overset{1}{A}S(\overset{2}{x}, t)} \{ & (-\overset{1}{A}^2) \left[\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - c^2(\overset{2}{x}) \left(\frac{\partial S}{\partial x} + 1 \right)^2 \right] \varphi + \\ & + i\overset{1}{A} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right) \varphi - c^2(\overset{2}{x}) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \varphi + 2 \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \\ & - 2c^2(\overset{2}{x}) \left(\frac{\partial S}{\partial x} + 1 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \} + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2(\overset{2}{x}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right], \quad (8.10) \end{aligned}$$

где у функций S и φ опущены аргументы $(\overset{2}{x}, t)$ и $(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{A})$ соответственно.

Правую часть (8.10), а точнее, оператор в фигурных скобках, мы хотели бы сделать нулевым. Точно сделать это не удастся (в случае переменного $c(x)$), но для построения регуляризатора достаточно получить справа «гладкий» оператор f_1 .

Регуляризатор G рассматривается нами как оператор на пространстве достаточно дифференцируемых 2π -периодических функций $v(x)$. Такие функции представляются в виде ряда Фурье:

$$v(x) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n e^{inx} \equiv a_0 + v_1(x).$$

(Напомним, что по определению $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(n, x) e^{inx}$).

Тогда $G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x})v = G_0(x, t) + G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x})v_1$, где $G_0(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x})a_0$. Функция G_0 является решением задачи

$$\square_c G_0 = f_1(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x})a_0,$$

$$G_0(x, 0) = a_0, \quad \frac{\partial G_0}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

$$G_0(x + 2\pi, t) = G_0(x, t).$$

Очевидно, не изменяя регуляризатора, можно взять вместо G_0 константу a_0 , которая удовлетворяет выписанной задаче, но с нулевой правой частью.

Поставим начальное условие

$$S(x, 0) = 0. \quad (8.13')$$

Для решения задачи Коши (8.13), (8.13') рассмотрим соответствующую систему бихарактеристик, называемую системой Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dX^\pm}{dt} &= \mp c(X^\pm), \quad X^\pm|_{t=0} = x_0, \\ \frac{dP^\pm}{dt} &= \pm \frac{\partial c}{\partial x}(X^\pm)(1 + P^\pm), \quad P^\pm|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Эта система легко интегрируется. Пусть $X^\pm(x_0, \tau)$, $P^\pm(x_0, t)$ — ее решения. Поскольку $\frac{\partial X^\pm}{\partial x_0}|_{t=0} = 1$, то при любых t (см. ниже)

имеем $\frac{\partial X^\pm}{\partial x_0}(x_0, t) \neq 0$ и, следовательно, разрешимо уравнение:

$$x = X^\pm(x_0, t),$$

т. е. существует гладкое решение $x_0 = x_0^\pm(x, t)$.

Тогда задача (8.13), (8.13') имеет следующие 2π -периодические по x решения (отвечающие знакам $\pm$ в (8.13)):

$$S_\pm(x, t) = \int_0^t \left[P^\pm(x_0, \tau) \frac{dX^\pm}{d\tau}(x_0, \tau) - H_\pm(P^\pm(x_0, \tau), X^\pm(x_0, \tau)) \right] d\tau \Big|_{x_0 = x_0^\pm(x, t)} = x_0^\pm(x, t) - x.$$

Заметим, что $\frac{\partial S_\pm}{\partial x}(X^\pm, t) = P^\pm$.

Обратимся теперь ко второму уравнению (8.11). Оператор U_1 теперь распадается на два: U_1^+ и U_1^- , соответствующие двум функциям $S_\pm$. Очевидно, оператор $U_1^\pm$ можно преобразовать к виду

$$U_1^\pm = -2H_\pm \left(\frac{d}{dt_\pm} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\pm}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_\pm}{\partial x^2} - \frac{1}{2H_\pm} \frac{\partial H_\pm}{\partial p} \frac{\partial H_\pm}{\partial x} \right), \quad (8.15)$$

где $H_\pm(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \mp c(x)(1+p)$, а у функций $S_\pm$ и $H_\pm$ опущены аргументы $(X^\pm, t)$ и $(X^\pm, P^\pm)$ соответственно, $\frac{d}{dt_\pm}$ есть производная вдоль траекторий (8.14), т. е.

$$\frac{d}{dt_\pm} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dX^\pm}{dt} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \mp c(X^\pm) \frac{\partial}{\partial x}.$$

В силу (8.14)

$$\frac{\partial}{\partial t} [H_\pm(X_\pm(x_0, t), P_\pm(x_0, t))] = 0. \quad (8.16)$$

Следовательно, $H_\pm(X_\pm, P_\pm) = H_\pm(x_0, 0) = \mp c(x_0)$.

Пусть $J_{\pm}^0(x_0, t) = \frac{\partial X^{\pm}(x_0, t)}{\partial x_0}$. Дифференцируя уравнение для $X^{\pm}$ (см. (8.14)):

$$\frac{dX^{\pm}}{dt} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p} \left(X^{\pm}, \frac{\partial S_{\pm}}{\partial x} (X^{\pm}, t) \right)$$

по переменной x_0 , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{\pm}^0 = J_{\pm}^0 \left(\frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial p \partial x} \right).$$

Отсюда и из (8.16) для якобиана

$$J_{\pm}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} 2H_{\pm} \left(x, \frac{\partial S_{\pm}}{\partial x}(x, t) \right) J_{\pm}^0(x_0^{\pm}(x, t), t) = \mp 2c(x)$$

получим уравнение:

$$\frac{d}{dt_{\pm}} \frac{1}{\sqrt{|J_{\pm}|}} = - \frac{1}{2\sqrt{|J_{\pm}|}} \left(\frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial x \partial p} \right).$$

Поэтому для оператора (8.15) имеем:

$$\begin{aligned} U_{\mp}^{\pm} \left(\frac{\psi(x, t)}{\sqrt{|J_{\pm}|}} \right) &= \\ &= - \frac{1}{\sqrt{|J_{\pm}|}} \left(\frac{d}{dt_{\pm}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial x \partial p} - \frac{1}{2H_{\pm}} \frac{\partial H_{\pm}}{\partial p} \frac{\partial H_{\pm}}{\partial x} \right) \psi(x, t), \end{aligned} \quad (8.17)$$

где у функции $H_{\pm}$ опущены аргументы $\left(x, \frac{\partial S_{\pm}}{\partial x}(x, t) \right)$, ψ — любое.

Мы проделали все выкладки, используя общие обозначения, так как в дальнейших примерах они будут повторяться дословно. В нашем случае выражение (8.17) для оператора $U_{\mp}^{\pm}$ приобретает вид:

$$U_{\mp}^{\pm} \left(\frac{\psi(x, t)}{\sqrt{|J_{\pm}|}} \right) = - \frac{1}{\sqrt{|J_{\pm}|}} \left[\frac{d}{dt_{\pm}} \pm \frac{\partial c(x)}{\partial x} \right] \psi(x, t).$$

Поэтому второе уравнение (8.11) имеет два следующих решения:

$$\varphi_0^{\pm}(x, t) = \frac{\psi_0^{\pm}(x_0^{\pm}(x, t)) f(x)}{\sqrt{|J_{\pm}(x, t)|}}, \quad (8.18)$$

где $\psi_0^{\pm}(x)$ — некоторые начальные условия, подлежащие определению.

Аналогично, при помощи представления (8.17), решаются все остальные уравнения (8.11) и определяются 2π -периодические функции $\varphi_k^{\pm}$, $k=0, 1, 2, \dots, s$, через некоторые интегралы по траекториям $X^{\pm}$, $P^{\pm}$.

Окончательно, регуляризатор G имеет вид:

$$G(t, \dot{A}, \ddot{x}) = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^s e^{i\dot{A}S_{\pm}(\ddot{x}, t)} \varphi_k^{\pm}(\ddot{x}, t) (-i\dot{A}^{-1})^k, \quad (8.19)$$

где функции $S_{\pm}$, $\varphi_k^{\pm}$ определены выше и $\sum f_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} f_+ + f_-$.

Нам остается подобрать начальные условия для $\varphi_k^{\pm}$ так, чтобы выполнялось (8.12). Положим

$$\varphi_0^{\pm}(x, 0) = 1/2. \quad (8.20)$$

Поскольку $J_{\pm}(x, 0) = 2H_{\pm}(x, 0) = \mp 2c(x)$, то из (8.18) получается следующее выражение для $\psi_0^{\pm}$:

$$\psi_0^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2c(x)}}.$$

Для остальных функций $\varphi_k^{\pm}$, $k \geq 1$ поставим нулевые условия:

$$\varphi_k^{\pm}(x, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (8.21)$$

Из (8.19) в начальный момент $t=0$, учитывая (8.20), получим:

$$G(0, \dot{A}, \ddot{x}) = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^s \varphi_k^{\pm}(\ddot{x}, 0) (-i\dot{A}^{-1})^k = \sum_{\pm} \varphi_0^{\pm}(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Для производной $\partial G / \partial t$ из (8.19) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(0, \dot{A}, \ddot{x}) = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^s \left[i\dot{A} \frac{\partial S_{\pm}}{\partial t}(\ddot{x}, 0) \varphi_k^{\pm}(\ddot{x}, 0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_k^{\pm}}{\partial t}(\ddot{x}, 0) \right] (-i\dot{A}^{-1})^k. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Но $\frac{\partial S_{\pm}}{\partial t}(x, 0) = -H_{\pm}(x, 0) = \pm c(x)$, поэтому первые слагаемые в (8.22) в силу (8.20) сокращаются, и остается выражение:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(0, \dot{A}, \ddot{x}) = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^s \frac{\partial \varphi_k^{\pm}}{\partial t}(\ddot{x}, 0) (-i\dot{A}^{-1})^k.$$

Производные $\frac{\partial \varphi_k^{\pm}}{\partial t}$ выразим из (8.11). Легко видеть, что в начальный момент времени они удовлетворяют условию

$$\frac{\partial \varphi_k^+}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\partial \varphi_k^-}{\partial t}(x, 0).$$

Поэтому оператор $G(t, \dot{A}, \ddot{x})$ удовлетворяет и второму начальному условию (8.12). Таким образом, регуляризатор для задачи (8.6), (8.6') полностью построен, и теорема доказана.

3. Асимптотические решения системы уравнений колебаний решетки. Мы будем различать между собой две задачи: 1) нахождение асимптотики точного решения, 2) нахождение асимптотического решения, т. е. построение функции, подстановка которой в уравнение дает правую часть, асимптотически приближающуюся к заданной.

Прежде чем приступать к задаче 1, мы будем строить асимптотическое решение. Имеет место следующая почти очевидная лемма.

Лемма 8.2. Пусть заданы целые $m \geq 1$, $k \geq 2$ и функция $f \in C_{h,t}^{(p)}$, где $p = p(m, k)$ достаточно большое. Тогда существуют такие функции $\psi_j \in C_{h,t}^{(k)}$, $j = 0, \dots, m-2$, что линейная комбинация

$$U_m = \frac{1}{h^2} R_0(f) + \sum_{j=0}^{m-2} h^j \psi_j$$

является асимптотическим решением задачи (8.5). А именно,

$$\left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4c^2(x) \sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U_m = f + h^m F_m f,$$

$$U_m(x + 2\pi, t) = U_m(x, t),$$

$$U_m(x, 0) = \frac{\partial U_m}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

причем остаток $F_m f$ имеет оценку

$$\|F_m f\| \leq \sum_{j=1}^p c_j \left\| \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\|.$$

Доказательство. Подставим функцию U_m в уравнение и воспользуемся леммой 8.1. Затем приравняем нулю коэффициенты при степенях h ; тем самым получим уравнения для функций ψ_j , $j = 0, \dots, m-2$. Например, приравнявая нулю коэффициент при h^2 , получим уравнение для ψ_0 :

$$\square_c \psi_0 + \alpha_4 c^2(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 R_0(f) = 0.$$

Отсюда в силу теоремы 8.1 найдем

$$\psi_0 = -\alpha_4 R_0 \left[c^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 R_0(f) \right],$$

причем функция ψ_0 удовлетворяет нулевым начальным условиям и является 2π -периодической по x .

Аналогично получим все остальные функции ψ_j . Оценка остатка $F_m f$ следует из соответствующих оценок леммы 8.1 и теоремы 8.1.

Лемма доказана.

Мы получили, таким образом, что решение волнового уравнения является асимптотическим решением системы уравнений колебаний решетки. Но, во-первых, оно является асимптотическим решением лишь при достаточно гладкой правой части, а во-вторых, еще нужно доказать, что оно является асимптотикой истинного решения. Для того чтобы найти общее асимптотическое решение уравнения колебаний решетки и доказать, что оно является асимптотикой истинного решения, мы прибегнем к способу уже испробованному для волнового уравнения — к построению регуляризатора.

Регуляризатором мы будем называть в этом случае аналогичный оператор $G(t, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$, зависящий также от h , и определим дадим аналогичное предыдущему определению, только потребуем дополнительно к (8.7), чтобы

$$|f_1(x_1, \alpha, t, s, h)| \leq c_s h^{s+2} (x_1^2 + 1)^{-s/2}. \quad (8.23)$$

В правой части (8.7') мы поставим, естественно, оператор

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + [4c^2(x) \sin^2 \left(\frac{-ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right)].$$

Если регуляризатор построен, то аналогично пункту 2 можно получить интегральное уравнение типа уравнения Вольтерра и доказать, что его решение существует, а также получить оценку для решения, равномерную по h , при $h \rightarrow 0$.

Заметим далее, что нам на самом деле достаточно потребовать от f_1 лишь одного условия (8.7).

В самом деле, если построен такой «ослабленный» регуляризатор, то далее мы можем применить результаты этого пункта — лемму 8.2, которая дает способ получить настоящий регуляризатор уже с точностью до $h^N F$, где $F \in C_{h,t}^{(s)}$ (т. е. удовлетворить (8.23)).

Таким образом, мы свели задачу к построению ослабленного регуляризатора, такого, что соответствующая правая часть f_s удовлетворяет условию (8.7). Это мы и сделаем в настоящем пункте с помощью упорядоченных операторов.

Построим регуляризатор для системы уравнений колебаний решетки.

Рассмотрим задачу (8.4) при произвольных начальных данных v_1, v_2 из M_N . Очевидно, достаточно рассмотреть случай $v_2(x) \equiv 0$. Кроме того, функцию $v_1(x)$ представим в виде

$$v_1(x) = a_0 + \sum_{n=-N+1}^N a_n e^{inx}.$$

Очевидно, константа a_0 удовлетворяет задаче (8.4). Поэтому достаточно рассмотреть начальные условия вида

$$u(x, 0) = v_0(x) = \sum_{n=\pm 1, \dots, \pm(N-1), +N} a_n e^{inx}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (8.24)$$

Пусть $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$. Как и выше, определим оператор A^{-1} на функциях v_0 по формуле

$$A^{-1}v_0 \equiv A^{-1} \left(\sum_{n \neq 0} a_n e^{inx} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} e^{inx} \in M_N.$$

Под действием оператора A^{-1} мы получаем функцию того же типа; следовательно, на v_0 опеределены все степени A^{-k} , $k=1, 2, \dots$. Кроме того, очевидна оценка

$$\|A^{-1}v_0\| \leq \|v_0\|.$$

Далее, $\frac{\partial}{\partial x}(A^{-1}v_0) = iv_0(x, h)$. Поэтому

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial x^s}(A^{-k}v_0) \right\| \leq C_s \|v_0\|, \quad s=0, 1, \dots, k.$$

Отсюда видно, что задачу (8.4) достаточно решить с точностью до функций вида $(A^{-k}v_0)$.

Регуляризатор будем искать в виде (аргумент h опускаем)

$$G(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x})v_1 = e^{iAS(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega})} \varphi(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega})v_1, \quad (8.25)$$

где $\omega = hA$, $h = \pi/N$, S, φ — бесконечно дифференцируемые 2π -периодические по x функции, S — вещественная функция.

Напомним, что оператор вида $F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega})$ на функции $v \in M_N$ задается формулой

$$F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega})v = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N e^{ikh} F(x, kh) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} v(y) dy. \quad (8.26)$$

Очевидно, оператор ω ограничен на M_N :

$$\|\omega v\| \leq \pi \|v\|, \quad v \in M_N. \quad (8.27)$$

Подставим выражение (8.25) в уравнение (8.4) и воспользуемся формулой коммутации с экспонентой. Тогда получим, что для того, чтобы $G(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x})$ удовлетворяла уравнению (8.4), достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} & \left\{ h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \overset{1}{\omega}^2 \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \varphi + 2i\overset{1}{\omega} h \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\overset{1}{\omega} h \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \varphi + 4[c^2(x)] \sin^2 \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \overset{1}{\omega} \frac{\partial S}{\partial x}(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}) \right] \varphi \right\} v_1 = 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где у функций S, φ опущены аргументы $(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega})$.

Последнее слагаемое в этом равенстве преобразуем с помощью K -формулы и формулы коммутации:

$$\begin{aligned} \sin^2 \left[-\frac{i\hbar}{2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \overset{1}{\omega} \frac{\partial S}{\partial x} (x, t, \overset{1}{\omega}) \right] \varphi(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}) = \\ = \sin^2 \left(\frac{\overset{1}{\omega}}{2} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \varphi + \frac{1}{2} (-i\hbar) \left[\sin \left(\overset{1}{\omega} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \overset{1}{\omega} \cos \left(\overset{1}{\omega} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \varphi \right] + \sum_{k=2}^{m-1} (-i\hbar)^k (R_k \varphi)(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}) + h^m Q_m(h), \end{aligned} \quad (8.29)$$

где у функций S, φ опущены аргументы $(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega})$.

R_k — некоторые дифференциальные операторы порядка k , действующие на функцию $\varphi(x, t, \omega)$ по переменной x (можно выписать явный вид всех R_k). Остаток Q_m и все его коммутаторы $I_s = \overset{2}{Q}_m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^s$, $s = 0, 1, 2, \dots$ имеют в силу (8.27) оценки

$$\|I_s v\| \leq c_s \|v\|, \quad v \in M_N. \quad (8.30)$$

Теперь заметим, что $\hbar v_0 = A^{-1} \omega v_0$. Поэтому из (8.28) и (8.29) получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\left(\overset{1}{\omega} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - 4 \overset{2}{\llbracket} c^2(x) \rrbracket \sin^2 \left(\frac{\overset{1}{\omega}}{2} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \right] \varphi + \right. \\ \left. + (-i\overset{1}{A}^{-1}) \left[2 \overset{1}{\omega}^2 \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2 \overset{1}{\omega} \overset{2}{\llbracket} c^2(x) \rrbracket \sin \left(\overset{1}{\omega} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{1}{\omega}^2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \overset{2}{\llbracket} c^2(x) \rrbracket \cos \left(\overset{1}{\omega} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \right) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=2}^{m-1} (-i\overset{1}{A}^{-1})^k \overset{1}{\omega}^k (R_k \varphi)(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}) \overset{2}{\llbracket} c^2(x) \rrbracket - \right. \\ \left. - 4 \overset{2}{\llbracket} c^2(x) \rrbracket \overset{1}{A}^{-m} \overset{1}{\omega}^m \overset{2}{Q}_m \right\} v_0 = 0, \end{aligned} \quad (8.31)$$

где у функций φ, s опущены аргументы $(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega})$.

Будем решать (8.31), используя разложение φ по степеням A^{-1} , т. е. в виде

$$\varphi = \sum_{k=0}^{m-2} (-i\overset{1}{A}^{-1})^k \varphi_k(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}).$$

Подставим это разложение в (8.31) и приравняем нулю коэффициенты при степенях $(-i\overset{1}{A}^{-1})^k$, $k = 0, \dots, m-1$. Получим систему

уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\omega \frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - 4C^2(x) \sin^2 \frac{\omega}{2} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x}\right) &= 0, \\ R'_1 \varphi_0 &= 0, \\ R'_1 \varphi_1 + R'_2 \varphi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\dots \dots \dots R'_1 \varphi_k + R'_2 \varphi_{k-1} + \dots + R'_{k+1} \varphi_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-2,$$

где

$$R'_1 = 2 \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - 2 \frac{C^2(x)}{\omega} \sin \left(\omega \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - C^2(x) \cos \left(\omega \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right),$$

а операторы R'_k , $k = 2, \dots, m-1$ задаются формулами

$$R'_k = -4\omega^{k-2} C^2(x) R_k.$$

Предположим, что из уравнений (8.32) мы нашли S и φ_k . Тогда получим, что функция

$$V_m(x, t) = \sum_{k=0}^{m-2} e^{i\dot{A}S(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega})} \varphi_k(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega}) (-i\dot{A}^{-1})^k v_0 + a_0$$

удовлетворяет уравнению (8.4) с точностью до функции

$$K_m(x, t) = e^{i\dot{A}S(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega})} [h^2 \dot{Q}'_m \dot{A}^{-m+2}] v_0, \quad (8.33)$$

где оператор $\dot{Q}'_m$ задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \dot{Q}'_m &= 4 \llbracket C^2(x) \rrbracket \left\{ \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{l=0}^{j-2} (-i)^{m-2-j+l} \omega^{j-2} \times \right. \\ &\quad \left. \times (R_j \varphi_{m-j+l}) \left(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega} \right) (-i\dot{A}^{-1})^l + \dot{Q}_m \omega^{m-2} \right\}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Дополнительно имеем

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) K_m(x, t) &= \\ &= \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega} \right) e^{i\dot{A}S(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega})} h^2 \dot{Q}'_m \dot{A}^{-m+2} - \right. \\ &\quad \left. - e^{i\dot{A}S(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega})} h^2 \left[\dot{Q}'_m - i \frac{\partial}{\partial x} \right] \dot{A}^{-m+2} + e^{i\dot{A}S(\frac{x}{\omega}, t, \frac{1}{\omega})} h^2 \dot{Q}'_m \dot{A}^{-m+2} \right\} v_1. \end{aligned}$$

Из (8.34) и оценки (8.30) получим

$$\left\| -i \frac{\partial}{\partial x} K_m(x, t) \right\| \leq c_1 \|v_1\|,$$

где $c_1 = \text{const.}$

Аналогично получаются оценки для всех остальных производных:

$$\left\| \frac{\partial^s}{\partial x^s} K_m(x, t) \right\| \leq c_s \|v_1\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m-2.$$

Поэтому, если $\sup_{0 < h < 1} \|v_1\| \leq c$, то функция V_m удовлетворяет уравнению (8.4) с точностью до элемента из $C_{h,t}^{(m-2)}$:

$$\left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4c^2(x) \sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] V_m = K_m \in C_{h,t}^{(m-2)}.$$

Обратимся теперь к решению уравнений (8.32). Во-первых, имеем уравнение Гамильтона — Якоби для функции $S(x, t, \omega)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \pm 2 \frac{c(x)}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \left(1 + \frac{\partial S}{\partial x} \right). \quad (8.35)$$

Поставим начальное условие

$$S(x, 0, \omega) = 0. \quad (8.35')$$

Для решения такой задачи Коши рассмотрим соответствующую систему характеристик:

$$\begin{cases} \frac{dX^\pm}{dt} = \mp c(X^\pm) \cos \left[\frac{\omega}{2} (1 + P^\pm) \right], & X^\pm|_{t=0} = x_0, \\ \frac{dP^\pm}{dt} = \pm \frac{2}{\omega} \sin \left[\frac{\omega}{2} (1 + P^\pm) \right] \frac{\partial c}{\partial x}(X^\pm), & P^\pm|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (8.36)$$

Эта система легко интегрируется. Пусть $X^\pm(x_0, \omega, t)$, $P^\pm(x_0, \omega, t)$ — ее решение (спектр $\sigma(\omega) \in [-\pi, \pi]$). Поскольку $\frac{\partial X^\pm}{\partial x_0}|_{t=0} = 1$, то при достаточно малых t разрешимо уравнение

$$x = X^\pm(x_0, \omega, t), \quad (8.36')$$

т. е. существует гладкое решение $x_0 = x_0^\pm(x, t, \omega)$. Тогда задача (8.35) — (8.35') имеет следующее 2π -периодическое по x решение:

$$\begin{aligned} S_\pm(x, t, \omega) = & \int_0^t \left\{ P^\pm(x_0, \omega, \tau) \frac{dX^\pm}{d\tau}(x_0, \omega, \tau) \pm \right. \\ & \left. \pm 2 \frac{c(X^\pm(x_0, \omega, \tau))}{\omega} \sin \left[\frac{\omega}{2} (1 + P^\pm(x_0, \omega, \tau)) \right] \right\} d\tau \Big|_{x_0 = x_0^\pm(x, t, \omega)}. \end{aligned}$$

Далее уравнения (8.32) решаются точно так же, как это было сделано в пункте 2 для волнового уравнения.

В итоге «ослабленный» регуляризатор для задачи (8.4) находим в виде:

$$G(t, \omega, x) v_0 = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{m-2} e^{iA} S_\pm(x, t, \omega) \varphi_k^\pm(x, t, \omega) (-iA^{-1})^k v_0. \quad (8.37)$$

Теперь, учитывая замечание, сделанное в конце предыдущего пункта, мы получаем следующую теорему.

Теорема 8.2. *Решение задачи (8.4) при достаточно малом t существует, единственно и при условии (8.24) имеет вид*

$$u(x, t) = G(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) v_0 - h^{-2} R_0(K_m) + O(h).$$

Мы приведем теперь некоторые простые следствия. Для этого нам нужно представить выражение (8.37) в виде интеграла, используя представление псевдодифференциального оператора на окружности, и найти асимптотику при $h \rightarrow 0$ этого интеграла по известному методу «стационарной фазы» (упрощенному методу перевала для действительного случая).

Вначале приведем (оригинальный) вывод формулы метода стационарной фазы.

4. Метод стационарной фазы. Рассмотрим интеграл

$$I(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h} \Phi(y)} \varphi(y) dy,$$

где $\Phi(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \neq 0$ при $y \in \text{supp } \varphi$ и уравнение $\partial \Phi / \partial y = 0$ имеет единственное решение $y = y_0$ при $y \in \text{supp } \varphi(y)$ (стационарную точку).

Лемма 8.3. *При приведенных выше условиях для любого $N \geq 1$ справедливо разложение*

$$I(h) = e^{i \frac{\pi}{4}} e^{i \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign } \Phi''(y_0))} \frac{e^{\frac{i}{h} \Phi(y_0)}}{\sqrt{|\Phi''(y_0)|}} \left(y(y_0) + \sum_{k=1}^N h^k \psi_k(y_0) \right), \quad (8.38)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_k(y_0) = & \int_0^{\frac{\pi}{2} \text{sign } \Phi''(y_0)} V^J(y, t_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{V^J(y, t_1)} \dots \\ & \dots \int_0^{t_{k-1}} V^J(y, t_k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{V^J(y, t_k)} \varphi(y) dt_1 \dots dt_k, \end{aligned}$$

$y = y(x, t)$ — решение уравнения (8.49), а якобиан

$$J(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} J(y(x, t), t)$$

определен формулой (8.48).

Для доказательства мы воспользуемся асимптотикой при $h \rightarrow 0$ решения задачи Коши для уравнения Шредингера осциллятора

$$-ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2} \psi, \quad \psi|_{t=0} = \varphi(x) e^{\frac{i}{h} \Phi(x)}. \quad (8.39)$$

Такая асимптотика называется *квазиклассической*. Прямым дифференцированием

можно показать, что решение задачи (8.39) дается формулой

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign} t)}}{(2\pi h |\sin t|)^{1/2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2h} \sin t [\cos tx^2 - 2xy + \cos ty^2]} \times e^{\frac{i}{h} \Phi(y)} \varphi(y) dy. \quad (8.40)$$

Положив в формуле (8.40) $x = 0$, $t = \pi/2$, получим равенство

$$I(h) = \psi(0, \pi/2), \quad (8.41)$$

а полагая в формуле (8.40) $x = 0$, $t = -\pi/2$, получим

$$I(h) = e^{-i\pi/2} \psi(0, -\pi/2). \quad (8.42)$$

Таким образом, мы видим, что разложение в ряд функции $I(h)$ в силу формул (8.41) и (8.42) совпадает с квазиклассической асимптотикой решения задачи Коши (8.39). Решение задачи (8.39) будем искать в виде асимптотического ряда *)

$$\psi(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \left[\varphi_0(x, t) + h\varphi_1(x, t) + \dots \right. \\ \left. \dots + h^N \varphi_N(x, t) + \dots \right] \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \varphi(x, t, h), \quad (8.43)$$

где $S(x, t) \in C^\infty$, $\varphi_i(x, t, h) \in C^\infty$ — подлежащие определению функции. Подставляя функцию $\varphi(x, t, h)$, определенную равенством (8.43), в уравнение (8.39), получим уравнение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + x^2}{2} \right) \varphi + \\ + ih \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi \right) - h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (8.44)$$

Приравняем к 0 слагаемое, не содержащее h . Получим уравнение Гамильтона — Якоби для осциллятора:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + x^2 \right]. \quad (8.45)$$

Положим $S(x, 0) = \Phi(x)$.

Рассмотрим систему Гамильтона для осциллятора

$$\dot{q} = p \quad q(0) = y, \\ \dot{p} = -q \quad p(0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y). \quad (8.46)$$

Легко видеть, что ее решениями являются функции

$$q(t, y) = y \cos t + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin t; \quad p(t, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos t - y \sin t. \quad (8.47)$$

Функции q и p называются траекториями гамильтоновой системы (8.46). Обозначим

$$\tilde{J}(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q}{\partial y}(t, y).$$

Из (8.47) получим

$$\tilde{J}(y, t) = \cos t + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \sin t. \quad (8.48)$$

*) Последующие рассуждения аналогичны пункту 2.

Из этой формулы следует, что:

1) если $\partial^2 \Phi / \partial y^2 > 0$ при $y \in \text{supp } \varphi(y)$, то

$$\tilde{J}(y, t) \neq 0 \text{ при } y \in \text{supp } \varphi(y), 0 \leq t \leq \pi/2.$$

2) если $\partial^2 \Phi / \partial y^2 < 0$ при $y \in \text{supp } \varphi(y)$, то

$$\tilde{J}(y, t) \neq 0 \text{ при } y \in \text{supp } \varphi(y), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\partial^2 \Phi / \partial y^2 > 0$. В случае $\partial^2 \Phi / \partial y^2 < 0$ все рассуждения сохраняются, если заменить t на $(-t)$.

Обозначим через $y = y(t, x)$ решение уравнения

$$q(t, y) = x \quad (8.49)$$

(в силу теоремы о неявной функции оно существует). Аналогично пункту 2 получим, что решение уравнения (8.45) дается формулой

$$S(x, t) = \Phi(y(x, t)) + \frac{1}{2} \int_0^t [p^2(y, \tau) - x^2(y, \tau)] d\tau|_{y=y(x, t)}. \quad (8.50)$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые в уравнении (8.43). Введем векторное поле

$$\frac{\partial}{\partial t} + p(y(x, t), t) \frac{\partial}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}.$$

Вычислим производную $\frac{d}{dt} \tilde{J}(y(x, t), t)$. Отметим вначале, что векторное поле d/dt совпадает с дифференцированием вдоль проекций на плоскость (x, t) траекторий гамильтоновой системы. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{J}(y(x, t), t)|_{t=t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}(y(x, t_0), t_0 + \Delta t) - \tilde{J}(y(x, t_0), t_0)}{\Delta t} = \\ &= \tilde{J}(y(x, t_0), t_0) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}(x, \Delta t) - 1}{\Delta t}, \end{aligned}$$

где $\tilde{J}(x, \Delta t)$ соответствует якобиану преобразования сдвига вдоль траекторий следующей системы Гамильтона:

$$\dot{q} = p \quad q(0) = x \stackrel{\text{def}}{=} q_0,$$

$$\dot{p} = -q \quad p(0) = p(t_0, y(x, t_0)) \stackrel{\text{def}}{=} p_0.$$

Для вычисления $\tilde{J}(x, \Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} J_{\Delta t}$ заметим, что в силу системы Гамильтона,

$$q(\Delta t) = x + p_0 \cdot \Delta t + O(\Delta t^2)$$

и

$$J_{\Delta t} = \frac{\partial q(\Delta t)}{\partial x} = 1 + \frac{\partial p_0}{\partial x} \Delta t + O(\Delta t)^2.$$

Легко видеть, что функция $S(x, t)$, определенная равенством (8.50), удовлетворяет условию $\frac{\partial S}{\partial x} = p$. Окончательно

$$\frac{d}{dt} \tilde{J}(y(x, t), t)|_{t=t_0} = \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t_0) \tilde{J}(y(x, t_0), t_0).$$

Обозначим теперь

$$J = J(x, t) = \tilde{J}(y(x, t), t).$$

Отсюда имеем для любой $\theta(x, t) \in C^\infty$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta(x, t)}{\sqrt{J}} \right) = \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\theta}{\sqrt{J}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.$$

Положим теперь в формуле (8.43)

$$\varphi_k(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta_k(x, t)}{\sqrt{J}}$$

и подставим функцию $\psi(x, t, h)$ из уравнения (8.43) в уравнение (8.39); используя формулы (8.44) и (8.51), приравнявая члены с одинаковыми степенями h , получаем рекуррентную систему

$$\frac{d\theta_0}{dt} = 0, \quad \theta_0|_{t=0} = \varphi(y),$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \sqrt{J} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\theta_{k-1}}{\sqrt{J}}, \quad \theta_1|_{t=0} = \dots = \theta_k|_{t=0} = 0.$$

Отсюда следует, что $\theta_0(x, t) = \varphi(y(x, t))$, а θ_k , $k > 1$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \theta_k(x, t) = & \int_0^t \sqrt{J(t_1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{J(t_1)}} \int_0^{t_1} \sqrt{J(t_2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{J(t_2)}} \dots \\ & \dots \int_0^{t_{k-1}} \sqrt{J} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{J(t_k)}} dt_k \dots dt_1, \end{aligned} \quad (8.51)$$

где $J(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} J(x, t_j)$ и интегрирование производится вдоль траекторий системы (8.46).

Докажем теперь, что функция $\psi(x, t, h)$, определенная равенством (8.43), в котором функции $\varphi_k(x, t)$ и $S(x, t)$ только что найдены нами, действительно определяет асимптотическое разложение решения задачи (8.39). Положим

$$\psi_N(x, t, h) = \frac{1}{\sqrt{J(x, t)}} e^{iS(x, t)/h} \left[\varphi(y(x, t)) + \sum_{k=1}^N h^k \theta_k(x, t) \right].$$

Нам нужно доказать, что функция $\psi_N(x, t, h)$ мало отличается от функции $\psi(x, t)$ — точного решения задачи (8.39). Точнее, мы докажем, что

$$\max_{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \pi/2]} |\psi_N(x, t, h) - \psi(x, t)| = O(h^{N-1/2}). \quad (8.52)$$

Для получения оценки (8.52) заметим, что по построению, $\psi_N(x, t, h)$ удовлетворяет уравнению

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_N}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_N}{\partial x^2} + x^2 \psi_N \right) - \hbar^N \sqrt{J(x, t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\theta_N(x, t)}{\sqrt{J(x, t)}}, \quad \psi_N|_{t=0} = \varphi e^{\frac{i}{h} S}$$

и, следовательно, разность $\psi_N(x, t, h) - \psi(x, t) = \tilde{\psi}(x, t, h)$ есть решение

задачи

$$-i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x^2} + x^2 \tilde{\Psi} \right) - \hbar^N \sqrt{J(x, t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\theta_N(x, t)}{\sqrt{J(x, t)}}, \quad (8.53)$$

$$\tilde{\Psi}|_{t=0} = 0.$$

Прямой подсчет легко показать, что решение задачи (8.53) дается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x, t) = & \int_0^t e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{2}(1 - \text{sign}(t-\tau))} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar |\sin(t-\tau)|}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2\hbar \sin(t-\tau)} [\cos(t-\tau)x^2 - 2xy + \cos(t-\tau)y^2]} \times \\ & \times \hbar^N \sqrt{J(y, t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\theta_N(y, t)}{\sqrt{J(y, t)}} dy d\tau. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Из равенств (8.51) легко видеть, что функции $\theta_k(x, t) \in C_0^\infty(x, t)$ $k=0, \dots$ вместе с функцией $\varphi(y)$. Учитывая, что $1/\sqrt{\sin z}$ — функция, интегрируемая в окрестности точки $z=0$, из равенства (8.54) непосредственно получаем оценку (8.52).

Положим теперь в наших формулах $x=0$, $t=\pi/2$. Заметим, что $S(x, t)|_{t=\pi/2} = \Phi(y(0, \pi/2))$. Это равенство легко получается из формулы (8.50). Из равенств (8.47) получаем:

$$q(0, \pi/2) = 0 = \partial\Phi/\partial y.$$

По условию, равенство $\partial\Phi/\partial y = 0$ возможно в единственной точке $y=y_0$. Таким образом, $y(0, \pi/2) = y_0$, и мы получаем разложение (8.38).

Замечание 1. Метод стационарной фазы можно применить и к интегралам вида $\int_a^b \varphi(y) e^{i\Phi(y)/\hbar} dy$. Пусть производная $\partial\Phi/\partial y$ отлична от нуля в некоторых окрестностях точек a и b . Рассмотрим на $[a, b]$ разбиение единицы $\{e_1(y), e_2(y), e_3(y)\}$, подчиненное следующим условиям: $e_1(y), e_2(y), e_3(y) \in C_0^\infty$, $e_1 + e_2 + e_3 = 1$ на $[a, b]$; $e_2(a) = e_3(b) = 1$; $\partial\Phi/\partial y \neq 0$ при $y \in \text{supp } e_2 \cup \text{supp } e_3$, $\text{supp } e_1 \subset (a, b)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(y) e^{i\Phi(y)/\hbar} dy = & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e_1(y) e^{i\Phi(y)/\hbar} dy + \\ & + \int_a^{\infty} e_2(y) \varphi(y) e^{i\Phi(y)/\hbar} dy + \int_{-\infty}^b e_3(y) \varphi(y) e^{i\Phi(y)/\hbar} dy. \end{aligned}$$

Первый интеграл уже вычислен нами, а вторые два, как нетрудно показать интегрированием по частям, являются величинами порядка $O(\hbar)$.

Замечание 2. Нам потребуются еще и суммы вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} h \sum_{n=-N-1}^N e^{\frac{i}{h} \Phi(nh)} \varphi(nh), \quad h = \frac{\pi}{N}.$$

Их вычисление сводится к предыдущему случаю, если воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} h \sum_{n=-N+1}^N e^{\frac{i}{h} \Phi(nh)} \varphi(nh) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i}{h} \Phi(y)} \varphi(y) dy + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i}{h} \Phi(y)} \varphi(y) \cos(2kNy) dy, \end{aligned} \quad (8.55)$$

доказательство которого элементарно проводится разложением функции $e^{\frac{i}{h} \Phi(y)} \varphi(y)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье с последующим использованием формулы для суммы членов геометрической прогрессии или $h \sum_{n=-N+1}^N \cos knh = 2\pi \delta_{k, 2mN}$, m — целое.

5. Шлейф осцилляций. Решение (8.37) есть сумма выражений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\xi) \sum_{n=-N+1}^N e^{(i/h)nh[S_{\pm}(x, t, nh) + x - \xi]} \varphi^{\pm}(x, t, nh) d\xi.$$

Но в силу формулы (8.55)

$$\begin{aligned} h \sum_{n=-N+1}^N e^{(i/h)nh[S_{\pm}(x, t, nh) + x - \xi]} \varphi^{\pm}(x, t, nh) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t\omega) e^{(i/h)\omega[S_{\pm}(x, t, \omega) + x - \xi]} d\omega + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t, \omega) \times \\ \times e^{(i/h)\omega[S_{\pm}(x, t, \omega) + x - \xi]} \cos 2k\omega N d\omega. \end{aligned}$$

Стационарная точка ω_0 интегралов определяется из уравнений

$$S_{\pm}(x, t, \omega_0) + x + \omega_0 \frac{\partial S_{\pm}}{\partial \omega}(x, t, \omega_0) = \xi + 2Nk. \quad (8.56)$$

При «не очень больших» t это уравнение будет разрешимо лишь при $k=0$, так как $S_{\pm}(x, t, \omega)|_{t=0} = 0$.

Оценим k -й ($k \neq 0$) член суммы. Проинтегрировав дважды по частям (один раз вводя косинус под знак дифференциала, а другой раз разложив косинус по формуле Эйлера) всю экспоненту, получим оценку вида $O(h/k^2)$. Отсюда следует, что сумма ряда от $k=1$ до бесконечности имеет порядок $O(h)$.

Теперь перейдем к решению неявного уравнения (8.56). Оказывается, что левая часть этого уравнения обладает замечательным

свойством. Производная от нее в силу соответствующей (плюсу и минусу) системы бихарактеристик (8.36) (т. е. по направлению соответствующей бихарактеристики) равна нулю. Проверить этот факт (носящий на самом деле общий характер) мы предоставляем читателю.

Отсюда следует, что левая часть равенства постоянна вдоль соответствующей бихарактеристики, а так как

$$S_{\pm}|_{t=0} = \frac{\partial S_{\pm}}{\partial \omega} \Big|_{t=0} = 0,$$

то при не очень больших t она равна $x_0^{\pm}(x, t, \omega_0)$ — решению уравнения (8.36): $x = X^{\pm}(x_0, \omega, t)$. Следовательно, уравнение (8.56) для стационарной точки эквивалентно уравнению

$$X^{\pm}(\xi, \omega_0, t) = x.$$

Значит, уравнение для стационарной точки разрешимо лишь для тех x , которые принадлежат замкнутым областям

$$\Omega_{\pm} = \{X^{\pm}(\xi, \omega, t), |\omega| \leq \pi\},$$

т. е. областям, образованным концами траекторий системы бихарактеристик (8.36), выходящих из точки ξ .

Пусть x лежит внутри одной из областей $\Omega_{\pm}$. Тогда, если $\omega \neq 0$, то

$$\frac{\partial x_0^{\pm}}{\partial \omega} = -\frac{\partial X^{\pm}}{\partial \omega} / \frac{\partial X^{\pm}}{\partial x_0} \neq 0 \quad \text{при } t \neq 0,$$

поскольку $\frac{\partial X^{\pm}}{\partial \omega} \neq 0$ при $t \neq 0$, как это видно из системы (8.36), если ее продифференцировать по ω . Значит, производная левой части (8.56) по ω отлична от нуля при $t \neq 0$, $\omega \neq 0$ и метод стационарной фазы применим. Поэтому ясно, что внутри областей $\Omega_{\pm}$ решение быстро осциллирует, а производные от него неограничены при $\hbar \rightarrow 0$ и, следовательно, заведомо не переходят в пределе в производные решения волнового уравнения.

З а м е ч а н и е. Если x лежит на характеристиках предельного волнового уравнения (т. е. $x = X_0^{\pm}(\xi, t)$, где $\frac{dX_0^{\pm}}{dt} = \mp C(X_0^{\pm})$, $X_0^{\pm}(\xi, 0) = \xi$), то стационарная точка $\omega_0 = 0$ является вырожденной:

$$\frac{\partial x_0^{\pm}}{\partial \omega}(x, t, 0) = 0.$$

Это означает на самом деле, что «основной разрыв» распространяется по характеристикам предельного волнового уравнения, а следом за ним возникает «шлейф» быстрых осцилляций. Носитель этого шлейфа определяется характеристиками $X^{\pm}$.

Мы видим на этом примере, что характеристики, определяемые уравнением Гамильтона, зависящим от упорядоченных операторов,

определяют в точности носитель шлейфа осцилляций. Этот факт на самом деле следует из общей теории для широкого класса задач, и приведенные здесь соотношения также носят общий характер.

Приведем теперь сравнение величины носителя этого шлейфа осцилляции с численным экспериментом.

За единицу длины мы взяли $l = 10^{-5}$ см, длину интервала (окружности) мы взяли равной $2l$, $h = 10^{-8}$ см, скорость звука

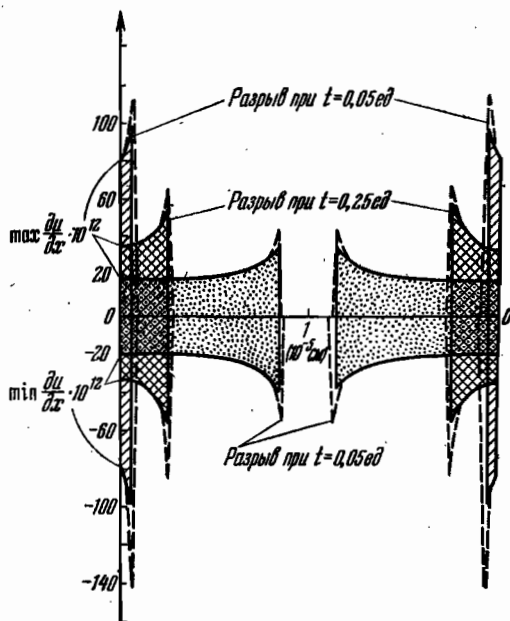


Рис. 1.

в кристалле $c = 10^5$ см/сек принята за единицу скорости. В качестве начального условия была взята периодическая функция вида $u|_{t=0} = \frac{1}{2}(x - 2n - 1)$, при $2n \leq x \leq 2n + 2$, $n = 0, \pm 1, \dots$, имеющая скачок в точках $x = 2n$, $n = 0, \pm 1, \dots$

На рис. 1 представлены графики функций:

$$\max_{u \in [x-5h, x+5h]} \frac{\partial u}{\partial x}(y),$$

обозначенный верхней границей заштрихованной области и

$$\min_{u \in [x-5h, x+5h]} \frac{\partial u}{\partial x}(y),$$

обозначенный нижней границей заштрихованной области.

(Сплошной линией обозначены графики точного решения, а пунктиром — графики решений, полученных с помощью асимптотической формулы.)

6. Эффект типа Черенкова. В 1934 г. советским физиком П. А. Черенковым был обнаружен эффект (нетормозного) излучения света, возникающего при движении в веществе заряженных частиц. Этот эффект был теоретически обоснован в 1937 г. И. Е. Таммом и И. М. Франком. Но лишь в 50-х годах стала видна исключительная широта применения этого эффекта (в 1958 году П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку была присуждена Нобелевская премия).

Эффект заключается в том, что при движении электрона в среде со скоростью, превышающей некоторую, зависящую от среды, величину, в определенной конической области вслед за ним излучаются быстро осциллирующие электромагнитные колебания — световые волны (черенковское излучение). Оказывается, математическая природа этого эффекта связана с определением характеристик, зависящих от упорядоченных операторов. Операторный метод позволяет обнаружить аналогичное (математическое) свойство для широкого класса псевдодифференциальных уравнений и, в частности, разностных схем, в том числе и для систем уравнений кристалла. В последнем случае оно непосредственно следует из полученных выше асимптотических формул.

Движение «электрона» со скоростью v математически описывается введением в правой части уравнения колебаний δ -образной функции в точке $x = vt$ (для эффекта Черенкова — электромагнитных колебаний в среде, а в нашем случае — системы колебаний кристалла). Черенковское излучение математически означает шлейф быстрых осцилляций решения, который следует за точкой $x = vt$. Этот эффект родствен тому, который был описан в предыдущем пункте. Мы приведем теоретический расчет этого шлейфа и его сравнение с численным экспериментом. Так же как и в предыдущем примере, окажется, что этот шлейф (область черенковского излучения) полностью определяется бихарактеристиками.

Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L_h u \stackrel{\text{def}}{=} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4c^2 \sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \varphi(t) \delta_h(x - vt) \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \end{cases} \quad (8.57)$$

где $\delta_h(x - vt) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N e^{ikh(x-vt)}$ и $\varphi(t)$ — некоторая гладкая функция. Будем решать эту задачу при не очень больших t . Из теоремы 8.2 следует, что решение задачи 8.57 $L_h u = f$

единственно: $u \stackrel{\text{def}}{=} L_h^{-1} f$. Аналогично (8.8') — (8.8'') получаем, что

$$R(x, t) = \frac{1}{h^2} \int_0^t \int_0^{t-\tau} G(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}) \varphi(\tau) \delta_h(x - \tau v) d\tau' d\tau$$

удовлетворяет соотношению

$$L_h R = \varphi(t) \delta_h(x, t) + \int_0^t \int_0^{t-\tau} f_1(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}) \varphi(\tau) \delta_h(x, \tau) d\tau' d\tau,$$

где $f_1(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x})$ удовлетворяет оценке (8.7). Согласно лемме 8.2 и теореме 8.1 решение уравнения

$$L_h R_1 = \int_0^t \int_0^{t-\tau} f_1(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}) \varphi(\tau) \delta_h(x, \tau) d\tau' d\tau,$$

$$R_1|_{t=0} = \frac{\partial R_1}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

принадлежит $C_{t,h}^k(m)$, где $k(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Значит, в силу того, что $R - R_1$ есть решение исходной задачи (8.57), вся негладкая часть решения этой задачи содержится в R . Аналогично предыдущему пункту, при вычислении асимптотики R при $h \rightarrow 0$ мы приходим к выводу, что главный член определяется интегралом вида (после интегрирования по частям по τ'):

$$\frac{1}{h^2 \cdot 2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{x/v} \left[e^{\frac{i\omega S_+(x, t-\xi/v, \omega)}{h}} \frac{\Phi_0^+(x, t-\xi/v, \omega)}{\frac{\partial S_+}{\partial t}(x, t-\xi/v, \omega)} - \right. \\ \left. - e^{\frac{i\omega S_-(x, t-\xi/v, \omega)}{h}} \frac{\Phi_0^-(x, t-\xi/v, \omega)}{\frac{\partial S_-}{\partial t}(x, t-\xi/v, \omega)} \right] e^{i\omega(x-\xi)} \varphi(\xi/v) d\omega d\xi.$$

Применяя последовательно метод стационарной фазы сначала по ω , затем по ξ , получаем, что общая стационарная точка ω_0, ξ_0 ($\omega_0 \neq 0$), находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0^\pm(x, t - \xi_0/v, \omega_0), \\ \omega_0 &= \pm \frac{c(x)}{v} \sin \left[\frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{\partial S_\mp}{\partial x} \left(x, t - \frac{\xi_0}{v}, \omega_0 \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Нетрудно убедиться, что если $\omega \neq 0$, $|\omega_0| < \pi$, $|\xi_0| < \pi$, то вторые производные отличны от нуля, и метод стационарной фазы применим.

Рассмотрим для простоты случай $c = \text{const}$. Тогда система (8.58) примет вид

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pm \frac{2c}{v} \sin \frac{\omega_0}{2}, \\ \xi_0 &= \frac{x \pm ct \cos(\omega_0/2)}{1 \pm \frac{c}{v} \cos \frac{\omega_0}{2}}.\end{aligned}\quad (8.59)$$

Решение уравнения (8.59), как это легко видеть из графика, существует при $\omega_0 \neq 0$, если

$$c \geq v \geq 2c/\pi, \quad (8.60)$$

поскольку $|\omega| \leq \pi$. При выполнении неравенства (8.60) решение осциллирует при $h \rightarrow 0$ на множестве, состоящем из концов всех траекторий, выпущенных при $t=0$ из областей

$$\Omega_\xi^0 = \left\{ \bar{X}_0 = \xi \left(1 \pm \frac{c}{v} \cos \frac{\omega_0}{2} \right) \right\}, \quad (8.61)$$

где ω_0 определяется из уравнения (8.61). Тогда $\omega_0 = 0$ является вырожденной, и решение имеет особый характер («резонанс»).

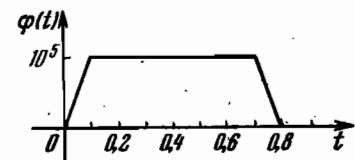


Рис. 2.

Приведем сравнение ширины шлейфа осцилляций для задачи (8.57), вычисленной по формулам (8.61) с точным решением задачи (8.58), полученным на ЭВМ для различных v . Полагая в единицах предыдущего пункта длину окружности равной 2, $c=1$, $h=10^{-3}$. Вторая производная $\partial^2 u / \partial t^2$ аппроксимируется по формуле $-\frac{4}{\tau^2} \sin^2 \frac{i\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t}$, $\tau = 1.5 \cdot 10^{-4}$.

График функции $\varphi(t)$ изображен на рис. 2. На рис. 3 и 4 изображены графики функций

$$\max_{[x-10h, x+10h]} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } \min_{[x-10h, x+10h]} \frac{\partial u}{\partial x}$$

в различные моменты времени. Промежуток между графиками этих функций закрашен. Вертикальными прямыми обозначены границы шлейфа осцилляций, полученные из асимптотических формул.

7. Фокусировка в кристалле. Рассмотрим пример быстро осциллирующего начального условия

$$\begin{aligned}u|_{t=0} &= \varepsilon \psi(x, h), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= -\varepsilon \frac{2ic}{h} \sin \frac{\hat{\omega}}{2} \psi(x, h),\end{aligned}\quad (8.62)$$

где $\psi(x, h)$ — периодическое продолжение с отрезка $[0, 2\pi]$ функ-

ции $\varphi(x) \cos \frac{S(x)}{h}$; $S, \varphi \in C^\infty$, $\text{supp } \varphi \in (0, 2\pi)$, ϵ — некоторый параметр.

В силу метода стационарной фазы коэффициенты Фурье функции ψ с номером n , $|n| > N$ имеют порядок $O(h^\infty)$, поэтому

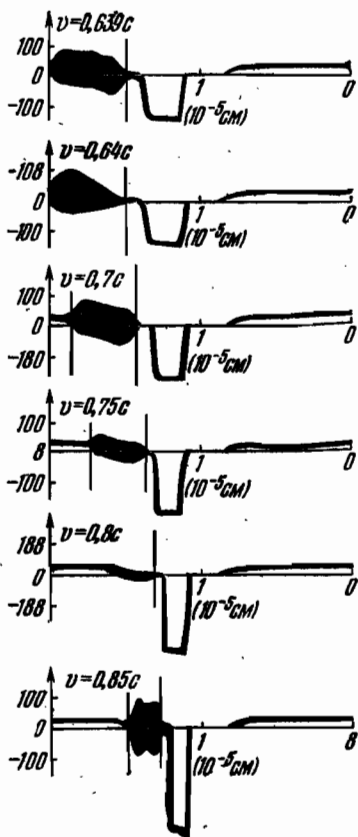


Рис. 3.

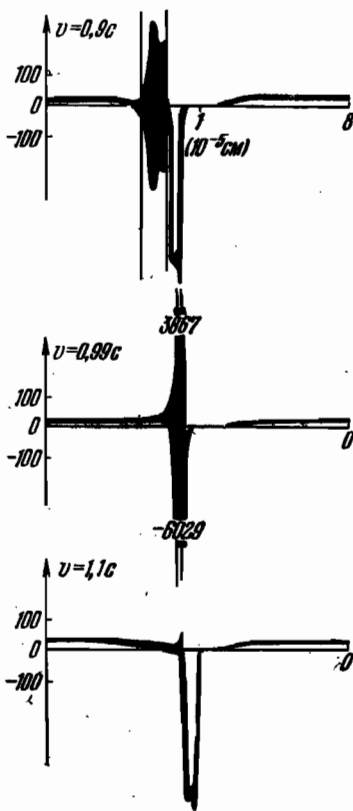


Рис. 4.

формулы, полученные в предыдущих пунктах, применимы и в случае начальных данных (8.62).

Сравним результаты, полученные при помощи формул пункта 3, с численным решением этой задачи на ЭВМ.

При численном расчете были выбраны: длина окружности $3l$, $l = 10^{-5}$ см, моменты времени $t_i = 2i \cdot 10^{-10}$ сек ($i = 0, 1, \dots, 5$),

в единицах l

$$S(x) = x^2$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x & \text{при } x \in [0; 0,25] \\ 1 & \text{при } x \in [0,25; 2] \\ 4(2-x) + 1 & \text{при } x \in [2; 2,25] \\ 0 & \text{при } x \in [2,25; 3]. \end{cases}$$

Аналогично тому, как это было сделано в двух предыдущих пунктах, решение уравнения кристалла при $c = \text{const}$ может быть вычислено с помощью формул (8.37) и (8.38). При этом член, отвечающий знаку $+$, не будет иметь стационарной точки, и, следовательно, может не учитываться. Нетрудно видеть, что при $ct < 1$ метод стационарной фазы применим. В точке $ct = 1$, $x = \pi/2$ условие $\partial^2 \Phi / \partial y^2 \neq 0$ леммы 8.3 нарушается. В этой точке, называемой фокальной, колебания кристалла имеют большую амплитуду, чем в соседних точках.

Заметим, что фокальная точка может быть определена непосредственно из уравнений бихарактеристик (аналогичных (8.36)) для $c = \text{const}$

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \frac{p}{2}, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad (8.62')$$

начальным условиям (8.62) с $S = x^2$ соответствуют начальные условия для системы уравнений (8.62')

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = p_0 = 2x_0.$$

Рассмотрим фазовую плоскость p, x (в которой отождествим точки $x = 2\pi l$ так, что на самом деле можно сказать, что мы рассматриваем цилиндр). Начальному условию $p_0 = 2x_0$ отвечает прямая $p = 2x$, которая сдвигается вдоль траекторий системы бихарактеристик: а именно, в фиксированный момент мы получаем кривую $\{x(x_0, t), p(x_0, t)\}$. Это изменение кривых в разные моменты времени $t = t_1, \dots, t_5$ изображено на рис. 5. В момент $t = t_5$ кривая проектируется на ось p и при $p = \pi$ касательная к ней параллельна оси p . Точка, в которой касательная параллельна оси p , и является фокальной.

На рис. 6 изображены графики $\max U$ и $\min U$ (область между ними зачерчена) для точного решения уравнения (8.4), отвечающего начальным данным (8.62) и $t = t_0, \dots, t_4$, а на рис. 7 — соответствующие графики для решения, полученного по асимптотическим формулам ($a = 1$).

На рис. 8 и рис. 9 изображены графики, отвечающие $t = t_5$ (точному решению соответствует рис. 8). Как мы видим, в фокальной точке амплитуда колебаний кристалла резко возрастает. Теперь рассмотрим нелинейное уравнение колебаний решетки.

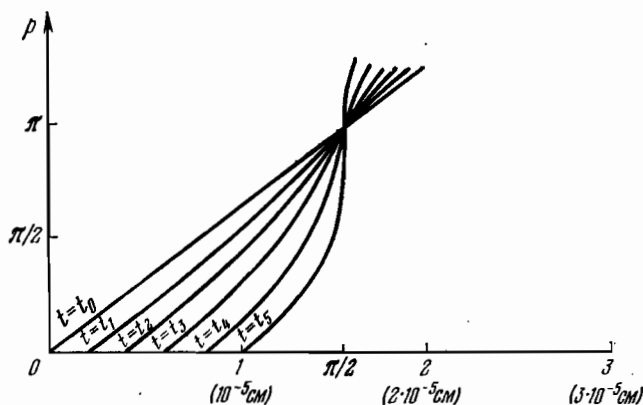


Рис. 5.

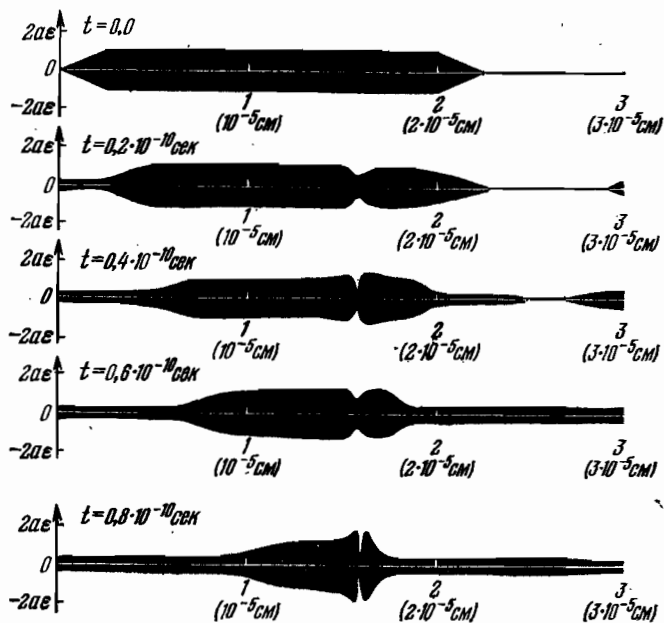


Рис. 6.

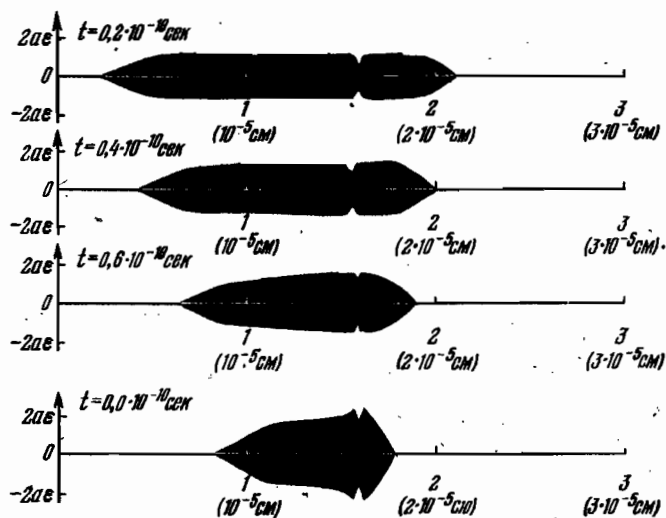


Рис. 7.

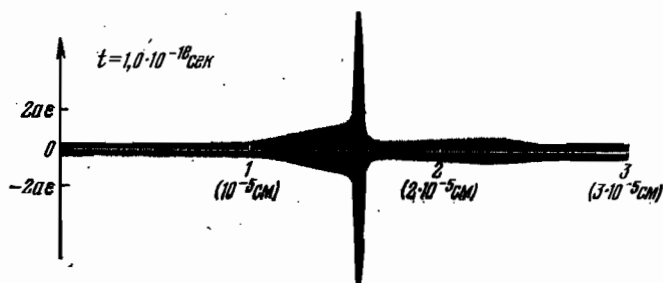


Рис. 8.

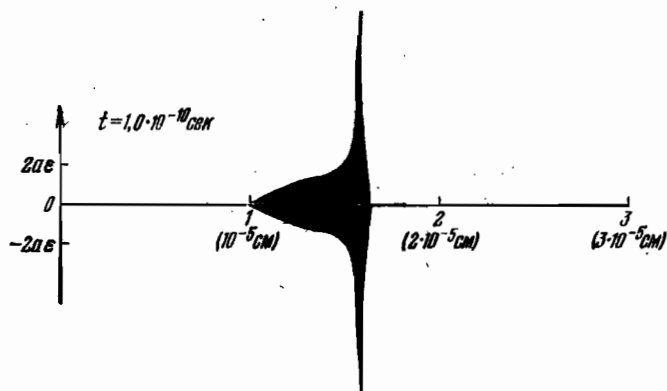


Рис. 9.

8. Нелинейное уравнение кристалла. До сих пор мы ограничивались гармоническим приближением системы уравнений Ньютона для атомов решетки. Фактически мы предполагали амплитуды начальных отклонений малыми и пренебрегали нелинейными членами. Теперь мы учтем поправку, которую вносят квадратичные члены в уравнении колебаний кристаллической решетки. Это означает, что к уравнению (8.1) добавляется член

$$c^2 \alpha [(u_{n+1} - u_n)^2 - (u_n - u_{n-1})^2],$$

где α — некоторый параметр.

Подставляя в это новое уравнение $U_n + W_n$, где U_n — решение линейного уравнения, мы получим для определения W_n (считая $|W_n - W_{n-1}| \ll |U_n - U_{n-1}|$) следующее неоднородное уравнение:

$$\ddot{W}_n - c^2 \frac{W_{n+1} - 2W_n + W_{n-1}}{h^2} = c^2 \alpha [(U_{n+1} - U_n)^2 - (U_n - U_{n-1})^2].$$

Для простоты рассмотрим случай, когда c и α — константы. Общий случай будет рассмотрен в приложении.

Относительно зависимости начальных условий $U_n(0)$ и $\dot{U}_n(0)$ от параметра h мы сделаем одно существенное предположение.

Введем следующее определение.

Будем говорить, что семейство функций $v_n(h)$, $-N+1 \leq n \leq N$ отвечает предельному распределению $g(x, p)$, $-\pi \leq p \leq \pi$, где g — четная обобщенная функция от p , если для любой функции $a \in C^\infty(-\pi, \pi)$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=-N+1}^N a(nh) v_n \frac{(v_{n+h} + v_{n-h})}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x) g(x, p) \cos kp \, dx \, dp, \quad (8.63)$$

где $v_{l+2N} \stackrel{\text{def}}{=} v_l$.

Физический смысл этого условия особенно нагляден при $h=0$, так как в этом случае требуется, чтобы среднее значение $a(nh)$ сходилось к среднему значению $a(x)$ по некоторому распределению.

Мы будем рассматривать, как и ранее, вместо функций на сетке пространство функций M_N , причем сформулируем окончательную теорему в терминах функций M_N . Заметим, что все рассуждения этого пункта переносятся на весьма широкий класс нелинейных псевдодифференциальных уравнений, в которых нелинейные члены можно считать малыми. Первое приближение теории возмущений в этом случае есть решение уравнения (8.4),

а второе приближение удовлетворяет уравнению

$$L_h \omega = -8ic^2 \alpha h^2 \sin \frac{\omega}{2} \left(\left(\sin \frac{\omega}{2} u \right)^2 \right), \quad \omega = \hat{\omega} = -ih \frac{\partial}{\partial x}, \quad (8.64)$$

где u удовлетворяет линейному уравнению $L_h u = 0$. Для простоты в качестве решения u линейного уравнения используем один член суммы $\sum_{\pm}$ формулы (8.37), отвечающий знаку минус. Мы предположим, что его начальное значение $u_0 \in M_n$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} u_0 a(x) (\cos k \hat{\omega}) u_0 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x) g(x, \omega) \cos k \omega dx d\omega. \quad (8.65)$$

Прежде всего заметим, что из условия (8.65) следует более общее и более естественное для непрерывного случая условие. Обозначим

$$(f, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi(x)} dx.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8.4. Пусть $f(x, \omega) \in C^\infty$ — четная периодическая функция ω . Тогда, если $\psi_h(x)$ отвечает предельному распределению $g(x, \omega)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\psi_h, f(x, \hat{\omega}) \psi_h) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \omega) g(x, \omega) dx d\omega.$$

Доказательство. Разложим функцию $f(x, \omega)$ в ряд Фурье по ω . Имеем

$$f(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) e^{in\omega}, \quad (8.66)$$

где

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \omega) e^{-in\omega} d\omega. \quad (8.67)$$

Из условий леммы следует, что для любого n выполняется неравенство

$$\max_x |a_n(x)| \leq \frac{C_k}{n^k}, \quad (8.68)$$

$k > 0$ — любое целое число, $C_k = \text{const}$. Доказательство этой оценки легко получается из (8.67) интегрированием по частям.

Докажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(f_k(x, \hat{\omega}) - f(x, \hat{\omega})) \psi_h(x)\| = 0$, где через $f_k(x, \omega)$ мы обозначили частичную сумму ряда (8.66):

$$f_k(x, \omega) = \sum_{|n| \leq k} a_n(x) e^{in\omega}.$$

Заметим, что функция $f_k(x, \omega)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $f(x, \omega)$. Имеем для любой гладкой функции $u(x)$

$$\begin{aligned} [f(x, \omega) - f_k(x, \omega)] u(x) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iny} dy \right] e^{inx} [f(x, nh) - f_k(x, nh)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iny} dy \right] \sum_{|m| > k} a_m(x) e^{i(mnh + nx)}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$[f(x, \omega) - f_k(x, \omega)] u(x) = \left(\sum_{|n| > k} a_n(x) e^{in\omega} \right) u(x). \quad (8.69)$$

Оценим n -е слагаемое в сумме (8.69). Очевидно, справедливо неравенство

$$\|a_n(x) e^{in\omega} u(x)\| \leq \max_x |a_n(x)| \|u\|,$$

или в силу (8.68)

$$\|a_n(x) e^{in\omega} u(x)\| \leq \frac{C_k}{n^k} \|u\|, \quad (8.70)$$

$k > 0$ — любое целое число. Из (8.69) и (8.70) получаем

$$\|[f(x, \omega) - f_k(x, \omega)] u(x)\| \leq \sum_{|n| > k} \frac{1}{n^k} C_k \|u\|, \quad \forall l.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|[f(x, \omega) - f_k(x, \omega)] u(x)\| = 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое k_0 , что

$$|(\psi_h, (f(x, \omega) - f_k(x, \omega)) \psi_h)| < \delta \text{ при } k \geq k_0,$$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x, \omega) - f_k(x, \omega)] g(x, \omega) dx d\omega \right| < \delta \text{ при } k \geq k_0,$$

наконец, в силу условия (8.63) имеем

$$|(\psi_h, f_k(x, \omega) \psi_h) - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x, \omega) g(x, \omega) dx d\omega| \leq c(k) \delta_h,$$

где $c(k) = \text{const}$ и $\delta_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Фиксируя $k > k_0$ и устремляя h к нулю, мы получим, что при достаточно малых h левая часть последнего неравенства не превосходит δ . Отсюда и из предыдущих неравенств следует утверждение леммы.

Определение. Пусть для любой финитной $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int \varphi(x) F_h(x) dx = \int \varphi(x) r(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $F_h(x) \in C^\infty$ — однопараметрическое семейство функций, h достаточно мало. Тогда будем говорить, что $F_h(x)$ сходится к $r(x)$ обобщенно, и писать $F_h(x) \rightarrow r(x)$.

Найдем обобщенный предел правой части уравнения (8.64). Обозначим $F_h = -4 \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u \right)^2$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 8.5.

$$F_h \rightarrow 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} g \left(x - ct \cos \frac{\omega}{2}, \omega \right) d\omega.$$

Доказательство. Обозначим через $F_x \rightarrow p$ и $F_p \rightarrow x$ преобразование Фурье вида

$$(F_x \rightarrow p f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ipx} dx; (F_p \rightarrow x f_p)(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_p e^{ipx}.$$

Очевидно, что

$$f(\hat{\omega}) \psi = F_p \rightarrow x f(p h) F_x \rightarrow p \psi.$$

С помощью этой формулы получим следующее равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_2 f(\hat{\omega}) \psi_1 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1 \bar{f}(\hat{\omega}) \psi_2 dx,$$

где $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty$ — периодические функции. Применяя это соотношение, получим для $\varphi \in C^\infty$, $u = T u_0$ (по определению $T: u_0 \rightarrow u$)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) F_h(x, t) dx &= -4 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left(T \sin \frac{\hat{\omega}}{2} u_0 \right)^2 dx = \\ &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{\hat{\omega}}{2} [T \varphi(x) T] \sin \frac{\hat{\omega}}{2} u_0 u_0 dx. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Применим к выражению, заключенному в квадратные скобки, теорему 1.1 гл. V. При $c = \text{const}$ в (8.37) $\varphi_0^- = 1$, $\varphi_k^- = 0$, $k \geq 1$, а

$$S = -2ct \sin \frac{\omega}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega} &= -2ct \frac{\sin \frac{\omega'}{2} - \sin \frac{\omega}{2}}{\omega' - \omega}, \\ \tilde{x} &= x - \frac{\delta S}{\delta \omega} = x + 2ct \frac{\sin \frac{\omega'}{2} - \sin \frac{\omega}{2}}{\omega' - \omega}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = 1.$$

Согласно теореме 1.1 гл. V получаем

$$T\varphi(x)T = \varphi\left(x + 2ct \frac{\sin \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2}}{\omega - \omega}\right).$$

Отсюда, в силу формулы коммутации следует, что выражение (8.71) отличается от интеграла

$$4 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi\left(x + ct \cos \frac{\omega}{2}\right) \sin^2 \frac{\omega}{2} u_0 \right) u_0 dx.$$

на $O(h)$.

Последний интеграл в силу леммы 8.4 стремится при $h \rightarrow 0$ к

$$+ 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(x + ct \cos \frac{\omega}{2}\right) \sin^2 \frac{\omega}{2} g(x, \omega) dx d\omega.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Докажем следующую теорему:

Теорема 8.3. Пусть в уравнении (8.64) $\alpha = \frac{1}{h}$; тогда решение w задачи (8.64), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, обобщенно сходится к функции

$$w_1(x, t) = -2c \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} \left[g\left(x - c\tau \cos \frac{\omega}{2} + c(t - \tau), \omega\right) - g\left(x - c\tau \cos \frac{\omega}{2} - c(t - \tau), \omega\right) \right] d\omega d\tau. \quad (8.72)$$

Доказательство. Примем следующие обозначения:

$$r(x, t) = -4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} g\left(x - ct \cos \frac{\omega}{2}, \omega\right) d\omega.$$

(Нетрудно убедиться, что $Lw_1(x, t) = c^2 r'_x(x, t)$, где $L = \square_c$ — волновой оператор.)

$$f_h = F_h - r(x, t); \quad v_h = L_h^{-1} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{2}}{h} f_h \right);$$

$$L_h^* \stackrel{\text{def}}{=} h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4c^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} c^2(x);$$

$$L^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_2(x).$$

Через $(L_h^*)^{-1}f$ и $(L^*)^{-1}f$ обозначим решения задач $L_h^*u = f(x, t)$ и $L^*u = f(x, t)$, удовлетворяющие нулевым условиям при $t = T$:

$$u \Big|_{t=T} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0.$$

При доказательстве мы будем использовать следующие факты:

1. Для операторов L_h^* и L^* справедлив аналог леммы 8.2. В частности, если $\psi(x, t) \in C^\infty$ не зависит от h , то

$$h^2 (L_h^*)^{-1} \psi(x, t) - (L^*)^{-1} \psi(x, t) = O(h).$$

В этом можно убедиться аналогично тому, как это было проделано в доказательстве леммы 8.2.

2. Имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} h^2 \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x, t) L_h^{-1} \frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} f_h dx dt = \\ = h^2 \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} (L_h^{-1})^* \psi(x, t) \right] f_h dx dt, \quad (8.73) \end{aligned}$$

которое можно доказать, используя тождество $\psi = L_h^* (L_h^*)^{-1} \psi$ и интегрируя по частям.

3. $\|F_h\| \leq c_1 h^{-1/2}$, где c_1 — некоторая не зависящая от h константа. Из 1) — 3) следует, что правая часть равенства (8.73) отличается от выражения

$$\int_0^T \int \frac{\partial}{\partial x} (L^*{}^{-1} \psi(x, t)) f_h(x, t) dx dt$$

на $O(h^{1/2})$, а это выражение согласно лемме 8.5 стремится к 0 при $h \rightarrow 0$.

Из леммы 8.2 следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_h^{-1} \left(\frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} \right) r(x, t) = \frac{w_1}{c^2}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что на самом деле в теореме 8.3 можно заменить обобщенную сходимость на равномерную сходимость. Это требует, однако, дополнительных оценок. Более общая теорема доказана в приложении 1.

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы мы пользовались только гладкостью функции $w_1(x, t)$, а не функции $g(x, \omega)$. Эта последняя функция может быть, вообще говоря, и обобщенной, и теорема будет верна для тех t , для которых $w_1(x, t)$ остается гладкой.

Отметим, что наиболее интересные результаты получаются, когда $g(x, \omega)$ близка к δ -функции. (Конкретный вид u_0 несуществен.)

Мы рассмотрим численный эксперимент для случая, когда

$$g(x, \omega) = \varepsilon^2/4\varphi^2(x) [\delta(\omega + 2x) + \delta(\omega - 2x)],$$

где $\varphi(x)$ определена в предыдущем пункте.

Для реализации численного эксперимента мы рассмотрим наиболее употребительный потенциал взаимодействия между атомами

решетки, приводящий к системе

$$\ddot{u}_n = \frac{c^2}{h^3} \left\{ f\left(\frac{h^{-1} + u_n - u_{n-1}}{h^{-1}}\right) - f\left(\frac{h^{-1} + u_{n+1} - u_n}{h^{-1}}\right) \right\} \quad (8.74)$$

$$f(z) = -\frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^{10}} \right\}, \quad h = 10^{-3}, \quad t \in [0, 1] = [0, 10^{-10} \text{ сек}],$$

$$c^2 = 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm 3000; \quad u_n|_{t=0} = \epsilon \varphi(hn) \cos\{hn^2\},$$

$$\dot{u}_n|_{t=0} = c\epsilon h^{-1} \varphi\left(h\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \cos\left\{h\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right\} - \\ - c\epsilon h^{-1} \varphi\left(h\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left\{h\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right\},$$

Мы поставили те же начальные условия, что и в начале 7-го пункта. При численном расчете для $\epsilon = 10^{-1}$ решение на ЭВМ нелинейного уравнения (8.74) совпадает с решением линейного

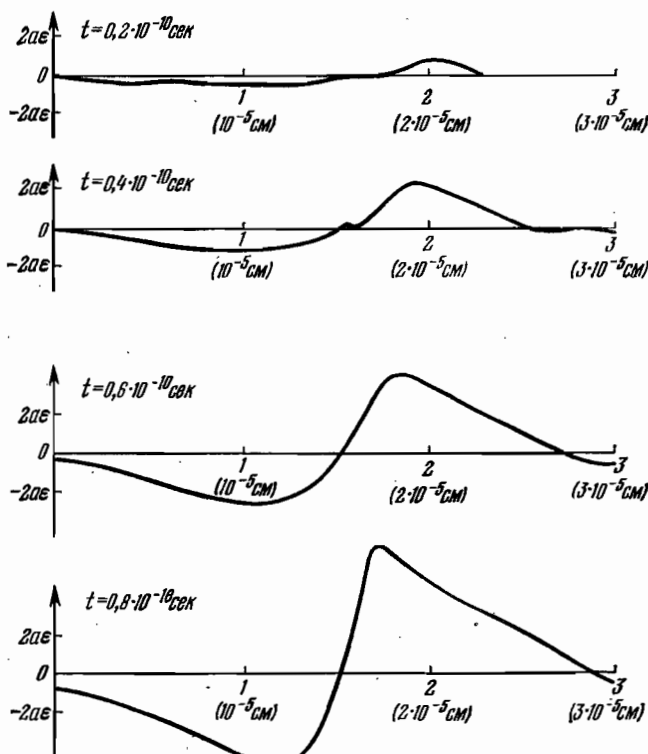


Рис. 10.

уравнения, график которого изображен на рис. 6. При $\epsilon = 2$, $a = 1$ на рис. 10 и 11 приведены соответственно деформация точек

равновесия для численного решения уравнения (8.74) и полученная по формуле (8.72). Моменты времени, которым отвечают

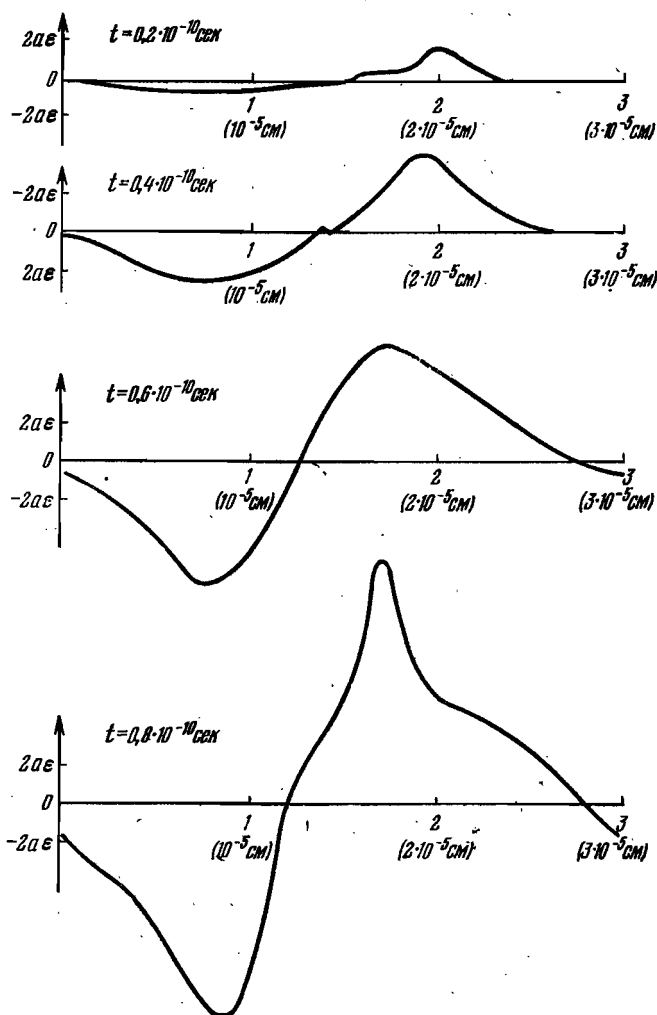


Рис. 11.

графики, те же, что и в линейном случае. На рис. 12 изображен график точного решения уравнения (8.74) в момент образования фокальной точки. Затухает размах колебаний атомов решетки, промежуток между $\max$ и $\min$.

Обнаруженный новый эффект может служить объяснением ряда физических явлений. Он родствен общезвестному эффекту рас-

ширения кристалла при повышении температуры, свойству преобразовывать тепловые колебания малой амплитуды, как бы складывая их, что приводит к неосциллирующим изменениям кристалла на огромную (сравнительно с амплитудой тепловых колебаний) величину. Полученная формула распространяется на весьма

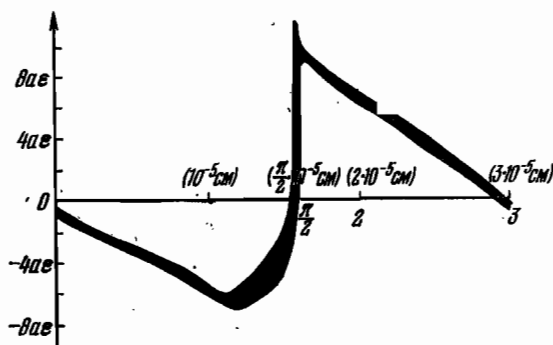


Рис. 12.

общие уравнения, в которых присутствует малый квадратичный член. В некоторых вопросах физики наблюдается сходное явление, называемое «детектированием» — выпрямлением быстро осциллирующих начальных условий. Поэтому можно сказать, что в результате «детектирования» плюс «фокусировки» образуется мощная бегущая волна большой концентрации энергии, с одной стороны которой кристалл сильно расширяется, а с другой — сильно сжимается.

§ 9. Понятие квазиобратимости оператора и формулировка основной теоремы

1. Основная задача. В § 7 и § 8 мы привели примеры по применению метода упорядоченных операторов подобно тому, как в § 1 мы приводили примеры на решение уравнений операторным методом Хевисайда.

С другой стороны, в § 3 мы видели, что задача решения систем обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к чисто алгебраической. Оказывается, что в рамках алгебры с μ -структурой можно поставить и решить задачу, которая по существу охватывает как уравнения с частными производными с переменными коэффициентами, так и задачи на устойчивость разностных схем, т. е. охватить решение всех этих задач одной алгебраической теоремой. И хотя доказательство этой теоремы завершается лишь в последней главе, мы попытаемся здесь разъяснить ее смысл и значение.

В рассмотренных выше примерах под решением задачи понималось сведение исходного уравнения к интегральному уравнению типа Вольтерра с гладким неосциллирующим ядром. Такого рода редукция к интегральному уравнению (Вольтерра или Фредгольма) с гладким ядром является основной задачей теории уравнений с частными производными.

Приводимое ниже понятие квазиобратимости оператора позволяет распространить этот подход к решению задач для дифференциальных уравнений на операторный случай.

Определение. Пусть $\mathcal{L}$ — модуль над алгеброй $\mathcal{A}$, наделенный μ — структурой, $A_1 \dots A_n, B \in X$. Элемент $f \in \mathcal{A}$ назовем квазиобратимым, если существуют такие последовательности элементов $X_k \in \mathcal{L}$, $X'_k \in \mathcal{L}$, что произведения fX_k и $X'_k f$ представимы в виде

$$\begin{aligned} fX_k &= 1 + R_k \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B} \right), \\ X'_k f &= 1 + R'_k \left(\overset{n+1}{A_1}, \dots, \overset{2}{A_n}, \overset{1}{B} \right), \end{aligned} \quad (9.1)$$

где функции $R_k(x, \alpha)$ и $R'_k(x, \alpha)$ убывают при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $|x|^{-k}$; $|R_k| = O_{\mathcal{L}}(|x|^{-k})$, $|R'_k| = O_{\mathcal{L}}(|x|^{-k})$.

Последовательность $\{X_k\}$ будем называть правой квазиобратной, а $\{X'_k\}$ — левой квазиобратной.

Замечание. В случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ есть алгебра неограниченных операторов (см. гл. I—III), это определение может быть заменено на следующее. Оператор $T \in \mathcal{A}$ квазиобратим, если существуют такие последовательности $\{X_k\} \subset \mathcal{A}$, $\{X'_k\} \subset \mathcal{A}$, что $TX_k = 1 + S_k^+$, $X'_k T = 1 + S_k^-$, где операторы S_k^+ , S_k^- удовлетворяют условиям

$$\left\| \prod_{i=1}^n A_i^t S_k^{\pm 1} \right\| \leq c, \quad \forall i: \Sigma |i| = k, \quad c = \text{const.}$$

В этом смысле квазиобратная последовательность дает асимптотическое решение задач.

На самом деле ниже всюду сами элементы f , X_k , X'_k также будут представимы в виде $f = f \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B} \right)$, $X_k = X_k \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B} \right)$, $X'_k = X'_k \left(\overset{n+1}{A_1}, \dots, \overset{2}{A_n}, \overset{1}{B} \right)$.

Нашей основной задачей является отыскание квазиобратных последовательностей для элемента $f \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B} \right)$. Мы решим ее при некоторых предположениях относительно операторов $A_1, \dots, A_n, B$ и символа $f(x, \alpha)$.

Прежде чем приступить к формулировке этих условий, естественно решить вопрос о квазиобратимости элементов в триви-

альном случае — для коммутативной алгебры. В этом случае можно рассматривать, например, операторы $x_1, \dots, x_n$ и α , причем символы будут совпадать с отвечающими им операторами. И если оператор $f = f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$ имеет нули при $\alpha = \alpha^0$ и $|x| \rightarrow \infty$ (например, $f = x_1^2 - x_2^2 + ix_2^2 \sin^2 \alpha$), то он не является квазиобратимым (нельзя подобрать такой гладкой функции $\mathcal{X}(x_1, x_2, \alpha)$, что $(x_1^2 - x_2^2 + ix_2^2 \sin^2 \alpha) \mathcal{X}(x_1, x_2, \alpha) = 1 + R(x_1, x_2, \alpha)$, где $R(x_1, x_2, \alpha) \rightarrow 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$, ибо левая часть равенства обращается в нуль при $x_1 = x_2, \alpha = 0$). Поэтому на первый взгляд кажется естественным потребовать, чтобы символ $f(x, \alpha)$ не имел нулей при $|x| \rightarrow \infty$. Однако это требование слишком жестко: оно лишило бы нас основных приложений. Все трудности построения квазиобратных последовательностей возникают именно в связи с тем, что символ оператора $f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B})$ обращается, вообще говоря, в нуль при $|x| \rightarrow \infty$. Случай коммутирующих операторов в этом отношении является особым. Чтобы понять неожиданность этого момента, обратимся к примеру дифференциального уравнения.

Наше утверждение относительно особого случая коммутативных алгебр применительно к этому примеру представляет собой следующую парадоксальную на первый взгляд альтернативу. Задача заведомо не имеет решения как раз в самом простом случае дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Вполне объяснимо стремление привести конкретную задачу (за счет пренебрежения некоторыми факторами и известной идеализации условий) к уравнению с постоянными коэффициентами. Дело не только в том, что такие уравнения лучше всего изучены, но и в том, что для решения уравнений с переменными коэффициентами отправным пунктом, модельной задачей часто служат уравнения с постоянными коэффициентами. Однако, как это будет видно из основной теоремы, случай постоянных коэффициентов оказывается весьма специальным и вырожденным.

Например, рассмотрим символы $f_1(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$ и $f_2(y_1, y_2, \alpha) = y_1^2 - y_2^2 - i\varphi(\alpha^2)y_2^2$, где функция $\varphi(\alpha^2) \geq 0$ равна нулю при $\alpha^2 < T$ и больше нуля при $2T + \delta \geq \alpha^2 \geq 2T$. Оба символа при $\alpha^2 < T$ совпадают и обращаются в нуль на бесконечности при $y_1 = y_2$. Пусть $A_1 = x, A_2 = y, B = i\partial/\partial x$, так что A_1 коммутирует с A_2 . Как уже говорилось, оператор $\overset{1}{A}_1^2 - \overset{2}{A}_2^2$, отвечающий символу $f_1(y_1, y_2)$, не является квазиобратимым. А оператор $\overset{1}{A}_1^2 - \overset{2}{A}_2^2 - i\varphi(\overset{2}{B}^2)\overset{3}{A}_2^2$ оказывается (как это будет видно из основной теоремы) квазиобратимым. Положим теперь $A_1 = i\partial/\partial t, A_2 = i\partial/\partial x, B = t$. Оператор, соответствующий символу $f_1(y_1, y_2)$, будет волновым оператором $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ (см. § 8). Он не является квазиобратимым. Добавление к нему члена $-i\varphi(t^2)\partial^2/\partial x^2$ соответствует символу $f_2(y_1, y_2, \alpha)$ и отражает факт поглощения высокочастотных волн при $t^2 > 2T$. При этом решения уравнений $f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)u = F(x, t)$ ($F(x, t) = 0$ при $t < 0$) и $f_2(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{B})w = F(x, t)$ совпадают при $t^2 < T$. (См. ниже пример).

З а м е ч а н и е. Пусть совместный спектр (с учетом аксиомы μ_4) операторов $A_1, \dots, A_n, B$ принадлежит области $D \subset \mathbb{R}^n \times M^m$ и пусть функция $P(x, \alpha) \in \mathcal{S}^\infty$ равна 1 при $x, \alpha \in D$ и нулю вне некоторой большой области. Тогда по определению совместного спектра $P(A_1, \dots, A_n, B) = 1$, и, следовательно, в этом случае в формулах (9.1) мы можем подставить вместо единицы $P(A_1, \dots, A_n, B)$, ибо $\text{supp}(1 - P(x, \alpha)) \cap \sigma(A_1, \dots, A_n, B) = \emptyset$.

П р и м е р. Рассмотрим операторы

$$A_1 = i\partial/\partial x, A_2 = i\partial/\partial y, A_3 = x, A_4 = y,$$

и пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — полином от x_1 и x_2 , а $x_3, x_4 \in M^2$, т. е.

$$f(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)$$

есть дифференциальный оператор. Построение квазиобратного оператора сводит в этом случае задачу о решении дифференциального уравнения

$$f(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)u(x, y) = F(x, y)$$

к решению интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & [f(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)]g_k(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)\varphi_k(x, y) = \\ & = [1 + R_k(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)]\varphi_k(x, y) = F(x, y), \end{aligned}$$

где $R_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ стремится к нулю быстрее, чем $(|x_1|^2 + |x_2|^2)^{-k/2}$. Это означает (как нетрудно убедиться непосредственно из представления псевдодифференциального оператора через преобразования Фурье), что последнее равенство представляет собой интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода с гладким быстро убывающим ядром. Решение $u(x, y)$ исходной задачи при этом может быть представлено в виде

$$u(x, y) = g_k(i\partial/\partial x, i\partial/\partial y, x, y)\varphi_k(x, y),$$

где $\varphi_k(x, y)$ — решение интегрального уравнения

$$\varphi_k + R_k\varphi_k = F.$$

Отметим, что первый член итерации равен F , а второй равен $R_k F$. Таким образом, второй член в силу свойств оператора R_k является гладким. Отсюда можно заключить, что член $g_k F$ содержит негладкую часть решения исходной задачи, т. е. разность $g_k \varphi_k - g_k F$ является гладкой.

2. Правило редукции основной задачи. Пусть $A_1, \dots, A_n, B \in X$, B — вектор-оператор, $B \in M_m$. Предположим, что спектр A_1, A_2

относительно $\hat{A}_j$ диагонален и имеет конечную кратность, т. е. при достаточно большом r

$$(\hat{A}_i - \hat{A}_i)^r \hat{A}_j = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (9.2)$$

где $A_0 = B \in M_m$. Кроме того, мы предположим, что $(\hat{A}_i - \hat{A}_i)^k \hat{A}_j = -iA_{k(i,j)}$, для тех k , для которых $(\hat{A}_i - \hat{A}_i)^k \hat{A}_j \neq \text{const} \cdot 1$.

Операторы $A_1, \dots, A_n, B$ мы будем называть образующими, а алгебру $\mathcal{A}$, которую они порождают, — *нильпотентной алгеброй Ли*.

Замечание. Условия (9.2), как нетрудно убедиться, эквивалентны тому, что коммутатор n -го порядка между A_i и A_j равен нулю. Таким образом, можно сказать, что достаточно высокие коммутаторы между элементами $A_1, \dots, A_n, B$ равны нулю.

Кроме того, для любых k, l ($1 \leq k, l \leq n$) и любого r ($1 \leq r \leq m$) существуют индексы $j(k, l)$ и $s(k, r)$, такие, что

$$[A_k, B_r] = -iA_{s[k, r]}, \quad [A_k, A_l] = -iA_{j(k, l)}.$$

Теперь мы поставим каждому оператору A_k в соответствие некоторый дифференциальный оператор с частными производными $L_k(x, -i\partial/\partial x, i\partial/\partial \alpha)$, действующий в пространстве $C^\infty_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n \times M^m)$ (здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — локальные координаты на $M^m(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

Вектор-оператору B поставим в соответствие «оператор умножения» на α .

Операторы $L_k, k = 1, \dots, n$ мы определим из соотношения

$$(L_k \Phi)(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n, \hat{B}) \stackrel{\text{def}}{=} A_k[\Phi(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n, \hat{B})] \quad (9.3)$$

($k = 1, \dots, n$) для любого символа $\Phi(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n \times M^m)$. Оператор L_k будем называть *представлением* оператора A_k . Рассмотрим вначале построение операторов L_k на простом примере. Пусть заданы операторы $A_1 \in M, B \in M_1$ и

$$A_2 = i[A_1, B], \quad A_3 = i[A_1, A_2], \quad [A_2, B] = 0, \\ [A_3, B] = 0, \quad [A_1, A_3] = 0, \quad [A_2, A_3] = 0.$$

Пусть, кроме того, $A_2, A_3 \in M$. Тогда набор A_1, A_2, A_3, B удовлетворяет всем приведенным выше условиям.

Оператор A_3 коммутирует со всеми остальными операторами набора, а оператор A_2 коммутирует с B . Поэтому их образы L_3, L_2 строятся тривиально:

$$L_3 = x_3, \quad L_2 = x_2.$$

Найдем оператор L_1 . Рассмотрим $\hat{A}_1 \Phi(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B})$. Разлагая

φ в ряд Тейлора (Ньютона) по $\dot{B} - \ddot{B}$ (см. § 5, § 6), получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}) = \\ = \dot{A}_1 \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}) + \dot{A}_1 (\dot{B} - \ddot{B}) \partial \varphi / \partial \alpha(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}), \end{aligned}$$

так как по условию $\dot{A}_1 (\dot{B} - \ddot{B})^k = 0$ при $k \geq 2$.

Итак,

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 [\varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B})] = \\ = \dot{A}_1 \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}) + (-i \dot{A}_2) \partial \varphi / \partial \alpha(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части разложим в ряд Тейлора по $\dot{A}_2 - \ddot{A}_2$. Учитывая, что $\dot{A}_1 (\dot{A}_2 - \ddot{A}_2)^k = 0$ при $k \geq 2$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 [\varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B})] = \dot{A}_1 \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}) + \\ + \dot{A}_1 (\dot{A}_2 - \ddot{A}_2) \partial \varphi / \partial x_2(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}) + (-i \dot{A}_2) \partial \varphi / \partial \alpha(\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{B}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для получения равенства (9.3) (при $k=1$) нужно положить

$$L_1 = x_1 - ix_3 \partial / \partial x_2 - ix_2 \partial / \partial \alpha.$$

Аналогично, для произвольного набора $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ образующих нильпотентной алгебры Ли имеется представление L_k оператора A_k , удовлетворяющее условию (9.3). Действительно, в операторе $\overset{n+2}{A_k} \varphi(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B})$ мы стремимся поставить A_k на место с номером k ; для этого с помощью разложения φ в ряд Тейлора мы «протащим» A_k , коммутируя его сначала с B (при этом возникает ряд коммутаторов $[A_k, B]$; $[[A_k, B], B]$ и т. д.), потом с A_n , с A_{n-1} и т. д. В процессе этой коммутации возникнут многочисленные коммутаторы A_k с B и с $A_n, A_{n-1}, \dots, A_{k+1}$. Эти коммутаторы по условию суть некоторые операторы из набора $(A_1, \dots, A_n)$. На следующем шаге мы каждый из этих коммутаторов будем «протаскивать» на его место с помощью ряда Тейлора. При этом снова возникнет множество всевозможных коммутаторов. Но все они суть некие операторы из $A_1, \dots, A_n$ и их мы будем снова «протаскивать» на свое место. Очевидно, этот процесс приведет к тому, что мы получим большие коммутаторы, которые уже коммутируют со всеми $A_1, \dots, A_n$ (так как $A_1, \dots, A_n, B$ — образующие нильпотентной алгебры). Эти большие коммутаторы автоматически становятся на соответствующие им места. Остается только заметить, что каждое применение формулы Тейлора к символу φ означает появление суммы нескольких производных от φ . Порядок этих производных не может пре-

восходить n_0 — длины максимального коммутатора среди $A_1, \dots, A_n$. Поэтому

$$A_k [\varphi(A_1, \dots, A_n, B)] = \varphi_k(A_1, \dots, A_n, B),$$

где $\varphi_k(x, \alpha)$ есть результат применения к символу φ некоторого дифференциального оператора $L_k(x, i\partial/\partial x, i\partial/\partial \alpha)$ порядка не выше

n_0 . Пусть $T = \sum_{j, \alpha} C_{j, \alpha} A_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \dots A_{j_k}^{\alpha_{j_k}}$. Положим

$$\lambda(T) = \sum_{j, \alpha} C_{j, \alpha} (L_{j_1})^{\alpha_{j_1}} \dots (L_{j_k})^{\alpha_{j_k}}.$$

Если $T \in \mathcal{M}$, то для любого символа $\varphi \in C_{\mathcal{L}}^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^m)$

$$T [\varphi(A_1, \dots, A_n, B)] = (\lambda(T) \varphi)(A_1, \dots, A_n, B). \quad (9.4)$$

Действительно, например, для $T = A_k A_j$ имеем из (9.3):

$$\begin{aligned} A_k A_j [\varphi(A_1, \dots, A_n, B)] &= A_k [(L_j \varphi)(A_1, \dots, A_n, B)] = \\ &= (L_k L_j \varphi)(A_1, \dots, A_n, B) \equiv (\lambda(A_k A_j) \varphi)(A_1, \dots, A_n, B). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется равенство (9.4) для всех элементов T из алгебры $\mathcal{M}$. Таким образом операторы L_j сами являются образующими нильпотентной алгебры Π , которую мы будем обозначать через Π .

Построенное отображение $\lambda: \mathcal{M} \rightarrow \Pi$ называется *упорядоченным представлением нильпотентной алгебры $\mathcal{M}$* .

Из (9.4) следует, что операторы L_k , $k = 1, \dots, n$; α удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и операторы A_k , B . В частности, операторы $L_1, \dots, L_n$, α являются образующими нильпотентной алгебры Π . Отсюда следует, что если $P(x, \alpha)$ — полином по x с коэффициентами, зависящими от α , то

$$\begin{aligned} [P(A_1, \dots, A_n, B)] [G(A_1, \dots, A_n, B)] &= \\ &= \psi(A_1, \dots, A_n, B), \end{aligned} \quad (9.5)$$

где $\psi(x, \alpha) = P(L_1, \dots, L_n, \alpha) G(x, \alpha)$ для любого $G(x, \alpha) \in C_{\mathcal{L}}^{\infty}$.

Возникает вопрос, распространяется ли это равенство на случай $P(x, \alpha) \in \mathcal{S}^{\infty}$ и $G(x, \alpha) \in C_{\mathcal{L}}^{\infty}$.

По-видимому, ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицателен, если ограничиться только аксиомами $\mu_1 - \mu_6$ (без топологических аксиом T_1, T_2). Для того, чтобы дать положительный ответ на этот вопрос, мы, однако, сформулируем две дополнительные алгебраические аксиомы, которые, кроме того, удобны тем, что позволяют получить явную формулу, выражающую

функции от некоммутующих операторов через композицию (произведение) функций от коммутирующих операторов.

Рассмотрим символы $f(x, \alpha, t)$, зависящие от параметров $t \in \mathbb{R}^k$ (k не фиксировано), так что все производные по этим параметрам принадлежат $\mathcal{S}^\infty$.

Аксиома μ_7) (параметрическая аксиома). Пусть $f(x, \alpha, t) \in C_{\mathcal{S}}^\infty$, $t \in \mathbb{R}^k$ таковы, что

$$\llbracket f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t) \rrbracket = 0 \quad (\mu_7)$$

при всех $t \in \mathbb{R}^k$. Тогда для любой функции $\Phi(t) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^k)$ и символов

$$h(x, \alpha, t) = \Phi\left(i \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, i \frac{\partial}{\partial t_k}\right) f(x, \alpha, t)$$

выполняется соотношение

$$\llbracket h(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t) \rrbracket = 0.$$

Если же равенство (μ_7) выполнено при всех $t \neq 0$, то оно справедливо и при $t = 0$.

Аксиома μ_8) (единственности). Пусть для некоторого $A \in M$ и некоторых символов $f(x, \alpha, t) \in \mathcal{S}^\infty$ при $t \in \mathbb{R}$

$$\mu_8^a) \llbracket f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, 0) \rrbracket = 0,$$

$$\mu_8^b) \llbracket [f]_t(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t) \rrbracket = \llbracket i \overset{n+2}{A} f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t) \rrbracket.$$

Тогда $\llbracket f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t) \rrbracket = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Задача. Доказать следующую формулу для оператора $f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)$:

$$f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n) = \left[f\left(i \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, i \frac{\partial}{\partial t_n}\right) (e^{-t A_n t_1} e^{-t A_{n-1} t_2} \dots e^{-t A_1 t_n}) \right]_{t=0}.$$

В главе IV будет доказано, что из этих аксиом следует положительный ответ на поставленный вопрос.

Основная задача заключается в том, чтобы для заданной функции $P(x, \alpha)$ найти такую функцию $G_N(x, \alpha)$, чтобы выполнялось равенство (9.5) при

$$\psi(x, \alpha) = 1 + R_N(x, \alpha),$$

где функция $R_N(x, \alpha) = O_{\mathcal{S}}(|x|^{-N})$ для любого N . А это значит, что нужно решить задачу (9.5), т. е. основная задача (9.1) сводится к следующей: найти такую последовательность $g_N(x, \alpha)$, что

$$f(\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}) g_N(x, \alpha) = 1 + R_N(x, \alpha), \quad (9.6)$$

где $R_N = O_{\mathcal{S}}(|x|^{-N})$ убывает быстрее $|x|^{-N}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Предположим, что для некоторых чисел $\rho_k \geq 1$, $\mu \geq 1$, T , η_0 и некоторой финитной функции $\rho(\eta)$, равной 1 при $|\eta| \leq \eta_0$, мы построили такую функцию

$$\psi_N(\alpha, \eta, x; t) \in C^\infty_{\mathcal{E}}(M^m \times \mathbb{R}^{2n}); \quad t \in [0, \infty),$$

которая при $t=T$ убывает при $x \rightarrow \infty$ быстрее Λ^{-N} , где $\Lambda = \left(\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k)^{2/\rho_k} + 1 \right)^{1/2}$, и которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \left[i \Lambda^\mu \partial/\partial t - f(L_1, \dots, L_n, \overset{n+1}{\alpha}) \right] \psi_N(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t) = \\ = B_N(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t), \quad (9.7) \\ \psi_N(\alpha, \eta, x, 0) = \rho(\eta), \end{aligned}$$

($B_N(\alpha, \eta, x, t)$ убывает быстрее Λ^{-N} при $x \rightarrow \infty$ равномерно по t).

Проинтегрируем уравнение (9.7) по t от 0 до T и применим обе части равенства (9.7) к единице; учитывая, что $\rho(i \partial/\partial x) \equiv 1$ и обозначив *)

$$\begin{aligned} \psi'_N(\alpha, x, t) &= \psi_N(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t) \Lambda^{-\mu} 1, \\ B'_N(\alpha, x, t) &= B_N(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t) \Lambda^{-\mu} 1, \quad (9.8) \\ g_N(x, \alpha) &= +i \int_0^T \psi'_N(\alpha, x, t) dt, \end{aligned}$$

получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} f(L_1, \dots, L_n, \overset{n+1}{\alpha}) g_N(x, \alpha) = \\ = 1 - \psi'_N(\alpha, x, T) - i \int_0^T B'_N(\alpha, x, t) dt \stackrel{\text{def}}{=} 1 + R_N(\alpha, x), \end{aligned}$$

где в силу исходных условий R_N убывает быстрее Λ^{-N} при $x \rightarrow \infty$ и таким образом, мы получаем решение основной задачи.

Иногда бывает полезно редуцировать решение основной задачи к точному решению некоторого более простого уравнения. Мы видели, например, что асимптотику решения уравнения колебаний кристалла нельзя, вообще говоря, найти с помощью одних лишь бихарактеристик. Мы можем только редуцировать решение

*) Здесь $\psi_N(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t) \Lambda^{-\mu} 1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi_N(\alpha, p, \xi, t) e^{ip \cdot (\xi - x)} \Lambda_{(\xi)}^{-\mu} dp d\xi.$

Последнее рассуждение носит эвристический характер.

асимптотической задачи к более простой — точному решению волнового уравнения (см. § 8).

Пусть $r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n) \in X$ — некоторый оператор, который мы будем называть *эталон*ом. И пусть

$$f(\overset{2}{A}_1, \dots, \overset{n+1}{A}_n, \overset{n+2}{B}, \llbracket r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n) \rrbracket) \in \mathcal{L}$$

— оператор, к которому мы будем искать квазиобратный. Заметим, что квазиобратный оператор в этом случае также будет зависеть от $r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)$, а значит, сам по себе будет являться весьма сложным оператором. Приведем в этом случае правило редукции основной задачи к решению задачи Коши для функции от дифференциальных операторов.

Аналогично тому, как это было проделано в начале этого пункта, можно показать, что для любого символа $g(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathcal{L}}$ найдется такой символ $\psi_i(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathcal{L}}$, что произведение оператора A_i на оператор $g(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B})$ равно $\psi_i(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B})A_i$. При этом символы $g(x, \alpha)$ и $\psi(x, \alpha)$ связаны соотношением

$$\psi_i(x, \alpha) = G_i(i\partial/\partial x, \overset{2}{x}, i\partial/\partial \alpha)g(x, \alpha), \quad (9.9)$$

где $G_i(i\partial/\partial x, \overset{2}{x}, i\partial/\partial \alpha)$ — дифференциальный оператор, линейный относительно x .

Задача. Привести явный вид оператора G_i (с помощью разложения $g(x, \alpha)$ в ряд Тейлора).

Из соотношений (9.9) следует

$$\begin{aligned} \llbracket r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n) \rrbracket \llbracket g(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}) \rrbracket = \\ = \llbracket \psi_r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}) \rrbracket \llbracket r(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n) \rrbracket, \end{aligned}$$

где

$$\psi_r(x_1, \dots, x_n, \alpha) = r(\overset{1}{G}_1, \dots, \overset{n}{G}_n)g(x_1, \dots, x_n, \alpha).$$

Отсюда и из (9.5) следует, в свою очередь, что символ произведения

$$\llbracket f(\overset{2}{A}_1, \dots, \overset{n+1}{A}_n, \overset{n+2}{B}, r) \rrbracket \llbracket g(\overset{2}{A}_1, \overset{3}{A}_2, \dots, \overset{n+1}{A}_n, \overset{n+2}{B}, r) \rrbracket,$$

где $g(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0)$ уже $n+m+1$ -местный символ, равен

$$f(\overset{2}{L}_1, \dots, \overset{n+1}{L}_n, \overset{n+2}{\alpha}, \llbracket r(\overset{1}{G}_1, \dots, \overset{n}{G}_n) + x_0 \rrbracket)g(x, \alpha, x_0).$$

Таким образом, основная задача в этом случае редуцируется к задаче (9.6), где вместо левой части (9.6) стоит

$$f(\overset{2}{L}_1, \dots, \overset{n+1}{L}_n, \overset{n+2}{\alpha}, \llbracket r(\overset{1}{G}_1, \dots, \overset{n}{G}_n) + x_0 \rrbracket)g(x, \alpha, x_0).$$

Далее все рассуждения, редуцирующие эту задачу к задаче Коши, остаются прежними.

Теперь рассмотрим еще более общий случай. Пусть $f_i = f_i(A_1^2, \dots, A_n^{n+1}, B, r) \in M$. Рассмотрим оператор

$$\hat{F} = F(f_1^1, f_2^2, \dots, f_k^k).$$

Совершенно аналогично предыдущему получаем, что символ произведения

$$\begin{aligned} & \text{равен} \\ & [F(f_1^1, f_2^2, \dots, f_k^k)] [g(A_1^2, A_2^3, \dots, A_n^{n+1}, B, r)] \\ & F([f_1^1(L_1, \dots, L_n, \alpha, [r(G_1, \dots, G_n) + x_0])], \\ & [f_2^2(L_1, \dots, L_n, \alpha, [r(G_1, \dots, G_n) + x_0])], \dots \\ & \dots, [f_k^k(L_1, \dots, L_n, \alpha, [r_1(G_1, \dots, G_n) + x_0])]) g(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0). \end{aligned}$$

Оператор в правой части, примененный к функции g , мы будем называть *гамильтоном* оператора $\hat{F}$.

Пусть теперь $r=0$, $g(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0) \equiv 1$. Тогда мы получаем формулу для приведения сложной функции к простой функции от тех же упорядоченных операторов. Именно, для определения символа $\psi(x, \alpha)$ оператора

$$\psi(A_1^1, \dots, A_n^{n+1}, B) = F(f_1^1, \dots, f_k^k)$$

мы получаем формулу

$$\psi(x, \alpha) = F([f_1^1(L_1, \dots, L_n, \alpha^{n+1})], \dots, [f_k^k(L_1, \dots, L_n, \alpha^{n+1})]) 1, \quad (9.10)$$

где справа уже сложная функция от дифференциальных операторов применяется к элементу единица, принадлежащему пространству символов.

3. Бихарактеристики и условия поглощения. В рассмотренных примерах мы сталкивались с понятиями характеристик и бихарактеристик. Мы видели, что негладкая и быстро осциллирующая часть решения определяются в этих примерах решениями некоторых уравнений с частными производными первого порядка, которые мы называли уравнениями Гамильтона — Якоби (уравнение характеристик) и системой (обыкновенных) уравнений Гамильтона (уравнение бихарактеристик).

Выше был рассмотрен пример уравнений колебаний кристаллической решетки на окружности, или, что то же самое, уравнения с условиями периодичности. При этом решения системы уравнений бихарактеристик (8.36) $X(x^0, t)$, $P(x^0, t)$ были таковы, что $X(x^0, t)$ можно было интерпретировать как координаты точки, движущейся по окружности, а $P(x^0, t)$ — по прямой. В целом пара $X(x^0, t)$, $P(x^0, t)$ определяла траекторию точки на цилиндре — произведении прямой на окружность. Этот цилиндр называется *фазовым пространством* и обозначается обычно p, x , где p — координаты на прямой, а x — координаты на окружности (или q -координаты). В дальнейшем мы подробнее остановимся на его свойствах и на свойствах системы уравнений Гамильтона, которая определяет семейство кривых

в таком фазовом пространстве. Ясно, что любому n -мерному тору M^n может быть сопоставлено такое фазовое пространство T^*M^n размерности $2n$, что x -координаты лежат в M^n , а p -координаты принадлежат $\mathbb{R}^n$.

Мы видели, что как уравнение Гамильтона—Якоби, так и система Гамильтона определяется одной функцией $H(p, x)$, которая называется функцией Гамильтона. Эта функция в случае кристалла имела вид

$$H = \mp 2 \frac{c(x)}{\omega} \sin \left[\frac{\omega}{2} (1 + p) \right]$$

и зависела от параметра $|\omega| \leq \pi$. Этот параметр являлся символом оператора дифференцирования и существенно сказывался на поведении решения.

В общем случае функции от упорядоченных образующих нильпотентной алгебры Ли задан символ как функция от $m+n$ координат, где m — размерность многообразия M^m , т. е. число компонент вектор-оператора B , а n — число операторов $A_1, \dots, A_n$. Таким образом, область определения символа есть пространство $M^n \times \mathbb{R}^m = M^{n+m}$.

Пусть T^*M^{n+m} — отвечающее ему фазовое пространство. Мы ставим задачу о нахождении квазиобратного оператора. На примерах мы видели, что нахождение квазиобратного оператора связано с системой бихарактеристик, а значит, с функцией Гамильтона. Возникает естественный вопрос об определении функции Гамильтона, соответствующей символу $f(A_1, \dots, A_n, B)$. Мы хотим определить бихарактеристики этого символа. Мы рассматриваем функцию f ; вместо ее аргументов подставляем представления $L_1, \dots, L_n, \alpha$ операторов $A_1, \dots, A_n, B$ и получаем гамильтониан $f(L_1, \dots, L_n, \alpha)$.

После этого выделяется некоторая старшая часть полученного выражения относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ и $id/\partial\alpha$. Эта старшая часть определяет функцию Гамильтона.

Введем определение старшей части функции. 1) Пусть $f(y) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^s)$ и пусть существуют такие числа $\rho_1, \dots, \rho_s \geq 1$ и $r > 0$, что

$$f(\lambda^{\rho_1} y_1, \dots, \lambda^{\rho_s} y_s) = \lambda^r f(y) \quad \forall \lambda > 0;$$

тогда функция называется ρ -квазиоднородной функцией степени r .

2) Функция $\sigma(y)$ называется подчиненной функции $f(y)$, если

$$\left| \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} \sigma(y)}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_s^{k_s}} \right| \leq c \left(\sqrt{y^{2(\rho_i + 1)}} \right)^{r-1-|\mathbf{k}|}.$$

Пусть $F(y) = \sum_{i=0}^N f_i(y) + \sigma(y)$, где $f_i(y)$ — ρ -квазиоднородные ($\rho = \rho_1, \dots, \rho_s$) функции степеней r_i , $r_i \geq r_{i+1} + \delta$ для некоторого

$\delta > 0$, а $\sigma(y)$ подчинена $f_0(y)$. Тогда будем говорить, что $F(y)$ асимптотически ρ -квазиоднородна ($\rho = \rho_1, \dots, \rho_s$), $f_0(y)$ будем называть старшей частью функции $F(y)$, а $\sum_0^N f_i(y)$ — существенной частью функции $F(y)$.

Положим временно $x_i = y_i$, $i \leq n$, $i \frac{\partial}{\partial \alpha_k} = y_{n+k}$, $-i \frac{\partial}{\partial x} = \eta$. Пусть полученная функция асимптотически ρ -квазиоднородна по y , причем $\rho_{n+i} = 1$, $0 < i \leq m$ (переменные η , α рассматриваются как параметры; η принадлежит малой окрестности нуля в R^n , $\alpha \in M^m$).

Старшую часть функции $f(L_1(y, \eta), \dots, L_n(y, \eta), \alpha)$ будем называть функцией Гамильтона, отвечающей данному гамильтониану, и обозначать через $\pi(y, \eta, \alpha)$.

Итак, схема построения функции Гамильтона оператора $A \in \mathcal{A}$ состоит из 4-х операций: 1) (μ^{-1}) подбор $A_1, \dots, A_n$, $B \in X$, $r = r(x, \alpha)$, $f(x, x_0, \alpha) \in \mathcal{S}^\infty$ так, чтобы $f(\overset{2}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, B, r) = A$; 2) $(A \rightarrow L)$ построение гамильтониана с помощью упорядоченного представления; 3) (ρ) выделение старшей части $\pi(y, \eta)$ гамильтониана; 4) $(\rightarrow \rho, q)$ определение гамильтоновых переменных в функции $\pi(y, \eta)$. Итак,

$$\begin{aligned} A \xrightarrow{\mu^{-1}} f(\overset{2}{A}_1, \dots, \overset{n+1}{A}_n, \overset{n+2}{B}, \overset{1}{r}) &\xrightarrow{A \rightarrow L} \\ &\rightarrow f(\overset{2}{A}_1, \dots, \overset{n+2}{\alpha}, \overset{1}{r}(\overset{1}{G}_1, \dots, \overset{n}{G}_n) + x_0) \xrightarrow{\rho} \\ &\rightarrow \pi(y, \eta, \alpha) \xrightarrow{q, p} H(p, q, \omega, \eta). \end{aligned}$$

Операции (μ^{-1}) и (ρ) , вообще говоря, неоднозначны *) и не обязательно существуют для данного $A \in \mathcal{A}$. Перейдем к последней процедуре.

Пусть для определенности ρ_i равны единице для первых s переменных, $s \leq n$.

Введем переобозначение переменных:

$$\begin{aligned} y_{s+1} &= \omega_1, \dots, y_n = \omega_{n-s}; & \eta_1 &= \rho_1, \dots, \eta_s = \rho_s; \\ y_1 &= q_1, \dots, y_s = q_s; & y_{n+i} &= \rho_{s+i}, \quad 1 \leq i \leq m; \\ \alpha_1 &= q_{s+1}, \dots, \alpha_m = q_{s+m}; & \rho &= (\rho_1, \dots, \rho_s); & \omega &= (\omega_1, \dots, \omega_{n-s}); \\ & & \eta &= (\eta_{s+1}, \dots, \eta_n). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\pi(y, \eta, \alpha) = \mathcal{H}(p, q, \omega, \eta), \quad \dot{H} = \operatorname{Re} \mathcal{H}, \quad \ddot{H} = \operatorname{Im} \mathcal{H}.$$

*) Например, для $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$ при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$ получается $\psi(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$, а при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ получается $f_0(x_1, x_2) = x_1 x_2$ и $f_1(x_1, x_2) = x_1^2$.

Кроме того, обозначим через $\mathcal{H}_0(p, q, \omega, \eta)$ существенную часть символа $f(L_1, \dots, L_n, \alpha)$. В этом пункте всегда предполагается, что $\text{Im } \mathcal{H}_0 \leq 0$.

Пусть Ω_ε — многообразие в пространстве переменных p, q, η, ω , определяемое условиями:

$$\left| \sum_{i=1}^s q_i^2 + \sum_{j=1}^{n-s} \omega_j^{2/\rho_j} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (q_{s+1}, \dots, q_{s+m}) \in M^m;$$

$$\sum_{i=1}^s p_i^2 + \sum_{j=1}^{n-s} \eta_j^2 < \varepsilon, \quad p_{s+1} = \dots = p_{s+m} = 0;$$

$$|\mathcal{H}(p, q, \eta, \omega)|_{p=\eta=0} < \varepsilon.$$

Решения системы Гамильтона.

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q, \eta, \omega), \quad q_j|_{\tau=0} = q_j^0, \quad (9.11)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q, \eta, \omega), \quad p_j|_{\tau=0} = p_j^0; \quad j = 1, \dots, s+m,$$

$$(p^0, q^0, \eta, \omega) \in \Omega_\varepsilon$$

будем называть *бихарактеристиками оператора* $f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B})$.

Чтобы избежать путаницы, мы будем в следующих примерах аргументы символа обозначать через $y_1, \dots, y_n, \alpha$.

Примеры. Остановимся на конструкции функции Гамильтона и проиллюстрируем ее на примере полинома от оператора $i \partial/\partial x$, $x = x_1, \dots, x_n$, с коэффициентами, зависящими от x . В этом случае второй коммутатор равен нулю и представление оператора $A_k = i \partial/\partial x_k$ имеет вид $y_k + i \partial/\partial \alpha_k$, а $B_k = x_k = \alpha_k$. Полином

$$\sum_i a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (9.12)$$

имеет вид $\sum_i a_i(B) (|A|)^2$. Его представление имеет вид

$$\sum_k a_k(\alpha) \left(y_k + i \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right)^2.$$

Функция Гамильтона (для $\rho_i = 1, \forall i$) имеет вид

$$H(q, p) = \sum a_k(q_{n+1}, \dots, q_{2n}) (q_k - p_{n+k})^2. \quad (9.13)$$

Рассмотрим также систему Гамильтона, определяемую функцией Гамильтона

$$H_1(q, p) = \sum a_k(q) p_k^2, \quad (9.14)$$

где $q = q_1, \dots, q_n$, $p = p_1, \dots, p_n$.

Решения системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= 0, \\ \dot{q}_{n+k} &= H p_{n+k}, \quad k = 1, \dots, n, \\ \dot{p} &= -H q, \end{aligned} \quad (9.15)$$

удовлетворяющие начальным условиям $q(0) = q_0$, $p(0) = 0$, $\sum_{k=1}^n q_k^2 = 1$, $H(q_0, 0) = 0$, называются *бихарактеристиками* оператора (9.12).

Заметим, что эти бихарактеристики можно получить из решения системы

$$\dot{q} = H_1 p, \quad \dot{p} = -H_1 q,$$

удовлетворяющего условиям

$$q_k(0) = q_{0n+k}, \quad p_k(0) = q_{0k}.$$

Таким образом, данное выше определение легко приводится к определению бихарактеристик волнового уравнения, данному в § 8.

Теперь рассмотрим оператор

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + i b_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (9.16)$$

В этом случае функция Гамильтона будет равна

$$H(q, p, \eta, \omega) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(q_n, \dots, q_{2n-1}, \omega) (q_k - p_{k+n-1})^2 + b_n(q_n, \dots, q_{2n-1}, \omega) \eta.$$

Обозначим

$$H_1(p, \eta, \alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(q, \omega) p_k^2 + b_n(q, \omega) \eta.$$

Решения задачи

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad p(0) = p_0, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H_1}{\partial p}, \quad q(0) = q_0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\sum a_k(q_0, \omega) p_{0k}^2 + b_n(q_0, \omega) \eta = 0$$

будем называть *бихарактеристиками* оператора (9.16).

Рассмотрим теперь оператор Шредингера

$$-i\hbar^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hbar^{-2} v(x) = \mathcal{L}, \quad m = \text{const}, \quad x \in R. \quad (9.18)$$

Положим

$$A_1 = i \partial / \partial t, \quad A_2 = i \partial / \partial x, \quad A_3 = \frac{1}{\hbar}, \quad B_1 = t, \quad B_2 = x.$$

Тогда

$$\mathcal{L} = -A_1 A_3 + \frac{1}{2m} A_2^2 + v(B) A_3.$$

Представление операторов таково:

$$L_1 = i \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + y_1, \quad L_2 = i \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + y_2, \quad L_3 = y_3.$$

Представление $\mathcal{L}$, таким образом, имеет вид

$$\mathcal{L} = -y_3 \left(i \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + y_1 \right) + \frac{1}{2m} \left(i \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + y_2 \right)^2 + y_3^2 v(\alpha_2).$$

Функция Гамильтона (при $p_i = 1, \forall i$) имеет вид:

$$H = q_3 (p_4 - q_1) + \frac{1}{2m} (p_5 - q_2)^2 + q_3^2 v(q_2).$$

После замены

$$\frac{p_5 - q_2}{q_3^2} = p, \quad \frac{q_5}{q_3^2} = q$$

уравнения бихарактеристик сведутся к системе

$$\dot{E} = 0, \quad \dot{i} = 1, \quad \dot{p} = -v'(q), \quad \dot{q} = +\frac{p}{m},$$

а начальные условия имеют вид

$$q(0) = q_{50}/q_{30}^2, \quad p(0) = -q_{20}/q_{30}^2;$$

эта система отвечает функции Гамильтона

$$H_1(q, p) = \frac{p^2}{2m} + v(q).$$

Мы получили уравнения классической механической задачи, отвечающей той квантовой задаче, которая описывается оператором Шредингера (9.18).

З а д а ч а. Рассмотреть дифференциально-разностный оператор, определяющий уравнение (8.4). Положив

$$A_1 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad A_2 = i \frac{\partial}{\partial x}, \quad A_3 = h, \quad \alpha = x,$$

получить в качестве бихарактеристик решения системы (8.36).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что выполнены условия поглощения, если существуют такие константы $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и такое число $\tau' = \tau'(q^0, \omega, p^0, \eta)$, $0 < \tau' < T$, что

1) при $0 \leq \tau \leq \tau'$ существует решение

$$q(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau); \quad p(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau)$$

задачи (9.11), принадлежащее C^∞ ;

2) при $0 \leq \tau \leq \tau'$ и $(q^0, \omega, p^0, \eta) \in \Omega_\varepsilon$ выражение

$$-\tilde{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau); q(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau); \omega; \eta)$$

неотрицательно, а при $\tau = \tau'$ это выражение строго больше нуля.

Несколько слов относительно этого условия. Проблема постановки условий, отвечающих явлению поглощения в электродинамике, была впервые четко поставлена Зоммерфельдом, который решил ее в частном случае (условия Зоммерфельда излучения на бесконечности). Физики пришли к заключению, что эта проблема (проблема «черного тела») не может быть решена постановкой одних только граничных условий без дополнительных условий на коэффициенты самого уравнения и его вид. Особенно часто с этой проблемой приходится сталкиваться в современных задачах физики (например, в теории лазерных резонаторов). Анализ физических задач показывает, однако, что зачастую поглощается вне некоторой области только «негладкая часть решения задачи»; негладкая часть решения задачи определяется высокими частотами разложения решения в ряд (или интеграл) Фурье, а во многих задачах поглощаются лишь короткие волны (высокие частоты). Известно, например, что стены дома пропускают радиочастоты, а свет поглощают. Как поставить условия, которые моделировали бы этот факт? По-видимому, не существует много способа, кроме введения сильного поглощающего потенциала, равного нулю внутри комнаты и малого на низких частотах.

Введенное выше условие поглощения заменяет в известной мере столь недостающие условия «черного тела», а во многих задачах даже полностью отвечает сути явления. С этой точки зрения идеализированным вырожденным случаем будет случай, когда коротковолновые лучи вообще не затухают. Это и будет случай постоянных коэффициентов.

Основная теорема (в простейшем варианте). Пусть $A_1, \dots, A_n, B$ — образующие нильпотентной алгебры Ли. Оператор $f(A_1, \dots, A_n, B)$ квазиобратим, если его гамильтониан таков, что выполнено условие поглощения.

Эта теорема доказывается в последней главе и при этом (и это главное) там дается конструкция квазиобратной последовательности.

Замечание 1. Пусть $M^n = M^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $k \leq n$, где M^k — тор; тогда в простейшем варианте основная теорема остается справедливой, если в правой части равенства (9.1) вместо единицы стоит функция $P(B)$ вектор-оператора B с компактным носителем, равная 1 в некоторой области Ω . Отметим, что когда M^n компактно, то единица есть функция от B с компактным носителем. В этом случае в условиях поглощения требуется, чтобы $q_i^0 \in \text{supp } P(\alpha)$ при $i > n$.

Замечание 2. Приведем конструкцию первого члена квазиобратной последовательности для простейшего варианта основной теоремы в частном случае. Мы не можем здесь предъявить эту конструкцию, поскольку она требует ряда понятий топологического характера, которые будут приведены в главе VI. Однако, чтобы как-то ориентировать читателя, мы приведем полную конструкцию в одном частном случае и просчитаем пример. Именно, мы дополнительно предположим следующее:

1. Гамильтониан $\hat{H}$ — однородная функция p степени k и не зависит от ξ и η .

2. Оператор $f(\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha})$ не меняется, если все значки над операторами (в том числе и внутри каждого L_i) написать в обратном порядке (т. е. $n+1 \rightarrow 1$, $n \rightarrow 2$, ..., $1 \rightarrow n+1$ *).

Эти условия не носят принципиального характера и введены для некоторого упрощения. Теперь мы приведем принципиальные условия, отказ от которых приводит к существенному усложнению вида формулы. Эти два условия требуют отсутствия фокальных точек, а мы видели на примере в § 8 их принципиальное влияние на асимптотическое поведение решения.

3. Якобиан $\frac{dq}{dq_0} \neq 0$ при $0 \leq t \leq T$ и якобиан $J(q_0, t) = \frac{d(q+z)}{dq_0} \neq 0$ на этом же интервале. Здесь функция $z(\alpha, t)$

* Иначе говоря, потребовать, чтобы оператор $f(\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha})$ был «формально самосопряжен».

определяется из линейной системы уравнений (уравнений «ростка»):

$$\dot{z} = i\tilde{H}_p(q, p) + \mathcal{K}_{pq}(q, p)z + \mathcal{K}_{pp}(q, p)w, \quad (9.19)$$

$$\dot{w} = -i\tilde{H}_q(q, p) - \mathcal{K}_{qq}(q, p)z - \mathcal{K}_{qp}(q, p)w$$

и условий

$$z|_{t=0} = w|_{t=0} = 0, \quad z = z_1, \dots, z_n, \quad w = w_1, \dots, w_n,$$

где $q = q(q^0, t)$, $p = p(q^0, t)$, $q = q_1, \dots, q_n$, $p = p_1, \dots, p_n$ — решение системы Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q|_{t=0} = q^0, \quad p|_{t=0} = 0. \quad (9.20)$$

Приведем конструкцию символа $q_1(y, \alpha)$ — первого члена квазиобратной последовательности. Обозначим $D = -\int_0^t \tilde{H} dt$ (все интегралы по t понимаются как интегралы вдоль траекторий, например,

$$\int_0^t \tilde{H} dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \tilde{H}(p(q^0, t), q(q^0, t)) dt);$$

$$\mu = \langle z, C^{-1}Bz \rangle, \quad \text{где } C_{ij} = \frac{\partial(q_j + z_j)}{\partial q_i},$$

$$B_{ij} = \frac{\partial(p_j + w_j)}{\partial q_i}; \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\langle p, H_p \rangle + \langle q, H_q \rangle - i \langle \tilde{H}_p, w \rangle - \right. \\ \left. - i \langle \tilde{H}_q, z \rangle + \frac{d}{dt} (\langle p, q \rangle - \langle w, z \rangle) \right] - \mathcal{K}; \quad (9.21)$$

здесь значок $\langle a, b \rangle$ обозначает сумму $\sum a_i b_i$. Обозначим

$$\Phi(q^0, t) = \mu(q^0, t) + \int_0^t \mathcal{L} dt. \quad (9.22)$$

Из условия поглощения следует важное неравенство, называемое неравенством диссипативности:

$$\text{Im } \Phi \geq c_1 D - c_2 t D^{1/2} - \varepsilon; \quad (9.23)$$

оно выполняется для некоторых $c_1 > 0$, $c_2(\varepsilon) > 0$ и $\varepsilon > 0$. Пусть M — нижняя грань таких констант c_2 , при которых выполнено неравенство диссипативности. Тогда

$$g_1(y_1, \dots, y_n, \alpha) =$$

$$= i \int_0^T \frac{P(q^0)}{V|J(q^0, t)|} e^{i\{\Phi(q^0, t) + tMD^{1/2} - \varepsilon(q^0, t)\}} \Big|_{q^0 = q^0(\alpha, yt)} dt, \quad (9.24)$$

где $q^0(\alpha, yt)$ — решение уравнения $q_i(q^0, t) = \alpha_i$, $m+n \geq i > n$; $q_i(q^0, t) = y_i$; $i \leq n$.

Пример. Рассмотрим оператор

$$\hat{A}_1 - i\Phi(\hat{B})\hat{A}_2, \quad (9.25)$$

имеющий символ

$$y_1 - i\varphi(\alpha)y_2,$$

где $\varphi(\alpha) \geq 0$ обращается в нуль при $|\alpha| < T/2$ и строго больше нуля при $\alpha > T/2$. Если операторы A_1, A_2, B коммутируют, то очевидно, что квазиобратного элемента не существует (см. стр. 95).

Положим

$$[A_1, B] = i, [A_2, A_1] = 0, [A_2, B] = 0.$$

Пусть спектр A_2 принадлежит полуоси *) $y_2 > \delta > 0$.

Например, пусть $A_1 = i\partial/\partial x$, $B = x$, $A_2 = k$, где k — параметр $\delta < k < \infty$, и пусть $F(x, k) \stackrel{\text{def}}{=} F(x)$ — функция с носителем, лежащим в Ω , так что $F(x, k)P(x) \equiv F(x, k)$. Функция $P(\alpha)$ определена выше в замечании к основной теореме. Рассмотрим уравнение относительно $u(x, k)$:

$$(\hat{A}_1 - i\varphi(\hat{B})\hat{A}_2)u(x, k) = P(B)F(x, k), |F(x, k)| < \text{const.} \quad (9.26)$$

Из формулы (9.26) можно сделать вывод, что с помощью квазиобратной последовательности, примененной к $F(x)$, получается асимптотическое решение задачи, которое удовлетворяет уравнению с точностью до функций, стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$ быстрее k^{-N} для любого N и N раз дифференцируемо.

Проверим это на данном примере, воспользовавшись формулой (9.24). Гамильтониан оператора (9.25) имеет вид

$$y_1 + i\partial/\partial\alpha - i\varphi(\alpha)|y_2|. \quad (9.27)$$

Функция Гамильтона, соответствующая гамильтониану (9.27), имеет вид $\mathcal{H} = q_1 - p_3 - iq_2\varphi(q_3) \stackrel{\text{def}}{=} H + i\tilde{H}$.

Системы Гамильтона и роста в данном случае следующие:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_2 = 0, \quad \dot{q}_3 = -1, \quad q(0) = q_0, \quad \dot{z} = 0, \quad z(0) = 0, \\ \dot{p}_1 &= -1, \quad \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = 0, \quad p(0) = 0, \\ \dot{w}_1 &= 0, \quad \dot{w}_2 = \varphi(q_3), \quad \dot{w}_3 = q_2\varphi'(q_3), \quad w(0) = 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Вычислим величины, входящие в формулу (9.24). Имеем

$$\Phi(q_0, t) = -q_{01}t + iq_{02} \int_0^t \varphi(q_{03} - t) dt. \quad (9.29)$$

Из системы роста следует, что $z(q_0, t) \equiv 0$. Значит $\mu(q_0, t) = 0$. Вычислим диссипацию D .

*) В этом случае, очевидно, достаточно, чтобы символ принадлежал C_x^∞ лишь при $y_2 > \delta$.

По определению имеем

$$D(q_0, t) = - \int_0^t \tilde{H} dt = q_{03} \int_0^t \varphi(q_{03} - t) dt. \quad (9.30)$$

Из (9.29) и (9.30) следует, что неравенство диссипативности в нашем случае выполняется при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Найдем решение уравнения $q_3(q_0, t) = \alpha$. Из системы Гамильтона имеем $q_3 = q_{03} - t = \alpha$. Значит, $q_{03} = \alpha + t$. Легко видеть также, что $J(q_0, t) = 1$. Подставляя найденные выражения в формулу (9.24), получаем

$$g_1(y_1, y_2, \alpha) = i \int_0^{\infty - t y_1 t - |y_2|} e^{\int_{\alpha}^{\alpha+t} \varphi(\xi) d\xi} P(\alpha+t) dt + O(|y_2|^{-\infty}). \quad (9.31)$$

Сделав замену $\alpha + t = \beta$, преобразуем интеграл, стоящий в правой части, к следующему виду:

$$\begin{aligned} e^{i \alpha y_1} \int_{\alpha}^{\infty - t \beta y_1 + |y_2|} e^{-i \beta y_1 + |y_2| \int_{\beta}^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi} P(\beta) d\beta = \\ = e^{i \alpha y_1 + |y_2| \int_0^{\alpha} \varphi(\xi) d\xi} \int_{\alpha}^{\infty - t \beta y_1 - |y_2| \int_0^{\beta} \varphi(\xi) d\xi} e^{-i \beta y_1 - |y_2| \int_0^{\beta} \varphi(\xi) d\xi} P(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Применив оператор, отвечающий символу (9.32) к функции $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, k)$, получим, учитывая, что

$$e^{i x \hat{A}} e^{-i \beta \hat{A}} F(x) = F(\beta),$$

$$g_1(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}) F(x) = i e^{k \int_0^x \varphi(\xi) d\xi} \int_x^{\infty} e^{-k \int_0^{\beta} \varphi(\xi) d\xi} F(\beta) d\beta + O(1/k^{\infty}).$$

Первый член, выписанный в правой части, как нетрудно убедиться, дает точное решение уравнения (9.26). Таким образом, в этом примере (случайно, вообще говоря) первый член асимптотики (квазиобратной последовательности) совпал с точностью до $O(1/k^n)$, где n любое, с точным решением задачи.

Отметим теперь следующее обстоятельство. Если $F(x, k) = 0$ при $x < 0$ и мы рассматриваем интервал $x < T$, то полученное выражение равно $\int_0^x F(x, k) dx$.

Итак, если мы хотим взять интеграл от 0 до x от функции двух переменных $F(x, k)$, т. е. решить задачу

$$i \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, k), \quad u|_{x=0} = 0 \quad (9.33)$$

с помощью основной теоремы, то мы должны проделать следующую процедуру:

1. Добавить к оператору $\frac{\partial}{\partial x}$ такой член, чтобы были выполнены условия поглощения.

2. Вывести упорядоченное представление полученного оператора.

3. Применить формулу основной теоремы, частный случай которой приведен выше.

И после всего этого приведенная формула основной теоремы гарантирует лишь, что решение задачи (9.33) дается интегралом $\int_0^x F(x, k) dx$ с точностью до $0(k^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$. (Из формулы, приведенной в гл. VII, следует, правда, что решение задачи (9.33) равно этому интегралу.) Но точно такая же процедура приводит к решению широкого класса дифференциальных уравнений.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим квадрат оператора вида (9.26):

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k\varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} - k^2\varphi^2(x).$$

Здесь, очевидно, не выполняется условие поглощения в приведенном выше виде; однако ясно, что оператор L квазиобратим. Обобщение теоремы на этот случай приведено в следующем пункте. Это обобщение охватывает также и пример в § 8, который не попадает под условия этого пункта.

П р и м е р. Рассмотрим волновой оператор (ср. (8.6))

$$\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x) \Delta.$$

Система Гамильтона, отвечающая ему, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{p}_4 = 0, \\ \dot{p} = 2c\sqrt{c} |p|^2, & p_4^2 = \pm c(x^0) |p^0|, \\ \dot{i} = 2p_4, & (p_4^2) + |p^0|^2 = 1, \\ \dot{x} = 2pc^2(x), \end{cases} \quad (9.34)$$

где $x = x_1, x_2, x_3$; $p = p_1, p_2, p_3$. Из уравнений (9.34) следует, что

$$(c^2(x^0) + 1) |p^0|^2 = 1$$

и

$$p_i^0 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{c^2(x^0)}}}.$$

Отсюда

$$t = \pm 2 \frac{|c(x^0)|}{1 + |c(x^0)|} \tau + t_0.$$

Добавим к волновому оператору мнимую часть вида

$$i\tilde{H} = -i\varphi_1(t^2) p^1 \varphi_2(p^2), \quad p = i\nabla,$$

где $\varphi_{1,2}(t^2) = 0$ при $|t| \leq T$, $\varphi_{1,2}(t^2) = \alpha > 0$ при $t = T + 1$. Тогда условие поглощения каждой траектории будет выполнено, поскольку $p^2 \neq 0$ на траектории, как это следует из уравнений (9.34).

Следовательно, оператор $\hat{H} + i\tilde{H}$ квазиобратим. Нетрудно видеть, что решение задачи

$$[\hat{H} + i\tilde{H}(p, t)]u = F(x, t),$$

где $F(x, t)$ — финитная, не зависит от вида $\varphi(t^2)$ при $t^2 < T^2$, $\hat{H}$ и $\tilde{H}$ определены выше.

Таким образом, введение поглощающего члена в этом случае вообще не сказывается на решении задачи при конечных t ($t < T$).

З а м е ч а н и е. Добавление члена $-i\varphi(x)p^2\varphi(p)$, где $\varphi(x) = 0$ при $|x| < M$ и $\varphi(x) = \alpha > 0$ при $|x| = M + 1$, также приводит к условию поглощения каждой траектории, так как в силу уравнений (9.33) при достаточно большом τ $|x(x^0, \tau)| > M + 1$.

Однако в этом случае лишь асимптотика негладкой части решения не зависит от вида поглощающего члена. Тем не менее в некоторых задачах добавление такого члена имеет физический смысл.

4. Основная теорема. Рассмотрим однопараметрическое семейство символов $f(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0, \xi)$ и n -местных символов $r(x_1, \dots, x_n, \xi)$, где ξ — параметр, $0 < \xi \leq \infty$. Пусть

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0, \xi) &= f_0(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0) \in \mathcal{S}^\infty, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} r(x_1, \dots, x_n, \xi) &= r_0(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^\infty, \\ f_0 &\neq 0, \quad r_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Пусть далее $P_0(x)$ — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная единице в области $|x| \leq d$, где d — некоторая константа.

Пусть $A_1, \dots, A_n, B \in X$, $\hat{r} = r(A_1, \dots, A_n, \xi) \in X$, а гамильтониан оператора $f(A_1, \dots, A_n, B, r, \xi)$ является асимптотически ρ -квазиоднородным относительно переменных $y_i = x_i$, $0 \leq i \leq n$; $y_{n+j} = -i\partial/\partial\alpha_j$, $j \leq m$; ξ , причем числа ρ_i , отвечающие последним $m+1$ переменным, равны единице. Этот гамильтониан зависит также от параметров α , $\varphi = -i\partial/\partial x$. Старшую часть его символа обозначим $\pi(y, \varphi, \alpha, \xi)$, а существенную часть обозначим $\pi_0(y, \varphi, \alpha, \xi)$, где $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n+m})$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Пусть $\rho_i \neq 1$ при $s < i \leq n$, $\rho_i = 1$ при $i \leq s$ (если это не так, то мы изменим нумерацию переменных y). Введем гамильтоновы координаты. Для этого обозначим

$$\rho_i = \begin{cases} \varphi_i & \text{при } i \leq s, \\ y_{n-s+i} & \text{при } s < i \leq s+m, \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} y_i & \text{при } i \leq s, \\ \alpha_{i-s} & \text{при } s < i \leq s+m. \end{cases}$$

Остальные переменные будут играть роль параметров. Для удобства переобозначим их следующим образом. Обозначим через $\omega = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-s}$ переменные y_0, y_{s+1}, y_{n-s} , а через $\eta = \eta_1, \dots, \eta_{n-s}$ параметры $\varphi_{s+1}, \dots, \varphi_n$. Кроме того, вместо параметра ξ введем параметр $v = \frac{1}{\xi}$. Функцию π в новых переменных обозначим через $\mathcal{H}(p, q, \omega, \eta, v)$, а π_0 — через $\mathcal{H}_0(p, q; \omega, \eta, v)$.

Функцию $\mathcal{H}(p, q, \omega, v, \eta)$ будем называть функцией Гамильтона. Обозначим, как и ранее, $H = \operatorname{Re} \mathcal{H}$, $\tilde{H} = \operatorname{Im} \mathcal{H}_0$ и пусть Ω_ε — множество в пространстве переменных q, ω, p, η, v , определенное следующей системой соотношений:

$$\left| \sum_{i=1}^s q_i^2 + \sum_{j=0}^{n-s} \omega_j^{2/\rho_j} - 1 \right| \leq \varepsilon; \quad (q_{s+1}, \dots, q_{s+m}) \in M^m;$$

$$\sum_{i=1}^s p_i^2 + \sum_{j=1}^{n-s} \eta_j^2 \leq \varepsilon; \quad p_{s+1} = \dots = p_{s+m} = 0;$$

$$0 \leq v \leq d; \quad |\mathcal{H}(p, q, \eta, \omega, v)| \leq \varepsilon.$$

Сформулируем условия поглощения, обобщающие условия п. 3.

Определение. Будем говорить, что выполнены условия поглощения, если существуют такие константы $\varepsilon > 0$, $T > 0$, некоторое число $\tau' = \tau'(q^0, \omega, p^0, \eta, v)$, $0 < \tau' < T$ и такая функция $\mathcal{H}(q, \omega) \in C^\infty$, не равная нулю при $(q, \omega) \in \{(q, \omega) : (q, \omega, 0, 0, v) \in \Omega_0\}$, что

1) при $0 \leq \tau \leq \tau'$ и $(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu) \in \Omega_s$ существует решение

$$q(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau); \quad p(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau)$$

системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p, & q|_{\tau=0} &= q^0, \\ \dot{p} &= -H_q, & p|_{\tau=0} &= p^0, \end{aligned}$$

принадлежащее классу C^∞ ;

2) при $0 \leq \tau \leq \tau'$ и $(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu) \in \Omega_s$ выражение

$$\mathcal{A}(q^0, \omega) \cdot \tilde{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau); \quad q(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau); \omega; \nu; \eta)$$

неотрицательно, а при $\tau = \tau'$ это выражение строго больше нуля.

Теорема 9.1. (Основная теорема). Пусть для функции Гамильтона $\mathcal{H}$, отвечающей символу $f(x, \alpha, x_0, \xi)$, выполнены условия поглощения. Тогда существует последовательность символов $g_N(x, \alpha, x_0, \xi) \in C^\infty$, зависящих от параметра ξ , таких, что

$$\begin{aligned} [f(A_1, A_2, \dots, A_n, B, r, \xi)] [g_N(A_1, A_2, \dots, A_n, B, r, \xi)] = \\ = P_0(\xi^{-\rho_1} A_1, \xi^{-\rho_2} A_2, \dots, A_n \xi^{-\rho_n}) + \\ + R_N(A_1, \dots, A_n, B, r, \xi), \quad (9.35) \end{aligned}$$

где функция $R_N(x_1, \dots, x_n, \alpha, x_0, \xi) = O_\mathcal{E}(|x|^{-N})$ для любого N . Равномерно по ξ и α^* .

Конструкция $g_N(A_1, \dots, A_n, B, \xi)$ приводится в гл. VII. При $\xi = \infty$ мы получим простейший вариант основной теоремы, сформулированный ранее. Несмотря на то, что в правой части (9.34) стоит функция P_0 вместо 1, которая стояла в основной задаче, эта теорема на самом деле дает прямой ответ на поставленный в основной задаче вопрос. Действительно, в случае, если совместный спектр набора $A_1, \dots, A_n, B$ принадлежит области $\Omega_\xi \times \Omega$, вместо функции P_0 в правой части (9.35) можно поставить единицу. Это условие на спектр выполняется, как мы видели, для задачи о кристалле (там спектр $i\hbar \partial/\partial x$ на M_N лежит на отрезке $[-\pi, \pi]$, и $\xi = 1/\hbar$). На самом деле, оно выполняется и для произвольных разностных схем, если заменить M_N на подходящее пространство гладких функций. Аналогичная ситуация возникает в случае, когда B — гамильтониан осциллятора, рассмотренный в § 8, и поэтому имеет дискретный спектр, располо-

*) При тех же условиях существует и левая «квазиобратная» последовательность $g'_N = g'_N(A_1, \dots, A_n, B, r, \xi)$:

$$g'_N f - P_0 = O_\mathcal{E}(|x|^{-N}).$$

женный на сетке шага h , где h — постоянная Планка. Конструкция $g_N(A, \dots, A_n, B)$ в этих задачах позволяет получить квазиклассическую асимптотику вторично квантованных уравнений.

По сути дела все то, что было проделано для уравнения колебаний кристаллической решетки, может быть перенесено и на этот общий случай. При этом, если поглощающий член в первоначальном уравнении отсутствует, то его нужно ввести подобно тому, как это было сделано в примере с волновым оператором. И точно так же можно получить в общем виде разложение по степеням параметра $\frac{1}{\xi}$. Роль параметра ω в уравнении кристалла играет здесь параметр v .

Задача. Показать, проверяя условия основной теоремы, что оператор

$$A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varphi(t^2) \sqrt{1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t}},$$

где $\varphi(t^2)$ — то же, что и на стр. 95, квазиобратим, если правая часть финитна по x и t . (На самом деле из формул гл. VII следует, что если $F(x, t) = 0$ при $t < 0$, то $A^{-1}F(x, t)$ совпадает при $t < T$ с решением задачи Коши $\square_c u = F(x, t)$, $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$.)

Задача. Для разностной схемы

$$\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} - C_{(m)}^2 \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{\tau^2} = F(n, m),$$

$$\frac{h}{\tau} = d = \text{const}, \quad c(x) \in C^\infty, \quad F(n, m) = 0 \text{ при } n = -1, -2, \dots,$$

аппроксимирующей при $h \rightarrow 0$ волновое уравнение, вывести эффект типа Черенкова и получить асимптотику решения с точностью до h^N .

Указание. Приведенная функция Гамильтона имеет вид

$$\sin^2 v p_1 = c^2(x_2) d^2 \cdot \sin^2 v p_2.$$

В качестве пространства, аналогичного M_N , воспользоваться пространством целых функций первого порядка роста типа $\frac{\pi}{h}$ (теорема Котельникова). Поглощающий член, не влияющий на решение уравнения при $|t| < T$, где T — любое число, ввести аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче.

Замечание. В формулировке основной теоремы не участвует операция «штриха». И на самом деле, при доказательстве теоремы мы используем эту операцию лишь для $M = \{i\partial/\partial x, x\}$: правило редукции основной задачи остается справедливым и без использования операции «штриха». Поэтому основная теорема справедлива, если структуры удовлетворяют аксиомам $\mu_1 - \mu_6$. Если же выполнены только аксиомы $\mu_1 - \mu_6$, то основная теорема доказывается лишь для случая, когда символ $f(x, \xi, \alpha)$ является полиномом по x .

§ 1. Алгебраические системы

Пусть X — множество, на котором задана *бинарная операция*, т. е. правило, сопоставляющее всякой упорядоченной паре элементов $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ однозначно определенный третий элемент $x \in X$. Результат операции чаще всего обозначается через $x_1 x_2$, а сама операция называется умножением.

Определение. Множество X с заданной бинарной операцией $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 x_2$ называется *группой*, если выполнены следующие аксиомы:

- 1) операция ассоциативна, т. е. $(xy)z = x(yz)$;
- 2) существует единичный элемент $e \in X$, т. е. такой элемент e , что $xe = ex = x$ для любого $x \in X$;
- 3) для любого $x \in X$ существует обратный элемент $x^{-1} \in X$, удовлетворяющий условию $xx^{-1} = e$.

Из приведенных аксиом следует единственность единичного элемента, единственность элемента x^{-1} для любого $x \in X$ и соотношение $x^{-1}x = e$, откуда в свою очередь вытекает, что $(x^{-1})^{-1} = x$. Из этих свойств элемента x^{-1} следует, что

$$(xz = yz) \Rightarrow (x = y); \quad (zx = zy) \Rightarrow (x = y).$$

Группа называется *коммутативной*, или *абелевой*, если групповая операция коммутативна, т. е. $xy = yx$ для любых $x, y \in X$.

В случае абелевой группы бинарная операция обычно называется *сложением* и записывается $x + y$. Единичный элемент называется *нулевым* и обозначается символом 0 . Вместо x^{-1} пишут $-x$ и называют этот элемент *противоположным* элементу x .

Пусть K есть поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел либо поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Определение. Абелева группа E называется *векторным пространством (над полем K)*, если для любых $x \in E$ и $\alpha \in K$ однозначно определено произведение $\alpha x \in E$, причем выполняются следующие аксиомы:

- 1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- 2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
- 3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
- 4) $1x = x$.

Векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественным*, а над полем $\mathbb{C}$ — *комплексным векторным пространством*.

Из аксиом векторного пространства вытекает, что $-x = (-1)x$ и $0x = 0$. В последнем случае 0 слева означает скаляр, а справа — нулевой элемент из E .

Элементы векторного пространства называются *векторами*. Говорят, что векторы $x_1, \dots, x_n$ *линейно независимы*, если

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0).$$

В противном случае векторы называются *линейно зависимыми*. Если E содержит n линейно независимых векторов, но любые его $n+1$ векторов линейно зависимы, то говорят, что E есть *n -мерное пространство*. Если пространство E содержит сколь угодно большое число линейно независимых векторов, то оно называется *бесконечномерным* векторным пространством. *Базисом* n -мерного пространства E называется любая система $\{e_k\}$ из n линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_n$; каждый вектор $x \in E$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in K.$$

Множество $L \subset E$ называется *линейным многообразием* в E , если для любых чисел $\alpha, \beta \in K$

$$(x \in L \text{ и } y \in L) \Rightarrow (\alpha x + \beta y \in L).$$

Для любого множества $F \subset E$ существует наименьшее линейное многообразие $L(F)$ в E , содержащее F ; оно состоит из всех элементов вида $\sum \alpha_i x_i$, где $x_i \in F$. Множество $L(F)$ называется *линейной оболочкой* множества F .

Подмножество C векторного пространства E называется *выпуклым множеством*, если

$$(x_1 \in C \text{ и } x_2 \in C) \Rightarrow (\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in C)$$

для любого $\alpha \in [0, 1]$. Для всякого множества $F \subset E$ существует наименьшее выпуклое множество, содержащее F ; оно состоит из всевозможных элементов вида $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, где $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, $x_k \in F$, и называется *выпуклой оболочкой* множества F .

Пусть $E_1, \dots, E_n$ — векторные пространства над одним и тем же полем K . *Произведением* этих пространств называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_k \in E_k$; оно обозначается через $E_1 \times \dots \times E_n$. При этом алгебраические операции в $E_1 \times \dots \times E_n$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n); \\ \alpha (x_1, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

Определение. Векторное пространство A называется алгеброй (над полем K), если на нем определена бинарная операция $(x, y) \rightarrow xy$, называемая умножением, причем выполняются следующие аксиомы:

A_1) умножение ассоциативно, т. е. $(xy)z = x(yz)$;

A_2) умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е. $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$;

A_3) умножение элементов перестановочно с умножением на числа, т. е. $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy)$.

Алгебра A называется алгеброй с единицей, если выполняется аксиома:

A_4) существует такой элемент $e \in A$, называемый единицей, что $ex = xe = x$ при любом $x \in A$.

Абелевой, или коммутативной алгеброй называется алгебра $\mathcal{A}$, для которой выполняется аксиома:

A_5) умножение коммутативно, т. е. $xy = yx$ для всех $x, y \in A$.

Иными словами, для любых элементов x, y из коммутативной алгебры $\mathcal{A}$ их коммутатор $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xy - yx$ равен 0.

Пример. Алгебра формальных степенных рядов (от коммутирующих переменных). Пусть M — множество всех последовательностей $\{s_n\}_1^\infty$ с целыми неотрицательными членами, лишь конечное число из которых отлично от нуля. И пусть каждой последовательности $s = \{s_n\}$ из M поставлено в соответствие число α_s из поля K . Такое соответствие по определению задает формальный степенной ряд с коэффициентами из K , который записывают в виде

$$\sum_{s \in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}.$$

Здесь $x_1, x_2, \dots$ — переменные.

Замечание. В записи произведения $\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}$ сомножители, отвечающие $s_n = 0$, обычно опускают.

Сложение формальных степенных рядов, их умножение на скаляр и умножение друг на друга определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s \in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} \right) + \left(\sum_{s \in M} \beta_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} \right) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in M} (\alpha_s + \beta_s) \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}; \\ \beta \sum_{s \in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in M} \beta \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}, \quad \beta \in K; \\ \left(\sum_{s \in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} \right) \left(\sum_{s \in M} \beta_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} \right) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in M} \gamma_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_s = \sum_{s', s''} \alpha_{s'} \beta_{s''},$$

и суммирование в последней формуле распространяется на такие пары последовательностей $s' = \{s'_n\}$, $s'' = \{s''_n\}$, которые удовлетворяют условию $s'_n + s''_n = s_n$ для любого натурального n . Заметим, что хотя γ_s и представлено в виде бесконечной суммы, однако лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля.

Предоставляем читателю проверить, что множество всех формальных степенных рядов с коэффициентами из K с введенными нами операциями сложения, умножения рядов и умножения ряда на число является коммутативной алгеброй с единицей.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра. Линейное многообразие $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}$ называется левым (правым) идеалом алгебры $\mathcal{A}$, если $xv \in \mathcal{I}$ ($vx \in \mathcal{I}$) для любых $x \in \mathcal{A}$ и $v \in \mathcal{I}$.

В коммутативной алгебре понятия левого и правого идеала совпадают.

Группы, векторные пространства и алгебры дают примеры алгебраических систем. Алгебраической системой (над полем K) называется множество X с некоторым набором внутренних законов композиции (т. е. бинарных операций на X):

$$(x, y) \rightarrow x \perp y, (x, y) \rightarrow x \top y, \dots$$

и некоторым набором внешних законов композиции (т. е. отображений $K \times X \rightarrow X$):

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \circ x, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \bullet x, \dots$$

Пусть X, Y — две алгебраические системы с множествами N_X, N_Y внутренних законов и множествами M_X, M_Y внешних законов композиции. Если имеются взаимно однозначные соответствия $M_X \leftrightarrow M_Y, N_X \leftrightarrow N_Y$, то системы X и Y называются *однотипными*.

Определение. Пусть X и X' — две однотипные алгебраические системы. Отображение $A: x \rightarrow Ax$ системы X в систему X' называется гомоморфизмом, если

$$A(x \perp y) = (Ax) \perp (Ay), A(x \top y) = (Ax) \top (Ay), \dots,$$

$$A(\alpha \circ x) = \alpha \circ (Ax), A(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet (Ax), \dots$$

Пусть X — алгебраическая система с внутренними законами композиции $\perp, \top, \dots$ и внешними законами композиции $\circ, \bullet, \dots$. Пусть $Y \subset X$ — такое подмножество, что

$$x \perp y \in Y, x \top y \in Y, \dots, \alpha \circ x \in Y, \alpha \bullet x \in Y$$

для любых $x, y \in Y$ и $\alpha \in K$. Тогда законы $\perp, \top, \dots, \circ, \bullet, \dots$

в X индуцируют законы композиции $\perp'$, $\top'$, ..., $\cdot'$, $\bullet'$, ... в Y по формулам

$$x \perp' y = x \perp y, x \top' y = x \top y, \dots, \alpha \cdot' x = \alpha \cdot x, \alpha \bullet' x = \alpha \bullet x, \dots$$

Относительно этих индуцированных законов композиции Y является алгебраической системой, однотипной с X . Говорят, что Y является *подсистемой* системы X . Например, линейное многообразие L в векторном пространстве E само является векторным пространством относительно операций сложения и умножения на число, индуцированных из E . Наделенное структурой векторного пространства, L называется *подпространством* пространства E .

Здесь символы $\perp$, $\top$, $\cdot$, $\bullet$ обозначают соответствующие законы композиции в X и X' . Взаимно однозначный гомоморфизм системы X на систему X' называется *изоморфизмом*.

Алгебраические системы X и X' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $X \rightarrow X'$. Изоморфные алгебраические системы обычно отождествляются, если их рассматривают только с точки зрения их алгебраических свойств, т. е. свойств, связанных с законами композиции.

§ 2. Банаховы пространства

Определение. Вещественная функция $x \rightarrow \|x\|$, определенная на векторном пространстве E , называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$N_1) \|x\| \geq 0; (\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0);$$

$$N_2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$N_3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Векторное пространство, наделенное нормой, называется (векторным или линейным) *нормированным пространством*.

Во всяком нормированном пространстве B можно следующим образом определить *расстояние* $\rho(x, y)$ между элементами $x, y \in B$:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Из аксиом нормированного пространства вытекает, что расстояние ρ удовлетворяет следующим условиям:

$$R_1) \rho(x, y) \geq 0; (\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y);$$

$$R_2) \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$R_3) \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Множество R , любой паре элементов x, y которого отнесено число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее аксиомам R_1, R_2, R_3 , называется *метрическим пространством*.

Таким образом, нормированные пространства можно рассматривать как частный случай метрических. Последовательность $\{x_n\} \subset R$, по определению, *сходится* к элементу $x \in R$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$.

Такой элемент x , когда он существует, определяется однозначно. Последовательность $\{x_n\} \subset R$ называется *фундаментальной*, если $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$. Всякая сходящаяся последовательность, очевидно, фундаментальна. Обратное, вообще говоря, неверно. Если же любая фундаментальная последовательность сходится, то пространство R называется *полным*. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Перечислим вкратце некоторые основные факты, касающиеся метрических пространств (доказательства читатель найдет в любом достаточно полном учебнике функционального анализа).

Шаром (открытым) в пространстве R называется множество $S(x_0, r) = \{x \in R: \rho(x_0, x) < r\}$. При этом точка x_0 называется центром шара, а положительное число r — его радиусом. Множество $X \subset R$ называется *открытым*, если для всякой точки $x_0 \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $S(x_0, \varepsilon) \subset X$. Объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество. Множества Y , дополнительные к открытым, называются *замкнутыми*. Они характеризуются тем, что если $x_k \in Y$ и $x_k \rightarrow x$ (т. е. $\rho(x_k, x) \rightarrow 0$), то $x \in Y$. Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть множество замкнутое. В частности, для любого множества $A \subset R$ существует наименьшее содержащее его замкнутое множество $\bar{A}$, которое называется *замыканием* множества A .

Замкнутым шаром радиуса $r \geq 0$ с центром в точке x_0 называется множество $\{x \in R: \rho(x, x_0) \leq r\}$. Замкнутый шар есть множество замкнутое; он содержит замыкание шара $S(x_0, r)$ (но может оказаться шире, например, когда пространство R содержит лишь конечное число точек).

Свойство пространства R быть полным может быть адекватно охарактеризовано в терминах замкнутых шаров: *пространство R полно в том и только том случае, если любая последовательность замкнутых вложенных шаров $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение* (состоящее, очевидно, из единственной общей им точки). Требование стремления к нулю радиусов (когда пространство — полное), существенное для общих метрических пространств, может быть опущено в случае банаховых пространств. Из приведенного критерия полноты выводится важная теорема Бэра: *если полное метрическое пространство R представлено в виде счетного объединения замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих множеств целиком содержит некоторый шар $S(x_0, r)$* .

Метрическое пространство R называется *компактным*, если из всякой его последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать фундаментальную последовательность $\{x_{n_k}\}$.

В конечномерных евклидовых пространствах ограниченные множества, и только они, образуют компактные подпространства (в индуцированной метрике). Если в нормированном пространстве шар $\{x: \|x\| < 1\}$ компактен, то пространство конечномерно, и верно обратное. Для компактности пространства R необходимо и достаточно существование конечной ε -сети для любого $\varepsilon > 0$, т. е. такого конечного набора элементов $x_1, \dots, x_N \in R$, где $N = N(\varepsilon)$, что объединение шаров $S(x_i, \varepsilon)$ содержит все R (или, как говорят, образует *покрытие* R). Полное компактное пространство R называется *компактом*. Пространство R тогда и только тогда является компактом, когда из любого покрытия этого пространства шарами или любыми открытыми множествами (открытого покрытия) можно выбрать конечную подсистему, также образующую покрытие.

Вернемся к нормированным пространствам. Пусть a и b — две точки в векторном пространстве B . Множество точек $x \in B$ вида $at + (1-t)b$, где $0 \leq t \leq 1$, называется *отрезком*, соединяющим точки a и b , и обозначается через $[a, b]$. Множество $Y \subset B$ будет *выпуклым*, если из $a, b \in Y$ вытекает $[a, b] \subset Y$. Множество $Y \subset B$ называется *симметричным* (относительно точки 0), если из $a \in Y$ вытекает $(-a) \in Y$. Если B — пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то множество $Y \subset B$ называется *закругленным*, если из $a \in Y$ и $|\lambda| = 1$ следует, что $\lambda a \in Y$. Ясно, что всякое округленное множество является симметричным. Множество $Y \subset B$ называется *поглощающим*, если для любого $a \in B$ существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda a \in Y$. Ясно, что всякий шар $\|x\| < r$ в нормированном пространстве B является округленным, выпуклым и поглощающим множеством.

Множество $Y \subset B$ называется *бочкой*, если оно является замкнутым выпуклым, округленным (в вещественном случае — симметричным) и поглощающим. Всякий замкнутый шар $\|x\| \leq r$ является бочкой.

Следующая лемма представляет собой удобный инструмент для доказательства различных теорем о банаховых пространствах.

Лемма 2.1 (Лемма о бочке). Пусть B — банахово пространство. Тогда всякая бочка $Y \subset B$ содержит некоторый шар $\|x\| < r$.

Доказательство. Положим $Y_N = \{x \in B : x = Ny, y \in Y\}$. Так как $0 \in Y$ и так как Y — выпуклое, округленное и поглощающее, то $\bigcup_{N=1}^{\infty} Y_N = B$. Каждое из множеств Y_N замкнуто (вместе с Y). Поскольку B полно, то, по теореме Бэра, некоторое из множеств Y_N содержит шар $\{x : \|x - x_0\| < R\}$. Из выпуклости и округленности множества Y_N вытекает, что тогда оно содержит шар $\|x\| < R$. Следовательно, шар $\|x\| < r = R/N$ содержится в Y . Лемма доказана.

Перечисленные выше факты уже показывают, сколь важно свойство пространства быть полным (впрочем, это ясно и на простейшем примере вещественных чисел). Мы еще неоднократно будем иметь возможность убедиться в этом. Оказывается, существует канонический способ пополнения метрических пространств. В применении к нормированным пространствам он является одним из путей построения банаховых пространств, и мы опишем его в деталях.

Пусть E — произвольное нормированное пространство. Фундаментальные последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\tilde{\varphi}_n\}$ элементов из E будем называть *эквивалентными*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\| = 0.$$

Разобьем множество фундаментальных последовательностей элементов из E на классы, относя к одному классу эквивалентные между собой последовательности. Пусть E — возникающее множество классов.

Введем на E следующим образом структуру нормированного пространства. Пусть $\Phi \in E$, $\Psi \in E$ и пусть α, β — комплексные числа. *Линейной комбинацией* $\alpha\Phi + \beta\Psi$ классов Φ, Ψ назовем класс $\mathcal{X}$, состоящий из всех последовательностей, эквивалентных последовательности $\{\alpha\varphi_n + \beta\psi_n\}$, где $\{\varphi_n\} \in \Phi$, $\{\psi_n\} \in \Psi$. Нетрудно

проверить, что последовательность $\{\alpha\varphi_n + \beta\psi_n\}$ фундаментальна и что класс $\mathcal{X}$ не зависит от выбора конкретных последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ соответственно из Φ и Ψ .

Пусть $\Phi \in E$ и $\{\varphi_n\} \in \Phi$. За норму класса Φ принимается число

$$\|\Phi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|. \quad (2.1)$$

Предел всегда существует, так как неравенство

$$|\|\varphi_n\| - \|\varphi_m\|| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|, \quad (2.2)$$

вытекающее из аксиомы N_3 , влечет фундаментальность числовой последовательности $\{\|\varphi_n\|\}$. Легко проверить корректность определения, т. е. независимость определения от выбора представителя класса Φ и тот факт, что норма (2.1) удовлетворяет аксиомам $N_1 - N_3$.

Последовательность $\{\varphi_n\}$ называется *стационарной*, если

$$(\exists N) (\forall i, j > N) : (\varphi_i = \varphi_j).$$

Определение. Пусть E, F — нормированные пространства и пусть $A: E \rightarrow F$ — изоморфизм векторных пространств. Отображение A называется *изометрическим изоморфизмом*, если $\|Ax\| = \|x\|$ для всех $x \in E$.

Определение. Пусть E — нормированное пространство. Множество $M \subseteq E$ называется *плотным* в E , если для любого $x \in E$ найдется такая последовательность $\{m_n\}$ элементов из M , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = x.$$

Пусть B — банахово пространство и пусть множество M плотно в B . Для доказательства того, что некоторое множество M' плотно в B , достаточно убедиться в том, что для любого $m \in M$ существует последовательность $\{m'_i\}$ элементов из M' , сходящаяся к m .

Теорема 2.1. Пусть E — произвольное нормированное пространство и пусть $\bar{E}$ — пространство классов эквивалентных (фундаментальных) последовательностей. Тогда $\bar{E}$ является банаховым пространством и линейное многообразие $E' \subset \bar{E}$ классов эквивалентности, содержащих стационарные последовательности, изометрически изоморфно E и плотно в $\bar{E}$.

Доказательство. Для доказательства полноты пространства $\bar{E}$ рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{\Phi_j\}$ классов $\{\Phi_j\} \in \bar{E}$ и докажем, что она сходится к некоторой последовательности $\Phi \in \bar{E}$. Для каждого натурального j выберем некоторую последовательность $\{\varphi_n^{(j)}\} \in \Phi_j$. Для любого k найдется такое число n_k , что для всех $m > n_k$ справедливо неравенство

$$\|\varphi_m^{(k)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| \leq k^{-1}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим класс Φ , состоящий из последовательностей, эквивалентных последовательности $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Покажем, что эта последовательность фундаментальна (т. е. что $\Phi \subset E$) и что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\Phi_j - \Phi\| = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, обозначим через $\Phi^{(k)}$ класс, содержащий стационарную последовательность $\{\varphi_{n_k}^{(k)}, \varphi_{n_k}^{(k)}, \dots\}$. По определению нормы в E $\|\Phi_k - \Phi^{(k)}\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m^{(k)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\|$. Из (2.3) следует, что

$$\|\Phi_k - \Phi^{(k)}\| \leq k^{-1}. \quad (2.4)$$

Следовательно, для фиксированных i, j ,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n_i}^{(i)} - \varphi_{n_j}^{(j)}\| &= \|\Phi^{(i)} - \Phi^{(j)}\| \leq \\ &\leq \|\Phi^{(i)} - \Phi_i\| + \|\Phi_i - \Phi_j\| + \|\Phi_j - \Phi^{(j)}\| \leq \\ &\leq i^{-1} + \|\Phi_i - \Phi_j\| + j^{-1} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

при $i, j \rightarrow \infty$ в силу фундаментальности последовательности $\{\Phi_i\}$. Стало быть последовательность $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}$ фундаментальна, т. е. $\Phi \in E$.

Теперь докажем сходимость последовательности $\{\Phi_j\}$ к Φ . Из неравенства (2.4) вытекает неравенство

$$\|\Phi - \Phi_k\| \leq \|\Phi - \Phi^{(k)}\| + \|\Phi^{(k)} - \Phi_k\| \leq \|\Phi - \Phi^{(k)}\| + k^{-1}. \quad (2.6)$$

Из фундаментальности последовательности $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\rho_0(\varepsilon, k)$, что при $\rho > \rho_0(\varepsilon, k)$

$$\|\Phi - \Phi^{(k)}\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\varphi_{n_p}^{(p)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| \leq \|\varphi_{n_p}^{(p)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| + \varepsilon,$$

а из (2.5) вытекает, что

$$\|\Phi - \Phi^{(k)}\| \leq \rho^{-1} + k^{-1} + \|\Phi_p - \Phi_k\| + \varepsilon. \quad (2.7)$$

Но последовательность $\{\Phi_j\}$ фундаментальна, и значит, из неравенств (2.6) и (2.7) вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi - \Phi_k\| = 0.$$

Тем самым полнота пространства E доказана.

Из предыдущих рассуждений ясно, что если $\Phi \in E$, то существует сходящаяся к Φ последовательность $\{\Phi^{(k)}\}$ элементов из E' . Таким образом, E' плотно в E , и теорема доказана.

Сужение отображения $\Phi \rightarrow \|\Phi\|$ с E на E' определяет норму на E' , так что E' превращается в нормированное пространство. Отображение E на E' , которое ставит в соответствие элементу

$\varphi \in E$ класс, содержащий стационарную последовательность $\varphi, \varphi, \dots$, является, очевидно, изометрическим изоморфизмом. Этот изометрический изоморфизм пространств E' и E позволяет в дальнейшем отождествлять их элементы, т. е. считать E частью E .

Пространство E называется пополнением пространства E .

Пример. Пусть Ω — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\tilde{L}_2(\Omega)$ нормированное пространство непрерывных комплексных функций на Ω (с естественным определением сложения функций и умножения их на комплексные числа), для которых

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Норма в $\tilde{L}_2(\Omega)$ определяется формулой

$$\|f\|_{\tilde{L}_2} = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что пространство $\tilde{L}_2(\Omega)$ неполно. Его пополнение обозначается через $L_2(\Omega)$. Элементы пространства $L_2(\Omega)$ будем называть *функциями, интегрируемыми с квадратом* на Ω . Заметим, что, вообще говоря, элемент $\varphi \in L_2(\Omega)$ не является функцией в обычном смысле слова, т. е. при $\varphi \notin \tilde{L}_2(\Omega)$ может не существовать отображения $\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$, $x \in \Omega$, $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, естественным образом связанного с элементом φ .

Пусть B — банахово пространство и L — плотное в нем линейное многообразие. Пространство L является нормированным пространством. Пополнение этого пространства изометрически изоморфно B . Предоставляем читателю самому доказать этот простой факт.

Пример. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ линейное многообразие $C_0^\infty(\mathbb{R})$, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактными носителями*). Покажем, что $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$. Сначала убедимся в том, что множество $C_0(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций с компактными носителями плотно в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть f — непрерывная функция из $L_2(\mathbb{R})$, т. е. $f \in \tilde{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$, где $f_n \in C_0(\mathbb{R})$, $f_n(x) = f(x) \alpha_n(x)$, $\alpha_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем $0 \leq \alpha_n(x) \leq 1$, и $\alpha_n(x) = 1$ при $|x| \leq n$. (Существование функций α_n очевидно.) Имеем

$$\|f - f_n\|^2 = \int_{|x| > n} |f(x)|^2 (1 - \alpha_n(x))^2 dx \leq \int_{|x| > n} |f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, так что

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

*) Говорят, что функция f , определенная на $\mathbb{R}^n$, имеет компактный носитель, если $f(x) = 0$ для всех x , лежащих вне некоторого шара в $\mathbb{R}^n$.

Но поскольку $\tilde{L}_2(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то отсюда следует, что $C_0(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $g \in C_0(\mathbb{R})$ — непрерывная функция с компактным носителем. Рассмотрим последовательность таких функций $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $0 \leq \varphi_n \leq 1$ и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при } |x| \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Положим $g_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-y) g(y) dy$. Очевидно, $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| n \int_{|x-y| \leq 1/2n} (g(y) - g(x)) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/2n < |x-y| < 1/2n + 1/n^2} \varphi_n(x-y) g(y) dy \right|; \\ \left| \int_{1/2n < |x-y| < 1/2n + 1/n^2} \varphi_n(x-y) g(y) dy \right| &\leq \int |\varphi_n(x-y)| |g(y)| dy \leq \\ &\leq n \int |g(y)| dy; \end{aligned}$$

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \max_{\xi \in \mathbb{R}, |h| \leq 1/2n} \left\{ |g(\xi+h) - g(\xi)| + \frac{2}{n} |g(\xi)| \right\}.$$

Кроме того, $g_n(x) = g(x) = 0$ при $|x| > c$, где c — некоторая константа. Поэтому

$$\|g_n - g\| \leq \sqrt{2c} \max_{\xi \in \mathbb{R}, |h| \leq 1/2n} \left(|g(\xi+h) - g(\xi)| + \frac{2}{n} |g(\xi)| \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$.

Итак, пространство $L_2(\mathbb{R})$ изометрически изоморфно пополнению линейного многообразия $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Мы рассмотрели процесс пополнения линейных нормированных пространств, приводящий к банаховым пространствам.

Другой путь построения банаховых пространств состоит в переходе к факторпространствам. Пусть B — банахово пространство и F — его подпространство. Будем говорить, что два вектора $x_1, x_2 \in B$ эквивалентны и писать $x_1 \sim x_2$, если $x_1 - x_2 \in F$. На множестве B/F классов эквивалентности естественным образом вводятся линейные операции. Например, если X и Y — два таких класса, то $X + Y$ есть класс, содержащий все элементы вида $x + y$, где $x \in X, y \in Y$. Легко видеть, что это определение корректно. Линейное пространство B/F наделяется нормой

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

Пространство B/F , нормированное указанным способом, является банаховым пространством (докажите). Оно называется факторпространством пространства B по подпространству F .

Задача. Пусть $B = C[0, 1]$ — пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, с нормой $\|f\| = \max |f|$, и пусть $F = \{f \in B: f(t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq a\}$. Докажите, что B/F изометрически изоморфно $C[0, a]$.

§ 3. Гильбертовы пространства

В дальнейшем мы будем, если не оговорено противное, называть комплексные векторные пространства просто векторными пространствами (аналогично — алгебры, нормированные пространства, банаховы пространства).

Важнейшим частным случаем банахова пространства является гильбертово пространство.

Предгильбертовым пространством называется векторное пространство H , в котором каждой упорядоченной паре векторов x, y поставлено в соответствие комплексное число (x, y) , называемое их *скалярным произведением*, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$H_1) (x, y) = \overline{(y, x)};$$

$$H_2) (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z);$$

$$H_3) (x, x) \geq 0;$$

$$H_4) [(x, x) = 0] \Leftrightarrow (x = 0).$$

Положим $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Тогда $\|\cdot\|$ удовлетворяет аксиомам N_1 и N_2 .

Проверим выполнение аксиомы N_3 . Для этого сначала докажем весьма важное *неравенство Коши — Буняковского*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Для случая $(x, y) = 0$ неравенство тривиально; поэтому предположим, что $(x, y) \neq 0$. Имеем

$$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = (x, x) - \alpha (y, x) - \bar{\alpha} (x, y) + |\alpha|^2 (y, y);$$

полагая $\alpha = (x, x)/(y, x)$, получаем

$$0 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y, x)|^2} \|y\|^2,$$

откуда и вытекает доказываемое неравенство. Легко видеть, что это неравенство превращается в равенство $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы (докажите). Теперь уже легко получить неравенство N_3 : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Действительно, можно переписать N_3 в виде

$$(x + y, x + y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\|,$$

т. е. в виде

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|,$$

или

$$2 \operatorname{Re} (x, y) \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Но $\operatorname{Re} (x, y) \leq |(x, y)|$, и поэтому последнее неравенство следует из неравенства Коши — Буняковского. Знак равенства в неравенстве $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ имеется тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны с неотрицательным коэффициентом пропорциональности (докажите).

Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством*.

Пример. В конечномерном векторном пространстве можно ввести структуру гильбертова пространства. Поскольку все n -мерные векторные пространства изоморфны, рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются упорядоченные наборы $x = (x_1, \dots, x_n)$ комплексных чисел. Алгебраические операции в $\mathbb{C}^n$ определяются покомпонентно. Введем

в $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$. Легко проверить выполнение аксиом $H_1) - H_4)$ и полноту полученного метрического пространства *).

Пример. Рассмотрим совокупность l_2 последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ комплексных чисел ξ_k , для которых $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$.

Определим в l_2 линейные операции покомпонентно. Мы получим векторное пространство. Введем в пространстве l_2 скалярное произведение, полагая для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l_2$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Ряд сходится, так как $|\xi_k \bar{\eta}_k| \leq 1/2 (|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2)$. Легко видеть, что аксиомы предгильбертова пространства будут выполнены. Покажем, что пространство l_2 полно. Пусть $x^{(n)}$ — фундаментальная последовательность. Координаты вектора $x^{(n)}$ обозначим $\xi_k^{(n)}$. Числовые последовательности $\xi_k^{(n)}$ при каждом k фундаментальны. Поэтому при каждом k существует предел $\xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $x^{(n)}$ фундаментальна, то найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что при $n, m > N(\varepsilon)$ получаем

*) Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ часто обозначается через $x \cdot y$.

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon, \text{ т. е.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Тем более, при любом конечном l

$$\sum_{k=1}^l |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2.$$

Полагая здесь сначала $m \rightarrow \infty$, а затем $l \rightarrow \infty$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Поэтому $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ и $\|x^{(n)} - x\| \leq \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$.

Векторы x и y гильбертова пространства H называются *ортонормальными*, если $(x, y) = 0$. Легко видеть, что для таких векторов $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).

Теорема 3.1. (Теорема о параллелограмме.) *Банахово пространство B тогда и только тогда является гильбертовым (т. е. изометрически изоморфно гильбертову), когда норма в этом пространстве удовлетворяет условию*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (3.1)$$

для любых $x, y \in B$.

Необходимость. Пусть B — гильбертово пространство. Тогда

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) + (y, y) - (x, y) - (y, x) = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Достаточность. Мы должны показать, что $\|x\|$ имеет вид $(x, x)^{1/2}$ для некоторого скалярного произведения (x, y) . Пусть B — банахово пространство и пусть выполнено условие (3.1) на норму. Определим следующую функцию (x, y) переменных $x \in B, y \in B$:

$$(x, y) = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \}. \quad (3.2)$$

Покажем вначале, что эта функция удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Имеем

$$(x, x) = \frac{1}{4} \{ 4\|x\|^2 + i\|1 + i\|^2\|x\|^2 - i\|1 - i\|^2\|x\|^2 \} = \|x\|^2.$$

Отсюда следует выполнение аксиом H_3 и H_4 . Соотношение H_1 следует из того, что $\|y + ix\| = \|x - iy\|$, $\|y - ix\| = \|x + iy\|$.

Докажем H_2 . Из (3.1) и (3.2) вытекает, что

$$\begin{aligned}(x, z) + (y, z) &= \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 + \\ &\quad + i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2 + i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\|\frac{x+y}{2} + z\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 - \|\frac{x+y}{2} - z\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 + \\ &\quad + i\|\frac{x+y}{2} + iz\|^2 + i\|\frac{x-y}{2}\|^2 - i\|\frac{x+y}{2} - iz\|^2 - \\ &\quad - i\|\frac{x-y}{2}\|^2) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \quad (3.3)\end{aligned}$$

Положив $y=0$, получим $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$. Отсюда и из (3.3) следует, что

$$(x+y, z) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = (x, z) + (y, z). \quad (3.4)$$

По индукции доказывается, что для любого натурального m справедливо равенство $(mx, z) = m(x, z)$. Действительно, из (3.4) и из предположения $(kx, z) = k(x, z)$ следует, что

$$(k+1)(x, z) = k(x, z) + (x, z) = (kx, z) + (x, z) = ((k+1)x, z).$$

Далее, непосредственно проверяется, что $(-x, z) = -(x, z)$. Таким образом, для рациональных чисел α вида $\alpha = m/2^n$ выполняется свойство $(\alpha x, z) = \alpha(x, z)$. Пусть теперь β — произвольное вещественное число и $\{\beta_n\}$ — последовательность двоичных дробей, сходящаяся к β . Тогда

$$\begin{aligned}(\beta x, z) - \beta(x, z) &= (\beta x, z) - \beta(x, z) - (\beta_k x, z) + \beta_k(x, z) = \\ &= ((\beta - \beta_k)x, z) + (\beta_k - \beta)(x, z) = \\ &= (\beta_k - \beta)(x, z) + \frac{1}{4} (\|(\beta - \beta_k)x + z\|^2 - \|(\beta - \beta_k)x - z\|^2 + \\ &\quad + i\|(\beta - \beta_k)x + iz\|^2 - i\|(\beta - \beta_k)x - iz\|^2) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

так как $(x_n \rightarrow x) \Rightarrow (\|x_n\| \rightarrow \|x\|)$. Следовательно, $(\beta x, z) = \beta(x, z)$. Наконец, прямое вычисление дает: $(ix, z) = i(x, z)$. Итак, $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$. Следовательно, пространство B , наделенное скалярным произведением вида (3.2), будет гильбертовым пространством. Теорема доказана.

Пример. Пространство $L_2(\Omega)$ — гильбертово. Проверим выполнение равенства (3.1). Пусть сначала x, y — непрерывные функции из $L_2(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \int_{\Omega} |x(\xi) + y(\xi)|^2 d\xi + \int_{\Omega} |x(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\Omega} [|x(\xi)|^2 + |y(\xi)|^2 + 2 \operatorname{Re} x(\xi) \overline{y(\xi)} + |x(\xi)|^2 + |y(\xi)|^2 - \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} x(\xi) \overline{y(\xi)}] d\xi = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Пусть теперь x и y — произвольные элементы из $L_2(\Omega)$ и пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — последовательности непрерывных функций из $L_2(\Omega)$, сходящиеся соответственно к x и y . Тогда

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\|x_k + y_k\|^2 + \|x_k - y_k\|^2] = \\ &= 2 \lim_{k \rightarrow \infty} [\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2] = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);\end{aligned}$$

следовательно, по теореме 3.1, пространство $L_2(\Omega)$, наделенное скалярным произведением по формуле (3.2), является гильбертовым пространством, что и требовалось доказать.

В случае, когда функции x и y непрерывны, получаем для скалярного произведения (x, y) :

$$\begin{aligned}(x, y) &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{\Omega} (x(\xi) + y(\xi)) (\overline{x(\xi)} + \overline{y(\xi)}) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} (x(\xi) - y(\xi)) (\overline{x(\xi)} - \overline{y(\xi)}) d\xi + i \int_{\Omega} (x(\xi) + iy(\xi)) (\overline{x(\xi)} - \right. \\ &\quad \left. - i\overline{y(\xi)}) d\xi - i \int_{\Omega} (x(\xi) - iy(\xi)) (\overline{x(\xi)} + i\overline{y(\xi)}) d\xi \right\} = \int_{\Omega} x(\xi) \overline{y(\xi)} d\xi. \quad (3.5)\end{aligned}$$

Замечание. Даже в тех случаях, когда x и y — произвольные элементы пространства $L_2(\Omega)$, не обязательно являющиеся непрерывными функциями, будем записывать их скалярное произведение в том же виде:

$$(x, y) = \int_{\Omega} x(\xi) \overline{y(\xi)} d\xi.$$

Вернемся к общим пространствам. Если Y — некоторое множество в метрическом пространстве R с метрикой ρ , то для любого $x_0 \in R$ число $\rho(x_0, Y) = \inf \rho(x_0, y)$ называется *расстоянием* от x_0 до Y . Вообще говоря, расстояние не обязано достигаться на каком-либо элементе $y \in Y$.

Задача. Доказать, что расстояние достигается, если пространство R — полное, а Y компактно в R . Если расстояние достигается, то элемент $y \in Y$, для которого $\rho(x_0, y) = \rho(x_0, Y)$, не обязан быть единственным. В случае выпуклых замкнутых подмножеств гильбертова пространства картина гораздо проще.

Теорема 3.2. Пусть Y — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H . Тогда для любого $x_0 \in H$ существует один и только один элемент $y_0 \in Y$ такой, что

$$\|x_0 - y_0\| = \rho(x_0, Y) \equiv \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|.$$

Доказательство. Пусть $d = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $d > 0$. Пусть $y_n \in Y$ — такая последовательность, что $\|x_0 - y_n\| \rightarrow d$. Применяя теорему о паралле-

лограмме (теорема 3.1) к векторам $a = x_0 - y_n$ и $b = x_0 - y_m$, мы получаем

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4 \left\| x_0 - \frac{(y_n + y_m)}{2} \right\|^2 = 2 \|x_0 - y_n\|^2 + 2 \|x_0 - y_m\|^2.$$

При $n, m \rightarrow \infty$ правая часть равенства стремится к $4d^2$. Вектор $\frac{1}{2}(y_n + y_m)$ в силу выпуклости Y принадлежит Y . Поэтому $\|x_0 - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\| \geq d$ при всех n и m . Сопоставляя эти два факта, мы видим, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\| = 0,$$

т. е. последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства H существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. При этом $y_0 \in Y$, так как Y замкнуто. Ясно, что $\|x_0 - y_0\| = d$. Тем самым установлено существование элемента $y_0 \in Y$, для которого $\|x_0 - y_0\| = \rho(x_0, Y)$. Покажем, что такой элемент может быть только один. Пусть $z_0 \in Y$ таков, что для этого элемента также $\|x_0 - z_0\| = d$. Положим $u_0 = \frac{1}{2}(y_0 + z_0)$. Тогда $u_0 \in Y$. Имеем

$$\begin{aligned} d \leq \|x_0 - u_0\| &= \|x_0 - \frac{1}{2}(y_0 + z_0)\| = \frac{1}{2}(\|x_0 - y_0\| + \|x_0 - z_0\|) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x_0 - y_0\| + \|x_0 - z_0\|) = \frac{1}{2}(d + d) = d. \end{aligned}$$

Поэтому фактически все неравенства, фигурирующие в этой цепочке, суть равенства. В частности,

$$\|(x_0 - y_0) + (x_0 - z_0)\| = \|x_0 - y_0\| + \|x_0 - z_0\|.$$

Принимая во внимание, что здесь неравенство треугольника обращается в равенство, мы заключаем отсюда, что $x_0 - y_0 = t(x_0 - z_0)$, где $t \geq 0$. Но так как $\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - z_0\| = d > 0$, то $t = 1$. Поэтому $z_0 = y_0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. Если Y — замкнутое линейное подмногообразие гильбертова пространства H , то всякий вектор $x \in H$ единственным образом представим в виде

$$x = y + z,$$

где $y \in Y$, а z ортогонален к Y , т. е. $(z, a) = 0$ для всех $a \in Y$.

Доказательство. Единственность такого разложения очевидна: если имеется еще одно представление $x = y_1 + z_1$ с теми же свойствами, то вектор $y - y_1 = z_1 - z$ оказывается ортогональным самому себе, а потому нулевым. Для доказательства существования воспользуемся теоремой 3.2. Согласно этой теореме найдется такой вектор $y \in Y$, что $\|x - y\| = \inf_{u \in Y} \|x - u\|$. Покажем, что вектор

$z = x - y$ ортогонален к Y . Предположим противное. Тогда $(z, a) \neq 0$ для некоторого вектора $a \in Y$. Покажем, что при подходящем подборе скаляра λ мы сможем получить $\|x - (y + \lambda a)\| < d$. Тем самым мы получим противоречие с определением

числа d , так как $y + \lambda a \in Y$. Имеем

$$\|x - (y + \lambda a)\|^2 = \|z - \lambda a\|^2 = \|z\|^2 + |\lambda|^2 \|a\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} (z, a),$$

и теперь ясно, что λ надо брать малым по модулю и таким, чтобы $\bar{\lambda} (z, a) > 0$. Такой выбор λ возможен в силу предположения $(z, a) \neq 0$. Следовательно, это предположение неверно, и теорема доказана.

Вектор y в разложении вектора x , указанном в теореме 3.3, называется *проекцией* вектора x на подпространство Y .

Говорят, что пространство H разлагается в *прямую сумму* своих подпространств Y_1 и Y_2 , если $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ и всякий вектор $x \in H$ допускает представление вида $y_1 + y_2$, где $y_i \in Y_i$. В случае гильбертова пространства говорят также об *ортogonalной прямой сумме*, если подпространства Y_1 и Y_2 ортogonalны, т. е. если $(y_1, y_2) = 0$ для любых $y_1 \in Y_1$ и $y_2 \in Y_2$.

Совокупность векторов, ортogonalных к некоторому подпространству $Y \subset H$, образует, как легко видеть, замкнутое подпространство в H . Оно называется *ортogonalным дополнением* к Y . Теорема 3.3 приводит нас к следующему результату.

Теорема 3.4. Пусть Y_1 — замкнутое подпространство гильбертова пространства H . Тогда H представляется в виде ортogonalной прямой суммы подпространства Y_1 и его ортogonalного дополнения Y_2 , что записывается в виде $H = Y_1 \oplus Y_2$.

Задача. Докажите, что Y_2 изометрически изоморфно факторпространству H/Y_1 .

Система (конечная или бесконечная) векторов $e_i \in H$ гильбертова пространства H называется *ортонормированной*, если $\|e_i\| = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Пример ортонормированной системы в l_2 дает система $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots)$. Если $x \in H$,

то числа $c_i = (x, e_i)$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x по системе e_i . Для любой (конечной) ортонормированной системы $e_1, \dots, e_n \in H$ и любого вектора $x \in H$ имеет место следующее важное *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Докажем это неравенство. Пусть $y = \sum_{k=1}^n c_k e_k$. Тогда $(x, e_i) = (y, e_i)$ при $1 \leq i \leq n$. Положим $z = x - y$. Тогда $(z, e_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $(z, y) = 0$. По теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.5. Пусть H — гильбертово пространство и пусть $\{e_k\}$ — счетная ортонормированная система в H . Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел, для которых $\sum_1^\infty |\lambda_k|^2 < \infty$.

Тогда последовательность векторов

$$s_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

сходится в H к вектору s , для которого $(s, e_i) = \lambda_i$ и $\|s\|^2 = \sum_1^\infty |\lambda_k|^2$.

Доказательство. Пусть $n > m$. Тогда, по теореме Пифагора,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\lambda_k|^2,$$

откуда и следуют оба утверждения.

Ортонормированная система векторов $e_k \in H$ называется *полной*, если из условий $(x, e_k) = 0$ для всех k вытекает, что $x = 0$. Если линейными комбинациями векторов системы $\{e_k\}$ можно аппроксимировать любой вектор $x \in H$, то система, очевидно, полна. Из приводимой ниже теоремы вытекает, что в гильбертовом (полном) пространстве верно и обратное.

Теорема 3.6. Пусть $\{e_k\}$ — полная счетная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H . Тогда любой вектор $x \in H$ (единственным образом) представляется в виде суммы сходящегося ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

где $c_k = (x, e_k)$. При этом

$$\|x\|^2 = \sum_1^\infty |c_k|^2$$

(равенство Парсеваля). Далее, если x и y — два любых вектора, то

$$(x, y) = \sum_1^\infty (x, e_k) \overline{(y, e_k)}.$$

Доказательство. В силу неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2$$

для всякого n . Поэтому ряд $\sum_1^\infty |c_k|^2$ сходится. Положим $s_n = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$. По теореме 3.5 последовательность s_n схо-

дится к некоторому вектору $s \in H$. При этом $(x, e_k) = c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, e_k) = (s, e_k)$, так что $(x - s, e_k) = 0$ для всех k . Поскольку система $\{e_k\}$ полна, отсюда следует, что $x = s$. Остальное очевидно. Теорема доказана.

Полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве называется *ортонормальным базисом*. Пространство, обладающее счетным ортонормальным базисом, называется *счетномерным*. Всякое счетномерное гильбертово пространство H изометрически изоморфно пространству l_2 (докажите это, используя теорему 3.6).

Нормированное пространство R называется *сепарабельным*, если в этом пространстве существует счетное всюду плотное множество A , т. е. такое счетное множество A , что для любого вектора $x \in R$ и любого $\varepsilon > 0$ имеется вектор $a \in A$, удовлетворяющий условию $\rho(x, a) < \varepsilon$. Другими словами, всякий вектор из R есть предел последовательности элементов множества A .

Всякое сепарабельное гильбертово пространство H счетномерно. Действительно, пусть $A = \{a_i\}$ — счетное всюду плотное множество в H . Выберем такую подпоследовательность $b_1, b_2, \dots \in A$, чтобы: 1) при любом n векторы $b_1, \dots, b_n$ были линейно независимы; 2) всякий вектор из A был линейной комбинацией векторов b_i . Очевидно, такой выбор возможен. Ортонормальный базис будем строить по индукции. Положим $e_1 = b_1 / \|b_1\|$. Допустим, что векторы $e_1, \dots, e_n$ таковы, что они образуют ортонормированную систему и линейная оболочка системы $\{e_1, \dots, e_n\}$ совпадает с линейной оболочкой системы $\{b_1, \dots, b_n\}$. Положим

$$f_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + b_{n+1},$$

где $\lambda_i = -(b_{n+1}, e_i)$, $1 \leq i \leq n$. Тогда $(f_{n+1}, e_i) = 0$ при $1 \leq i \leq n$. Кроме того, $f_{n+1} \neq 0$, поскольку иначе векторы $e_1, \dots, e_n, b_{n+1}$, а потому и $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$, оказались бы линейно зависимыми. Наконец, полагая $e_{n+1} = f_{n+1} / \|f_{n+1}\|$, мы совершим индуктивный переход от n к $n+1$. Легко убедиться (мы рекомендуем читателю восстановить детали), что $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ образует искомый базис.

§ 4. Линейные функционалы и сопряженные пространства

Пусть B — нормированное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Линейным функционалом* на B называется такое отображение $\varphi: B \rightarrow K$, что $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ для любых $x, y \in B$ и $\lambda \in K$. Если это отображение непрерывно, т. е. если $(x_n \rightarrow x) \Rightarrow (\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x))$, то оно называется *линейным непрерывным функционалом*. Легко видеть, что непрерывность линейного функционала во всех точках пространства B вытекает из его непрерывности в точке 0.

Линейный функционал φ называется *ограниченным*, если конечна величина $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|$, которая называется *нормой функционала* φ . Без труда проверяется, что непрерывность линейного функционала эквивалентна его ограниченности.

Задача. Доказать, что линейный функционал φ тогда и только тогда ограничен, когда не каждое число принадлежит множеству $\{\lambda = \varphi(x) : \|x\| < 1\}$. Другими словами, если функционал φ не является ограниченным, то в любой

окрестности нуля он принимает всякое значение. Рассмотрите пример: совокупность дифференцируемых функций на отрезке $[-1; 1]$ наделяется нормой $\|f\| = \max_{[-1, 1]} |f'|$ и берется функционал φ , где $\varphi(f) = f'(0)$.

Лемма 4.1. *Каждый линейный непрерывный функционал однозначно с сохранением нормы продолжается на пополнение пространства.*

Доказательство предоставляется читателю. В дальнейшем мы будем иметь дело только с линейными непрерывными функционалами. Эпитеты «линейный» и «непрерывный» для краткости будут опускаться. Кроме того, ввиду леммы 4.1, область определения B можно считать банаховым пространством.

Обилие запаса функционалов обеспечивается следующим фундаментальным фактом.

Теорема 4.1 (теорема Хана — Банаха). *Пусть φ — функционал, заданный на (замкнутом) подпространстве F пространства B . Тогда существует такой функционал ψ на B , что сужение ψ на F совпадает с φ и $\|\psi\| = \|\varphi\|$.*

Доказательство. Наметим основные пункты доказательства.

Предположим сначала, что $K = \mathbb{R}$. Допустим для простоты, что $\|\varphi\| = 1$. Пусть $x_0 \notin F$. Попытаемся продолжить функционал φ с подпространства F на подпространство F_1 векторов вида $\lambda x_0 + x$, где $x \in F$, с таким расчетом, чтобы сохранить норму функционала. Продолжение полностью определяется заданием числа $c = \varphi(x_0)$. Норма будет сохранена в том и только в том случае, если для любого $x \in F$

$$|\lambda c + \varphi(x)| \leq \|\lambda x_0 + x\|.$$

Это неравенство эквивалентно тому, что для любых $x_1, x_2 \in F$

$$-\varphi(x_2) - \|x_0 + x_2\| \leq c \leq -\varphi(x_1) + \|x_0 + x_1\|.$$

Поэтому выбор числа c , обеспечивающий сохранение нормы, возможен, если

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leq \|x_0 + x_1\| + \|x_0 + x_2\|.$$

Но последнее неравенство действительно выполняется

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) - \varphi(x_2) &\leq |\varphi(x_1 - x_2)| \leq \|\varphi\| \|x_1 - x_2\| = \\ &= \|(x_1 + x_0) + (-x_2 - x_0)\| \leq \|x_0 + x_1\| + \|x_0 + x_2\|. \end{aligned}$$

Если F_1 исчерпывает все B , то доказательство закончено. В противном случае к F_1 добавляется вектор $x_2 \notin F_1$ и т. д. Аккуратное завершение доказательства требует привлечения некоторых специфических теоретико-множественных соображений, связанных с аксиомой выбора, на которых мы останавливаться не будем. Вместе с тем, случай поля $K = \mathbb{C}$ просто выводится из $K = \mathbb{R}$.

Если $\varphi(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ — разложение φ на вещественную и мнимую компоненты, то, как легко видеть,

$$\alpha(ix) = -\beta(x), \quad \beta(ix) = \alpha(x),$$

причем α и β — вещественные функционалы на F . Теперь надо продолжить функционал α на B с сохранением нормы и восстановить ψ по этому продолжению в соответствии с формулой $\varphi(x) = \alpha(x) - i\alpha(ix)$. Мы предлагаем читателю восполнить детали.

Теорема 4.2. Для любой точки $x_0 \in B$

$$\|x_0\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x_0)|.$$

Более того, существует такой функционал φ_0 , что $\|\varphi_0\| = 1$ и $\varphi_0(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство. Очевидно, достаточно установить второе утверждение. Рассмотрим подпространство F в B , состоящее из векторов вида λx_0 . Если на этом подпространстве задать функционал φ формулой $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, а затем продолжить его на B в соответствии с теоремой 4.1, то мы и получим искомый функционал φ_0 .

Следствие. Если $x \neq y$, то для некоторого функционала φ имеем $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Последнее предложение означает, что функционалы образуют весьма обширное семейство функций на B . Семейство функций (функционалов), разделяющее в указанном смысле точки пространства, называется *тотальным*.

Задача. Построить примеры, показывающие, что продолжение функционала, указанное в теореме Хана — Банаха, вообще говоря, не единственно.

Задача. Пусть Γ — единичная окружность $|z| = 1$. В пространстве $C(\Gamma)$ всех непрерывных функций на Γ рассмотрим подпространство F функций, допускающих аналитическое продолжение в круг $|z| < 1$. Доказать, что F — замкнутое подпространство в $C(\Gamma)$. Определим на F функционал φ , полагая $\varphi(f) = f(0)$. Показать, что $\|\varphi\| = 1$. Пусть ψ — продолжение функционала φ с F на $C(\Gamma)$, построенное с сохранением нормы. Используя тот факт, что $\psi(1) = 1$ и $\|\psi\| = 1$, показать, что $\psi(f) \geq 0$, если $f \in C(\Gamma)$ и $f \geq 0$. Вывести отсюда, что

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f dz}{z}$$

(т. е. продолжение единственно).

В ряде случаев полезно и важно знать, как устроены произвольные линейные непрерывные функционалы на данном пространстве. Особенно важен случай гильбертова пространства, и в этом случае ответ оказывается особенно простым и красивым.

Теорема 4.3 (теорема Ф. Рисса). Всякий линейный непрерывный функционал φ на гильбертовом пространстве H имеет вид

$$\varphi(x) = (x, a),$$

где элемент $a \in H$ определен однозначно. При этом $\|\varphi\| = \|a\|$.

Обратно, если a — произвольный вектор из H , то данная формула задает функционал.

Доказательство. Однозначная определенность по φ элемента $a \in H$, утверждение о норме, а также последнее утверждение вытекают из общих свойств скалярного произведения (неравенства Коши — Буняковского). Основное в теореме — доказать существование вектора a .

Пусть L — ядро функционала φ , т. е. совокупность тех $x \in H$, для которых $\varphi(x) = 0$. Ясно, что L есть замкнутое подпространство в H . В соответствии с теоремой 3.4 представим H в виде $L \oplus M$, где M — ортогональное дополнение. Легко видеть, что $\dim M = 1$ (подпространство M одномерно). Действительно, пусть $e_1, e_2 \in M$. Тогда $\varphi(e_2)e_1 - \varphi(e_1)e_2 \in L \cap M = \{0\}$.

Пусть теперь $e \in M$ и $\varphi(e) = 1$. Любой вектор $x \in H$, согласно теореме 3.4, представим в виде $x = z + \lambda e$, где $z \in L$. При этом $\varphi(x) = \varphi(z) + \lambda\varphi(e) = \lambda$. Поэтому $(x, e) = (z, e) + \lambda(e, e) = \varphi(x)\|e\|^2$, так что

$$\varphi(x) = (x, a),$$

где $a = \frac{e}{\|e\|^2}$. Теорема доказана.

Совокупность (линейных непрерывных) функционалов на данном пространстве B превращается в линейное пространство, если операции в нем определить соотношением

$$(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x).$$

Далее, очевидно, что норма функционалов удовлетворяет условиям

$$\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|, \quad \|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\|, \quad \|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

— нулевой функционал, т. е. $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in B$.

Таким образом, указанная совокупность сама становится линейным нормированным пространством. Это пространство обозначается через B^* и называется сопряженным к пространству B .

Теорема 4.4. Пространство B^* полно.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов из B^* . Заметим, что $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$. При каждом $x \in B$ числовая последовательность $\varphi_n(x)$ в силу неравенства

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |(\varphi_n - \varphi_m)(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\| \cdot \|x\|$$

оказывается фундаментальной. Поэтому существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x).$$

Ясно, что $|\varphi(x)| \leq (\sup_n \|\varphi_n\|) \cdot \|x\|$. Поэтому $\varphi \in B^*$. Далее, так как последовательность $\{\varphi_n\}$ фундаментальна, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ при $n, m > N$. Если

теперь $\|x\| \leq 1$, то

$$|(\varphi - \varphi_n)(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |(\varphi_m - \varphi_n)(x)| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\|\varphi - \varphi_n\| \leq \varepsilon$ при $n > N$. Теорема доказана.

Заметим, что *полнота пространства B здесь не использовалась*; важно лишь то, что полно K .

Поскольку B^* само представляет собой банахово пространство, мы можем построить пространство $(B^*)^*$, которое обозначается B^{**} и называется *вторым сопряженным к B* . Процесс можно продолжить и дальше.

Имеется естественное взаимно однозначное линейное и изометрическое отображение пространства B в B^{**} . Именно, всякий элемент $x \in B$ задает функционал f_x на B^* по формуле

$$f_x(\varphi) = \varphi(x).$$

Линейность и взаимная однозначность отображения $x \rightarrow f_x$ очевидны, а то обстоятельство, что $\|f_x\| = \|x\|$, вытекает из теоремы 4.2.

Вообще говоря, функционалами вида f_x , $x \in B$ не исчерпывается запас всех функционалов на B^* . Если же это происходит, то пространство B называется *рефлексивным*.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы Рисса (теорема 4.3).

Теорема 4.5. *Гильбертово пространство рефлексивно.*

Определение. *Последовательность $\varphi_n \in B^*$ слабо сходится к функционалу $\varphi \in B^*$, если*

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

для любого $x \in B$.

Последовательность $\varphi_n \in B^*$ называется *слабо фундаментальной*, если каждая из числовых последовательностей $\varphi_n(x)$, $x \in B$ является фундаментальной. Наконец, последовательность $\varphi_n \in B^*$ называется *слабо ограниченной*, если каждая из числовых последовательностей $|\varphi_n(x)|$, $x \in B$ ограничена.

Говорить о слабой ограниченности имеет смысл для любого семейства функционалов (не обязательно последовательности).

Если φ_n слабо сходится к φ , то мы будем писать $\varphi_n \xrightarrow{cl} \varphi$. Если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в том смысле, что $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$, то $\varphi_n \xrightarrow{cl} \varphi$, поскольку $|(\varphi_n - \varphi)(x)| \leq \|\varphi_n - \varphi\| \|x\|$. Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть, например, $\{e_n\}$ — бесконечная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H . Положим $\varphi_n(x) = (x, e_n)$. Тогда, как это вытекает из неравенства Бесселя, $\varphi_n \xrightarrow{cl} 0$, но $\|\varphi_n\| = 1$.

Задача. Доказать, что если $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность функционалов в гильбертовом пространстве, что $\varphi_n \xrightarrow{cl} \varphi$ и $\|\varphi_n\| \rightarrow \|\varphi\|$, то $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$.

Хотя *сильная сходимост* (т. е. сходимост по норме) функционалов не вытекает из слабой, последний вид сходимости интересен сам по себе. Кроме

того, существует простая связь между сильной и слабой ограниченностью. Следующая теорема легко вытекает из леммы о бочке.

Теорема 4.6. 1) Если семейство Φ функционалов на банаховом пространстве B слабо ограничено, то оно ограничено и по норме. 2) Если последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо фундаментальна, то она слабо сходится (пространство B^* слабо полно).

Говорят, что последовательность элементов $x_n \in B$ слабо сходится к элементу $x \in B$, если $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ для любого $\varphi \in B^*$.

Аналогично определяется слабая ограниченность, слабая фундаментальность и слабая полнота в пространстве B .

Замечание. Таким образом, в пространстве B^* имеется два различных (вообще говоря) вида слабой сходимости, и следует соблюдать осторожность, не допуская здесь путаницы!

Сформулируем еще несколько утверждений, касающихся слабой сходимости (и ограниченности). Читатель может рассматривать их как набор упражнений.

1) Если семейство X элементов пространства B слабо ограничено, то оно ограничено по норме. Для доказательства можно воспользоваться описанным выше вложением пространства B в B^{**} и теоремой 4.6.

2) Последовательность элементов $x_n \in B$ может оказаться слабо фундаментальной, но не слабо сходящейся.

3) Пусть B — сепарабельное банахово пространство. Тогда из каждой ограниченной последовательности $\varphi_n \in B^*$ можно выделить слабо сходящуюся последовательность.

4) Согласно теореме Рисса, гильбертово пространство рефлексивно. Два вида слабой сходимости на сопряженном пространстве совпадают. Но и само гильбертово пространство (по той же теореме Рисса) можно отождествить с сопряженным. Поэтому гильбертово пространство слабо полно и из каждой ограниченной последовательности элементов (сепарабельного гильбертова пространства) можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

5) Пусть последовательность элементов $x_n \in B$ ограничена по норме и $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ для любого φ из плотного в B^* множества. Тогда x_n слабо сходится к x .

§ 5. Линейные операторы

Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. *Линейным оператором* называется отображение $A: D_A \rightarrow R_A$, осуществляющее гомоморфизм линейного многообразия $D_A \subset B_1$ в линейное многообразие $R_A \subset B_2$. Многообразие D_A называется *областью определения* оператора A , а многообразие R_A — *областью значений*. Говорят, что оператор A непрерывен в точке $x \in D_A$, если

$$(x_n \rightarrow x \text{ и } x_n \in D_A) \Rightarrow (Ax_n \rightarrow Ax).$$

Как и в случае линейных функционалов, легко проверяется, что непрерывность оператора (слово «линейный» мы будем опускать) A в точке 0 влечет за собой его непрерывность в каждой точке $x \in D_A$. Величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

называется *нормой оператора* A . Если $\|A\| < \infty$, то оператор называется *ограниченным*. Снова, как и для линейных функционалов, *ограниченность оператора эквивалентна его непрерывности*. Имеет место следующая теорема (аналогичная лемме 4.1).

Теорема 5.1. *Каждый ограниченный оператор $A: D_A \rightarrow R_A$ однозначно, с сохранением нормы, продолжается до оператора с областью определения $\bar{D}_A$. В частности, если D_A плотно в B_1 , то A продолжается до ограниченного оператора $A': B_1 \rightarrow B_2$.*

Ограниченные операторы A с областью определения $D_A = B_1$ мы будем называть *гомоморфизмами* из B_1 в B_2 . Множество всех гомоморфизмов обозначается через $\text{Hom}(B_1, B_2)$, а в случае, когда $B_1 = B_2 = B$, — через $\text{Op}(B)$.

З а м е ч а н и е. Теорема, аналогичная теореме Хана — Банаха, для операторов, вообще говоря, не выполняется.

Всюду в дальнейшем (если специально не оговорено противное) *предполагается, что D_A плотно в B_1 .*

Пример. Пусть Ω — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, $U \subset \Omega$ — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и φ — непрерывная функция на Ω с носителем, содержащимся в U . Обозначим через $\hat{\varphi}$ оператор $\hat{\varphi}: \tilde{L}_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, где $\tilde{L}_2(\Omega)$ — линейное многообразие всех непрерывных функций из $L_2(\Omega)$, $\tilde{L}_2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, действующий по формуле

$$[\hat{\varphi}f](x) = \varphi(x)f(x).$$

Оператор $\hat{\varphi}$ ограничен: $\|\hat{\varphi}\| \leq \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$. Следовательно, он может быть продолжен до гомоморфизма $L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, который мы снова обозначим символом $\hat{\varphi}$.

Будем говорить, что элементы f и g пространства $L_2(\Omega)$ *совпадают* на открытом множестве U , если $\hat{\varphi}f = \hat{\varphi}g$ для любой непрерывной функции φ с носителем, содержащимся в U . Будем говорить, что элемент $f \in L_2(\Omega)$ *непрерывен* в точке x_0 , если существует функция $g \in \tilde{L}_2(\Omega)$, с которой f совпадает в некоторой окрестности точки x_0 . При этом положим $f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} g(x_0)$. Предоставляем читателю убедиться в том, что $f(x_0)$ не зависит от выбора функции g .

Теория линейных неограниченных операторов в банаховых пространствах имеет важные приложения при изучении общих свойств линейных дифференциальных уравнений. Приведем примеры неограниченных операторов.

Пример. Пусть T — оператор дифференцирования в пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0, \pi]$, определенный на множестве D_T непрерывно дифференцируемых функций на $[0, \pi]$ (плотном в $L_2(\Omega)$), поскольку любую непрерывную функцию на $[0, \pi]$

можно с заданной точностью аппроксимировать многочленом равномерно, а значит, и по норме пространства L_2). Рассмотрим последовательность $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

функций из D_T . Имеем $\|\varphi_n\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = 1$. При этом

$$\|T\varphi_n\|^2 = \frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 nx \, dx = n^2. \text{ Поэтому}$$

$$\|T\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \infty,$$

т. е. оператор T неограничен.

Пример. Пусть S — линейное многообразие в $L_2(\mathbb{R})$, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций φ , удовлетворяющих условию: для любых целых неотрицательных m и n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^m \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = 0.$$

Множество S плотно в $L_2(\mathbb{R})$, так как $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S$.

Пусть $T: S \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — оператор умножения на независимую переменную: $Tf(x) = xf(x)$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-x^2/n^2}.$$

Вычислим $\|\varphi_n\|$ и $\|T\varphi_n\|$. Имеем

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2/n^2} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2} \, dy = \|\varphi_1\|^2,$$

$$\|T\varphi_n\|^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2/n^2} \, dx = n^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-2y^2} \, dy = n^2 \|T\varphi_1\|^2.$$

Таким образом, оператор T неограничен:

$$\|T\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \|T\varphi_1\|}{\|\varphi_1\|} = \infty.$$

Определение. Оператор $T: D_T \rightarrow B_2$ называется расширением оператора $A: D_A \rightarrow B_2$, а оператор A — сужением оператора T на множество D_A , если $D_A \subset D_T$ и $Ax = Tx$ для любого $x \in D_A$.

Неограниченный оператор A , в отличие от ограниченного, вообще говоря, не допускает естественного расширения до оператора, определенного на $\overline{D}_A$. Тем не менее, для некоторого

класса неограниченных операторов существует процесс, аналогичный процессу расширения операторов по непрерывности, и мы опишем этот процесс, введя необходимые определения.

Определение. Оператор A называется замкнутым, если

$$(g_n \rightarrow g \text{ и } Ag_n \rightarrow h) \Rightarrow (g \in D_A, Ag = h).$$

Ясно, что ограниченный определенный на всем пространстве оператор замкнут (ниже мы покажем, что верно и обратное). Оказывается, не всякий оператор допускает хотя бы одно замкнутое расширение. Однако, если такие расширения существуют, то среди них имеется наименьшее, которое мы теперь и опишем. Рассмотрим оператор $T_0: D_{T_0} \rightarrow B_2$, $D_{T_0} \subset B_1$, допускающий некоторое замкнутое расширение T_1 . Пусть $g \in B_1$ есть предел последовательности $\{g_n\}$ элементов из D_{T_0} , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0 g_n = h$, $h \in B_2$. Тогда, по определению замкнутого оператора, $T_1 g = h$. Таким образом, g принадлежит области определения любого замкнутого расширения оператора T_0 . Обозначим через T сужение оператора T_1 на множество

$$D_T = \{g \mid (\exists \{g_n\}) (\exists h) [(g_n \rightarrow g, g_n \in D_{T_0}) \text{ и } (T_0 g_n \rightarrow h)]\}.$$

Элемент g принадлежит D_T тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $g_n \in D_{T_0}$, что $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0 g_n$. Оператор T замкнут. Действительно, пусть $g_n \rightarrow g$, $g_n \in D_T$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} T g_n = h$. Тогда для любого n существует

такая последовательность $\{g_k^{(n)}\}$ элементов из D_{T_0} , что

$$\|g_k^{(n)} - g_n\| < \frac{1}{k} \text{ и } \|T_0 g_k^{(n)} - T g_n\| < \frac{1}{k}.$$

Рассмотрим диагональную последовательность $\{g_n^{(n)}\}$. Имеем:

$$\|g_n^{(n)} - g\| \leq \frac{1}{n} + \|g_n - g\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

и

$$\|T_0 g_n^{(n)} - h\| \leq \frac{1}{n} + \|T g_n - h\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $g \in D_T$, что и требовалось доказать. Очевидно, T является наименьшим замкнутым расширением оператора T_0 .

Определение. Наименьшее замкнутое расширение оператора T , если оно существует, называется замыканием этого оператора и обозначается через $\bar{T}$.

Теорема 5.2. Оператор A имеет замыкание $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда $(g_n \rightarrow 0 \text{ и } Ag_n \rightarrow h) \Rightarrow (h = 0)$.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как если A — замыкание оператора A , $g_n \rightarrow 0$ и $Ag_n \rightarrow h$, то $h = \bar{A}0 = 0$.

Докажем достаточность. Пусть $(g_n \rightarrow 0 \text{ и } Ag_n \rightarrow h) \Rightarrow (h=0)$; построим $\bar{A}$. Область определения оператора $\bar{A}$ должна состоять из пределов таких последовательностей $\{g_n\}$ элементов из D_A , для которых последовательность $\{Ag_n\}$ фундаментальна. Если $g \in D_{\bar{A}}$ и $g_n \rightarrow g$, $Ag_n \rightarrow h$, $g_n \in D_A$, то положим $\bar{A}g = h$. Это определение не приводит к противоречию, ибо если $f_n \rightarrow g$, $\bar{A}f_n \rightarrow h'$, $f_n \in D_A$, то $g_n - f_n \rightarrow 0$, $\bar{A}(g_n - f_n) \rightarrow h - h'$, и следовательно, по условию теоремы, $h = h'$. Доказательство замкнутости построенного оператора $\bar{A}$ совпадает с приведенным выше доказательством существования замыкания оператора, имеющего замкнутые расширения.

Нетрудно заметить наличие тесной связи между процессом пополнения нормированного пространства и процессом замыкания оператора.

Теорема 5.3. *Оператор $A: D_A \rightarrow B_2$, $D_A \in B_1$ замкнут тогда и только тогда, когда пространство B_A , состоящее из элементов $g \in D_A$ с нормой*

$$\|g\|_{B_A}^2 = \|Ag\|_{B_2}^2 + \|g\|_{B_1}^2, \quad (5.1)$$

полно.

Доказательство. Пусть оператор A замкнут. Рассмотрим последовательность $\{g_n\}$, фундаментальную в B_A :

$$\|g_n - g_m\|_{B_A} < \varepsilon \text{ при } m, n > N(\varepsilon).$$

Из (5.1) следует, что при $m, n > N(\varepsilon)$

$$\|g_n - g_m\|_{B_1} < \varepsilon \text{ и } \|Ag_n - Ag_m\|_{B_2} < \varepsilon.$$

В силу полноты пространств B_1 и B_2 последовательности $\{g_n\}$ и $\{Ag_n\}$ имеют пределы $g \in B_1$ и $h \in B_2$, причем $h = Ag$, так как оператор A замкнут. Следовательно, $g \in B_A$; кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$\|g - g_n\|_{B_A}^2 = \|Ag - Ag_n\|_{B_2}^2 + \|g - g_n\|_{B_1}^2 \rightarrow 0.$$

Обратно, пусть пространство B_A полно. И пусть $g_n \rightarrow g \in B_1$, $Ag_n \rightarrow h$. Докажем, что $h = Ag$. Из (5.1) следует, что последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна в B_A . В силу полноты пространства B_A существует такой элемент $f \in B_A$, что $\|f - g_n\|_{B_A} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\|f - g_n\|_{B_1} \leq \|f - g_n\|_{B_A}$, то $g_n \rightarrow f$ по норме пространства B_1 , так что $f = g$. Из (5.1) следует, что $\|Ag_n - Ag\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $h = Af = Ag$, что и требовалось доказать.

Пример. Приведем пример оператора A , не имеющего замыкания. Пусть A действует из $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ и пусть $D_A = C[0, 1]$ есть множество всех непрерывных функций на $[0, 1]$. Положим $Ag = g(1)$, так что оператор A каждой функции из

$C[0, 1]$ ставит в соответствие постоянную функцию. Рассмотрим последовательность $\{g_n\}$, где $g_n(x) = x^n$. Имеем

$$\|g_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Вместе с тем $\|Ag_n\| = 1$, и условие теоремы 5.2 не выполнено.

Теоремы 5.2 и 5.3 приобретают геометрическую наглядность, если ввести понятие *графика оператора*.

Рассмотрим оператор $A: D_A \rightarrow R_A$, где $D_A \subset B_1$ и $R_A \subset B_2$. Произведение $B = B_1 \times B_2$, наделенное нормой $\|(x_1, x_2)\|^2 = \|x_1\|_{B_1}^2 + \|x_2\|_{B_2}^2$, является банаховым пространством (докажите). *Графиком G_A оператора A* называется линейное многообразие в B :

$$G_A = \{(x_1, x_2) : x_2 = Ax_1, x_1 \in D_A\}.$$

Ясно, что G_A не содержит элементов вида $(0, x_2)$, где $x_2 \neq 0$. Обратно, если $G \subset B$ таково, что в нем нет элементов вида $(0, x_2)$ с $x_2 \neq 0$, то G есть график в точности одного оператора.

Теперь легко убедиться, что оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его график G_A есть замкнутое подмножество в B (теорема 5.3). Далее, условие теоремы 5.2 тогда и только тогда выполняется для оператора A , когда замыкание $\bar{G}_A$ графика этого оператора есть снова график, т. е. не содержит элементов вида $(0, x_2)$ с $x_2 \neq 0$. При этом A есть оператор с графиком $\bar{G}_A$ (т. е. $G_{\bar{A}} = \bar{G}_A$).

Хотя нашей главной целью является изучение произвольных (неограниченных) операторов, мы приведем здесь ряд необходимых для дальнейшего фактов, касающихся ограниченных операторов.

Теорема 5.4 (Теорема Банаха). Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. Если $A: B_1 \rightarrow B_2$ — ограниченный оператор, для которого $D_A = B_1$ и $R_A = B_2$, причем ядро оператора A (т. е. совокупность тех $x \in B_1$, для которых $Ax = 0$) не содержит ненулевых элементов, то естественно определенный обратный оператор $A^{-1}: B_2 \rightarrow B_1$ является также ограниченным.

Доказательство. Пусть V_N — шар в B_1 с центром в нуле и радиусом N , а $\bar{W}_N$ — образ V_N при отображении A . Покажем, что хотя бы для одного натурального N множество $\bar{W}_N$ (замыкание W_N) содержит некоторый шар из B_2 . Предположим, что это не так. Пусть y_1 — произвольная точка из B_2 и U_1 — шар некоторого радиуса r_1 с центром в точке y_1 . В шаре U_1 найдется точка y_2 из $C\bar{W}_1$, а так как $C\bar{W}_1$ — открытое множество, то и целый шар $U_2 \subset C\bar{W}_1$ с центром в y_2 и радиусом r_2 . Продолжая это рассуждение, построим последовательность вложенных шаров

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_N \supset \dots$$

с центрами в точках $y_1, y_2, \dots, y_N$ и радиусами $r_1, r_2, \dots, r_N, \dots$, причем

$$U_{N+1} \subset C\overline{W}_N.$$

Можно считать, что последовательность шаров $\{U_N\}$ выбрана так, что $\lim_{N \rightarrow \infty} r_n = 0$. Тогда последовательность $\{y_N\}$ фундаментальна, так как $\|y_N - y_{N+p}\| < r_N$ для любого $p > 0$. В силу полноты пространства B_2 существует $\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = y$. Очевидно, что $y \in \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N$.

Но $\bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} C\overline{W}_N = \emptyset$, так как $\bigcup_{N=1}^{\infty} W_N = B_2$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Итак, пусть $\overline{W}_N$ содержит шар $U = \{y \in B_2, \|y - y_0\| < r\}$; иными словами, для любого $y \in U$ и любого $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in B_1$, что $\|x\| < N$ и $\|Ax - y\| < \delta$. Если z — произвольная точка из B_2 , то точка $y = \frac{r}{2\|z\|} z + y_0$ принадлежит U . Следовательно, для любого $z \in B_2$ и любого $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in V_N$, что

$$\left\| Ax - \frac{r}{2\|z\|} z + y_0 \right\| < \delta.$$

Так как $Ax + y_0 = A(x + x_0)$, где $x_0 = A^{-1}y_0$, то отсюда следует, что для любого $y \in B_2$ и любого $\delta > 0$ найдется такое $x \in B_1$, что

$$\|x\| < \frac{2\|y\|}{r} (N + \|x_0\|) \text{ и } \|Ax - y\| < \delta.$$

Пусть $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Мы можем последовательно подбирать такие $x_1, \dots, x_n, \dots \in B_1$, чтобы

$$\begin{aligned} \|y - Ax_1\| &< \varepsilon_1, \|x_1\| < \|y\| \frac{2(N + \|x_0\|)}{r}, \\ \|y - Ax_1 - Ax_2\| &< \varepsilon_2, \|x_2\| < \varepsilon_1 \frac{2(N + \|x_0\|)}{r}, \\ &\dots \dots \dots \\ \left\| y - \sum_{i=1}^n Ax_i \right\| &< \varepsilon_n, \|x_n\| < \varepsilon_{n-1} \frac{2(N + \|x_0\|)}{r}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд $\sum_1^{\infty} x_i$. Так как $\sum_1^{\infty} \|x_i\| < \infty$, то ряд сходится к элементу $x \in B_1$. При этом $\|x\| \leq \sum_1^{\infty} \|x_i\| < [\|y\| + \varepsilon] \frac{2(N + \|x_0\|)}{r}$

и $Ax = y$. В силу произвольности ε отсюда следует, что $\|A^{-1}\| \leq \frac{2(N + \|x_0\|)}{\varepsilon}$. Теорема доказана.

Следствие (теорема о замкнутом графике). Если оператор $A: B_1 \rightarrow B_2$ с $D_A = B_1$ имеет замкнутый график (оператор замкнут), то он ограничен.

Для доказательства достаточно применить теорему 5.4 к оператору $(x, Ax) \rightarrow x$, $(x, Ax) \in G_A$, $x \in B_1$. Поскольку G_A замкнуто, этот оператор определен на банаховом пространстве G_A , очевидно, непрерывен и взаимно однозначно отображает пространство G_A на B_1 . По теореме 5.4, обратный оператор $x \rightarrow (x, Ax)$, а с ним и оператор A , непрерывен.

Множество $\text{Hom}(B_1, B_2)$ становится линейным пространством, если линейные операции в нем определить следующим образом:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x, \quad (\lambda T)(x) = \lambda Tx$$

для любых векторов $x \in B_1$ и скаляров λ . Легко видеть, что $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ и $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$. Кроме того, если $\|T\| = 0$, то T — нулевой оператор, т. е. $Tx = 0$ для всех $x \in B_1$ (этот оператор есть нулевой элемент линейного нормированного пространства $\text{Hom}(B_1, B_2)$).

Учитывая, что доказательство полноты сопряженного пространства использовало лишь полноту области значений, и применяя то же рассуждение, мы получаем следующий результат:

Теорема 5.5. Если B_2 — банахово пространство, то пространство $\text{Hom}(B_1, B_2)$ полно при любом линейном нормированном пространстве B_1 .

Говорят, что последовательность $\{T_n\}$ операторов (из B_1 в B_2) сильно сходится на множестве $D \subset B_1$, если $D \subset D_{T_n}$ для всех n и при любом $x \in D$ последовательность элементов $T_n x$ сходится в пространстве B_2 по норме.

Следующая теорема полезна в приложениях, ее доказательство весьма просто получить, применяя лемму о бочке, и мы снова ограничимся формулировкой.

Теорема 5.6 (Теорема Банаха — Штейнгауза). Пусть $A_n \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ — такая последовательность, что

- 1) $\sup \|A_n\| < \infty$,
- 2) на некотором плотном в B_1 многообразии D последовательность A_n сильно сходится. Пусть далее $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$, если $x \in D$.

Тогда $\|A\| < \infty$, оператор A допускает замыкание $\bar{A} \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ и последовательность A_n сильно сходится к A всюду на B_1 .

Задача. Можно ли в условиях теоремы 5.6 утверждать, что $\|A_n - \bar{A}\| \rightarrow 0$?
Задача. Пусть Φ — такое семейство операторов из $\text{Hom}(B_1, B_2)$, что $\sup_{A \in \Phi} \|Ax\| = s(x) < \infty$ при любом $x \in B_1$. Доказать, что $\sup_{A \in \Phi} \|A\| < \infty$.

Пусть $T \in \text{Hom}(B_1, B_2)$. Если φ — линейный функционал на B_2 , т. е. $\varphi \in B_2^*$, то формула

$$\psi(x) = \varphi(Tx), \quad x \in B_1$$

определяет функционал на B_1 . Тем самым задано отображение $T^*: B_2^* \rightarrow B_1^*$. Очевидно, что $T^* \in \text{Hom}(B_2^*, B_1^*)$. Так как $|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leq \|T\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\|$, то $\|T^*\| \leq \|T\|$. С другой стороны, по теореме Хана — Банаха, для любого $x' \in B_1$ существует такой функционал $\varphi_0 \in B_2^*$, $\|\varphi_0\| = 1$, что $\|Tx'\| = \varphi_0(Tx)$. Поэтому $\|Tx'\| = \varphi_0(Tx) = (T^*\varphi_0)(x') \leq \|T^*\| \cdot \|\varphi_0\| \cdot \|x'\|$ и $\|T\| \leq \|T^*\|$. Таким образом, $\|T^*\| = \|T\|$.

Пусть $B_1 = B_2 = B$. Напомним, что $\text{Hom}(B, B)$ мы обозначаем через $\text{Op}(B)$. Пространство $\text{Op}(B)$ обладает естественной структурой алгебры: если $T_1, T_2 \in \text{Op}(B)$, то, по определению, $(T_1 T_2)(x) = T_1(T_2 x)$, $x \in B$. Очевидно, что

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\|.$$

Последнее означает, что $\text{Op}(B)$ является банаховой алгеброй (подробнее о банаховых алгебрах см. в § 9).

Если $T \in \text{Op}(B)$, то $T^* \in \text{Op}(B^*)$. При этом $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ для любых $T_1, T_2 \in \text{Op}(B)$.

Оператор $T \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ называется *компактным* (или *вполне непрерывным*), если из любой последовательности вида Tx_n , где $\|x_n\| \leq 1$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Задача. Если $\{T_k\}$ — последовательность компактных операторов и $\|T - T_k\| \rightarrow 0$, то T — компактный оператор.

Задача. Оператор T называется *вырожденным*, если многообразие $T(B_1) \subset B_2$ конечномерно. Доказать, что каждый вырожденный оператор является компактным.

Задача. Оператор $T \in \text{Op}(H)$, где H — гильбертово пространство, тогда и только тогда является компактным, когда он есть предел последовательности вырожденных операторов.

Задача. Оператор $T \in \text{Hom}(B_1, B_2)$ тогда и только тогда компактен, когда компактен оператор $T^* \in \text{Hom}(B_2^*, B_1^*)$.

Задача. Компактные операторы образуют (замкнутый) двусторонний идеал в алгебре $\text{Op}(B)$; если T — компактный оператор, а $S \in \text{Op}(B)$, то операторы TS и ST компактны.

Введем некоторые понятия, относящиеся к алгебре $\text{Op}(B)$. Оператор $T \in \text{Op}(B)$ называется *обратимым*, если существует такой оператор $S \in \text{Op}(B)$, что $TS = ST = 1$, где 1 означает тождественный оператор. Оператор S в этом случае называется *обратным* к T и обозначается через T^{-1} .

Задача. Обратимость оператора T эквивалентна обратимости оператора T^* .

Совокупность обратимых операторов образует группу, которая обозначается через $GL(B)$.

Лемма 5.1. Если $T = 1 - A$, где $\|A\| < 1$, то $T \in GL(B)$.

Доказательство. Ряд $\sum_0^\infty A^k$ в силу условия $\|A\| < 1$ сходится. Очевидно, что оператор $S = \sum_0^\infty A^k$ служит обратным к T . Кроме того, мы получаем $\|T^{-1}\| \leq 1/(1 - \|A\|)$, так что $T^{-1} \rightarrow 1$, если $T \rightarrow 1$.

Из леммы 5.1 вытекает, что оператор, близкий к обратимому, обратим. Действительно, пусть $T \in GL(B)$ и $S = T - A$. Тогда при $\|A\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ имеем $\|T^{-1}A\| < 1$, так что $(1 - T^{-1}A) \in GL(B)$, и можно записать

$$S^{-1} = (T - A)^{-1} = T^{-1}(1 - T^{-1}A)^{-1}.$$

Спектр $\sigma(T)$ оператора $T \in \text{Op}(B)$ по определению состоит из тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $\lambda - T \notin GL(B)$. Оператор $R_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda - T)^{-1}$ для точек $\lambda \notin \sigma(T)$ называется *резольвентой оператора T* .

Из леммы 5.1 и следующего за ней замечания вытекает, что $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ — открытое множество и что функция $\lambda \rightarrow R_\lambda$ непрерывна на этом множестве. Более того, эта функция является аналитической в том смысле, что существует предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(R_{\lambda+h} - R_\lambda)}{h}$ (равный $-R_\lambda^2$). Если $|\lambda| > \|T\|$, то $\lambda \notin \sigma(T)$, так как тогда $\|T\|/|\lambda| < 1$ и

$$(\lambda - T) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda} T \right) \in GL(B).$$

Кроме того, ясно, что $\|R_\lambda\| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Из этих замечаний легко вытекает следующая важная теорема.

Теорема 5.7. Если $T \in \text{Op}(B)$, то $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\sigma(T) = \emptyset$. Тогда функция R_λ аналитична при всех λ . Для любых $x \in B$ и $\varphi \in B^*$ числовая функция $f(\lambda) = \varphi(R_\lambda x)$ оказывается целой. Далее, $|f(\lambda)| \leq \|R_\lambda\| \times \|\varphi\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Согласно теореме Лиувилля, $f(\lambda) = 0$. Сопоставляя это с теоремой Хана — Банаха, мы приходим к противоречию.

Задача. $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.

Если λ есть собственное значение оператора T , т. е. $Tx = \lambda x$ для некоторого $x \neq 0$, то, разумеется, $\lambda \in \sigma(T)$. Далее, если существует такая последовательность $x_n \in B$, что $\|x_n\| = 1$ и $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$, то также $\lambda \in \sigma(T)$. В последнем случае говорят, что λ — *почти собственное значение оператора T* .

Задача. Используя теорему Хана — Банаха и теорему Банаха о замкнутом графике, доказать, что включение $\lambda \in \sigma(T)$ влечет за собой выполнение (по крайней мере) одной из следующих возможностей: λ — собственное

значение оператора T ; λ — почти собственное значение оператора T ; λ — собственное значение оператора T^* .

Сделаем несколько замечаний по поводу ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H .

По теореме Рисса, существует отображение $R: H \rightarrow H^*$, отождествляющее пространство H^* и H . Именно, если $a \in H$, то R сопоставляет этому элементу функционал $\varphi \in H^*$, для которого $\varphi(x) = (x, a)$. Это отображение аддитивно и *полулинейно*, т. е. $R(\lambda a) = \bar{\lambda}(Ra)$.

Каждому оператору $T \in \text{Op}(H)$ сопоставляется оператор $R^{-1}T^*R$, действующий в исходном пространстве H . Этот оператор $R^{-1}T^*R$ по традиции также называется *сопряженным к T* и обозначается тем же способом — через T^* .

Обычно эти обозначения не приводят к путанице, и мы будем их придерживаться. Конечно, при их употреблении следует соблюдать известную осторожность. Главное, впрочем, заключается в том, чтобы не забывать, что вместо формулы $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ теперь имеет место $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Ясно, что для сопряженного оператора теперь выполняется соотношение

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad x, y \in H,$$

которое [часто принимается за определение оператора T^* (ниже этот способ введения сопряженного оператора используется в более общей обстановке).

Опишем один важный класс компактных операторов гильбертова пространства.

Пусть H — некоторое сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_i\}$ — полная ортонормированная система в нем и T — ограниченный оператор в H . Положим

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/4}.$$

Если ряд расходится, то полагаем $\|T\|_2 = \infty$. Норма $\|T\|_2$ называется *нормой Гильберта — Шмидта* оператора T .

Теорема 5.8. 1) $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$;

2) *норма Гильберта — Шмидта не зависит от выбора полной системы $\{e_i\}$* ;

3) $\|T\| \leq \|T\|_2$;

4) *если $\|T\|_2 < \infty$ и R — ограниченный оператор в H , то*

$$\|TR\|_2 \leq \|T\|_2 \|R\|, \quad \|RT\|_2 \leq \|R\| \cdot \|T\|_2;$$

5) *если $\|T\|_2 < \infty$, $\|S\|_2 < \infty$, то $\|T+S\|_2 \leq \|T\|_2 + \|S\|_2$.*

Доказательство. 1), 2) Пусть $\{e_i\}$ — еще одна полная ортонормированная система в H . Имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_i \sum_k |(Te_i, e'_k)|^2 = \sum_k \sum_i |(e_i, T^*e'_k)|^2 = \sum_i \|T^*e'_i\|^2, \quad (5.2)$$

где изменение порядка суммирования законно, поскольку все члены ряда неотрицательны. В частности, если $e'_i = e_i$, то из (5.2) следует 1), а общий случай теперь дает нам 2).

3) Учитывая 2), получим

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \sup_{\|u\|=1} \|T_u\|^2 = \sup_{\|u\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} |(Tu, e_i)|^2 \leq \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} \|u\|^2 \|T^*e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T^*e_i\|^2 = \|T^*\|_2^2 = \|T\|_2^2.\end{aligned}$$

4), 5) Эти утверждения очевидны. Теорема доказана.

Обозначим через $B_2(H)$ совокупность операторов, норма Гильберта — Шмидта которых конечна. Из теоремы следует, что $B_2(H)$ образует двусторонний (не замкнутый) идеал в банаховой алгебре $\text{Op}(H)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.9. 1) *Пространство $B_2(H)$ становится гильбертовым, если скалярное произведение задается формулой*

$$(T, S)_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, Se_i), \quad (5.3)$$

причем $(T, S)_2 = (S^*, T^*)_2$.

2) *Все операторы из $B_2(H)$ вполне непрерывны.*

Доказательство. 1) Ряд (5.3) абсолютно сходится в силу неравенства Коши — Буняковского. Очевидно, $(T, S)_2$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Поэтому для него справедливо тождество

$$\begin{aligned}(T, S)_2 &= \frac{1}{4} \{(\|T+S\|_2)^2 - (\|T-S\|_2)^2 + \\ &+ i(\|T+iS\|_2)^2 - i(\|T-iS\|_2)^2\}.\end{aligned} \quad (5.4)$$

Эта формула показывает, что определение скалярного произведения не зависит от выбора системы $\{e_i\}$.

Теперь докажем, что $B_2(H)$ — полное пространство. Пусть $\|T_n - T_m\|_2 \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. По теореме 5.8 последовательность $\{T_n\}$ сходится в $\text{Op}(H)$, т. е. существует оператор $T \in \text{Op}(H)$ такой, что $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого N имеем

$$\sum_{i=1}^N \|(T_n - T_m)e_i\|^2 \leq \|T_n - T_m\|_2^2 < \varepsilon^2,$$

если $n, m > n_0(\varepsilon)$. Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{i=1}^N \|(T_n - T)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $(T_n - T) \in B_2(H)$ и $\|T_n - T\|_2 \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$, т. е. последовательность $\{T_n\}$ сходится к $T \in B_2(H)$ по норме Гильберта — Шмидта; формула $(T, S)_2 = (S^*, T^*)_2$ следует из (5.4).

2) Определим конечномерный (вырожденный) оператор T_n равенствами: $T_n e_i = T e_i$ при $i \leq n$, $T_n e_i = 0$ при $i > n$. Пусть $\varepsilon > 0$.

Тогда существует такое $N(\varepsilon)$, что $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|T e_i\|^2 < \varepsilon^2$ при $n \geq N(\varepsilon)$.

Поэтому

$$\|T_n - T\| \leq \|T_n - T\|_2 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|T e_i\|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность операторов $\{T_n\}$ сходится к T по норме пространства $\text{Op}(H)$, и поэтому оператор T вполне непрерывен. Теорема доказана.

§ 6. Сопряженные операторы

Введем сначала алгебраические операции над произвольными (не обязательно ограниченными) операторами. Мы будем пользоваться обозначением $A: B_1 \rightarrow B_2$ для оператора, действующего из пространства B_1 в пространство B_2 (вместо более громоздкого обозначения $A: D_A \rightarrow B_2$, $D_A \subset B_1$).

Определения. Суммой операторов $A_1: B_1 \rightarrow B_2$ и $A_2: B_1 \rightarrow B_2$ называется линейный оператор $A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 + A_2$ с областью определения $D_A = D_{A_1} \cap D_{A_2}$, действующий по формуле

$$Ax = A_1x + A_2x.$$

Произведением, или композицией операторов $A_1: B_1 \rightarrow B_2$ и $A_2: B_2 \rightarrow B_3$ называется оператор $A: B_1 \rightarrow B_3$, определенный во всех векторах $x \in D_{A_1}$, для которых $Ax \in D_{A_2}$, и действующий по формуле

$$Ax = A_2(A_1x).$$

Произведение операторов A_1 и A_2 записывается в виде $A_2 A_1$. Произведение оператора A на себя n раз называется степенью оператора и обозначается A^n .

Произведением λA оператора $A: B_1 \rightarrow B_2$ на (комплексное) число λ называется оператор $A': B_1 \rightarrow B_2$, определенный на D_A и переводящий вектор x в $\lambda \cdot Ax$.

Единичным, или тождественным оператором $1: B \rightarrow B$ называется оператор, переводящий каждый вектор $x \in B$ в себя.

Нулевым оператором $0: B_1 \rightarrow B_2$ называется оператор, переводящий каждый вектор $x \in B_1$ в нулевой вектор пространства B_2 .

Если λ — комплексное число, 1 — единичный оператор, то мы будем обозначать оператор $\lambda 1$ через λ .

Обратным оператором $A^{-1}: B_2 \rightarrow B_1$ к оператору $A: B_1 \rightarrow B_2$ будем называть отображение R_A на D_A , обратное к отображению

$A: D_A \rightarrow R_A$, если это обратное отображение существует. Оператор A , для которого существует обратный, будем называть обратимым.

Совокупность тех $x \in B_1$, для которых $Ax = 0$, называется ядром оператора A и обозначается $\text{Ker}(A)$. Ясно, что существование оператора A^{-1} (обратимость в смысле приведенного определения) эквивалентна тривиальности ядра, т. е. тому, что $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

Обозначим через $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ множество всех линейных операторов, действующих из B_1 в B_2 . Операция сложения в $\mathcal{O}(B_1, B_2)$, очевидно, коммутативна, ассоциативна и обладает нейтральным элементом. Однако $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ не является абелевой группой относительно сложения; это связано с тем, что общая область определения двух операторов не шире областей определения слагаемых, в то время как нейтральный элемент — нулевой оператор 0 — определен на всем пространстве B_1 . Тем не менее в $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ вводят вычитание:

$$A_1 - A_2 \stackrel{\text{def}}{=} A_1 + (-1) A_2.$$

При этом оператор $0_{D_A} = A - A$ есть сужение нулевого оператора на D_A .

По отношению к умножению на числа в $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ имеют место ассоциативность

$$(\lambda\mu) A = \lambda(\mu A)$$

и оба свойства дистрибутивности:

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2.$$

Умножение операторов в $\mathcal{O}(B, B)$ ассоциативно и обладает нейтральным элементом 1 ; однако обратный элемент A^{-1} имеется не для каждого оператора $A \in \mathcal{O}(B, B)$. Наконец, заметим, что дистрибутивность умножения по отношению к сложению имеет место в $\mathcal{O}(B, B)$ только в том случае, когда оператор умножается на сумму двух других справа:

$$(A_1 + A_2) A = A_1 A + A_2 A.$$

Формула $A(A_1 + A_2) = AA_1 + AA_2$, вообще говоря, неверна; читателю предлагается построить соответствующий пример.

Приведем некоторые результаты, касающиеся сохранения свойства замкнутости при алгебраических операциях над операторами.

Теорема 6.1. Пусть $A: B_1 \rightarrow B_2$ — замкнутый оператор, $A': B_1 \rightarrow B_2$ — гомоморфизм, λ — комплексное число. Тогда операторы $A + A'$ и λA замкнуты.

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема 6.2. Пусть $A: B_1 \rightarrow B_2$ — обратимый (как оператор) гомоморфизм. Тогда оператор A^{-1} замкнут.

Доказательство. Пусть $y_n \in B_2$, $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$ и $A^{-1}y_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Применяя к последнему соотношению гомоморфизм A , получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} AA^{-1}y_n = Ax$. Отсюда имеем $y = Ax$, $x = A^{-1}y$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.3. Пусть $A_1: B_1 \rightarrow B_2$ — гомоморфизм, $A_2: B_2 \rightarrow B_3$ — замкнутый оператор. Тогда оператор A_2A_1 замкнут.

Доказательство. Пусть $x_n \in B_1$ и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; кроме того, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} A_2A_1x_n = z$. Тогда, в силу того, что A_1 — гомоморфизм, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} A_1x_n = A_1x$. Используя теперь замкнутость оператора A_2 , получаем соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} A_2A_1x_n = A_2A_1x$, и теорема доказана.

Теорема 6.4. Пусть $A: B \rightarrow B$ — замкнутый оператор и пусть существует такое комплексное число λ , что $(A + \lambda)^{-1}$ есть гомоморфизм. Тогда для любого формального полинома $P_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ оператор $P_k(A)$ замкнут.

Доказательство. Прежде всего заметим, что всякий полином $P(z)$ можно представить в виде некоторого полинома $Q(z + \lambda)$ переменной $z + \lambda$. Так как оператор $A + \lambda$ замкнут, то можно без ограничения общности считать, что $\lambda = 0$, т. е. что A^{-1} есть гомоморфизм.

Теперь проведем доказательство по индукции; предположим, что для любых комплексных чисел $c_0, \dots, c_k$ оператор $\sum_{j=0}^k c_j A^j$ замкнут и докажем замкнутость оператора $\sum_{j=0}^{k+1} c_j A^j$ для любых комплексных $c_0, \dots, c_{k+1}$. Пусть $x_n \rightarrow x$, $\sum_{j=0}^{k+1} c_j A^j x_n \rightarrow y$. Применим к обеим частям последнего соотношения гомоморфизм A^{-1} . Получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=0}^k c_{j+1} A^j x_n + c_0 A^{-1} x_n \right\} = A^{-1} y.$$

Так как $x_n \rightarrow x$ и так как оператор $\sum_{j=0}^k c_{j+1} A^j$ замкнут, то полученное равенство можно переписать в виде:

$$\sum_{j=0}^k c_{j+1} A^j x = A^{-1} (y - c_0 x).$$

Применяя теперь к обеим частям оператор A , получаем

$$\sum_{j=0}^{k+1} c_j A^j x = y,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть $A: B \rightarrow B$ — оператор, допускающий замыкание $\bar{A}$, удовлетворяющее условиям теоремы 6.4, P — полином. Тогда оператор $P(\bar{A})$ является замкнутым расширением оператора $P(A)$.

Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства, B_1^* и B_2^* — сопряженные к ним пространства. Пусть далее $T: D_T \rightarrow B_2$, $D_T \subset B_1$ — линейный оператор и пусть $\bar{D}_T = B_1$. Обозначим через L множество всех функционалов g пространства B_2^* , для которых

$$\sup_{x \in D_T} \frac{|g(Tx)|}{\|x\|} < \infty,$$

т. е. таких, для которых существует элемент $f \in B_1^*$, обладающий свойством:

$$g(Tx) = f(x) \text{ при всех } x \in D_T.$$

Функционал f определяется этой формулой однозначно, так как D_T плотно в B_1 .

Определение. Оператор $T^*: L \rightarrow B_1^*$, $L \subset B_2^*$, заданный соотношением

$$(T^*g = f) \Rightarrow (g(Tx) = f(x)) \text{ для любого } x \in D_T,$$

называется сопряженным к оператору T .

Теорема 6.5. Пусть D_T — область определения оператора $T: D_T \rightarrow B_2$, $D_T \subset B_1$, плотная в B_1 , и R_T — область значений. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

а) $R_T = B_2$; б) $(T^*g = 0) \Rightarrow (g = 0)$.

Доказательство. Пусть $R_T = B_2$ и $T^*g = 0$. Если $y \in R_T$, то найдется такое x , что $y = Tx$, так что

$$g(y) = g(Tx) = T^*g(x) = 0.$$

А поскольку R_T плотно в B_2 , то отсюда следует, что $g = 0$.

Обратно, пусть уравнение $T^*g = 0$ имеет только нулевое решение. Предположим, что R_T не плотно в B_2 ; и пусть $y \in B_2$, $y \notin R_T$. Рассмотрим линейное многообразие $G \subset B_2$, состоящее из элементов u , представимых в виде $u = \alpha y + z$, где $z \in R_T$. Определим на G функционал $\tilde{g}$ при помощи формулы

$$\tilde{g}(\alpha y + z) = \alpha, \quad z \in R_T.$$

Функционал $\tilde{g}$ ограничен; действительно, предположив противное, мы получили бы, что существует такая числовая последовательность $\{\alpha_j\}$ и такая последовательность $\{z_j\}$ элементов из R_T ,

что $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = \infty$ и $\|\alpha_j y + z_j\| \leq 1$ для любого натурального j . Следовательно,

$$\left\| y + \frac{z_j}{\alpha_j} \right\| \leq \frac{1}{|\alpha_j|},$$

так что

$$y = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha_j} z_j \right),$$

что противоречит замкнутости множества $\bar{R}_T$. По теореме Хана — Банаха существует такой функционал $g \in B_1^*$, что $g(u) = \tilde{g}(u)$ для любого $u \in G$. Так как $g(Tx) = 0$ для любого $x \in D_T$, то $T^*g = 0$. Отсюда по условию следует, что $g = 0$; но это противоречит равенству $g(y) = 1$, и теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $B_1 = B_2 = H$, где H — гильбертово пространство; при этом каждый непрерывный линейный функционал f на H имеет вид $f(x) = (x, y_f)$, так что H^* можно отождествить с H . Пусть $T: D_T \rightarrow H$, $D_T \subset H$ — линейный оператор с плотной в H областью определения.

Определение. Оператор T называется симметричным, если

$$(T\varphi, f) = (\varphi, Tf)$$

для любых $\varphi \in D_T$, $f \in D_T$.

Очевидно, что если T — симметричный оператор, то оператор T^* является расширением оператора T :

$$T \subset T^*.$$

Теорема 6.6. Оператор T^* замкнут. В частности, симметричный оператор допускает замыкание.

Доказательство. Пусть

$$g_n \rightarrow g, \tag{6.1}$$

$$T^*g_n \rightarrow h \tag{6.2}$$

при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $h = T^*g$. Для любого $\varphi \in D_T$ имеем

$$(T\varphi, g_n) = (\varphi, T^*g_n). \tag{6.3}$$

Переходя в (6.3) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$(T\varphi, g) = (\varphi, h). \tag{6.4}$$

По определению оператора T^* , равенство (6.4) означает, что $h = T^*g$, и теорема доказана.

Для симметричных операторов из теоремы 6.6. вытекает соотношение $T \subset T^*$.

Определения. Оператор T называется самосопряженным, если

$$T = T^*.$$

Оператор T называется существенно самосопряженным, если

$$T = T^*.$$

Последнее определение выделяет важный в приложениях класс симметричных операторов, которые становятся самосопряженными после замыкания.

Задача. Доказать, что для оператора T , допускающего замыкание, $T = T^{**}$.

Пример. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$ и пусть оператор T с областью определения $D_T = C_0^\infty(\mathbb{R})$ действует по формуле $T\varphi(x) = i\varphi'(x)$. Оператор T — симметричный, так как для любых $\varphi, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (T\varphi, f) &= \int_{\mathbb{R}} \left(i \frac{d\varphi(x)}{dx} \right) f(x) dx = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\varphi}(x)}{dx} f(x) dx = \\ &= i \int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(x) \frac{df(x)}{dx} dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(x) \left(i \frac{df(x)}{dx} \right) dx = (\varphi, Tf). \end{aligned}$$

Ясно, что T^* есть расширение оператора T . Докажем, что T не замкнут. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящуюся к $f = \frac{1}{(x^2+1)}$ в $L_2(\mathbb{R})$:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+1} \alpha_n(x);$$

здесь $0 \leq \alpha_n(x) \leq 1$, $\alpha_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\alpha_n(x) = 1$ при $|x| < n$, причем $|\alpha_n'(x)|$ не превосходит константы c , не зависящей от n . Имеем

$$\begin{aligned} \|Tf_n - T^*f\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| (\alpha_n(x) - 1) \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} \alpha_n'(x) \right|^2 dx \leq \\ &\leq 8 \int_{|x| > n} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx + 2c^2 \int_{|x| > n} \frac{dx}{(x^2+1)^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, $f_n \rightarrow f$, $Tf_n \rightarrow T^*f$, однако $f \notin D_T$. Следовательно, T не замкнут.

Задача. Показать, что оператор T из примера является существенно самосопряженным.

Теорема 6.7. Если $A: D_A \rightarrow H$, $D_A \subset H$ — самосопряженный оператор, имеющий ограниченный обратный, то $\bar{D}_A = H$ при любом натуральном n .

Доказательство. Согласно теореме 6.5, $R_A = H$. Если же $\|A^{-1}\| < \infty$, то $R_A = H$. Действительно, расширим A^{-1} до гомоморфизма $F: H \rightarrow H$. Тогда уравнение $Ax = y$ имеет для любого $y \in H$ решение $x = Fy$. В самом деле, пусть $\{y_i\}$ — последовательность элементов из R_A , сходящаяся к y . Тогда $AFy_i = AA^{-1}y_i = y_i$.

Из ограниченности оператора F следует, что $Fy_i \rightarrow Fy$, а из замкнутости оператора A следует, что $AFy = y$.

Итак, $D_{A^{-1}} = H$, откуда следует, что для любого натурального n оператор A^{-n} является гомоморфизмом $H \rightarrow H$. Из симметричности оператора A легко следует симметричность оператора A^{-n} , так что оператор A^{-n} является самосопряженным. Применяя теорему 6.5, получаем $\bar{D}_{A^n} = \bar{R}_{A^{-n}} = H$, что и требовалось доказать.

§ 7. Функции со значениями в банаховом пространстве

Определения. Отображение

$$(t_1, \dots, t_n) \rightarrow \varphi(t_1, \dots, t_n) \in B, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

будем называть функцией φ со значениями в банаховом пространстве B , определенной на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть φ — функция со значениями в B , определенная на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть t_0 — предельная точка множества Ω . Если $\|\varphi(t) - g\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, то будем называть g пределом и писать $g = \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t)$ (и пользоваться обычной терминологией, относящейся к пределам).

Функция φ со значениями в нормированном пространстве B называется непрерывной в точке $t_0 \in \Omega$, если $\varphi(t) \rightarrow \varphi(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$.

Пример. Пусть $(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ — такая комплексная функция (т. е. функция со значениями в $\mathbb{C}$), что при каждом фиксированном t функция $\psi: x \rightarrow \psi(x, t)$ непрерывна и интегрируема с квадратом на $\mathbb{R}^n$. Тогда функцию ψ можно рассматривать как функцию со значениями в $L_2(\mathbb{R}^n)$, определенную на $\mathbb{R}$.

Частной производной $d\varphi(t)/dt_j$ функции φ со значениями в B , определенной в окрестности точки $t \in \mathbb{R}^n$, называется предел, если таковой существует,

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + \Delta t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) - \varphi(t)}{\Delta t_j}.$$

Теперь мы дадим в удобной для нас форме определение интеграла от функций со значениями в банаховом пространстве B . Начнем с функций, заданных на компактном квадратируемом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что множество Ω называется *квадрируемым*, если по этому множеству можно брать интеграл в смысле Римана от обычных числовых функций. В частности, Ω квадратируемо, если Ω — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей (и в дальнейшем можно иметь в виду только такие множества Ω).

Исходным понятием мы считаем понятие интеграла Римана от числовых функций. Если теперь $u: \Omega \rightarrow B$ — функция на Ω со значениями в B , а ψ — непрерывный линейный функционал на B , то при любом разумном определении интеграла $\int_{\Omega} u(t) dt$ должно выполняться соотношение

$$\psi \left(\int_{\Omega} u dt \right) = \int_{\Omega} \psi(u) dt.$$

Последнюю формулу можно использовать для определения интеграла от функции $u(t)$.

Определение. Интегралом (Римана) $\int_{\Omega} u(t) dt$ от функции $u: \Omega \rightarrow B$ называется такой элемент $b \in B$, что $\psi(b) = \int_{\Omega} \psi(u(t)) dt$ для всех $\psi \in B^*$.

Из теоремы Хана — Банаха следует, что элемент b , если он существует, определяется однозначно, и весь вопрос состоит в выяснении существования. Как и в случае числовых функций, интеграл, разумеется, существует не всегда. Однако, как нетрудно видеть, он заведомо существует, если функция $u(t)$ непрерывна. На классе непрерывных функций $u(t)$ интеграл обладает обычными свойствами. В частности, $\left\| \int_{\Omega} u(t) dt \right\| \leq \int_{\Omega} \|u(t)\| dt$. Далее, элемент $b = \int_{\Omega} u(t) dt$ можно получить как предел римановых интегральных сумм: если $\varepsilon > 0$, а $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ — достаточно мелкое разбиение множества Ω на квадратируемые подмножества, то сумма $\sum_{i=1}^n u(t_i) v(\Omega_i)$, где $t_i \in \Omega_i$, $v(\Omega_i)$ — объем Ω_i , отличается по норме от b не более чем на ε .

Сформулируем одну теорему о переходе к пределу под знаком интеграла. **Теорема 7.1.** Пусть $\{T_n\}$ последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций со значениями в банаховом пространстве B , причем $T_n(t) \rightarrow T(t)$ при $n \rightarrow \infty$ по норме пространства B для любого фиксированного $t \in [a, b]$, и T — непрерывная на $[a, b]$ функция. Тогда, если $\|T_n(t)\| \leq c$, где c — некоторая константа, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b T_n(t) dt = \int_a^b T(t) dt.$$

Класс интегрируемых функций можно существенно расширить (по сравнению с классом непрерывных функций), используя идею пополнения пространства. Именно, положим $\|u\| = \int_{\Omega} \|u(t)\| dt$. Тем самым определена норма на

пространстве $\tilde{L}(B, \Omega)$ непрерывных функций на Ω со значениями в B .

Пополнение $L(B, \Omega)$ пространства $\tilde{L}(B, \Omega)$ называется пространством функций, интегрируемых по Бохнеру на Ω . В случае $B = \mathbb{R}$ мы получаем, в частности, класс функций, интегрируемых в смысле Лебега на Ω .

Распространение понятия интеграла на класс некомпактных множеств Ω может происходить по следующей схеме. Мы предполагаем, что пересечение Ω с каждым шаром есть квадратируемое множество. Пусть вначале $u: \Omega \rightarrow B$ — непрерывная функция. Функция u называется интегрируемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое c , что $\left\| \int_{\Omega_1} u(t) dt \right\| < \varepsilon$ для всякого квадратируемого подмножества $\Omega_1 \subset \Omega$, лежащего вне шара радиуса c . Если это условие выполнено, то $\int_{\Omega} u(t) dt$ определяется как предел интегралов $\int_{\Omega \cap \{t: \|t\| \leq c\}} u(t) dt$ при $c \rightarrow \infty$. В частности, все условия выполняются, если конечен несобственный интеграл Римана $\int_{\Omega} \|u(t)\| dt$.

Определение. Пусть Ω — квадратируемое множество в $\mathbb{R}^n$. И пусть $\tilde{L}(B, \Omega)$ — пространство непрерывных функций на Ω со значениями в B , обладающих конечной нормой $\|u\| = \int_{\Omega} \|u(t)\| dt$. Пополнение $L(B, \Omega)$ этого пространства называется пространством функций, интегрируемых по Бохнеру на Ω . При этом если

$$v \in L(B, \Omega) \text{ и } u_k \rightarrow v, \text{ где } u_k \in \tilde{L}(B, \Omega),$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k(t) dt$ существует и обозначается через $\int_{\Omega} v dt$. Элемент $\int_{\Omega} v dt \in B$ не зависит от выбора последовательности u_k .

Интеграл Бохнера обладает обычными свойствами абсолютно сходящихся несобственных интегралов.

В заключение рассмотрим в качестве примера функции со значениями в банаховом пространстве решение так называемого эволюционного уравнения. Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H и пусть u — функция со значениями в H . Эволюционным уравнением называется уравнение вида

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.1)$$

Мы будем рассматривать только непрерывно дифференцируемые решения этого уравнения. Зададим начальное условие:

$$u(0) = u_0 \in D_A. \quad (7.2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.2. Пусть для любого h из плотного в H множества M и любого отрезка $[a, b] \subset [0, T]$ существует такая непрерывная на $[0, T]$ функция v со значениями в H , что

$$\frac{dv}{dt} - A^*v(t) = \begin{cases} h & \text{при } t \in (a, b), \\ 0 & \text{при } t \notin (a, b), \end{cases} \quad v(T) = 0, \quad (7.3)$$

где A^* — сопряженный к A оператор.

Тогда решение задачи Коши (7.1), (7.2) единственно.

Доказательство. Если функции u_1 и u_2 удовлетворяют одной и той же задаче Коши (7.1), (7.2), то разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (7.1) и нулевому начальному условию $u(0) = 0$. Поэтому достаточно показать, что задача

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

имеет лишь нулевое решение. Пусть u — какое-либо решение задачи (7.4). Обозначим через $v_{h,a,b}$ решение задачи (7.3). Тогда

$$\int_a^b (u(t), h) dt = \int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt} - A^*v_{h,a,b}(t) \right) dt,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Интегрируя по частям

$$\int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt} \right) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt} \right) dt &= (u(T), v_{h,a,b}(T)) - (u(0), v_{h,a,b}(0)) - \\ &- \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v_{h,a,b}(t) \right) dt = - \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v_{h,a,b}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь определенным сопряженным оператором, можем записать:

$$\int_0^T (u(t), A^* v_{h, a, b}(t)) dt = \int_0^T (Au(t), v_{h, a, b}(t)) dt.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (u(t), h) dt = - \int_0^T \left(\frac{du}{dt} + Au(t), v_{h, a, b}(t) \right) dt = 0.$$

Пусть t_0 — произвольная точка из $[0, T]$ и ε — положительное число. Тогда найдутся такие $\delta > 0$ и $h \in M$, что $\|u(t_0) - h\| < \varepsilon$ и $\|u(t) - u(t_0)\| < \varepsilon$ при $|t - t_0| < \delta$. Имеем при $|t - t_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} (u(t), h) &= (u(t) - u(t_0) + u(t_0), h - u(t_0) + u(t_0)) = \\ &= (u(t) - u(t_0), h) + (u(t_0), h - u(t_0)) + \|u(t_0)\|^2; \\ \| \|u(t_0)\|^2 - (u(t), h) \| &\leq \| (u(t) - u(t_0), h) \| + \| (u(t_0), h - u(t_0)) \| \leq \\ &\leq \varepsilon \|h\| + \varepsilon \|u(t_0)\| \leq 2\varepsilon \|u(t_0)\| + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\|u(t_0)\|^2 \varepsilon &= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|u(t_0)\|^2 dt \leq \left| \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} (u(t), h) dt \right| + 2\varepsilon (2\varepsilon \|u(t_0)\| + \varepsilon^2) = \\ &= 4\varepsilon^3 \|u(t_0)\| + 2\varepsilon^3, \quad \|u(t_0)\|^2 \leq 2\varepsilon \|u(t_0)\| + \varepsilon^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому $\|u(t_0)\| = 0$, что и требовалось доказать.

§ 8. Анализ в банаховом пространстве

1. Гладкие отображения банаховых пространств. Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а $F: U \rightarrow B_2$ — некоторое отображение открытой области $U \subset B_1$. Как и в классическом конечномерном анализе, дифференциалом отображения F в точке $x_0 \in U$ будем называть линейную часть приращения $F(x) - F(x_0)$. Точнее, отображение F будем называть дифференцируемым в точке $x_0 \in U$, если существует линейное непрерывное отображение $A: B_1 \rightarrow B_2$ (производная Фреше отображения F) такое, что $F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + o(h)$, если $x_0 + h \in U$. Из определения непосредственно следует, что если A определено, то оно единственно. Обычно A обозначается $F'(x_0)$.

Отображение F дифференцируемо на открытом множестве $U \subset B_1$, если F дифференцируемо в каждой точке $x \in U$. Отображение $F: U \rightarrow B_2$ принадлежит классу C^1 , если F дифференцируемо на U и $F': U \rightarrow \text{Hom}(B_1, B_2)$ непрерывно.

Примеры. а) $B_1 = \mathbb{R}^n$, $B_2 = \mathbb{R}^m$, F — дифференцируемое отображение. б) $B_1 = \mathbb{C}^n$, $B_2 = \mathbb{C}^m$, F — аналитическое отображение. в) $B_1 = \mathbb{R}$, B_2 — любое банахово пространство, F — дифференцируемая функция со значениями в B_2 . г) Если F — постоянное отображение, $F: B_1 \rightarrow y_0 \in B_2$, то $F'(x) = 0$, $\forall x \in B_1$. д) Если $F: B_1 \rightarrow B_2$ — линейное непрерывное отображение, то $F' = F$. е) Если $F: B_1 \times B_2 \rightarrow B_3$ — билинейное непрерывное отображение, то производная отображения F в точке (x_0^1, x_0^2) вычисляется по формуле: $F'(x_0^1, x_0^2)(h_1, h_2) = = F(h_1, x_0^2) + F(x_0^1, h_2)$.

Старшие производные $F^{(k)}$, $k \geq 2$ отображения $F: U \rightarrow B_2$ определяются по индукции. Например, $F^{(2)}(x_0)$ определяется как производная отображения: $F': U \rightarrow \text{Hom}(B_1, B_2)$, здесь $F': x \rightarrow F'(x)$, $x \in U$.

З а м е ч а н и е. Можно дать эквивалентное определение второй производной как билинейного непрерывного отображения $F^{(2)}(x_0): B_1 \times B_1 \rightarrow B_2$, для

которого при малых h справедливо равенство

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2} F^{(2)}(x_0)(h, h) + o(|h|^2).$$

Для определенных выше производных сохраняются все обычные правила дифференциального исчисления. Так например, правило дифференцирования сложной функции будет формулироваться следующим образом:

Теорема 8.1. Пусть заданы отображения $F_1: U_1 \rightarrow B_2$, $U_1 \subset B_1$, $F_2: U_2 \rightarrow B_3$, $U_2 \subset B_2$, $F(x_0) = y_0$, $x_0 \in U_1$, $y_0 \in U_2$. Тогда, если отображение F_1 дифференцируемо в точке x_0 , а F_2 дифференцируемо в точке y_0 , то отображение $F = F_2 \circ F_1$ дифференцируемо в точке x_0 , и справедливо равенство:

$$F'(x_0) = F_2'(y_0) \cdot F_1'(x_0).$$

Доказательство. По предположению, отображения F_1 , F_2 дифференцируемы в точках x_0 , y_0 соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} F_1(x_0+h) - F_1(x_0) &= F_1'(x_0)h + o(h), \\ F_2(y_0+\tau) - F_2(y_0) &= F_2'(y_0)\tau + o(\tau). \end{aligned}$$

Далее,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F_2(F_1(x_0+h)) - F_2(F_1(x_0)) = F_2'(y_0)\tau + o(\tau),$$

где $\tau = F_1(x_0+h) - F_1(x_0)$. Таким образом,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F_2'(y_0)(F_1'(x_0)h + o(h)) + o(\tau) = F_2'(y_0) \cdot F_1'(x_0)h + o(h).$$

Теорема 8.2. (теорема о среднем значении). Пусть $F: U \rightarrow B_2$, $U \subset B_1$ — отображение, принадлежащее классу C^1 . Тогда, если $x_1, x_2 \in U$ таковы, что отрезок $x_1 + t(x_2 - x_1)$, $0 \leq t \leq 1$ лежит в U , то

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \sup \|F'(z)\|,$$

где верхняя грань берется по всем точкам z , принадлежащим указанному отрезку.

Доказательство. Поскольку

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 F'(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt,$$

то

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \int_0^1 \|F'(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\| dt \leq \|x_2 - x_1\| \sup \|F'(z)\|.$$

2. Сжатые отображения. Пусть $F: B \rightarrow B$ — отображение банахова пространства B в себя.

Определение. Отображение F называется сжатым, если существует такая постоянная λ , $0 < \lambda < 1$, что

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

для любых векторов $x, y \in B$.

Из определения нетрудно вывести, что отображение F является непрерывным. Если же, кроме того, F принадлежит классу C^1 , то для того, чтобы F было сжатым, достаточно, чтобы $\sup_{x \in B} \|F'(x)\| \leq \lambda < 1$.

Точка $x \in B$ называется неподвижной точкой отображения F , если $F(x) = x$.

Теорема 8.3 (теорема о неподвижной точке). Пусть $F: B \rightarrow B$ — сжатое отображение банахова пространства B в себя. Тогда F имеет единственную неподвижную точку, причем для любой точки $x \in B$ эта неподвижная

точка является пределом последовательности

$$x_n = F^n(x), \quad F^n = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_n.$$

Доказательство. Пусть $x_n = F^n(x)$ для некоторой точки $x \in B$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, поскольку $\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ и $x_{n+1} = F(x_n)$, то $\|x_{n+1} - x_n\| = \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\|$, откуда $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|$. Далее,

$$\|x_{n+k} - x_n\| = \left\| \sum_{i=n}^{n+k-1} (x_{i+1} - x_i) \right\| \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\lambda^{n+k}}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|.$$

Пусть $y = \lim x_n$. Тогда, поскольку F переводит последовательность $\{x_n\}$ в себя и является непрерывным, то $F(y) = y$.

Покажем, что F имеет единственную неподвижную точку. Пусть $y_1 \neq y_2$ — неподвижные точки отображения F . Тогда $\|y_1 - y_2\| = \|F(y_1) - F(y_2)\| \leq \lambda \|y_1 - y_2\|$, что противоречит условию, что $y_1 \neq y_2$.

Следствие. Пусть отображение $F: B \rightarrow B$ таково, что F^n для некоторого натурального $n \geq 0$ является сжатием. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения F .

Доказательство. Обозначим $G = F^n$. Тогда из теоремы следует, что существует единственная неподвижная точка $y \in B$ отображения G . С другой стороны, поскольку $Fy = FGu = Gu = y$, Fy — также неподвижная точка отображения G . Поэтому $Fy = y$.

Далее, так как неподвижные точки F являются также неподвижными точками G , то точка y единственна.

В заключение укажем несколько примеров применения теоремы о неподвижной точке. Наиболее важный из нас пример применения этой теоремы к обыкновенным дифференциальным уравнениям будет рассмотрен в следующем пункте.

Примеры. а) Если $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение, матрица Якоби которого $J_x(F)$ удовлетворяет условию $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|J_x(F)\| \leq \lambda < 1$, то

существует неподвижная точка отображения F .

б) Пусть $f_i(x_1 \dots x_n)$ — дифференцируемые функции; тогда если

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) \right\| = \lambda < 1,$$

то система уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1 \dots x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) &= 0 \end{aligned}$$

имеет решение (и притом единственное).

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. В этом пункте теорема о неподвижной точке для сжатых отображений будет применена к доказательству существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Пусть $F: B \times \mathbb{R} \rightarrow B$ — непрерывное отображение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dx/dt = F(x, t). \quad (8.1)$$

Будем искать решение уравнения (8.1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$.

Возможность использования теоремы о неподвижной точке в этом случае основана на следующем простом замечании: дифференциальное уравнение (8.1)

эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds. \quad (8.2)$$

Решения уравнения (8.2) можно интерпретировать как неподвижные точки отображения

$$\mathcal{F} : x(t) \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds,$$

а поэтому при определенных условиях на F можно использовать теорему о неподвижной точке.

Теорема 8.4. *Предположим, что F удовлетворяет условиям*

$$\|F(x, t)\| \leq M_1 + M_0 \|x\|,$$

$$\|F(x_1, t) - F(x_2, t)\| \leq M_2 \|x_2 - x_1\|.$$

Тогда для любых $x_0 \in B$ и $t_0 \in (-\infty, \infty)$ уравнение (8.1) имеет определенное на всем интервале $(-\infty, +\infty)$ единственное решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{F} : x(t) \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{F}x)(t).$$

Покажем, что $\mathcal{F}$ является отображением в себя банахова пространства $C(B)$ функций $x(t)$, непрерывных по t , со значениями в B и с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} \|x(t)\|_B.$$

Действительно, из определения $\mathcal{F}$ и условий теоремы следует, что

$$\|\mathcal{F}x(t)\| \leq \|x_0\| + (M_1 + M_0 \|x\|) |t - t_0|,$$

т. е. $\mathcal{F}(C_{[a, b]}(B)) \subset C_{[a, b]}(B)$.

Далее, оценим разность

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}x_1(t) - \mathcal{F}x_2(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t [F(x_2(s), s) - F(x_1(s), s)] ds \right\| \leq \\ &\leq M_2 \int_{t_0}^t \|x_2(s) - x_1(s)\| ds \leq M_2 |t - t_0| \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Отсюда индукцией по n получаем

$$\|\mathcal{F}^n x_2(t) - \mathcal{F}^n x_1(t)\| \leq \frac{[M_2 |t - t_0|]^n}{n!} \|x_2 - x_1\|$$

или

$$\|\mathcal{F}^n x_2 - \mathcal{F}^n x_1\| \leq \frac{[M_2(b-a)]^n}{n!} \|x_2 - x_1\|.$$

Из последнего неравенства следует, что при достаточно большом n отображение $\mathcal{F}^n$ является сжатием в $C_{[a, b]}(B)$. Поэтому $\mathcal{F}$ имеет на $[a, b]$ единственную неподвижную точку $x_{[a, b]}(t) \in C_{[a, b]}(B)$. Из единственности неподвижной точки следует, что если $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$, то сужение $x_{[a_2, b_2]}(t)$ на отрезок $[a_1, b_1]$ совпадает с $x_{[a_1, b_1]}(t)$. Поэтому существует решение $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{[t_0 - n, t_0 + n]}(t)$, определенное на всем интервале $(-\infty, \infty)$.

§ 9. Нормированные и банаховы алгебры

Пусть B — алгебра над полем комплексных чисел, причем одновременно B является нормированным пространством. Мы будем говорить, что B есть *топологическая алгебра*, если умножение непрерывно по каждому из сомножителей. Другими словами, из условий $a_k \rightarrow a$ и $b_k \rightarrow b$ должно следовать $a_k b \rightarrow ab$ и $ab_k \rightarrow ab$. Заметим, что соотношение $a_k b_k \rightarrow ab$ при этом может не выполняться. Действительно, пусть, например, B — пространство финитных последовательностей $a = \{\xi^{(k)}\}$, $k \geq 1$, с нормой

$$\|a\| = \sum_1^{\infty} \frac{|\xi^{(k)}|}{k^2}$$

и покоординатными операциями. Легко видеть, что B есть топологическая алгебра. Однако, полагая $a_n = \{\xi_n^{(k)}\}$, где

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < n, \\ k^{1/2} & \text{при } n \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{при } k > 2n, \end{cases}$$

получаем $\|a_n\| \rightarrow 0$ и $\|a_n^2\| \geq c > 0$.

Если в алгебре B нет единицы, то ее можно присоединить, рассмотрев алгебру B_1 формальных сумм $\lambda + a$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in B$. Норма в B_1 определяется соотношением $\|\lambda + a\| = |\lambda| + \|a\|$. Легко видеть, что B_1 будет топологической алгеброй, причем факторпространство B_1/B одномерно.

Будем говорить, что B — *нормированная алгебра*, если существует такая константа C , что

$$\|xy\| \leq C \|x\| \cdot \|y\| \quad (9.1)$$

для всех $x, y \in B$.

Легко показать, что *пополнение нормированной алгебры является нормированной алгеброй* (содержащей B в качестве всюду плотной подалгебры).

Нормированная алгебра B называется в дальнейшем *банаховой алгеброй*, если B есть банахово пространство и

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

для всех $x, y \in B$.

Мы видели, что $\text{Op}(E)$ для любого банахова пространства E представляет собой банахову алгебру.

Теорема 9.1. *Полная нормированная алгебра B путем введения эквивалентной нормы может быть превращена в банахову алгебру.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что B обладает единицей. Рассмотрим так называемое левое регулярное представление алгебры B в алгебре $\text{Op}(B)$

ограниченных операторов на B . Именно, зададим отображение $a \rightarrow T_a$, где

$$T_a x = ax.$$

Легко видеть, что оператор $T \in \text{Op}(B)$ тогда и только тогда имеет вид T_a , когда $Txy = (Tx)y$. Отсюда следует, что операторы T_a образуют замкнутую подалгебру в $\text{Op}(B)$. В частности, $\{T_a\}$ — банахово пространство. Отображение $a \rightarrow T_a$ оказывается, таким образом, взаимно однозначным гомоморфизмом банаховых пространств. Кроме того, по условию теоремы, оно непрерывно. Согласно теореме Банаха, обратное отображение также непрерывно. Поэтому, беря в качестве новой нормы элемента $a \in B$ число $\|T_a\|$, мы получаем норму, эквивалентную исходной. Так как для операторов $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$, то теорема доказана. Заметим, что для единицы e алгебры B в новой норме $\|e\| = 1$.

Задача. Доказать, что в нормированной алгебре из $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow b$ следует $a_n b_n \rightarrow ab$. Обратное, если топологическая алгебра обладает этим свойством, то она является нормированной алгеброй.

Задача. Доказать, что новая норма будет совпадать с исходной, если B — банахова алгебра с единицей, $\|e\| = 1$.

Теорема 9.2. Пусть E — нормированная алгебра с нормой $\|\cdot\|$ и пусть A — подпространство в E (не обязательно замкнутое), наделенное такой нормой $\|\cdot\|_1$, что $\|f\|_1 \geq K\|f\|$ для всех $f \in A$. Предположим, что A относительно $\|\cdot\|_1$ является банаховым пространством. Тогда, если A есть алгебра, то умножение непрерывно по норме $\|\cdot\|_1$, т. е. $\|ab\|_1 \leq M\|a\|_1 \cdot \|b\|_1$ с некоторой константой M . Другими словами, если A — алгебра, то A — полная нормированная алгебра и, следовательно, — банахова алгебра в некоторой норме $\|\cdot\|_2$, эквивалентной норме $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. Как и выше, зададим оператор T_a , полагая $T_a(x) = ax$. Тогда $T_a \in \text{Op}(A)$. Действительно, поскольку T_a определен всюду на A , для доказательства непрерывности достаточно установить, что T_a — замкнутый оператор. Пусть $b_n \in A$, $\|b_n - b\|_1 \rightarrow 0$ и $\|T_a b_n - c\|_1 \rightarrow 0$. Тогда $\|b_n - b\| \rightarrow 0$, $\|ab_n - c\| \rightarrow 0$ и, следовательно, $\|ab_n - ab\| \leq C\|a\| \cdot \|b_n - b\| \rightarrow 0$, так что $c = ab = T_a b$. Тем самым непрерывность операторов T_a установлена. Аналогично устанавливается непрерывность операторов S_a правого умножения.

Далее, если $\|a\|_1 \leq 1$, то $\|T_a b\|_1 = \|ab\|_1 = \|S_b a\|_1 \leq \|S_b\| \cdot \|a\|_1 \leq \|S_b\|$. Но мы знаем, что если семейство операторов $\{T_a\}$ таково, что $\|T_a x\| \leq C(x)$, то $\sup \|T_a\| < \infty$. Поэтому найдется такая константа M , что $\|T_a\| \leq M$, если $\|a\|_1 \leq 1$. Следовательно, $\|ab\|_1 = \|T_a b\|_1 \leq M\|b\|_1 \cdot \|a\|_1$. Теорема доказана.

Подпространство $I \subset B$ называется идеалом, если $ax \in I$ для всех $a \in I$ и $x \in B$. Мы предполагаем, что $I \neq B$. Если $a \notin GL(B)$, то элементы вида ax , $x \in B$, образуют идеал. С другой стороны, если $a \in GL(B)$, то, очевидно, a не содержится ни в одном идеале.

§ 1. Пространства Соболева

Настоящий параграф посвящен введению и классификации гладких (должное число раз дифференцируемых), разрывных и так называемых обобщенных функций при помощи процесса пополнения векторных пространств по норме, описанного в абстрактной форме в § 2, гл. I. В качестве исходного пространства берется пространство «наиболее хороших» функций, т. е. достаточно гладких и достаточно быстро убывающих. Мы наделяем его различными нормами, а затем, пополняя, получаем различные классы разрывных и даже обобщенных функций. Таким способом мы получим важные конкретные гильбертовы пространства — так называемые пространства Соболева. Все эти пространства изометрически изоморфны друг другу, и поэтому можно сказать, что они являются различными реализациями абстрактного гильбертова пространства.

Рассмотрим векторное пространство S бесконечно дифференцируемых функций φ на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n}}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \varphi(x) \right| < \infty \quad (1.1)$$

для любых целых неотрицательных $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, т. е. пространство функций, убывающих вместе со всеми своими производными быстрее любой отрицательной степени $|x|$ при $|x| \rightarrow \infty$

(Здесь и далее $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Кроме того, мы пишем x^2 вместо $|x|^2$ при любом $n \geq 1$.) В частности, пространству S принадлежат все бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем (финитные функции); векторное пространство этих функций обозначается $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Для того, чтобы классифицировать функции по их гладкости, мы будем использовать оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ (точнее, $-\Delta + 1$, поскольку, как мы увидим, последний обратим на S), а для классификации функций по их росту мы будем использовать оператор умножения на функцию $x^2 + 1$.

Заметим, что можно было бы рассматривать и другие операторы, обладающие такими свойствами. Выбор именно этих операторов диктуется лишь соображениями удобства.

Вначале мы будем классифицировать функции по их гладкости. Для каждого целого $k \geq 0$ введем в пространстве S норму, полагая

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}(x) [-\Delta + 1]^k \varphi(x) dx. \quad (1.2)$$

Определение. Пополнение пространства S по норме (1.2) называется пространством Соболева и обозначается *) $W_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Доказать, что пространство $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово.

Пространство $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, можно отождествить с $L_2(\mathbb{R}^n)$, так как множество S плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$. В одномерном случае это доказано в конце § 2 главы I.

Задача. Доказать, что при $n > 1$ множество S плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Оказывается, что формуле (1.2) можно придать смысл и в том случае, когда k — отрицательное целое число. Рассмотрим векторные пространства $S^{(l)}$ (l — натуральное число) функций ψ , представимых в виде

$$\psi = (-\Delta + 1)^l \varphi, \quad \varphi \in S. \quad (1.3)$$

Покажем, что для всякой функции $\psi \in S^{(l)}$ функция φ однозначно определяется соотношением (1.3). Очевидно, достаточно рассмотреть случай $l=1$. Случай произвольного l получается повторением этой операции l раз. Пусть $(-\Delta + 1)\varphi = (-\Delta + 1)\varphi_1$. Тогда для функции $f = \varphi - \varphi_1$ имеем

$$(-\Delta + 1)f = 0, \quad (1.4)$$

и значит,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) (-\Delta + 1)f(x) dx = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем (учитывая, что функция f и ее производные достаточно быстро убывают при $|x| \rightarrow \infty$) равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = 0,$$

где ∇f — вектор с компонентами $\partial f / \partial x_j$. Значит, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = 0$,

и следовательно, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. Таким образом, определен оператор $(-\Delta + 1)^{-1} : S^{(1)} \rightarrow S$ (и тем самым операторы $(-\Delta + 1)^{-l} : S^{(l)} \rightarrow S$, $l > 0$). Пополняя пространство $S^{(l)}$ по норме (1.2),

*) Употребляется также обозначение $H_s = W_2^s(\mathbb{R}^n)$.

где $k = -l$, получаем пространство $W_{\frac{1}{2}}^{-l}(\mathbb{R}^n)$, $l > 0$. Ниже будет доказано, что $S^{(l)} = S$ для любого l .

Элементы, принадлежащие $W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$ при $k < 0$ и при этом не принадлежащие пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$, принято называть *обобщенными функциями*. Элементы, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^n)$, но не принадлежащие $C(\mathbb{R}^n)$, принято называть *разрывными функциями*.

Заметим, что все построенные выше гильбертовы пространства содержат функции приблизительно одного и того же порядка убывания на бесконечности.

Теперь мы перейдем к классификации функций по их поведению при $|x| \rightarrow \infty$. Заметим, что при классическом преобразовании Фурье оператор $-\Delta + 1$ переходит в оператор умножения на $p^2 + 1$. Напомним некоторые свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье F функций φ из S определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(p) = (F\varphi)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad (1.5)$$

где $p \cdot \xi = \sum_{i=1}^n p_i \xi_i$ — скалярное произведение *) векторов $p, \xi \in \mathbb{R}^n$.

В курсах анализа устанавливаются следующие свойства преобразования Фурье F функции из S .

1) Существует обратное преобразование Фурье F^{-1} , причем

$$(F^{-1}\tilde{\varphi})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p) dp. \quad (1.6)$$

$$2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{[(Ff)(p)]} (F\varphi)(p) dp \quad (1.7)$$

(равенство Парсеваля).

3) Пусть D_j — оператор дифференцирования по j -й координате, U_j — оператор умножения на j -ю координату. Тогда

$$-iD_j F = F U_j, \quad (1.8)$$

$$U_j F = iF D_j. \quad (1.9)$$

Из последнего свойства непосредственно вытекает, что для любого $m \geq 0$ и для любого $\psi \in S$

$$[F(-\Delta + 1)^m \psi](p) = (p^2 + 1)^m \tilde{\psi}(p). \quad (1.10)$$

Условимся обозначать через $\tilde{S}$ пространство всех функций $\tilde{\varphi}$, где $\varphi \in S$.

Исходя из рассмотренных свойств преобразования Фурье, нетрудно установить, что пространство S инвариантно относительно преобразования Фурье, т. е. $\tilde{S} = S$.

*) Использование двух различных форм записи для скалярного произведения диктуется лишь соображениями удобства.

Покажем, что если $\psi \in S^{(m)}$ при $m < 0$, то и равенство (1.10) справедливо при $m < 0$. Действительно, пусть $m = -k < 0$ и $\varphi = (-\Delta + 1)^{-k} \psi$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(\rho) = [F(-\Delta + 1)^k \psi](\rho) = (\rho^2 + 1)^k \tilde{\psi}(\rho). \quad (1.11)$$

Умножив (1.11) на $(\rho^2 + 1)^m$, получим (1.10).

Из (1.10) следует, что для любого натурального l пространство $S^{(l)}$ совпадает с пространством S . Действительно, пусть $\varphi \in S$. Покажем, что существует функция $\psi \in S$, удовлетворяющая условию $\varphi = (-\Delta + 1)^l \psi$. Очевидно, достаточно доказать это для $l = 1$. Из инвариантности S относительно преобразования Фурье, существования F^{-1} и формулы (1.10) следует, что в качестве ψ можно взять $F^{-1}\tilde{\varphi}$, где

$$\tilde{\psi}(\rho) = (\rho^2 + 1)^{-1} (F\varphi)(\rho).$$

Определение. Пространством $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ называется пополнение пространства S по норме

$$\|\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (x^2 + 1)^k |\varphi(x)|^2 dx. \quad (1.12)$$

Выше уже говорилось об изометрическом изоморфизме всех вводимых здесь пространств. Предлагаемая ниже задача может рассматриваться как непосредственная иллюстрация этого факта.

Задача. Пусть $A: S \rightarrow S$ — отображение, определяемое формулой $Af(x) = (x^2 + 1)^{-k/2} f(x)$. Доказать, что существует и единственно расширение A до изометрического изоморфизма пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ на $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Доказать, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Теперь определим изометрический изоморфизм пространств $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$. Как и следовало ожидать, он осуществляется преобразованием Фурье. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1 Преобразование Фурье $F: S \rightarrow S$ изометрично относительно норм пространств $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, т. е. для любого $\varphi \in S$ справедливо равенство

$$\|F\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство. Используя 1.10 и равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} (-\Delta + 1)^k \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{[(F\varphi)(\rho)]} (\rho^2 + 1)^k (F\varphi)(\rho) d\rho = \|F\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор F в силу изометричности ограничен на плотном подмножестве S пространства $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, преобразование Фурье F может быть единственным образом продолжено до изометрического гомоморфизма пространства $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ на $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, который мы также будем обозначать буквой F . Итак, мы пришли к следующему определению.

Определение. *Изометрический гомоморфизм*

$$\tilde{F}: W_2^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$$

называется преобразованием Фурье в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Продолжая до гомоморфизма оператор, определенный на S формулой (1.6), видим, что оператор $\tilde{F}$ имеет обратный:

$$F^{-1}: \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_2^k(\mathbb{R}^n).$$

Действительно, если обозначить через $\tilde{F}$ продолжение оператора (1.6) до гомоморфизма пространства $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, то для любого $\varphi \in S$

$$F\tilde{F}\varphi = \tilde{F}F\varphi = \varphi.$$

Отсюда, в силу плотности S в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ и в $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ следует, что $F\tilde{F} = 1$, $\tilde{F}F = 1$, т. е. $\tilde{F} = F^{-1}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. 1.2. *Преобразование Фурье*

$$F: W_2^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$$

является изометрическим изоморфизмом.

Примечание. Для записи преобразования Фурье элементов $\varphi \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \notin S$, мы будем по-прежнему пользоваться обычной формулой преобразования Фурье, хотя φ и $\tilde{\varphi}$ в этом случае не являются функциями в общепринятом смысле.

Теорема позволяет естественным образом расширить определение пространств Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ на случай дробного s . Пусть $s \geq 0$ — любое вещественное число. Введем в S норму $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ по формуле

$$\|\varphi\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} = \|F\varphi\|_{\tilde{W}_2^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.13)$$

Определение. *Пространством Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ называется пополнение пространства S по норме (1.13).*

Этим мы заканчиваем определение пространств Соболева. Теперь мы перейдем к доказательству важнейшего свойства пространств Соболева, которое часто берется за определение пространств Соболева W_2^s при $s < 0$.

§ 2. Двойственность пространств Соболева

В каждом из пространств Соболева, как мы видели ранее, можно ввести естественное скалярное произведение, которое превращает это пространство в гильбертово. Однако скалярное произведение в L_2 , определенное формулой (3. 5) гл. I, продолжает играть основную роль и для пространств Соболева. Именно, оказывается, что «положительные» и «отрицательные» пространства Соболева «двойственны» относительно этого скалярного произведения. Вначале рассмотрим введенные выше пространства $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.1. Пусть $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ и пусть $\{f_j\}$ и $\{\varphi_j\}$ — последовательности функций из S , сходящиеся соответственно к f и φ . Тогда существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi_j(x) dx. \quad (2.1)$$

Доказательство. Покажем, что рассматриваемая последовательность интегралов фундаментальна. Имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_p(x) \varphi_p(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_q(x) \varphi_q(x) dx \right| = \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f_p(x) - f_q(x)] \varphi_p(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_q(x) [\varphi_q(x) - \varphi_p(x)] dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f_p(x) - f_q(x)] \varphi_p(x) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_q(x) [\varphi_q(x) - \varphi_p(x)] dx \right|. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f_p(x) - f_q(x)] \varphi_p(x) dx \right| = \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^{k/2} [f_p(x) - f_q(x)] (1+x^2)^{-k/2} \varphi_p(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^k |f_p(x) - f_q(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^{-k} |\varphi_p(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \\ & = \|f_p - f_q\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} \|\varphi_p\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Так как последовательность $\{f_j\}$ фундаментальна по норме пространства $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, а последовательность $\{\varphi_j\}$ фундаментальна по норме пространства $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ (а, следовательно и ограничена по этой норме), то

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} [f_p(x) - f_q(x)] \varphi_p(x) dx = 0;$$

аналогично получаем, что

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_q(x) [\varphi_p(x) - \varphi_q(x)] dx = 0,$$

и теорема доказана.

Определение. Назовем предел (2.1) интегралом произведения функций $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ и введем обозначение

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi_j(x) dx. \quad (2.2)$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора f_j и φ_j . Пусть $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ и пусть последовательности $\{f_k\}$ и $\{\check{f}_k\}$ функций из S сходятся к f , а последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\check{\varphi}_k\}$ функций из S сходятся к φ . Так же, как при доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi_j(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}_j(x) \check{\varphi}_j(x) dx \right| \leq \\ \leq \|f_j - \check{f}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} \|\varphi_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi_j - \check{\varphi}_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)} \|\check{f}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание. При $k=0$, т. е. в случае, когда $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, интеграл (2.2) совпадает со скалярным произведением (f, φ) ; здесь $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

Теорема 2.2. Для любых $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|f\| \|\varphi\|. \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $f_j \rightarrow f$, $\varphi_j \rightarrow \varphi$, $f_j, \varphi_j \in S$. Из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi_j(x) dx \right| \leq \\ \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} \|\varphi_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)} = \|f\| \|\varphi\|.$$

Теорема 2.3. При фиксированном $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ интеграл (2.2) определяет ограниченный линейный функционал на $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}_f$ левую часть выражения (2.2):

$$\mathcal{F}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad f \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n).$$

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{F}_f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\mathcal{F}_f(\varphi) + \beta\mathcal{F}_f(\psi)$. Ограниченность функционала $\mathcal{F}_f: \tilde{W}_2^{-k} \rightarrow \mathbb{C}$ следует из теоремы 2.2.

Определение. Пусть $f_j \rightarrow f$, $\varphi_j \rightarrow \varphi$, $f_j, \varphi_j \in S$, $f \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$. Назовем интегралом произведения функций f и φ предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi_j(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Задача. Используя равенство Парсеваля, доказать корректность данного определения. Получить аналоги теорем 2.2 и 2.3 для пространств $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Обобщить равенство Парсеваля для интеграла $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ на случай, когда

$$f \in W_2^k(\mathbb{R}^n), \varphi \in W_2^{-k}(\mathbb{R}^n), k > 0.$$

Теорема 2.4. Пусть $\Phi \in [\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)]^*$. Тогда найдется такой элемент h пространства $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$, что для любого $g \in \tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) g(x) dx. \quad (2.4)$$

Доказательство. Пусть $g \in S$, $\varphi(x) = (1+x^2)^{k/2} g(x)$. Тогда

$$\|g\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^k |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (2.5)$$

Рассмотрим линейный функционал Ψ , определенный на плотном множестве $S \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$\Psi(\varphi) = \Phi(g)$$

и ограниченный в силу (2.5). По теореме Ф. Рисса существует такой элемент $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, что для любого $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\Psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Пусть $f_j \rightarrow f$, $f_j \in S$, $g \in S$, $\varphi(x) = (1+x^2)^{k/2} g(x)$. Тогда

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x) g(x) dx,$$

где $h_j(x) = (1+x^2)^{k/2} f_j(x)$, причем из сходимости последовательности $\{f_j\}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ следует сходимость последовательности $\{h_j\}$ к некоторому элементу $h \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, при $g \in S$

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) g(x) dx.$$

А поскольку S плотно в $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, то теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть $\mathcal{F}_f \in [\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)]^*$ — функционал, определенный формулой

$$\mathcal{F}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad f \in \tilde{W}_2^{+k}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $\|\mathcal{F}_f\| = \|f\|$.

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что $\|\mathcal{F}_f\| \leq \|f\|$. Докажем противоположное неравенство в предположении, что $f \in S$. Пусть $\varphi(x) = (1+x^2)^k \tilde{f}$. Тогда

$$\mathcal{F}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^k |f(x)|^2 dx = \|f\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \|f\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)}.$$

Поэтому $\|\mathcal{F}_f\| \geq \|f\|$, так что $\|\mathcal{F}_f\| = \|f\|$ при $f \in S$.

Пусть теперь f — произвольный элемент из $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ и $\{f_j\}$ — последовательность функций из S , сходящаяся к f . Тогда последовательность функционалов $\mathcal{F}_{f_j}$ сходится к $\mathcal{F}_f$ по норме пространства $[\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)]^*$. Переходя к пределу в равенстве $\|\mathcal{F}_{f_j}\| = \|f_j\|$, получаем утверждение теоремы.

Теоремы 2.3–2.5 означают, что $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ можно отождествить с пространством $[\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)]^*$ ограниченных линейных функционалов на $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6. Отображение $A: \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)]^*$, определенное формулой

$$[Af](g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx,$$

является изометрическим изоморфизмом.

Из теоремы 2.6 и теоремы 1.2 получаем следующую теорему.

Теорема 2.7. Отображение $A: \tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)]^*$, определенное формулой

$$[Af](g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx,$$

является изометрическим изоморфизмом.

Оператор дифференцирования не является ограниченным ни в одном из пространств Соболева. Однако он ограничен как оператор из одного пространства Соболева в некоторое другое, отвечающее ему пространство Соболева. Действительно, пусть $D_m: S \rightarrow S$ — оператор дифференцирования по m -й координате:

$$D_m f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}.$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2.8. Оператор D_m ограничен как оператор, действующий из $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{W}_2^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S$, $\tilde{\varphi} = F\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \|D_m \varphi\|_{W^{k-1}_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} p^2 (1+p^2)^{k-1} |\tilde{\varphi}(p)|^2 dp \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+p^2)^k |\tilde{\varphi}(p)|^2 dp = \|\varphi\|_{W^k_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\varphi\|_{W^k_2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, норма оператора D_m не превосходит единицы, и теорема доказана.

Ограниченный на плотном подмножестве $S \subset W^{k-1}_2(\mathbb{R}^n)$ оператор D_m можно расширить до гомоморфизма $W^k_2(\mathbb{R}^n)$ в $W^{k-1}_2(\mathbb{R}^n)$. Расширенный оператор будем обозначать тем же символом D_m .

Определение. Пусть $f \in W^k_2(\mathbb{R}^n)$. *Обобщенная функция $D_m f \in W^{k-1}_2(\mathbb{R}^n)$ называется частной производной обобщенной функции f по m -й координате.*

Замечание. Хотя и не имеет смысла говорить о значении обобщенной функции в точке, мы иногда будем использовать символ $f(x)$, $f \in W^k_2(\mathbb{R}^n)$ (см., например, в § 2 определение интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx, \quad f \in W^k_2(\mathbb{R}^n), \quad g \in W^{-k}_2(\mathbb{R}^n)).$$

В таком же смысле мы будем использовать для частных производных обобщенных функций обозначение

$$(D_m f)(x) = \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}. \quad (2.6)$$

Задача. Пусть $f \in W^{-k}_2(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что функционал $g \in W^{k-1}_2(\mathbb{R}^n)$, действующий по формуле

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_m} dx, \quad \varphi \in W^{k+1}_2(\mathbb{R}^n), \quad (2.7)$$

совпадает с $D_m f$.

§ 3. Некоторые пространства непрерывных функций и связанные с ними пространства

Пространства Соболева весьма удобны для исследования свойств дифференциальных операторов. Они являются гильбертовыми пространствами и обладают свойством двойственности. Однако элементы этих пространств мы не можем перемножать. (В самом деле, если, например, $\varphi(x) \in L_2$, то $\varphi^2(x)$, вообще говоря, не принадлежит L_2 .)

В этом отношении пространство непрерывных функций обладает преимуществом перед пространствами Соболева: произведение двух непрерывных функций является непрерывной функцией.

Это свойство будет нам особенно важно, когда будет идти речь о пространстве операторов.

Перейдем к рассмотрению некоторых банаховых алгебр непрерывных функций. Рассмотрим сначала множество непрерывных ограниченных комплекснозначных функций с общей областью определения $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. На этом множестве обычным образом вводится структура векторного пространства. Определим норму функции f формулой

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (3.1)$$

Полученное нормированное пространство функций обозначим через $C(\Omega)$. Пространство $C(\Omega)$ является банаховым: его полнота вытекает из того, что сходимость функций по норме (3.1) является равномерной сходимостью. Согласно известной теореме анализа равномерно сходящаяся последовательность ограниченных непрерывных функций имеет пределом ограниченную непрерывную функцию.

Аналогично $C(\Omega)$ определяются нормированные пространства $C^{(k)}(\Omega)$, $k > 0$ — целое. Норма в $C^{(k)}(\Omega)$ задается формулой

$$\|f\|_{C^{(k)}(\Omega)} = \max_{0 \leq |j| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|, \quad (3.2)$$

где $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, $|j| = \sum_{i=1}^n j_i$, $D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$. Элементами пространства $C^{(k)}(\Omega)$ являются k раз непрерывно дифференцируемые на Ω функции f , для которых $\|f\|_{C^{(k)}(\Omega)} < \infty$. Пространство $C^{(k)}(\Omega)$ является банаховым пространством (полнота следует из теоремы, аналогичной вышеупомянутой).

Пусть $C^*(\mathbb{R}^n)$ — пространство, сопряженное к $C(\mathbb{R}^n)$. δ_ξ -функцией Дирака называется функционал на $C(\mathbb{R}^n)$, который каждой функции $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие ее значение $g(\xi)$ в точке $\xi \in \mathbb{R}^n$. Функционал δ_ξ принадлежит пространству $C^*(\mathbb{R}^n)$; его ограниченность следует из неравенства

$$|g(\xi)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| = \|g\|_{C(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $N \geq 0$. Через $C_N(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{C_N(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{g(x)}{(1+|x|)^N} \right|.$$

Таким образом, по определению, пространство $C_N(\mathbb{R}^n)$ есть пространство, в которое включаются все непрерывные функции, растущие не быстрее $|x|^N$.

В этом отношении оно является как бы «надстройкой» над $C(\mathbb{R}^n)$, подобно тому как $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$ есть «надстройка» над $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, что функцию Дирака δ_ξ можно рассматривать как элемент пространства $C_N^*(\mathbb{R}^n)$:

$$|\delta_\xi(g)| = |g(\xi)| = (1 + |\xi|)^N \left| \frac{g(\xi)}{(1 + |\xi|)^N} \right| \leq (1 + |\xi|)^N \|g\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}.$$

Другой пример элемента из $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ дает функционал $\mathcal{F}_\varphi$:

$$\mathcal{F}_\varphi(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x) dx, \quad (3.3)$$

где φ — элемент векторного пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями. Действительно,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x) dx \right| \leq \max_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi(x)| (1 + |x|)^N \|g\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}.$$

Функционал $\mathcal{F}_\varphi$ удобно отождествлять с самой функцией φ (легко видеть, что $(\varphi \neq 0) \Rightarrow (\mathcal{F}_\varphi \neq 0)$), т.е. писать $\varphi(x) \in C_N^*(\mathbb{R}^n)$ вместо $\mathcal{F}_\varphi \in C_N^*(\mathbb{R}^n)$. Мы будем обозначать любой функционал $\mathcal{F} \in C_N^*(\mathbb{R}^n)$ через $\varphi(x)$ (хотя $\varphi(x)$ может и не быть функцией в обычном смысле слова), а значение функционала $\mathcal{F}$ будем записывать в виде $\int \varphi(x) g(x) dx$, хотя интеграл и не существует как интеграл Римана. В частности, для функционала δ_ξ будем, как это принято в физической литературе, писать $\int \delta(x - \xi) f(x) dx$.

Нам будет достаточно рассмотреть более простое и легко обозримое пространство, именно, подпространство в $C_N^*(\mathbb{R}^n)$, которое является линейной оболочкой объединения δ -функций Дирака и $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Итак, обозначим через $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ замыкание в $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ линейной оболочки множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$.

Перейдем теперь к определению *преобразования Фурье* в пространстве $C_N^*(\mathbb{R}^n)$. *Фурье-образом* функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_N^*(\mathbb{R}^n)$ назовем, как обычно, функцию $\tilde{\varphi}$, определяемую формулой

$$\tilde{\varphi}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (F\varphi)(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ip \cdot x} dx. \quad (3.4)$$

Фурье-образом δ_ξ -функции назовем функцию, определяемую формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_\xi(p) &\stackrel{\text{def}}{=} (F\delta_\xi)(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_\xi(x) e^{ip \cdot x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ip \cdot \xi}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим через $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций функций вида (3.4), (3.5).

Формулы (3.4) и (3.5) задают оператор, отображающий линейную оболочку множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ в $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$. Оператор F имеет обратный; покажем это. Нужно убедиться в том, что $(F\varphi = 0) \Rightarrow (\varphi = 0)$. Пусть $F\varphi = 0$, причем

$$\varphi = \psi + \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{\xi_i}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ при } i \neq j, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n,$$

$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\psi}(p) + \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-ip \cdot \xi_i},$$

где $\tilde{\psi}$ — Фурье-образ функции ψ . Следовательно,

$$\tilde{\psi}(p) = - \sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-ip \cdot \xi_i}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля, то функция $\tilde{\psi}$ не стремится к нулю на бесконечности, а это противоречит тому, что $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Введем теперь в пространстве $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ норму:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)} \stackrel{\text{def}}{=} \|F^{-1}\tilde{\varphi}\|_{C_N^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.6)$$

Обозначим через $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ пополнение пространства $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ по норме (3.6). Тогда оператор F может быть расширен, и притом единственным образом, до изометрического изоморфизма пространства $C_N^1(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$. Этот изометрический изоморфизм мы снова обозначим буквой F и назовем *преобразованием Фурье элементов пространства $C_N^1(\mathbb{R}^n)$* . В дальнейшем мы увидим, что пространство $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ естественно реализуется в виде пространства непрерывных (гладких) функций.

В линейной оболочке множества

$$[C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbb{R}^n}] \subset C_N^1(\mathbb{R}^n)$$

имеется коммутативная композиция (умножение), которая превращает это многообразие в алгебру, а именно,

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(x-y) dy \quad \text{при } \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$\delta_\xi * \delta_\eta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \delta_{\xi+\eta};$$

$$(\delta_\xi * \psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \psi(x-\xi) \quad \text{при } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Покажем, что существует такая константа c , что

$$\|\varphi * \psi\| \leq c \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Пусть $f \in C_N(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi * \psi](x) f(x) dx. \quad (3.7)$$

Интеграл (3.7) можно преобразовать к виду

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) dt \int_{\mathbb{R}^n} f(y+t) \varphi(y) dy. \quad (3.8)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть три частных случая (поскольку мы рассматриваем линейную оболочку множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}$):

а) $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

б) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi = \delta_\xi$;

в) $\varphi = \delta_\xi$, $\psi = \delta_\eta$.

В случае а)

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi * \psi](x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(x-y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) f(y+t) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) dt \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f(y+t) dy. \end{aligned}$$

В случае б)

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-\xi) f(x) dx;$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t-\xi) dt \int_{\mathbb{R}^n} f(y+t) \varphi(y) dy &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y+\xi) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x-\xi) dx. \end{aligned}$$

Наконец, в случае в)

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-\xi-\eta) f(x) dx = f(\xi+\eta),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(t-\eta) dt \int_{\mathbb{R}^n} f(y+t) \delta(y-\xi) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t-\eta) f(\xi+t) dt = f(\xi+\eta).$$

Таким образом, равенство (3.8) доказано. В силу (3.8)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(x) f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| (1+|t|)^{-N} \int_{\mathbb{R}^n} f(y+t) \varphi(y) dy \right| \right) \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left[(1+|t|)^{-N} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{f(y+t)}{(1+|y|)^N} \right] \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \sup_{t, y \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{f(y+t)}{(1+|t|)^N (1+|y|)^N} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{t, y \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{f(y+t)}{(1+|t|)^N (1+|y|)^N} \right| &\leq \\ &\leq \|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n)} \sup_{t, y \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1+|t+y|}{(1+|t|)(1+|y|)} \right)^N \leq \|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

то

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(x) f(x) dx \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}.$$

Итак,

$$\|\varphi * \psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.9)$$

что и требовалось доказать.

В силу оценки (3.9) операцию $*$ можно, и притом единственным образом, распространить на все пространство $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ с сохранением неравенства (3.9). При этом $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ превращается в банахову (точнее, в полную нормированную) алгебру. Поскольку преобразование Фурье есть изометрический изоморфизм банахова пространства $C_N^*(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$, то операция $*$ индуцирует бинарную операцию, которая превращает $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ в банахову алгебру и определяется формулой

$$\bar{\varphi} \bullet \bar{\psi} = F[(F^{-1}\varphi) * (F^{-1}\psi)].$$

Выясним, как действует операция $\bullet$ на $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi_0, \psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и пусть

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_j \alpha_j \delta_{\xi_j}, \quad \psi = \psi_0 + \sum_k \beta_k \delta_{\eta_k}. \quad (3.10)$$

Тогда

$$\varphi * \psi = \varphi_0 * \psi_0 + \sum_j \alpha_j \delta_{\xi_j} * \psi_0 + \varphi_0 * \sum_k \beta_k \delta_{\eta_k} + \sum_{j, k} \alpha_j \beta_k (2\pi)^{-n/2} \delta_{\xi_j + \eta_k},$$

так что

$$\begin{aligned} (F\varphi \bullet F\psi)(p) &= (F\varphi_0 \bullet F\psi_0)(p) + (2\pi)^{-n/2} \sum_j \alpha_j e^{i p \cdot \xi_j} (F\psi_0) + \\ &+ (2\pi)^{-n/2} \sum_k \beta_k e^{i p \cdot \eta_k} (F\varphi_0)(p) + \sum_{j, k} (2\pi)^{-n} \alpha_j \beta_k e^{i p \cdot (\xi_j + \eta_k)}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $(F\varphi_0 \bullet F\psi_0)(p) = \varphi_0(p) \psi_0(p)$. Поэтому $(F\varphi \bullet F\psi)(p) = \varphi(p) \psi(p)$ для любых φ, ψ вида (3.10), т. е. на $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ операция $\bullet$ есть поточечное умножение функций. По этой причине мы будем опускать точку в обозначениях этой операции:

$$\tilde{\varphi}\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} \bullet \tilde{\psi}, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n).$$

§ 4. Теоремы вложения

Очень часто бывает непросто непосредственно установить принадлежность функций банаховой алгебре S и особенно банаховой алгебре $\mathcal{B}_N$. Существенно проще проверить, принадлежат ли они пространству Соболева. Поэтому нам важно установить факты о том, что принадлежность к некоторому пространству Соболева влечет за собой принадлежность к $\mathcal{B}_N$ или S . Говоря точнее, речь идет о существовании естественного вложения пространств Соболева в S или $\mathcal{B}_N$. Первые теоремы такого рода были доказаны С. Л. Соболевым и названы им *теоремами вложения*.

Теорема 4.1. *При $k > s$ имеется естественный непрерывный оператор вложения*

$$W_s^k(\mathbb{R}^n) \subset W_s^s(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $k > s$, $\varphi \in S$. Тогда

$$\|\varphi\|_{W_s^k(\mathbb{R}^n)} \geq \|\varphi\|_{W_s^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Стало быть всякая последовательность функций из S , фундаментальная по норме пространства $W_s^k(\mathbb{R}^n)$, фундаментальна и по норме пространства $W_s^s(\mathbb{R}^n)$. Остается показать, что фундаментальные по норме пространства $W_s^k(\mathbb{R}^n)$ последовательности $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ функций из S эквивалентны в $W_s^k(\mathbb{R}^n)$, если они эквивалентны в $W_s^s(\mathbb{R}^n)$. Иначе говоря, надо убедиться в том, что если последовательность $\{\psi_j\} \subset S$ сходится к ψ в $W_s^k(\mathbb{R}^n)$ и к нулю в $W_s^s(\mathbb{R}^n)$, то $\psi = 0$.

Положим $\tilde{\psi}_j = F\psi_j$; $\tilde{\psi} = F\psi$. Имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + p^2)^s |\tilde{\psi}_j(p)|^2 dp = 0$$

и

$$\lim_{m, l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + p^2)^k |\tilde{\psi}_m(p) - \tilde{\psi}_l(p)|^2 dp = 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такой номер j_0 , что при $j \geq j_0$, $l \geq j_0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + p^2) |\tilde{\psi}_j(p) - \tilde{\psi}_l(p)|^2 dp \leq \varepsilon.$$

Пусть A — столь большое число, что

$$\int_{|p| > A} (1 + p^2)^k |\tilde{\psi}_{j_0}(p)|^2 dp < \varepsilon.$$

Тогда при $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_j(p)|^2 dp &\leq \int_{|p| < A} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_j(p)|^2 dp + \\ &+ 2 \sup \|\tilde{\Psi}_j\| \sqrt{\int_{|p| > A} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_j(p) - \tilde{\Psi}_{j_0}(p)|^2 dp} + \\ &+ \int_{|p| > A} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_{j_0}(p)|^2 dp \leq \int_{|p| < A} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_j(p)|^2 dp + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{|p| < A} (1+p^2)^k |\tilde{\Psi}_j(p)|^2 dp &\leq \\ &\leq (1+A^2)^{k-s} \|\tilde{\Psi}_j\|_{\tilde{W}_2^s(\mathbb{R}^n)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{\Psi}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \varepsilon (1 + 2 \sup_j \|\tilde{\Psi}_j\|).$$

А, поскольку ε произвольно, то отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{\Psi}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 = 0,$$

и теорема доказана.

Имеет место теорема, называемая *теоремой вложения Соболева*.

Теорема 4.2. (Теорема вложения Соболева). При $k > n/2$ имеет место вложение $W_2^k(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. Пусть $I_0: S \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ — оператор с областью определения S , действующий по формуле

$$I_0 f(x) = f(x); \quad (4.1)$$

если $k > n/2$, то оператор I_0 ограничен.

Доказательство. Пусть $f \in S$ и пусть $\tilde{f}$ — Фурье-образ функций f , $k > n/2$. В силу равенства

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} \tilde{f}(p) dp \quad (4.2)$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} |f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(p)| dp = \int_{\mathbb{R}^n} (p^2 + 1)^{-k/2} |\tilde{f}(p)| (1 + p^2)^{k/2} dp \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (p^2 + 1)^k |\tilde{f}(p)|^2 dp} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (p^2 + 1)^{-k} dp} = \\ &= M \|\tilde{f}\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$M^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (p^2 + 1)^{-k} dp = c_n \int_0^\infty r^{n-1} (r^2 + 1)^{-k} dr < \infty, \quad (4.4)$$

поскольку $n-1-2k < -1$; константа c_n в (4.4) равна площади единичной $(n-1)$ -мерной сферы. В силу изометричности преобразования Фурье из $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ формулу (4.3) можно переписать в виде

$$\|I_0\| \leq (2\pi)^{-n/2} M,$$

что и требовалось доказать.

Продолжим доказательство теоремы. При $k > n/2$ определен гомоморфизм

$$I: W_2^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n),$$

сужение которого на S есть оператор I_0 . Чтобы доказать, что I есть оператор вложения, достаточно убедиться в том, что $(I\varphi=0) \Rightarrow (\varphi=0)$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — последовательность функций из S , сходящаяся к $\varphi \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$, и пусть $I\varphi=0$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I\varphi_j = I\varphi = 0.$$

Но $I\varphi_j = I_0\varphi_j = \varphi_j$, и значит, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_C(\mathbb{R}^n) = 0$, т. е. последовательность $\{\varphi_j\}$ равномерно сходится к нулю. С другой стороны, $W_2^k(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$; поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Следовательно, для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_j(x) - \varphi(x)] f(x) dx = 0.$$

Если $f \in S$, то

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) f(x) dx \right| \leq \|\varphi_j\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$. Поэтому для любого $f \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx = 0,$$

откуда и следует, что $\varphi=0$. Тем самым теорема доказана.

Смысл теоремы Соболева заключается в том, что если отождествить каждый элемент пространства $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ с его образом при отображении I_0 , то при $k > n/2$ элементы из $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ будут ограниченными непрерывными функциями.

Теорема 4.3. При $k > \frac{n}{2} + 1$ имеет место вложение

$$W_2^k(\mathbb{R}^n) \subset C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$$

и для любого $f \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$ производная $D_m f$ совпадает с обычной частной производной функции f .

Доказательство. Пусть $k > \frac{n}{2} + 1$, $f \in W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$. Для доказательства того, что $If \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, достаточно показать, что I_0 ограничен как оператор, действующий из $W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$ в $C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$. Если $f \in S$ и $\tilde{f}$ — Фурье-образ функции f , то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_m} = - \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} \tilde{f}(p) p_m dp.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{(1)}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{m=1}^n \|D_m f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq c \|f\|_{W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |p_m \tilde{f}(p)| dp, \quad (4.5) \\ c &= \text{const.} \end{aligned}$$

Аналогично (4.3) получаем оценку последнего члена в (4.5):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |p_m \tilde{f}(p)| dp \leq \int_{\mathbb{R}^n} |p| |\tilde{f}(p)| dp \leq \|\tilde{f}\|_{W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |p| (p^2 + 1)^{-k} dp},$$

причем $\int_{\mathbb{R}^n} |p| (p^2 + 1)^{-k} dp < \infty$, так как $n - 2k < -1$. Итак, первая часть предложения доказана. Вторую часть предложения можно сформулировать в виде соотношения $ID_m = D_m I$, которое, очевидно, выполняется на множестве S , плотном в $W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$, а значит, выполняется и на всем $W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$. Доказательство завершено.

Задача. Доказать, что при $k > \frac{n}{2} + m$ имеет место вложение $W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n) \subset C^{(m)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.4. При $k > N + \frac{n}{2}$ имеет место вложение

$$W_{\frac{n}{2}}^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $f \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (1+|x|)^N f(x) dx \right| = \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (1+|x|)^k \frac{\varphi(x)}{(1+|x|)^{k-N}} dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)}=1} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^2 dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{2k} dx}; \quad (4.6) \end{aligned}$$

Имеем

$$\sup_{\|\varphi\|_{C(R^n)}=1} \sqrt{\int_{R^n} \frac{|\varphi(x)|^2 dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} = \sqrt{\int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} < \infty, \quad (4.7)$$

так как $2(k-N) > n$. Далее, $(1+|x|)^{2k} \leq (1+x^2)^k 2^k$; поэтому

$$\int_{R^n} |\varphi(x)|^2 (1+|x|)^{2k} dx \leq 2^k \|\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(R^n)}^2. \quad (4.8)$$

В силу (4.6), (4.7), (4.8) получаем, что $\|\varphi\|_{C_N^*} \leq c \|\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(R^n)}$, где константа c зависит от N , n и k , но не зависит от $\varphi \in S$. Отсюда следует, что для любого $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(R^n)^*$ справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(R^n)} \leq c \|\varphi\|_{W_2^k(R^n)}, \quad c = \text{const.}$$

Остается показать, что если последовательность $\{\varphi_j\}$ функций $\varphi_j \in \tilde{C}_0^\infty(R^n)$ сходится к нулю в $\mathcal{B}_N(R^n)$ и фундаментальна в $W_2^k(R^n)$, то она сходится к нулю и в $\tilde{W}_2^k(R^n)$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — такая последовательность и пусть $\tilde{\varphi}_j = F^{-1}\varphi_j$. Тогда $\tilde{\varphi}_j \in C_0^\infty(R^n)$, $\tilde{\varphi}_j \rightarrow 0$ в $C_N^*(R^n)$ и $\{\tilde{\varphi}_j\}$ фундаментальна в $\tilde{W}_2^k(R^n)$. Нужно показать, что $\tilde{\varphi}_j \rightarrow 0$ в $\tilde{W}_2^k(R^n)$. Из фундаментальности $\{\tilde{\varphi}_j\}$ в $\tilde{W}_2^k(R^n)$ вытекает сходимость этой последовательности в $L_2(R^n) \supset \tilde{W}_2^k(R^n)$. Достаточно показать, что $\|\tilde{\varphi}_j\|_{L_1(R^n)} \rightarrow 0$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(R^n)$. Тогда

$$\left| \int_{R^n} \varphi_j(x) \psi(x) dx \right| \leq \|\varphi_j\|_{C_N^*(R^n)} \|\psi\|_{C_N(R^n)} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $\tilde{\varphi}_j \rightarrow 0$ в $L_2(R^n)$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{R^n} \varphi_j(x) \psi(x) dx = (\varphi, \psi)_{L_1(R^n)}.$$

Следовательно, $(\varphi, \psi)_{L_1(R^n)} = 0$ для любого $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, откуда следует, что $\varphi = 0$, и теорема доказана.

Теорема 4.5. Имеет место вложение $\mathcal{B}_N(R^n) \subset C^{(N)}(R^n)$.

Для доказательства теоремы 4.5 нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 4.2. Пусть $f \in \mathcal{B}_N(R^n)$, $\tilde{f} = F^{-1}f$. Тогда

$$D^\alpha f(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} (-ix)^{\alpha} e^{ip \cdot x} \tilde{f}(x) dx.$$

Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \\ (-ix)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

*) Через $\tilde{C}_0^\infty(R^n)$ обозначается пространство Фурье-образов функций $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить утверждение леммы в двух случаях: $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{f} = \delta_\xi$. В первом случае утверждение очевидно. Пусть $\tilde{f} = \delta_\xi$. Тогда $f(p) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ip \cdot \xi}$, так что

$$D^\alpha f(p) = (2\pi)^{-n/2} (-i\xi)^\alpha e^{-ip \cdot \xi} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot x} \delta(x - \xi) (-ix)^\alpha dx,$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{f} = F^{-1}f$. Тогда при $|\alpha| \leq N$

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(p)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) (-ix)^\alpha e^{-ip \cdot x} dx \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\tilde{f}\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} e^{-ip \cdot x}}{(1+|x|)^N} \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Поэтому оператор I_0 тождественного вложения $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ в $C^{(N)}(\mathbb{R}^n)$ ограничен и может быть продолжен до гомоморфизма $I: \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^{(N)}(\mathbb{R}^n)$. Остается доказать, что $(I\varphi = 0) \Rightarrow (\varphi = 0)$.

Пусть $I\varphi = 0$ и пусть $\{\varphi_j\}$ — последовательность функций из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся в $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ к φ . Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{C^{(N)}(\mathbb{R}^n)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|I\varphi_j\|_{C^{(N)}(\mathbb{R}^n)} = \|I\varphi\| = 0.$$

Обозначим $\tilde{\varphi}_j = F^{-1}\varphi_j$, $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$. Имеем $\tilde{\varphi}_j \rightarrow \tilde{\varphi}$ в $C_N^+(\mathbb{R}^n)$, откуда, в частности, для любого $f \in C_N(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x) dx.$$

Мы покажем, что для любой бесконечно дифференцируемой функции $f \in C_N(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x) dx = 0,$$

откуда и будет следовать, что $\varphi = 0$, так как $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_N(\mathbb{R}^n)$ плотно в $C_N(\mathbb{R}^n)$.

Итак, пусть f — фиксированная бесконечно дифференцируемая функция из $C_N(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Выберем такой номер j_0 , что при $j > j_0$ выполняется неравенство $\|\tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_{j_0}\|_{C_N^*(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Поскольку $\tilde{\varphi}_{j_0}$ есть линейная комбинация функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и δ_ξ -функций, то найдется такое положительное A , что $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_{j_0}(x) g(x) dx = 0$ для любой функции $g \in C_N(\mathbb{R}^n)$,

обращающейся в нуль в шаре $|x| < A$. Пусть $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — функция, совпадающая с f в этом шаре и не превосходящая f по модулю. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f_0(x) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{\varphi}_j(x) - \tilde{\varphi}_{j_0}(x)] [f(x) - f_0(x)] dx, \quad (4.9) \end{aligned}$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_{j_0}(x) [f(x) - f_0(x)] dx = 0.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части формулы (4.9). Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f_0(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) [Ff_0](x) dx \right| \leq \\ &\leq \|\varphi_j\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |[Ff_0](x)| dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $j \rightarrow \infty$. Второе слагаемое в правой части (4.9) можно оценить следующим образом:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{\varphi}_j(x) - \tilde{\varphi}_{j_0}(x)] [f(x) - f_0(x)] dx \right| \leq \varepsilon \|f - f_0\|_{C_N(\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon \|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}.$$

Значит, найдется такой номер $j_1 \geq j_0$, что при $j \geq j_1$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x) dx \right| \leq \varepsilon (1 + 2\|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n)}).$$

А поскольку ε произвольно, то отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x) dx = 0,$$

и теорема доказана.

Таким образом, из теорем 4.4, 4.5 следует, что при $k > \frac{n}{2} + N$

$$W_2^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n) \subset C^N(\mathbb{R}^n).$$

Мы видим, что банахова алгебра $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ находится «между» пространством Соболева, содержащимся в $C^N(\mathbb{R}^n)$, и банаховой алгеброй $C^N(\mathbb{R}^n)$. Так что $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ есть банахова алгебра, более «близкая» к пространству Соболева, чем $C^N(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Показать, что для любого $\varphi \in \mathcal{E}_N^+(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$[F\varphi](p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ip \cdot x} dx.$$

§ 5. δ_ξ -функция Дирака в пространствах Соболева

Выше мы ввели функционал $\delta_\xi \in C^*(R^n)$, который каждой функции g ставит в соответствие ее значение $g(\xi)$ в точке $\xi \in R^n$. По теореме вложения Соболева, при $k > n/2$ сужение функционала δ_ξ на $W_2^k(R^n) \subset C(R^n)$ принадлежит пространству $W_2^{-k}(R^n)$. Это сужение мы будем снова обозначать δ_ξ и называть δ_ξ -*функцией Дирака*.

Мы знаем, что если рассматривать функцию δ_ξ как элемент пространства $C^+(R^n)$, то ее Фурье-образом будет функция $\tilde{\delta}_\xi$:

$$\tilde{\delta}_\xi(p) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ip \cdot \xi}. \quad (5.1)$$

Возникает вопрос, остается ли эта формула справедливой, если рассматривать δ_ξ как элемент пространства Соболева $W_2^{-k}(R^n)$. Чтобы уточнить вопрос, примем следующее соглашение: если функционал f , принадлежащий $W_2^{-k}(R^n)$, определяется формулой

$$\int_{R^n} f(x) \varphi(x) dx = \int g(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S,$$

где g — кусочно непрерывная функция, то мы будем отождествлять функционал f с функцией g и писать $f(x) = g(x)$. В этом смысле функция (5.1) является элементом пространства $\tilde{W}_2^{-k}$ при $k > n/2$.

Пусть δ_ξ есть δ -функция в $W_2^{-k}(R^n)$ и пусть $\tilde{\delta}_\xi = F\delta_\xi$. Покажем, что формула (5.1) справедлива и в этом случае. Пользуясь равенством Парсеваля и очевидным равенством $(F\bar{\varphi})(-p) = (\bar{F\varphi})(p)$, $\varphi \in S$, получаем

$$\varphi(\xi) = \int_{R^n} \delta(x - \xi) \varphi(x) dx = \int_{R^n} \tilde{\delta}_\xi(p) \tilde{\varphi}(-p) dp, \quad \varphi \in S,$$

где $\tilde{\varphi} = F\varphi$. С другой стороны, для любого $\varphi \in S$

$$\varphi(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{ip \cdot \xi} \tilde{\varphi}(p) dp = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-ip \cdot \xi} \tilde{\varphi}(-p) dp.$$

Таким образом, $\tilde{\delta}_\xi$ определяется как функционал на $\tilde{W}_2^k(R^n)$, $k > n/2$, формулой

$$\int_{R^n} \tilde{\delta}_\xi(p) \varphi(p) dp = \int_{R^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ip \cdot \xi} \varphi(p) dp, \quad \varphi \in S,$$

и значит, формула (5.1) справедлива.

Приведем теперь в одномерном случае пример так называемой δ -образной последовательности, т. е. последовательности кусочно непрерывных функций, сходящейся к δ_ξ в $W_2^{-1}(R)$. Для этого

мы выберем такую последовательность $\{\tilde{\delta}_{\varepsilon_j}\}$ функций из $\tilde{W}_{\frac{1}{2}}^{-1}(\mathbb{R})$, чтобы Фурье-прообразы этих функций были кусочно непрерывны и чтобы $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{\varepsilon_j} = \tilde{\delta}_{\varepsilon}$. Тогда в качестве искомой δ -образной последовательности выберем $\{\delta_{\varepsilon_j}\} = \{[F^{-1}\tilde{\delta}_{\varepsilon_j}]\}$. Пусть

$$\tilde{\delta}_{\varepsilon_j}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\rho \cdot \varepsilon} & \text{при } |\rho| < j, \\ 0 & \text{при } |\rho| \geq j. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}_{\varepsilon_j} - \tilde{\delta}_{\varepsilon}\|_{\tilde{W}_{\frac{1}{2}}^{-1}(\mathbb{R})} = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\delta}_{\varepsilon_j} - \tilde{\delta}_{\varepsilon}\| &= \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{W}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = 1} \left| \int_{|\rho| > j} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\rho \cdot \varepsilon} \varphi(\rho) d\rho \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{\tilde{W}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = 1} \int_{|\rho| > j} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\varphi(\rho)| (\rho^2 + 1)^{1/2} (\rho^2 + 1)^{-1/2} d\rho \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sqrt{\int_{|\rho| > j} \frac{1}{\rho^2 + 1} d\rho} \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\sup$ берется по единичной сфере в пространстве $\tilde{W}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Для вычисления прообраза функции δ_{ε_j} нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. *Фурье-прообраз φ абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ кусочно непрерывной функции $\tilde{\varphi} \in \tilde{W}_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$ может быть вычислен по формуле*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho \cdot x} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho. \quad (5.2)$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}$ — последовательность функций из S , сходящаяся к $\tilde{\varphi}$ по норме пространства $\tilde{W}_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\varphi_j = F^{-1}(\tilde{\varphi}_j)$. Требуется доказать, что для любого $\psi \in S$

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho \cdot x} \tilde{\varphi}_j(\rho) d\rho &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho \cdot x} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho, \quad (5.3) \end{aligned}$$

или, меняя в (5.3) порядок интегрирования,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(\rho) d\rho \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\rho \cdot x} \psi(x) dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \psi(x) dx. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Равенство (5.4) можно переписать в виде

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_j(p) \tilde{\psi}(-p) dp = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(p) \tilde{\psi}(-p) dp,$$

что и завершает доказательство.

Итак,

$$\delta_{\xi_j}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip \cdot x} \delta_{\xi_j}(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-j}^j e^{ip \cdot (x - \xi)} dp = \frac{2}{\pi} \frac{\sin j(x - \xi)}{x - \xi}.$$

Задача. Построить δ -образную последовательность в n -мерном случае.

Задача. Показать, что последовательность $\{h_j\}$ функций вида

$$h_j(x) = \begin{cases} j & \text{при } |x - \xi| < 1/2j, \\ 0 & \text{при } |x - \xi| \geq 1/2j \end{cases}$$

сходится к δ_{ξ} по норме пространства $W_2^{-1}(\mathbb{R})$.

Обобщенная функция δ_0 называется просто δ -функцией и обозначается символом δ . Из определения δ_{ξ} -функции следует, что

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - \xi) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x + \xi) dx$$

для любого $\varphi \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$, $k > n/2$. Если $\{\delta_j\}$ — последовательность функций из S , сходящаяся к δ -функции по норме пространства $W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$, то последовательность функций $\{\delta_{\xi_j}\}$:

$$\delta_{\xi_j}(x) = \delta_j(x - \xi),$$

фундаментальная по норме пространства $W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)$, сходится к обобщенной функции δ_{ξ} :

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\xi_j}(x) \varphi(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_j(x - \xi) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_j(x) \varphi(x + \xi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x + \xi) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - \xi) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Этот факт оправдывает принятую нами запись

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\xi}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - \xi) \varphi(x) dx.$$

§ 6. Гладкие функции в пространствах Соболева

Каждой непрерывной функции $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ можно поставить в соответствие функционал на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, который переводит элемент $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в число $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx$. Этот функционал мы будем

также обозначать через φ и будем отождествлять его здесь

с функцией φ ; очевидно, что различным функциям φ отвечают различные функционалы на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Будем рассматривать φ как функционал в $W_{\frac{1}{2}}^{-k}(\mathbb{R}^n)$; если этот функционал ограничен, то его можно единственным образом продолжить до элемента пространства $[W_{\frac{1}{2}}^{-k}(\mathbb{R}^n)]^* = W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, мы отождествляем некоторые из непрерывных функций с элементами пространства $W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$ и для каждой непрерывной функции приобретает смысл вопрос, принадлежит ли эта функция пространству $W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 6.1. *На множестве S норма в пространстве $W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ эквивалентна норме*

$$\|\varphi\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^2,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Доказательство. Эквивалентность норм $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_k$ по определению означает существование таких констант c_1 и c_2 , что для любого $\varphi \in S$

$$\|\varphi\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|\varphi\|_k, \quad \|\varphi\|_k \leq c_2 \|\varphi\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\tilde{\varphi} = F\varphi$. Тогда

$$\|\varphi\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\tilde{\varphi}\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + p^2)^k |\tilde{\varphi}(p)|^2 dp,$$

$$\|\varphi\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |(ip)^\alpha \tilde{\varphi}(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(p)|^2 \sum_{|\alpha| \leq k} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} dp.$$

Очевидно, что

$$(1 + p^2)^k = \sum_{i=0}^k C_i' (p^2)^i \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}.$$

С другой стороны,

$$p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} \leq |p|^{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} = |p|^{2|\alpha|},$$

так что

$$\sum_{|\alpha| \leq k} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} \leq \sum_{i=0}^k |p|^{2i} \leq (1 + p^2)^k,$$

и лемма доказана.

Пусть теперь функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема k раз. Положим, так же как и для функций из S :

$$\|\varphi\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Имеет место следующий критерий.

Теорема 6.1. *Функция φ , непрерывно дифференцируемая k раз, принадлежит пространству $W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\|\varphi\|_k < \infty$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$, т. е. существует такое M , что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx \right| \leq M \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $|\alpha| \leq k$. Тогда, интегрируя по частям, получаем, что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [D^\alpha \varphi(x)] f(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) D^\alpha f(x) dx \right| \leq M \|D^\alpha f\|_{W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)} = \\ &= M \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} |\tilde{f}(p)|^2 (1+p^2)^{-k} dp} \leq M \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

так как

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}}{(1+p^2)^k} \leq 1.$$

Пусть ψ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) f(x) dx \right| \leq M \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx \leq M^2.$$

Пусть функция $e_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $0 \leq e_m(x) \leq 1$, $e_m(x) = 1$ при $|x| \leq m$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq m} |\psi(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e_m(x) \psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e_m^2(x) \overline{\psi(x)} dx \leq \\ &\leq M \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} e_m^4(x) |\psi(x)|^2 dx} \leq M \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |e_m(x) \psi(x)|^2 dx}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|e_m \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq M, \quad \int_{|x| \leq m} |\psi(x)|^2 dx \leq \|e_m \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq M^2.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем требуемую оценку:

$$\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Применяя полученную оценку к функциям $D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq k$, получаем, что $\|\varphi\|_k < \infty$.

Обратно, пусть $\|\varphi\|_k < \infty$. Требуется получить оценку

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx \right| \leq c \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пусть функция $e \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $e(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Положим $e_m(x) = e(x/m)$ и $m \geq 1$. Тогда $e_m(x) = 1$ при $|x| \leq m$ и $D^\alpha e_m(x) = m^{-|\alpha|} D^\alpha e(\xi)|_{\xi=x/m}$, так что все производные порядка $\leq k$ функций e_m ограничены равномерно по m :

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ m \geq 1, |\alpha| \leq k}} |D^\alpha e_m(x)| = M_1 < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\|e_m \varphi\|_k \leq M_2 \|\varphi\|_k,$$

где M_2 — константа, не зависящая от m . Из леммы 6.1 следует, что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e_m(x) \varphi(x) f(x) dx \right| \leq M_3 \|\varphi\|_k \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)},$$

где M_3 не зависит от m . Остается заметить, что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ найдется такое $m \geq 1$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e_m(x) \varphi(x) f(x) dx,$$

и теорема доказана.

Пусть $[W_2^k(\mathbb{R}^n)]^0$ — векторное пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ комплексных функций, для которых $\|\varphi\|_k < \infty$. Мы получили алгебраический обратимый гомоморфизм

$$I: [W_2^k(\mathbb{R}^n)]^0 \rightarrow W_2^k(\mathbb{R}^n).$$

С другой стороны, при $0 \leq l < k - \frac{n}{2}$ по теореме вложения Соболева существует обратимый гомоморфизм

$$I: W_2^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^{(l)}(\mathbb{R}^n),$$

сужение которого на S является тождественным отображением.

Теорема 6.2. Если целое $l \geq 0$ удовлетворяет условию $k > l + \frac{n}{2}$, то отображение I осуществляет вложение пространства $[W_2^k(\mathbb{R}^n)]^0$ в пространство $C^{(l)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in [W_2^k(\mathbb{R}^n)]^0$, $\bar{\varphi} = I\varphi$. Достаточно показать, что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\varphi}(x) f(x) dx.$$

Пусть $\{\varphi_m\}$ — такая последовательность функций из S , что

$$\sup_{\substack{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbb{R}^n)} = 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x) - \varphi_m(x)] f(x) dx \right| \rightarrow 0,$$

т. е. $\varphi_m \rightarrow \varphi$ в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Но I есть гомоморфизм; поэтому $\varphi_m = I\varphi_m \rightarrow I\varphi$ в $C^{(k)}(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в $C(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, для любого $f \in [C(\mathbb{R}^n)]^*$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} [I\varphi(x)] f(x) dx.$$

В частности, это верно для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тем самым теорема доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(x, t)$ двух переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Предположим, что при любом $t \in (a, b)$ отображение $\Phi(t): x \rightarrow \varphi(x, t)$ есть k раз непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \varphi(x, t) \right|^2 dx < \infty.$$

Тогда $\Phi(t)$ есть элемент пространства $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ или, иными словами, Φ есть функция на (a, b) со значениями в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что функция Φ порождена комплексной функцией φ . Приведем удобное достаточное условие непрерывности функции Φ со значениями в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, порожденной комплексной функцией φ .

Теорема 6.3. Пусть функция $\varphi: \mathbb{R}^n \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема k раз по первому аргументу и удовлетворяет следующим условиям:

а) для всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leq k$, функция

$$(x, t) \rightarrow \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t \partial x^\alpha} \varphi(x, t)$$

непрерывна по t при фиксированном x ;

б) для всех α , удовлетворяющих условию $|\alpha| \leq k$, и для $t_0 \in (a, b)$ существует такая функция $\psi_{\alpha, t_0} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, что при любом t из некоторой окрестности точки t_0 выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t \partial x^\alpha} \varphi(x, t) \right| \leq |\psi_{\alpha, t_0}(x)|.$$

Тогда функция Φ со значениями в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, порожденная функцией φ , непрерывна.

Доказательство. Пусть $t_0 \in (a, b)$. Требуется показать, что для любого α , удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq k$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D^\alpha \Phi(t_0 + h) - D^\alpha \Phi(t_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

ибо это соотношение эквивалентно сходимости $\Phi(t_0 + h)$ к $\Phi(t_0)$ по норме $\|\cdot\|_k$. Имеем:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x, t+h)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x, t)}{\partial x^\alpha} = h \frac{\partial^{|\alpha|+1} \varphi(x, t+\theta(x)h)}{\partial t \partial x^\alpha},$$

где $0 \leq \theta(x) \leq 1$. Поэтому при достаточно малых h

$$\|D^a \Phi(t_0 + h) - D^a \Phi(t_0)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq |h| \|\psi_{a, t_0}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x, t) = \frac{x^l}{(x-i)^m} e^{ix^m - \delta t},$$

где $l \geq 0$, $m \geq 0$ — целые, и пусть $\delta > 0$. Легко видеть, что при $m > l$, $k < m - l$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, t)}{\partial x^k} \right|^2 dx < \infty,$$

так что при $m > l$ функция φ порождает функцию Φ со значениями в $W_2^{m-l-1}(\mathbb{R})$. При помощи теоремы 6.3 убеждаемся в том, что при $m > l + 2$ функция Φ непрерывна как функция со значениями в $W_2^{m-l-3}(\mathbb{R})$. В частности, для любых $a, b \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_a^b \Phi(t) dt,$$

который понимается как предел соответствующих римановых сумм по норме пространства $W_2^{m-l-3}(\mathbb{R})$. Если потребовать дополнительно, чтобы выполнялось неравенство $m > l + 3$, то будет справедлива следующая формула:

$$\left[\int_a^b \Phi(t) dt \right](x) = \int_a^b \varphi(x, t) dt.$$

Действительно, в этом случае $W_2^{m-l-3}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$; поэтому сходимость римановых сумм для интеграла в левой части влечет их сходимость в $C(\mathbb{R})$. А поскольку интегральные суммы для обоих интегралов совпадают как функции от x и сходимость в $C(\mathbb{R})$ влечет поточечную сходимость, то совпадают и интегралы в левой и правой частях как функции от x .

Далее, если $\|\Phi(t)\|_{W_2^{m-l-3}(\mathbb{R})} \leq f(t)$, где функция f интегрируема на бесконечности, то существует, в смысле сходимости по норме в $W_2^{m-l-3}(\mathbb{R})$ интеграл $\int_a^\infty \Phi(t) dt$, так как

$$\left\| \int_c^d \Phi(t) dt \right\| \leq \int_c^d \|\Phi(t)\| dt \leq \int_c^d f(t) dt \rightarrow 0$$

при $c, d \rightarrow +\infty$. При этом можно утверждать также, что для

любого $x \in \mathbb{R}$ интеграл $\int_0^\infty \Phi(x, t) dt$ сходится и справедлива формула

$$\left[\int_0^\infty \Phi(t) dt \right] (x) = \int_a^\infty \Phi(x, t) dt,$$

которая доказывается предельным переходом при $b \rightarrow +\infty$ в формуле, полученной ранее для интегралов с конечными пределами; здесь снова используется вложение $W_{\frac{1}{2}}^{m-l-3}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$.

Легко видеть, что рассматриваемая функция Φ при $t \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(t)\|_{W_{\frac{1}{2}}^{m-l-3}(\mathbb{R})} \leq P(t) e^{-\alpha t},$$

где P — некоторый полином. Следовательно, интеграл

$$I_\alpha = \int_0^\infty \Phi(t) dt$$

существует, причем

$$I_\alpha(x) = \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2 t^2 - \alpha t} dt.$$

Из теоремы вложения Соболева теперь следует, что если существует $I_0 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I_\alpha$, где предел понимается в смысле сходимости в $W_{\frac{1}{2}}^{s+1}(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, то

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2 t^2 - \alpha t} dt = \\ &= \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2 t^2} dt = \frac{e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{l-1} \operatorname{sign} x}{(x-i)^m}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы показать, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0}$ существует, достаточно доказать, что последовательность $\{I_\alpha\}$ фундаментальна по норме в $W_{\frac{1}{2}}^{s+1}(\mathbb{R})$, а для этого, в свою очередь, достаточно показать, что при $0 \leq j \leq s+1$ существует предел $\lim_{\alpha \rightarrow +0} d^j I_\alpha / dx^j$, понимаемый в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R})$. Имеем:

$$\frac{d^j I_\alpha(x)}{dx^j} = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j \cdot \frac{x^l}{(x-i)^m} e^{ix^2 t^2 - \alpha t} \right] dt.$$

Легко видеть, что $\frac{d^j I_\alpha(x)}{dx^j}$ есть линейная комбинация интегралов

вида

$$I_{j, \mu, \nu}(\alpha, x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{2\nu} x^{l+2\nu+\mu-j}}{(x-i)^{m+\mu}} e^{ix^2 t^2 - \alpha t} dt,$$

где $0 \leq \mu \leq j$, $0 \leq \nu \leq j - \mu$.

Обозначим $\int_0^{\infty} t^{2\nu} e^{ix^2 t^2 - \alpha t} dt = I_{\nu}(\alpha)$. Интеграл $I_{\nu}(\alpha)$ преобразуется к следующему виду:

$$I_{\nu}(\alpha) = (1+i)^{2\nu+1} \int_0^{\infty} y^{2\nu} e^{-2x^2 y^2} e^{-\alpha y(1+i)} dy.$$

Используя неравенство

$$|1 - e^{-\alpha y(1+i)}| \leq \alpha \sqrt{2} y,$$

справедливое при $y \geq 0$, получаем следующую оценку:

$$|I_{\nu}(\alpha) - I_{\nu}(0)| \leq 2^{\nu+1} \alpha \int_0^{\infty} y^{2\nu+1} e^{-2x^2 y^2} dy = c_{\nu} \alpha / x^{2\nu+2},$$

где c_{ν} не зависит от α и x . Итак, имеем

$$|I_{j, \mu, \nu}(\alpha, x) - I_{j, \mu, \nu}(0, x)| \leq c_{\nu} \alpha \frac{|x|^{l-2+\mu-j}}{(x^2+1)^{m/2+\mu/2}}.$$

Выберем $s \leq l-3$; тогда $l-2+\mu-j \geq 0$ для любых $j \leq s+1$, $0 \leq \mu \leq j$. При этих же условиях $(m+\mu) - (l-2+\mu-j) \geq m-l+2$. Поэтому

$$|I_{j, \mu, \nu}(\alpha, x) - I_{j, \mu, \nu}(0, x)| \leq c \cdot \alpha \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{m-l}{2}+1}} = c \alpha f(x),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что предел $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{d^l I_{\alpha}}{dx^l}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ существует.

Итак, окончательно получаем следующий результат.

Пусть $m \geq l+4 \geq 7$, $0 \leq s \leq l-3$, $s \leq m-l-3$ и пусть функция $\Phi_{\alpha}(t)$ есть функция со значениями в $W_2^{s+1}(\mathbb{R})$, индуцированная функцией

$$\varphi(x, t) = \frac{x^l}{(x-i)^m} e^{ix^2 t^2 - \alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Тогда

$$\left[\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \Phi_{\alpha}(t) dt \right](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \frac{x^{l-1} \operatorname{sign} x}{(x-i)^m}.$$

Все пределы в левой части: предел римановых сумм, предел $\int_0^{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ и $\lim_{\alpha \rightarrow +0}$ понимаются в смысле сходимости в $W_2^{s+1}(\mathbb{R})$.

В этой главе мы строим операторное исчисление, соответствующее μ -структуре (см. Введение) на алгебре коммутирующих неограниченных операторов в банаховом пространстве B . Нашей целью будет выяснить, насколько широкий класс операторов образует множество M . Кроме того, мы выясним, каким символам отвечают ограниченные операторы в B . Это поможет нам построить расширение (по замыканию) класса символов из C^∞ .

Для простоты здесь приводится изложение, независимое от теории μ -структур. Однако оказывается, что введенное в этой главе понятие символа фактически совпадает с аналогичным понятием для μ -структур.

В качестве иллюстрации к понятию функции от оператора рассмотрим функцию от оператора A умножения на независимую переменную x в пространстве Соболева $W_2^k = W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно убедиться в том, что если $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n)$, то в этом случае можно естественным образом определить функцию φ от оператора A умножения на x — этот оператор будет оператором умножения на $\varphi(x)$. Легко видеть, что $\varphi(A)$ есть ограниченный оператор в W_2^k . Если же k -я производная от $\varphi(x)$ неограничена, то и оператор умножения на $\varphi(x)$ неограничен в W_2^k .

С другой стороны, оператор A умножения на x в W_2^k обладает следующими свойствами:

1) он порождает однопараметрическую группу операторов умножения на семейство функций e^{ixt} ; 2) этот оператор умножения удовлетворяет условию: для любого $g \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$, где $s \geq k$, справедливо неравенство

$$\|e^{ixt}g(x)\|_{W_2^k} \leq c(1+|t|^k)\|g(x)\|_{W_2^s},$$

т. е.

$$\|e^{ixt}\|_{W_2^s}^{W_2^k} \leq c(1+|t|^k),$$

$$c = \text{const.}$$

Если обратиться к соответствующему эволюционному уравнению, то можно сформулировать условия 1), 2) следующим образом.

Существует и единственно решение u эволюционного уравнения

$$i \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad (*)$$

$$u(0) = g, \quad g \in B_2, \quad B_2 = W_2^1$$

(как непрерывная функция от t со значениями в $B_1 = W_2^k, k \leq l$); удовлетворяющее условию

$$\|u(t)\|_{B_1} \leq c(1 + |t|^s) \|u(0)\|_{B_2}, \quad (**)$$

для всех $u(0) \in B_2 = W_2^1$.

Связь, существующая между числом s в оценке решения эволюционного уравнения вида $(*)$ (где в качестве заданного оператора стоит в данном случае оператор умножения на x) и ограниченностью оператора умножения на $\varphi(x)$, как мы увидим ниже, распространяется на широкий класс операторов.

Условие $(**)$ на рост решения эволюционного уравнения, порождаемого оператором A , является необходимым, если потребовать, чтобы функция от A , дифференцируемая конечное число k раз, была ограниченным оператором. Если же отказаться от этого требования и ограничиться рассмотрением только бесконечно дифференцируемых функций от оператора, то условие $(**)$ на рост может быть существенно ослаблено.

Рассматривая оператор дифференцирования в пространстве $C(R)$ непрерывных функций, ограниченных на бесконечности (или в пространстве C_N непрерывных функций, растущих не быстрее $|x|^N$), нетрудно убедиться в том, что «функции от этого оператора» образуют алгебру $\mathcal{B}_0$ (соответственно, алгебру $\mathcal{B}_N$). Этот пример показывает, что для рассмотрения алгебры функций от операторов класса, включающего оператор дифференцирования в пространстве непрерывных функций, неизбежно использование алгебры $\mathcal{B}_0$ (а в случае неограниченных непрерывных функций — и $\mathcal{B}_N$). Этими двумя примерами мы хотим подчеркнуть «необходимость» использования условия на рост типа $(**)$ и алгебры $\mathcal{B}_N$.

Наконец, рассмотрим оператор A умножения на $x + iy$ в $W_2^k(R^2)$. Естественно определить k раз дифференцируемую функцию от $x + iy$ как функцию $\varphi(x, y)$ от двух аргументов x и y . Каждый из операторов $x = \operatorname{Re} A$ и $y = \operatorname{Im} A$ удовлетворяет очевидно, условию $(**)$, и при этом $\operatorname{Re} A$ коммутирует в этом случае с $\operatorname{Im} A$.

Мы введем ниже операторы, удовлетворяющие условию типа $(**)$, и назовем их производящими операторами степени s . Далее мы рассмотрим операторы вида $A_1 + iA_2$, где A_1 и A_2 — производящие операторы степени s и где A_1 коммутирует с A_2 . Такие операторы мы назовем регулярными, а функции от них будем понимать как функции от A_1 и A_2 .

В § 8 мы докажем теорему, которая показывает «достаточность» условия типа (**). Именно, мы докажем, что в случае чисто дискретного спектра наличие у оператора полной системы собственных и присоединенных элементов с не превосходящим N числом присоединенных элементов, отвечающих данному собственному значению, эквивалентно регулярности оператора (степени N). Таким образом, мы покажем (по крайней мере для дискретного спектра), сколь широк класс регулярных операторов.

Для случая, когда спектр не является дискретным, в § 9 для регулярного оператора вводится понятие системы собственных и присоединенных обобщенных векторов и доказывается теорема о полноте этой системы. Однако такого понятия для произвольных операторов пока ввести не удалось, и поэтому об обратной теореме речи не идет.

§ 1. Алгебра функций от производящего оператора

Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, наделенное нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причем $c\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_2$, $c = \text{const}$. И пусть B_1 — пополнение пространства E по норме $\|\cdot\|_1$, а B_2 — пополнение E по норме $\|\cdot\|_2$.

В этом случае условимся писать $B_1 \preceq B_2$.

Пусть $u(t)$ — функция со значениями в E , определенная на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая уравнению

$$i \frac{du}{dt} - Au = 0 \quad (1.1)$$

и начальному условию

$$u(0) = g, \quad g \in E. \quad (1.2)$$

Здесь A — линейный оператор $A: E \rightarrow E$, а производная $\frac{du}{dt} \in E$ понимается в том смысле, что

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} - \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\|_1 \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение. Гомоморфизм $A: E \rightarrow E$ называется производящим оператором, если для любого $g \in E$ решение $u(t) \in E$ задачи (1.1), (1.2) существует и единственно в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$\|u(t)\|_2 \leq c(1 + |t|)^k,$$

где $c > 0$, $k \geq 0$ — некоторые постоянные.

Будем говорить, что A — производящий оператор степени $s \geq 0$ с определяющей парой пространств (B_1, B_2) , если существует такая константа c_1 , что

$$\|u(t)\|_2 \leq c_1(1 + |t|)^s \|g\|_1 \quad (1.3)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ и любого $g \in E$.

Если $B_1 = B_2 = B$, то будем говорить, что A — производящий оператор в банаховом пространстве B .

Замечание. Заменяя в случае необходимости нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на эквивалентные нормы, можем считать, что в этом определении $s=1$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Отображения $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, $U(t): E \rightarrow E$, определяемые равенством $U(t)g = u(t)$, где g и U удовлетворяют условиям определения, являются гомоморфизмами пространства E и образуют однопараметрическую группу, т. е.*

$$U(t_2)U(t_1) = U(t_1 + t_2).$$

Доказательство. Пусть $u(t) = U(t)g$, $u_1(t) = U(t)u(t_1)$. По определению, $u(t+t_1) = U(t+t_1)g$. Значит, нужно показать только, что $u(t_1+t) = u_1(t)$. Обозначив $u(t_1+t)$ через $v(t)$, получим:

$$v(0) = u(t_1), \quad i \frac{dv}{dt} = Av.$$

Так как u_1 является решением той же задачи Коши, то в силу единственности, $v(t) = u_1(t)$, что и требовалось доказать.

Определение. Будем называть семейство $\{U(t)\}$ группой, порожденной производящим оператором A .

Лемма 1.2. $AU(t) = U(t)A$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| i \frac{U(t+h) - U(t)}{h} g - AU(t)g \right\|_1 = 0.$$

Полагая $t=0$ и учитывая, что $U(0)g = g$, получаем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| i \frac{U(h) - 1}{h} g - Ag \right\|_1 = 0.$$

Применим к выражению, стоящему под $\|\cdot\|_1$, $U(t)$; тогда из (1.3) следует, при $h \rightarrow 0$,

$$\left\| U(t) \left(i \frac{U(h) - 1}{h} g - Ag \right) \right\|_2 \leq (1 + |t|^s) \left\| i \frac{U(h) - 1}{h} g - Ag \right\|_1 \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$i U(t) \frac{U(\Delta) - 1}{\Delta} g = U(t) Ag + \sigma(\Delta),$$

где $\|\sigma(\Delta)\|_2 \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. С другой стороны,

$$i U(t) \frac{U(\Delta) - 1}{\Delta} g = i \frac{U(t+\Delta) - U(t)}{\Delta} g = AU(t)g + \delta(\Delta),$$

где $\|\delta(\Delta)\|_1 \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\| [U(t)A - AU(t)]g \|_2 = \|\delta(\Delta) - \sigma(\Delta)\|_2 \rightarrow 0$$

при $\Delta \rightarrow 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 1.3. Пусть A — производящий оператор степени N с определяющей парой пространств (B_1, B_2) , пусть $\{U(t)\}$ — группа, порожденная A , и $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Тогда элемент $I[\varphi; g]$ пространства B_2^{**} , определяемый формулой

$$I[\varphi; g](h^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) h^*(U(t)g) dt, \quad h^* \in B_2^*, \tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi,$$

принадлежит B_2 , причем

$$\|I[\varphi; g]\|_{B_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|g\|_{B_1}.$$

Доказательство. Пусть $h^* \in B_2^*$. Имеем

$$\begin{aligned} |I[\varphi; g](h^*)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) h^*(U(t)g) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|h^*(U(t)g)|}{(1+|t|)^N}. \end{aligned}$$

По определению производящего оператора имеем $\|U(t)g\|_{B_2} \leq (1+|t|)^N \|g\|_{B_1}$; поэтому

$$|I[\varphi; g](h^*)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|h^*\|_{B_2^*} \|g\|_{B_1}.$$

Следовательно,

$$\|I[\varphi; g]\|_{B_2^{**}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|g\|_{B_1}. \quad (1.4)$$

Остается доказать, что $I[\varphi; g] \in B_2$. Если $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$I[\varphi; g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t)g dt.$$

Здесь интеграл, понимаемый как интеграл Римана от функции со значениями в B_2 , есть элемент из B_2 . Если $\tilde{\varphi} = \delta_\xi$, то снова $I[\varphi; g] \in B_2$, так как

$$I[\varphi; g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(\xi)g.$$

Следовательно, при $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ имеем $I[\varphi; g] \in B_2$. Из (1.4) следует, что норма оператора, действующего из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ в B_2 и переводящего φ в $I[\varphi; g]$, ограничена числом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{B_1}$. Из замкнутости B_2 в B_2^{**} получаем, что $I[\varphi; g] \in B_2$ при любом $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$.

В этом параграфе всюду дальше предполагается, что A — производящий оператор степени N с определяющей парой про-

пространств B_1, B_2 , а $\{U(t)\}$ — группа гомоморфизмов, порожденная оператором A .

Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Обозначим через $\varphi_*(A)$ оператор $\varphi_*(A)g \stackrel{\text{def}}{=} I[\varphi; g]$ из B_1 в B_2 с областью определения E . В силу леммы 1.3 имеем

$$\|\varphi_*(A)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}.$$

Лемма 1.4. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, где $\mathcal{F}(x) = x\varphi(x)$. Тогда $\varphi_*(A)A = \mathcal{F}_*(A)$.

Доказательство. По определению, для любых $h^* \in B_1^*$ и $q \in E$ имеем

$$h^*[\varphi_*(A)Aq] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) h^*[U(t)Aq] dt,$$

$$h^*[\mathcal{F}_*(A)q] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}(t) h^*[U(t)q] dt,$$

где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ — Фурье-прообразы функций φ и $\mathcal{F}$.

Покажем, что для любой функции $\tilde{g}$, принадлежащей пространству $C_N(\mathbb{R})$ вместе со своей первой производной, справедлива формула

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \tilde{g}'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}(t) \tilde{g}(t) dt. \quad (1.5)$$

Сначала заметим, что формулу (1.5) достаточно доказать для случая, когда $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_N(\mathbb{R})$, поскольку при $\tilde{g} \in C_N(\mathbb{R})$, $\tilde{g}' \in C_N(\mathbb{R})$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая бесконечно дифференцируемая функция $\tilde{h}$, что

$$\|\tilde{g} - \tilde{h}\|_{C_N(\mathbb{R})} < \varepsilon, \quad \|\tilde{g}' - \tilde{h}'\|_{C_N(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Итак, пусть $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_N(\mathbb{R})$, $\tilde{g}' \in C_N(\mathbb{R})$. Рассмотрим последовательность $\{\tilde{g}_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$, обладающую следующими свойствами:

$$\text{а) } \tilde{g}_n(t) = \tilde{g}(t) \quad \text{при } t \in (-n, n),$$

$$\text{б) } \|\tilde{g}_n - \tilde{g}\|_{C_N(\mathbb{R})} \leq c_1, \quad \|\tilde{g}'_n - \tilde{g}'\|_{C_N(\mathbb{R})} \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Тогда для любого элемента $\tilde{\Phi} \in C_N^*(\mathbb{R})$ справедливы соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}_n(t) dt, \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}'_n(t) dt. \quad (1.7)$$

Действительно, пусть $\tilde{\Phi} = \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}_j$, $\tilde{\Phi}_j \in F^{-1}\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем такой номер j_0 , что $\|\tilde{\Phi}_j - \tilde{\Phi}\| < \varepsilon$ при $j \geq j_0$. Пусть носитель функции Φ_{j_0} содержится в интервале $(-n_0, n_0)$. Тогда при $n \geq n_0$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) (\tilde{g}(t) - \tilde{g}_n(t)) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Phi}(t) - \tilde{\Phi}_{j_0}(t)) (\tilde{g}(t) - \tilde{g}_n(t)) dt \right| \leq c\varepsilon, \quad c = \text{const.}$$

Для любых $\tilde{f} \in F^{-1}\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $\tilde{h} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \tilde{h}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(-t) dt, \quad (1.8)$$

где $f = F\tilde{f}$, $h = F\tilde{h}$. Из включения $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ и плотности $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ в $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ следует, что формула (1.8) справедлива для любого $\tilde{f} \in C_N^+(\mathbb{R})$. Значит, можно переписать формулы (1.6) и (1.7) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) g_n(-x) dx, \quad (1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) G_n(-x) dx, \quad (1.10)$$

где $\Phi = F\tilde{\Phi}$, $g_n = F\tilde{g}_n$, $G_n = F\tilde{g}'_n$; при этом $G_n(x) = ixg_n(x)$. Подставляя $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}$, в (1.10), а в (1.9) $\tilde{\Phi} = \tilde{\mathcal{F}}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}'(t) dt &= -i \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) xg_n(-x) dx = \\ &= -i \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x) g_n(-x) dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}(t) \tilde{g}(t) dt \end{aligned}$$

и формула (1.5) доказана.

Пользуясь формулой (1.5), получаем

$$\begin{aligned} h^* [\mathcal{F}_*(A) q] &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \frac{d}{dt} h^* [U(t) q] dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) h^* [AU(t) q] dt = h^* [\Phi_*(A) Aq]. \end{aligned}$$

Лемма 1.4 доказана.

Следствие. Пусть $\mathcal{F}_j \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, где $\mathcal{F}_j(x) = x^j \mathcal{F}_0(x)$, $i = 0, 1, \dots, k$. Тогда $\mathcal{F}_{0*}(A) A^k = \mathcal{F}_{k*}(A)$.

Доказательство состоит в последовательном применении леммы 1.4 к функциям $\varphi = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k-1}$.

Оценим теперь норму оператора $(A - z)^{-1}$.

Лемма 1.5. Оператор $[A - (a + ib)]^{-1}$ существует при $b \neq 0$, и справедлива оценка

$$\| [A - (a + ib)]^{-1} \|_{B_1}^{B_2} \leq \frac{c}{|b|} + \frac{c'}{|b|^{N+1}}, \quad (1.11)$$

где c и c' — некоторые константы, $\| \cdot \|_{B_1}^{B_2}$ — норма оператора, действующего из B_1 в B_2 .

Доказательство. Пусть $b \neq 0$. Обозначим $z = a + ib$. Поскольку $\operatorname{Im} z \neq 0$, то функция $\varphi: \varphi(x) = (x - z)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{W}_2^k(\mathbb{R})$ при любом $k \in \mathbb{R}$, так что $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. А так как $1 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, то и функция $\psi: \psi(x) = x(x - z)^{-1} = z(x - z)^{-1} + 1$ принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. В силу предыдущей леммы, $\varphi_*(A) A = (z\varphi_*)(A) + 1_E$, где 1_E — тождественное отображение E на себя. Таким образом,

$$\varphi_*(A) (A - z) = 1_E,$$

т. е. оператор $(A - z)$ имеет обратный:

$$(A - z)^{-1} = \varphi_*(A) |_{R(A - z)}.$$

При этом

$$\| (A - z)^{-1} \|_{B_1}^{B_2} \leq \| \varphi_*(A) \|_{B_1}^{B_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| \varphi \|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}.$$

Положим $\varphi_0(x) = \frac{1}{x - i|b|}$. Тогда $\| \varphi \|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} = \| \varphi_0 \|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}$.

Далее, полагая $\tilde{\varphi}_0 = F^{-1}\varphi_0$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{x - i}$, $\tilde{\varphi}_1 = F^{-1}\varphi_1$, получаем для любого $g \in C_N(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_0(t) g(t) dt = \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(t) g\left(\frac{t}{|b|}\right) dt.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left| g\left(\frac{t}{|b|}\right) \right|}{(1 + |t|)^N} &\leq \| g \|_{C_N(\mathbb{R})} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{1 + |t|}{1 + |bt|} \right)^N = \\ &= \| g \|_{C_N(\mathbb{R})} \max \left\{ 1, \frac{1}{|b|^N} \right\}, \end{aligned}$$

то

$$\| \varphi_0 \|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \leq \| \varphi_1 \|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \max \left\{ \frac{1}{|b|}, \frac{1}{|b|^{N+1}} \right\},$$

откуда и следует (1.11). Тем самым лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 1.6. Оператор $[A - (a + ib)]^{-k}$, $k > 0$, удовлетворяет оценке

$$\| [A - (a + ib)]^{-k} \|_{B_1}^{B_2} \leq \frac{c_k}{|b|^k} + \frac{c_k^1}{|b|^{k+N}},$$

где c_k и c_k^1 — некоторые константы.

Доказательство. Очевидно, что при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $0 \leq j < k$ функция $\varphi_j(x) = x^j (x - z)^{-k}$ принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Поскольку $1 \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$, то отсюда следует, что и функция

$$\varphi_k(x) = x^k (x - z)^{-k} = 1 - \frac{(x - z)^k - x^k}{(x - z)^k} = 1 - \sum_{i=1}^k C_k^i (-1)^i z^i x^{k-i} (x - z)^{-k}$$

принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Поэтому в силу следствия из леммы 1.4

$$\varphi_{0*}(A)(A - z)^k g = g$$

для всех $g \in E$. Следовательно, $(A - z)^{-k} = \varphi_{0*}(A)|_{R_{(A-z)^k}}$, откуда

$$\begin{aligned} \|(A - z)^{-k}\|_{B_1}^{B_2} &\leq \|\varphi_{k*}(A)\|_{B_1}^{B_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi_0\|_{\mathcal{B}_N(\mathbf{R})} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\bar{\varphi}_0\|_{\mathcal{B}_N(\mathbf{R})} \max \left\{ \frac{1}{|b|^k}, \frac{1}{|b|^{N+k}} \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{\varphi}_0(x) = (x - i)^{-k}$. Таким образом, лемма доказана. Заметим, что утверждение этой леммы непосредственно из леммы 1.5 не вытекает.

Поставим в соответствие каждому вектору $h \in E$ оператор $\tilde{h}: \mathcal{B}_N(\mathbf{R}) \rightarrow B_2$ при помощи формулы

$$\tilde{h}\varphi = \varphi_*(A)h.$$

Оператор $\tilde{h}$ определен на всем пространстве $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$ и ограничен:

$$\|\tilde{h}\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R}), \varphi \neq 0} \frac{\|\varphi_*(A)h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbf{R})}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_1. \quad (1.12)$$

Введем в E норму $\|\cdot\|_{\text{mid}}$ по формуле

$$\|h\|_{\text{mid}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\pi} \|\tilde{h}\|.$$

Полношение E по этой норме назовем *промежуточным банаховым пространством* B_{mid} .

Лемма 1.7. Справедливы неравенства

$$\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|_{\text{mid}} \geq \|\cdot\|_2,$$

так что

$$B_1 \preceq B_{\text{mid}} \preceq B_2.$$

Доказательство. Из (1.12) сразу следует, что $\|\cdot\|_{\text{mid}} \leq \|\cdot\|_1$. С другой стороны,

$$\|h\|_{\text{mid}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}), \varphi \neq 0} \frac{\sqrt{2\pi} \|\varphi_*(A)h\|_2}{\|\varphi\|} \geq \frac{\sqrt{2\pi} \|h\|_2}{\|1\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} = \|h\|_2,$$

так как $\|1\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} = \|\sqrt{2\pi} \delta_0\|_{C_N^+(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}$. И лемма доказана.

Лемма 1.8. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$1) U(t_0) = (e^{-iAt_0})_*;$$

$$2) \varphi_*(A) (e^{-iAt_0})_* = [e^{-iAt_0} \varphi(A)]_*, \quad \forall \varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Во-первых, для любого $h \in E$ имеем

$$(e^{-iAt_0})_* h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \delta_{t_0} U(t) h dt = U(t_0) h.$$

Остается показать, что

$$\varphi_*(A) U(t_0) h = [e^{-iAt_0} \varphi(A)]_* h.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_*(A) U(t_0) h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t) U(t_0) h dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t_0 + t) h dt. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что если функция $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ представлена в виде $\mathcal{F}(x) = \varphi(x) e^{-it_0 x}$, то $F^{-1}\mathcal{F} = (F^{-1}\varphi) * \sqrt{2\pi} \delta_{t_0}$, так что для любого $g \in C_N(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}\mathcal{F})(t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}\varphi)(t) g(t + t_0) dt.$$

Поэтому

$$[e^{-iAt_0} \varphi(A)]_* h = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t_0 + t) h dt = \varphi_*(A) U(t_0) h,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.9. Пусть $\psi(x) = \sum_{k=1}^r a_k e^{-it_k x}$. Тогда

$$\sqrt{2\pi} \|\psi_*(A)h\|_{\text{mid}} \leq \|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|h\|_{\text{mid}}.$$

Доказательство. Следующие неравенства очевидны (при $\psi \neq 0$).

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi_* (A) h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} &\geq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|[(\varphi\psi)_* (A)] h\|_2}{\|\psi \cdot \varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} \geq \\ &\geq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|(\varphi \cdot \psi)_* (A) h\|_2}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1.8 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} \|\psi_* (A) h\|_{\text{mid}} &= \sqrt{2\pi} \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi_* (A) \psi_* (A) h\|_2}{\|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi_* (A) h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|h\|_{\text{mid}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.10. Функция u в определении производящего оператора удовлетворяет неравенству для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\|u(t_2)\|_{\text{mid}} \leq (1 + |t_1 - t_2|)^N \|u(t_1)\|_{\text{mid}}.$$

Доказательство. В силу леммы 1.1

$$u(t_0 + t) = U(t) u(t_0).$$

Следовательно, по лемме 1.8, $u(t_0 + t) = (e^{-iAt})_* u(t_0)$; поэтому согласно лемме 1.9,

$$\|u(t_0 + t)\|_{\text{mid}} \leq \|\delta_t\|_{C_N^+(\mathbb{R})} \|u(t_0)\|_{\text{mid}} = (1 + |t|)^N \|u(t_0)\|_{\text{mid}},$$

и лемма доказана.

Повторяя рассуждения леммы 1.3, мы можем установить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1.11. Для любых $\psi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $h \in E$ элемент $I_{\text{mid}}[\psi; h]$ пространства B_{mid}^{**} , определяемый формулой

$$I_{\text{mid}}[\psi; h](h^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(t) h^*(U(t)h) dt, \quad h^* \in B_{\text{mid}}^*, \quad \psi = F\tilde{\psi},$$

принадлежит B_{mid} , причем

$$\|I_{\text{mid}}[\psi; h]\|_{\text{mid}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \|h\|_{\text{mid}}.$$

Обозначим через $\psi_{\text{mid}}(A)$ продолжение оператора $h \rightarrow I_{\text{mid}}[\psi; h]$ до гомоморфизма $B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$. Очевидно,

$$\|\psi_{\text{mid}}(A)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}.$$

Лемма 1.12. *Отображение $\psi \rightarrow \psi_{\text{mid}}(A)$ есть гомоморфизм алгебры $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$ в алгебру операторов пространства B_{mid} .*

Доказательство. Надо доказать, что $\psi_{\text{mid}}(A) \varphi_{\text{mid}}(A) = (\psi \varphi)_{\text{mid}}(A)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Для любого $g^* \in B_{\text{mid}}^*$ имеем

$$g^*(\varphi_{\text{mid}}(A)h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) g^*(U(t)h) dt.$$

Поскольку $\psi_{\text{mid}}(A)$ — гомоморфизм, то

$$g^*(\psi_{\text{mid}}(A) \varphi_{\text{mid}}(A)h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) g^*(\psi_{\text{mid}}(A) U(t)h) dt.$$

Рассматривая A как производящий оператор с определяющей парой пространств (B_1, B_{mid}) и применяя лемму 1.8, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) g^*(\psi_{\text{mid}}(A) U(t)h) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) g^*((\psi(A) e^{-tA})_{\text{mid}} h) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \delta_t)(t') g^*(U(t')h) dt' \right) dt. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$g^*((\psi \cdot \varphi)_{\text{mid}}(A)h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \tilde{\varphi})(t) g^*(U(t)h) dt.$$

Доказательство леммы будет завершено, если мы докажем следующую формулу: для любых $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C_N^+(\mathbf{R})$, $f \in C_N(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \delta_t)(t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \tilde{\varphi})(t) f(t) dt. \quad (1.13)$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \delta_t)(t') f(t) dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\tau) f(\tau+t) d\tau,$$

так что (1.13) принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\tau) f(\tau+t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\psi} * \tilde{\varphi})(t) f(t) dt. \quad (1.14)$$

Но формула (1.14) была установлена в гл. II. Лемма доказана.

Лемма 1.13. *Существует такая последовательность $\{\varphi_n\} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, что для любых $h \in B_{\text{mid}}$, $h^* \in B_{\text{mid}}^*$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^*[(\varphi_{n \text{ mid}}(A) - 1)h] = 0.$$

Доказательство. Выберем последовательность $\{\varphi_n\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 \quad \text{при } |x| < 1, \quad \varphi_1(x) = 0 \quad \text{при } |x| > 2, \\ \varphi_n(x) &= \varphi_1(x/n).\end{aligned}$$

Такая последовательность $\{\varphi_n\}$ ограничена в $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Действительно, пусть $\tilde{\varphi}_n$ есть Фурье-образ функции φ_n . Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_1\left(\frac{x}{n}\right) dx = \\ &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itxn} \varphi_1(x) dx = n\tilde{\varphi}_1(nt).\end{aligned}$$

Имеем, далее, для любой функции $f \in C_N(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(t) f(t) dt \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} n\tilde{\varphi}_1(nt) f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(t) f\left(\frac{t}{n}\right) dt \right| \leq \|\tilde{\varphi}_1\|_{C_N^+(\mathbb{R})} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left| f\left(\frac{t}{n}\right) \right|}{(1+|t|)^N} = \\ &= \|\varphi_1\|_{C_N^+(\mathbb{R})} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{(1+n|t|)^N} \leq \\ &\leq \|\varphi_1\|_{C_N^+(\mathbb{R})} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N} = \|\varphi_1\|_{C_N^+(\mathbb{R})} \|f\|_{C_N(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\varphi_n\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \leq \|\varphi_1\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})}$. Положим $\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{x+i}$. Тогда $\psi_n(x) - \frac{1}{x+i} \rightarrow 0$ в любом пространстве Соболева $W_2^l(\mathbb{R})$. Поэтому $\psi_n(x) \rightarrow \frac{1}{x+i}$ в $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, так что последовательность операторов $\psi_{n\text{mid}}(A)$ сходится по норме к оператору $\left(\frac{1}{A+i}\right)_{\text{mid}}$. Далее, имеем

$$\psi_{n\text{mid}}(A)h = \psi_{n\text{mid}}(A)(A+i)h \quad (1.15)$$

для любого $h \in E$. Заметим, что

$$\left(\frac{1}{A+i}\right)_{\text{mid}}(A+i)h = h \quad (1.16)$$

для любого $h \in E$. Следовательно, для любого $h \in E$ справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n\text{mid}}(A)h = h. \quad (1.17)$$

Из (1.17) получаем для любых $h \in E$, $h^* \in B_{\text{mid}}^*$

$$h^* [(\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) - 1) h] \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Пусть теперь h — произвольный элемент из B_{mid} , $h^* \in B_{\text{mid}}^*$. Поскольку последовательность операторов $\{\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) - 1\}$ равномерно ограничена некоторой константой M , то выбирая для данного $\varepsilon > 0$ такой элемент $\bar{h} \in E$, что $\|\bar{h} - h\|_{\text{mid}} < \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} |h^* [(\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) - 1) h]| &\leq \\ &\leq |h^* [(\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) - 1) \bar{h}]| + M \|h^*\| \varepsilon \rightarrow M \|h^*\| \varepsilon \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, а это и означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^* [(\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) - 1) h] = 0,$$

поскольку ε произвольно. Тем самым лемма доказана.

Следствие. Множество.

$$M = \bigcup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})} R(\varphi_{\text{mid}}(A))$$

плотно в B_{mid} .

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $M \neq B_{\text{mid}}$. Тогда из теоремы Хана — Банаха следует существование такого ненулевого элемента $h^* \in B_{\text{mid}}^*$, что $h^*(h) = 0$ для любого $h \in M$. Пусть $h^*(h_0) \neq 0$. Рассмотрим последовательность $\{h_n\} = \{\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) h_0\}$, где $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, введенная в лемме 1.13. Имеем: $h^*(h_n) = 0$ для любого n . С другой стороны, по лемме 1.13,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(h_n) = h^*(h_0) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что M плотно в B_{mid} .

Лемма 1.14. Если $\text{Im } z \neq 0$, то оператор $[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}}$ обратим.

Доказательство. Пусть $h \in B_{\text{mid}}$ и пусть $[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} h = 0$. Если $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, рассмотренная в лемме 1.13, то

$$0 = [(A - z) \varphi_n(A)]_{\text{mid}} [(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} h = \varphi_{n_{\text{mid}}}(A) h$$

для всех натуральных n . По лемме 1.13

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^* [\varphi_{n_{\text{mid}}}(A) h] = h^*(h)$$

для любого $h^* \in B_{\text{mid}}^*$. Следовательно, $h = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.15. Существует замыкание $\bar{A}$ оператора A в B_{mid} .

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда оператор, обратный к $[(A-z)^{-1}]_{\text{mld}}$, замкнут; в силу леммы 1.5 этот оператор является расширением оператора $A-z$. Значит, и оператор $A = (A-z) + z$ имеет замкнутое расширение. Лемма доказана.

Оператор $\bar{A}$ мы также будем называть *производящим оператором*.

Дадим теперь новую интерпретацию формулы

$$\varphi_{\text{mld}}(A)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t) h dt, \quad \tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi. \quad (1.18)$$

Рассмотрим пространство $C_N(\mathbb{R}^n, B)$, состоящее из непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций со значениями в банаховом пространстве B , имеющих конечную норму

$$\|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n, B)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f(x)\|}{(1+|x|)^N}.$$

Пример. Для любого $h \in E$ функция f :

$$f(t) = U(t)h$$

принадлежит пространству $C_N(\mathbb{R}, B_{\text{mld}})$, причем

$$\|f\|_{C_N(\mathbb{R}, B_{\text{mld}})} \leq \|h\|_{\text{mld}}.$$

Рассмотрим далее для каждого $f \in C_N(\mathbb{R}^n, B)$ оператор $I_0[f]: F^{-1}\mathcal{B}_N \rightarrow B$, определенный формулами

$$I_0[f] \delta_{\xi} = f(\xi), \quad I_0[f] \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Задача. Доказать, что $\|I_0[f]\| \leq \|f\|_{C_N(\mathbb{R}^n, B)}$.

Указание. Для любого $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ и любых различных вещественных чисел $\xi_1, \dots, \xi_k$

$$\left\| \varphi + \sum_{i=1}^k a_i \delta_{\xi_i} \right\|_{C_N^+(\mathbb{R}^n)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| (1+|x|)^N dx + \sum_{i=1}^k |a_i| (1+|\xi_i|)^N.$$

Расширим оператор $I_0[f]$ до гомоморфизма $I[f]: C_N^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow B$. Мы будем пользоваться обозначением

$$I[f] \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx,$$

которое и дает нужную нам интерпретацию равенства (1.18). Очевидно, оба рассмотренные определения оператора $\varphi_{\text{mld}}(A)$ совпадают.

Пусть $f \in C_N(\mathbb{R}^n, B)$ и пусть функция $\mathcal{F}$, определенная формулой $\mathcal{F}(x) = \hat{C} f(x)$, где $\hat{C}$ — замкнутый оператор в B , принадлежит

$C_N(\mathbb{R}^n, B)$. Тогда для любого $\varphi \in F^{-1}\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \hat{C}f(x) dx = \hat{C} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx. \quad (1.19)$$

Если φ — произвольный элемент из $C^+(\mathbb{R}^n)$, то выбирая последовательность $\{\varphi_k\} \subset F^{-1}\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к φ , и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \hat{C}f(x) dx = \hat{C} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) f(x) dx,$$

получаем, что и в этом случае справедлива формула (1.19).

Лемма 1.16. Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда

$$(\bar{A} - z)^{-1} = [(A - z)^{-1}]_{\text{mid}}.$$

Доказательство. Нужно доказать две формулы:

$$[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} (\bar{A} - z)h = h, \quad h \in D_{\bar{A}}, \quad (1.20)$$

$$(\bar{A} - z)[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} = 1. \quad (1.21)$$

Формула (1.20) справедлива при $h \in E$ согласно лемме 1.5; если $h_n \rightarrow h$, $h_n \in E$, $h \in D_{\bar{A}}$, то в (1.20) можно перейти к пределу, так как $\bar{A} - z$ — замкнутый оператор, а $[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}}$ — гомоморфизм. Этим формула (1.20) доказана.

Пусть теперь снова $h \in E$; обозначим через $\tilde{r}_z$ Фурье-преобразование функции $r_z(x) = (x - z)^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} h &= [(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} (A - z)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_z(t) U(t) (A - z)h dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_z(t) (A - z) U(t) h dt = \\ &= (\bar{A} - z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}_z(t) U(t) h dt = (\bar{A} - z)[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} h. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой (1.19). Итак, при $h \in E$

$$(\bar{A} - z)[(A - z)^{-1}]_{\text{mid}} h = h.$$

Из замкнутости оператора $\bar{A}$ и плотности множества E в B_{mid} следует, что это равенство выполняется для любого $h \in B_{\text{mid}}$, т. е. формула (1.21) верна, и лемма доказана.

Резюмируем основные утверждения, доказанные в этом параграфе, в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. 1) Производящий оператор A как оператор в пространстве B_{mid} имеет замыкание $\bar{A}$.

2) Существует гомоморфизм M банаховой алгебры $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ в алгебру $\text{Op}(B_{\text{mid}})$ гомоморфизмов $B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$, при котором функции

$$x \rightarrow \frac{1}{x-z}, \quad \text{Im } z \neq 0,$$

отвечает оператор $(\bar{A} - z)^{-1}$.

Обозначение. Пусть функции $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ отвечает гомоморфизм $\Phi: B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$. Условимся обозначать $\Phi = \varphi(\bar{A})$. Образ гомоморфизма M будем обозначать символом $\mathfrak{A}_N$.

Функцию $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ будем называть символом оператора $\varphi(\bar{A})$.

§ 2. Расширение класса допустимых символов

Пусть A — производящий оператор степени N с определяющей парой (B_1, B_2) банаховых пространств, содержащих плотное в каждом из них линейное многообразие $D = D_A$. В предыдущем параграфе были введены операторы вида $\varphi(\bar{A})$, где $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Мы полагали по определению $\varphi(\bar{A}) = \varphi_{\text{mid}}(\bar{A})$, где $\varphi_{\text{mid}}(A)$ — оператор, определенный на E . Приведем теперь более явную формулу для $\varphi(\bar{A})$. Именно,

$$\varphi(\bar{A})h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\bar{A}t} h dt$$

для любого $h \in B_{\text{mid}}$. Действительно, пусть $\{h_n\}$ — последовательность элементов из E , сходящаяся к h . Тогда

$$\|e^{-i\bar{A}t}h - U(t)h_n\| = \|e^{-i\bar{A}t}(h - h_n)\| \leq (1 + |t|)^N \|h - h_n\|.$$

Следовательно, функции $U(t)h_n$ сходятся к $e^{-i\bar{A}t}h$ в пространстве $C_N(\mathbb{R}, B_{\text{mid}})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\bar{A}t} h dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t) h_n dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\text{mid}}(A) h_n = \varphi(\bar{A})h, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и пусть функция ψ :

$$\psi(x) = x^k \varphi(x),$$

где k — натуральное число, также принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Тогда

$$\psi(\bar{A}) = \bar{A}^k \varphi(\bar{A}) = \overline{\varphi(\bar{A}) A^k} = \overline{\varphi(\bar{A})} \bar{A}^k.$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. Для любого $h \in D_{\bar{A}}$ справедлива формула

$$e^{-i\bar{A}t} \bar{A} h = \bar{A} e^{-i\bar{A}t} h.$$

Доказательство. Пусть $\{h_n\}$ — последовательность элементов из E , сходящаяся к h , причем $\overline{Ah} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ah_n$. Тогда

$$e^{-i\overline{A}t} \overline{Ah} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-i\overline{A}t} Ah_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A e^{-i\overline{A}t} h_n = \overline{A} e^{-i\overline{A}t} h,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.1. Для любого $h \in E$ справедливо равенство $\psi_{\text{mid}}(A)h = \varphi_{\text{mid}}(A)A^k h$, т. е.

$$\psi_{\text{mid}}(A)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) U(t) A^k h dt. \quad (2.1)$$

В силу (1.19) последнее равенство можно переписать в виде

$$\psi_{\text{mid}}(A)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{A}^k \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) u(t) h dt = \overline{A}^k \varphi_{\text{mid}}(A)h.$$

Здесь мы воспользовались предложением о замкнутости степени замкнутого оператора главы I и тем фактом, что $(\overline{A} + i)^{-1}$ есть гомоморфизм $B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$. Мы доказали, что операторы $\psi(\overline{A})$ и $\overline{A}^k \varphi(\overline{A})$ совпадают на множестве E , плотном в B_{mid} . В силу того, что $\varphi(\overline{A})$ и $\psi(\overline{A})$ — гомоморфизмы, а оператор $\overline{A}^k$ замкнут, отсюда следует, что операторы $\overline{A}^k \varphi(\overline{A})$ и $\psi(\overline{A})$ совпадают всюду.

Далее, равенство (2.1) означает, что оператор $\varphi(\overline{A})A^k$ есть сужение гомоморфизма $\psi(\overline{A})$ на всюду плотное множество E . Поэтому справедлива формула

$$\psi(\overline{A}) = \overline{\varphi(\overline{A})A^k}.$$

Остается доказать формулу

$$\psi(\overline{A}) = \overline{\varphi(\overline{A})\overline{A}^k}.$$

Иначе говоря, нужно показать, что оператор $\varphi(\overline{A})\overline{A}^k$ имеет замкнутое расширение, ибо на плотном множестве E он совпадает с гомоморфизмом $\psi(\overline{A})$. Пусть $h_n \in D_{\overline{A}^k}$, $h_n \rightarrow 0$ и последовательность $\varphi(\overline{A})\overline{A}^k h_n$ сходится. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{A})\overline{A}^k h_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\overline{A}t} \overline{A}^k h_n dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \overline{A}^k e^{-i\overline{A}t} h_n dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{A}^k \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\overline{A}t} h_n dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{A}^k \varphi(A) h_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу замкнутости оператора $\bar{A}^h$, и теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что формула $[fg](\bar{A}) = f(\bar{A})g(\bar{A})$ имеет место не только в случае, когда $f, g \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, но и в том случае, когда f — полином, $g \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и $f\bar{g} \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$.

Примем теперь следующее соглашение: замыкание $\bar{A}$ производящего оператора A в B_{mid} будем обозначать просто через A , оговаривая это специально в случае, возможной путаницы.

Лемма 2.2. Если $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и если $\varphi(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке из $\mathbb{R}$, то оператор $\varphi(A)$ обратим (т. е. $\varphi(A)h \neq 0$ при $h \neq 0$).

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — такая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(e_n(A)h) = h^*(h)$$

для любых $h \in B_{\text{mid}}$, $h^* \in B_{\text{mid}}^*$. Существование таких последовательностей установлено в лемме 1.13. Если $\varphi(A)h = 0$, то

$$\psi_n(A)\varphi(A)h = 0,$$

где $\psi_n(x) = e_n(x)/\varphi(x)$. Но $\psi_n(A)\varphi(A) = e_n(A)$. Следовательно, для любого $h^* \in B_{\text{mid}}^*$

$$h^*(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^*(e_n(A)h) = 0.$$

Отсюда следует, что $h = 0$, и лемма доказана.

Теорема 2.2. Для любых $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и полинома P существует замыкание оператора $f(A)P(A)$ в B_{mid} .

Доказательство. Пусть $h_n \rightarrow 0$ и пусть $f(A)P(A)h_n \rightarrow q$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $q = 0$. Обозначим через φ функцию из S , нигде не обращающуюся в нуль. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A)f(A)P(A)h_n = \varphi(A)q.$$

Но $\varphi f P \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, и поэтому в силу теоремы 2.1 имеем

$$\varphi(A)q = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A)f(A)P(A)h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A)\varphi(A)f(A)h_n = 0.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $\varphi(A)$ следует, что $q = 0$, и предложение доказано.

Теорема 2.3. Пусть $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и пусть P — полином. Тогда оператор $P(A)f(A)$ является расширением оператора $f(A)P(A)$.

Доказательство. Если h принадлежит области определения оператора $P(A)$, то

$$f(A)P(A)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iAt} P(A)h dt,$$

где $\tilde{f}$ — Фурье-прообраз функции f . Отсюда, используя лемму 2.1 и замкнутость оператора $P(A)$, получаем:

$$\begin{aligned} f(A) P(A) h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) P(A) e^{-iAt} h \, dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(A) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iAt} h \, dt = P(A) f(A) h, \end{aligned}$$

так что оператор $P(A) f(A)$ является расширением оператора $f(A) P(A)$.

Пусть теперь h — произвольный элемент из области определения оператора $f(A) P(A)$. Тогда существует такая последовательность $\{h_n\}$ элементов из области определения оператора $P(A)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(A) P(A) h_n = \overline{f(A) P(A)} h.$$

В силу того, что $f(A)$ есть гомоморфизм, а $f(A) P(A)$ есть сужение оператора $P(A) f(A)$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(A) h_n = f(A) h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(A) f(A) h_n = \overline{f(A) P(A)} h.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $P(A)$ следует, что

$$P(A) f(A) h = \overline{f(A) P(A)} h,$$

и теорема доказана.

Лемма 2.3. Пусть f_1, f_2, f_3 — функции из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и пусть P и Q — полиномы, причем

$$f_1(x) P(x) = f_2(x) Q(x) + f_3(x).$$

Тогда для любого $h \in D_{P(A)f_1(A)} \cap D_{Q(A)f_2(A)}$ выполняется равенство

$$P(A) f_1(A) h = Q(A) f_2(A) h + f_3(A) h.$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in S$ не обращается в нуль ни в одной точке. Тогда согласно лемме 2.2, оператор $\varphi(A)$ обратим, так что достаточно показать, что

$$\varphi(A) [P(A) f_1(A) - Q(A) f_2(A) - f_3(A)] h = 0.$$

Функции φP и φQ принадлежат $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, кроме того,

$$\varphi(A) P(A) \subset [P\varphi](A), \quad \varphi(A) Q(A) \subset [Q\varphi](A).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(A) [P(A) f_1(A) - Q(A) f_2(A) - f_3(A)] h &= \\ &= [(P\varphi)(A) f_1(A) - (Q\varphi)(A) f_2(A) - \varphi(A) f_3(A)] h = 0, \end{aligned}$$

так как оператор $[P\varphi](A)f_1(A) - [Q\varphi](A)f_2(A) - \varphi(A)f_3(A)$ имеет символ $\varphi(Pf_1 - Qf_2 - f_3) = 0$. Тем самым лемма доказана.

Дадим теперь определение растущих функций от производящего оператора.

Определение. Пусть $g(x) = f(x)P(x) + f_1(x)$, где $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $f_1 \in B_N(\mathbb{R})$ и где P — полином. Положим

$$g(A)h \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(A)P(A)}h + f_1(A)h.$$

Замечание. Элемент h из B_{mid} принадлежит области определения оператора $g(A)$ тогда и только тогда, когда существует такое представление функции g в виде

$$g(x) = f(x)P(x) + f_1(x),$$

где $f, f_1 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, P — полином, что

$$h \in D_{\overline{f(A)P(A)}}.$$

Из леммы 2.3 и теоремы 2.3 следует, что определение корректно в том смысле, что оператор $g(A)$ не зависит от способа представления функции g в виде $fP + f_1$. В случае, когда $g \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, определение очевидно согласуется с определением гомоморфизма $g(A)$, приведенным в предыдущем параграфе. В случае, когда g — полином, определение также согласуется с определением полинома от оператора. Действительно, пусть

$$g(x) = f(x)P(x) + f_1(x),$$

где $f, f_1 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и где P и g — полиномы. Прежде всего заметим, что степень полинома P не меньше степени полинома g , поскольку функции f и f_1 ограничены. Следовательно, область определения оператора $P(A)$ содержится в области определения оператора $g(A)$. Нужно показать, что область определения оператора $\overline{f(A)P(A)}$ не шире области определения оператора $g(A)$. Пусть h — произвольный элемент из области определения оператора $\overline{f(A)P(A)}$. Тогда существует такая последовательность $\{h_n\}$ элементов из области определения оператора $P(A)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$ и последовательность $\{f(A)P(A)h_n\}$ фундаментальна. Но $h_n \in D_{g(A)}$, и следовательно, согласно теореме 2.3 и лемме 2.3, справедливо равенство

$$g(A)h_n = f(A)P(A)h_n + f_1(A)h_n,$$

так что последовательность $\{g(A)h_n\}$ сходится. Поскольку оператор $g(A)$ замкнут, то $h \in D_{g(A)}$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что замкнутый оператор A обратим.

Теорема 2.4. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и пусть функция ψ :

$$\psi(x) = x^{-k}\varphi(x),$$

где k — натуральное число, также принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Тогда

$$\psi(A) = A^{-k} \varphi(A).$$

Доказательство. Имеем:

$$\varphi(x) = x^k \psi(x).$$

Следовательно,

$$\varphi(A) = A^k \psi(A), \quad \psi(A) = A^{-k} \varphi(A).$$

Определим теперь операторы, отвечающие символам, имеющим особенность в нуле.

Определение. Пусть $g(x) = f(x) x^{-k}$, где $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и k — натуральное число. Положим

$$g(A) \stackrel{\text{def}}{=} A^{-k} f(A).$$

Проверим корректность данного определения. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $x^{-k_1} f_1(x) = x^{-k_2} f_2(x)$. Покажем, что

$$A^{-k_1} f_1(A) = A^{-k_2} f_2(A).$$

Действительно, пусть, для определенности $k_2 > k_1$. Имеем: $f_2(x) = x^{k_2 - k_1} f_1(x)$; следовательно, $f_2(A) = A^{k_2 - k_1} f_1(A)$. Умножая обе части этого равенства слева на A^{-k_2} , получаем требуемое соотношение.

Лемма 2.4. Пусть $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $h \in D_{A^{-k}}$. Тогда

$$f(A) A^{-k} h = A^{-k} f(A) h.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} f(A) h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iAt} h \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iAt} A^k A^{-k} h \, dt = \\ &= \frac{A^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-iAt} A^{-k} h \, dt = A^k f(A) A^{-k} h. \end{aligned}$$

Умножая обе части полученного равенства на A^{-k} , приходим к утверждению леммы.

Определение. Пусть $g(x) = f_1(x) P(x) + f_2(x) x^{-k} + f_3(x)$, где f_1, f_2, f_3 — функция из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, P — полином, k — натуральное число. Положим

$$g(A) h \neq g_1(A) h + g_2(A) h + f_3(A) h,$$

где $g_1(x) = f_1(x) P(x)$, $g_2(x) = f_2(x) x^{-k}$, h — произвольный элемент из $D_{g_1(A)} \cap D_{g_2(A)}$.

Проверим корректность этого определения. Пусть

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + f_3(x) = g_4(x) + g_5(x) + f_6(x),$$

где

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x) P(x), & g_2(x) &= f_2(x) x^{-k}, \\ g_4(x) &= f_4(x) Q(x), & g_5(x) &= f_5(x) x^{-l}, \end{aligned}$$

$f_j \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \dots, 6$, P и Q — полиномы, k и l — натуральные числа. Прежде всего заметим, что функции g_2 и g_5 можно исправить в ограниченной окрестности нуля, так, чтобы получить функции из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Поскольку

$$g_1 - g_4 = g_5 - g_2 + f_6 + f_3$$

и поскольку функция $g_1 - g_4$ совпадает в окрестности нуля с некоторой функцией из $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, то

$$g_1(x) - g_4(x) = f_7(x),$$

где $f_7 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Следовательно, $g_1(A) = g_4(A) + f_7(A)$. Далее, справедливо равенство

$$g_2(x) = g_5(x) + f_8(x),$$

где $f_8 = f_3 + f_6 - f_7 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Пусть

$$h \in D_{A^{-k}f_2(A)} \cap D_{A^{-l}f_5(A)}.$$

Положим

$$q = [g_2(A) - g_5(A) - f_8(A)] h = [A^{-k}f_2(A) - A^{-l}f_5(A) - f_8(A)] h.$$

Требуется доказать, что $q = 0$. Проведем доказательство по следующей схеме: пусть $\varphi \in S$ — функция, нигде не обращающаяся в нуль, и пусть $\varphi_m(x) = x^m \varphi(x)$, $m = 1, 2, \dots$. Мы покажем, что оператор $\varphi_m(A)$ обратим и что $\varphi_m(A) q = 0$ при достаточно большом m . Имеем $\varphi_m(A) = A^m \varphi(A)$. Поэтому

$$(\varphi_m(A) u = 0) \Rightarrow (A^m \varphi(A) u = 0) \Rightarrow (\varphi(A) u = 0) \Rightarrow (u = 0).$$

Мы воспользовались обратимостью операторов A и $\varphi(A)$. Обратимость оператора $\varphi_m(A)$ доказана.

Пусть $m \geq \max(k, l)$. Тогда функции $x^{-k} \varphi_m(x)$ и $x^{-l} \varphi_m(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Пользуясь теоремой 2.4 и леммой 2.4, получаем:

$$\varphi_m(A) q = [A^{m-k} \varphi(A) f_2(A) - A^{m-l} \varphi(A) f_5(A) - A^m \varphi(A) f_8(A)] h = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть $\sqrt{x} \stackrel{\text{def}}{=} i \sqrt{|x|}$ при $x < 0$. Тогда функция $x^{N+1} \sqrt{x}$ непрерывно дифференцируема на вещественной прямой $N+1$ раз. Пусть $1 = e_1(x) + e_2(x)$, где $e_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $e_1(x) = 1$ при достаточно малых x . Положим $f_1(x) = e_1(x) x^{N+1} \sqrt{x}$, $f_2(x) = e_2(x) / \sqrt{x}$. Тогда $f_1, f_2 \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^1)$ и

$$\sqrt{x} = g_1(x) + g_2(x),$$

где $g_1(x) = x^{-N-1}f_1(x)$, $g_2(x) = xf_2(x)$. Следовательно, для любого $h \in D_{g_1(A)} \cap D_{g_2(A)}$ справедлива формула

$$\sqrt{A}h = A^{-N-1}f_1(A)h + Af_2(A)h.$$

Задача. Мы определили бесконечно дифференцируемые растущие не быстрее степени аргумента функции от коммутирующих операторов. Показать, что они образуют алгебру с μ -структурой, где алгебра A есть алгебра коммутирующих неограниченных операторов, а множество M состоит из производящих операторов и действительных функций от них.

§ 3. Гомоморфизм асимптотических формул. Метод стационарной фазы

Пусть A — замыкание в B_{mid} производящего оператора степени N , k — натуральное число. Из теоремы 2.1 следует утверждение: если $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и $\varphi(x) - \psi(x) = O(x^{-k})$ в том смысле, что функция $x^k[\varphi(x) - \psi(x)]$ принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, то для любого $g \in B_{\text{mid}}$ вектор $\varphi(A)g - \psi(A)g$ принадлежит области определения оператора A^k .

В качестве примера рассмотрим так называемый метод стационарной фазы. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, пусть $\mathcal{F} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественная функция, и пусть уравнение $\mathcal{F}'(\xi) = 0$ имеет единственное решение ξ_0 на носителе функции φ , причем $\mathcal{F}''(\xi_0) \neq 0$. Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ix\mathcal{F}(\xi)} d\xi. \quad (3.1)$$

Метод стационарной фазы дает асимптотическое разложение функции $I(x)$ по отрицательным степеням x :

$$I(x) = e^{ix\mathcal{F}(\xi_0)} \sum_{j=0}^n a_j(\varphi, \mathcal{F}) x^{-j-1/2} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = O(x^{-n-3/2})$. Мы воспроизведем здесь вывод формулы метода стационарной фазы, чтобы получить оценку остаточного члена R_{n+1} в нужной нам форме.

Сделаем в интеграле (3.1) замену переменных

$$[\mathcal{F}(\xi) - \mathcal{F}(\xi_0)] = t^2 \operatorname{sign} [\mathcal{F}''(\xi)]$$

и обозначим $\omega = |x|$, $\sigma = \operatorname{sign} [x\mathcal{F}''(\xi_0)]$. Получим

$$I(x) = e^{ix\mathcal{F}(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi(t) dt, \quad (3.2)$$

где $\psi(t) = \varphi(\xi(t)) d\xi/dt$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Преобразуем формулу (3.2)

следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)} I(x) &= \psi(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} [\psi(t) - \psi(0)] dt = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \psi(0) - \frac{1}{2i\omega\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_1(t) dt, \end{aligned}$$

где $\psi_1(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$; мы использовали интегрирование по частям. Легко видеть, что вне носителя функции $\psi(t)$ справедливо равенство

$$\psi_1(t) = \frac{\psi(0)}{t^2}.$$

Преобразуя интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_1(t) dt$ так же, как это было сделано с интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi(t) dt$, получим формулу

$$\begin{aligned} e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)} I(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \left(\psi(0) + \frac{i}{2\omega\sigma} \psi_1(0) \right) + \\ &+ \left[\frac{i}{2\omega\sigma} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_2(t) dt, \end{aligned}$$

где $\psi_2(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi_1(t) - \psi_1(0)}{t}$. Продолжая этот процесс, получаем:

$$\begin{aligned} e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)} I(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\sigma\pi/4} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{2\omega\sigma} \right)^j \psi_j(0) + \\ &+ \left(\frac{i}{2\omega\sigma} \right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_{n+1}(t) dt, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где

$$\psi_{j+1}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\psi_j(t) - \psi_j(0)}{t}, \quad j = 1, 2, \dots, \psi_0 = \psi.$$

Для обоснования формулы (3.3) нужно еще убедиться в том, что для любого натурального j

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_j(t) - \psi_j(0)}{t} = 0. \quad (3.4)$$

Пользуясь явной формулой для $\psi_1(t)$ при больших t , нетрудно установить по индукции, что при $t \notin \text{supp } \psi$ имеем $\psi_j(t) = t^{-2} P(t^{-1})$, где P — некоторый полином, зависящий от j . Тем самым формула (3.4) установлена.

Итак, мы получили следующее разложение:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mathcal{F}(\xi)} \varphi(\xi) d\xi = \\ = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4 \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i}{2x \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)} \right)^j \psi_j(0) + r_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$r_{n+1}(x) = \sqrt{x} \left(\frac{i \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)}{2x} \right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)} \psi_{n+1}(t) dt, \quad (3.6)$$

причем при отрицательных x

$$\sqrt{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|x|} e^{i\pi/2 \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)}.$$

Мы не можем подставить непосредственно в формулу (3.5) производящий оператор A вместо переменной x , так как функция $1/x^j$ не принадлежит пространству $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Подправим разложение (3.5) следующим образом. Пусть $\operatorname{grad} x$ — бесконечно дифференцируемая функция, совпадающая с $\sqrt{x}$ вне некоторой конечной окрестности нуля, и пусть $\rho_j(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, совпадающая с x^{-j} вне некоторой конечной окрестности нуля. Тогда

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} x) e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mathcal{F}(\xi)} \varphi(\xi) d\xi = \\ = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4 \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)}{2} \right)^j \rho_j(x) \psi_j(0) + r_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $r_{n+1}(x) = r_{n+1}(x)$ при достаточно больших $|x|$.

Заметим, что все члены в (3.7), кроме $r_{n+1}(x)$, очевидно, бесконечно дифференцируемы. Отсюда следует, что и функция $r_{n+1}(x)$ также бесконечно дифференцируема.

Перейдем теперь к оценке остаточного члена $r_{n+1}(x)$ на бесконечности. Положим для определенности $\operatorname{sign} \mathcal{F}''(\xi_0) = 1$. Продолжая разложение (3.5), получаем для любого натурального $m \geq n+1$:

$$\begin{aligned} x^{n+1} r_{n+1}(x) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \left(\frac{i}{2} \right)^{n+1} \psi_{n+1}(0) + \\ + \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \sum_{j=n+2}^m \left(\frac{i}{2} \right)^j x^{n+1-j} \psi_j(0) + \\ + \sqrt{x} \left(\frac{i}{2} \right)^{m+1} x^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \psi_{m+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Первое слагаемое в правой части (3.8) есть константа, поэтому оно принадлежит пространству $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Далее, все слагаемые

суммы $\sum_{j=n+2}^m$ в правой части (3.8) квадратично интегрируемы в окрестности бесконечности, и тем же свойством обладают также все их производные. Рассмотрим, наконец, функцию

$$f(x) = \sqrt{x} x^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} \psi_{m+1}(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x} x^{n-m} g(x).$$

Функция g ограничена; оценим ее производные. Имеем:

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} it^2 e^{ixt^2} \psi_{m+1}(t) dt = -\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} [t\psi_{m+1}(t)]' dt.$$

Мы произвели здесь интегрирование по частям и воспользовались тем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} t\psi_{m+1}(t) = 0$. Для вычисления $g''(x)$ заметим, что функция $[t\psi_{m+1}(t)]'$, так же как и функция $\psi_{m+1}(t)$, представима в виде произведения t^{-2} на полином от t^{-1} , так что

$$g''(x) = \frac{1}{(2x)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} \frac{d}{dt} t \frac{d}{dt} t\psi_{m+1}(t) dt.$$

Вычисляя так же следующие производные, убеждаемся, что функция $g(x)$ бесконечно дифференцируема и $g^{(k)}(x) = O(|x|^{-k})$. Отсюда следует, что при достаточно большом m функция интегрируема в окрестности бесконечности при $k \leq N+1$.

Из полученных оценок следует, что функция $x^{n+1} r_{n+1}(x)$ представима в виде суммы константы и функции из $W_{\frac{1}{2}}^{N+1}(\mathbb{R})$ и следовательно, принадлежит пространству $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Сама функция r_{n+1} , очевидно, также принадлежит пространству $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$. Таким образом, для любого $g \in B_{\text{mid}}$

$$\bar{r}_{n+1}(A) g \in D_A^{n+1}.$$

Обратимся теперь к левой части формулы (3.7). Эта функция принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, так как правая часть обладает этим свойством. Обозначим

$$\text{rad } x \cdot I(x) \stackrel{\text{def}}{=} K(x).$$

Справедливо разложение

$$K(A) = \sqrt{\pi} e^{i\left(A\mathcal{F}(\xi_0) + \frac{\pi}{4} \text{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)\right)} \times \\ \times \sum_{j=0}^n \left[\frac{i \text{sign} \mathcal{F}''(\xi_0)}{2} \right]^j \psi_j(0) \rho_j(A) + r_{n+1}(A),$$

причем область значений оператора $F_{n+1}(A)$ содержится в области определения оператора A^{n+1} . Обозначим теперь

$$g(x, \xi) = \frac{1}{(x+i)^2} \varphi(\xi) e^{ix\mathcal{F}(\xi)}, \quad L(x) = \frac{1}{(x+i)^2} I(x).$$

Функция $g(x, \xi)$ порождает функцию $G(\xi)$ со значениями в $\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Функция G непрерывна. Действительно, справедлива оценка

$$\frac{\partial^{j+1} g(x, \xi)}{\partial \xi \partial x^j} = O\left(\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}\right),$$

равномерная по ξ . Следовательно,

$$L(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) d\xi.$$

Далее, нетрудно проверить, что $I \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$ и значит, последнее равенство можно переписать в виде

$$(A+i)^{-2} I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) d\xi, \quad I(A) = (A+i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) d\xi.$$

Покажем, что $K(A) = \text{rad } A \cdot I(A)$. Пусть $h \in E$. Тогда для любого натурального k и любого $\chi \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$ имеем

$$\chi(A) (A+i)^k h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(t) (A+i)^k U(t) h dt = (A+i)^k \chi(A) h.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\chi(A) h$ принадлежит области определения любой степени оператора A . Положим

$$\text{rad}_k(x) = \frac{\text{rad } x}{(x+i)^k};$$

при достаточно больших k имеем $\text{rad}_k \in \mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Для любого $h \in E$ $\text{rad } A \cdot I(A) h = \text{rad}_k(A) (A+i)^k I(A) h = \text{rad}_k(A) I(A) (A+i)^k h$. С другой стороны,

$$(A+i)^{-k} K(A) = \text{rad}_k(A) I(A);$$

поэтому

$$\text{rad } A \cdot I(A) h = (A+i)^{-k} K(A) (A+i)^k h = K(A) h.$$

Пусть теперь h — произвольный элемент из B_{mid} , $h_j \in E$, $h_j \rightarrow h$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$K(A) h_j \rightarrow K(A) h, \quad I(A) h_j \rightarrow I(A) h \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

следовательно,

$$K(A) h = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{rad } A \cdot I(A) h_j = \text{rad } A \cdot I(A) h,$$

что и требовалось доказать. Мы можем теперь записать формулу

$$K(A) = \text{grad } A \cdot (A + i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) d\xi.$$

Отсюда следует, что для любого $h \in E$

$$\begin{aligned} K(A)h &= \text{grad } A \cdot (A + i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) h d\xi = \\ &= \text{grad } A \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi) (A + i)^2 h d\xi = \text{grad } A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi. \end{aligned}$$

Для того, чтобы распространить полученное при $h \in E$ равенство

$$K(A)h = \text{grad } A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi$$

на случай произвольного $h \in B_{\text{mid}}$, покажем прежде всего, что функция

$$\xi \rightarrow \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h \quad (3.9)$$

со значениями в B_{mid} непрерывна на вещественной прямой. Достаточно показать, что отображение

$$t \rightarrow e^{iAt}h, \quad t \in \mathbb{R}$$

непрерывно, что, в силу ограниченности оператора e^{iAt} , равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное δ , что при $|\tau| < \delta$

$$\|e^{iA\tau}h - h\| < \varepsilon.$$

Выберем такое $h_0 \in E$, чтобы неравенство

$$\|(e^{iA\tau} - 1)(h - h_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.10)$$

выполнялось для любого τ из фиксированной ограниченной окрестности нуля. Положим $q_0 = (A + i)^2 h_0$. Тогда

$$\|(e^{iA\tau} - 1)h_0\| = \|(A + i)^{-2}(e^{iA\tau} - 1)q_0\| \rightarrow 0$$

при $\tau \rightarrow 0$, так как функция G со значениями в $W_2^{N+1}(\mathbb{R})$, определенная формулой

$$[G(\tau)](x) = \frac{1}{(x+i)^2} [e^{ix\tau} - 1],$$

непрерывна. Выберем такое $\delta > 0$, чтобы при $|\tau| < \delta$ выполнялись неравенство (3.10) и неравенство

$$\|(e^{iA\tau} - 1)h_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $|\tau| < \delta$

$$\|e^{iA\tau}h\| \leq \|(e^{iA\tau} - 1)h_0\| + \|(e^{iA\tau} - 1)(h - h_0)\| < \varepsilon.$$

Тем самым непрерывность функции (3.9) доказана. Следовательно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi,$$

понимаемый как предел интегральных сумм по норме пространства B_{mid} , существует.

Далее, если $h_n \rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|\varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} (h_n - h)\|_{B_{\text{mid}}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно по ξ , так как

$$\|e^{iA\mathcal{F}(\xi)}\| \leq (1 + |\mathcal{F}(\xi)|)^N.$$

Пусть h — произвольный элемент из B_{mid} и $\{h_m\}$ — сходящаяся к h последовательность элементов из E . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I(A) h_m &= I(A) h, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h_m d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi. \end{aligned}$$

Но $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h_m d\xi = I(A) h_m$; поэтому

$$I(A) h = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi;$$

отсюда следует, что

$$K(A) h = \text{rad } A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathcal{F}(\xi)} h d\xi.$$

Обозначим

$$a_j(\varphi, \mathcal{F}) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4 \text{sign } \mathcal{F}''(\xi_0)} \left[\frac{i \text{sign } \mathcal{F}''(\xi_0)}{2} \right]^j \psi_j(0),$$

где функции ψ_j построены по функциям φ и $\mathcal{F}$ описанным выше образом. Числа $a_j(\varphi, \mathcal{F})$ зависят только от значений функций φ , $\mathcal{F}$ и их производных в точке ξ_0 до некоторого порядка, зависящего от j .

Итак, получаем следующее предложение.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и пусть $\mathcal{F}$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ вещественная функция, имеющая на носителе функции φ единственную критическую точку ξ_0 , причем $\mathcal{F}''(\xi_0) \neq 0$. Пусть далее $\text{rad } x$ — бесконечно дифференцируемая функция, совпадающая вне некоторой ограниченной окрестности нуля с функцией

$$x^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt{x} & \text{при } x \geq 0, \\ \sqrt{|x|} e^{i\pi/2 \text{sign } \mathcal{F}''(\xi_0)} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

и пусть, наконец, $\rho_j(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции,

совпадающие вне некоторой ограниченной окрестности нуля с функциями x^{-j} .

Тогда для любого целого $n \geq 0$ справедливо разложение

$$\operatorname{grad} A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\xi} h d\xi = e^{iA\xi} \sum_{j=0}^n a_j(\varphi, \mathcal{F}) \rho_j(A) h + q_{n+1}, \quad (3.11)$$

где q_{n+1} принадлежит области определения оператора A^{n+1} .

Замечание. Пусть оператор A обратим. Тогда можно в формуле (3.11) заменить $\rho_j(A)h$ на $A^{-j}h$ при условии, что $h \in D_{A^{-n}}$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для любого $h \in D_{A^{-j}}$

$$[\rho_j(A) - A^{-j}]h \in D_{A^{n+1}}.$$

Обозначим $[\rho_j(A) - A^{-j}]h = q$. Тогда $A^j q = [A^j \rho_j(A) - 1]h$. Функция $x^j \rho_j(x)$ принадлежит $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ и тождественно равна 1 в окрестности бесконечности. Следовательно, для любого натурального m функция $x^m (x^j \rho_j(x) - 1)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}_N(\mathbb{R})$, так что область значений оператора $A^j \rho_j(A) - 1$ содержится в D_{A^m} . Значит, для любого m имеем $q \in D_{A^{j+m}}$; в частности, $q \in D_{A^{n+1}}$.

§ 4. Функции от оператора дифференцирования. Оператор Гильберта

Пусть, в обозначениях предыдущего параграфа,

$$B_1 = B_2 = W_2^{-s}(\mathbb{R}), \quad s \geq 0, \quad D = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

и пусть оператор A действует по формуле

$$A\varphi(x) = i\varphi'(x).$$

Лемма 4.1. Оператор A является производящим оператором нулевой степени.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + iAu = 0, \quad u(0) = h, \quad h \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.1)$$

Решение задачи (4.1) существует; именно, функция

$$[u(t)](x) = h(x+t)$$

удовлетворяет данному уравнению. В самом деле, прежде всего,

$$[iAu(t)](x) = -h'(x+t).$$

Далее,

$$\frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta} - h'(x+t) = h'(x+t+\theta\delta) - h'(x+t),$$

где $|\theta| \leq 1$; поскольку функция h' равномерно непрерывна, разностное отношение

$$\frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta}$$

сходится при $\delta \rightarrow 0$ к $h'(x+t)$ равномерно по x . Следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_R \left| \frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta} - h'(x+t) \right|^2 dx = 0,$$

так что $\frac{du}{dt} = -iAu$, если понимать дифференцирование по t в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R})$ и тем более — в смысле сходимости в $W_2^{-1}(\mathbb{R})$.

Докажем теперь единственность решения задачи (4.1). Заметим прежде всего, что оператор A симметричен: $A^* \supset A$. Действительно, для любых $\varphi, \psi \in D_A$

$$(A\varphi, \psi)_{W_2^{-1}(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} (-p) \tilde{\varphi}(p) \tilde{\psi}(p) (1+p^2)^{-s} dp = (\varphi, A\psi)_{W_2^{-1}(\mathbb{R})}.$$

Здесь $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ — Фурье-образы соответственно функций φ, ψ .

Согласно теореме 4.1 гл. I, для доказательства единственности решения задачи Коши (4.1) достаточно показать, что для любого $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и для любых вещественных a, b, T существует непрерывная по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ функция v со значениями в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{dv}{dt} + iAv = \begin{cases} h & \text{при } t \in (a, b), \\ 0 & \text{при } t \notin [a, b], \end{cases}$$

$$v(T) = 0$$

(дифференцирование понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R})$). Пусть для определенности $a < b < T$. Положим

$$[v(t)](x) = \begin{cases} 0 & \text{при } b \leq t \leq T, \\ \int_b^t h(x+t-\tau) d\tau & \text{при } a \leq t \leq b, \\ v_0(x) = \int_b^a h(x+a-\tau) d\tau. \end{cases}$$

Продолжим функцию v в область $t < a$ так, чтобы она удовлетворяла задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} + iAv = 0, \quad t < a, \quad v(a) = v_0;$$

разрешимость последней задачи доказывается точно так же, как разрешимость задачи (4.1). Определенная нами функция v удов-

летворяет всем требуемым условиям; в проверке, очевидно, нуждается только условие

$$\frac{dv}{dt} + iAv = h \quad \text{при } t \in (a, b).$$

Пусть $t \in (a, b)$. Тогда $[Av(t)](x) = i \int_b^t h'(x - \tau + t) d\tau$. С другой стороны, без труда можно установить (аналогично тому как это было сделано ранее для функции u), что

$$\begin{aligned} \left[\frac{dv(t)}{dt} \right](x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_b^t h(x - \tau + t) d\tau = h(x) + \int_b^t h'(x + t - \tau) d\tau = \\ &= h(x) - i[Av(t)](x). \end{aligned}$$

Итак, единственность решения задачи Коши (4.1) доказана.

Мы выяснили, что оператор A порождает однопараметрическую группу $\{U(t)\}$ гомоморфизмов векторного пространства $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Имеет место формула

$$U(t)\varphi(x) = \varphi(x+t);$$

по этой причине группа $\{U(t)\}$ называется *группой сдвигов*. Очевидно, что для любого вещественного t оператор $U(t): W_2^{-s}(\mathbb{R}) \rightarrow W_2^{-s}(\mathbb{R})$ изометричен, и следовательно, может быть расширен до унитарного оператора e^{-iAt} . В частности, отсюда следует, что A — производящий оператор нулевой степени, и лемма доказана.

Лемма 4.2. *Оператор $\bar{A}$ обратим.*

Доказательство. Пусть $\{h_n\}$ — такая фундаментальная по норме пространства $W_2^{-s}(\mathbb{R})$ последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ah_n\|_{W_2^{-s}(\mathbb{R})} = 0.$$

Требуется доказать, что в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{W_2^{-s}(\mathbb{R})} = 0$. Пусть $\tilde{h}_n \in \tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$ есть Фурье-образ функции h_n , $\tilde{h}_n \in S$ и пусть $\tilde{q}_n$ есть Фурье-образ функции Ah_n . Справедлива формула

$$\tilde{q}_n(p) = -p\tilde{h}_n(p).$$

Последовательность $\{\tilde{h}_n\}$ фундаментальна в $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R}^n)$, а последовательность $\{\tilde{q}_n\}$ сходится к нулю в $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Нужно показать, что последовательность $\{h_n\}$ также сходится к нулю в $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Последовательность элементов из $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$ можно рассматривать как последовательность ограниченных линейных функционалов на $\tilde{W}_2^s(\mathbb{R})$. Поскольку сходимость последовательности функционалов по норме влечет за собой ее поточечную сходимость к тому же

пределу, что нам достаточно убедиться в том, что для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n(p) \varphi(p) dp = 0;$$

при этом мы знаем, что для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p \tilde{h}_n(p) \varphi(p)| dp \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Зафиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\tilde{h}_n(p) - \tilde{h}_N(p)) \varphi(p)| dp < \varepsilon.$$

Далее, найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{h}_N(p) \varphi(p)| dp < \varepsilon.$$

Имеем

$$\int_{|p| > \delta} |\tilde{h}_n(p) \varphi(p)| dp \leq \frac{1}{\delta} \int_{|p| > \delta} |p \tilde{h}_n(p) \varphi(p)| dp \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется такое $N_1 \geq N$, что

$$\int_{|p| > \delta} |\tilde{h}_{N_1}(p) \varphi(p)| dp < \varepsilon.$$

Так как при $n \geq N$

$$\int_{|p| > \delta} |(\tilde{h}_n(p) - \tilde{h}_N(p)) \varphi(p)| dp \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(\tilde{h}_n(p) - \tilde{h}_N(p)) \varphi(p)| dp < \varepsilon,$$

то

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_N(p) \varphi(p) dp \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{h}_N(p) \varphi(p)| dp + \\ &+ \int_{|p| > \delta} |(\tilde{h}_N(p) - \tilde{h}_{N_1}(p)) \varphi(p)| dp + \int_{|p| > \delta} |\tilde{h}_{N_1}(p) \varphi(p)| dp < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n(p) \varphi(p) dp \right| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(\tilde{h}_n(p) - \tilde{h}_N(p)) \varphi(p)| dp + \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}_N(p) \varphi(p)| dp < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Пусть φ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная 1 в окрестности нуля. Положим $f_1(x) = [1 - \varphi(x)] \operatorname{sign} x$, $f_2(x) = x^2 \varphi(x) \operatorname{sign} x$. Тогда

$$\operatorname{sign} x = f_1(x) + x^2 f_2(x),$$

причем $f_1, f_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Следовательно, корректно следующее определение.

Определение. Оператором Гильберта (по отношению к A) называется оператор

$$I = \operatorname{sign} A = f_1(A) + A^{-2} f_2(A).$$

Лемма 4.3. Пусть $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi = f(A)\varphi$, $\tilde{\varphi} = F\varphi$, $\tilde{\psi} = F\psi$. Тогда $\tilde{\psi}(\rho) = f(-\rho)\tilde{\varphi}(\rho)$.

Доказательство. Предположим сначала, что f есть Фурье-образ функции из $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Имеем

$$f(A)\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) U(t)\varphi dt,$$

где интеграл понимается как предел интегральных сумм для непрерывной функции со значениями в $W_2^{-s}(\mathbb{R})$. Но функция

$$t \rightarrow U(t)\varphi$$

непрерывна также и как функция со значениями в $W_2^1(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|U(t+\delta)\varphi - U(t)\varphi\|_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+t+\delta) - \varphi(x+t)|^2 dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x+t+\delta) - \varphi'(x+t)|^2 dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$. В силу теоремы вложения Соболева получаем

$$\psi(x) = f(A)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \varphi(x+t) dt. \quad (4.2)$$

Здесь интеграл понимается как обычный интеграл от числовой функции, зависящей от параметра x . Из формулы (4.2) непосредственно следует, что

$$\tilde{\psi}(\rho) = f(-\rho)\tilde{\varphi}(\rho). \quad (4.3)$$

Пусть теперь $\tilde{f} = \delta_\xi$, так что $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi t}$,

$$f(A)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iA\xi} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x+\xi) = \psi(x).$$

Тогда $\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\epsilon} \tilde{\varphi}(p)$, и стало быть формула (4.3) верна и в этом случае.

Пусть, наконец, f — произвольная функция из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Существует такая последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$, что $f_n \rightarrow f$ и

$$[Ff_n(A)\varphi](p) = f_n(-p)[F\varphi](p). \quad (4.4)$$

Имеем $f_n(A)\varphi \rightarrow f(A)\varphi$ в W_2^{-s} ,

$$Ff_n(A)\varphi \rightarrow Ff(A)\varphi \text{ в } \tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R}), \quad f_n(-p) \rightarrow f(-p)$$

равномерно в силу вложения $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$. Отметим следующий факт. Пусть некоторая последовательность $\{g_n\}$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций сходится равномерно к некоторой функции $\bar{g}$ и в то же время сходится в $W_2^{-s}(\mathbb{R})$ к функции $\bar{g}$. Тогда $g = \bar{g}$. Действительно, для любого $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \chi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \chi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x) \chi(x) dx.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в формуле (4.4) и пользуясь сделанным замечанием, убеждаемся в справедливости формулы и в общем случае. Лемма доказана.

Результат леммы 4.3 может быть сформулирован еще следующим образом. Пусть $\tilde{A} = FAF^{-1}$, так что $\tilde{A}\varphi(p) = -p\varphi(p)$ для любого $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, где $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ — пространство Фурье-образов функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Оператор $\tilde{A}$ является производящим оператором нулевой степени с определяющей парой пространств $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$, $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Для любых $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ и $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ имеет место формула

$$f(\tilde{A})\varphi(p) = f(-p)\varphi(p).$$

При этом $f(\tilde{A}) = Ff(A)F^{-1}$.

Сохраняя обозначения определения 4.1, рассмотрим функцию $\tilde{h} \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Покажем, что $f_2(\tilde{A})\tilde{h}$ принадлежит области определения оператора $\tilde{A}^{-2}$, т. е. что $f_2(\tilde{A})\tilde{h} = \tilde{A}^2 q$, где q — некоторый элемент из $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Имеем

$$f_2(\tilde{A})\tilde{h}(p) = f_2(-p)\tilde{h}(p) = p^2\varphi(-p)\text{sign}(-p)\tilde{h}(p).$$

Рассмотрим функционал

$$g \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-p)\text{sign}(-p)\tilde{h}(p)g(p)dp \stackrel{\text{def}}{=} \langle q, g \rangle, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.5)$$

Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\langle q, g \rangle| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(-p) \tilde{h}(p) g(p)| dp \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(-p) \tilde{h}(p)|^2 (p^2+1)^{-s} dp \int_{-\infty}^{\infty} |g(p)|^2 (p^2+1)^s dp \right)^{1/2} = \\ &= \|g\|_{\tilde{W}_2^s(\mathbb{R})} \|\varphi(\tilde{A}) \tilde{h}\|_{\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Из этой оценки вытекает, что функционал (4.5) определяет элемент q пространства $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Покажем, что $q \in D_{\tilde{A}}$. Для этого заметим прежде всего, что функционал

$$g \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(-p) \tilde{h}(p) g(p) dp \stackrel{\text{def}}{=} \langle q_1, g \rangle, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

определяет элемент q_1 пространства $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Пусть теперь $\{q_1^{(n)}\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящаяся к q_1 в пространстве $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. И пусть $q^{(n)}(p) = \varphi(-p) q_1^{(n)}(p)$. Тогда $q^{(n)} \rightarrow q$ в $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$. Далее, пусть $z_n(p) = p^2 q^{(n)}(p)$. Так как функция $\varphi_1(p) = p^2 \varphi(p)$ принадлежит пространству $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, то z_n сходится в $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$ к функции $z(p) = p^2 \varphi(-p) \text{sign}(-p) \tilde{h}(p)$. Таким образом,

$$f_2(\tilde{A}) \tilde{h}(p) = z(p) = \tilde{A}^2 q(p),$$

что и требовалось доказать. Одновременно мы получили формулу

$$\tilde{A}^{-2} f_2(\tilde{A}) \tilde{h}(p) = q(p) = \varphi(-p) \text{sign}(-p) \tilde{h}(p),$$

из которой следует, что

$$(\text{sign } \tilde{A}) \tilde{h}(p) = -(\text{sign } p) \tilde{h}(p). \quad (4.6)$$

Заметим, что для любой кусочно непрерывной функции $q \in \tilde{W}_2^{-s}(\mathbb{R})$, убывающей быстрее любой степени p , справедлива обычная формула обращения преобразования Фурье:

$$(F^{-1}q)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} q(p) dp. \quad (4.7)$$

Действительно, для любого $\psi \in S$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} q(p) dp \right] \psi(x) dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(p) dp \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{ipx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} q(p) \tilde{\psi}(-p) dp, \end{aligned}$$

что и означает, в силу формулы Парсеваля, справедливость соотношения (4.7). В частности, из формулы (4.6) следует, что для любого $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$Ih(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \operatorname{sign}(-p) \tilde{h}(p) dp, \quad (4.8)$$

где $\tilde{h}$ есть Фурье-образ функции h . Подставляя в (4.8) явное выражение для $\tilde{h}$, получаем

$$\begin{aligned} Ih(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(-p) dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-\xi)} h(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \operatorname{sign}(-p) dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-\xi)} h(\xi) d\xi = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi \int_{-a}^a e^{ip(x-\xi)} \operatorname{sign}(-p) dp = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \left\{ \frac{2}{i(x-\xi)} - \frac{2 \cos a(x-\xi)}{i(x-\xi)} \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{i\pi} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left\{ \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{x-\xi} d\xi - \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) \cos a(x-\xi)}{x-\xi} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Здесь v. p. — сокращенная запись для главного значения.

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) \cos a(x-\xi)}{x-\xi} d\xi &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) - h(x)}{x-\xi} \cos a(x-\xi) d\xi + h(x) \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a(x-\xi)}{x-\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) - h(x)}{x-\xi} \cos a(x-\xi) d\xi &= \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{h(\xi) - h(x)}{x-\xi} \right] \sin a(x-\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi) \sin a(x-\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где функция $h_1(\xi)$ убывает на бесконечности как ξ^{-2} . Следовательно,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) - h(x)}{x - \xi} \cos a(x - \xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} |h_1(\xi)| d\xi \rightarrow 0,$$

при $a \rightarrow \infty$. Далее,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a(x - \xi)}{x - \xi} d\xi = - \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна. Итак, мы получили следующий результат.

Оператор Гильберта I является интегральным оператором с ядром типа Коши:

$$Ih(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{x - \xi} d\xi;$$

последний интеграл понимается в смысле главного значения.

§ 5. Спектр производящего оператора

Пусть A — производящий оператор степени N .

Определение. Резольвентным множеством $\rho(A)$ оператора A назовем минимальное открытое подмножество вещественной оси, обладающее тем свойством, что

$$(\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ и } \text{supp } \varphi \subset \rho(A)) \Rightarrow (\varphi(\bar{A}) = 0).$$

Множество $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$ назовем спектром оператора A .

Задача. Доказать, что $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Теорема 5.1. Пусть $\lambda \in \rho(A)$. Тогда оператор $(\bar{A} - \lambda)^{-1}$ существует, определен на всем B_{mid} и удовлетворяет оценке

$$\|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\| \leq f(d),$$

где d — расстояние от точки λ до спектра оператора A , а f — некоторая невозрастающая (числовая) функция.

Доказательство. Пусть φ — бесконечно дифференцируемая функция и $\varphi(x) = (x - \lambda)^{-1}$ при $|x - \lambda| \geq \varepsilon$, где $\varepsilon < d$. Покажем, что

$$\varphi(\bar{A}) = (\bar{A} - \lambda)^{-1}, \quad \|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\| \leq f(d). \quad (5.1)$$

Из равенства

$$\varphi(x)(x - \lambda) = 1 - \chi(\lambda),$$

где $\text{supp } \chi \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \subset \rho(A)$, следует, что

$$\begin{aligned}(\bar{A} - \lambda) \varphi(\bar{A}) &= 1, \\ \varphi(\bar{A}) (A - \lambda) h &= h \quad \forall h \in D_A.\end{aligned}$$

Последние два равенства показывают, что

$$\varphi(\bar{A}) = (\bar{A} - \lambda)^{-1}.$$

Оценим норму оператора $(\bar{A} - \lambda)^{-1} = \varphi(\bar{A})$. Имеем:

$$\|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbb{R})}.$$

Норма функции φ в $\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbb{R})$ зависит от ε и от способа продолжения функции $(x - \lambda)^{-1}$ на интервал $|x - \lambda| < \varepsilon$. Пусть Φ_ε — множество всех возможных φ при фиксированном ε . Тогда

$$\|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf_{\substack{0 \leq \varepsilon \leq d \\ \varphi \in \Phi_\varepsilon}} \|\varphi\|_{\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbb{R})} = f(d).$$

Теорема доказана.

Теорема 5.2. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $(\bar{A} - \lambda)^{-1}$ — гомоморфизм, то $\lambda \in \rho(A)$.

Доказательство. Пусть $0 < \delta < \frac{1}{\|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\|}$. Покажем, что $\varphi(\bar{A}) = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\text{supp } \varphi \subset (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Пусть φ — такая функция. Тогда

$$\|\varphi(\bar{A})\| = \|(\bar{A} - \lambda)^{-k} (\bar{A} - \lambda)^k \varphi(\bar{A})\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\|^k \|\psi_k\|_{\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbb{R})},$$

где $\psi_k(x) = (x - \lambda)^k \varphi(x)$.

Легко получить следующую оценку:

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{W}_2^{N+1}(\mathbb{R})} = O(\delta^k).$$

Следовательно,

$$\|\varphi(\bar{A})\| = O[(\delta \|(\bar{A} - \lambda)^{-1}\|)^k] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Это означает, что $\|\varphi(\bar{A})\| = 0$, и теорема доказана.

Из теорем 5.1 и 5.2 вытекает, что спектр производящего оператора совпадает со спектром (в обычном смысле) его замыкания в B_{mid} (т. е. $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow [(\bar{A} - \lambda)^{-1} - \text{гомоморфизм}]$).

Теорема 5.3. Для любой функции $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R})$ с носителем в $\rho(A)$ справедливо равенство

$$f(\bar{A}) = 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что носитель функции f компактен. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность бесконечно

дифференцируемых функций, сходящаяся к f в $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$, g — функция из $C_0^\infty(\mathbf{R})$ с носителем в $\rho(A)$, равная 1 на $\text{supp } f$. Тогда $gf_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\text{supp } (gf_n) \subset \rho(A)$ и $gf_n \rightarrow f$ в $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Так как $g(\bar{A})f_n(\bar{A}) = 0$, то и $f(\bar{A}) = 0$.

Снимем предположение о компактности множества $\text{supp } f$. Пусть $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, что для любого $h^* \in B^*$ и любого $h \in B$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(\varphi_n(\bar{A})h) = h^*(h).$$

Положим $f_n(x) = f(x)\varphi_n(x)$. Тогда $\text{supp } f_n \subset \rho(A)$, так что $f_n(\bar{A}) = 0$. Для любых $h^* \in B^*$ и $h \in B$ имеем

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^*(f_n(\bar{A})h) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^*(\varphi_n(\bar{A})f(\bar{A})h) = h^*(f(\bar{A})h),$$

откуда и следует, что $f(\bar{A}) = 0$.

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{B}_N(\rho(A))$ банаховой алгебры $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$, получаемую замыканием множества функций из $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$, обращающихся в 0 в окрестности (своей для каждой функции) множества $\sigma(A)$. Очевидно, что $\mathcal{B}_N(\rho(A))$ — замкнутый идеал в $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$. Факторалгебру $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})/\mathcal{B}_N(\rho(A))$ с обычной нормой

$$\|\{\varphi\}\| = \inf_{\varphi \in \{\varphi\}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbf{R})}$$

обозначим через $\mathcal{B}_N(\sigma(A))$.

Ясно, что теорема 5.3 сохранится, если $\mathcal{B}_N(\mathbf{R})$ заменить на $\mathcal{B}_N(\sigma(A))$. При этом улучшается оценка сверху нормы оператора $\varphi(\bar{A})$ и сужается ядро гомоморфизма M . Однако и это отображение не является мономорфизмом (т. е. взаимно однозначным) даже когда B_{mld} конечномерно и N — точная степень оператора A . Дело в том, что разные жордановы клетки матрицы A могут порождать группы гомоморфизмов с разным порядком роста.

Пример. Пусть λ_1, λ_2 — различные вещественные числа и пусть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{-iAt} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 t} & -ite^{-i\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

так что A является производящим оператором первой степени, но не является производящим оператором нулевой степени. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{B}_1(\mathbf{R})$ имеем

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & \varphi'(\lambda_2) \\ 0 & 0 & \varphi(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Спектр $\sigma = \sigma(A)$ оператора A состоит из двух точек: λ_1 и λ_2 . Пусть $\varphi \in C_0^\infty(R)$, $\lambda_2 \notin \text{supp } \varphi$, $\varphi(\lambda_1) = 0$, $\varphi'(\lambda_1) \neq 0$. Тогда $\varphi(A) = 0$, но $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)} > 0$ (здесь через $\|\varphi\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)}$ обозначена, как обычно, норма класса эквивалентности, которому принадлежит функция φ).

Несмотря на то, что гомоморфизм $M_\sigma: \mathcal{B}_N(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{A}_N$ не является мономорфизмом, мы получаем для $\|\varphi(A)\|$ достаточно хорошую оценку сверху.

Определение. Собственным элементом оператора $\bar{A}$ в точке λ называется такой вектор $g \in D_{\bar{A}}$, что $(\bar{A} - \lambda)g = 0$. Присоединенным элементом степени k оператора $\bar{A}$ в точке λ называется такой вектор $g \in D_{\bar{A}^k}$, что $(\bar{A} - \lambda)^k g = 0$, но $(\bar{A} - \lambda)^{k-1} g \neq 0$. Собственные и присоединенные элементы оператора $\bar{A}$ называются его с. п.-элементами.

Если оператор A имеет только изолированные точки спектра, а число линейно независимых с. п.-элементов, отвечающих каждой точке спектра, конечно, то говорят, что оператор A имеет дискретный спектр.

Задача. Пусть h — собственный вектор оператора $\bar{A}$ в точке λ . Доказать, что $e^{-i\bar{A}t} h = e^{-i\lambda t} h$ при $h \in D_{\bar{A}}$.

Лемма 5.1. Пусть λ — изолированная точка спектра производящего оператора A степени N . Если g — с. п.-элемент оператора $\bar{A}$ в точке λ , то $(\bar{A} - \lambda)^{N+1} g = 0$.

Доказательство. Пусть g — с. п.-элемент оператора $\bar{A}$ в точке λ . Тогда для некоторого k

$$(\bar{A} - \lambda)^k g = 0. \quad (5.2)$$

Покажем, что если $k > N + 1$, то из (5.2) следует, что $(\bar{A} - \lambda)^{k-1} g = 0$. Предположим, что $k > N + 1$. Пусть $\{\chi_n\}$ — такая последовательность бесконечно дифференцируемых функций, что $\chi_n(\lambda) = 1$ и что $\text{supp } \chi_n$ содержится в интервале $(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n})$, так что носитель функции χ_n при достаточно большом n содержит только одну точку спектра оператора A ; пусть, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\mathcal{B}_N(R)} = 0,$$

где $\psi_n(x) = (x - \lambda)^{k-1} \chi_n(x)$. Легко видеть, что такая последовательность существует. Имеем:

$$\|\chi_n(A) (\bar{A} - \lambda)^{k-1} g\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

С другой стороны, вектор

$$h = (\bar{A} - \lambda)^{k-1} g$$

является собственным элементом оператора $\bar{A}$, так как

$$(\bar{A} - \lambda)h = (\bar{A} - \lambda)^k g = 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\chi_n(\bar{A})h &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_n(t) e^{-i\bar{A}t} h dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_n(t) e^{-i\lambda t} h dt = \chi_n(\lambda) h = h,\end{aligned}$$

т. е.

$$\chi_n(\bar{A})(\bar{A} - \lambda)^{k-1}g = (\bar{A} - \lambda)^{k-1}g.$$

Из (5.3) следует, что $(\bar{A} - \lambda)^{k-1}g = 0$; по индукции получаем, что $(\bar{A} - \lambda)^{N+1}g = 0$.

Теорема 5.4. Пусть спектр производящего оператора A состоит из изолированных точек λ_i , $i = 1, 2, \dots$. Тогда множество всех с. п.-элементов оператора $\bar{A}$ полно, т. е. линейная оболочка этого множества является плотной в B_{mid} .

Доказательство. Пусть χ^i — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, с носителем, содержащим лишь одну точку λ_i спектра оператора A , и такая, что $\chi^i(x) = 1$ в некоторой окрестности точки λ_i . Тогда $(A - \lambda_i)^{N+1}\chi^i(\bar{A}) = 0$. Действительно, пусть, при фиксированном i , $\{\chi_n^i\}$ есть рассмотренная в лемме 5.1 последовательность при $(k = N + 2, \lambda = \lambda_i)$, причем $\chi_n^i(x) = 1$ в некоторой (зависящей от n) окрестности точки λ_i . Имеем, при достаточно большом n ,

$$\chi_n^i(\bar{A}) = \chi^i(\bar{A}),$$

и

$$\|(\bar{A} - \lambda_i)^{N+1}\chi_n^i(\bar{A})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

чем и доказано требуемое равенство.

В § 1 было доказано, что линейная оболочка множества всех векторов вида $\varphi(\bar{A})h$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h \in B_{\text{mid}}$ является плотной в B_{mid} . Значит, для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что при любых $h \in B_{\text{mid}}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ вектор $\varphi(\bar{A})h$ представим в виде конечной суммы $\sum g_i$, где g_i удовлетворяет равенству $(\bar{A} - \lambda_i)^{N+1}g_i = 0$. Пусть $\{\Omega_i\}$ — открытое покрытие носителя функции φ , причем $\lambda_j \notin \Omega_i$ при $i \neq j$, $\lambda_i \in \Omega_i$. И пусть $\{\chi^i\}$ — C^∞ -разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Omega_i\}$. Тогда $\varphi(\bar{A})h = \sum \varphi(\bar{A})\chi^i(\bar{A})h$. Положим $g_i = \varphi(\bar{A})\chi^i(\bar{A})h$. Имеем

$$(A - \lambda_i)^{N+1}g_i = \varphi(\bar{A})(\bar{A} - \lambda_i)^{N+1}\chi^i(\bar{A})h = 0.$$

Теорема доказана.

*) Это означает, что $\chi^i \in C^\infty$, $\chi^i = 0$ вне Ω_i , $0 \leq \chi^i \leq 1$, и $\sum_i \chi^i = 1$ на $\text{supp } \varphi$. В курсах анализа доказывается, что такой набор функций существует.

Из доказательства теоремы 5.4 следует также, что для каждой изолированной точки λ_i спектра производящего оператора A существует ненулевой собственный вектор оператора $\bar{A}$ в этой точке (т. е. λ_i — собственное значение оператора $\bar{A}$). Действительно, достаточно убедиться в том, что существует ненулевой с. п.-элемент оператора $\bar{A}$ в точке λ_i . Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — такая функция с носителем, содержащим ровно одну точку λ_i спектра оператора A , что $\varphi(\bar{A}) \neq 0$ (такая функция существует согласно определению производящего оператора). Тогда найдется такой вектор $h \in B_{\text{mid}}$, что $g \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\bar{A})h \neq 0$. Если χ^t — функция, рассмотренная в доказательстве теоремы 5.4, то $\chi^t(\bar{A})\varphi(\bar{A}) = \varphi(\bar{A})$, так что $g = \chi^t(\bar{A}) \times \varphi(\bar{A})h$, откуда и следует, что $(\bar{A} - \lambda_i)^{N+1}g = 0$.

Если λ — собственное значение оператора $\bar{A}$, то $\|f(\bar{A})\| \geq \|f(\lambda)\|$ для любого $f \in \mathbb{C}_N(\mathbb{R})$. Действительно, если g — ненулевой собственный элемент оператора $\bar{A}$ в точке λ , то $f(\bar{A})g = f(\lambda)g$. Таким образом, в случае, когда спектр оператора состоит из изолированных точек, мы получаем следующую оценку снизу для $\|f(\bar{A})\|$:

$$\|f(\bar{A})\| \geq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|. \quad (5.4)$$

§ 6. Некоторые свойства производящего оператора

Теперь уточним некоторые свойства производящего оператора.

Лемма 6.1. Пусть A — производящий оператор в банаховом пространстве B , причем $\|e^{-iAt}\| \leq c(1+|t|)^t$. Тогда при $\text{Im } \lambda \neq 0$ и $m = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\|(\lambda - A)^{-m}\| \leq c \sum_{k=0}^l C_l^k C_{m+k-1}^k \frac{k!}{|\text{Im } \lambda|^{m+k}}. \quad (6.1)$$

Доказательство. Положим $r_\lambda(x) = 1/(\lambda - x)$. По теореме 1.1 § 1 главы III

$$(\lambda - A)^{-m} = r_\lambda^m(A) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int [\underbrace{\tilde{r}_\lambda * \dots * \tilde{r}_\lambda}_m](t) e^{-iAt} dt, \quad (6.2)$$

где $*$ означает свертку функций:

$$(f * g)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

$\tilde{r}_\lambda$ — Фурье-преобраз функции r_λ .

Легко видеть, что

$$\tilde{r}_\lambda(\tau) = -is_\lambda \theta(s_\lambda \tau) e^{i\lambda \tau} \sqrt{2\pi},$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad s_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } \text{Im } \lambda > 0, \\ -1 & \text{при } \text{Im } \lambda < 0. \end{cases}$$

Отсюда непосредственным вычислением получаем

$$[\tilde{r}_\lambda * \dots * \tilde{r}_\lambda](t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-i)^m s_\lambda \theta(s_\lambda t) e^{i\lambda t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Подставив этот результат в (6.2), получим оценку

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-m}\| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s_\lambda t) \frac{|t|^{m-1}}{(m-1)!} e^{-(\operatorname{Im} \lambda) t} \|e^{-iAt}\| dt \leq \\ &\leq \frac{c}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\operatorname{Im} \lambda| t} t^{m-1} (1+t)^l dt = \sum_{k=0}^l \frac{c C_l^k}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\operatorname{Im} \lambda| t} t^{m+k-1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{c}{(m-1)!} C_l^k \frac{(m+k-1)!}{|\operatorname{Im} \lambda|^{m+k}}. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Для произвольного гомоморфизма T банахова пространства B обозначим через e^{-iTt} оператор $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-it)^m T^m}{m!}$. Легко видеть, что ряд сходится по норме и определяет однопараметрическую группу гомоморфизмов пространства B :

$$e^{-iTt_1} e^{-iTt_2} = e^{-iT(t_1+t_2)}$$

для любых вещественных t_1, t_2 . Будем говорить, что оператор T порождает группу $\{e^{-iTt}\}$. Оператор T является производящим тогда и только тогда, когда $\|e^{-iTt}\|$ растет при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t .

Непосредственно проверяется, что для любых двух коммутирующих гомоморфизмов T_1 и T_2 пространства B справедлива формула

$$e^{-i(T_1+T_2)t} = e^{-iT_1 t} e^{-iT_2 t}.$$

Лемма 6.2. Пусть выполнены условия леммы 6.1 и пусть $c \geq 1$. Тогда для всех вещественных ε и t таких, что $\varepsilon t \geq 0$, справедлива оценка:

$$\|e^{i\varepsilon(1+i\varepsilon A)^{-1}A}\| \leq c(1+R_l(\varepsilon)|t|)^l, \quad (6.3)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_l(\varepsilon) = 1+l$.

Доказательство. Из леммы 6.1 получаем оценку для $(1+i\varepsilon A)^{-m}$:

$$\|(1+i\varepsilon A)^{-m}\| \leq c \sum_{k=0}^l C_l^k \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} |\varepsilon|^k, \quad m=1, 2, \dots$$

Положим

$$I_\varepsilon = (1+i\varepsilon A)^{-1}.$$

При $u \in D_A$ имеем $u - I_\varepsilon u = i\varepsilon I_\varepsilon A u$. Поэтому оператор $I_\varepsilon A$ ограничен и его замыкание порождает группу, которая задается следующим рядом:

$$e^{-itI_\varepsilon A} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} e^{\frac{t}{\varepsilon}} I_\varepsilon = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \frac{1}{m!} I_\varepsilon^m.$$

Используя оценку для I_ε^m , получим

$$\begin{aligned} \|e^{-itI_\varepsilon A}\| &\leq e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m c \sum_{k=0}^l C_l^k \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} |\varepsilon|^k = \\ &= \left[e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \right] + \\ &+ \left[c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{k-1} C_l^k |\varepsilon|^{k-m} |t|^m \frac{(k+m-1)!}{(m-1)! m!} \right] + \\ &+ \left[c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{k=1}^l C_l^k |t|^k \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{m-k} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)! m!} \right]. \end{aligned}$$

Теперь учитывая, что $c \geq 1$ и что справедливо очевидное неравенство (при $k \geq 1$):

$$\frac{(n+2k-1)!}{(n+k)! (n+k-1)!} \leq \frac{1}{n!} (1+k)^{k-1},$$

продолжим оценку следующим образом:

$$\begin{aligned} \|e^{-itI_\varepsilon A}\| &\leq c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \right) + \\ &+ c \sum_{m=1}^{l-1} |t|^m \left(\sum_{k=m+1}^l C_l^k |\varepsilon|^{k-m} \frac{(k+m-1)!}{(m-1)! m!} \right) e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \\ &+ c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=1}^l C_l^m |t|^m (1+m)^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^n \frac{1}{n!} \right) = \\ &= c \left[1 + \sum_{m=1}^{l-1} |t|^m \left(\sum_{k=m+1}^l C_l^k |\varepsilon|^{k-m} \frac{(k+m-1)!}{(m-1)! m!} + C_l^m (1+m)^{m-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + |t|^l (1+l)^{l-1} \right] \leq c (1 + R_l(\varepsilon) |t|)^l, \end{aligned}$$

где $R_l(\varepsilon)$ — некоторая положительная функция, причем число $R_l(0)$ подчинено единственному условию $[R_l(0)]^m \geq (m+1)^{m-1}$, $m=0, \dots, l$. Для наших целей достаточно выбрать $R_l(0) = 1+l$. Лемма доказана.

С помощью этой леммы можно доказать лемму о том, что группы e^{-tA} могут быть аппроксимированы семейством групп $e^{-t(1+i\varepsilon A)^{-1}A}$, порожденных ограниченными производящими операторами.

Лемма 6.3. Пусть A — производящий оператор в банаховом пространстве B . Тогда при вещественных ε , t ($et \geq 0$) и $\varepsilon \rightarrow 0$ векторы $e^{-it(1+i\varepsilon A)^{-1}A}u$ сходятся для любых $u \in B$ к $e^{-tA}u$ по норме пространства B равномерно относительно значений t , принадлежащих любому компактному множеству.

Доказательство. Пусть снова $I_\varepsilon = (1+i\varepsilon A)^{-1}$. Оценим разность:

$$\begin{aligned} e^{-tI_\varepsilon A} - e^{-tI_{\varepsilon'} A} &= - \int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^{-tI_\varepsilon A(t-\tau)} e^{-tI_{\varepsilon'} A\tau}] d\tau = \\ &= -i \int_0^t e^{-tI_\varepsilon A(t-\tau)} (I_\varepsilon A - I_{\varepsilon'} A) e^{-tI_{\varepsilon'} A\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Поскольку операторы $I_\varepsilon A$ и $e^{-tI_{\varepsilon'} A}$ коммутируют, то используя лемму 6.2, получим для $u \in D_A$ оценку

$$\begin{aligned} \|e^{-tI_\varepsilon A}u - e^{-tI_{\varepsilon'} A}u\| &\leq \\ &\leq c \left(\int_0^t (1+|t-\tau|)^l (1+|\tau|)^l d\tau \right) \|(I_\varepsilon - I_{\varepsilon'})Au\|, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$c = \text{const}$

в предположении, что A имеет степень l .

Покажем, что $I_\varepsilon u$ сходитсся к u при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $u \in B$. Действительно, для $u \in D_A$ имеем

$$\|u - I_\varepsilon u\| = \|\varepsilon I_\varepsilon A u\| \leq \varepsilon c_1 \|Au\|,$$

где c_1 — константа из оценки для $\|I_\varepsilon\|$. Итак, $I_\varepsilon u \rightarrow u$ при $u \in D_A$ и $\|I_\varepsilon\|$ ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, по теореме Банаха — Штейнгауза, $I_\varepsilon u \rightarrow u$ при любом $u \in B$.

Далее, в силу (6.5), имеем: $e^{-tI_\varepsilon A}u$ сходитсся для любого $u \in B$ (не зависящего от t) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($et \geq 0$) к некоторому вектору $v = T(t)u$, где $T(t)$ — некоторый гомоморфизм, причем сходимость равномерна относительно $t \in K$, где K — компактное множество. Переходя в (6.3) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\|T(t)\| \leq \tilde{c} (1 + (1+l)|t|)^l \leq \tilde{c} (1 + |t|)^l, \quad \tilde{c} = \text{const}. \quad (6.6)$$

Далее, аналогично (6.4), получаем формулу

$$e^{-tI_\varepsilon A}u = u - i \int_0^t e^{-tI_\varepsilon A\tau} I_\varepsilon A u d\tau, \quad u \in D_A. \quad (6.7)$$

При фиксированном τ подынтегральное выражение сходитсся

к $T(\tau)Au$; кроме того, оно ограничено (см. (6.3)):

$$\|e^{-i\overline{I_e}A\tau} I_e Au\| \leq c(1 + R_l(\varepsilon) |\tau|)^l c_1 \|Au\| \leq c_2 (1 + |\tau|)^l \|Au\|.$$

Переходя к пределу в (6.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon t \geq 0$) получаем

$$T(t)u = u - i \int_0^t T(\tau) Au d\tau,$$

и поэтому

$$i \frac{d}{dt} T(t)u = T(t)Au, \quad T(t)u|_{t=0} = u, \quad u \in D_A. \quad (6.8)$$

Этой же задаче Коши и оценке (6.6) удовлетворяет группа e^{-iAt} .

Докажем единственность решения задачи (6.8) при условии (6.6). Пусть D таково, что его пересечение с D_A есть плотное множество в B . Пусть семейство гомоморфизмов $\tilde{T}(t)$ удовлетворяет оценке (6.6) и уравнениям (6.8) для $u \in D$. Тогда для $u \in D \cap D_A$ имеем

$$\begin{aligned} e^{-i\overline{I_e}At}u - \tilde{T}(t)u &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{-i\overline{I_e}A\tau} \tilde{T}(t-\tau)u) d\tau = \\ &= -i \int_0^t e^{-i\overline{I_e}A\tau} (\overline{I_e}A) \tilde{T}(t-\tau)u d\tau + i \int_0^t e^{-i\overline{I_e}A\tau} \tilde{T}(t-\tau)Au d\tau. \end{aligned}$$

Из (6.8) следует, что для $u \in D$ справедливо равенство $\tilde{T}(t)Au = A\tilde{T}(t)u$; стало быть, $\tilde{T}(t-\tau)$ коммутирует с $\overline{I_e}A$. Поэтому, учитывая оценки (6.3), (6.6), получаем при $\varepsilon t \geq 0$

$$\|e^{-i\overline{I_e}At}u - \tilde{T}(t)u\| \leq c_3 \left(\int_0^t (1 + |t-\tau|)^l (1 + |\tau|)^l d\tau \right) \|(1 - I_e)Au\|.$$

Но выше было доказано, что $I_e v \rightarrow v$ для любого $v \in B$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; следовательно, $T(t)u = \tilde{T}(t)u$ на плотном множестве $D \cap D_A$. Это означает, что $T(t) \equiv \tilde{T}(t)$. Единственность доказана, и тем самым показано, что $T(t) = e^{-iAt}$.

Пусть теперь заранее не обусловлено, что A — производящий оператор.

Лемма 6.4. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения D_A в банаховом пространстве B и пусть для всех вещественных $\mu \neq 0$ операторы $(i\mu - A)^{-1}$ являются гомоморфизмами и удовлетворяют неравенству типа

$$\|(i\mu - A)^{-m}\| \leq c \sum_{k=0}^l C_k^l \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} \frac{1}{|\mu|^{k+m}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.9)$$

где $l \geq 0$ — некоторое целое число.

Тогда A есть производящий оператор степени l в пространстве B , причем

$$\|e^{-iAt}\| \leq c(1 + (1+l)|t|)^l. \quad (6.10)$$

Доказательство. Доказательство леммы 6.2 опирается лишь на оценку (6.1); поэтому с помощью (6.9) точно так же, как в лемме (6.2), получим оценку (6.3). Далее, повторяя доказательство леммы 6.3, построим семейство $T(t)$, удовлетворяющее оценке (6.6). Как и в лемме 6.3, доказывается единственность решения задачи (6.8) при условии (6.6).

Далее, можно выбрать в B такое плотное множество $D \subset D_A$, что $A(D) \subset D$, $A(D) = \{y | y = Ax, x \in D\}$. Действительно, положим

$$D = \bigcup_{u \in D_A} \bigcup_{f \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) T(t) u dt \right\}. \quad (6.11)$$

Из того, что на области определения оператора A уравнение (6.8) имеет решение, следует, что

$$T(t)(D_A) \subset D_A \text{ и } i \frac{d}{dt} T(t) u = T(t) Au = AT(t) u \quad (6.12)$$

при $u \in D_A$. Отсюда легко получить включение $A(D) \subset D$. Действительно, пусть

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) T(t) u dt,$$

где f — Фурье-образ некоторой функции из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, а u — вектор из D_A . Тогда

$$\begin{aligned} Av &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) AT(t) u dt = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} T(t) u dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} f'_-(t) T(t) u dt \in D, \end{aligned}$$

поскольку Фурье-образ функции $-if'_-$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Кроме того, для $u \in D_A$, $h^* \in B^*$ имеем (см. (6.6))

$$\begin{aligned} \left| h^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) T(t) u dt \right) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |h^*(T(t) u)| dt \leq \\ &\leq \tilde{c} \|h^*\| \|u\| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| (1 + |t|)^l dt, \quad f \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

При помощи этого неравенства, точно так же, как в лемме 1.13, доказывается существование такой последовательности $\theta_n(t) \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, что для всех $h^* \in B^*$ и $u \in D_A$

$$h^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(t) T(t) u dt \right) \rightarrow h^*(u) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, как и в следствии из леммы 1.13, получаем, что множество D плотно в B . Итак, оператор A имеет сужение A_0 на плотное в B инвариантное относительно A линейное многообразие D . Из (6.11) следует, что D инвариантно относительно $T(t)$. Поэтому A_0 есть производящий оператор степени 1. Оператор $(\bar{A}_0 + i)^{-1}$ совпадает с $(A + i)^{-1}$ на области значений оператора $A_0 + i$, плотной в B . Кроме того, так как $(\bar{A}_0 + i)^{-1}$ и $(A + i)^{-1}$ — гомоморфизмы, то они обязаны совпадать, откуда следует, что $A = \bar{A}_0$, и лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что лемма 6.4 остается справедливой, если потребовать выполнения оценки (6.9) лишь при $|\mu| \geq \mu_0$, где μ_0 — произвольное положительное число.

Итак, мы получили следующий критерий.

Теорема 6.1. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения в банаховом пространстве B . Оператор A является производящим оператором степени 1 в B в том и только том случае, если при всех вещественных μ , $|\mu| \geq \mu_0 > 0$, операторы $(i\mu - A)^{-1}$ являются гомоморфизмами и удовлетворяют оценке (6.9) для $t = 1, 2, \dots$

Рассмотрим теперь частный случай самосопряженного оператора.

Лемма 6.5. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда, если $\text{Im } \lambda \neq 0$, то $\lambda \in \rho(A)$ и

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|}. \quad (6.13)$$

Доказательство. Пусть $u \in D_A$. Тогда $(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)}$ — вещественное число. Поэтому

$$\text{Im } ((\lambda - A)u, u) = \|u\|^2 \text{Im } \lambda$$

и

$$|\text{Im } \lambda| \|u\|^2 \leq |((\lambda - A)u, u)| \leq \|(\lambda - A)u\| \|u\|,$$

т. е.

$$\|(\lambda - A)u\| \geq |\text{Im } \lambda| \|u\|, \quad u \in D_A. \quad (6.14)$$

Отсюда следует, что при $\text{Im } \lambda \neq 0$ существует обратный оператор $(\lambda - A)^{-1}$, определенный на области значений оператора $\lambda - A$. Область значений оператора $\lambda - A$ является плотной в H , так как оператор $(\lambda - A)^* = \bar{\lambda} - A$ обратим. Итак, оператор $(\lambda - A)^{-1}$ определен на плотном множестве и в силу (6.14) ограничен:

$$\|v\| \geq |\text{Im } \lambda| \|(\lambda - A)^{-1}v\|, \quad v \in (\lambda - A)(D_A).$$

Ограниченный определенный на всюду плотном множестве оператор продолжается до гомоморфизма. Поэтому $\lambda \in \rho(A)$ и справедлива оценка (6.13).

Следствие. Самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве является производящим оператором степени 0, причем группа e^{-iAt} состоит из унитарных операторов.

Доказательство. Из оценки (6.13) следует, что выполняются условия леммы 6.4 при $l=0$, т. е. что A есть производящий оператор степени 0.

Из оценки (6.10) имеем: $\|e^{-iAt}\| \leq 1$, т. е. $\|e^{-iAt}u\| \leq \|u\|$ для всех $u \in B$, $t \in \mathbb{R}$. Далее, $\|u\| = \|e^{iAt}e^{-iAt}u\| \leq \|e^{-iAt}u\|$. Это означает, что $\|e^{-iAt}u\| = \|u\|$ для всех $u \in B$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. все операторы e^{-iAt} являются изометрическими (сохраняют норму).

Их области определения совпадают с B . То же самое относится и к областям значений, так как $\{e^{-iAt}\}$ — группа. Поэтому операторы e^{-iAt} — унитарные, и следствие доказано.

Изучим теперь устойчивость свойств производящего оператора A_n относительно перехода к пределу по параметру n , который для простоты мы будем считать дискретным (целочисленным). Пусть последовательность $\{A_n\}$ состоит из производящих операторов и поточно сходится к некоторому оператору A . Ответ на вопрос о том, когда этот оператор будет производящим, дает следующая лемма.

Лемма 6.6. Пусть $\|e^{-iA_n t}\| \leq c(1+|t|)^l$, где A_n — замкнутые производящие операторы в банаховом пространстве B . Пусть последовательность $\{A_n\}$ поточно сходится к A на плотном в B множестве $D = D_A$, причем оператор A имеет замыкание. Кроме того, пусть для некоторых чисел (λ_1, λ_2) , удовлетворяющих условию $(\operatorname{Im} \lambda_1)(\operatorname{Im} \lambda_2) < 0$, области значений операторов $\lambda_1 - A$ и $\lambda_2 - A$ плотны в B . Тогда:

1) спектр оператора $\bar{A}$ лежит на вещественной оси и при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ последовательность $\{(\lambda - A_n)^{-1}\}$ поточно сходится к $(\lambda - \bar{A})^{-1}$;

2) оператор $\bar{A}$ является производящим степени $-l$ в B .

Доказательство. Докажем 1). По лемме 6.1

$$\|(\lambda - A_n)^{-1}\| \leq c_\lambda \text{ при } \operatorname{Im} \lambda \neq 0,$$

где

$$c_\lambda = c \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!} \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|^k}.$$

Справедливо следующее общее утверждение: если последовательность операторов F_n поточно сходится к F на всюду плотном множестве $D = D_F$, причем F_n^{-1} — гомоморфизмы, $\|F_n^{-1}\| \leq c$ и область значений оператора F является всюду плотной, то оператор F имеет обратный, $\|F^{-1}\| \leq c$ и последовательность $\{F_n^{-1}\}$ поточно сходится к $\bar{F}^{-1}$.

Действительно, при $u \in D$

$$\|u\| = \|F_n^{-1}F_n u\| \leq c\|F_n u\| \rightarrow c\|Fu\|.$$

Следовательно, если $Fu=0$, то $u=0$, т. е. оператор F обратим.

Оператор F^{-1} определен на всюду плотном множестве. Далее, при $v \in D_{F^{-1}}$ справедливо равенство $F_n^{-1}v - F^{-1}v = F_n^{-1}(F - F_n)F^{-1}v$. Поэтому $F_n^{-1}v \rightarrow F^{-1}v$. По теореме Банаха — Штейнгауза, последовательность $\{F_n^{-1}\}$ поточечно сходится к F^{-1} , что и требовалось доказать.

В нашем случае имеем: $(\lambda_i - A_n) \rightarrow (\lambda_1 - A)$ поточечно на D и $\|(\lambda_1 - A_n)^{-1}\| \leq c_{\lambda_1}$. Поэтому существует оператор $(\lambda_1 - A)^{-1}$, удовлетворяющий условию $\|(\lambda_1 - A)^{-1}\| \leq c_{\lambda_1}$, и последовательность $\{(\lambda_1 - A_n)^{-1}\}$ поточечно сходится к $(\lambda_1 - A)^{-1}$. Аналогичное рассуждение проводится для оператора $(\lambda_2 - A)^{-1}$.

Пусть $S(\lambda)$ есть круг: $S(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu - \lambda| < c_{\lambda}^{-1}\}$. Положим $R_n(\lambda) = (\lambda - A_n)^{-1}$, $R(\lambda_1) = (\lambda_1 - A)^{-1}$. При $\lambda \in S(\lambda_1)$ имеем

$$R_n(\lambda) = R_n(\lambda_1) (1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}, \quad (6.15)$$

где обратный оператор в правой части задается рядом, сходящимся по норме операторов:

$$\begin{aligned} (1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda)^k [R_n(\lambda_1)]^k, \\ \|(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\| &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda_1 - \lambda)|^k \|R_n(\lambda_1)\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_1 - \lambda|^k c_{\lambda_1}^k < \infty. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что область значений оператора $1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1)$ есть все пространство B . Действительно, для любого $f \in B$ вектор

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda)^k [R(\lambda_1)]^k f$$

удовлетворяет уравнению

$$[1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1)] x = f.$$

Поскольку $R_n(\lambda_1) \rightarrow R(\lambda_1)$ поточечно, то из оценки для $\|(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\|$ и общего утверждения, доказанного выше, следует, что при $\lambda \in S(\lambda_1)$ существует гомоморфизм $(1 - (\lambda_1 - \lambda) \times \times R(\lambda_1))^{-1}$ и последовательность $\{(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\}$ поточечно сходится к нему. Тогда из (6.15) следует, что при $\lambda \in S(\lambda_1)$ последовательность $\{R_n(\lambda)\}$ поточечно сходится к оператору $R'(\lambda)$,

$$R'(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} R(\lambda_1) (1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1))^{-1}.$$

Очевидно,

$$R'(\lambda) - R(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1) R'(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) R'(\lambda) R(\lambda_1). \quad (6.16)$$

Далее, при $\lambda, \mu \in S(\lambda_1)$ получаем

$$\begin{aligned} R'(\lambda) - R(\lambda_1) &= (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1) R'(\lambda) + (\mu - \lambda) R(\lambda_1) R'(\lambda); \\ R'(\lambda) &= R(\lambda_1) (1 - (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1))^{-1} + \\ &\quad + (\mu - \lambda) R(\lambda_1) (1 - (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1))^{-1} R'(\lambda) = \\ &= R'(\mu) + (\mu - \lambda) R'(\mu) R'(\lambda) = R'(\mu) [1 + (\mu - \lambda) R'(\lambda)]. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что область значений оператора $R'(\lambda)$ при $\lambda \in S(\lambda_1)$ не зависит от λ , и в частности,

$$R_{R(\lambda_1)} \stackrel{\text{def}}{=} D' \supset D.$$

Далее, из того же равенства получаем, что все операторы $R'(\lambda)$ обратимы, если $[R'(\mu)]^{-1}$ существует хотя бы для одного значения $\mu \in S(\lambda_1)$. Покажем, что оператор $R(\lambda_1)$ обратим. Пусть u — произвольный вектор из B , $u_n \rightarrow u$, $u_n \in D_{(\lambda_1 - A)^{-1}}$. Тогда $u_n = (\lambda_1 - \bar{A}) R(\lambda_1) u_n \rightarrow (\lambda_1 - \bar{A}) R(\lambda_1) u$, так что

$$(\lambda_1 - \bar{A}) R(\lambda_1) = 1.$$

Пусть теперь u — произвольный вектор из $D_{\bar{A}}$ и $\{u_n\}$ — такая последовательность, что $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow \bar{A}u$. Тогда $u_n = R(\lambda_1) \times (\lambda - A) u_n \rightarrow R(\lambda_1) (\lambda - \bar{A}) u$, так что

$$R(\lambda_1) (\lambda - \bar{A}) = 1_{D_{\bar{A}}}.$$

Значит, справедлива формула $R(\lambda_1) = (\lambda - \bar{A})^{-1}$, и все $R'(\lambda)$ обратимы при $\lambda \in S(\lambda_1)$.

Пользуясь обратимостью $R(\lambda)$ и уравнением (6.16), получим для $u \in D$:

$$\begin{aligned} R'(\lambda) R(\lambda_1) ([R'(\lambda)]^{-1} - [R(\lambda_1)]^{-1}) u &= \\ &= R(\lambda_1) u - R'(\lambda) u = (\lambda_1 - \lambda) R'(\lambda) R(\lambda_1) u, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$([R'(\lambda)]^{-1} - [R(\lambda_1)]^{-1}) u = (\lambda - \lambda_1) u,$$

или

$$[R'(\lambda)]^{-1} u = (\lambda - A) u, \quad u \in D, \quad \lambda \in S(\lambda_1).$$

Из последнего равенства заключаем, что оператор A имеет замкнутое расширение $\lambda - [R(\lambda)]^{-1}$ с областью определения D' , а так как область определения оператора $\bar{A}$ есть также D' , то $\lambda - [R(\lambda)]^{-1} = \bar{A}$, а значит, $R'(\lambda) = (\lambda - \bar{A})^{-1}$ при $\lambda \in S(\lambda_1)$. Таким образом, последовательность $\{(\lambda - A_n)^{-1}\}$ поточечно сходится к $(\lambda - \bar{A})^{-1}$ при $\lambda \in S(\lambda_1)$.

Теперь можно повторить все предыдущее доказательство, заменив точку λ_1 на любую точку μ круга $S(\lambda_1)$. Действительно, областью значений оператора $\mu - \bar{A}$ служит все пространство B , поэтому область значений оператора $\mu - A$ будет плотной в B .

Отсюда вытекает следующее общее утверждение: резольвенты $(\lambda - A_n)^{-1}$ поточечно сходятся к $(\lambda - A)^{-1}$ на B при всех λ таких, что $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Действительно, пусть знак $\operatorname{Im} \lambda$ совпадает со знаком $\operatorname{Im} \lambda_1$. Тогда точки λ и λ_1 можно соединить последовательностью кругов $S(\mu_1), S(\mu_2), \dots, S(\mu_m)$ с центрами в точках $\lambda = \mu_1, \dots, \mu_m$, где $S(\mu_i) \cap S(\mu_{i+1}) \neq \emptyset$. Переходя от $S(\mu_1)$ к $S(\mu_2)$, от $S(\mu_2)$ к $S(\mu_3)$ и т. д., мы получим, что $(\mu - A_n)^{-1} \rightarrow (\mu - A)^{-1}$ поточечно на B при $\mu \in S(\mu_m)$. В частности, это верно и для точки λ .

Таким образом, утверждение 1) этой леммы распространяется на всю полуплоскость, в которой лежит точка λ_1 . Но по условию имеется еще точка λ_2 из другой полуплоскости, для которой также проходит все доказательство. Утверждение 2) следует из 1) и леммы 6.4. Тем самым лемма доказана.

Оказывается, операторы $e^{-iA_n t}$ поточечно сходятся к $e^{-iA t}$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 6.7. Пусть $\|e^{-iA_n t}\| \leq c(1 + |t|)^l$ и пусть производящие операторы A_n поточечно сходятся к производящему оператору A в B на всюду плотном множестве D , инвариантном относительно A . Тогда операторы $e^{-iA_n t}$ поточечно сходятся к $e^{-iA t}$ при $h \rightarrow \infty$ на B равномерно относительно значений t из компактного множества.

В частности, $\|e^{-iA t}\| \leq c(1 + |t|)^l$.

Доказательство. Положим $I_n = (1 + i\varepsilon A_n)^{-1}$, $I_\varepsilon = (1 + i\varepsilon A)^{-1}$. Выберем любое $\delta > 0$. По лемме 6.3 для любых $u \in B$ и $t_0 > 0$ найдется такое $\kappa_1 = \kappa_1(\delta, u, t_0) > 0$, что при $|\varepsilon| \leq \kappa_1$, $\varepsilon t \geq 0$, $|t| \leq t_0$ выполняется неравенство

$$\|e^{-iI_\varepsilon A t} u - e^{-iA t} u\| < \delta/3. \quad (6.17)$$

Аналогично (6.4) получим формулу

$$e^{-iI_\varepsilon A_n t} - e^{-iI_\varepsilon A t} = -i \int_0^t e^{-iI_\varepsilon A_n \tau} (I_n A_n - I_\varepsilon A) e^{-iI_\varepsilon A (t-\tau)} d\tau.$$

Отметим, что

$$I_n A_n - I_\varepsilon A = \frac{1}{i\varepsilon} (I_\varepsilon - I_n).$$

Используя это равенство и оценку ($\varepsilon t \geq 0$), получаем

$$\begin{aligned} \|(e^{-iI_\varepsilon A_n t} - e^{-iI_\varepsilon A t})u\| &\leq \\ &\leq \frac{c_1}{|\varepsilon|} \left| \int_0^t (1 + R_l(\varepsilon)|\tau|)^l \|(I_\varepsilon - I_n) e^{-iI_\varepsilon A (t-\tau)} u\| d\tau \right|. \end{aligned}$$

По лемме 6.6 подынтегральное выражение при фиксированном τ

сходится к нулю. Кроме того, это выражение имеет оценку

$$\|(I_n - I_{n\epsilon})e^{-itA(t-\tau)}u\| \leq c_2(1+|t-\tau|)^t \|u\|$$

(см. (6.1) и (6.3)).

Используя предельный переход (что здесь законно), получаем, что рассматриваемый интеграл сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что для любых $\delta > 0$, $u \in B$, $t_0 > 0$, $\epsilon \in R$ существует такое $N_1 = N_1(\delta, u, t_0, \epsilon)$, что при $n \geq N_1$, $|t| \leq t_0$, $\epsilon t > 0$ выполняется неравенство

$$\|e^{-itn\epsilon A_n t}u - e^{-it\epsilon A t}u\| < \delta/3. \quad (6.18)$$

Далее, как и в лемме 6.3, получим:

$$\begin{aligned} \|e^{-itn\epsilon A_n t}u - e^{-itA_n t}u\| &\leq \\ &\leq c_3 \left| \int_0^t (1+|t-\tau|)^t (1+|\tau|)^t d\tau \right| \|(I_{n\epsilon} - 1)A_n u\|, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где $u \in D$, $\epsilon t \geq 0$.

При $u \in D'$ имеет место тождество

$$(I_{n\epsilon} - 1)A_n u = (I_{n\epsilon} - 1)(A_n - A)u - i\epsilon I_{n\epsilon} A^2 - i\epsilon I_{n\epsilon}(A_n - A)Au.$$

Отсюда, учитывая оценку $\|I_{n\epsilon}\| \leq c_1$ и (6.19), получаем, что для любого $\delta > 0$ и всех $u \in D'$, $t_0 > 0$ существуют такие числа $\kappa_2 = \kappa_2(\delta, u, t_0) > 0$, $N_2 = N_2(\delta, u, t_0)$, что при $|\epsilon| < \kappa_2$, $\epsilon t \geq 0$, $n \geq N_2$, $|t| \leq t_0$ выполняется неравенство

$$\|e^{-itn\epsilon A_n t}u - e^{-itA_n t}u\| < \delta/3. \quad (6.20)$$

Из оценок (6.17), (6.18) и (6.20) легко вывести искомый результат. Положим $\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min \{\kappa_1(\delta, u, t_0), \kappa_2(\delta, u, t_0)\}$ и $N = N(\delta, u, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{N_1(\delta, u, t_0\epsilon_0), N_2(\delta, u, t_0)\}$. Пусть $\delta > 0$, $u \in D$, $t_0 > 0$, $|t| \leq t_0$, $n \geq N(\delta, u, t_0)$. Тогда из неравенств (6.17), (6.18) и (6.20) непосредственно получаем неравенство

$$\|e^{-itA_n t}u - e^{-itA t}u\| < \delta.$$

Пусть теперь u — произвольный вектор из B и v — такой вектор из D , что $\|u - v\| < \delta$. Тогда при $|t| \leq t_0$, $n \geq N(\delta, v, t_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-itA_n t}u - e^{-itA t}u\| &\leq \\ &\leq \|e^{-itA_n t}(u - v)\| + \|e^{-itA_n t}v - e^{-itA t}v\| + \|e^{-itA t}(u - v)\| \leq \\ &\leq c(1+t_0)^t \delta + \delta. \end{aligned}$$

Последняя лемма позволяет установить непрерывную зависимость функций от производящих операторов относительно этих операторов.

Теорема 6.2. Пусть $A_n: D \rightarrow D$, $n = 1, 2, \dots$ — производящие операторы в банаховом пространстве B , причем

$$\|e^{-tA_n}\| \leq c(1 + |t|)^s.$$

Предположим, что последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится на D по норме B к производящему оператору $A: D \rightarrow D$. Тогда для символа $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R})$ последовательность операторов $f(A_n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к $f(A)$ поточечно на B .

Доказательство. По лемме 6.7 операторы e^{-tA_n} поточечно сходятся к e^{-tA} на B равномерно относительно t из любого компактного множества.

Пусть символ f принадлежит $\mathcal{B}_s^0(\mathbb{R})$, т. е.

$$[F^{-1}f](t) = \sum_{k=1}^m c_k \delta(t - \xi^{(k)}) + \varphi(t), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ для любого $u \in B$

$$\begin{aligned} f(A_n)u - f(A)u &= \sum_{k=1}^m \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \{e^{-tA_n \xi^{(k)}} - e^{-tA \xi^{(k)}}\} u + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{supp } \varphi} \varphi(t) [e^{-tA_n} - e^{-tA}] u dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее, имеем оценку для всех $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\|f(A_n)\| \leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R})}.$$

Та же оценка справедлива и для оператора $f(A)$. Пусть $f_\varepsilon \in \mathcal{B}_s^0(\mathbb{R})$ и $f_\varepsilon \rightarrow f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $\mathcal{B}_s(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(A_n)u - f(A)u\| &\leq \|(f(A_n) - f_\varepsilon(A_n))u\| + \\ &+ \|(f_\varepsilon(A_n) - f_\varepsilon(A))u\| + \|(f_\varepsilon(A) - f(A))u\| \leq \\ &\leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \|u\| \|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R})} + \|f_\varepsilon(A_n)u - f_\varepsilon(A)u\|. \end{aligned}$$

Пусть задано $\delta > 0$. Выберем ε так, чтобы первое слагаемое из последней суммы было меньше $\delta/2$. Далее при этом фиксированном ε найдем такое $N(\delta)$, чтобы при $n \geq N$ второе слагаемое было меньше $\delta/2$ (это можно сделать, так как $f_\varepsilon \in \mathcal{B}_s^0(\mathbb{R})$). В итоге получим, что при $n \geq N(\delta)$

$$\|f(A_n)u - f(A)u\| < \delta.$$

Тем самым теорема доказана.

§ 7. Самосопряженные операторы

Пусть A — некоторый самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H и пусть имеется отображение $M: f \rightarrow \rightarrow f(A)$, заданное на функциях $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ формулой

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (F^{-1}f)(t) e^{-iAt} dt. \quad (7.1)$$

Теорема 7.1. Для любого символа $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\|f(A)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (7.2)$$

Доказательство. Можно считать, что H реализовано в виде пространства l^2 последовательностей $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ комплексных чисел, имеющих конечную норму $\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2$.

Предположим сначала, что A — ограниченный оператор. Пусть $e^{(j)}$ — вектор, определяемый формулой $e_i^{(j)} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, и пусть $Ae^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ij}e^{(i)}$, где A_{ij} — элементы матрицы оператора A .

Обозначим через A_n оператор, действующий по формуле

$$(A_nv)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}v_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(A_nv)_i = 0, \quad i > n.$$

Оператор A_n можно отождествить с матрицей $(A_{ij})_{i,j=1}^n$. Пусть $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, состоящий из собственных векторов матрицы

$$A_n\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}.$$

Дополнив нулями последовательность координат вектора ψ_i , отождествим его с соответствующим элементом пространства l^2 .

Пусть

$$v = \sum_{i=1}^n a_i\psi_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} b_ie^{(i)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(A_n)v &= \sum_{i=1}^n a_if(A_n)\psi_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} b_if(A_n)e^{(i)} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f(\lambda_i)\psi_i + f(0) \sum_{i=n+1}^{\infty} b_ie^{(i)}. \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} e^{-iA_n t} \psi_j &= e^{-i\lambda_n t} \psi_j; \\ e^{-iA_n t} e^{(j)} &= e^{(j)} \quad \text{при } j > n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f(A_n)v\|^2 &= \sum_{j=1}^n |a_j|^2 |f(\lambda_j)|^2 + |f(0)|^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_i|^2 \leq \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} |b_i|^2 \right) = \|f\|_{C(\mathbb{R})}^2 \|v\|^2, \end{aligned}$$

так что

$$\|f(A_n)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (7.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)v\|^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} A_{ij} v_j \right|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} v_j \right|^2 \leq \|AP_n v\|^2 + \|P_n A v\|^2, \end{aligned}$$

где

$$(P_n v)_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq n, \\ v & \text{при } i > n. \end{cases}$$

Очевидно, $P_n \rightarrow 0$ поточечно при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $A - A_n \rightarrow 0$ поточечно при $n \rightarrow \infty$. Тогда по теореме 6.2 имеем

$$\|[f(A) - f(A_n)]v\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ для любого $v \in H$ и любого символа $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Далее, из (7.3) следует оценка

$$\|f(A)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (7.4)$$

Освободимся теперь от предположения об ограниченности оператора A . Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в H . Рассмотрим последовательность самосопряженных операторов

$$A_n = A \left(1 + \frac{1}{n} A^2 \right)^{-1};$$

их ограниченность следует из оценки

$$\|A_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{x}{1 + \frac{x^2}{n}} \right\|_{\mathcal{B}_0(\mathbb{R})}.$$

Последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору A на множестве D_A . В самом деле, пусть $K_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{1}{n} A^2 \right)^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 + \frac{1}{n} A^2 \right) u \right\|^2 &= \left\| \left(1 + \frac{A^2}{n} \right) u, \left(1 + \frac{A^2}{n} \right) u \right\| = \\ &= \|u\|^2 + \frac{2}{n} \|Au\|^2 + \frac{1}{n^2} \|A^2 u\|^2 \geq \|u\|^2, \end{aligned}$$

так что $\|K_n\| \leq 1$, и $\frac{1}{n} K_n A^2 u = (1 - K_n)u$ для $u \in D_{A^2}$. Поэтому на всюду плотном множестве D_{A^2} имеем $(1 - K_n)u \rightarrow 0$. По теореме Банаха—Штейнгауза последовательность $\{K_n\}_{n \rightarrow \infty}$ поточечно сходится к 1 всюду и следовательно, $\{A_n\}$ поточечно сходится к A на D_A .

По теореме 6.2 последовательность $f(A_n)$ поточечно сходится к $f(A)$ для любого символа $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Но для операторов A_n справедлива оценка (7.4): $\|f(A_n)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}$, следовательно, $\|f(A)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}$, и теорема доказана.

Замечание. Оценка (7.2) означает, что гомоморфизм $M: f \rightarrow f(A)$, определенный формулой (7.1), расширяется на замыкание $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$.

Следствие. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда существует такой гомоморфизм $M_1: C(\sigma(A)) \rightarrow \text{Hom}(H, H)$, что для любого $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$f(A) = M_1 f|_{\sigma(A)}.$$

Доказательство. Множество $\sigma(A)$ содержится в отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$. Действительно, если $\lambda > \|A\|$, то $(\lambda - A)^{-1}$ есть гомоморфизм:

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-k-1}.$$

Таким образом, $\sigma(A)$ — компактное множество.

Напомним теперь, что $g(A) = 0$ для любой функции $g \in \mathcal{B}_0(\rho(A))$. Пусть $\{g\}$ — класс всех функций из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ с носителями в $\rho(A)$. Для любого $g \in \{g\}$ имеем

$$f(A) + g(A) = f(A).$$

Нетрудно видеть, что

$$\inf_{g \in \{g\}} \|f + g\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \sigma(A)} |f(x)|.$$

Отсюда получаем, что

$$\|f(A)\| \leq \sup_{x \in \sigma(A)} |f(x)| = \|f|_{\sigma(A)}\|_{C(\sigma(A))}.$$

Отсюда следует, что оператор $f(A)$ однозначно определяется сужением $f|_{\sigma(A)}$ функции f на спектр оператора A и что оператор, переводящий $f|_{\sigma(A)}$ в $f(A)$, ограничен как оператор, действующий из $C(\sigma(A))$ в $\text{Hom}(H, H)$. Остается заметить, что множество функций вида $f|_{\sigma(A)}$, где $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$, плотно в $C(\sigma(A))$. Действительно, пусть g — произвольная непрерывная функция на $\sigma(A)$. Продолжим g до непрерывной на $\mathbb{R}$ функции G с компактным

носителем. Тогда последовательность $\{G_n\}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, определяемая формулами

$$G_n(x) = c_n \int_{|x-\xi| < \frac{1}{n}} G(\xi) e^{-\frac{1}{1-n^2(x-\xi)^2}} d\xi,$$

$$c_n^{-1} = \int_{|x| < \frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{1-n^2x^2}} dx,$$

равномерно сходится к G , так что $G_n|_{\sigma(A)} \rightarrow g$ в $C(\sigma(A))$.

Следствие. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда для любого вещественного λ и любого $\Delta > 0$ существует такой проектор $E'_\lambda(\Delta)$, что подпространства $E'_\lambda(\Delta)H$ и $(1 - E'_\lambda(\Delta))H$ инвариантны относительно $f(A)$ для любого $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ и ортогональны друг другу, причем для любой функции $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ с носителем в $(\lambda, \lambda + \Delta)$ справедливо равенство $f(A) = f(A)E'_\lambda(\Delta) = E'_\lambda(\Delta)f(A)$ и для любой функции $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\|f(A)E'_\lambda(\Delta)\| \leq \sup_{\lambda \leq x \leq \lambda + \Delta} |f(x)|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = \theta(x - \lambda)\theta(\lambda + \Delta - x)$. Положим $g(x) = (x - \lambda)(\lambda + \Delta - x)\varphi(x)$. Тогда существует такая последовательность g_n функций из $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$, сходящаяся равномерно к g , что $g_n(x) = 0$ в (зависящих от n) окрестностях точек λ и $\lambda + \Delta$ и $|g_n(x)| < g(x)$ всюду. Пусть $h \in D_{A^*}$. Имеем

$$g_n(A)h = \varphi_n(A)(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)h,$$

где $\varphi_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x - \lambda)(\lambda + \Delta - x)}$. Поэтому

$$\|g_n(A)h\| \leq \|\varphi_n\|_{C(\mathbb{R})} \|(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)h\|.$$

Переходя в этой оценке к пределу при $n \rightarrow \infty$ и используя неравенство $|g_n(x)| < g(x)$, получаем

$$\|g(A)h\| \leq \|(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)h\|.$$

Пусть $N: ((A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)h_1 = 0) \Rightarrow h_1 \in N$. Учитывая последнее соотношение, положим по определению

$$\varphi(A)h_1 = 0, \quad \varphi(A)(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)h = g(A)h, \quad h \in D_{A^*}.$$

Мы определили оператор $\varphi(A)$ на области значений оператора $(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)$, причем на этом множестве $\|\varphi(A)\| \leq 1$.

Убедимся в том, что область значений оператора $(A - \lambda)(\lambda + \Delta - A)$ является плотной в H/N . Для этого прежде всего заметим, что если $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ — вещественная функция, то оператор $f(A)$ будет самосопряженным.

Действительно, для любых $h, q \in H$ имеем

$$\begin{aligned}(f(A)h, q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}f)(t) (e^{-iAt}h, q) dt = \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}f)(t) (h, e^{iAt}q) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(F^{-1}f)(-t)} (h, e^{iAt}q) dt = \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(F^{-1}f)(t)} (h, e^{-iAt}q) dt = (h, f(A)q).\end{aligned}$$

Положим $f(x) = \frac{(x-\lambda)(\lambda+\Delta-x)}{x^2+1}$. Тогда область значений оператора $f(A)$ является плотной в H/N и входит в область значений оператора $(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)$.

Итак, оператор $\varphi(A)$ определен на всюду плотном множестве, и поэтому его можно расширить до гомоморфизма $E'_\lambda(\Delta): H \rightarrow H$, полагая $E'_\lambda(\Delta)h \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $h \in N$.

Покажем, что оператор $E'_\lambda(\Delta)$ коммутирует с $f(A)$ для любого $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Действительно, пусть $h = (A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q$. Тогда

$$\begin{aligned}f(A)E'_\lambda(\Delta)h &= f(A)g(A)q, \\E'_\lambda(\Delta)f(A)h &= E'_\lambda(\Delta)f(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q = \\&= E'_\lambda(\Delta)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)f(A)q = g(A)f(A)q = f(A)g(A)q.\end{aligned}$$

Далее, пусть h принадлежит (плотной в H/N) области значений оператора $(A-\lambda)^2(\lambda+\Delta-A)^2$, т. е. $h = (A-\lambda)^2(\lambda+\Delta-A)^2q$. Тогда

$$\begin{aligned}E'_\lambda(\Delta)h &= g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q, \\[E'_\lambda(\Delta)]^2h &= g^2(A)q = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(A)g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q = \\&= g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q = E'_\lambda(\Delta)h,\end{aligned}$$

так как $\varphi_n g \rightarrow g$ в $C(\mathbb{R})$.

Таким образом, $E'_\lambda(\Delta)$ есть ортогональный проектор. Отсюда, очевидно, следует доказываемое утверждение.

Построенный проектор $E'_\lambda(\Delta)$ отвечает символу $\varphi(x) = \theta(x-\lambda) \times \theta(\lambda+\Delta-x)$, доопределенному в точках разрыва условием полунепрерывности снизу. Легко получить проектор $E_\lambda(\Delta)$ с аналогичными свойствами, отвечающий символу $\varphi(x)$, доопределенному условием непрерывности слева. Именно, пусть $\Delta_1 > \Delta$; тогда положим

$$E_\lambda(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} E'_\lambda(\Delta_1) - E'_{\lambda+\Delta}(\Delta_1 - \Delta).$$

Справедлива формула

$$E_\lambda(\Delta) + E_{\lambda+\Delta}(\Delta_1) = E_\lambda(\Delta + \Delta_1).$$

Если символ f приблизить равномерно с точностью ε кусочно-постоянной функцией вида

$$f_\varepsilon(x) = \sum_k a_k \theta(x - \lambda_k) \theta(\lambda_k + \Delta_k - x), \quad |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,$$

где $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta_k$, то будет справедлива оценка

$$\left\| f(A) - \sum_k a_k E_{\lambda_k}(\Delta_k) \right\| \leq \varepsilon.$$

Теорема 7.2. Существует гомоморфизм $M_c: C(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Op}(H)$, совпадающий на $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ с гомоморфизмом $M: \mathcal{B}_0(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Op}(H)$ и удовлетворяющий оценке $\|M_c\| \leq 1$.

Доказательство. Обозначим через $E_n(A)$ проектор $E'_{-n}(2n)$. Пусть f — произвольная функция из $C(\mathbb{R})$. Положим по определению

$$f(A) E_n(A) = f_n(A) E_n(A),$$

где $f_n(x)$ — произвольная непрерывная функция с компактным носителем, совпадающая с $f(x)$ в окрестности отрезка $[-n, n]$. Тем самым оператор $f(A)$ определен на плотном в H множестве

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(A) H$$

и справедливы оценки

$$\|f_n(A) E_n(A)\| \leq \sup_{x \in [-n, n]} |f(x)| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Значит, оператор $f(A)$ можно расширить до гомоморфизма $H \rightarrow H$, который мы снова обозначим через $f(A)$. Для гомоморфизма $f(A)$ справедлива оценка

$$\|f(A)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Если мы положим по определению

$$M_c f = f(A),$$

то тем самым теорема будет доказана.

Теорема 7.3. Для любой непрерывной вещественной функции f на $\mathbb{R}$ оператор $e^{if(A)}$ является унитарным.

Доказательство. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая полная ортонормированная система в H , что $e_j \in D_A$, $j=1, 2, \dots$. Обозначим

$$A_{ij} = (Ae_j, e_i).$$

Пусть A_n — гомоморфизм в H , действующий по формулам

$$A_n e_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} e_j, \quad i=1, \dots, n;$$

$$A_n e_i = 0, \quad i=n+1, n+2, \dots$$

Пусть H_n — подпространство в H , натянутое на $e_1, \dots, e_n$, и $\psi_1, \dots, \psi_n$ — ортонормированный базис в H_n , состоящий из собственных векторов оператора A_n :

$$A_n \psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для произвольного вектора $h \in H$ имеем

$$h = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e_j,$$

$$e^{if(A_n)} h = \sum_{j=1}^n a_j e^{if(\lambda_j)} \psi_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{if(0)} e_j,$$

откуда следует, что

$$\|e^{if(A_n)} h\|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2 = \|h\|^2.$$

Далее, для любого вектора $h = \sum_{j=1}^m b_j h_j$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n h = Ah.$$

Предположим вначале, что $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Тогда по теореме 6.1 имеем

$$e^{if(A)} h = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{if(A_n)} h,$$

откуда следует, что

$$\|e^{if(A)} h\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{if(A_n)} h\| = \|h\|$$

для любого h из плотного в H множества конечных линейных комбинаций векторов $e_1, e_2, \dots$. Значит, и для любого $h \in H$ оператор $e^{if(A)}$ сохраняет норму:

$$\|e^{if(A)} h\| = \|h\|.$$

Это равенство легко переносится также на случай, когда f — произвольная непрерывная функция с компактным носителем.

Пусть теперь f — произвольная непрерывная вещественная функция. Тогда для любого $h \in E_n(A)H$ (см. доказательство теоремы 7.2) имеем

$$e^{if(A)} h = e^{if_n(A)} h,$$

где f_n — некоторая непрерывная функция с компактным носителем. Следовательно, снова $\|e^{if(A)} h\| = \|h\|$ для любого h из плотного в H множества, а стало быть и для любого $h \in H$.

Остается заметить, что оператор $e^{if(A)}$ имеет обратный оператор $e^{-if(A)}$, определенный всюду на H , и теорема доказана.

§ 8. Регулярные операторы

В этом параграфе мы распространим результаты предыдущих параграфов на случай n -параметрических групп.

Пусть E — векторное пространство и пусть $\{U(t)\}$, $t \in \mathbb{R}^n$ есть n -параметрическая группа гомоморфизмов $E \rightarrow E$:

$$U(t + \tau) = U(t) U(\tau).$$

Пусть далее E наделено двумя нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причем $\|\cdot\|_1 \geq c \|\cdot\|_2$, $c = \text{const}$, и пусть

$$\frac{\partial U(t)h}{\partial t_j} = -iA_j U(t)h,$$

где производная понимается в смысле $\|\cdot\|_1$ и где $A_j: E \rightarrow E$ — линейные операторы. Назовем $A = (A_1, \dots, A_n)$ производящим набором операторов степени $N = N_1, \dots, N_n$ (по отношению к группе $\{U(t)\}$ и нормам $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$), если

$$\|U(t)h\|_2 \leq c_1 \prod_i (1 + |t_i|)^{N_i} \|h\|_1.$$

Теорема 8.1. Если A — производящий набор степени N по отношению к группе $\{U(t)\}$ и нормам $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, то в E существует такая норма $\|\cdot\|_{\text{mid}}$, что A есть производящий набор степени N по отношению к той же группе и нормам $\|\cdot\|_{\text{mid}}, \|\cdot\|_{\text{mid}}$.

Доказательство. Определим $\|\cdot\|_{\text{mid}}$ по формуле

$$\|h\|_{\text{mid}} = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\|U(t)h\|_2}{\prod_i (1 + |t_i|)^{N_i}}. \quad (8.1)$$

Очевидно, что аксиомы нормы выполнены, причем $\|h\|_{\text{mid}} \geq \|h\|_2$. Из (1.3) следует, что

$$\|h\|_{\text{mid}} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{c_1 (1 + |t|)^N \|h\|_1}{(1 + |t|)^N} = c_1 \|h\|_1.$$

Поэтому производная любой функции со значениями в E в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ является одновременно производной в смысле нормы $\|\cdot\|_{\text{mid}}$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\|U(t)h\|_{\text{mid}}}{(1 + |t|)^N} &= \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\|U(t + \tau)h\|_2}{(1 + |t + \tau|)^N (1 + |t|)^N} \leq \\ &\leq \sup_{t, \tau \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\|U(t + \tau)h\|_2}{(1 + |t + \tau|)^N} \cdot \frac{(1 + |t + \tau|)^N}{(1 + |t|)^N (1 + |\tau|)^N} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку последний множитель не превосходит 1, то

$$\|U(t)h\|_{\text{mid}} \leq (1 + |t|)^N \|h\|_{\text{mid}},$$

что и требовалось доказать.

Пусть B_{mid} — пополнение пространства E по норме $\|\cdot\|_{\text{mid}}$. Расширение оператора $U(t)$ до гомоморфизма $B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$ будем обозначать через $e^{-i\bar{A}t}$, где $At = A_1 t_1 + \dots + A_n t_n$. Через $\bar{A} = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n)$ будем обозначать набор замыканий операторов A_i в пространстве B_{mid} . Заметим, что операторы $\bar{A}_i$ существуют (см. теорему 1.1).

Определение. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ и пусть A — производящий набор степени N . Определим гомоморфизм $\varphi(\bar{A}): B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$ при помощи формулы

$$\varphi(\bar{A})h = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\bar{A}t} h dt,$$

где $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$. Функцию φ будем называть символом оператора $\varphi(\bar{A})$.

Очевидно, справедлива оценка:

$$\|\varphi(\bar{A})\| \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)}, \quad c = \text{const},$$

где $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{N_1, \dots, N_n}(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, отображение $M: \varphi \rightarrow \varphi(A)$ есть гомоморфизм банахова пространства $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$ в банахово пространство $\text{Op}(B_{\text{mid}})$ гомоморфизмов $B_{\text{mid}} \rightarrow B_{\text{mid}}$.

Теорема 8.2. Гомоморфизм M является гомоморфизмом алгебр.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1. Аналогично теореме 7.1 получается следующая теорема.

Теорема 8.3. Пусть (A_1, A_2) — производящий набор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , состоящий из самосопряженных операторов. Тогда

$$\|f(A_1, A_2)\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Определение. Резольвентным множеством $\rho(A)$ производящего набора A назовем минимальное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, обладающее тем свойством, что

$$(\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ и } \text{supp } \varphi \subset \rho(A)) \Rightarrow (\varphi(\bar{A}) = 0).$$

Множество $\sigma(A) = \mathbb{R}^n \setminus \rho(A)$ назовем спектром производящего набора.

Определение. Регулярным оператором степени N назовем оператор вида $T = A_1 + iA_2$, где (A_1, A_2) — производящий набор степени $\bar{N} = \{N, 0\}$, причем

$$e^{-i(\bar{A}_1 t_1 + \bar{A}_2 t_2)} = e^{-i\bar{A}_1 t_1} e^{-i\bar{A}_2 t_2} = e^{-i\bar{A}_2 t_2} e^{-i\bar{A}_1 t_1}.$$

Лемма 8.1. Существует замыкание $\bar{T}$ регулярного оператора T в B_{mid} .

Доказательство. Пусть $f(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}^2$, и пусть $T = A_1 + iA_2$, где $A = (A_1, A_2)$ — производящий набор. Оператор

$f(\bar{A})$ имеет обратный. Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(\varphi_n(\bar{A})h) = h^*(h)$$

для любых $h \in B_{\text{mid}}$, $h^* = B_{\text{mid}}^*$. Если $f(\bar{A})h = 0$, то

$$\varphi_n(\bar{A})f(\bar{A})h = 0,$$

где $\varphi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{f(x)} = \varphi_n(x)(|x|^2 + 1)$.

Но $\varphi_n(x)f(x) = \varphi_n(x)$, поэтому $\varphi_n(\bar{A})f(\bar{A}) = \varphi_n(\bar{A})$. Следовательно, для любого $h^* \in B_{\text{mid}}^*$

$$h^*(\varphi_n(\bar{A})h) = 0 = h^*(h),$$

откуда и вытекает, что $h = 0$.

Рассмотрим теперь оператор $f(\bar{A})T$. Этот оператор имеет замкнутое расширение $g(\bar{A})$, где $g(x) = \frac{x_1 + ix_2}{|x|^2 + 1}$. Таким образом,

$$(x_n \rightarrow 0 \text{ и } f(\bar{A})Tx_n \rightarrow z) \Rightarrow (z = 0).$$

Пусть $x_n \rightarrow 0$ и $Tx_n \rightarrow y$. Тогда $f(\bar{A})Tx_n \rightarrow f(\bar{A})y = 0$. Поскольку оператор $f(\bar{A})$ является обратимым, то отсюда следует, что $y = 0$, и лемма доказана.

Теорема 8.3. *Спектр замыкания T регулярного оператора $T = A_1 + iA_2$ в B_{mid} совпадает со спектром производящего набора.*

Доказательство аналогично доказательствам теорем 5.1 и 5.2.

Теорема 8.4. *Пусть T — регулярный оператор и пусть спектр его замыкания T в B_{mid} состоит из изолированных точек. Тогда система с. п.-элементов оператора T является полной в B_{mid} .*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.4.

Лемма 8.2. *Пусть T — оператор в нормированном пространстве B и $\{B_\alpha\}$ — такое семейство векторных подпространств пространства B , что*

а) B_α конечномерны, $\dim B_\alpha \leq N + 1$, причем любая система $\{g_\alpha\}$ такая, что $g_\alpha \in B_\alpha$, $g_\alpha \neq 0$, линейно независима,

б) B_α инвариантны относительно T .

Тогда сужение T_0 оператора T на $E = \bigcup B_\alpha$ есть регулярный оператор степени N (относительно некоторой пары норм).

Доказательство. Пусть T_α — сужение оператора T на B_α : $T_\alpha = TP_\alpha$, где $P_\alpha: E \rightarrow B_\alpha$ — проектор из E на B_α . Без ограничения общности можно считать, что нормальная жорданова форма матрицы T_α состоит из одной жордановой клетки (в противном случае можно представить B_α в виде прямой суммы инвариантных подпространств оператора T_α . Итак, пусть T_α

приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $(N+1) \times (N+1)$ -матрицы A'_α и A''_α , которые в этом же представлении имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{Re} \lambda_\alpha & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \operatorname{Re} \lambda_\alpha & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \operatorname{Re} \lambda_\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \lambda_\alpha & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{Im} \lambda_\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \operatorname{Im} \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что A'_α есть производящий оператор степени N , а A''_α — скалярный оператор, так что A''_α коммутирует с A'_α и A''_α — производящий оператор нулевой степени. Производящий набор (A'_α, A''_α) порождает группу

$$e^{-iA_\alpha t} = e^{-iA'_\alpha t - iA''_\alpha t} = e^{-iA'_\alpha t} e^{-iA''_\alpha t}.$$

Действительно, пусть μ — вещественное число, A — жорданова клетка размера $N+1$:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mu & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \mu \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор-функция $u(t) = e^{-iAt}h$, $h \in \mathbb{C}^{N+1}$ является решением задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -iAu, \quad u(0) = h,$$

или, в развернутой форме,

$$\frac{du_1}{dt} = -i\mu u_1 - iu_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{du_N}{dt} = -i\mu u_N - iu_{N+1},$$

$$\frac{du_{N+1}}{dt} = -i\mu u_{N+1},$$

$$u_j(0) = h_j, \quad j = 1, \dots, N+1,$$

где u_j, h_j компоненты векторов u и h . Решая последовательно уравнения этой системы начиная с нижнего, получаем

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{N+1-j} e^{-\mu t} P_{j,k}(t) h_{j+k},$$

где $P_{j,k}(t)$ — полиномы степени k (которые нетрудно вычислить точно). Отсюда следует, что

$$\|e^{-iA_\alpha t} h\|_B \leq c_\alpha (1 + |t|)^N \|h\|_B,$$

где c_α — константа, зависящая от α . Кроме того, $T_\alpha = A'_\alpha + iA''_\alpha$. Этому разложению соответствует разложение оператора T_0 :

$$T_0 = A' + iA'',$$

где $A' = \sum A'_\alpha P_\alpha A'' = \sum A''_\alpha P_\alpha$.

Пара (A', A'') порождает группу

$$U(t', t'') h = \sum e^{-i(A'_\alpha t' + A''_\alpha t'')} P_\alpha h.$$

Введем в E норму $\| \cdot \|_1$:

$$\|h\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum c_\alpha \|P_\alpha h\|_B.$$

Ясно, что $\| \cdot \|_1 \geq \| \cdot \|_B$. Справедлива оценка

$$\|U(t', t'') h\|_B \leq (1 + |t'|)^N \|h\|_1.$$

Таким образом, (A', A'') есть производящий набор степени $(N, 0)$ по отношению к нормам $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_B$, и теорема доказана.

Непосредственно из этой теоремы вытекает следующая теорема.

Теорема 8.5. Пусть T — замкнутый оператор в банаховом пространстве B с дискретным спектром, и обладающий полной системой с. п.-элементов, причем у оператора T нет присоединенных элементов порядка выше чем N . Тогда сужение оператора T на некоторое плотное в B линейное многообразие есть регулярный оператор.

§ 9. Обобщенные собственные и присоединенные функции

Начнем с физического примера. Состояние системы частиц с n степенями свободы в квантовой механике описывается функцией из пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$, а физическим величинам отвечают операторы в $L_2(\mathbb{R}^n)$. При этом логическая схема квантовой механики предполагает возможность разложения произвольного элемента из $L_2(\mathbb{R}^n)$ по «собственным функциям» оператора, соответствующего любой физической величине. (Кавычки поставлены здесь потому, что те функции, которые в физической литературе принято называть собственными, не обязательно принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$.)

Пусть, например, $n=1$ и пусть A — оператор умножения на независимую переменную в $L_2(\mathbb{R})$. Этот оператор отвечает одной из важнейших физических величин — координате частицы. Уравнения

$$(A - \lambda)\psi = 0$$

для собственных функций оператора A не имеют обычных решений; однако в физике считают, что δ_λ является *обобщенной собственной функцией оператора умножения* на независимую переменную и пишут

$$x\delta(x - \lambda) = \lambda\delta(x - \lambda). \quad (9.1)$$

Равенство (9.1) можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим замыкание $\overline{A - \lambda}$ оператора $A - \lambda$ как оператора, действующего из пространства $W_2^{-s}(\mathbb{R})$ в пространство $L_2(\mathbb{R})$, причем s достаточно велико. Тогда

$$(\overline{A - \lambda})\delta_\lambda = 0.$$

Заметим, что равенство $\overline{A}\delta_\lambda = \lambda\delta_\lambda$ не имеет места, так как $\delta_\lambda \notin L_2(\mathbb{R})$. Тот факт, что $\overline{A - \lambda} \neq \overline{A} - \lambda$, обусловлен тем, что оператор умножения на скаляр не ограничен как оператор, действующий из $W_2^{-s}(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Далее (в физике) пишется разложение

$$\psi(x) \doteq \int \psi(\lambda) \delta(x - \lambda) d\lambda, \quad (9.2)$$

или, в более общей форме, разложение

$$\psi(x) = \int c(\lambda) \psi_\lambda(x) d\lambda, \quad (9.3)$$

где $\{\psi_\lambda(x)\}$ — семейство обобщенных собственных функций оператора какой-нибудь физической величины. Поскольку $\psi_\lambda(x)$ входит в (9.3) как функция параметра λ , то естественно считать, что оператор $(\overline{A - \lambda})$ действует в пространстве функций аргумента λ , т. е. рассматривать λ как оператор умножения на независимую переменную.

В настоящем параграфе именно с этих позиций будет получено обобщение формулы (9.2) на случай разложения произвольного вектора из B_{mid} по обобщенным с. п.-функциям регулярного оператора.

Перейдем к определениям и обозначениям.

Рассмотрим $\text{Hom}(\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$. По определению, $\text{Hom}(\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ есть пространство ограниченных функционалов на $\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n)$, т. е. пространство $\mathcal{B}_N^*(\mathbb{R}^n)$ для элементов которого было принято обозначение:

$$f[g] = \int f(\lambda) g(\lambda) d\lambda, \quad f \in \text{Hom}[\mathcal{B}_N(\mathbb{R}^n), \mathbb{C}], \quad g \in \mathcal{B}_N. \quad (*)$$

Как мы уже условились выше, этот интеграл, имеющий смысл лишь для непрерывных $f(\lambda)$, записывается формально для любого функционала f , и $f(\lambda)$ называется обобщенной функцией.

Пусть $G(\lambda)$ — непрерывная функция от λ со значениями в B . Тогда интеграл

$$\int_{R^n} G(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) \in \mathcal{B}_N(R^n) \dots$$

определяет элемент пространства B , так что оператор G :

$$Gf \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^n} G(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

является элементом пространства $\text{Hom}(\mathcal{B}_N(R^n), B)$. Условимся, по аналогии с (*), для любого элемента $G \in \text{Hom}(\mathcal{B}_N(R^n), B)$ писать формально

$$Gf = \int G(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

и называть $G(\lambda)$ *обобщенной функцией от λ со значениями в B* . Обычные обобщенные функции являются в силу этого определения обобщенными функциями со значениями на комплексной плоскости.

Пусть T — регулярный оператор степени N , B_{mid} — отвечающее ему промежуточное банахово пространство и пусть $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in C$. Рассмотрим оператор

$$T^{(k)} = (T - \lambda)^k,$$

который действует из B_{mid} в B_{mid} . Мы будем его рассматривать как оператор, действующий из пространства обобщенных функций от λ со значениями в B_{mid} в пространство непрерывных функций от λ со значениями в B_{mid} (для того, чтобы значения оператора $(T - \lambda)^k$ принадлежали B_{mid} для любого фиксированного λ).

Итак, мы будем рассматривать $(T - \lambda)^k \stackrel{\text{def}}{=} T^{(k)}$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ как оператор, действующий из $\text{Hom}(\mathcal{B}_N(R^2), B_{\text{mid}})$ в $C(R^2, B_{\text{mid}})$. Уточним, что понимается под этим. Обозначим через $T_0^{(k)}$:

$$\text{Hom } \mathcal{B}_N(R^2, B_{\text{mid}}) \rightarrow C(R^2, B_{\text{mid}})$$

оператор, определенный на таких непрерывных функциях со значениями в B_{mid} , что отображение

$$\lambda \rightarrow \overline{(T - \lambda)^k} f(\lambda)$$

есть непрерывная функция в R^2 со значениями в B_{mid} , и действующий по формуле

$$T_0^{(k)} f(\lambda) = \overline{(T - \lambda)^k} f(\lambda).$$

Расширим оператор $T_0^{(k)}$ до оператора $T^{(k)}$ следующим образом. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность функций из $D_{T_0^{(k)}}$, что существует обобщен-

ная функция f со значениями в B_{mid} обладающая тем свойством, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda.$$

Пусть при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^{(k)} f_n = g$. Тогда положим $T^{(k)} f = g$.

Проверим корректность данного определения. Пусть $f_n \in D_{T_0^{(k)}}$ и пусть для любого $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = 0.$$

Пусть, далее, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^{(k)} f_n = g.$$

Нужно показать, что $g=0$. Имеем, для любого $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\overline{T-\lambda})^k f_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} g(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda.$$

Пусть P — гладкая достаточно быстро убывающая строго положительная функция и пусть $T = A_1 + iA_2$, где $(A_1, A_2) = A$ производящий набор, определяющий регуляриный оператор T . Положим

$$q(x) = P(x) (x_1 + ix_2 - \lambda)^k = \sum_{j=0}^k q_j(x) \lambda^k.$$

Тогда оператор $[P(A)]^{-1} q(A)$ является замкнутым расширением оператора $(T-\lambda)^k$, причем оператор $[P(A)]^{-1}$ замкнут как оператор, обратный к гомоморфизму. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\overline{T-\lambda})^k f_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = [P(A)]^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \int_{\mathbb{R}^2} q_j(A) \lambda^k f_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = 0$$

для любого $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Отсюда следует, что $g=0$.

Определение. Ядро оператора $T^{(k)}$ назовем системой обобщенных с. п.-функций порядка $\leq k$ оператора T .

Определение. Систему $\mathcal{E}$ обобщенных с. п.-функций порядка $\leq k$ оператора T назовем полной, если для любого вектора $h \in B_{\text{mid}}$ найдется такая обобщенная функция $G \in \mathcal{E}$ и такая функция $f \in \mathcal{B}_N(\mathbb{R}^2)$, что

$$h = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda) G(\lambda) d\lambda.$$

Теорема 9.1. Система обобщенных с. п.-функций порядка $\leq N+2$ регулярного оператора T степени N полна.

Лемма. Пусть $\varphi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ — следующая δ -образная последовательность:

$$\varphi_n(x) = n^2 \varphi(nx), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dx = 1.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_1 + Cix_2)^{N+2} \varphi_n(x)\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Доказательство. Обозначим $\psi_n(x) = (x_1 + Cix_2)^{N+2} \varphi_n(x)$.
Имеем: $\psi_n(x) = n^{-N} \psi_1(nx)$. Следовательно, $\tilde{\psi}_n(p) = n^{-(N+2)} \tilde{\psi}_1\left(\frac{p}{n}\right)$,
где $\tilde{\psi}_n = F^{-1}\psi_n$. Пусть f — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условию $\sup_{p \in \mathbb{R}^2} \frac{|f(p)|}{(1+|p_1|)^N} \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}_n(p) f(p) dp \right| &= n^{-N-1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}_1(p) f(np) dp \right| \leq \\ &\leq n^{-N-1} \|\psi_1\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \sup_{p \in \mathbb{R}^2} \frac{|f(np)|}{(1+|p_1|)^N} \leq \\ &\leq n^{-N-1} \|\psi_1\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{(1+n|t|)^N}{(1+|t|)^N} = n^{-1} \|\psi_1\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi_n\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \leq n^{-1} \|\psi_1\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

И лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)$ оператор $\tilde{T}$ с областью определения $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле $\tilde{T}f(x) = (x_1 + ix_2)f(x)$.

Нетрудно видеть, что оператор $\tilde{T}$ регулярен, причем пространство B_{mid} для него совпадает с $\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)$. Покажем теперь, что тождественный оператор

$$I \in \text{Op}(\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)) = \text{Hom}(\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2))$$

принадлежит ядру оператора $\tilde{T}^{(N+1)}$. Пусть φ — монотонно невозрастающая бесконечно дифференцируемая функция, определенная на $[0, \infty)$ и обращающаяся в 0 вместе со всеми производными на $[1, \infty)$; пусть $\int_0^1 \xi \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi}$. Положим

$$\varphi_n(x) = n^2 \varphi(n|x|).$$

Поставим в соответствие каждому $\lambda \in \mathbb{R}^2$ отображение

$$\Phi_n(\lambda): x \rightarrow \varphi_n(x - \lambda).$$

Очевидно, Φ_n — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)$. Пусть, далее, $\{e_n\}$ — такая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $e_n(x) = 1$ при $|x| < n$ и $0 \leq e_n(x) \leq 1$. Положим

$$I_n(\lambda) = e_n(\lambda) \Phi_n(\lambda).$$

Пусть ψ — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим последовательность интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^2} I_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_n(\lambda) e_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda,$$

При достаточно больших n

$$\int_{\mathbb{R}^2} [I_n(\lambda) - I(\lambda)] \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda - \psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi_n - \psi.$$

Покажем, что $\|\psi_n - \psi\|_{W_2^{N+1}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; это будет, в частности, означать, что $\psi_n \rightarrow \psi$ в $\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)$. Имеем

$$\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x - \lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(y) \psi(x - y) dy. \quad (9.5)$$

Из (9.5) видно, что $\psi_n(x)$ сходится к $\psi(x)$ равномерно вместе со всеми своими производными. Поскольку носители функций ψ_n лежат в некотором компактном множестве, не зависящем от n , то отсюда следует, что $\psi_n \rightarrow \psi$ в любом пространстве Соболева.

Рассмотрим теперь последовательность обобщенных функций

$$G_n = \check{T}_0^{(N+2)} I_n; \quad G_n(\lambda) = (\check{T} - \lambda)^{N+2} e_n(\lambda) \Phi_n(\lambda),$$

или, более подробно,

$$G_n(\lambda)(x) = (x_1 + ix_2 - \lambda_1 - i\lambda_2)^{N+2} e_n(\lambda) \varphi_n(x - \lambda).$$

Очевидно, что

$$\|G_n(\lambda)\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \leq \|G_n(0)\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} = \|h_n\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)},$$

где $h_n(x) = (x_1 + ix_2)^{N+2} \varphi_n(x)$. Легко проверить, что $\|h_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\|G_n(\lambda)\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ равномерно по λ при $n \rightarrow \infty$, так что

$$\check{T}^{(N+2)} I = 0.$$

Таким образом, система обобщенных с. п.-функций порядка $\leq N+2$ оператора $\check{T}$ полна; действительно, для любого $f \in \mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)$

$$f = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda) I(\lambda) d\lambda.$$

Пусть теперь T — произвольный регулярный оператор, $T = A_1 + + iA_2$, где $A = (A_1, A_2)$ — производящий набор, и пусть h — вектор из B_{mid} . Рассмотрим отображение

$$\Phi_n: \lambda \rightarrow \varphi_{n,\lambda}(\bar{A}) h, \quad \text{где} \quad \varphi_{n,\lambda}(x) = \varphi_n(x - \lambda).$$

Очевидно, что Φ_n — непрерывная функция со значениями в B_{mid} . Положим $K_n(\lambda) = e_n(\lambda) \Phi_n(\lambda)$.

Пусть ψ , как и раньше — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим последовательность интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_n(\lambda) e_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = g_n.$$

Пусть K — следующая обобщенная функция со значениями в B_{mid} :

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(\lambda) f(\lambda) d\lambda = f(\bar{A}) h. \quad (9.6)$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} K(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \psi(\bar{A}) h.$$

Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_n(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda = \left[\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{n,\lambda}(\bar{A}) \psi(\lambda) d\lambda \right] h = \psi_n(\bar{A}) h,$$

где $\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x - \lambda) \psi(\lambda) d\lambda$, так что

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ в } \mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2) \text{ и } \psi_n(\bar{A}) h \rightarrow \psi(\bar{A}) h$$

в B_{mid} .

Рассмотрим теперь последовательность обобщенных функций $g_n = T_0^{(N+2)} K_n$:

$$g_n(\lambda) = (T - \lambda)^{N+2} e_n(\lambda) \Phi_n(\lambda) = \overline{(T - \lambda)^{N+2}} e_n(\lambda) \varphi_{n,\lambda}(\bar{A}) h.$$

Очевидно, что

$$\|g_n(\lambda)\|_{B_{\text{mid}}} \leq \| \overline{(T - \lambda)^{N+2}} \varphi_{n,\lambda}(\bar{A}) \| = \| \psi_{n,\lambda}(\bar{A}) h \|,$$

где $\psi_{n,\lambda}(x) = (x_1 + ix_2 - \lambda_1 - i\lambda_2)^{N+2} \varphi_n(x - \lambda)$.

Поэтому

$$\|g_n(\lambda)\|_{B_{\text{mid}}} \leq \|\psi_{n,0}\|_{\mathcal{B}_{N,0}(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{B_{\text{mid}}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, $T^{(N+1)} K = 0$ и K принадлежит семейству обобщенных с. п.-функций.

Вектор h можно представить согласно (9.6) в виде

$$h = \int_{\mathbb{R}^2} K(\lambda) \cdot 1 d\lambda,$$

и теорема доказана.

§ 10. Самосопряженные операторы как трансформаторы в пространстве Гильберта — Шмидта

Пусть A и G — самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H и пусть T — оператор Шмидта, т. е. $T \in B_2(H)$; где $B_2(H)$ — совокупность операторов, норма Шмидта которых ограничена. Можно сопоставить A и G операторы в пространстве $B_2(H)$ (обозначим их через $\bar{A}$ и $\bar{G}$), действующие по правилу:

$$\bar{A}T \stackrel{\text{def}}{=} AT, \quad T \in D_{\bar{A}} = \{S \in B_2(H) : AS \in B_2(H)\},$$

$$\bar{G}T \stackrel{\text{def}}{=} TG, \quad T \in D_{\bar{G}} = \{S \in B_2(H) : \bar{S}G \in B_2(H)\}.$$

Теорема 10.1. *Операторы $\bar{A}$ и $\bar{G}$ являются самосопряженными в гильбертовом пространстве $B_2(H)$ и коммутируют на некотором плотном множестве.*

Доказательство. Покажем сначала, что $D_{\bar{A}} \cap D_{\bar{G}}$ плотно в $B_2(H)$. Пусть $E_n(A)$ — оператор с символом $\theta(x+n)\theta(n-x)$, построенный при доказательстве теоремы 7.2 ($E'_\lambda(\Delta)$ при $\lambda = -n$, $\Delta = 2n$), и пусть $\{e_i^{(n)}\}$ — полная ортонормированная система в $E_n(A)H$, причем $\{e_i^{(n+1)}\}$ содержит $\{e_i^{(n)}\}$ в качестве подсистемы. Пусть $E_n(G)$ и $\{g_i^{(n)}\}$ — такие же проекторы и ортонормированные системы для оператора G . Тогда множество $\{e_i\}$ всех векторов вида $e_i^{(n)}$ образует полную ортонормированную систему в H и то же самое справедливо для векторов $g_i^{(n)}$. Действительно, любой вектор из H можно приблизить по норме линейными комбинациями векторов вида $\varphi(A)h$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, а вектор вида $\varphi(A)h$ принадлежит $E_n(A)H$ при достаточно больших n .

Имеем для любого $T \in B_2(H)$:

$$\|TE_n(G) - T\|_{B_2(H)} = \|T\|_{B_2(H)} - \sum_i \|Tg_i^{(n)}\|^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Аналогично,

$$\|E_n(A)T - T\|_{B_2(H)} \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, ибо это последовательность остатков сходящегося ряда $\sum_{i,j} |(Te_j, e_i)|^2$. Таким образом, множество K операторов вида $E_n(A)TE_m(G)$, $T \in B_2(H)$ плотно в $B_2(H)$. Но множество D содержится в $D_{\bar{A}} \cap D_{\bar{G}}$, так как операторы $AE_n(A)$ и $E_m(G)G$ ограничены. Тем самым плотность $D_{\bar{A}} \cap D_{\bar{G}}$ в $B_2(H)$ доказана.

Пусть $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ — такая полная ортонормированная система в $B_2(H)$, что $T_j \in D_{\bar{A}} \cap D_{\bar{G}}$, $j = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $\bar{A}\bar{G}T_j = \bar{G}\bar{A}T_j$, так что $\bar{A}$ и $\bar{G}$ коммутируют на плотном в $B_2(H)$ множестве линейных комбинаций вида $\sum_{j=1}^n a_j T_j$.

Докажем, что $\bar{A}$ и $\bar{G}$ — самосопряженные операторы. Пусть $T \in D_{\bar{A}}$, т. е. $AT \in B_2(H)$. Тогда для $S \in D_{\bar{A}}$ имеем $(\bar{A}S, T)_2 = (AS, T)_2 = (S, AT)_2 = (S, \bar{A}T)_2$, т. е. $T \in D_{\bar{A}^*}$, и $\bar{A}^*T = \bar{A}T$. Докажем обратное включение: $D_{\bar{A}^*} \subset D_{\bar{A}}$.

Пусть $T \in D_{\bar{A}^*}$, т. е. существует такой оператор $W \in B_2(H)$, что $(AS, T)_2 = (S, W)_2$ для любого $S \in D_{\bar{A}}$. Выберем в H такую полную ортонормированную систему $\{e_j\}$, что $e_j \in D_A$, $j = 1,$

2, ... Положим $T_{ij}u = (u, e_i)e_j$. Тогда $T_{ij}e_k = \delta_{ik}e_j$, так что

$$\|T_{ij}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\delta_{ik}e_j\|^2 = 1.$$

Легко видеть, что операторы T_{ij} , T_{kl} с несовпадающими парами индексов ортогональны в $B_2(H)$. Итак, $\{T_{ij}\}$ — ортонормированная система в $B_2(H)$. Легко проверить, что эта система полна в $B_2(H)$. Имеем: $\|AT_{ij}\|_2 = \|Ae_j\| < \infty$, так что $T_{ij} \in D_{\tilde{A}}$. Далее, имеют место соотношения

$$(AT_{ij}, T)_{\tilde{A}} = (T_{ij}, W)_{\tilde{A}}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

По определению скалярного произведения в $B_2(H)$ последние равенства можно переписать в виде

$$(Ae_j, Te_i) = (e_j, We_i);$$

отсюда следует, что

$$ATe_i = We_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

т. е. $AT = W \in B_2(H)$. Этим доказана самосопряженность оператора $\tilde{A}$.

Для доказательства самосопряженности оператора $\tilde{G}$ рассмотрим полную ортонормированную систему $\{e'_i\}$ в H , состоящую из векторов, принадлежащих D_G , и пусть

$$T'_{ij}u = (u, e'_i)e_j, \quad \forall u \in H.$$

Найдем сопряженный оператор $(T'_{ij}G)^*$ произведения $T'_{ij}G$. Поскольку область значений оператора T'_{ij} содержится в D_G , то

$$(T'_{ij}G)^* = GT'_{ij}^* = GT'_{ji}.$$

Поэтому если $T \in D_{G^*}$, то существует такой оператор $W \in B_2(H)$, что

$$(T'_{ij}G, T)_{\tilde{A}} = (T^*, (T'_{ij}G)^*)_{\tilde{A}} = (T^*, GT'_{ji})_{\tilde{A}} = (T'_{ji}, W)_{\tilde{A}}.$$

Отсюда

$$(e'_j, TGe'_i) = (e'_j, We'_i), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

т. е. оператор TG имеет замыкание, равное $W \in B_2(H)$. Это означает, что $T \in D_{\tilde{G}}$. Докажем обратное включение $D_{\tilde{G}} \subset D_{\tilde{G}^*}$ и равенство $\tilde{G}^*S = \tilde{G}S$ для $S \in D_{\tilde{G}}$. Этим будет доказано, что $\tilde{G}$ — самосопряженный оператор.

Пусть $T \in D_{\tilde{G}}$, т. е. $\overline{TG} \in B_2(H)$; при этом $(TG)^* \in B_2(H)$. Определим, как действует оператор $(TG)^*$ на вектор e'_i . Имеем, для любого $u \in H$:

$$(\overline{TGu}, e'_i) = (u, (TG)^* e'_i).$$

Поэтому для $u \in D_G$ получаем: $(Gu, T^*e'_i) = (u, (TG)^*e'_i)$. Отсюда $T^*e'_i \in D_G$ и $(TG)^*e'_i = GT^*e'_i$. Используя эти соображения для любого $S \in D_{\bar{G}}$, получаем

$$\begin{aligned}(S, \bar{G}T)_2 &= (S, \bar{T}\bar{G})_2 = ((TG)^*, S^*)_2 = \\ &= \sum_k ((TG)^*e'_k, S^*e'_k) = \sum_k (\bar{G}T^*e_k, S^*e_k); \\ (\bar{G}S, T)_2 &= (\bar{S}\bar{G}, T)_2 = (T^*, (SG)^*)_2 = \\ &= \sum_k (T^*e'_k, (SG)^*e'_k) = \sum_k (T^*e'_k, (\bar{G}S^*)e'_k).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $T \in D_{\bar{G}}$ и $\bar{G}^*T = \bar{G}T$, и предложение доказано.

Операторы $\bar{A}$ и $\bar{G}$ порождают группы $\{e^{-i\bar{A}t}\}$ и $\{e^{-i\bar{G}t}\}$, которые действуют по формулам

$$e^{-i\bar{A}t}T = e^{-iAt}T, \quad e^{-i\bar{G}t}T = Te^{-iGt}. \quad (10.1)$$

Докажем, например, второе равенство. Рассмотрим две функции:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= [e^{-i\bar{G}t}T]^*h, \\ u_2(t) &= (Te^{-iGt})^*h, \quad T^*h \in D_G.\end{aligned}$$

Имеем $u_1(0) = u_2(0) = T^*h$. Далее,

$$\frac{du_1}{dt} = (-i\bar{G}e^{-i\bar{G}t}T)^*h = i[(e^{-i\bar{G}t}T)G]^*h = iG(e^{-i\bar{G}t}T)^*h = iGu_1(t);$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{d}{dt}e^{iGt}T^*h = iGe^{iGt}T^*h = iGu_2(t),$$

так что функции u_1 и u_2 , удовлетворяющие одному и тому же уравнению $\frac{du}{dt} = iGu$ и одному и тому же начальному условию, совпадают. Так как множество операторов T , удовлетворяющих условию $T^*h \in D_G$ для плотного в H множества векторов h , плотно в $B_2(H)$, то формула

$$e^{-i\bar{G}t}T = Te^{-iGt}$$

справедлива для любого $T \in B_2(H)$.

Из формул (10.1) следует, что плотное в $B_2(H)$ множество K операторов вида $E_n(A)TE_m(G)$, где $E_n(A)$, $E_m(G)$ — рассмотренные выше проекторы, инвариантно относительно групп $\{e^{-i\bar{A}t}\}$, $\{e^{-i\bar{G}t}\}$, причем

$$e^{-i\bar{A}t}e^{-i\bar{G}\tau} = e^{-i\bar{G}\tau}e^{-i\bar{A}t}.$$

Рассмотрим *двупараметрическую группу* $\{e^{-i\bar{A}t-i\bar{G}\tau}\}$:

$$e^{-i\bar{A}t-i\bar{G}\tau} \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i\bar{A}t}e^{-i\bar{G}\tau}.$$

Для любого $T \in K$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\vec{A}t - i\vec{G}\tau} T = -i\vec{A} e^{-i\vec{A}t - i\vec{G}\tau} T,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\vec{A}t - i\vec{G}\tau} T = -i\vec{G} e^{-i\vec{A}t - i\vec{G}\tau} T.$$

Таким образом, $(\vec{A}, \vec{G})$ есть производящий набор операторов.

Теорема 10.2. Пусть $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{f} = F^{-1}f$. Тогда

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, \tau) e^{-i\vec{A}t} T e^{-i\vec{G}\tau} dt d\tau \right\|_2 \leq \|f\|_{C(\mathbb{R}^2)} \|T\|_2.$$

Доказательство следует из формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, \tau) e^{-i\vec{A}t} T e^{-i\vec{G}\tau} dt d\tau &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, \tau) e^{-i\vec{A}t - i\vec{G}\tau} T dt d\tau = f(\vec{A}, \vec{G}) T \end{aligned}$$

и теоремы 7.2.

Задача. Мы определили бесконечно дифференцируемые растущие не быстрее степени аргумента функции от коммутирующих операторов. Показать, что они образуют алгебру с μ -структурой, где алгебра $\mathcal{A}$ есть алгебра коммутирующих неограниченных операторов, а множество M состоит из производящих операторов и действительных функций от них.

В этой главе мы построим μ -структуру для случая, когда множество M состоит всего из двух некоммутирующих производящих вектор-операторов A_1 и A_2 (*). Обобщить эту конструкцию на случай, когда M состоит из большего числа некоммутирующих неограниченных производящих операторов, оказывается невозможным без дополнительных предположений. Поэтому основные «рабочие» формулы теории μ -структур (формулу коммутации и K -формулу) приходится доказывать специально и при дополнительных предположениях даже для случая двух некоммутирующих операторов, т. к. эти формулы содержат также и их коммутатор.

Эти затруднения, разумеется, отсутствуют для ограниченных операторов. В этом случае приведенные здесь конструкции функций от упорядоченных операторов являются μ -структурами.

Из тех же соображений, что и в главе III, мы приводим независимое построение функций от упорядоченных операторов и лишь в § 10 строим растущие символы, что и приводит к μ -структурам.

§ 1. Предварительные определения

Пусть $\{B_\tau\}$ (где τ пробегает множество всех целых чисел) есть семейство банаховых пространств, удовлетворяющее следующим условиям:

а) существует линейное многообразие D , плотное в B_τ при любом τ ;

б) $(\tau < \tau') \Rightarrow B_\tau \rightarrow B_{\tau'}$, т. е. $\|\cdot\|_{B_\tau} \geq \|\cdot\|_{B_{\tau'}}$.

Семейство $\{B_\tau\}$ назовем *банаховой шкалой*; норму в B_τ будем обозначать $\|\cdot\|_\tau$.

Линейное отображение $A: D \rightarrow D$ назовем *производящим оператором степени s с шагом k* в банаховой шкале B_τ , если при любом τ оператор A является производящим оператором степени s

*) Более того, речь идет на самом деле о небольшом обобщении μ -структуры, так как будут определены лишь операции $\mu: (x_1 \rightarrow \hat{A}_1, x_2 \rightarrow \hat{A}_2)$ и $\mu: (x_1 \rightarrow \hat{A}_2, x_2 \rightarrow \hat{A}_1)$.

с определяющей парой пространств $(B_\tau, B_{\tau+k})$; обозначим через $\{U_A(t)\}$ группу гомоморфизмов порожденную A , а через $U_{A, \tau}(t)$ — замыкание оператора $U_A(t)$: $B_\tau \rightarrow B_{\tau+k}$.

Пусть $\{T_\tau\}$ — такое семейство гомоморфизмов $B_\tau \rightarrow B_{\tau+l}$, что $T_\tau D \subset D$ и $T_\tau h = T_{\tau'} h$ при $h \in D$ для любых τ, τ' . Назовем семейство $T = \{T_\tau\}$ *переводящим оператором* с шагом l в шкале $\{B_\tau\}$. В тех случаях, когда это не ведет к недоразумению, будем вместо $T_\tau h$ писать Th .

Пусть $A_1, \dots, A_N$ — производящие операторы в шкале $\{B_\tau\}$ с шагом соответственно $k_1, \dots, k_N$ и степени $s_1, \dots, s_N$ и пусть $T^{(1)}, \dots, T^{(N-1)}$ — переводящие операторы с шагом соответственно $l_1, \dots, l_{N-1}$. Припишем операторам $A_1, \dots, A_N, T^{(1)}, \dots, T^{(N-1)}$ номера (которые будем ставить над буквами, обозначающими операторы) следующим образом:

$$A_1^1, T^{(1)2}, A_2^3, \dots, T^{(N-1)2N-2}, A_N^{2N-1}; \quad (1.1)$$

при этом будем говорить, что оператор A_1 действует первым, оператор $T^{(1)}$ — вторым, оператор A_N действует $(2N-1)$ -м. Набор (1.1) будем называть *вектор-оператором*. Заметим, что некоторые из компонент вектор-оператора могут, вообще говоря, коммутировать между собой или даже быть равными.

Поставим в соответствие вектор-оператору (1.1) следующий гомоморфизм $U_\tau(t)$, зависящий от параметра $t \in \mathbb{R}^N$:

$$U(t_1, t_2, \dots, t_N) = U_{A_N}(t_N) T^{(N-1)} U_{A_{N-1}}(t_{N-1}) \dots U_{A_2}(t_2) T^{(1)} U_{A_1}(t_1) \quad (1.2)$$

(здесь и в дальнейшем, где это возможно, индекс τ в обозначении $U_\tau(t)$ опускается).

Теорема 1.1. Для любого $h \in B_\tau$ функция

$$t \rightarrow U(t)h, \quad t \in \mathbb{R}^N, \quad U(t)h \in B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$$

непрерывна.

Доказательство. При $N=1$ утверждение очевидно. Доказательство проводится по индукции; однако во избежание громоздких выкладок мы покажем только переход от $N=1$ к $N=2$, так как переход от произвольного N к $N+1$ принципиально не отличается от этого более простого случая.

Пусть $N=2$; обозначим $T^{(1)}$ через T . Имеем

$$\begin{aligned} U(t_1 + \delta_1, t_2 + \delta_2)h - U(t_1, t_2)h &= \\ &= U_{A_2}(t_2 + \delta_2) T U_{A_1}(t_1 + \delta_1)h - U_{A_2}(t_2) T U_{A_1}(t_1)h = \\ &= U_{A_2}(t_2 + \delta_2) T [U_{A_1}(t_1 + \delta_1) - U_{A_1}(t_1)]h + \\ &\quad + [U_{A_2}(t_2 + \delta_2) - U_{A_2}(t_2)] T U_{A_1}(t_1)h. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждое из двух последних слагаемых стремится к нулю по норме пространства $B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$ при $\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$.

Обозначим через $C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ банахово пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^N$, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|g(x)|}{(1+|x_1|)^{s_1} \dots (1+|x_N|)^{s_N}}.$$

Очевидно, что δ_ε -функция Дирака и функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ могут рассматриваться как элементы сопряженного пространства $C_{s_1, \dots, s_N}^*(\mathbb{R}^N)$. Мы будем пользоваться для значений функционалов из $C_{s_1, \dots, s_N}^*$ интегральными обозначениями:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}(x) \varphi(x) dx, \quad f \in C_{s_1, \dots, s_N}^*(\mathbb{R}^N), \quad \varphi \in C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N).$$

Задача. Показать, что при $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$; $\bar{\varphi} = \varphi$

$$\|\varphi\|_{C_{s_1, \dots, s_N}^*(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)| (1+|x_1|)^{s_1} \dots (1+|x_N|)^{s_N} dx.$$

Решение. Положим $I = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)| \prod_{i=1}^N (1+|x_i|)^{s_i} dx$. Очевидно,

$\|\varphi\|_{C_s^*(\mathbb{R}^N)} \leq I$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$, $F = \max |\varphi(x)|$, $c = \max \{|x| : x \in \text{supp } \varphi\}$. Существует такое открытое множество $U_\varepsilon \subset \text{supp } \varphi$, что замыкание $\bar{U}_\varepsilon$ лежит внутри носителя φ и

$$\text{mes}[\text{supp } \varphi - U_\varepsilon] < \frac{\varepsilon}{(1+c)^{|s|} \cdot F}, \quad \text{где } |s| = s_1 + \dots + s_N.$$

Построим теперь такую финитную непрерывную функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, что $\varphi_\varepsilon(x) = \text{sign } \varphi(x)$ при $x \in U_\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin \text{supp } \varphi$, $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$, $\varphi_\varepsilon(x) \cdot \varphi(x) \geq 0$. Пусть $\psi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x) \prod_{i=1}^N (1+|x_i|)^{s_i}$. Тогда $\psi_\varepsilon \in C_s(\mathbb{R}^N)$ и $\|\psi_\varepsilon\|_{C_s} = 1$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \cdot \psi_\varepsilon(x) dx \right| &\geq \int_{U_\varepsilon} |\varphi(x)| \cdot \prod_{i=1}^N (1+|x_i|)^{s_i} dx \geq \\ &\geq I - \int_{\text{supp } \varphi - U_\varepsilon} |\varphi(x)| \prod_{i=1}^N (1+|x_i|)^{s_i} dx > I - \varepsilon; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|\varphi\|_{C_s^*} = \sup_{\|\psi\|_{C_s} \leq 1} \left| \int \varphi(x) \psi(x) dx \right| \geq \left| \int \varphi(x) \cdot \psi_\varepsilon(x) dx \right| > I - \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $\|\varphi\|_{C_s^*(\mathbb{R}^N)} \geq I$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ линейную оболочку множества

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cup \{\delta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^N}, \quad \delta_\varepsilon \in C_{s_1, \dots, s_N}^*(\mathbb{R}^N).$$

Через $C_{s_1, \dots, s_N}^+(\mathbb{R}^N)$ обозначим замыкание $\mathcal{L}$ в $C_{s_1, \dots, s_N}^*(\mathbb{R}^N)$.

Построим по пространству $C_{s_1, \dots, s_N}^+$ изометричное ему банахово пространство функций $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ точно так же, как мы построили в гл. II $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^N)$ по $C_s^+(\mathbb{R}^N)$. Используемый при этом изометрический изоморфизм будем называть *преобразованием Фурье* и обозначать буквой F .

Определим пространство $W_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ по норме

$$\|f\|_{W_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1+p_1^2)^{s_1} \dots (1+p_N^2)^{s_N} |\tilde{f}(p)|^2 dp,$$

где $\tilde{f} = Ff$. Пусть через $C^{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ обозначено пространство функций $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, для которых при $0 \leq k_i \leq s_i$ непрерывны производные $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_N} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}$ и конечна норма

$$\|f\|_{C^{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)} = \max_{0 \leq k_i \leq s_i} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^k f(x)|, \quad k = (k_1, \dots, k_N).$$

Теорема 1.2. Пусть $k_i > s_i + \frac{1}{2}$; тогда имеют место вложения

$$W_{s_1, \dots, s_N}^{k_1, \dots, k_N}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N) \subset C^{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N).$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 4.4, 4.5 главы II.

§ 2. Функции от двух некоммутирующих самосопряженных операторов

Пусть A и B — самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а T — некоторый оператор из класса Гильберта-Шмидта $B_2(H)$.

В § 10 гл. III паре операторов (A, B) была поставлена в соответствие пара $(\bar{A}, \bar{B})$ коммутирующих на всюду плотном множестве операторов, действующих в гильбертовом пространстве $B_2(H)$. Имеется гомоморфизм

$$\mathcal{M}_{\bar{A}, \bar{B}}: C(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Op}(B_2(H)),$$

который переводит функцию $f \in C(\mathbb{R}^2)$ в оператор $f(\bar{A}, \bar{B})$, $\|f(\bar{A}, \bar{B})\|_{B_2(H)} \leq \|f\|_{C(\mathbb{R}^2)}$. Гомоморфизм $\mathcal{M}_{\bar{A}, \bar{B}}$ индуцирует для фиксированного T отображение

$$\mathcal{M}_{\bar{A}, \bar{B}}^T: C(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_2(H)$$

с помощью формулы

$$\mathcal{M}_{\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B}} f \stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{A}, \vec{B}) T.$$

Мы будем обычно писать просто $\mathcal{M}$ вместо $\mathcal{M}_{\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B}}$ и пользоваться обозначением

$$\mathcal{M}f = \overset{\circ}{T}f(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}).$$

Очевидно, имеет место оценка

$$\|\overset{\circ}{T}f(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\| \leq \|f\|_{C(\mathbb{R}^2)} \|T\|_2,$$

где $\|\cdot\|$ — норма оператора в H . Таким образом, $\mathcal{M}$ является гомоморфизмом нормированных пространств. Заметим, что определение оператора $\overset{\circ}{T}f(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$ согласуется с определениями предыдущего параграфа: если $f \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$, то имеет место формула

$$\overset{\circ}{T}f(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})h = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (F^{-1}f)(t_1, t_2) e^{-iAt_1} T e^{-iBt_2} h dt_1 dt_2$$

для любого $h \in H$. Кроме того, справедливо равенство

$$\overset{\circ}{T}f_1(\overset{\circ}{A}) f_2(\overset{\circ}{A}) = f_1(A) T f_2(B).$$

Лемма 2.1. *Имеет место оценка*

$$\|\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\|_2 \leq \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^2)} \|\overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\|_2.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\|_2 &= \|\varphi(\vec{A}, \vec{B})\psi(\vec{A}, \vec{B})T\|_2 \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^2)} \|\psi(\vec{A}, \vec{B})T\|_2 = \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^2)} \|\overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})\|_2. \end{aligned}$$

Из леммы 2.1 следует, что ядро гомоморфизма $\mathcal{M}$ является идеалом в $C(\mathbb{R}^2)$.

Определение. Точку $\lambda \in \mathbb{R}^2$ будем называть точкой резольвентного множества $\rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B})$ пары операторов $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$ относительно оператора $\overset{\circ}{T}$, если существует такая окрестность U этой точки, что любая функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем, лежащим в U , принадлежит ядру гомоморфизма $\mathcal{M}$.

Дополнение множества $\rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B})$ в $\mathbb{R}^2$ назовем спектром $\sigma(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B})$ пары операторов $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$ относительно $\overset{\circ}{T}$.

Теорема 2.1. 1) Любая функция из $C(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B})$ принадлежит ядру гомоморфизма $\mathcal{M}$.

2) Если φ принадлежит ядру гомоморфизма $\mathcal{M}$, то любая точка $\lambda \in \mathbb{R}^2$, для которой $\varphi(\lambda) \neq 0$, принадлежит $\rho(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{B})$.

Доказательство. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } f \subset \rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$. Заметим, что $\rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$ является максимальным открытым множеством в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющим условию

$$[\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ и } \text{supp } \varphi \subset \rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})] \Rightarrow [\overset{A}{T}\varphi(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = 0].$$

Предположим, что носитель f компактен. Тогда найдется такая последовательность $\{f_n\}$ функций из C_0^∞ , что $\text{supp } f_n \subset \rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C(\mathbb{R}^2)} = 0$. Поэтому

$$\overset{A}{T}f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{A}{T}f_n(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = 0.$$

Откажемся от предположения компактности $\text{supp } f$. Рассмотрим плотное в H линейное многообразие L векторов вида

$$q = \psi(B)h, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Очевидно, достаточно доказать, что сужение оператора $\overset{A}{T}f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$ на L равно нулю. Пусть $q = \psi(B)h$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и пусть $\{\varphi_n\}$ — такая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_n(A)$ поточечно сходится к единичному оператору. Имеем:

$$\overset{A}{T}f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})q = \overset{A}{T}f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})\psi(\overset{B}{B})h = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{A}{T}\varphi_n(\overset{A}{A})f(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})\psi(\overset{B}{B})h = 0,$$

так как носитель функции $\varphi_n(x_1)f(x_1, x_2)\psi(x_2)$ компактен и лежит в $\rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$. Пункт 1 доказан.

Пусть теперь $\overset{A}{T}\varphi(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = 0$ и $\varphi(\lambda) \neq 0$, λ — некоторая точка из $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим функцию $e_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, обращающуюся в 0 вне ε — окрестности точки λ . При достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $F = e_\lambda/\varphi$ принадлежит $C(\mathbb{R}^2)$. Но $e_\lambda = \varphi F$ и функция φ принадлежит ядру гомоморфизма $\mathcal{M}$. Так как ядро гомоморфизма $\mathcal{M}$ есть идеал в $C(\mathbb{R}^2)$, то $\overset{A}{T}e_\lambda(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. 1) Точка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ принадлежит $\rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$ тогда и только тогда, когда существуют функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\varphi_1(\lambda_1) \neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2) \neq 0$ и $\varphi_1(A)\overset{A}{T}\varphi_2(B) = 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ и существуют такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_1(\lambda_1) \neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2) \neq 0$ и $\varphi_1(A)\overset{A}{T}\varphi_2(B) = 0$. Докажем, что $\lambda \in \rho(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$; обратное утверждение следует непосредственно из определения. Очевидно, что существует такая окрестность U точки λ , в которой функция $\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)$ не обращается в 0. Пусть ψ — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем в U . Обозначим $\chi(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)}$. Тогда

$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $\psi(x) = \chi(x) \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)$. Так как ядро гомоморфизма $\mathcal{M}$ является идеалом в $C(\mathbb{R}^2)$, то $T\psi(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}) = 0$. И теорема доказана.

Следствие. 1) $\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C}) \subset \sigma(A) \times \sigma(B)$;

2) точка (λ_1, λ_2) принадлежит $\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C})$ тогда и только тогда, когда точка (λ_2, λ_1) принадлежит $\sigma(\overset{B}{B}, \overset{A}{A}, \overset{C}{C})$.

Пусть $C(\rho)$ — множество всех непрерывных на $\mathbb{R}^2$ комплексных функций с носителями в открытом множестве $\rho \subset \mathbb{R}^2$. $C(\rho)$ является идеалом в $C(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим банахову фактор-алгебру $C(\mathbb{R}^2)/\overline{C(\rho)}$. Обозначим через σ дополнение к ρ в $\mathbb{R}^2$. Пусть $C(\sigma)$ — алгебра непрерывных комплексных функций на σ с обычной нормой

$$\|f\|_{C(\sigma)} = \sup_{x \in \sigma} |f(x)|.$$

Если f_1 и f_2 — две функции из $C(\mathbb{R}^2)$, которым отвечает один и тот же элемент из $C(\mathbb{R}^2)/\overline{C(\rho)}$, то сужения функций f_1 и f_2 на σ совпадают. Значит, отображение сужения

$$f \mapsto f|_\sigma$$

индуцирует отображение $\pi_0: C(\mathbb{R}^2)/\overline{C(\rho)} \rightarrow C(\sigma)$, которое является отображением на все $C(\sigma)$, так как любую непрерывную на σ функцию можно продолжить до функции, непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

Лемма 2.2. *Отображение π_0 сохраняет норму.*

Доказательство предоставляется читателю.

Из леммы 2.2 следует, что π_0 — изоморфизм. отождествим с помощью этого изоморфизма алгебры $C(\mathbb{R}^2)/\overline{C(\rho)}$ и $C(\sigma)$.

Теорема 2.3. Пусть $\pi: f \mapsto f|_{\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C})}$ — проекция $C(\mathbb{R}^2)$ на $C(\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C}))$. Тогда имеет место разложение

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\sigma \pi. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathcal{M}_\sigma: C(\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C})) \rightarrow B_2(H)$ — гомоморфизм банаховых пространств, определяемый единственным образом формулой (2.1).

Имеют место оценки:

$$\|\mathcal{M}_\sigma\| \leq \|T\|_2, \|\mathcal{M}_\sigma \varphi \psi\|_2 \leq \|\varphi\|_{C(\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C}))} \|\mathcal{M}_\sigma \psi\|_2.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Наконец, приведем следующую важную для некоторых приложений теорему.

Теорема 2.4. Пусть φ — вещественная непрерывная функция на $\sigma(\overset{A}{A}, \overset{B}{B}, \overset{C}{C})$. Тогда $\|Te^{i\varphi}(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})\|_2 = \|T\|_2$.

Эта теорема непосредственно следует из унитарности оператора $e^{i\varphi}(\overset{A}{A}, \overset{B}{B})$ (см. предыдущую главу и теоремы 2.3).

§ 3. Функции от некоммутирующих операторов

Пусть пространство $C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N, B)$ определено аналогично тому, как было определено в гл. III пространство $C_s(\mathbb{R}, B)$. Если $f \in C_{s_1, \dots, s_N}^+(\mathbb{R}^N)$ и $G \in C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N, B)$, то интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) G(x) dx.$$

будет пониматься в том же смысле, что и в случае $N=1$.

Пусть имеется вектор-оператор (1.1). Положим для любого $\varphi \in \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} T^{(1)} T^{(2)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(A_1, A_2, \dots, A_N \right) h &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\varphi}(t) U(t) h dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$, а $U(t)$ — операторная функция (1.2).

Лемма 3.1. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \| T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(A_1, \dots, A_N \right) \|_{B_\tau \rightarrow B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}} &\leq \\ &\leq c \| T^{(1)} \|_{B_\tau+k_1 \rightarrow B_{\tau+k_1+l_1}} \times \dots \\ &\dots \times \| T^{(N-2)} \|_{B_{\tau+k_1+\dots+k_{N-1}+l_1+\dots+l_{N-2}} \rightarrow B_{\tau+k_1+\dots+k_{N-1}+l_1+\dots+l_{N-1}}} \times \\ &\quad \times \| \varphi \|_{\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}}, \end{aligned}$$

где c зависит только от τ и от операторов $A_1, \dots, A_N$.

Доказательство сразу следует из неравенства

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) G(x) dx \right\|_B \leq \| f \|_{C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)} \| G \|_{C_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N, B)}.$$

Замечание. Очевидно, что в приведенных выше конструкциях можно считать степени s_i производящих операторов $A_i: B_\tau \rightarrow B_{\tau+k_i}$ функциями от τ . Мы не делали этого, чтобы не загромождать записи. В каждой конкретной формуле ясно, в какой точке τ нужно взять s_i . Другой подход состоит в том, чтобы рассматривать банаховы шкалы $\{B_\tau\}$, где τ пробегает лишь конечное множество значений. Тогда можно выбрать степени s_i , не зависящее от τ , но оператор

$$T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(A_1, \dots, A_N \right): B_\tau \rightarrow B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$$

будет определен уже не для всех, а только для некоторых τ .

Пример. Пусть

$$B_\tau = W_{\frac{1}{2}-\tau}(\mathbf{R}), \quad D = C_0^\infty(\mathbf{R}), \\ A_2 \varphi(x) = x\varphi(x), \quad A_1 \varphi(x) = -i\varphi'(x),$$

$$T\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \sqrt{1+p^{2m}} \tilde{\varphi}(p) dp, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Тогда

$$k_1 = k_2 = 0, \quad l = m, \quad s_1 = 0, \quad s_2(\tau) = \begin{cases} -\tau & \text{при } \tau < 0, \\ 0 & \text{при } \tau \geq 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\overset{2}{T}\varphi(\overset{2}{A}_2, \overset{1}{A}_1)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip \cdot x} \varphi(x, p) \sqrt{1+p^{2m}} \tilde{\psi}(p) dp,$$

где $\tilde{\psi} = F\psi$. Мы будем обозначать

$$\overset{2}{T}\varphi(\overset{2}{A}_2, \overset{1}{A}_1)\psi(x) = L(\overset{2}{x}, -i\partial/\partial x)\psi(x),$$

где $L(p, x) = \varphi(p, x) \sqrt{1+p^{2m}}$. В силу леммы 3.1 имеем

$$\|L(\overset{2}{x}, -i\partial/\partial x)\|_{W_2^r(\mathbf{R}) \rightarrow W_2^{r-m}(\mathbf{R})} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{r-m, 0}(\mathbf{R}^2)},$$

где

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{L(x_1, x_2)}{\sqrt{1+x_2^{2m}}}, \quad c = \text{const.}$$

Задача. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_{l,0}(\mathbf{R}^2)$,

$$L(x, p) = \varphi(x, p) \sqrt{1+p^{2m}}.$$

Положим

$$L(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} p \cdot x} L(x, p) dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{h} p \cdot \xi} U(\xi) d\xi, \quad U \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Пусть S — бесконечно дифференцируемая вещественная финитная функция.

Определим оператор $T \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1+(p+S')^{2m}}$ следующим образом. Рассмотрим производящий оператор $A \stackrel{\text{def}}{=} p + S'$:

$$AU(x) = -ihU'(x) + S'(x)U(x).$$

Положим $T_n(\xi) = \varphi_n(\xi) \sqrt{1+\xi^{2m}}$, где $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, определенная в лемме 1.13 главы III. Пусть $TU = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\bar{A})U$.

- 1) Доказать, что T — переводящий оператор шага m в $\{W_{\frac{1}{2}-\tau}(\mathbf{R})\}$.
- 2) Доказать равенство

$$e^{-\frac{i}{h} S(x)} L(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) e^{\frac{i}{h} S(x)} U(x) = L(\overset{2}{x}, p + \overset{1}{S}') U(x),$$

где

$$L(\overset{2}{x}, p + \overset{1}{S}') \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1+(p + S')^{2m}} \varphi(\overset{2}{x}, p + \overset{1}{S}'), \quad U \in W_{\frac{1}{2}-\tau}(\mathbf{R}).$$

3) Доказать, что это равенство остается справедливым и для произвольной функции $S \in C^\infty$, если рассматривать его на финитных функциях U .

Обозначение. Если $\chi = \varphi\psi$, то будем писать

$$\begin{aligned} T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \chi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1, \dots, A_N \end{smallmatrix} \right) &= \\ &= T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1, \dots, A_N \end{smallmatrix} \right) \times \psi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1, \dots, A_N \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Пусть $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_N(x_N)$, где $\varphi_i \in \mathcal{B}_{s_i}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1, \dots, A_N \end{smallmatrix} \right) &= \\ &= \varphi_N(A_N) T^{(N-1)} \varphi_{N-1}(A_{N-1}) \dots T^{(1)} \varphi_1(A_1). \end{aligned}$$

Доказательство легко получить из (3.1).

Лемма 3.3. Линейная оболочка множества функций ψ вида

$$\psi(x) = \psi_1(x_1) \dots \psi_N(x_N), \quad \psi_i \in \mathcal{B}_{s_i}(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

является плотной в $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$.

Доказательство. Достаточно показать, что линейными комбинациями функций вида (3.2) можно приблизить в пространстве $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ Фурье-образы функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, а также экспоненты

$$x \rightarrow e^{-ia_1 x_1 - \dots - ia_N x_N}.$$

Для экспонент это очевидно, так как

$$e^{-ia_1 x_1 - \dots - ia_N x_N} = e^{-ia_1 x_1} \dots e^{-ia_N x_N}.$$

Пусть теперь φ — Фурье-образ функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\varphi \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ при любом l . Всякую функцию из пространства Соболева можно сколь угодно точно приблизить по норме этого пространства линейными комбинациями произведений вида (3.2), где все ψ_i принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (докажите это). Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой вложения 4.4 гл. II и 1.2.

Леммы 3.1 и 3.2 означают, что существует гомоморфизм банаховых пространств:

$$M: \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Hom}(B_\tau, B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}),$$

который определяется формулой (3.1) и который переводит функцию φ в оператор

$$T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1, \dots, A_N \end{smallmatrix} \right);$$

кроме того, он обладает тем свойством, что

$$\begin{aligned} T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ A_1 \end{smallmatrix} \right) \times \varphi_2 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ A_2 \end{smallmatrix} \right) \times \dots \times \varphi_N \left(\begin{smallmatrix} 2N-1 \\ A_N \end{smallmatrix} \right) &= \\ &= \varphi_N(A_N) T^{(N-1)} \varphi_{N-1}(A_{N-1}) \dots T^{(1)} \varphi_1(A_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Этот гомоморфизм, как следует из леммы 3.3, определяется свойством 3.3 однозначно.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует, и притом единственный, гомоморфизм*

$$\mathcal{M}: \varphi \rightarrow T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{2N-1}{A}_N \right)$$

банахова пространства $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ в банахово пространство всюду определенных линейных ограниченных операторов из B_{τ} в $B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$, обладающий свойством (3.3).

§ 4. Спектр вектор-оператора

Примем дальнейшие соглашения относительно обозначений. Если переводящий оператор T является тождественным, то будем опускать его в обозначениях функций от вектор-оператора и будем нумеровать подряд все оставшиеся операторы. Например, вместо $\overset{1}{\varphi}(\overset{1}{A}, \overset{2}{A})$ будем писать $\varphi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A})$.

Пусть $O: D_O \rightarrow B_{\tau}$, причем $D_O \supset D$. Тогда норму сужения $O|_D$, рассматриваемого как оператор из B_{τ} в B_{τ} , будем обозначать через $\|O\|_{\tau \rightarrow \tau}$.

Следующая лемма следует непосредственно из определений.

Лемма 4.1. *Пусть A_i , $i=1, \dots, N$ — производящие операторы степени s_i с шагом k_i в шкале $\{B_{\tau}\}$, а $T^{(i)}$, $i=1, \dots, N-1$ — переводящие операторы. И пусть A'_i — оператор A_i , рассматриваемый как производящий оператор с шагом $k_i + \mu_i$. Тогда для любых $\varphi \in \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$ и $h \in D$ имеет место равенство*

$$T^{(1)} \dots T^{(N-2)} \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{2N-1}{A}_N \right) h = T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \varphi \left(\overset{1}{A}'_1, \dots, \overset{2N-1}{A}'_N \right) h.$$

Лемма 4.2. *Пусть*

$$\|T^{(m)} \varphi(\overset{1}{A}_m, \overset{2}{A}_{m+1})\|_{\tau+k_1+\dots+k_m+l_1+\dots+l_{m-1} \rightarrow \tau+k_1+\dots+k_m+l_1+\dots+l_m} = M < \infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|T^{(1)} \dots T^{(N-2)} \varphi \left(\overset{2m-1}{A}_m, \overset{2m+1}{A}_{m+1} \right) \times \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{2N-1}{A}_N \right)\| \leq \\ & \leq cM \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^n)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq m}}^{N-1} \|T^{(\alpha)}_{\tau+k_1+\dots+k_{\alpha}+l_1+\dots+l_{\alpha-1}}\|. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы докажем эту лемму для $N=2$. Именно, докажем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|T(\varphi\psi) \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2 \right)\|_{\tau \rightarrow \tau+k_1+k_2+l} \leq \\ & \leq c \|T\varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2 \right)\|_{\tau \rightarrow \tau+k_1+l} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Пусть $T' : B_{\tau+k_1} \rightarrow B_{\tau+k_1+l_1}$ есть замыкание сужения оператора $\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)$ на D . Тогда

$$\overset{\circ}{T}(\varphi\psi)(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) = \overset{\circ}{T}'\psi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2).$$

Действительно, если $h \in D$, то

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}'\psi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2) U_{A_2}(t_2) T' U_{A_1}(t_1) h dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2) U_{A_2}(t_2) [\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)] U_{A_1}(t_1) h dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2) dt \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2) U_{A_2}(\tau_2 + t_2) T U_{A_1}(\tau_1 + t_1) h d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\varphi * \psi)(t_1, t_2) U_{A_2}(t_2) T U_{A_1}(t_1) h dt = \overset{\circ}{T}(\varphi\psi)(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 3.1.

Точно так же, как и лемма 4.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. Для любого целого l' справедлива оценка $\|\overset{\circ}{T}(\varphi\psi)(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)\|_{\tau \rightarrow \tau+k_1+k_2+l'} \leq$

$$\leq c \|\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)\|_{\tau+k_1 \rightarrow \tau+k_1+l'} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)}.$$

Лемма 4.3. Множество функций $\varphi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$ таких, что $\overset{\circ}{T}\psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') = 0$, является идеалом в алгебре $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Пусть $h \in B_{\tau}$. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{T}\psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') \times \varphi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')h\|_{\tau+k+l+k'} &\leq \\ &\leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)} \cdot \|\overset{\circ}{T}\psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\|_{\tau+k \rightarrow \tau+k+l} \|h\|_{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{T}\psi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') \times \varphi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') = 0$$

для любого $\varphi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $X = (\overset{1}{A}_1, \overset{2}{T}^{(1)}, \overset{3}{A}_2, \dots, \overset{2N-2}{T}^{(N-1)}, \overset{2N-1}{A}_N)$ — вектор-оператор. В этом случае обозначим через X идеал в алгебре $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N)$, состоящий из всех таких функций φ , что

$$\overset{2}{T}^{(1)} \dots \overset{2N-2}{T}^{(N-1)}(\psi\varphi)(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{2N-1}{A}_N) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^N).$$

Лемма 4.3 означает, что в случае $N=2$ идеал X совпадает с ядром гомоморфизма

$$M : \varphi \rightarrow \overset{\circ}{T}\varphi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2).$$

Определение. Точку $\lambda \in \mathbb{R}^N$ будем называть точкой резольвентного множества вектор-оператора

$$\mathcal{X} = \left(A_1, T^{(1)}, A_2, \dots, A_{N-1}, T^{(N-1)}, A_N \right),$$

если существует такая окрестность U этой точки, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ с носителем, лежащим в U , принадлежит идеалу X , построенному по гомоморфизму

$$M: \psi \rightarrow T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \psi \left(A_1, \dots, A_N \right).$$

Дополнение к резольвентному множеству назовем спектром σ вектор-оператора $\mathcal{X}$.

Лемма 4.4. Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ принадлежит идеалу X , построенному по гомоморфизму

$$\psi \rightarrow T^{(1)} \dots T^{(N-1)} \psi \left(A_1, \dots, A_N \right).$$

Тогда любая точка, в которой функция φ отлична от нуля, принадлежит резольвентному множеству вектор-оператора

$$\mathcal{X} = \left(A_1, T^{(1)}, \dots, A_N \right).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\lambda) \neq 0$ и пусть e_λ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, равная единице в δ_1 -окрестности точки λ и обращающаяся в нуль вне δ_2 -окрестности этой точки. При достаточно малом δ_2 функция $\mathcal{F} = e_\lambda / \varphi$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Но $e_\lambda = \varphi \cdot \mathcal{F}$, и функция φ входит в идеал X ; следовательно, $e_\lambda \in X$. Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и пусть носитель функции χ лежит в δ_1 -окрестности точки λ . Тогда $\chi(x) = \chi(x) e_\lambda(x)$, т. е. $\chi \in X$, что и требовалось доказать.

В случае $N=2$ следствием лемм 4.3 и 4.4 служит следующий критерий.

Теорема 4.1. Для того чтобы точка $\lambda \in \mathbb{R}^2$ принадлежала резольвентному множеству вектор-оператора $(A, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{A}')$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие функции φ_1 и φ_2 из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_1(\lambda_1) \neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2) \neq 0$, и при этом $\varphi_2(A') T \varphi_1(A) = 0$.

§ 5. Функции двух производящих наборов

Пусть $A = (A_1, \dots, A_k)$ — производящий набор степени s с определяющей парой пространств (B_1, B_2) , T — гомоморфизм $T: B_2 \rightarrow B_3$ и $A' = (A'_1, \dots, A'_k)$ — производящий набор степени s' с определяющей парой пространств (B_3, B_4) . Мы будем предполагать, что имеют место вложения $B_1 \subset B_2$ и $B_3 \subset B_4$.

Пусть $\{U(t)\}$ есть k -параметрическая группа, порожденная набором A , а $\{V(t')\}$ есть k' -параметрическая группа, поро-

денная набором A' . Определим, аналогично предыдущему, банахову алгебру $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ исходя из пространства $C_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ непрерывных на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}$ функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{C_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^k \\ y \in \mathbb{R}^{k'}}} \frac{|f(x, y)|}{(1+|x|)^s (1+|y|)^{s'}}.$$

Если $\varphi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ и $h \in B_1$, то положим по определению

$$\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')h = (2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}} \int_{\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'}} \tilde{\varphi}(t, \tau) e^{-iA'\tau} T e^{-iAt} h dt d\tau,$$

где $e^{-iAt} : B_1 \rightarrow B_2$ — замыкание оператора $U(t)$; $e^{-iA'\tau} : B_3 \rightarrow B_4$ — замыкание оператора $V(\tau)$.

Определение. Точку $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}$ будем называть точкой резольвентного множества пары производящих наборов $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}'$ относительно переводящего оператора $\overset{\circ}{T}$, если существует такая окрестность U этой точки, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$ с носителем, лежащим в U , принадлежит следующему идеалу X алгебры $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$, построенному по гомоморфизму

$$\mathcal{M} : \psi \rightarrow \overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')$$

банаховой алгебры $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$ в банахово пространство $\text{Hom}(B_1, B_4)$:

$$X = \{\varphi \mid \mathcal{M}\varphi\psi = 0, \forall \psi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})\}.$$

Дополнение к резольвентному множеству назовем спектром σ пары $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}'$ относительно оператора $\overset{\circ}{T}$.

Пусть (λ, μ) — точка резольвентного множества пары $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}'$, относительно $\overset{\circ}{T}$, а φ — функция, бесконечно дифференцируемая всюду, кроме точки (λ, μ) . Пусть далее U — окрестность точки (λ, μ) , фигурирующая в определении, и пусть бесконечно дифференцируемые в U функции $\bar{\varphi}$ и $\overline{\bar{\varphi}}$ из $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$ совпадают с функцией φ вне некоторого замкнутого множества, лежащего в U . Тогда $\bar{\varphi} - \overline{\bar{\varphi}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$ и $\text{supp}(\bar{\varphi} - \overline{\bar{\varphi}}) \subset U$, так что функция $\bar{\varphi} - \overline{\bar{\varphi}}$ принадлежит идеалу X . Для краткости будем обозначать элемент $\{\bar{\varphi}\} = \{\overline{\bar{\varphi}}\}$ факторалгебры $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})/X$ через $\{\varphi\}$ (а иногда даже — через φ), хотя φ может не принадлежать $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})$). Для гомоморфизма $\mathcal{M}$ имеет место разложение $\mathcal{M} = \pi \mathcal{M}_\sigma$, где

$$\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{k'})/X \xrightarrow{\mathcal{M}_\sigma} \text{Hom}(B_1, B_4).$$

Поэтому

$$\overset{\circ}{T}\bar{\varphi}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') = \overset{\circ}{T}\overline{\bar{\varphi}}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}').$$

Мы будем обозначать этот оператор также через $\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')$, а функцию φ называть его *символом*.

Лемма 5.1. Пусть носитель функции $\psi \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ лежит в резольвентном множестве пары $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}'$ относительно $\overset{\circ}{T}$. Тогда ψ принадлежит идеалу X , построенному по гомоморфизму $\mathcal{M}$.

Доказательство. Заметим сначала, что если точка (λ, μ) принадлежит резольвентному множеству пары $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}'$ относительно $\overset{\circ}{T}$, то любая функция из $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ с носителем в достаточно малой окрестности точки (λ, μ) принадлежит X . Это следует из того, что такую функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать в $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k'})$ функцией из $C_0^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ с носителем в малой окрестности точки (λ, μ) .

Предположим сначала, что функция ψ имеет компактный носитель. Тогда она представима в виде суммы конечного числа функций из X и следовательно, сама принадлежит X .

Пусть теперь ψ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям леммы. Существует такая последовательность $\{\psi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}} \int_{\mathbb{R}^{k+k'}} (F^{-1}\psi_n)(t) g(t) dt = g(0)$$

для любого $g \in C_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$. Положим $\psi_n = \psi l_n$. Имеем $\text{supp } \psi_n \subset \text{supp } \psi$; поэтому $\overset{\circ}{T}\psi_n(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}} \int_{\mathbb{R}^{k+k'}} (F^{-1}\psi_n)(t) g(t) dt &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}} \int_{\mathbb{R}^{k+k'}} [(F^{-1}\psi) * (F^{-1}l_n)](t) g(t) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k+k'}} (F^{-1}\psi)(t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любых $h \in B_1$, $h^* \in B_1^*$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h^* [\overset{\circ}{T}\psi_n(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')] h = h^* [\overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')] h.$$

Значит, $\overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') = 0$.

Заменяя в этом рассуждении ψ на ψf , получаем, что

$$\overset{\circ}{T}\psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') \times f(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') = 0$$

для любого $f \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})$, а это и означает, что $\psi \in X$, и лемма доказана.

Теорема 5.1. Пусть $A = (A_1, \dots, A_k)$ производящий набор степеней s с определяющей парой пространств (B_1, B_2) , $A' = (A'_1, \dots, A'_l) \rightarrow$

производящий набор степени s' с определяющей парой пространств (B_3, B_4) , $T: B_2 \rightarrow B_3$ — гомоморфизм. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$, $\mu_0 \in \mathbb{R}^l$ и существует такая окрестность U точки (λ_0, μ_0) в $\mathbb{R}^{k+l}$, что для некоторого $\delta > 0$ при $(\lambda, \mu) \in U$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\left\| \hat{T} \left[\left(\hat{A} - \lambda \right)^2 + \left(\hat{A}' - \mu \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-\frac{1}{2} (k+l+s+s'+\delta)} \right\|_{B_3 \rightarrow B_4} < c.$$

Тогда точка (λ_0, μ_0) принадлежит резольвентному множеству вектор-оператора $\mathcal{X} = (\hat{A}, \hat{T}, \hat{A}')$ (с не зависит от ε).

Доказательство. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{k+l})$ и $\text{supp } \psi \subset U$. Нам нужно доказать, что $\psi(\mathcal{X}) = 0$. Без ограничения общности положим $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$.

Пусть $\varphi(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$ — такая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{k+l})$, что

$$\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_k=-\infty}^{\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{j_l=-\infty}^{\infty} \varphi(x-i, y-j) = 1,$$

$$i = (i_1, \dots, i_k), \quad j = (j_1, \dots, j_l).$$

Тогда найдется такая константа c_1 , что для достаточно больших n

$$\psi(x, y) = \sum_{(i, j) \in M_n} \psi(x, y) \varphi(nx-i, ny-j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i, j) \in M_n} \psi_{ij}^{(n)}(x, y),$$

где число элементов множества M_n не превосходит $c_1 n^{k+l}$ и $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \in U$ при $(i, j) \in M_n$.

Обозначим

$$R_\varepsilon(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2})^{k+l+s+s'+\delta}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(nx-i, ny-j) R_{1/n} \left(x - \frac{i}{n}, y - \frac{j}{n} \right) &= \\ &= \varphi(nx-i, ny-j) R_1(nx-i, ny-j) \cdot n^{-k-l-s-s'-\delta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(nx-i, ny-j) R_{1/n} \left(x - \frac{i}{n}, y - \frac{j}{n} \right) \right\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{s+s'})} &\leq \\ &\leq \left\| \varphi R_1 \right\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{s+s'})} \cdot n^{-k-l-s-s'-\delta}. \end{aligned}$$

Из тождества

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{(n)}(x, y) &= \left[\psi_{ij}^{(n)}(x, y) R_{1/n} \left(x - \frac{i}{n}, y - \frac{j}{n} \right) \right] \times \\ &\times \left[\left(x - \frac{i}{n} \right)^2 + \left(y - \frac{j}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right]^{\frac{1}{2} (-k-l-s-s'-\delta)} \end{aligned}$$

и оценки для оператора

$$\hat{T} \left[\left(\hat{A} - \frac{i}{n} \right)^2 + \left(\hat{A}' - \frac{j}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right]^{-\frac{1}{2} (k+l+s+s'+\delta)}$$

следует, что

$$\|\psi_l^{(n)}(\mathcal{X})\| \leq c_2 \cdot n^{-k-l-\delta},$$

где c_2 — некоторая константа. Значит,

$$\|\psi(\mathcal{X})\| \leq c_2 \cdot n^{-k-l-\delta} \cdot c_1 n^{k+l} = c_1 c_2 n^{-\delta} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. Пусть $A = (A_1, \dots, A_k)$ — производящий набор степени s с определяющей парой пространств (B_1, B_2) , $A' = (A'_1, \dots, A'_l)$ — производящий набор степени s' с определяющей парой пространств (B_3, B_4) , $T: B_2 \rightarrow B_3$ — гомоморфизм. Предположим, что для любого достаточно малого вещественного $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\|T[(\overset{\circ}{A} - \lambda)^2 + (\overset{\circ}{A}' - \mu)^2 + \varepsilon^2]^{-N/2}\|_{B_2 \rightarrow B_3} \leq c^N,$$

где c — константа, N — любое натуральное число. Тогда точка (λ, μ) принадлежит резольвентному множеству вектор-оператора $\mathcal{X} = (\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{A}')$ (c не зависит от ε).

Доказательство. Предположим (без уменьшения общности), что $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Обозначим $\tau_\varepsilon(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon^2}$.

Пусть $\chi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{k+l})$ — произвольная функция с носителем в δ -окрестности нуля. Тогда

$$\|\chi(x, y) [\tau_\delta(x, y)]^N\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+l})} = O(\delta^N).$$

Выберем $\delta < 1/c$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\chi(\mathcal{X})\|_{B_1 \rightarrow B_4} &= \|\llbracket T[\tau_\delta(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')]^{-N} \rrbracket \chi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') [\tau_\delta(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')]^N \|_{B_1 \rightarrow B_4} \leq \\ &\leq C \cdot c^N \|\chi(x, y) [\tau_\delta(x, y)]^N\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+l})} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь скобки $\llbracket \cdot \rrbracket$ означают, что нумерация операторов, стоящих внутри этих скобок, не распространяется на операторы, стоящие вне: все выражение в скобках рассматривается как оператор, действующий вторым (см. Введение). Теорема доказана.

Теорема 5.3. Пусть l_σ — функция из $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$, равная единице на спектре σ пары производящих наборов $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{A}'$ относительно переводящего оператора $\overset{\circ}{T}$. Тогда выполняется неравенство

$$\|\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}') \times \psi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')\| \leq c \|\overset{\circ}{T}\varphi(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{A}')\|_{B_2 \rightarrow B_3} \|\psi l_\sigma\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'}/\sigma)$ — подалгебра алгебры $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})$, являющаяся замыканием алгебры функций

из $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})$ с носителем из $\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma$. Для любой функции $f \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$

$$\hat{T}f(\hat{A}, \hat{A}') = 0.$$

Поскольку $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$ — идеал в $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})$, то при $f \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$ имеем

$$\hat{T}(\psi \cdot f)(\hat{A}, \hat{A}') = \hat{T}((\psi - f)\varphi)(\hat{A}, \hat{A}').$$

Следовательно,

$$\|\hat{T}(\psi\varphi)(\hat{A}, \hat{A}')\| \leq c \|\hat{T}\varphi(\hat{A}, \hat{A}')\|_{B_s \rightarrow B_s} \|\psi - f\|_{B_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})}.$$

Остается заметить, что функция $l_\sigma - 1$ принадлежит алгебре $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$.

Следствие. Пусть σ — спектр пары $\hat{A}, \hat{A}'$ относительно $\hat{T}$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^N \varphi_i(A') T\psi_i(A) \right\|_{B_1 \rightarrow B_s} &\leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^{\tau} f_i(A') T F_i(A) \right\|_{B_1 \rightarrow B_s} \left\| \frac{\sum_{i=0}^N \varphi_i(y) \psi_i(x)}{\sum_{i=0}^{\tau} f_i(y) F_i(x)} \right\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\sigma)}. \end{aligned}$$

Определение. Пусть последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится в $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ к функции Φ , пусть функции $\psi_n: x \rightarrow [\Phi_n(x)]^{-1}$ также принадлежат $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ и пусть при этом выполняется условие

$$\|\hat{T}\psi_n(\hat{A}, \hat{A}')\|_{B_s \rightarrow B_s} \leq \frac{1}{\sup_{\varphi} \frac{\|\hat{T}\varphi(\hat{A}, \hat{A}')\|}{\|\varphi\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})}}}.$$

Тогда будем называть функцию Φ спектральным весом.

Будем говорить, что спектральный вес Φ подчинен спектральному весу $\mathcal{F}$, если ограничена последовательность норм

$$\left\| \frac{\mathcal{F}}{\Phi_n} \right\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})}.$$

Введем в $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ норму

$$\|\varphi\|_{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi\Phi\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} \quad (5.1)$$

и произведение

$$\varphi_1 \times \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \varphi_2 \Phi; \quad (5.2)$$

имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi_1 \times \varphi_2\|_{\Phi} &= \|\varphi_1 \varphi_2 \Phi^2\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} \leq \\ &\leq \|\varphi_1 \Phi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} \|\varphi_2 \Phi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} = \|\varphi_1\|_{\Phi} \|\varphi_2\|_{\Phi}.\end{aligned}$$

Таким образом, норма (5.1) и произведение (5.2) индуцируют в $\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ структуру нормированной алгебры.

Банахова алгебра, получаемая пополнением этой нормированной алгебры, будет обозначаться $\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$.

Пусть $\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$ — замыкание в $\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ под-алгебры, состоящей из финитных функций с носителями в $\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma$. Факторалгебру $\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}) / \mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma)$ обозначим через $\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\sigma)$.

Теорема 5.2. *Справедливо неравенство*

$$\|\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}')\| \leq \|\{\psi\}\|_{\mathcal{B}_{s,s',\Phi}(\sigma)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\|\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}')\| &= \|\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}') \Phi_n^{-1}(\hat{A}, \hat{A}') \Phi_n(\hat{A}, \hat{A}')\| \leq \\ &\leq \|\hat{T}\Phi_n^{-1}(\hat{A}, \hat{A}')\|_{B_1 \rightarrow B_1} \|\psi \Phi_n\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} \sup_{\Phi} \frac{\|\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}')\|}{\|\Phi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})}} \leq \\ &\leq \|\psi \Phi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} + \varepsilon_n,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если носитель функции $\varphi \in \mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$ лежит в $\mathbb{R}^{k+k'} \setminus \sigma$, то $\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}') = \hat{T}[\psi(\hat{A}, \hat{A}') - \varphi(\hat{A}, \hat{A}')] + \varphi(\hat{A}, \hat{A}')$, так что

$$\|\hat{T}\psi(\hat{A}, \hat{A}')\| \leq \|(\psi - \varphi) \Phi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})} = \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})}.$$

Переходя в последнем неравенстве к точной нижней грани по φ , получаем утверждение теоремы.

§ 6. Псевдодифференциальные операторы

Пусть A_m , $m=1, 2, \dots, n$ — оператор в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $DA_m = S$, действующий по формуле

$$A_m \varphi(x) = i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_m}. \quad (6.1)$$

Набор операторов $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ является производящим набором нулевой степени. Действительно, пусть h — произвольный элемент из S . Положим

$$[U(t)](x) = h(x_1 - t_1, \dots, x_n - t_n), \quad t \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

и будем считать, что функция U принимает значения в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(t_1 + \delta, t_2, \dots, t_n) - U(t)}{\delta} + iA_1 U(t) \right\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} = \\ = \left\| \frac{\tilde{U}(t_1 + \delta, t_2, \dots, t_n) - U(t)}{\delta} + i\tilde{A}_1 \tilde{U}(t) \right\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_1$ — оператор с областью определения $D_{\tilde{A}_1} = S$, действующий по формуле

$$\tilde{A}_1 \varphi(x) = x_1 \varphi(x), \quad (6.3)$$

и где $\tilde{U}(t) = FU(t)$. Из (6.2) следует, что

$$[\tilde{U}(t)](x) = \tilde{h}(x) e^{-itx}. \quad (6.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{U(t_1 + \delta, t_2, \dots, t_n) - U(t)}{\delta} + iA_1 U(t) \right\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\tilde{h}(x, e^{-i[x_1(t_1 + \delta) + x_2 t_2 + \dots + x_n t_n]} - \tilde{h}(x) e^{-ixt}}{\delta} + \right. \\ \left. + ix_1 \tilde{h}(x) e^{-ixt} \right|^2 (1 + x^2)^k dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\tilde{h}(x) e^{-ix_1 \delta} - \tilde{h}(x)}{\delta} + ix_1 \tilde{h}(x) \right|^2 (1 + x^2)^k dx = \\ = \delta^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{h}(x)|^2 (1 + x^2)^k \frac{x_1^2}{4} \xi(x, \delta) dx, \end{aligned}$$

где $|\xi(x, \delta)| \leq 1$. Поскольку функция $\tilde{h}(x) \frac{x_1^2}{2}$ принадлежит пространству $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{U(t_1 + \delta, t_2, \dots, t_n) - U(t)}{\delta} + iA_1 U(t) \right\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

т. е. функция U является решением уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} + iA_1 U = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{\partial U}{\partial t_j} + iA_j U = 0 \quad (6.5)$$

для любого $j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, функция U удовлетворяет начальному условию

$$U(0) = h. \quad (6.6)$$

Докажем, что решение задачи (6.5), (6.6) единственно. Повторяя

рассуждение § 1 в гл. III, рассмотрим функцию

$$[v(\tau)](x) = \int_b^{\tau} h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n) d\xi,$$

где $\tau \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и покажем, что

$$\frac{dv}{d\tau} + iA_1 v = h,$$

где $dv/d\tau$ — предел соответствующего разностного отношения по норме в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для этого достаточно убедиться лишь в том, что

$$\left[\frac{dv(\tau)}{d\tau} \right](x) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [v(\tau)](x) \}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{v(\tau + \delta) - v(\tau)}{\delta} \right](x) - \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [v(\tau)](x) \} = \\ &= \frac{1}{\delta} \left[\int_b^{\tau + \delta} h(x_1 + \tau + \delta - \xi, x_2, \dots, x_n) d\xi - \right. \\ & \quad \left. - \int_b^{\tau} h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right] - \\ & \quad - h(x) - \int_b^{\tau} D_1 h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n) d\xi = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau + \delta} [h(x_1 + \tau + \delta - \xi, x_2, \dots, x_n) - h(x)] d\xi + \\ & \quad + \int_b^{\tau} \left\{ \frac{h(x_1 + \tau + \delta - \xi, x_2, \dots, x_n) - h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n)}{\delta} - \right. \\ & \quad \left. - D_1 h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Далее,

$$\left| \int_{\tau}^{\tau + \delta} [h(x_1 + \tau + \delta - \xi, x_2, \dots, x_n) - h(x)] d\xi \right| \leq \delta^2 \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \right|,$$

$$\int_{\tau}^{\tau + \delta} [h(x_1 + \tau + \delta - \xi, x_2, \dots, x_n) - h(x)] d\xi = 0,$$

если x не принадлежит δ -окрестности носителя функции h . Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} |f(x, \delta, \tau)| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_b^{\tau} \left\{ \frac{h(x_1 + \tau + \delta + \xi, x_2, \dots, x_n) - h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n)}{\delta} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - D_1 h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \dots, x_n) \right\} d\xi \right| \leq (b - a) \delta \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \right|, \end{aligned}$$

и $f(x, \delta, \tau) = 0$, если x не принадлежит $(b - a + \delta)$ -окрестности носителя функции h . Из приведенных оценок следует, что

$$\left[\frac{dv(\tau)}{d\tau} \right] (x) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [v(\tau)](x) \}.$$

Таким образом, доказано, что решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + iA_1 u = 0, \quad u(0, t_2, \dots, t_n) = u_1(t_2, \dots, t_n)$$

единственно, так что

$$[u(t)](x) = [u_1(t_2, \dots, t_n)](x_1 - t_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если u — решение задачи (6.5), (6.6), то функция

$$u_1(t_2, \dots, t_n) = u(0, t_2, \dots, t_n)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_2} + iA_2 u_1 = 0, \quad u_1(0, t_3, \dots, t_n) = u_2(t_3, \dots, t_n),$$

где $u_2(t_3, \dots, t_n) = u(0, 0, t_3, \dots, t_n)$. Отсюда следует, что

$$[u_1(t_2, \dots, t_n)](x) = [u_2(t_3, \dots, t_n)](x_1, x_2 - t_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$[u(t)](x) = [u_2(t_3, \dots, t_n)](x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3, \dots, x_n).$$

Повторяя приведенное рассуждение, мы получаем, что всякое решение задачи (6.5), (6.6) должно иметь вид (6.2).

Итак, набор операторов A порождает n -параметрическую группу $\{U_A(t)\}$, действующую по формуле

$$U_A(t) h(x) = h(x - t). \quad (6.7)$$

Очевидно, что при любом t оператор $U_A(t)$ изометричен. Итак, доказано, что A есть производящий набор нулевой степени.

Пусть теперь $k \leq 0$ — целое число. Рассмотрим набор $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ операторов, определенных на S формулой

$$A_i \varphi(x) = x_i \varphi(x).$$

Набор $\tilde{A}$ является производящим по отношению к определяющей паре пространств $(W_2^k(\mathbb{R}^n), W_2^k(\mathbb{R}^n))$. Действительно, при $k = 0$

$$\tilde{A}_i = F A_i F^{-1},$$

так что для любого $h \in S$ существует решение u задачи Коши ($j = 1, \dots, n$):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + \delta, t_{j+1}, \dots, t_n) - u(t)}{\delta} + i \tilde{A}_j u(t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0; \quad (6.8)$$

$$u(0) = h.$$

Функция u , являющаяся решением задачи (6.8), по-прежнему является решением задачи ($j=1, \dots, n$):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + \delta, t_{j+1}, \dots, t_n) - u(t)}{\delta} + i \tilde{A}_j u(t) \right\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (6.9)$$

$$u(0) = h$$

при любом $k < 0$.

Покажем, что решение задачи (6.9) единственно. Для этого достаточно доказать единственность решения следующей задачи Коши:

$$\frac{du}{d\tau} + i \tilde{A}_1 u(\tau) = 0, \quad (6.10)$$

$$u(0) = h;$$

здесь u — функция со значениями в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Воспользуемся теоремой 7.2 гл. I. Выберем в качестве фигурирующего в этой теореме множества M пространство $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для определенности докажем единственность решения задачи (6.10) на положительной полупрямой. Пусть h — произвольный элемент из $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и пусть a, b, T — числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq a < b \leq T$. Достаточно убедиться в том, что существует функция v со значениями в $\tilde{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, непрерывная на $[0, T]$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} + i \tilde{A}_1^* v(\tau) &= \begin{cases} h & \text{при } t \in (a, b), \\ 0 & \text{при } t \notin (a, b), \end{cases} \\ v(T) &= 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где $dv/d\tau$ понимается как производная функции со значениями в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Пусть φ, ψ — произвольные функции из S . Тогда

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 \varphi, \psi)_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} i \frac{\partial \tilde{\psi}(\rho)}{\partial \rho_1} [\tilde{\varphi}(\rho)]^* (1 + \rho^2)^k d\rho = \\ &= i \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\rho) (1 + \rho^2)^k \left[\frac{\partial \tilde{\psi}^*(\rho)}{\partial \rho_1} + \frac{2k\rho_1}{\rho^2 + 1} \tilde{\psi}^*(\rho) \right] d\rho. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Из формулы (6.12) следует, что для любого $\chi \in S$

$$F^{-1}(\tilde{A}_1)^* F \chi(\rho) = i \left[\frac{\partial \chi(\rho)}{\partial \rho_1} + \frac{2k\rho_1}{\rho^2 + 1} \chi(\rho) \right].$$

Стало быть, переходя к Фурье-образам, мы можем вместо задачи (6.11) рассмотреть следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} - Bw &= \begin{cases} q & \text{при } \tau \in (a, b), \\ 0 & \text{при } \tau \notin (a, b), \end{cases} \\ w(T) &= 0; \end{aligned} \quad (6.13)$$

здесь $dw/d\tau$ понимается как производная функции со значениями в $\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, q есть произвольный элемент из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а B — оператор в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, действующий по формуле

$$B\varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{2kx_1}{x^2+1} \varphi(x).$$

Покажем, что решение w задачи (6.13) существует. Для этого сделаем замену неизвестной функции:

$$[w(\tau)](x) = [z(\tau)](x) (x^2+1)^{-k}.$$

Для функции z получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} - iA_1 z(\tau) &= \begin{cases} q & \text{при } \tau \in (a, b), \\ 0 & \text{при } \tau \notin (a, b), \end{cases} \\ z(T) &= 0; \end{aligned} \quad (6.14)$$

здесь $dz/d\tau$ понимается как производная функции со значениями в $L_2(\mathbb{R}^n)$, а $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Существование решения задачи (6.14), принадлежащего при каждом фиксированном τ пространству $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, было доказано ранее. Единственность решения задачи (6.10) доказана.

Из формулы (6.7) следует, что решение задачи (6.9) имеет вид:

$$[u(t)](x) = e^{-ixth} h(x). \quad (6.15)$$

Следовательно, набор $\tilde{A}$ порождает n -параметрическую группу $U_{\tilde{A}}(t)$:

$$U_{\tilde{A}}(t) \varphi(x) = e^{-ixth} \varphi(x). \quad (6.16)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|e^{-ixth} \varphi(x)\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(p-t)|^2 (p^2+1)^k dp \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}^2 \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{[(p-t)^2+1]^k}{(p^2+1)^k} \leq c(1+|t|)^{2|k|} \|\varphi\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\tilde{A}$ — производящий набор степени $|k|$.

Если k — натуральное число, то $\tilde{A}$ является, по отношению к определяющей паре $(W_2^k(\mathbb{R}^n), W_2^k(\mathbb{R}^n))$, производящим набором степени k . Действительно, для любого натурального $j > 1$ и любого $h \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| h(x) \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} \left[\frac{e^{-i\delta x_1} - 1}{\delta} + ix_1 \right] \right|^2 dx = |\delta^{2j-2}| \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| h(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{e^{-i\delta x_1} - 1}{\delta} + ix_1 \right] \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^2 [e^{-i\delta x_1} - 1]^2 d\tau \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда следует, что функция

$$[u(t)](x) = -e^{-itx}h(x)$$

удовлетворяет задаче Коши ($j=1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_j} + i\tilde{A}_j u &= 0, \\ u(0) &= h, \end{aligned}$$

где $\partial u / \partial t_j$ — производная в смысле нормы пространства $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, так что $\tilde{A}$, как и при неположительных k , порождает группу $\{U_{\tilde{A}}(t)\}$:

$$U_{\tilde{A}}(t)h(x) = e^{-itx}h(x).$$

Оценим норму оператора $U_{\tilde{A}}(t)$ в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{l_1}}{\partial x_1^{l_1}} \dots \frac{\partial^{l_n}}{\partial x_n^{l_n}} e^{-itx}h(x) \right| &= \\ &= \left| \sum_{l_1=0}^{l_1} \dots \sum_{l_n=0}^{l_n} \{c_{j_1}^{l_1} \dots c_{j_n}^{l_n} (-it_1)^{l_1} \dots (-it_n)^{l_n} e^{-itx} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial^{l_1-l_1}}{\partial x_1^{j_1-l_1}} \dots \frac{\partial^{l_n-l_n}}{\partial x_n^{j_n-l_n}} h(x) \right| \leq \sum_{l_\alpha \leq l_\alpha} c_j^l |t|^l \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-l} h(x) \right|, \end{aligned}$$

где $l = (l_1, \dots, l_n)$, $j = (j_1, \dots, j_n)$, $c_j^l = c_{j_1}^{l_1} \dots c_{j_n}^{l_n}$, то

$$\|U_{\tilde{A}}(t)\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} = O(|t|^k)$$

при $t \rightarrow \infty$. Итак, доказано, что $\tilde{A}$ — производящий набор степени k в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим снова замыкания операторов $A_j, \tilde{A}_j$ в $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ соответственно через $A_j, \tilde{A}_j$. Легко видеть, что справедливо следующее утверждение:

$$[\varphi \in D_{A^m}] \Leftrightarrow [\varphi \in W_2^{k+m}(\mathbb{R}^n)],$$

где D_{A^m} — множество векторов h из $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, для которых существует $A_n^{m_n} A_{n-1}^{m_{n-1}} \dots A_1^{m_1} h$, $m_1 + \dots + m_n = m$.

Определение. Операторы вида $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A})$ и $f(\overset{2}{A}, \overset{1}{A})$ называются псевдодифференциальными операторами.

Употребляются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A})u(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{2}{x}\right)u(x), \\ f(\overset{2}{A}, \overset{1}{A})u(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}\right)u(x). \end{aligned}$$

Задача. Доказать для псевдодифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ формулу

$$f^* \left(-i\partial/\partial x, \frac{1}{x} \right) = [f(-i\partial/\partial x, x)]^*.$$

Задача. Доказать, что оператор умножения на функцию $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^n)$, определенный на S , ограничен в $W_s^k(\mathbb{R}^n)$ при $s \geq |k|$ и что для любого $h \in S$ справедлива формула

$$\tilde{f}(x) h(x) = f(\tilde{A}) h(x).$$

Задача. Доказать, что для любого $h \in S$ справедливы следующие формулы:

$$f(-i\partial/\partial x, x) h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} f(p, x) \tilde{h}(p) dp,$$

$$f(-i\partial/\partial x, x) h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip \cdot x} dp \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ip \cdot \xi} f(p, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Пример.

$$\exp \left(- \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x) \right) h(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ip \cdot (x-\xi)} e^{-ip \cdot f(x)} h(\xi) d\xi = \\ = h(x_1 - f_1(x), \dots, x_n - f_n(x)).$$

Можно рассматривать также псевдодифференциальные операторы с растущими символами. Именно, пусть

$$g(p, x) = \tilde{f}(p, x) P(p) Q(x),$$

где $f \in \mathcal{B}_{0,k}(\mathbb{R}^n)$, P и Q — полиномы. Тогда для любого $h \in S$

$$g(-i\partial/\partial x, x) h(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x) f(-i\partial/\partial x, x) P(-i\partial/\partial x) h(x),$$

$$g(-i\partial/\partial x, x) h(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(-i\partial/\partial x) f(-i\partial/\partial x, x) Q(x) h(x).$$

§ 7. Примеры

1) Пусть

$$A = i \frac{d}{dx} + i \frac{2x}{x^2+1}, \quad A' = i \frac{d}{dx}, \quad T = 1, \quad B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = L_2(\mathbb{R}).$$

Функция

$$u(x, t) = \frac{[(x+t)^2+1]}{x^2+1} f(x+t)$$

удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{2x}{x^2+1} u.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|e^{tA}f\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(x+t)^2+1}{x^2+1} \right]^2 |f(x+t)|^2 dx} \leq \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(x+t)^2+1}{x^2+1} \right| \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|^2 dx} \leq c(1+|t|)^2 \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\|e^{tA'}f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

Имеем, для любого $f \in S$:

$$\begin{aligned} \Phi(A)f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tAt} \tilde{\Phi}(t) f(x) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)^2+1}{x^2+1} f(x-t) \tilde{\Phi}(t) dt = \frac{1}{x^2+1} \Phi\left(-i \frac{d}{dx}\right) (x^2+1) f(x). \end{aligned}$$

Поэтому для любых $\Phi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f \in S$

$$\begin{aligned} \Phi(A)\varphi(A')f(x) &= \frac{1}{x^2+1} \Phi\left(-i \frac{d}{dx}\right) (x^2+1) \varphi\left(i \frac{d}{dx}\right) f(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tpx} \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right)^{-1} \Phi(p) \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right) \varphi(-p) \tilde{f}(p) dp. \end{aligned}$$

Если $\lambda \neq \mu$ и носитель функции φ лежит в малой окрестности точки λ , а носитель функции Φ лежит в малой окрестности точки μ , то оператор

$$\Phi(p) \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right) \varphi(p)$$

равен нулю. Поэтому спектр пары (A', A) лежит на диагонали прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

С другой стороны, спектр пары (A, A') заполняет все пространство $\mathbb{R}^2$, так как для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ найдутся такие функции $\Phi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителями в ε -окрестности точки λ и ε -окрестности точки μ соответственно, что

$$\varphi(p) \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right)^{-1} \Phi(p) \neq 0$$

(оператор $(1 - d^2/dp^2)^{-1}$ — нелокальный).

Таким образом, спектр пары несамосопряженных операторов зависит от порядка, в котором рассматриваются эти операторы: спектр пары (A, B) не равен, вообще говоря, спектру пары (B, A) ; в то же время можно показать, что для самосопряженных

операторов эти спектры совпадают (с точностью до отражения относительно биссектрисы координатного угла).

2) Пусть B — пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по норме

$$\|f(x)\|_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{x^2/2} f(x)|^2 dx,$$

а B' — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по норме

$$\|f(x)\|_{B'}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-x^2/2} f(x)|^2 dx.$$

Очевидно, $B \subset B'$. Возьмем в качестве T оператор вложения $1: B \rightarrow B'$. Рассмотрим операторы «рождения» и «уничтожения»:

$$A = i \frac{d}{dx} + ix, \quad A' = i \frac{d}{dx} - ix.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. а) A есть производящий оператор степени 0 с определяющей парой (B, B) , A' есть производящий оператор степени 0 с определяющей парой (B', B') ;

б) спектр пары $(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$ заполняет всю плоскость $\mathbb{R}^2$;

в) функция

$$\Phi: (x, y) \rightarrow c(1 + (x - y)^2)^{1/2} e^{-(x - y)^2/2}$$

при достаточно большом c является спектральным весом вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$, так что

$$\|F(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\| \leq \| \Phi F \|_{\infty_0(\mathbb{R}^2)}.$$

Доказательство. а) Решение уравнения

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial u}{\partial x} \pm i x u$$

имеет вид $u(x, t) = e^{\mp x^2/2} \varphi(x + t)$. Поэтому

$$e^{-iAt} f(x) = e^{-x^2/2} e^{(x+t)^2/2} f(x+t),$$

так что

$$\begin{aligned} \|e^{-iAt} f(x)\|_B &= \|e^{x^2/2} e^{-iAt} f(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} = \\ &= \|e^{(x+t)^2/2} f(x+t)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} = \|e^{x^2/2} f(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} = \|f(x)\|_B \end{aligned}$$

для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Значит, $\|e^{-iAt}\| = 1$.

б) Аналогично, для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|e^{-iA't} \varphi\|_{B'} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{x^2} e^{-(x+t)^2/2} |\varphi(x+t)|^2 dx \right]^{1/2} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|\varphi\|_{B'}. \end{aligned}$$

Пусть $\Phi, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Аналогично примеру 1, получаем, что

$$\Phi(A)f(x) = e^{-x^2/2} \Phi\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2} f(x),$$

$$\Phi(A')f(x) = e^{x^2/2} \Phi\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{-x^2/2} f(x).$$

Пусть $\Phi, f, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(A')\Phi(A)f(x) &= e^{x^2/2} \varphi\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{-x^2} \Phi\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2} f(x) = \\ &= e^{x^2/2} \varphi\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{-x^2} \Phi\left(i \frac{d}{dx}\right) f_1(x). \end{aligned}$$

Пусть $F_{p \rightarrow x}: L_2(\mathbb{R}_p) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_x)$ — преобразование Фурье и $F_{x \rightarrow p}^{-1}: L_2(\mathbb{R}_x) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_p)$ — обратное преобразование Фурье; обозначим $F_{x \rightarrow p} f_1(x)$ через $\hat{f}_1(p)$. Тогда

$$\Phi(A')\Phi(A)f(x) = e^{x^2/2} F_{p \rightarrow x}^{-1} \varphi(p) e^{d^2/dp^2} \Phi(p) \hat{f}_1(p).$$

Выражение $\varphi(p) e^{d^2/dp^2} \psi(p)$ не обращается в нуль ни при каких финитных φ и ψ ; поэтому спектр вектор-оператора $(\hat{A}, \hat{A}')$ заполняет всю плоскость.

в) Пусть $\Phi(x, y) = \varphi(x - y)$. Нетрудно проверить, что в этом случае $\Phi(\hat{A}, \hat{A}')$ есть оператор умножения на некоторую функцию, а именно,

$$\Phi(\hat{A}, \hat{A}')f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{x^2} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-(x-t)^2} dt,$$

где $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$.

Пусть

$$\Phi_n(x, g) = (1 + (x + y))^{1/2} \left[e^{-(x-y)^2/2} + \frac{1}{n} \right] = \varphi_n(x - y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(t) e^{-(x-t)^2} dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi^{3/2}} e^{x^2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-(x-t)^2 + it\xi} (1 + \xi^2)^{-1/2} \frac{e^{\xi^2/2}}{1 + e^{\xi^2/2}/n} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (1 + \xi^2)^{-1/2} \frac{e^{\xi^2/4}}{1 + e^{\xi^2/2}/n} d\xi. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{-1/2} \frac{e^{\xi^2/4}}{1 + e^{\xi^2/2}/n} = 2^{-1/2} e^{1/4} + d_n,$$

где $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что последний интеграл ограничен

как функция от n . Отсюда следует утверждение в), так как оператор умножения на e^{x^2} ограничен как оператор, действующий из B в B' .

Задача 1. Пусть

$$A = -i \frac{d}{dx} + i \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + x^2},$$

$$A' = \frac{d^2}{dx^2}, \quad T = 1,$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = L_2(\mathbb{R}).$$

Показать, что спектр вектор-оператора (A, A') лежит в области $\lambda_2 \leq 0$, $\lambda_1 - 1 \leq |\lambda_2|^{1/2} \leq \lambda_1 + 1$.

Решение. Заметим, что $A = -i \frac{d}{dx} + i \frac{d}{dx} \left[\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) \right]$, так что в силу задачи § 3

$$\begin{aligned} \psi(A)f &= e^{\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)} \psi \left(-i \frac{d}{dx} \right) e^{-\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)} f(x) = \\ &= \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) \psi \left(-i \frac{d}{dx} \right) \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)^{-1} f(x). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; тогда

$$\begin{aligned} \varphi(A')\psi(A)f &= \\ &= F_{p \rightarrow x}^{-1} \left[\varphi(-p^2) \left(1 + \frac{\sin \left(i \frac{d}{dp} \right)}{i \frac{d}{dp}} \right) \psi(p) \left(F_{y \rightarrow p} \left(1 + \frac{\sin y}{y} \right)^{-1} f(y) \right) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее функцию

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \left(1 + \frac{\sin \left(i \frac{d}{dp} \right)}{i \frac{d}{dp}} \right) \chi(p) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{iy(p-\xi)} \left(1 + \frac{\sin y}{y} \right) \chi(\xi), \quad \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$F_{x \rightarrow \xi}(\theta(1-|x|)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

или

$$F_{y \rightarrow p}^{-1} \left(1 + \frac{\sin y}{y} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta(1-|p|) + \sqrt{2\pi} \delta(p).$$

Отсюда

$$\eta(p) = \chi(p) + \frac{1}{2} \int_{p-1}^{p+1} \chi(\xi) d\xi.$$

Если $\text{supp } \chi \subset [a, b]$, то $\text{supp } \eta \subset [a-1, b+1]$.

Вернемся к оператору $\varphi(A')\psi(A)$. Из приведенных рассуждений видно, что если $\text{supp } \psi \subset [a, b]$ и $\text{supp } \varphi(-\rho^2) \subset \mathbb{R} \setminus [a-1, b+1]$, то $\varphi(A')\psi(A) = 0$. Отсюда

$$\sigma(A, A') \subset \{\lambda_2 \leq 0, (\lambda_1 - 1) \leq \sqrt{|\lambda_2|} \leq (\lambda_1 + 1)\}.$$

Задача 2. Пусть

$$A = i\partial/\partial x_1, \quad A' = i\partial/\partial x_2, \\ B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = C_{s_1, s_2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad T = 1.$$

Показать, что в этом случае

$$\|\varphi(A, A') \times \psi(A, A')\| \leq \|\varphi(A, A')\| \cdot \|\psi(A, A')\|,$$

т. е. алгебра, индуцированная в $\text{Hom}(C_{s_1, s_2}(\mathbb{R}_{x_1}, \mathbb{R}_{x_2}), C_{s_1, s_2}(\mathbb{R}_{x_1}, \mathbb{R}_{x_2}))$ гомоморфизмом $\mathcal{A}$, является нормированной алгеброй.

Решение. Имеет место неравенство

$$|\varphi(x+t)|(1+|x_1|)^{-s_1}(1+|x_2|)^{-s_2} \leq (1+|t_1|)^{s_1}(1+|t_2|)^{s_2} \|\varphi\|_{C_s(\mathbb{R}^2)},$$

где $t = (t_1, t_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $\varphi \in C_s(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, набор (A, A') является производящим набором степени s . Далее, если $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, то

$$\|\varphi(A, A')\chi\|_{C_s} = \sup_x (1+|x_1|)^{-s_1}(1+|x_2|)^{-s_2} \left| \int \tilde{\varphi}(t)\chi(x+t) dt \right| \leq \\ \leq \int |\tilde{\varphi}(t)|(1+|t_1|)^{s_1}(1+|t_2|)^{s_2} dt \cdot \|\chi\|_{C_s} = \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s} \cdot \|\chi\|_{C_s}.$$

Такая же оценка получается, если $\tilde{\varphi}(t) = \delta(t-t_0)$. Поэтому из определения пространства $\mathcal{A}_s(\mathbb{R}^2)$ следует, что для всех $\varphi \in \mathcal{A}_s(\mathbb{R}^2)$ справедлива оценка

$$\|\varphi(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s}.$$

С другой стороны, для $\varphi \in \mathcal{A}_s$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\chi_\varepsilon \in C_s$, $\|\chi_\varepsilon\|_{C_s} = 1$, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}(t)\chi_\varepsilon(t) dt \right| \geq \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s} - \varepsilon.$$

Тогда

$$\|\varphi(A, A')\chi_\varepsilon\|_{C_s} \geq \left| \int \tilde{\varphi}(t)\chi_\varepsilon(t) dt \right| \geq \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s} - \varepsilon,$$

так что $\|\varphi(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s} \geq \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s}$. Отсюда получаем

$$\|\varphi(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s} = \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s}.$$

Теперь несложно вывести окончательные неравенства:

$$\|(\varphi \cdot \psi)(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s} = \|\varphi \cdot \psi\|_{\mathcal{A}_s} \leq \\ \leq \|\varphi\|_{\mathcal{A}_s} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{A}_s} = \|\varphi(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s} \|\psi(A, A')\|_{C_s \rightarrow C_s}.$$

Задача 3. Пусть $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$, $T = 1$, и пусть $A - A'$ — ограниченный оператор. Показать, что функция $\frac{K}{x_1 - x_2 + i}$ при достаточно большом K является спектральным весом вектор-оператора (A, A') .

Решение. Пусть $e_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $e_n \rightarrow 1$ в $\mathcal{B}_l(\mathbb{R})$ для всех l . Рассмотрим последовательность функций

$$\psi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{K} [e_n(x_1) e_n(x_2) (x_1 - x_2) + i] \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2),$$

где $s = (s_1, s_2)$, s_1 — степень A , s_2 — степень A' . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_n} &= \frac{K}{e_n(x_1) e_n(x_2) (x_1 - x_2) + i} = \\ &= K \left[\frac{ie_n(x_1) e_n(x_2) (x_1 - x_2)}{e_n(x_1) e_n(x_2) (x_1 - x_2) + i} - i \right] \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2), \\ \frac{1}{\psi_n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} K \left[\frac{i(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2) + i} - i \right] = \frac{K}{x_1 - x_2 + i} \in \mathcal{B}_s. \end{aligned}$$

Далее,

$$\|\psi_n(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\| = \frac{1}{K} \|(A - A') e_n(\overset{1}{A}) e_n(\overset{2}{A}') + i\| \leq \frac{c^2 \|A - A'\| + 1}{K},$$

где

$$\|e_n(A)\| \leq c, \|e_n(A')\| \leq c.$$

Пусть $M = \sup_{\Phi} \frac{\|\Phi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\|}{\|\Phi\|_{\mathcal{B}_s}}$. Выберем $K \geq M(c^2 \|A - A'\| + 1)$. Тогда

$$M \cdot \|\psi_n(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\| \leq 1.$$

Итак, последовательность ψ_n удовлетворяет всем условиям определения спектрального веса, т. е. функция $\frac{K}{(x_1 - x_2) + i}$ является спектральным весом для $(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$.

3) Одним из самых важных частных случаев теоремы 5.3 является следующая оценка. Пусть A и A' — производящие наборы соответственно степеней s и s' и пусть $B_2 \subset B_3$. Тогда

$$\|f(A) - f(A')\|_{B_1 \rightarrow B_4} \leq c \|\Phi(A) - \Phi(A')\|_{B_2 \rightarrow B_5} \left\| \frac{f(x) - f(y)}{\Phi(x) - \Phi(y)} \right\|_{\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})}.$$

4) Пусть $\{B_\tau\}$ — банахова шкала, T_1 и T_2 — регулярные операторы степени s с определяющей парой $(B_\tau, B_{\tau+\tau_1})$, где τ — любое целое число. Пусть оператор $T_1 - T_2$ ограничен как оператор, действующий из B_τ в $B_{\tau-\tau_2}$, где $\tau_2 > 2\tau_1$. Пусть $T_1 = A_1 + iA_2$, $T_2 = B_1 + iB_2$, где $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ — производящие наборы. Пусть функции $\Phi_1(x_1, x_2)$ и $\Phi_2(y_1, y_2)$ таковы, что функция $\frac{\Phi_1(x) - \Phi_2(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2}$ принадлежит $\mathcal{B}_{s, s}(\sigma(T_1) \times \sigma(T_2))$. Тогда оператор $\Phi_1(A_1, A_2) - \Phi_2(B_1, B_2)$ ограничен как оператор из B_τ в $B_{\tau+2\tau_1-\tau_2}$.

5) Пусть Γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$. Введем в окрестности Γ координаты r, t , где r — длина нормали, t — параметр на кривой. Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \varphi(x, y) = \bar{\varphi}(r, t),$$

$$\bar{\varphi}_N(r, t) = \sum_{k=0}^N \frac{r^k}{k!} \frac{\partial^k \bar{\varphi}}{\partial r^k}(0, t) = \varphi_N(x, y).$$

Если спектр вектор-оператора $(\overset{1}{A}, T, \overset{2}{A}')$ лежит на Γ и сумма степеней производящих операторов A и A' не превосходит N , то

$$\overset{2}{T}\varphi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') = \overset{2}{T}\varphi_N(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}').$$

6) Пусть $P(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ — полином от двух переменных, A, A' производящие операторы в некотором банаховом пространстве B . Положим

$$P(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}') \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_{ij} A^i A'^j.$$

Задача. Пусть A и A' — операторы в $L^2(\mathbb{R})$, рассмотренные в п. 1:

$$A = i \frac{d}{dx}, \quad A' = i \frac{d}{dx} + i \frac{2x}{1+x^2}.$$

Показать, что $(\overset{2}{A}' - \overset{1}{A})^k = 0$ тогда и только тогда, когда $k \geq 3$.

Решение. Легко видеть, что $(\overset{2}{A}' - \overset{1}{A})^k \neq 0$ при $k = 0, 1, 2$. Пусть $k \geq 3$. Очевидно, A — производящий оператор степени $s_A = 0$. Далее,

$$e^{-iA't} f(t) = e^{-\ln(1+x^2) + \ln(1+(x+t)^2)} f(x+t) = \frac{1+(x+t)^2}{1+x^2} f(x+t);$$

следовательно, A' — производящий оператор степени $s_{A'} = 2$. Для $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(A') \varphi(A) f &= \frac{1}{1+x^2} \psi\left(i \frac{d}{dx}\right) (1+x^2) \varphi\left(i \frac{d}{dx}\right) f(x) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left[\psi(p) \left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right) \varphi(p) (Ff) \varphi \right]. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi \neq \emptyset$, то $\psi(A') \varphi(A) = 0$, т. е. спектр $\sigma(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$ лежит на диагонали в $\mathbb{R}^2$.

В силу предыдущего пункта оператор $F(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$ равен нулю, если функция F имеет на диагонали в $\mathbb{R}^2$ нуль порядка $\geq s_A + s_{A'} + 1 = 3$. Следовательно, при $k \geq 3$

$$(g, (\overset{1}{A} - \overset{2}{A}')^k f) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} (g, e_n(\overset{1}{A}') (\overset{1}{A} - \overset{2}{A}') e_m(\overset{1}{A}) f)$$

для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ ($\{e_n\}$ — последовательность функций из леммы I.13 гл. III). Отсюда $(\overset{1}{A} - \overset{2}{A}')^k = 0$ при $k \geq 3$.

7) Пусть $B_1 = B_2 = L_2(\mathbb{R})$, $B_3 = B_4 = W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $T = id/dx$ и пусть A и A' — операторы умножения на гладкую вещественную функцию $f(x)$. Нетрудно убедиться в том, что спектр вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A}')$ лежит на диагонали.

Из равенства

$$\left(i \frac{d}{dx}\right) e^{-if(x)t} = e^{-if(x)t} \left(i \frac{d}{dx}\right) + (-it) e^{-if(x)t} (if'(x))$$

легко получить формулу

$$\overset{2}{T}F(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}') \varphi = F(f(x), f(x)) i \frac{d\varphi(x)}{dx} + F'(x, f(x)) i \frac{df(x)}{dx} \varphi(x),$$

где F' — производная функции F по первому аргументу, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

§ 8. Дифференцирование функций от оператора, зависящего от параметра

Теорема 8.1. Пусть $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}$ — производящие операторы с определяющими парами пространств (B_1, B_1) и (B_2, B_2) соответственно, причем $\|e^{-iA_1^{(n)}t}\| \leq c_1(1+|t|)^{s_1}$, $\|e^{-iA_2^{(n)}t}\| \leq c_2(1+|t|)^{s_2}$, где c_1, s_1, c_2, s_2 — константы, не зависящие от n . И пусть $T_n: B_1 \rightarrow B_2$ гомоморфизмы, ограниченные по норме одной и той же константой. Пусть далее последовательность $\{A_1^{(n)}\}$ сходится поточечно на некотором плотном в B_1 множестве к производящему оператору A_1 , последовательность $\{A_2^{(n)}\}$ сходится поточечно на плотном в B_2 множестве к производящему оператору A_2 , а последовательность $\{T_n\}$ сходится поточечно к гомоморфизму $T: B_1 \rightarrow B_2$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ последовательность $\{T_n f(A_1^{(n)}, A_2^{(n)})\}$ сходится поточечно к гомоморфизму $Tf(A_1, A_2): B_1 \rightarrow B_2$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция f имеет вид $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, где $f_1 \in \mathcal{B}_{s_1}(\mathbb{R})$, $f_2 \in \mathcal{B}_{s_2}(\mathbb{R})$. Тогда справедливы формулы

$$T_n f(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}) = f_2(A_2^{(n)}) T_n f_1(A_1^{(n)}), \\ Tf(A_1, A_2) = f_2(A_2) T f_1(A_1).$$

Для любого $h \in B_1$ по теореме 6.2 гл. III имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(A_1^{(n)}) h = f_1(A_1) h.$$

Так как $T_n \rightarrow T$ поточечно и $\|T_n\| \leq \text{const}$, то

$$T_n f_1(A_1^{(n)}) h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T f_1(A_1) h$$

по норме пространства B_2 . Так как $f_2(A_2^{(n)}) \rightarrow f_2(A_2)$ поточечно на B_2 и $\|f_2(A_2^{(n)})\| \leq \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}} \|f_2\|_{\mathcal{B}_{s_2}(\mathbb{R})}$, то

$$f(A_2^{(n)}) T_n f(A_1^{(n)}) h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(A_2) T f(A_1) h$$

по норме пространства B_2 . Теорема 8.1 в рассматриваемом частном случае доказана.

Пусть теперь h — фиксированный элемент из B_1 . Тогда

$$T_n f(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}) h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T f(A_1, A_2) h$$

по норме пространства B_2 для любого f из плотного в $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ множества P функций вида

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(x) \psi_j(y).$$

Обозначим через $A_n: \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_2$ оператор, действующий по формуле

$$A_n f = \hat{T}_n f \left(\overset{1}{A}_1^{(n)}, \overset{2}{A}_2^{(n)} \right) h,$$

а через A — оператор:

$$A f \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T} f \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2 \right) h.$$

Тогда последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к A на всюду плотном множестве P и ограничена по норме:

$$\|A_n\| \leq \frac{c_1 c_2}{2\pi} \|T_n\|.$$

По теореме Банаха — Штейнгауза, $A_n \rightarrow A$ поточечно на $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Теорема доказана.

Замечание. В этой теореме можно заменить производящие операторы на производящие наборы.

Пусть A — производящий набор из k коммутирующих операторов с определяющей парой пространств (B_1, B_1) , A' — аналогичный производящий набор k' операторов с определяющей парой пространств (B_2, B_2) , T — гомоморфизм $B_1 \rightarrow B_2$. Пусть $P(x, y)$ — полином от переменных $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{k'}$:

$$P(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j,$$

где

$$i = i_1, \dots, i_k; \quad j = j_1, \dots, j_{k'}; \quad x^i = x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}, \quad y^j = y_1^{j_1} \dots y_{k'}^{j_{k'}}.$$

Положим

$$\hat{T}P \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right) = \sum a_{ij} A^i T A^j.$$

Лемма 8.1. Пусть $f \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$, $fP \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'})$. Если оператор $\hat{T}P \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right)$ ограничен как оператор, действующий из B_1 в B_2 , то

$$\hat{T}fP \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right) = \hat{T}' f \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right),$$

где $\hat{T}'$ — расширение оператора $\hat{T}P \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right)$ до гомоморфизма $B_1 \rightarrow B_2$.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций вида

$$f_n(x, y) = u_n(x) v_n(y), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad y \in \mathbb{R}^{k'}.$$

Легко видеть, что если операторы A и A' ограничены, то утверждение леммы справедливо для функций f_n :

$$\hat{T}f_n P \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right) = \hat{T}' f_n \left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}' \right). \quad (8.1)$$

Если $f_n \rightarrow f$ и $f_n P \rightarrow fP$ в $\mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^{k+k'})$, то переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (8.1), получим требуемое утверждение. Доказательство существования такой последовательности предоставляется читателю. Лемма доказана в случае ограниченных операторов A, A' .

Пусть теперь A и A' — произвольные производящие операторы. Положим

$$A_n = \frac{A}{1 + A^2/n}, \quad A'_n = \frac{A'}{1 + A'^2/n}.$$

Тогда A_n и A'_n — ограниченные операторы, сходящиеся на всюду плотных множествах к операторам A и A' соответственно. При этом найдутся такие константы c, c', N, N' , что

$$\|e^{-iA_n t}\| \leq c(1 + |t|)^N, \quad \|e^{-iA'_n t}\| \leq c'(1 + |t|)^{N'}.$$

Обозначим: $T_n = \varphi(A'_n) T \varphi(A_n)$. Тогда $T_n \rightarrow T$ поточечно на B_1 и $\|T_n\|_{B_1 \rightarrow B_2} \leq \text{const}$. Следовательно, по теореме 8.1, для любой функции $f \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^2)$ и для любого $h \in B_1$ справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}_n f(\hat{A}_n, \hat{A}'_n) P(\hat{A}_n, \hat{A}'_n) h = \hat{T} f(\hat{A}, \hat{A}') P(\hat{A}, \hat{A}') h.$$

С другой стороны, последовательность операторов

$$T'_n = P(\hat{A}, \hat{A}') \varphi(\hat{A}'_n) \hat{T} \varphi(A_n) = \varphi(A'_n) T' \varphi(A_n),$$

действующих из B_1 в B_2 , ограничена по норме и сильно сходится к T' . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}'_n f(\hat{A}_n, \hat{A}'_n) h = \hat{T}' f(\hat{A}, \hat{A}') h.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь семейство $\{T(\xi)\}$ регулярных операторов

$$T(\xi) = A_1(\xi) + iA_2(\xi),$$

где $(A_1(\xi), A_2(\xi)) = A(\xi)$ — производящий набор степени s с определяющей парой пространств (B, B) , причем область определения D оператора $T(\xi)$ не зависит от ξ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|e^{-iA(\xi)t}\|}{(1 + |t|)^s} < \infty$$

и спектр оператора $T(\xi)$ содержится в замкнутом множестве $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, не зависящем от ξ .

Лемма 8.2. Пусть $f \in \mathcal{B}_s(\sigma)$, пусть семейство $\{T(\xi)\}$ обладает определяющей парой пространств (B', B') , причем $B \subset B'$, и пусть для любых ξ', ξ'' из области определения функции $T(\xi)$ спектр пары производящих наборов $\hat{A}(\xi')$, $\hat{A}(\xi'')$ относительно вложения B в B' содержится в замкнутом множестве $\Sigma \subset \sigma \times \sigma \subset \mathbb{R}^4$. Пусть далее

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \|T(\xi) - T(\xi_0)\|_{B \rightarrow B'} = 0.$$

Тогда, если множество функций вида

$$\frac{g(x) - g(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2}, \quad g \in \mathcal{B}_s(\sigma)$$

плотно *) в $\mathcal{B}_s(\Sigma)$, то

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \|f(A(\xi)) - f(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} = 0.$$

Доказательство. Пусть функции $f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ таковы, что

$$\Phi_n(x, y) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2} \in \mathcal{B}_s(\Sigma). \quad (8.2)$$

Пусть T_{ξ, ξ_0} — расширение оператора $T(\xi) - T(\xi_0)$ до гомоморфизма $B \rightarrow B'$. Тогда, согласно предыдущей лемме, имеем

$$f_n(A(\xi)) - f_n(A(\xi_0)) = \hat{T}_{\xi, \xi_0} \Phi_n(\hat{A}(\xi), \hat{A}(\xi_0)).$$

Следовательно,

$$\|f_n(A(\xi)) - f_n(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} \leq c \|T(\xi) - T(\xi_0)\|_{B \rightarrow B'} \|\Phi_n\|_{\mathcal{B}_s(\Sigma)} \rightarrow 0$$

при $\xi \rightarrow \xi_0$.

Пусть $f_n \rightarrow f$ в $\mathcal{B}_s(\sigma \times \sigma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f(A(\xi)) - f(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} &\leq \|f(A(\xi)) - f_n(A(\xi))\|_{B \rightarrow B'} + \\ &+ \|f_n(A(\xi)) - f_n(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} + \|f_n(A(\xi_0)) - f(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} \leq \\ &\leq c \{ \|f - f_n\|_{\mathcal{B}_s(\sigma)} + \|T(\xi) - T(\xi_0)\|_{B \rightarrow B'} \|\Phi_n\|_{\mathcal{B}_s(\Sigma)} \}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое n , чтобы выполнялось неравенство $\|f - f_n\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon/2$. Для данного n найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|T(\xi) - T(\xi_0)\|_{B \rightarrow B'} \|\Phi_n\|_{\mathcal{B}_s(\Sigma)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|\xi - \xi_0| < \delta$. Следовательно, при $|\xi - \xi_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|f(A(\xi)) - f(A(\xi_0))\|_{B \rightarrow B'} < \varepsilon,$$

и лемма доказана.

Задача. Сформулировать и доказать многомерный аналог леммы 8.2.

Теорема 8.2. Пусть параметр ξ пробегает интервал вещественной оси, пусть семейство регулярных операторов $\{T(\xi)\}$ обладает (кроме (B, B)) определяющей парой пространств (B', B') , причем $B \subset B'$, и пусть для любых ξ', ξ'' из данного интервала спектр пары производящих наборов $\hat{A}(\xi')$, $\hat{A}(\xi'')$ относительно вложения B в B' содержится в замкнутом множестве $\Sigma \subset \sigma \times \sigma$.

*) Заметим, что это условие выполнено, если $\{T(\xi)\}$ — семейство производящих операторов. В этом случае можно положить $\sigma = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathbb{R}^2$.

Пусть далее существует производная $T'(\xi)$ в следующем смысле:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{T(\xi + \varepsilon) - T(\xi)}{\varepsilon} - T'(\xi) \right\|_{B \rightarrow B'} = 0,$$

причем $\|T'(\xi)\|_{B \rightarrow B'} < \infty$. Пусть $f \in \mathcal{B}_s(\sigma)$. Тогда, если

$$\Phi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2} \in \mathcal{B}_s(\Sigma); \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2,$$

то существует производная $\frac{d}{d\xi} f(A(\xi))$ в топологии пространства $\text{Hom}(B, B')$, причем имеет место формула

$$\frac{d}{d\xi} f(A(\xi)) = T'(\xi) \frac{f(\hat{A}(\xi)) - f(\check{A}(\xi))}{\hat{T}(\xi) - \check{T}(\xi)}.$$

Следствие. Справедлива оценка

$$\left\| \frac{d}{d\xi} f(A(\xi)) \right\|_{B \rightarrow B'} \leq c \|T'(\xi)\|_{B \rightarrow B'} \left\| \frac{f(x) - f(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2} \right\|_{\mathcal{B}_s(\Sigma)},$$

где c зависит только от $\sup_{t \in \mathbb{R}^1} \frac{\|e^{-iA(\xi)t}\|_{B \rightarrow B}}{(1+|t|)^s}$ и от

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^1} \frac{\|e^{-iA(\xi)t}\|_{B' \rightarrow B'}}{(1+|t|)^s}.$$

Доказательство. Из существования и ограниченности оператора $T'(\xi)$ следует, что $\|T(\xi + \varepsilon) - T(\xi)\|_{B \rightarrow B'} < \infty$. В силу леммы 8.1 имеем

$$\frac{f(A(\xi + \varepsilon)) - f(A(\xi))}{\varepsilon} = \frac{2}{T(\xi + \varepsilon) - T(\xi)} \frac{f(\hat{A}(\xi + \varepsilon)) - f(\check{A}(\xi))}{\hat{T}(\xi + \varepsilon) - \check{T}(\xi)}, \quad (8.3)$$

где $\hat{T}(\xi + \varepsilon) - \check{T}(\xi)$ — расширение оператора $T(\xi + \varepsilon) - T(\xi)$ до гомоморфизма $B \rightarrow B'$. Переходя в (8.3) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и пользуясь многомерным аналогом леммы (8.2), получаем утверждение теоремы.

Многомерный аналог теоремы 8.2 мы сформулируем и докажем для функций от нескольких производящих наборов. Определение таких функций почти дословно переносится из § 4.

Пусть $A_k = (A_k^{(1)}, \dots, A_k^{(n_k)})$ — производящие наборы степеней s_k на определяющих парах пространств (B_k, B'_k) , $k = 1, \dots, N$; T_k — гомоморфизм $B'_k \rightarrow B_{k+1}$, $k = 1, \dots, N-1$. Предположим, что имеют место вложения $B_k \subset B'_k$, $k = 1, \dots, N$. Через $U_k(t)$ обозначим n_k -параметрическую группу, порожденную набором A_k , $t \in \mathbb{R}^{n_k}$.

Определим, как обычно, банахову алгебру $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{|n|})$, $|n| = n_1 + \dots + n_N$, $s = (s_1, \dots, s_N)$, исходя из пространства $C_s(\mathbb{R}^{|n|})$

непрерывных функций на $\mathbb{R}^{[n]}$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{C_s} = \sup_{x \in \mathbb{R}^{[n]}} \frac{|f(x)|}{\prod_{i=1}^N (1 + |x_i|)^{s_i}},$$

где $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{[n]}$, $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n_k)}) \in \mathbb{R}^{n_k}$.

Если $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]})$ и $h \in B_1$, то положим по определению

$$\begin{aligned} T_1 \dots T_{N-1} \varphi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) h = \\ = (2\pi)^{\frac{|n|}{2}} \int_{\mathbb{R}^{[n]}} \hat{\varphi}(t_1, \dots, t_N) e^{-iA_N t_N} T_{N-1} e^{-iA_{N-1} t_{N-1}} \dots T_1 e^{-iA_1 t_1} h dt, \end{aligned}$$

где $t_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $dt = dt_1^{(1)} \dots dt_N^{(n_N)}$, $e^{-iA_j t_j}: B_j \rightarrow B'_j$ — замыкание оператора $U_j(t)$.

Определение. Точку $\lambda \in \mathbb{R}^{[n]}$ будем называть точкой резольвентного множества вектор-набора $\mathcal{X} = \left\{ \overset{1}{A_1}, \overset{2}{T_1}, \dots, \overset{2N-2}{T_{N-1}}, \overset{2N-1}{A_N} \right\}$, если существует такая окрестность u_λ этой точки, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{[n]})$ с носителем, лежащим в u_λ , принадлежит идеалу X , построенному по гомоморфизму

$$\mathcal{M}: \psi \rightarrow T_1 \dots T_{N-1} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right)$$

банаховой алгебры $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]})$ в банахово пространство $\text{Hom}(B_1, B'_N)$ (так же, как в определении из § 5). Дополнение к резольвентному множеству назовем спектром $\sigma(\mathcal{X})$ производящего вектор-набора $\mathcal{X}$.

Пусть λ — точка резольвентного множества $\mathcal{X}$ и φ — функция, бесконечно дифференцируемая всюду, кроме точки λ . Пусть далее u_λ — окрестность из определения. Пусть наконец, $\varphi, \bar{\varphi} \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]})$ и функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\bar{\varphi}}$ бесконечно дифференцируемы в u_λ и совпадают с функцией φ вне некоторого замкнутого множества, лежащего в u_λ . Тогда $\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{[n]})$ и $\text{supp}(\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}) \subset u_\lambda$, так что функция $\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}$ принадлежит идеалу X , т. е. элементы $\{\bar{\varphi}\}$ и $\{\bar{\bar{\varphi}}\}$ факторалгебры $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]})/X$ совпадают. Допуская некоторую неточность в обозначениях, будем писать при этом $\{\bar{\varphi}\} = \{\bar{\bar{\varphi}}\} = \{\varphi\}$. Для гомоморфизма $\mathcal{M}$ имеет место разложение $\mathcal{M} = p\mathcal{M}_0$, где

$$\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{[n]})/X \xrightarrow{\mathcal{M}_0} \text{Hom}(B_1, B'_N).$$

Поэтому

$$T_1 \dots T_{N-1} \varphi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = T_1 \dots T_{N-1} \bar{\varphi} \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right).$$

Мы будем в дальнейшем обозначать этот оператор также через

$T_1 \dots T_{N-1} \varphi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right)$ и будем называть функцию φ его *символом*.

Лемма 8.3. Пусть носитель функции $\psi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n|})$ лежит в резольвентном множестве вектор-набора $\mathcal{X}$. Тогда ψ принадлежит идеалу X , построенному по гомоморфизму M .

Доказательство. Заметим сначала, что если точка λ принадлежит резольвентному множеству $\mathcal{X}$, то любая функция из $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n|})$ с носителем в достаточно малой окрестности точки λ принадлежит X . Это следует из того, что такую функцию можно аппроксимировать в $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n|})$ функциями из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n|})$ с носителями в малой окрестности точки λ .

Предположим вначале, что функция ψ имеет компактный носитель. Тогда она представима в виде суммы конечного числа функций из X и, следовательно, сама принадлежит X .

Пусть теперь ψ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям леммы. Существует такая последовательность $\{e_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{n|})$, что

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} (2\pi)^{-|n|/2} \int_{\mathbb{R}^{n|}} (F^{-1}e_{n'}) (t) g(t) dt = g(0)$$

для любой функции $g \in C_s(\mathbb{R}^{n|})$. Положим $\psi_{n'} = \psi e_{n'}$. Имеем $\text{supp } \psi_{n'} \subset \text{supp } \psi$; поэтому $T_1 \dots T_{N-1} \psi_{n'} \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} & \lim_{n' \rightarrow \infty} (2\pi)^{-|n|/2} \int_{\mathbb{R}^{n|}} (F^{-1}\psi_{n'}) (t) g(t) dt = \\ & = (2\pi)^{-|n|/2} \lim_{n' \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n|}} [(F^{-1}\psi) * (F^{-1}e_{n'})] (t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^{n|}} (F^{-1}\psi) (t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любых $h \in B_1$, $h^* \in (B'_N)^*$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} h^* \left[T_1 \dots T_{N-1} \psi_n \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) h \right] = \\ &= h^* \left[T_1 \dots T_{N-1} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) h \right]. \end{aligned}$$

Значит, $T_1 \dots T_{N-1} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$.

Заменяя в этом рассуждении ψ на ψf , получаем, что

$$T_1 \dots T_{N-1} (\psi f) \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$$

для любого $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n|})$, а это и означает, что $\psi \in X$. Тем самым лемма доказана.

Пусть набор $A_k(\xi) = \{A_k^{(1)}(\xi), \dots, A_k^{(n_k)}(\xi)\}$ для всех ξ в окрестности u_{ξ_0} точки ξ_0 является производящим на парах (B_k, B_k) и $(\bar{B}_k, \bar{B}_k)$, $k=1, \dots, N$. Предположим, что для всех k выполнены следующие условия:

(A_1): $B_k \subset \bar{B}_k$; область определения D_k операторов $A_k^{(j)}(\xi)$ не зависит от ξ ;

$$\|e^{-iA_k(\xi)t}\|_{\bar{B}_k \rightarrow \bar{B}_k} \leq c_k (1 + |t|)^{s_k}$$

при всех $\xi \in u_{\xi_0}$, $t \in \mathbb{R}^{n_k}$;

$$\|e^{-i\langle A_k(\xi_0), t \rangle}\|_{\bar{B}_k \rightarrow \bar{B}_k} \leq c_k (1 + |t|)^{s_k}, \quad t \in \mathbb{R}^{n_k}.$$

Далее, пусть $T_k(\xi)$: $D_k \rightarrow D_{k+1}$ — линейный оператор для всех $\xi \in u_{\xi_0}$ и $k = 1, \dots, N-1$, причем $T_k(\xi)$ удовлетворяет условиям:

(A_2): $T_k(\xi)$ — ограниченный оператор из $\bar{B}_k$ в B_{k+1} ,

$$\|T_k(\xi)\|_{\bar{B}_k \rightarrow B_{k+1}} \leq c_k, \text{ где } c_k \text{ не зависит от } \xi.$$

Аналогом леммы 8.2 является следующая лемма.

Лемма 8.4. Пусть $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n_1})$, $s = (s_1, \dots, s_N)$, $|n| = n_1 + \dots + n_N$. Если семейства операторов $T_k(\xi)$, $k = 1, \dots, N-1$ непрерывны в точке ξ_0 по норме $\text{Hom}(\bar{B}_k, B_{k+1})$, а семейства $[A_k^{(j)}(\xi) - A_k^{(j)}(\xi_0)]$, $j = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, N$ непрерывны в точке ξ_0 по норме $\text{Hom}(B_k, \bar{B}_k)$, то семейство операторов $T_1(\xi) \dots T^{2N-2}(\xi) f(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi))$ непрерывно в точке ξ_0 по норме $\text{Hom}(B_1, \bar{B}_N)$.

Доказательство. Отметим следующее тождество:

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, \dots, y_N) &= \varphi(x_1, \dots, x_N) + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} (y_k^{(i)} - x_k^{(i)}) (\delta_{k,i} \varphi) \times \\ &\times (x_1, \dots, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, \dots, y_k^{(n_k)}, \dots, y_N), \end{aligned} \quad (8.4)$$

где

$$\delta_{k,i} \varphi = \frac{\varphi(x_1, \dots, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(i)}, y_k^{(i+1)}, \dots, y_k^{(n_k)}, \dots, y_N)}{x_k^{(i)} - y_k^{(i)}} - \frac{\varphi(x_1, \dots, x_k^{(1)}, \dots, y_k^{(i)}, \dots, y_k^{(n_k)}, \dots, y_N)}{x_k^{(i)} - y_k^{(i)}}$$

— разностная производная функции φ по переменной $x_k^{(i)}$.

Пространство $\mathcal{B}_{(2s+1)}(\mathbb{R}^{n_1})$, где

$$(2s+1) = (\underbrace{2s_1+1, \dots, 2s_1+1}_{n_1}, \dots, \underbrace{2s_N+1, \dots, 2s_N+1}_{n_N}),$$

плотно в $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n_1})$. Поэтому для данного символа $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^{n_1})$ существует такая последовательность $f_m \in \mathcal{B}_{(2s+1)}(\mathbb{R}^{n_1})$, что $\|f_m - f\|_{\mathcal{B}_s} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Для f_m имеем соотношение: $\delta_{k,i} f_m \in \mathcal{B}_{(s, s_k)}(\mathbb{R}^{n_1+1})$, где

$$(s, s_k) = (\underbrace{s_1, s_1, \dots, s_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{s_k, \dots, s_k}_{n_{k+1}}, \dots, \underbrace{s_N, \dots, s_N}_{n_N}).$$

В силу условия $[A_k^{(j)}(\xi) - A_k^{(j)}(\xi_0)] \in \text{Hom}(B_k, \bar{B}_k)$ и леммы 8.1, из (8.4) получаем равенство

$$\begin{aligned} & T_1(\xi) \dots T_{N-1}(\xi) f_m(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi)) - \\ & - T_1(\xi_0) \dots T_{N-1}(\xi_0) f_m(A_1(\xi_0), \dots, A_N(\xi_0)) = \\ & = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} (A_k^{(i)}(\xi) - A_k^{(i)}(\xi_0)) T_1(\xi) \dots T_{k-1}(\xi) T_k^{2k-2}(\xi) T_k^{2k+2}(\xi) \dots T_{N-1}(\xi) \times \\ & \times (\delta_{k,i} f_m)(A_1(\xi_0), \dots, A_k^{(i)}(\xi_0), \dots, A_k^{(i)}(\xi), A_k^{(i)}(\xi), \dots \\ & \dots, A_k^{(n_k)}(\xi), \dots, A_N(\xi) + \sum_{k=1}^{N-1} T_1(\xi_0) \dots [T_k(\xi) - T_k(\xi_0)] \dots \\ & \dots T_{N-1}(\xi) f_m(A_1(\xi_0), \dots, A_N(\xi_0)), T_N = T_0 = 1. \quad (8.5) \end{aligned}$$

Отсюда, в силу предположений леммы и оценки леммы 3.1, следует, что

$$\begin{aligned} & \|T_1(\xi) \dots T_{N-1}(\xi) f_m(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi)) - \\ & - T_1(\xi_0) \dots T_{N-1}(\xi_0) f_m(A_1(\xi_0), \dots, A_N(\xi_0))\|_{B_1 \rightarrow \bar{B}_N} \leq \\ & \leq c \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \|A_k^{(i)}(\xi) - A_k^{(i)}(\xi_0)\|_{B_k \rightarrow \bar{B}_k} \|\delta_{k,i} f_m\|_{\mathcal{B}(s, s_k)} + \\ & + c \sum_{k=1}^{N-1} \|T_k(\xi) - T_k(\xi_0)\|_{B_k \rightarrow B_{k+1}} \|f_m\|_{\mathcal{B}_s} \rightarrow 0 \quad (8.6) \end{aligned}$$

при $\xi \rightarrow \xi_0$.

Но поскольку $\|f_m - f\|_{\mathcal{B}_s} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то как и в доказательстве леммы 8.2, из (8.6) получим, что семейство

$$T_1(\xi) \dots T_{N-1}(\xi) f(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi))$$

непрерывно по ξ в точке ξ_0 , и лемма доказана.

Из этой леммы сразу получается многомерный аналог теоремы 8.2.

Теорема 8.3. Пусть производящие наборы $A_k(\xi)$, $k=1, \dots, N$ в окрестности точки ξ_0 удовлетворяют условию (A_1) и пусть $T_k: D_k \rightarrow D_{k+1}$ — линейные операторы, причем $T_k \in \text{Hom}(\bar{B}_k, B_{k+1})$ и T_k не зависит от ξ ($k=1, \dots, N-1$). Пусть семейства $A_k^{(j)}(\xi)$, $j=1, \dots, n_k$, $k=1, \dots, N$ дифференцируемы в $\text{Hom}(B_k, \bar{B}_k)$ в точке ξ_0 . Символ f принадлежит пространству $\mathcal{B}_{(2s+1)}(\mathbb{R}^{n_1})$, где

$$(2s+1) = (\underbrace{2s_1+1, \dots, 2s_1+1}_{n_1}, \dots, \underbrace{2s_N+1, \dots, 2s_N+1}_{n_N}).$$

Тогда семейство операторов $T_1 \dots T_{N-1} f(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi))$ дифференцируемо в точке ξ_0 по норме пространства $\text{Hom}(B_1, \bar{B}_N)$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} T_1 \dots T_{N-1} f(A_1(\xi), \dots, A_N(\xi)) \Big|_{\xi=\xi_0} = \\ = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \left[\frac{d}{d\xi} A_k^{(i)}(\xi_0) \right] T_1 \dots T_{k-1} T_{k+1} \dots T_{N-1} \times \\ \times (\delta_k, if) (A_1(\xi_0), \dots, A_k^{(i)}(\xi_0), \dots, \\ \dots, A_k^{(i)}(\xi_0), A_k^{(i)}(\xi_0), \dots, A_k^{(n_k)}(\xi_0), \dots, A_N^{n_N}(\xi_0)). \end{aligned}$$

Доказательство. Разделим обе части равенства (8.5) на $\xi - \xi_0$. Тогда в силу той же леммы 8.4 предел правой части при $\xi \rightarrow \xi_0$ существует, и мы получаем утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим разложение оператора

$$L(x, hp + \frac{1}{\partial x} S) = e^{-\frac{i}{h} S} L(x, hp) e^{\frac{i}{h} S},$$

где $p = -i \partial/\partial x$, до второй степени параметра h , S — гладкая функция от x . В силу предыдущей теоремы

$$L(x, hp + \frac{1}{\partial x} S) = L(x, \partial S/\partial x) + hp \frac{L(x, \partial S/\partial x) - L(x, \partial S/\partial x)}{\partial S/\partial x - \partial S/\partial x} + O(h^2).$$

В этой формуле имеется в виду следующий выбор определяющих пар пространств: $B_1 = B_2 = W_2^1$, $B'_1 = B'_2 = L_2$, $hp + \partial S/\partial x$ имеет определяющие пары (B_1, B_2) и (B'_1, B'_2) , p — ограниченный оператор из B_2 в B'_1 .

Поскольку спектр вектор-оператора $(\partial S/\partial x, p, \partial S/\partial x)$ лежит на диагонали, $\partial S/\partial x$ есть производящий оператор порядка 1, $\partial S/\partial x$ — производящий оператор порядка 0, то

$$p \frac{L(x, \partial S/\partial x) - L(x, \partial S/\partial x)}{\partial S/\partial x - \partial S/\partial x} = p P(x, \partial S/\partial x, \partial S/\partial x),$$

где $P(x; \xi, \eta)$ — сумма нулевого и первого членов разложения Тейлора по ξ функции $\frac{L(x, \xi) - L(x, \eta)}{\xi - \eta}$ в точке $\xi = \eta$, т. е.

$$P(x; \xi, \eta) = L_p(x, \eta) + \frac{1}{2} L_{pp}(x, \eta) (\xi - \eta)$$

(L_p — производная функции L по второму аргументу). Далее:

$$\begin{aligned} pP(x; \partial \dot{S}/\partial x, \partial \dot{S}/\partial x) &= -i \partial/\partial x \{L_p(x, \partial \dot{S}/\partial x) + \\ &+ \frac{1}{2} L_{pp}(x; \partial \dot{S}/\partial x) (\partial \dot{S}/\partial x - \partial \dot{S}/\partial x)\} = \\ &= -i L_p(x, \partial S/\partial x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} L_{pp}(x, \partial S/\partial x) \partial^2 S/\partial x^2. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получаем формулу

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{h} S(x)} L(x, -ih \partial/\partial x) e^{\frac{i}{h} S(x)} \varphi(x) = \\ = L(x, \partial S/\partial x) \varphi(x) - ih [L_p(x, \partial S/\partial x) \partial \varphi/\partial x + \\ + \frac{1}{2} L_{pp}(x, \partial S/\partial x) \partial^2 S/\partial x^2 \varphi(x)]. \quad (8.7) \end{aligned}$$

Задача. Пусть выполнены условия п. 4 § 7 и пусть $f \in \mathcal{B}_r(\mathbb{R}^2)$, где r достаточно велико. Найти условия, при которых разность

$$f(B_1, B_2) - \sum_{j=0}^N \prod_{k=1}^j \frac{2k}{(T_2 - T_1)} \sum_{l=0}^j \frac{f\left(\frac{2l+1}{A_1}, \frac{2l+1}{A_2}\right)}{\prod_{i \neq l} \left(\frac{2l+1}{T_1} - \frac{2l+1}{T_1}\right)}$$

есть ограниченный оператор из B_τ в $B_{\tau-(N+1)}(\tau_2 - 2\tau_1)$.

Решение. Достаточно выполнение следующего условия: все функции

$$\delta^m f(x_0, \dots, x_m) = \sum_{k=0}^m \frac{f(x_k^{(1)}, x_k^{(2)})}{\prod_{j \neq k} [(x_k^{(1)} + ix_k^{(2)}) - (x_j^{(1)} + ix_j^{(2)})]} \quad m=0, 1, \dots, N+1$$

принадлежат пространству $\mathcal{B}_{\underbrace{(s_1, \dots, s_{m+1})}_{m+1}}(\sigma(T_{k_0}) \times \dots \times \sigma(T_{k_m}))$, где $k_j = 1, 2$. Действительно, с помощью леммы 8.1, так же как и в доказательстве теоремы 8.3, получим разложение типа (8.5):

$$\begin{aligned} R_1 \dots R_{N-1} \psi\left(\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{2N-1}{T_N}\right) - R_1 \dots R_{N-1} \psi\left(\frac{1}{K_1}, \dots, \frac{2N-1}{K_N}\right) = \\ = \sum_{j=1}^N \left(\frac{2j}{T_j} - K_j\right) R_1 \dots R_{j-1} R_{j+1} \dots R_N (\delta^j \psi) \times \left(\frac{1}{K_1}, \dots, \frac{2j-1}{K_j}, \frac{2j+1}{T_j}, \dots, \frac{2N+1}{T_N}\right), \end{aligned}$$

где $R_1, \dots, R_{N-1}$ — переводящие операторы, T_i, K_i — регулярные операторы степени s_i , $(T_i - K_i)$ — переводящие операторы при $i=1, \dots, N$ в шкале $\{B_\tau\}$, $\psi \in \mathcal{B}_{\underbrace{(s_1, \dots, s_N)}_N}(\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2)$, $\delta^i \psi \in \mathcal{B}_{\underbrace{(s_1, \dots, s_N)}_{N+1}}(\sigma(K_1) \times \dots \times \sigma(T_N))$, $i=1, \dots, N$.

Применяя последовательно эту формулу к правой части равенства

$$f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2) = \frac{f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2)}{\frac{2}{T_2} - \frac{2}{T_1}} = \frac{f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2)}{\frac{2}{T_2} - \frac{2}{T_1}} \delta f\left(\frac{1}{T_1}, \frac{2}{T_2}\right),$$

получим искомое разложение:

$$f(B_1, B_2) = f(A_1, A_2) + \frac{2}{(T_2 - T_1)} \delta f\left(\frac{1}{T_1}, \frac{2}{T_1}\right) + \dots \\ \dots + \frac{2}{(T_2 - T_1)} \dots \frac{2N}{(T_2 - T_1)} \delta^N f\left(\frac{1}{T_1}, \dots, \frac{2N+1}{T_1}\right) + Z_N,$$

где оператор Z_N , как легко проследить, является ограниченным оператором из B_{τ} в $B_{\tau-(N+1)(\tau_2-2\tau_1)}$.

§ 9. Формулы коммутации

Пусть A, B — производящие операторы соответственно степеней s и s' , действующие в банаховом пространстве B , содержащем всюду плотное линейное многообразие E , инвариантное относительно A, B, e^{tA}, e^{-tB} .

Мы будем предполагать в этом параграфе, что выполнено следующее условие согласования операторов A и B : для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ операторы $\varphi(A)B$ и $B\varphi(A)$ определены на E и замкнуты.

Лемма 9.1. Пусть оператор A ограничен и коммутатор $[A, B]$ ограничен. Тогда для любого $f \in \mathcal{B}_{s+1}(\mathbb{R})$ справедлива формула

$$\overline{[B, f(A)]} = \overline{[B, A]} \frac{f(\overset{\circ}{A}) - f(\underset{\circ}{A})}{\overset{\circ}{A} - \underset{\circ}{A}},$$

где черта означает замыкание.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — вещественная функция, заключенная между 0 и 1 и равная 1 в окрестности нуля. Обозначим $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$. Положим $A_n = \varphi_n(B) A \varphi_n(B)$ и докажем сначала формулу

$$\overline{[B, f(A_n)]} = \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}} \overline{[B, A_n]}. \quad (9.1)$$

Имеем

$$\overline{[A_n, B]} = \varphi_n(B) A \varphi_n(B) B - B \varphi_n(B) A \varphi_n(B) = \varphi_n(B) \overline{[A, B]} \varphi_n(B).$$

Значит, правая часть формулы (9.1) равна

$$\begin{aligned} & \overline{[\varphi_n(B) [B, A] \varphi_n(B)]} \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}} = \\ & = \overline{[\varphi_n(B) B A \varphi_n(B)]} \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}} - \overline{[\varphi_n(B) A B \varphi_n(B)]} \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}} = \\ & = \overline{[A_n B]} \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}} + \overline{[B A_n]} \frac{f(\overset{\circ}{A_n}) - f(\underset{\circ}{A_n})}{\overset{\circ}{A_n} - \underset{\circ}{A_n}}. \end{aligned}$$

Обозначим $B_m = B \varphi_m(B)$. Тогда при фиксированном n и доста-

точно больших m

$$\begin{aligned} \overline{[B, A_n]} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} &= -\overline{[A_n B_m]} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} + \\ &+ \overline{[B_m A_n]} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} = -\overline{A_n B_m} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} + \\ &+ \overline{B_m A_n} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} = \overline{B_m} (-f(A_n) + f(A_n)) = [B_m, f(A_n)]. \end{aligned}$$

Итак, при фиксированном n и достаточно больших m справедлива формула

$$\overline{[B, A_n]} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} = [B_m, f(A_n)];$$

в частности, это означает, что правая часть этой формулы не зависит от m . Если $h = \psi(B)q$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то

$$f(A_n) B_m h = f(A_n) B h$$

при достаточно больших m . Следовательно, $B_m f(A_n) h$ не зависит от m при достаточно больших m и так как $\varphi_m(B) \rightarrow 1$ поточечно, $B = B\varphi_m(B)$ и B — замкнутый оператор, то

$$B_m f(A_n) h = B f(A_n) h$$

при достаточно больших m . Это означает, что формула (9.1) справедлива на всюду плотном множестве, а следовательно, и всюду.

Перейдем в формуле (9.1) к поточечному пределу при $n \rightarrow \infty$, предположив дополнительно, что Фурье-образ функции f имеет компактный носитель. Для любого h

$$e^{-iA_n t} h \rightarrow e^{-iA t} h \quad (9.2)$$

равномерно по t на любом отрезке $a \leq t \leq b$ и

$$\|e^{-iA_n t}\| \leq c \quad (9.3)$$

при $t \in [a, b]$. Это следует из того, что

$$\left\| e^{-iA_n t} - \sum_{k=0}^N \frac{(iA_n)^k}{k!} \right\| = O_t(\varepsilon),$$

где $O_t(\varepsilon)$ не зависит от n . Переходя к пределу в правой части (9.1) при $n \rightarrow \infty$, получаем в силу (9.2) и (9.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{[B, A_n]} \frac{f(A_n) - f(A_n)}{A_n - A_n} h = \overline{[B, A]} \frac{f(A) - f(A)}{A - A} h.$$

Что же касается предела левой части формулы (9.1), то $f(A_n) \rightarrow f(A)$ поточечно, так что $f(A_n) B \rightarrow f(A) B$ на E . Следова-

тельно, последовательность $\{Bf(A_n)h\}$ сходится для любого $h \in E$. В силу замкнутости оператора B имеем при $h \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Bf(A_n)h = Bf(A)h.$$

Итак, для любого $h \in E$ справедлива формула

$$[B, f(A)]h = \overline{[B, A]} \frac{f(\overset{\circ}{A}) - f(\underset{\circ}{A})}{\overset{\circ}{A} - \underset{\circ}{A}} h.$$

Лемма доказана для функции f , имеющей Фурье-образ с компактным носителем. Так как множество таких функций плотно в $\mathcal{B}_{s+1}(\mathbb{R})$, то лемма верна и в общем случае.

Следующая теорема утверждает, что можно отказаться от предположения об ограниченности оператора A .

Теорема 9.1. Пусть коммутатор $[A, B]$ ограничен. Тогда для любого $f \in \mathcal{B}_{s+1}(\mathbb{R})$ справедлива формула

$$[B, f(A)] = \overline{[B, A]} \frac{f(\overset{\circ}{A}) - f(\underset{\circ}{A})}{\overset{\circ}{A} - \underset{\circ}{A}}.$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций, рассмотренная при доказательстве леммы 9.1. Положим $B_n = \varphi_n(A) B \varphi_n(A)$, $A_n = A \varphi_n(A)$. Рассмотрим коммутатор

$$[B_n, A_m] = \varphi_n(A) B \varphi_n(A) A \varphi_m(A) - A \varphi_m(A) \varphi_n(A) B \varphi_n(A).$$

Пусть n фиксировано; тогда для достаточно больших m получаем

$$[B_n, A_m]h = \varphi_n(A) [B, A] \varphi_n(A) h, \quad h \in E.$$

Следовательно, при достаточно больших m оператор $\overline{[B_n, A_m]}$ не зависит от m и ограничен по норме числом $\|[B, A]\|$.

Применяя лемму 9.1, получаем

$$\overline{[B_n, f(A_m)]} = \overline{[\varphi_n(A) [B, A] \varphi_n(A)]} \frac{f(\overset{\circ}{A_m}) - f(\underset{\circ}{A_m})}{\overset{\circ}{A_m} - \underset{\circ}{A_m}}.$$

Для достаточно больших m эту формулу можно переписать в виде

$$\overline{[B_n, f(A_m)]} = \varphi_n(\overset{\circ}{A}) \overline{[B, A]} \varphi_n(\underset{\circ}{A}) \frac{f(\overset{\circ}{A}) - f(\underset{\circ}{A})}{\overset{\circ}{A} - \underset{\circ}{A}}. \quad (9.4)$$

Пусть $h \in E$. Тогда $f(A_m) B_n h = f(A_m) \varphi_n(A) B \varphi_n(A) h = f(A) \varphi_n(A) B \varphi_n(A) h = f(A) B_n h$, если m достаточно велико при фиксированном n . Аналогично, $B_n f(A_m) h = B_n f(A) h$ при достаточно больших m . Следовательно, справедлива формула

$$\overline{[B_n, f(A)]} = \varphi_n(\overset{\circ}{A}) \overline{[B, A]} \frac{f(\overset{\circ}{A}) - f(\underset{\circ}{A})}{\overset{\circ}{A} - \underset{\circ}{A}} \varphi_n(\underset{\circ}{A}).$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $n \rightarrow \infty$. Правая часть поточечно сходится к

$$\overline{[B, A]} \frac{f(\overset{1}{A}) - f(\overset{2}{A})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}}.$$

Что касается левой части, то при $h \in E$, $q = \psi(A)h$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем:

$$\begin{aligned} [B_n, f(A)] q &= \varphi_n(A) B \varphi_n(A) f(A) \psi(A) h - \\ &- f(A) \varphi_n(A) B \varphi_n(A) \psi(A) h = \varphi_n(A) [B, f(A)] \varphi_n(A) \psi(A) h. \end{aligned}$$

Если n достаточно велико, то $\varphi_n(A) \psi(A) h = \psi(A) h = q$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B_n, f(A)] q = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(A) [B, f(A)] q = [B, f(A)] q.$$

Так как линейная оболочка множества элементов вида $\psi(A)h$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $h \in E$, является всюду плотной, то теорема доказана.

Теорема 9.2. Пусть коммутатор $[A, B]$ ограничен. Тогда для любого $f(x, y) \in \mathcal{B}_{s+1, s'+1}(\mathbb{R}^2)$ справедлива формула

$$f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}) = \overline{[A, B]} \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\overset{1}{A}, \overset{1}{A}, \overset{1}{B}, \overset{2}{B}). \quad (9.5)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, поскольку множество таких функций плотно в $\mathcal{B}_{s+1, s'+1}(\mathbb{R}^2)$. Тогда формула (9.5) получится переходом к замыканию. Имеем

$$[f_1(A), f_2(B)] = \overline{[f_1(A), B]} \frac{f_2(\overset{2}{B}) - f_2(\overset{1}{B})}{\overset{1}{B} - \overset{2}{B}}.$$

Далее,

$$[f_1(A), B] = \overline{[A, B]} \frac{f_1(\overset{1}{A}) - f_1(\overset{2}{A})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}}.$$

Поэтому

$$[f_1(A), f_2(B)] = \overline{[A, B]} \frac{f_1(\overset{1}{A}) - f_1(\overset{2}{A})}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}} \frac{f_2(\overset{1}{B}) - f_2(\overset{2}{B})}{\overset{1}{B} - \overset{2}{B}}.$$

И теорема доказана.

Теорема 9.3. Пусть $f(x) \in \cap \mathcal{B}_s(\mathbb{R})$, $f(x, y) \in \cap \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$ и коммутатор $[A, B]$ ограничен. Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} f(\llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket) &= \llbracket f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) \rrbracket + \\ &+ \llbracket \overline{[A, B]} \frac{\delta g}{\delta x}(\overset{1}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \frac{\delta g}{\delta y}(\overset{1}{A}, \overset{1}{B}, \overset{2}{B}) \times \\ &\times \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket, \llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket) \rrbracket^*. \end{aligned} \quad (9.6)$$

* Запись $\llbracket g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \rrbracket$ означает, что мы рассматриваем $g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})$ как оператор, а не как часть более широкого выражения (см. Введение). Мы опускаем скобки всюду, где это не приводит к путанице.

Доказательство. Если оператор A ограничен, то доказательство совпадает с доказательством теоремы 9.2.

Пусть оператор A неограничен. Положим $A_n = \frac{A}{1 + \frac{A^2}{n}}$. Тогда

оператор A_n ограничен и $\|e^{-iA_n t}\| \leq c(1 + |t|)^s$, где c и s — константы, не зависящие от n (см. гл. III). Кроме того,

$$\|[A_n, B]\| \leq \|[A, B]\| \left\| \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right\|_{\mathcal{B}_{s,s}(\mathbb{R})},$$

$$\text{где } f_n(x) = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{n}}.$$

Имеем

$$\delta^2 f_n(x, y) = \frac{\frac{x}{1 + \frac{x^2}{n}} - \frac{y}{1 + \frac{y^2}{n}}}{x - y} = \delta^2 f_1\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}}\right),$$

откуда следует, что

$$\|\delta^2 f_n(x, y)\|_{\mathcal{B}_{s,s}(\mathbb{R}^2)} \leq \|\delta^2 f_1(x, y)\|_{\mathcal{B}_{s,s}(\mathbb{R}^2)}.$$

Значит, коммутаторы $[A_n, B]$ ограничены равномерно по n . Если подставить в формулу (9.6) A_n вместо A , то полученная формула будет справедлива. Переходя в ней к поточечному пределу при $n \rightarrow \infty$, получим формулу (9.6) в общем случае. Тем самым теорема доказана.

§ 10. Растущие символы

Пусть A_1 и A_2 — производящие операторы степеней s_1 и s_2 соответственно, действующие в банаховом пространстве B . Как обычно, предполагаем, что A_1 и A_2 определены на одном и том же всюду плотном множестве E . Замыкания операторов A_1 и A_2 в B снова будем обозначать через A_1 и A_2 соответственно.

Определение. Пусть для функции $f(x, y)$ найдутся такие целые неотрицательные числа k, l , что функция

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{(x+i)^k (y+i)^l}$$

принадлежит пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда положим

$$f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) \stackrel{\text{def}}{=} (A_2 + i)^l g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) (A_1 + i)^k h \quad (10.1)$$

для любого вектора $h \in E$, для которого $g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) (A_1 + i)^k h$ принадлежит области определения оператора A_2^l .

Теорема 10.1. Пусть, в обозначениях определения,

$$k' \geq k, l' \geq l, g'(x, y) = \frac{f(x, y)}{(x+i)^{k'} (y+i)^{l'}},$$

h — такой вектор на E , что

$$g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_1 + i)^k h \in D_{A_1^l}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A_2 + i)^l g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_1 + i)^k h &= \\ &= (A_2 + i)^{l'} g'(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_2 + i)^{k'} h. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Доказательство. Имеем:

$$g(x, y) = g'(x, y)(x + i)^{k' - k}(y + i)^{l' - l}.$$

Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ функций вида

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{jn}(x) \beta_{jn}(y), \quad \alpha_{jn} \in \mathcal{B}_{s_1}(\mathbb{R}), \quad \beta_{jn} \in \mathcal{B}_{s_2}(\mathbb{R})$$

сходится к $g(x, y)$ в $\mathcal{B}_{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда последовательность функций

$$\Psi_n(x, y) = \sum_{j=1}^{m_n} \gamma_{jn}(x) \delta_{jn}(y),$$

где $\gamma_{jn}(x) = \frac{\alpha_{jn}(x)}{(x + i)^{k' - k}}$, $\delta_{jn}(y) = \frac{\beta_{jn}(y)}{(y + i)^{l' - l}}$, сходится к $g'(x, y)$ в $\mathcal{B}_{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$. Для любого $q \in E$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)q &= \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{jn}(A_2) \alpha_{jn}(A_1) q = \\ &= \sum_{j=1}^{m_n} (A_2 + i)^{l' - l} \delta_{jn}(A_2) \gamma_{jn}(A_1) (A_1 + i)^{k' - k} q = \\ &= (A_2 + i)^{l' - l} \Psi_n(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_1 + i)^{k' - k} q. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)q = (A_2 + i)^{l' - l} g'(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_1 + i)^{k' - k} \quad (10.3)$$

(здесь мы воспользовались замкнутостью оператора $(A_2 + i)^{l' - l}$). Подставляя $q = (A_1 + i)^k h$ и применяя к обеим частям равенства (10.3) оператор $(A_2 + i)^l$, получаем формулу (10.2).

Теорема 10.1 показывает, что элемент $f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h$ не зависит от выбора показателей k, l в (10.1). Заметим еще, что если правая часть формулы (10.2) существует, то и левая существует; это непосредственно следует из формулы (10.3).

Теорема 10.2. Пусть $f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)$ — оператор, всюду определенный на E и ограниченный в B , и пусть T — замыкание этого оператора в B . Тогда для любой функции $g \in B_{s_1 s_2}(\mathbb{R}^2)$ и любого

$h \in E$ справедлива формула

$$[fg](\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h = \overset{2}{T}g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h.$$

Доказательство. Пусть

$$f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h = (A_2 + i)^l f_0(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)(A_1 + i)^k h,$$

где

$$f_0(x, y) = f(x, y)/(x + i)^k (y + i)^l, \quad f_0 \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2).$$

Тогда для любого $h \in E$ имеем:

$$\begin{aligned} \overset{2}{T}g(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(t, \tau) e^{-iA_1 \tau} (A_2 + i)^l f_0(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) (A_1 + i)^k e^{-iA_1 t} h dt d\tau = \\ &= (A_2 + i)^l \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(t, \tau) e^{-iA_1 \tau} f_0(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) e^{-iA_1 t} (A_1 + i)^k h dt d\tau = \\ &= (A_2 + i)^l [f_0 g](\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) (A_1 + i)^k h = (fg)(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)h. \end{aligned}$$

Следствие. Справедлива оценка

$$\|(fg)(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)\|_B \leq c \|f(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2)\|_B \|g\|_{\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)}, \quad (10.4)$$

где c — норма гомоморфизма $\mathcal{M} \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Hom}(B, B)$, построенного по упорядоченной паре операторов $\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2$.

Далее нам понадобятся символы $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(x_1 + i)^k} \in \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_n}(\mathbb{R}^n)$$

для некоторого натурального числа k . Если $A_1, \dots, A_n$ — набор производящих операторов степеней $s_1, \dots, s_n$ соответственно, действующих в банаховом пространстве B и определенных на всюду плотном линейном многообразии E , то мы положим для любого $h \in E$:

$$f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)h \stackrel{\text{def}}{=} g(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)(A_1 + i)^k h,$$

где $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)/(x + i)^k$. Так же, как и в теореме 10.1, устанавливается, что это определение не зависит от выбора k .

Нетрудно убедиться в том, что и в этом случае справедлива оценка, аналогичная (10.4): если $f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)$ — оператор, ограниченный в B и $g \in \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_n}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|(fg)(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)\|_B \leq c \|f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n)\|_B \|g\|_{\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_n}(\mathbb{R}^n)},$$

где c — норма гомоморфизма $\mathcal{M}: \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_n}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Hom}(B, B)$, построенного по упорядоченному набору операторов $A_1, \dots, A_n$.

Задача. Мы определили бесконечно дифференцируемые растущие не быстрее степени аргумента функции от двух некоммутирующих производящих операторов. Показать, что они образуют алгебру с μ -структурой, (с той же оговоркой, что и в сноске на стр. 279).

Определим, наконец, и растущие функции от многих некоммутирующих операторов. В этом случае необходимы дополнительные предположения. Именно, пусть $\{B_\tau\}$ — банахова шкала, причем $B_\tau \subset B_{\tau'}$ при $\tau < \tau'$. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — производящие операторы в шкале $\{B_\tau\}$, причем эти операторы являются и переводящими в той же шкале. Обозначим через $\mathcal{S}^\infty$ пространство функций $f(x_1, \dots, x_n)$, растущих вместе со всеми своими производными не быстрее $|x|^k$ (показатель k — свой для каждой функции f).

Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из $\mathcal{S}^\infty$ найдутся такие натуральные числа $k_1, \dots, k_n$, что

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(x_1 + i)^{k_1} \dots (x_n + i)^{k_n}}$$

принадлежит $\mathcal{B}_{l_1, \dots, l_n}(\mathbb{R}^n)$ для любых $l_1, \dots, l_n$. Положим

$$f(A_1, \dots, A_n) \stackrel{\text{def}}{=} (A_1 + i)^{k_1} \dots (A_n + i)^{k_n} g(A_1, \dots, A_n), \quad (10.5)$$

где операторы $(A_1 + i)^{k_1}, \dots, (A_n + i)^{k_n}$ рассматриваются как переводящие. Предлагается проверить корректность определения.

Задача. Проверить, что формула (10.5) задает в алгебре операторов, производящих и переводящих в шкале $\{B_\tau\}$, μ -структуру с операцией $\mu(x_1 \rightarrow A_1, \dots, x_n \rightarrow A_n)$, которая переводит $f(x_1, \dots, x_n)$ в $f(A_1, \dots, A_n)$.

§ 11. Факторспектр

Пусть $\{B_\tau\}$ — банахова шкала, A и A' — производящие операторы в этой шкале соответственно степени s и s' и шагом k_1 и k_2 , а T — переводящий оператор с шагом l . Пусть S_1 и S_2 — операторы, определенные на D и действующие в пространстве B_τ при любом τ . Назовем операторы S_1 и S_2 эквивалентными, если для любых τ, τ'

$$\|S_1 - S_2\|_{\tau \rightarrow \tau'} < \infty.$$

Определение. Будем говорить, что точка $\lambda \in \mathbb{R}^2$ принадлежит факторрезольвентному множеству вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A}')$, если существует такая окрестность U точки λ , что для любой функции $f \in \mathcal{B}_{s, s'}(\mathbb{R}^2)$ с носителем в U и любых τ, τ'

$$\|\overset{2}{T}f(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}')\|_{\tau \rightarrow \tau'} < \infty,$$

т. е. оператор $\overset{2}{T}f(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}')$ эквивалентен нулю.

Дополнение в $\mathbb{R}^2$ к факторрезольвентному множеству назовем факторспектром σ вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A}')$.

Лемма 11.1. Пусть f — финитная функция из $\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^2)$ и оператор $\overset{3}{T}f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')$ эквивалентен нулю. Тогда любая точка λ , для которой $f(\lambda) \neq 0$, принадлежит факторрезольвентному множеству вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A}')$.

Доказательство. Пусть U — такая окрестность точки λ , что $f(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in U$ и пусть φ — функция из $\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^2)$ с носителем в U . Тогда существует такая функция $\psi \in \mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R}^2)$, что $\varphi = \psi f$. Согласно теореме 4.1 имеем для произвольного μ

$$\|\overset{3}{T}\varphi(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\|_{\tau \rightarrow \tau + k_1 + k_2 + \mu} \leq c \|\overset{3}{T}f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}')\|_{\tau + k_1 \rightarrow \tau + k_1 + \mu} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{s,s'}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Тем самым лемма доказана.

Следующий критерий является следствием леммы 11.1.

Теорема 11.1. Для того чтобы точка λ^0 принадлежала факторрезольвентному множеству вектор-оператора $(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A}')$, необходимо и достаточно, чтобы для достаточно малого $\varepsilon > 0$ нашлись такие функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителями в ε -окрестности соответственно точек λ_1^0 и λ_2^0 , чтобы выполнялось условие

$$\varphi(\lambda_1^0) = \psi(\lambda_2^0) = 1$$

и чтобы оператор

$$\psi(A')T\varphi(A)$$

был эквивалентен нулю.

§ 12. Операторнозначные символы

Пусть A — производящий оператор степени s с определяющей парой банаховых пространств $B_1 \subset B_2$. Пусть дано банахово пространство $B_3, B_3 \supset B_2$. Пусть $L = \text{Hom}(B_1, B_2), L_1 = \text{Hom}(B_2, B_3), L_2 = \text{Hom}(B_1, B_3)$. Определим операторнозначные функции от A .

По аналогии со скалярным случаем введем следующие пространства: $C_s(\mathbb{R}, L)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в L и нормой $\|\varphi\|_{C_s(\mathbb{R}, L)} = \max_t (1 + |t|)^{-s} \|\varphi(t)\|_L$;

$C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций со значениями в L_1 с компактными носителями (т. е. если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$, то $\varphi(\lambda)$ при всех достаточно больших λ равно нулевому оператору); $W_s^k(\mathbb{R}, L_1)$ — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$ по норме

$$\|f\|_{W_s^k(\mathbb{R}, L_1)} = \int \|(1 + |\xi|^2)^{k/2} \tilde{f}(\xi)\|_{L_1} d\xi,$$

где $\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-it\xi} f(t) dt$ — преобразование Фурье элемента из

$C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$; $C^{(s)}(\mathbb{R}, L_1)$ — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$ по норме

$$\|f\|_{C^{(s)}(\mathbb{R}, L_1)} = \sup_t \max_{0 \leq k \leq s} \left\| \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\|_{L_1};$$

$C'_s(L \rightarrow L_2)$ — пространство ограниченных отображений из $C_s(\mathbb{R}, L)$ в L_2 ; $C'_s(\mathbb{R}, L_2)$ — пространство ограниченных отображений из $C_s(\mathbb{R})$ в L_2 .

Имеется естественное вложение $j_1: C_s(\mathbb{R}) \rightarrow C'_s(\mathbb{R}, L)$:

$$f(t) \rightarrow f(t) \cdot I_1 \stackrel{\text{def}}{=} j_1[f],$$

где $I_1: B_1 \rightarrow B_2$ — оператор вложения.

Отсюда следует вложение $J: C'_s(L \rightarrow L_2) \rightarrow C'_s(\mathbb{R}, L_2)$, задаваемое формулой

$$\langle J(f), \varphi \rangle = f(j_1[\varphi]), \quad f \in C'_s(L \rightarrow L_2), \quad \varphi \in C_s(\mathbb{R}).$$

Положим

$$(Ff)(\lambda) = \langle J(f), e^{-i\lambda t} \rangle \quad \text{для } f \in C'_s(L \rightarrow L_2).$$

Тогда Ff — это обобщенная функция со значениями в L_2 , т. е. $\langle Ff, \varphi \rangle \in L_2$ для $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Очевидно, обратное преобразование Фурье F^{-1} переведет Ff в f :

$$\langle JF^{-1}(Ff), \varphi \rangle = \langle Ff, F^{-1}\varphi \rangle = \langle J(f), \varphi \rangle.$$

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$, то можно считать, что $f \in C'_s(L \rightarrow L_2)$, положив

$$\hat{f}(\psi) = \int f(t) \psi(t) dt \quad \text{для } \psi \in C_s(\mathbb{R}, L).$$

Далее, определим аналог δ -функции

$$\delta_{t_0}(\psi) = \psi(t_0), \quad \psi \in C_s(\mathbb{R}, L).$$

Очевидно, что $\delta_{t_0} \in C'_s(L \rightarrow L_2)$. Более того, как и в скалярном случае, можно доказать, что

$$\begin{aligned} \left\| f + \sum_{k=1}^N c_k \delta_{t_k} \right\|_{C'_s(L \rightarrow L_2)} &= \\ &= \int \|f(t)\|_{L_1} (1 + |t|)^s dt + \sum_{k=1}^N |c_k| (1 + |t_k|)^s, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$, c_k — комплексные числа, $k = 1, \dots, N$.

Рассмотрим теперь линейную оболочку объединения $C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1) \cup \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \delta_t$ в $C'_s(L \rightarrow L_2)$ и ее Фурье-образ $\mathcal{B}_s^0(\mathbb{R}, L_1)$. Аналогично скалярному случаю определим пространство $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$ как пополнение $\mathcal{B}_s^0(\mathbb{R}, L_1)$ по норме

$$\|f\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)} = \|F^{-1}f\|_{C'_s(L \rightarrow L_2)}.$$

Тогда точно так же, как и в главе II, получим вложения:

$$W_s^{s+\frac{1}{2}+e}(\mathbb{R}, L_1) \subset \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1) \subset C^{(s)}(\mathbb{R}, L_1).$$

Теперь можно определить операторнозначные функции от производящего оператора A степени s на паре $B_1 \subset B_2$.

Пусть $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$, т. е. $F^{-1}f \in C'_s(L \rightarrow L_2)$. Поскольку $\|e^{-iAt}\|_L \leq C(1+|t|)^s$, то $e^{-iAt} \in C_s(\mathbb{R}, L)$, и можно положить

$$\hat{f}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F^{-1}f)(e^{-iAt}),$$

или, символически,

$$\hat{f}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (F^{-1}f)(t) \cdot e^{-iAt} dt. \quad (12.2)$$

Будем говорить, что оператор A здесь действует первым, а символ $\hat{f}$ — вторым.

Оператор $\hat{f}(A)$ принадлежит $L_2 = \text{Hom}(B_1, B_2)$. Оценим его норму. Если $f \in \mathcal{B}_s^0(\mathbb{R}, L)$, $F^{-1}f = \varphi + \sum_{k=1}^N c_k \delta_{t_k}$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, L_1)$, то

$$\hat{f}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t) e^{-iAt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N c_k e^{-iAt_k}.$$

Поэтому в силу (12.1)

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(A)\|_{L_2} &\leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \left[\int \|\varphi(t)\|_{L_1} (1+|t|)^s dt + \sum_{k=1}^N |c_k| (1+|t_k|)^s \right] = \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|F^{-1}f\|_{C'_s(L \rightarrow L_2)} = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)}. \end{aligned}$$

По замыканию эта оценка распространяется на все символы $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$. Таким образом, мы построили непрерывное отображение из $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$ в $L_2 = \text{Hom}(B_1, B_2)$: $f \rightarrow \hat{f}(A)$.

Аналогично строится отображение $f \rightarrow \hat{f}(A)$, задаваемое символически интегралом:

$$\hat{f}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iAt} (F^{-1}f)(t) dt$$

(сравните с (12.2)). Будем говорить, что символ f здесь действует первым, а оператор A — вторым.

Для отображения $f(\lambda) \in \text{Hom}(B_2, B_3) \equiv L_1$, входящего в пространство $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$, и для производящего оператора A степени s на паре $B_1 \subset B_2$ мы построили оператор $\hat{f}(A) \in \text{Hom}(B_1, B_3)$.

Пусть теперь $f(\lambda) = g(\lambda, B)$, где B — производящий оператор степени l на паре $B_2 \subset B_3$. Точнее, пусть функция $g(\lambda, \mu)$ при каждом фиксированном λ принадлежит пространству $\mathcal{B}_l(\mathbb{R})$. Тогда определен оператор $f(\lambda) \equiv g(\lambda, B) \in L_1$. Мы хотим изучить оператор $\hat{f}(A) \in \text{Hom}(B_1, B_3) \equiv L_2$. Для его существования нужно, чтобы $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$.

Лемма. Если $g \in \mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)$, то $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$.

Доказательство. Пусть $F^{-1}g = \delta_{\mu_0, t_0}$, т. е. $g(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\mu_0\lambda} e^{-it_0z}$. Тогда для $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle JF^{-1}f, \varphi \rangle &= \langle g(\lambda, B), (F^{-1}\varphi)(\lambda) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-it_0B} \langle e^{-i\mu_0\lambda}, (F^{-1}\varphi)(\lambda) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it_0B} \varphi(\mu_0), \end{aligned}$$

т. е.

$$(F^{-1}f)(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iBt_0} \varphi(\mu_0), \quad \varphi \in C_s(\mathbb{R}, L), \quad L = \text{Hom}(B_1, B_2). \quad (12.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|F^{-1}f(\varphi)\|_{L_1} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|e^{-iBt_0}\|_{L_1} \cdot \|\varphi(\mu_0)\|_L \leq \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} (1 + |t_0|)^l (1 + |\mu_0|)^s \frac{\|\varphi(\mu_0)\|_L}{(1 + |\mu_0|)^s} \leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{\mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)} \cdot \|\varphi\|_{C_s(\mathbb{R}, L)}, \end{aligned}$$

т. е. $f \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)$ и

$$\|f\|_{\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, L_1)} = \|F^{-1}f\|_{C'_s(L \rightarrow L_2)} \leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{\mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)}. \quad (12.4)$$

Пусть теперь $F^{-1}g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle JF^{-1}f, \varphi \rangle &= \langle g(\lambda, B), (F^{-1}\varphi)(\lambda) \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (F_z^{-1} i g(\lambda, z)) e^{-iBt} dt, F^{-1}\varphi(\lambda) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \langle F_z^{-1} i g(\lambda, z), (F^{-1}\varphi)(\lambda) \rangle e^{-iBt} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \langle (F^{-1}g)(\mu, t), \varphi(\mu) \rangle e^{-iBt} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint (F^{-1}g)(\mu, t) e^{-iBt} \varphi(\mu) dt d\mu. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(F^{-1}f)(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint (F^{-1}g)(\mu, t) e^{-iBt} \varphi(\mu) dt d\mu, \quad \varphi \in C_s(\mathbb{R}, L). \quad (12.5)$$

Отсюда получаем оценку

$$\begin{aligned} \|F^{-1}f(\varphi)\|_{L_1} &\leq \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \iint |F^{-1}g(\mu, t)| (1 + |t|)^l (1 + |\mu|)^s dt d\mu \|\varphi\|_{C_s(\mathbb{R}, L)} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{\mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)} \|\varphi\|_{C_s(\mathbb{R}, L)}, \end{aligned}$$

т. е. (12.4) имеет место и в случае, когда $F^{-1}g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Из этой оценки следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть $g \in \mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)$. Тогда имеем по определению:

$$\hat{f}(\hat{A}) = (F^{-1}f)(e^{-iAt}), \quad \text{где } f(\lambda) = g(\lambda, B).$$

Если $F^{-1}g = \delta_{\mu_0, \iota_0}$ или $F^{-1}g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, то формулы (12.3), (12.5) показывают, что

$$\hat{f}(\hat{A}) = g(\hat{A}, \hat{B}) \quad \text{и} \quad \|\hat{f}(\hat{A})\|_{L_t} \leq c \|g\|_{\mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)}.$$

По замыканию эти соотношения распространяются на все символы $g \in \mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)$.

Доказанное равенство позволяет преобразовывать оператор $g(\hat{A}, \hat{B})$ следующим способом: рассмотреть семейство операторов $g(\lambda, B)$, зависящее от параметра λ ; провести для него нужные преобразования, а затем подставить $\lambda \rightarrow \hat{A}$ (при этом $B = \hat{B}$).

Заметим, что мы, по существу, доказали ограниченность $\hat{f}(\hat{A})$ при условии, что $g(\lambda, z) \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}_\lambda, \mathcal{B}_l(\mathbb{R}_z))$ — пространству функций от λ со значениями в $\mathcal{B}_l(\mathbb{R}_z)$ — и заодно использовали тот факт, что $\mathcal{B}_s(\mathbb{R}, \mathcal{B}_l(\mathbb{R})) = \mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть теперь A, B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H . Если $f \in C(\mathbb{R})$, то $f(A)$ и $f(B)$ ограничены в H . Мы можем, конечно, определить ограниченный оператор $g(\hat{A}, \hat{B})$ для $g \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$. Однако, проделанные выше построения позволяют это сделать и для более широкого класса символов, а именно, для $g(\lambda, z) \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}_\lambda, C(\mathbb{R}_z))$ и $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_z, C(\mathbb{R}_\lambda))$, а, следовательно, и для g , принадлежащего линейной оболочке этих двух пространств.

Задача 1. Пусть $g \in \mathcal{B}_{s,l}(\mathbb{R}^2)$; A — производящий оператор степени s на паре $B_1 \subset B_2$, B — производящий оператор степени l на паре $B_2 \subset B_3$. Пусть u — собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению λ . Тогда $g(\hat{A}, \hat{B})u = g(\lambda, B)u$.

Задача 2. 1) Пусть $f \in \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$, где k — достаточно большое. Вещественная функция $S \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть далее, A — производящий оператор в шкале $\{\mathcal{W}_s^{-\tau}(\mathbb{R}^n)\}$. Тогда в некотором пространстве $\text{Hom}(\mathcal{W}_s^{-\tau}, \mathcal{W}_1^{-\tau-m})$ справедливо равенство

$$f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{i\lambda S(x)} = e^{i\lambda S(x)}f\left(-i\frac{\partial}{\partial x} + A\frac{\partial S}{\partial x}(x)\right).$$

2) Пусть $0 \notin \sigma(A)$. Тогда

$$f\left(-iA^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{i\lambda S(x)} = e^{i\lambda S(x)}f\left(-iA^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}(x)\right)$$

(об одинаковых номерах над некоммутирующими операторами см. соответствующее соглашение об обозначениях в § 4 Введения).

У к а з а н и е: заменить оператор A параметром λ .

§ 13. Функции от образующих нильпотентной алгебры Ли и их представления

Параграф будет посвящен в основном изучению функций от дифференциальных операторов, которые являются упорядоченным представлением $L_1, \dots, L_n$, α образующих некоторой нильпотентной алгебры Ли (Введение, § 9). Мы покажем, что эти операторы являются производящими и переводящими в подходящей шкале, и докажем соотношения (9.5) Введения для случая, когда вместо полинома стоит произвольная функция из C_{∞}^{∞} . Мы докажем здесь также и формулу (9.10), нужную для доказательства основной теоремы; кроме того, мы получим здесь формулы приведения функции от упорядоченных операторов $L_1, L_2, \dots, L_n, \alpha$ к псевдодифференциальному оператору.

Вначале укажем некоторые свойства упорядоченных представлений.

Пусть X — множество образующих $A_1, \dots, A_n$ нильпотентной алгебры Ли (Введение, § 9). Поскольку по условию любой коммутатор длины N равен нулю, то коммутатор длины $N-1$ коммутирует со всеми элементами множества X . По условию в число операторов $A_1, \dots, A_n$ входят все коммутаторы между ними. Пусть X_1 — подмножество в X элементов, коммутирующих со всеми элементами из X . Пусть X_2 — множество таких элементов, коммутатор которых с любым элементом из X принадлежит X_1 . Вообще, пусть $X_i \subset X$ — подмножество таких элементов, коммутатор которых с любым элементом принадлежит сумме X_k при $k < i$. Очевидно, что число таких множеств X_i не превосходит N .

Теперь остановимся на конструкции упорядоченного представления множества X . Процедура его построения описана в § 9 Введения. «Протаскивая» в $A_i q(A_1, \dots, A_n)$ оператор A^i с $n+1$ -го на i -е место, мы разлагаем $q(A_1, \dots, A_n)$ в ряд Тейлора относительно A_n в точке A_n ; получим члены вида

$$\frac{\binom{n-n+2}{k} A_i^{n+1}}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} q(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n).$$

Пусть $A_n \in X_{i(n)}$; тогда $(A_n - A_n)^k A_i^2$ (правый коммутатор k -го порядка) принадлежит некоторому классу X_j , такому, что $j \leq i(n) - k$. Из аналогичных соображений можно заключить, что вообще коэффициент при производной $\frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}$ оператора L_i есть константа или линейная однородная функция такого x_r , что $i(r) < \max_{1 \leq s \leq k} i(j_s)$.

Отметим, что это же замечание относится и к конструкции представления G_t , определенного в § 9.

Лемма 13.1. Пусть $\hat{L} = L(x, -i \partial/\partial x)$ — упорядоченное представление одной из образующих нильпотентной алгебры Ли. Тогда для любых целых k, l найдутся такие целые $s(k, l), m(k), n(l)$, что

$$\|e^{-i\hat{L}t}\|_{C_l^{m(k)} \rightarrow C_n^{n(l)}} \leq \text{const} (1 + |t|)^{s(k, l)},$$

где C_l^k — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{C_l^k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\gamma|=0}^k (1 + |x|)^l \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} \varphi(x).$$

Доказательство. Обозначим через H_l^k пополнение пространства S по норме

$$\|\varphi\|_{H_l^k} = \left\| (1 + |x|^2)^{l/2} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 \right)^{k/2} \varphi \right\|_{L_2}.$$

Имеют место вложения

$$H_l^{k+v} \subset C_l^k \subset H_{l-v}^k, \quad \forall v \geq n/2.$$

Следовательно, достаточно доказать оценку

$$\|e^{-i\hat{L}t}\|_{H_l^{m(k)} \rightarrow H_n^{n(l)}} \leq \text{const} (1 + |t|)^{s(k, l)}.$$

Пусть $F_{x \rightarrow \xi}$ — преобразование Фурье. Обозначим $\tilde{L} = F_{x \rightarrow \xi} \hat{L} F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$. Так как Фурье-образ пространства H_l^k есть H_{-l}^k , то достаточно получить оценку

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\|_{H_{-l}^{m(k)} \rightarrow H_{-n}^{n(l)}} \leq \text{const} (1 + |t|)^{s(k, l)}.$$

Оператор $\tilde{L}$ имеет (при соответствующей нумерации координат) следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & -i \sum_{j=1}^{r_1} a_j \partial/\partial \xi_j - i \sum_{\substack{j=r_1+1 \\ l=r_p+1}}^{r_2} P_j(\xi_1, \dots, \xi_{r_1}) \partial/\partial \xi_j - \dots - \\ & -i \sum_{l=r_p+1} P_j(\xi_1, \dots, \xi_{r_p}) \partial/\partial \xi_j - \dots \\ & \dots - \sum_{l=r_q+1}^n P_j(\xi_1, \dots, \xi_{r_q}) \partial/\partial \xi_j + P_0(\xi), \end{aligned}$$

где P_j — полиномы с вещественными коэффициентами, a_j — вещественные числа. Если $\psi(\xi) \in S$, то функция $\psi(\xi, t) = e^{-i\tilde{L}t} \psi(\xi)$ есть

решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r_1} a_j \partial \psi / \partial \xi_j + \sum_{j=r_1+1}^n P_j \partial \psi / \partial \xi_j + i P_0 \psi = 0, \\ \psi(\xi, 0) = \varphi(\xi). \end{cases}$$

Выпишем характеристические уравнения для этой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_j}{dt} = a_j, & j = 1, \dots, r_1, \\ \frac{d\xi_j}{dt} = P_j, & j = r_1 + 1, \dots, n, \\ \frac{d\psi}{dt} = -i P_0 \psi, \\ \xi(0) = \xi^0, \quad \psi(0) = \varphi(\xi^0). \end{cases}$$

Решая последовательно первые n уравнений, получаем

$$\xi_j = \xi_j(\xi^0, t) = \begin{cases} \xi_j^0 + a_j t, & j = 1, \dots, r_1, \\ \xi_j^0 + Q_j(\xi_1^0, \dots, \xi_{r_p}^0, t), & j = r_p + 1, \dots, r_{p+1}, \end{cases}$$

где Q_j — некоторые полиномы. Отсюда имеем:

$$\xi^0 = \xi^0(\xi, t) = \begin{cases} \xi_j - a_j t, & j = 1, \dots, r_1, \\ \xi_j + R_j(\xi_1, \dots, \xi_{r_p}, t), & j = r_p + 1, \dots, r_{p+1}, \end{cases} \quad (13.1)$$

где R_j — некоторые полиномы. Пусть $\bar{\psi}(\xi^0, t)$ — функция $\psi(\xi, t)$, выраженная через координаты ξ^0, t . Из последнего уравнения характеристической системы имеем явную формулу для $\bar{\psi}(\xi^0, t)$:

$$\bar{\psi}(\xi^0, t) = \varphi(\xi^0) \exp \left\{ -i \int_0^t P_0(\xi(\xi^0, \tau)) d\tau \right\}. \quad (13.2)$$

Заметим, что $\frac{D\xi}{D\xi^0} = 1$; следовательно,

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\varphi\|_{L_2}^2 = \int |\bar{\psi}(\xi^0, t)|^2 d\xi^0 = \|\varphi\|_{L_2}^2.$$

Подставляя в (13.2) $\xi^0 = \xi^0(\xi, t)$, применяя к обеим частям оператор вида $\xi^0 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^y$ и используя (13.1), получим, аналогично оценке в L_2 , требуемую оценку $\|e^{-i\tilde{L}t}\|_{H_{m(k)}^l \rightarrow H_k^{n(l)}}$ для случая $l \geq 0$; при этом даже можно положить $n(l) = l$. Кроме того, по данному $m(k)$ всегда можно подобрать $k = k(m)$. Используем теперь тот факт, что пространства H_m^l и H_{-m}^{-l} сопряжены друг к другу относительно скалярного произведения в L_2 , иными словами, норма

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\|\psi\|_{H_{-m}^{-l}}=1} |(\varphi, \psi)_{L_2}|, \quad \varphi, \psi \in S$$

эквивалентна норме в H_m^l . Сопряженный к оператору $e^{-i\tilde{L}t}$ в L_2 есть оператор $e^{i\tilde{L}t}$, так как $\tilde{L}$ симметричен в L_2 . Следовательно,

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\varphi\|_{\tilde{k}^{-l}}^{-l} = \sup_{\|\psi\|_{H_{-k}^l}=1} |(e^{-i\tilde{L}t}\varphi, \psi)_{L_2}| = \sup_{\|\psi\|_{H_{-k}^l}=1} |(\varphi, e^{i\tilde{L}t}\psi)_{L_2}|.$$

Если $l > 0$, то по доказанному выше найдутся такие целые числа k' и s , что при $\|\psi\|_{H_{-k}^l} = 1$

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\psi\|_{H_{k'}^l} \leq \text{const} (1 + |t|)^s.$$

Поэтому

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\varphi\|_{\tilde{k}^{-l}}^{-l} = \sup_{\|\psi\|_{H_{-k}^l}=1} \|\varphi\|_{\tilde{k}^{-l}}^{-l} \|e^{i\tilde{L}t}\psi\|_{H_{k'}^l} \leq \text{const} \|\varphi\|_{\tilde{k}^{-l}}^{-l} (1 + |t|)^s.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству формул (9.5) и (9.10) и аналогичных им, приведенных в § 9 Введения, в пункте «правило редукции основной задачи».

Это доказательство, как уже говорилось, опирается на аксиомы (μ_7) и (μ_8) . Оно состоит из двух этапов.

1) Пусть $g(x) \in C^\infty$; тогда оператор

$$e^{iA_k t} g(A_1, A_2, \dots, A_n) = e^{iA_k t} g(A_1, \dots, A_n) \quad (13.3)$$

равен оператору $\psi(A_1, A_2, \dots, A_n, t)$, символ которого выражается через символ $g(x)$ следующим образом: $\psi(x, t) = e^{i\hat{L}_k t} g(x)$, где $\hat{L}_k$ — упорядоченное представление оператора A_k . Последний существует в силу того, что мы установили относительно свойств $\hat{L}_k$.

Доказательство. Рассмотрим производные символов $e^{ix_{n+2}t} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} h$ и $\psi(x, t)$ по t , т. е. символы $ix_{n+2} h$ и $\psi_t(x, t) = i\hat{L}_k \psi(x, t)$. Очевидно, что для первого из них выполняется соотношение (μ_8^0) аксиомы μ_8 . (Напомним, что операция μ ставит в соответствие x_{n+2} оператор A_k , а x_k — оператор A_k). Поскольку $\hat{L}_k$ есть упорядоченное представление A_k , то $[i\hat{L}_k \psi(x, t)]_{x_1=A_1, \dots, x_n=A_n}$

равно $iA_k [\psi(A_1, A_2, \dots, A_n)]$. Отсюда следует, что соотношение (μ_8^0) выполняется и для символа $\psi(x, t)$. При $t=0$ оба оператора ψ и $e^{iA_k t} g$ равны g . Поэтому их разность удовлетворяет соотношениям (μ_8^a) и (μ_8^0) , а значит, операторы равны, что и требовалось.

Из второй части аксиомы μ_7 легко следует распространение равенства (9.5) на символы класса C_{∞}^∞ .

2) Рассмотрим операторы

$$e^{i \sum_{k=1}^n A_k^{n+1+k} t_k} g(A_1, \dots, A_n) \text{ и } \psi(A_1, \dots, A_n, t_1, \dots, t_n), \quad (13.4)$$

где $\psi(x, t) = e^{i \sum_{k=1}^n L_k t_k} g(x)$. Из предыдущего пункта следует, что они равны.

Подействуем на символы обоих операторов псевдодифференциальным оператором

$$f\left(i \frac{\partial}{\partial t_1}, i \frac{\partial}{\partial t_2}, \dots, i \frac{\partial}{\partial t_n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где $f \in \mathcal{S}^\infty$. В силу свойств оператора $\hat{L}_k$ имеем

$$f\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(x, t) = e^{i \sum_{k=1}^n L_k t_k} f(L_1, \dots, L_n) g(x).$$

Для символа (13.4), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} f\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) e^{i \sum_{k=1}^n x_{n+1+k} t_k} g(x_1, \dots, x_n) = \\ = e^{i \sum_{k=1}^n x_{n+1+k} t_k} f(x_{n+1}, \dots, x_{n+1+k}) g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

В силу аксиомы μ_7 операторы, им отвечающие, равны при всех t , в том числе и при $t=0$. Именно, при $t=0$ мы получаем равенство

$$[f(A_1, \dots, A_n)] [g(A_1, \dots, A_n)] = \psi(A_1, \dots, A_n),$$

причем $\psi(x)$ выражается через $g(x)$ в следующем виде:

$$\psi(x) = f(L_1, \dots, L_n) g(x),$$

что и требовалось.

Аналогично (с использованием уже доказанных соотношений) доказываются и другие равенства, приведенные в § 9. Обобщение на случай, когда имеется аргумент B , очевидно.

Приведем вновь формулу (9.10) для сложной функции от упорядоченных операторов. Пусть $f_i(A_1, \dots, A_n) \in M$, $i=1, \dots, k$; тогда $f(f_1, \dots, f_k)$ может быть представлена в виде функции $\psi(A_1, \dots, A_n)$, причем символ $\psi(x)$ определяется по формуле

$$f(\llbracket f_1(L_1, \dots, L_n) \rrbracket, \dots, \llbracket f_k(L_1, \dots, L_n) \rrbracket) 1 = \psi(x), \quad (13.5)$$

где 1 — единица, принадлежащая пространству символов $\mathfrak{F}^\infty$. Эту формулу мы применим для того, чтобы функцию от самих представлений $\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n$ представить как сложную функцию образующих другой нильпотентной алгебры, а именно, $-i\partial/\partial x$, x , то есть, иначе говоря, записать функции от $\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n$ в виде псевдодифференциального оператора. Итак, найдем упорядоченное представление операторов $-i\partial/\partial x$, x . Очевидно, что

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, x\right) = \psi_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, x\right),$$

где $\psi_j(y, x) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\right)f(y, x)$.

Следовательно, операторы $\left(-i\frac{\partial}{\partial x} + y, x\right)$ являются упорядоченным представлением набора $\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$. Из формулы (13.5) тогда следует, что

$$f(\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n) = \varphi\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где

$$\varphi(x, y) = f\left(\llbracket \overset{1}{L}_1\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x} + y\right) \rrbracket, \dots, \llbracket \overset{n}{L}_n\left(x, -i\frac{\partial}{\partial x} + y\right) \rrbracket\right)1$$

есть символ псевдодифференциального оператора.

§ 1. Канонические преобразования псевдодифференциального оператора

Мы видели уже в § 1 и 2 Введения, что формула коммутации дифференциального оператора с экспонентой играет в исчислении Хевисайда существеннейшую роль. В построении в гл. IV исчисления упорядоченных операторов формула коммутации гамильтониана с экспонентой также является ключевой. В теории μ -структур, точнее в применении этой теории к псевдодифференциальным операторам, эта формула по существу была принята за определение функций от операторов $ih\partial/\partial x + \partial S/\partial x$.

Отметим однако, что формула коммутации дифференциального оператора с экспонентой $e^{\frac{i}{h} S(x)}$, имеющая вид

$$e^{-\frac{i}{h} S(x)} P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{\frac{i}{h} S(x)} = P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right),$$

может быть трактована двояким образом. Понимая $T = e^{\frac{i}{h} S(x)}$ как оператор умножения на функцию $e^{\frac{i}{h} S(x)}$, приходим к тому, что

$$1) \quad T^{-1} P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} \right) T = P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right)$$

или

$$2) \quad T^* P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} \right) T = P \left(ih \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} \right).$$

До сих пор для случая, когда $T = e^{\frac{i}{h} S(x, \frac{1}{p})} \varphi(x, \frac{1}{p})$, мы обобщали формулу 1) и получали формулу коммутации гамильтониана с экспонентой. Этот параграф мы посвятим исследованию оператора $T^* P(x, ih\partial/\partial x) T$, где $T^* = e^{-\frac{i}{h} S(x, \frac{3}{p})} \varphi(x, \frac{3}{p})$.

Преобразование такого типа мы будем называть *каноническим преобразованием* оператора $P(x, \frac{1}{p})$. Оказывается, во многих случаях удобнее использовать каноническое преобразование, а не

преобразование 1) над дифференциальным (или псевдодифференциальным) оператором $P\left(x, ih \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Прежде всего, рассмотрим композицию (здесь S — вещественная функция)

$$T^*T = e^{\frac{i}{h} [S\left(x, \frac{1}{p}\right) - S\left(x, \frac{1}{p'}\right)]} \varphi\left(x, \frac{1}{p}\right) \bar{\varphi}\left(x, \frac{1}{p'}\right).$$

Из теоремы 1.1 (см. ниже) следует, что

$$T^*T = \frac{\varphi\left(\tilde{x}\left(x, \frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right), \frac{1}{p}\right) \bar{\varphi}\left(\tilde{x}\left(x, \frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right), \frac{1}{p'}\right)}{|J\left(\tilde{x}\left(x, \frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right); \frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)|},$$

где $\tilde{x}(x, p, p')$ есть решение уравнения

$$\tilde{x} + \frac{\delta S}{\delta p}(\tilde{x}; p, p') = x$$

и предполагается, что якобиан J не обращается в нуль:

$$J(\tilde{x}; p; p') \equiv 1 + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta S}{\delta p}(\tilde{x}; p, p') \neq 0.$$

Оператор T^*T имеет следующий символ:

$$e^{\frac{i}{h} [S(x, p) - S(x, p')]} \varphi(x, p) \bar{\varphi}(x, p').$$

Оказывается, что с точностью до $O(h^\infty)$ оператор T^*T зависит лишь от значений своего символа на диагонали $p = p'$. Если отбрасывать члены порядка $O(h^\infty)$, то можно также ослабить условие на якобиан J .

Сформулируем точно и докажем эти утверждения.

Лемма 1.1. Пусть $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и растет не быстрее полинома; тогда

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{p}, x, \frac{1}{p'}\right) f &= \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int e^{\frac{i}{h}(p \cdot x - p' \cdot x')} \times \\ &\times f(x'') dx'' dp' dp' \int e^{\frac{i}{h}(p' - p) \cdot x'} \Phi(p, x', p') dx' = \\ &= F_{p \rightarrow x}^{-1} F_{x' \rightarrow p} F_{p' \rightarrow x'}^{-1} \Phi(p, x', p') F_{x' \rightarrow p'} f(x''), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Здесь $F_{x \rightarrow p}: f(x) \rightarrow \tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{h} p \cdot x} f(x) dx$ — так называемое

1/h-преобразование Фурье.

Доказательство очевидно.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ зададим оператор

$$T = \varphi\left(x, \frac{1}{p}\right) e^{\frac{i}{h} S\left(x, \frac{1}{p}\right)}, \quad (1.1)$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, S — вещественная функция.

Определим вектор $\frac{\delta S}{\delta p}(x; p', p) \in \mathbb{R}^n$, i -я компонента которого есть разностная производная

$$\frac{\delta S}{\delta p_i}(x; p'_1, \dots, p'_{i-1}; p'_i, p_i; p_{i+1}, \dots, p_n),$$

где $p, p' \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{x} + \frac{\delta S}{\delta p}(\tilde{x}; p', p) = y \quad (1.2)$$

относительно вектора $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через J якобиан этого уравнения

$$J(\tilde{x}, p', p) = \det \left\| \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta S}{\delta p_i}(\tilde{x}; p'_1, \dots, p'_i, p_i, \dots, p_n) \right\|.$$

Теорема 1.1. При условии $J \neq 0$ имеет место тождество

$$T^*T = \varphi\left(\tilde{x}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, p, p \end{smallmatrix}\right), \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \bar{\varphi}\left(\tilde{x}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, p, p \end{smallmatrix}\right), \begin{smallmatrix} 8 \\ p \end{smallmatrix}\right) \times \\ \times |J^{-1}(\tilde{x}(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, p, p \end{smallmatrix}), \begin{smallmatrix} 1 \\ p, p \end{smallmatrix})|,$$

где $\tilde{x}(y, p', p)$ — решение уравнения (1.2).

Доказательство. В силу леммы 1.1

$$T^*Tf = e^{\frac{i}{\hbar}[s(\begin{smallmatrix} 3 \\ \tilde{x}, p \end{smallmatrix}) - s(\begin{smallmatrix} 3 \\ \tilde{x}, p \end{smallmatrix})]} \varphi\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, p \end{smallmatrix}\right) \bar{\varphi}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, p \end{smallmatrix}\right) f = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p \cdot x - p' \cdot x'')} f(x'') dx'' dp dp' \times \\ \times \int e^{\frac{i}{\hbar}[(p' - p) \cdot x' + S(x', p') - S(x', p)]} \varphi(x', p') \bar{\varphi}(x', p) dx'.$$

Перейдем во внутреннем интеграле к новой переменной y по формуле $x' = \tilde{x}(y, p', p)$, где $\tilde{x}(y, p', p)$ — решение уравнения (1.2). В силу условия $J \neq 0$ решение (1.2) $\tilde{x}(y, p', p)$ существует и принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Учитывая тождество

$$(p' - p) \cdot y = (p' - p) \cdot \tilde{x} + S(\tilde{x}, p') - S(\tilde{x}, p),$$

получим:

$$T^*Tf = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p \cdot x - p' \cdot x'')} f(x'') dx'' dp dp' \times \\ \times \int e^{\frac{i}{\hbar}y \cdot (p' - p)} |J^{-1}(\tilde{x}(y, p', p), p', p)| \times \\ \times \varphi(\tilde{x}(y, p', p), p') \bar{\varphi}(\tilde{x}(y, p', p), p) dy,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, S — вещественная функция.

Тогда из леммы 1.1 следует утверждение теоремы 1.1.

Пример. Пусть $S(x, p) = -(x - x^2)p$; $p, x \in R$, $h=1$ и $\varphi(x, p) \equiv \varphi(x)$. Тогда

$$Tf = \varphi(x) e^{iS(\tilde{x}, \tilde{p})}, f = \varphi(x) f(x^2)$$

(здесь $\tilde{p} = -i\partial/\partial x$, так как $h=1$).

В этом случае уравнение (1.2) имеет вид

$$y = \tilde{x} + \frac{(-\tilde{x} + \tilde{x}^2)\tilde{p}' - (-\tilde{x} + \tilde{x}^2)p}{\tilde{p}' - p} \text{ или } y = x^2.$$

Якобиан $J = 2\tilde{x}$. Поэтому, если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки $x=0$, то

$$T^*Tf = \frac{|\varphi(\sqrt{x})|^2}{2\sqrt{x}} f(x).$$

Этим же способом, т. е. аналогичной заменой переменных, мы выведем соответствующую формулу для оператора T_1 :

$$T_1 f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \int e^{\frac{i}{h}[S(\xi, \tilde{p}) - \frac{1}{2}\tilde{x}^2]} \varphi(\xi, \tilde{p}) d\xi \cdot f(x),$$

символ которого равен $1/h$ -преобразованию Фурье от символа оператора T . Формула, которую мы получим, поможет нам выяснить важную роль, которую играет $1/h$ -преобразование Фурье в канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов.

Пусть $J_1(\xi, p', p)$ — якобиан уравнения

$$y = \frac{\delta S}{\delta p}(\xi; p', p) + \frac{\delta S}{\delta \xi}(\xi + p - p', \xi; p), \quad (1.3)$$

рассматриваемого относительно ξ (вектор $\delta S/\delta \xi$ определяется аналогично вектору $\delta S/\delta p$). Таким образом,

$$J_1(\xi, p', p) = \det \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{\delta S}{\delta p_i}(\xi; p', p) + \frac{\delta S}{\delta \xi_i}(\xi + p - p', \xi; p) \right] \right\|.$$

Теорема 1.2. При условии $J_1 \neq 0$ имеет место тождество

$$T_1^* T_1 = \varphi(\xi(x, \tilde{p}, \tilde{p}'), \tilde{p}) \overline{\varphi(\xi(x, \tilde{p}, \tilde{p}') + \tilde{p} - \tilde{p}', \tilde{p})} \times \\ \times |J_1^{-1}(\xi(x, \tilde{p}, \tilde{p}'), \tilde{p}, \tilde{p}')|, \quad (1.4)$$

где $\xi(y, p', p)$ — решение уравнения (1.3).

Доказательство. С помощью леммы 1.1 получим

$$T_1^* T_1 f = \frac{1}{(2\pi h)^{2n}} \int e^{\frac{i}{h}(p \cdot x - p' \cdot x'')} f(x'') dx'' dp dp' \times \\ \times \int e^{\frac{i}{h}[S(\xi, p') - S(\xi + p - p', p)]} \overline{\varphi(\xi + p - p', p)} \varphi(\xi, p') d\xi.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменных $\xi \rightarrow y$ по

формуле (1.3). В силу условия $J_1 \neq 0$ решение $\xi(y, p', p)$ существует и принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Учитывая тождество

$$(p' - p) \cdot y = S(\xi, p') - S(\xi + p - p', p),$$

получим, как и в теореме 1.1, искомое равенство (1.4). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим общую ситуацию, включающую в себя формулы из теорем 1.1 и 1.2. Для простоты ограничимся двумерным случаем: $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2)$. Рассмотрим оператор

$$T_2 f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h} [S(\xi_1, x_2, p) - x_1 \xi_1]} \varphi(\xi_1, x_2, p) d\xi_1 f(x). \quad (1.5)$$

Аналогично теоремам 1.1 и 1.2 получим

$$\begin{aligned} T_2^* T_2 f &= \frac{1}{(2\pi h)^4} \int e^{\frac{i}{h} (p \cdot x - p' \cdot x'')} f(x'') dx'' dp' dp \times \\ &\times \int e^{\frac{i}{h} [(p'_2 - p_2) \cdot z + S(\xi_1, z, p') - S(\xi_1 + p_1 - p'_1, z, p)]} \times \\ &\times \bar{\varphi}(\xi_1 + p_1 - p'_1, z, p) \varphi(\xi_1, z, p') dz d\xi_1. \end{aligned}$$

Мы хотим показатель экспоненты во внутреннем интеграле заменить переменных $(\xi_1, z) \rightarrow (y_1, y_2)$ привести к виду:

$$\frac{i}{h} [(p'_1 - p_1) \cdot y_1 + (p'_2 - p_2) \cdot y_2] \equiv \frac{i}{h} (p' - p) \cdot y.$$

Для этого положим

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\delta S}{\delta p_1}(\xi_1; z; p'_1, p_1; p_2) + \frac{\delta S}{\delta \xi_1}(\xi_1 + p_1 - p'_1, \xi_1; z; p_1; p_2), \\ y_2 &= z + \frac{\delta S}{\delta p_2}(\xi_1; z; p'_1, p'_2, p_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда справедливо тождество:

$$y \cdot (p' - p) = (p'_2 - p_2) \cdot z + S(\xi_1, z, p'_1, p'_2) - S(\xi_1 + p_1 - p'_1, z, p_1, p_2).$$

Предположим, что отличен от нуля якобиан J_2 системы (1.6):

$$J_2(\xi_1, z, p', p) \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.7)$$

Тогда существуют гладкие решения $\xi_1(y, p', p)$ и $z(y, p', p)$ системы (1.6). Аналогично теоремам 1.1 и 1.2, после замены переменных $(\xi_1, z) \rightarrow (y_1, y_2)$, получим:

$$\begin{aligned} T_2^* T_2 &= \varphi(\xi_1(x, p, p); z(x, p, p); p) \times \\ &\times \bar{\varphi}(\xi_1(x, p, p) + p_1 - p'_1; z(x, p, p), p) \times \\ &\times |J_2^{-1}(\xi_1(x, p, p); z(x, p, p); p; p)|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Итак, мы доказали теорему:

Теорема 1.3. Пусть оператор T_2 определен формулой (1.5) и пусть выполнено условие (1.7). Тогда имеет место тождество (1.8).

Замечание. В теоремах 1.1 и 1.2 достаточно потребовать, чтобы якобианы J и J_1 были отличны от нуля лишь при $(x, p) \in \text{supp } \varphi(x, p)$ и, соответственно, $(\xi, p) \in \text{supp } \varphi(\xi, p)$. Кроме того, теоремы 1.1 и 1.2 обобщаются на случай оператора $\hat{T}^* \psi(\hat{p} - \hat{p}') \hat{T}$. При этом, если якобиан J отличен от нуля при $(p, p') \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $p - p' \in \text{supp } \psi$, то имеет место соотношение:

$$\hat{T}^* \psi(\hat{p} - \hat{p}') \hat{T} = \varphi(\tilde{x}(\tilde{x}, \hat{p}, \hat{p}'), \hat{p}) \times \\ \times \bar{\varphi}(\tilde{x}(\tilde{x}, \hat{p}, \hat{p}'), \hat{p}) | J^{-1}(\tilde{x}(\tilde{x}, \hat{p}, \hat{p}'), \hat{p}, \hat{p}') | \psi(\hat{p} - \hat{p}'),$$

где $\tilde{x}(y, p', p)$ — решение уравнения (1.1).

При аналогичных условиях обобщается теорема 1.2:

$$\hat{T}_1^* \psi(\hat{p} - \hat{p}') \hat{T}_1 = \varphi(\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \hat{p}, \hat{p}'), \hat{p}) \times \\ \times \bar{\varphi}(\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \hat{p}, \hat{p}') + \hat{p} - \hat{p}', \hat{p}) | J_1^{-1}(\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \hat{p}, \hat{p}'), \hat{p}, \hat{p}') | \psi(\hat{p} - \hat{p}'),$$

где $\tilde{\xi}(y, p', p)$ — решение уравнения (1.3) и якобиан $J_1 \neq 0$ при $(p', p) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $p' - p \in \text{supp } \psi$.

Аналогичное утверждение имеет место и в ситуации, описанной в теореме 1.3.

Лемма 1.2. Пусть функция $\psi^\delta(z) = 0$ в δ -окрестности точки $z = 0$, $\psi^\delta(z) = 1$ вне 2δ -окрестности точки $z = 0$ и $\psi^\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $S(x, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, S — вещественная функция и якобиан

$$J^0 = \det \left\| \delta_{ij} + \frac{\partial^2 S(x, p)}{\partial x_i \partial p_j} \right\| \neq 0. \quad (1.9)$$

Тогда для любого N и $k \geq 0$

$$\| \hat{T}^* \psi^\delta(\hat{p} - \hat{p}') \hat{T} \|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_{N, h} h^k.$$

Доказательство. В силу условия (1.9) уравнение

$$\frac{\partial S(x', p)}{\partial x'} + p = \frac{\partial S(x', p')}{\partial x'} + p'$$

имеет единственное решение относительно $p \in \mathbb{R}^n$, а именно: $p = p'$. Поэтому при $|p - p'| \geq \delta$ вектор

$$\frac{\partial}{\partial x'} [-S(x', p) + S(x', p) + (-p + p')x'] \neq 0. \quad (1.10)$$

Представляя $\hat{T}^* \psi^\delta(\hat{p} - \hat{p}') \hat{T} f$ в виде интеграла, аналогично теореме 1.1 нетрудно убедиться, что полученный интеграл будет отличаться от интеграла в доказательстве теоремы 1.1 лишним

множителем $\psi^\delta(p-p')$. Поскольку на носителе $\psi^\delta(p-p')$ производная от показателя экспоненты во внутреннем интеграле не обращается в нуль (см. (1.10)), то внутренний интеграл можно проинтегрировать по частям любое число раз (вводя экспоненту под знак дифференциала). Это немедленно приведет к утверждению леммы.

Можно показать, что условие (1.9) здесь является существенным.

Смысл леммы 1.2 состоит в том, что в оператор T^*T основной вклад (с точностью до $O(h^\infty)$) вносят значения его символа $e^{\frac{i}{h}} [S(x, p') - S(x, p)] \varphi(x, p') \bar{\varphi}(x, p)$ на диагонали $p = p'$.

Итак, если ослабить условие $J \neq 0$ в теореме 1.1, заменив его условием (1.9), то в силу замечания 1.1 и леммы 1.2 получим следующее утверждение.

Теорема 1.4. Пусть ψ^δ — функция из леммы 1.2 и выполнено условие (1.9). Тогда для достаточно малого δ имеет место равенство:

$$T^*T = \varphi(\tilde{x}(x, p, p), p) \bar{\varphi}(\tilde{x}(x, p, p), p) \times \\ \times |J^{-1}(\tilde{x}(x, p, p), p)| (1 - \psi^\delta(p - p)) + A, \quad (1.2')$$

где

$$\|A\|_{W^N_s \rightarrow W^N_s} \leq c_{N,k} h^k \quad \text{для всех } N, k \geq 0.$$

Последние лемма и теорема могут быть сформулированы и для операторов T_1, T_2 . В случае оператора T_1 заметим, что уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}(\xi, p') - \frac{\partial S}{\partial \xi}(\xi + p - p', p) = 0$$

имеет единственное решение $p = p'$, если якобиан

$$J_1^0(\xi, p) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left\| \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial p_j} \right) (\xi, p) \right\|,$$

не обращается в нуль. Поэтому аналогично предыдущему при тех же предположениях на S, φ получается следующая теорема.

Теорема 1.5. Пусть $J_1^0 \neq 0$. Тогда для достаточно малого δ имеет место равенство

$$T_1^*T_1 = \varphi(\tilde{\xi}(x, p, p), p) \bar{\varphi}(\tilde{\xi}(x, p, p) + p - p, p) \times \\ \times |J_1^{-1}(\tilde{\xi}(x, p, p), p)| (1 - \psi^\delta(p - p)) + A,$$

где $\|A\|_{W^N_s \rightarrow W^N_s} \leq c_{N,k} h^k$ для всех $N, k \geq 0$.

Точно так же можно переформулировать и теорему 1.3.

В приведенных формулах относительно операторов T^*T и $T_1^*T_1$ можно усмотреть некоторую двойственность. Прежде всего

заметим, что с точностью до $O(h)$ мы можем положить $\overset{2}{p} = \overset{1}{p}$ и тогда вместо якобианов J и J_1 можно будет подставить якобианы J^0 и J_1^0 . И если обозначить $\varphi_1 = \frac{\Phi}{\sqrt{J^0}}$, $\varphi_2 = \frac{\Phi}{\sqrt{J_1^0}}$, то полученные формулы будут иметь вид

$$\begin{aligned} T^*T &= \varphi_1^2 (\tilde{x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}), \overset{1}{p}) + O(h), \\ T_1^*T_1 &= \varphi_2^2 (\tilde{\xi}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}), \overset{1}{p}) + O(h), \end{aligned} \quad (*)$$

где $\tilde{x}(x, p)$ есть решение уравнения

$$\tilde{x} + \frac{\partial S}{\partial p}(\tilde{x}, p) = x,$$

а $\tilde{\xi}(x, p)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial p}(\tilde{\xi}, p) + \frac{\partial S(\tilde{\xi}, p)}{\partial \tilde{\xi}} = x;$$

далее выясним геометрический смысл наблюдаемой двойственности. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство бесконечно гладких кривых в фазовой плоскости (ξ, x) :

$$\xi = \Xi(y, p), \quad x = X(y, p), \quad (1.11)$$

где параметр $p \in \mathbb{R}$, y — текущая координата.

Условие однопараметричности имеет вид:

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial y} & \frac{\partial \Xi}{\partial p} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Заменой координаты y мы всегда можем добиться, чтобы в новых переменных $D=1$ *). Поэтому, не уменьшая общности, положим

$$D = 1. \quad (1.12)$$

Из этого условия следует, что в точках вырождения проектирования на ось x , т. е. в точках, где $\partial \Xi / \partial y = 0$, отлична от нуля производная $\partial \Xi / \partial p$. А в точках вырождения проектирования на ось ξ , напротив, $\partial X / \partial p \neq 0$. В остальных точках либо $\partial X / \partial p \neq 0$, либо $\partial \Xi / \partial p \neq 0$.

Поэтому семейство кривых (1.11) мы можем покрыть системой перекрывающихся окрестностей, в каждой из которых отличны от нуля либо $\partial X / \partial y$ и $\partial \Xi / \partial p$, либо $\partial X / \partial p$ и $\partial \Xi / \partial y$. Первые мы будем называть неособыми картами, вторые — особыми картами. Совокупность карт называется каноническим атласом семейства кривых.

*) Это утверждение доказывается в гл. VI.

Наряду с (1.11) будем рассматривать также «сдвинутое» семейство кривых:

$$\xi = \Xi(y, p) - p, \quad x = X(y, p).$$

Рассмотрим финитную вещественную функцию $\check{\varphi}(y, p) \in C^\infty$ с носителем в одной из карт канонического атласа.

Мы изучим два случая, когда носитель $\check{\varphi}$ лежит в неособой и в особой карте.

И с л у ч а й. Неособые карты. Поскольку $\frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$ в этой карте, то можно сделать замену переменных $x = X(y, p)$, откуда $y = y(x, p) \in C^\infty$. Обозначим $\tilde{\xi}(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Xi(y(x, p), p)$. Имеем:

$$D \equiv \frac{D(X, \Xi)}{D(y, p)} \Big|_{y=y(x, p)} = \frac{D(x, \tilde{\xi}(x, p))}{D(x, p)} \cdot \frac{D(X, p)}{D(y, p)} \Big|_{y=y(x, p)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

следовательно,

$$\frac{\partial X}{\partial y}(y(x, p), p) \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial p}(x, p) = 1$$

или

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial p}(x, p) = \frac{\partial y(x, p)}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Пусть рассматриваемая карта содержит точку $(y_0(p), p)$ и пусть $x_0(p) = X(y_0(p), p)$. Обозначим

$$S(x, p) = \int_{x_0(p)}^x [\tilde{\xi}(x', p) - p] dx' + S_0(p),$$

где

$$\frac{\partial S_0}{\partial p}(p) = y_0(p) - x_0(p) + (\Xi(y_0(p), p) - p) \frac{\partial x_0}{\partial p}(p). \quad (1.14)$$

Покажем, что

$$\frac{\partial S}{\partial p}(x, p) + x = y(x, p). \quad (1.15)$$

Из определения функции S следует, что $\frac{\partial S}{\partial x} = \tilde{\xi}(x, p) - p$. Тогда в силу (1.13)

$$\frac{\partial y(x, p)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial p}(x, p) = 1 + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial p} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x + \frac{\partial S}{\partial p} \right),$$

т. е. $\frac{\partial S}{\partial p}(x, p) - x - y(x, p) = f(p)$ — функция только от p . Имеем:

$$\frac{\partial S(x, p)}{\partial p} \Big|_{x=x_0(p)} = \frac{\partial S_0(p)}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial x}(x_0(p), p) \frac{\partial x_0(p)}{\partial p} =$$

$$= \frac{\partial S_0(p)}{\partial p} - (\Xi(y_0(p), p) - p) \frac{\partial x_0(p)}{\partial p}.$$

Поэтому из (1.14) получим

$$f(p) = \frac{\partial S_0}{\partial p} - (\Xi(y_0(p), p) - p) \frac{\partial x_0(p)}{\partial p} + x_0(p) - y_0(p) = 0,$$

откуда следует (1.15).

Обозначим через T' оператор вида

$$T' = e^{\frac{i}{\hbar} S(x, p)} \frac{\check{\varphi}(y(x, p), p)}{\sqrt{\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y(x, p), p) \right|}}, \quad \dot{p} = -i\hbar \partial/\partial x.$$

Из (1.15) следует, что $1 + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial p} = \frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^{-1}$. Поэтому из (*) следует, что

$$(T')^* T' = |\check{\varphi}|^2(x, p) + O(\hbar).$$

На самом деле имеет место более точная теорема (в формулировке которой, как и в дальнейшем, мы опускаем значки $'$ и $\check{}$, что не может привести к путанице).

Теорема 1.6. В сформулированных выше предположениях имеет место равенство:

$$T^* T = \varphi(x, p) \bar{\varphi}(x, p) + \hbar^2 A(\hbar), \quad (1.16)$$

где $\|A(\hbar)\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_N$ для всех $N \geq 0$.

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы, мы рассмотрим случай, когда носитель $\check{\varphi}$ принадлежит особой карте.

II случай. Особые карты. В этом случае $\frac{\partial \Xi}{\partial y} \neq 0$ и следовательно, уравнение

$$\xi + p = \Xi(y, p)$$

имеет решение $y(\xi, p) \in C^\infty$. Положим $x(\xi, p) \stackrel{\text{def}}{=} X(y(\xi, p), p)$. Как и в I случае, имеем

$$\begin{aligned} 1 = D|_{y=y(\xi, p)} &= \frac{D(x(\xi, p), \xi + p)}{D(\xi, p)} \frac{D(\Xi(y, p) - p, p)}{D(y, p)} \Big|_{y=y(\xi, p)} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Xi}{\partial y} & \frac{\partial \Xi}{\partial p} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \Xi}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial p} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, p) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, p) - \frac{\partial x}{\partial p}(\xi, p). \quad (1.17)$$

Определим функцию

$$\tilde{S}(\xi, p) = \int_{\xi_0(p)}^{\xi} x(\xi', p) d\xi' + \tilde{S}_0(p),$$

где

$$\frac{\partial \tilde{S}_0(p)}{\partial p} = X(y_0(p), p) \left[\frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p} + 1 \right] - y_0(p) \quad (1.18)$$

(считаем, что карта содержит точку $(y_0(p), p)$; $\xi_0(p) = \Xi(y_0(p), p) - p$). Отметим, что на пересечении особой и неособой карт функция $\tilde{S}(\xi, p)$ есть преобразование Лежандра функции $S(x, p)$ по аргументу x , т. е.

$$\tilde{S}(\xi, p) = \xi x(\xi, p) - S(x(\xi, p), p).$$

Покажем, что

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p}(\xi, p) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(\xi, p) = y(\xi, p). \quad (1.19)$$

Из определения функции $\tilde{S}$ имеем

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(\xi, p) = x(\xi, p).$$

Отсюда и из (1.19) следует, что

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p} \right);$$

значит,

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} - y(\xi, p) = f(p).$$

Но в точке $\xi = \xi_0(p)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p}(\xi, p) \big|_{\xi=\xi_0(p)} &= \frac{\partial \tilde{S}_0(p)}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(\xi_0(p), p) \frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p} = \\ &= \frac{\partial \tilde{S}_0(p)}{\partial p} - X(y_0(p), p) \frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (1.18)

$$f(p) = -\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial p} + X(y_0(p), p) \frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p} + X(y_0(p), p) - y_0(p) = 0,$$

откуда следует (1.19).

Равенство (1.19) можно переписать иначе:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(\Xi(y, p) - p, p) - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p}(\Xi(y, p) - p, p) = y, \quad (1.19')$$

поскольку

$$\xi + p \equiv \Xi(y(\xi, p), p), \text{ или } y' \equiv y(\Xi(y', p) - p, p).$$

Обозначим

$$T'_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{-2\pi i h}} \int e^{\frac{i}{h} [x_\xi^2 - \tilde{S}(\xi, p)]} \frac{\varphi(y(\xi, p), p)}{\sqrt{\frac{\partial \Xi}{\partial y}(y(\xi, p), p)}} d\xi,$$

где λ — некоторая константа, по модулю равная 1, вводимая для удобства. Ее смысл будет ясен из дальнейшего.

В силу 1.19,

$$\frac{\partial \Xi}{\partial y} = \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi \partial p} \right)^{-1} = (J_1')^{-1}.$$

Поэтому из (*) следует, что

$$(T_1^*)^* T_1 = |\check{\varphi}|^2 \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) + O(h).$$

На самом деле имеет место более точное соотношение. Именно, справедливы следующие теоремы (мы вновь опускаем ' и ^).

Теорема 1.7. *Имеет место равенство*

$$T_1^* T_1 = \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \bar{\varphi} \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) + h^2 A(h), \quad (1.20)$$

где $A(h)$ — такой оператор, что $\|A(h)\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq c_N$ для любого $N \geq 0$.

Доказательство этой теоремы мы приведем позже, а сейчас сформулируем результат, относящийся к каноническому преобразованию псевдодифференциального оператора $f \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right)$, символ которого принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и растет не быстрее некоторой степени своих аргументов. Для неособой карты имеет место соотношение

$$T^* f \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) T = |\varphi|^2 \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) f \left(X \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right), \Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right) + O(h).$$

Для особой карты имеет место аналогичное соотношение

$$T_1^* f \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) T_1 = |\varphi|^2 \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) f \left(X \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right), \Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right) + O(h).$$

На самом деле имеет место более точное утверждение. Именно, справедлива следующая теорема.

Доказательство этой теоремы мы приведем позже.

Теорема 1.8. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, причем*

$$f(p, x, p') = f(p', x, p) \text{ и } |f| \leq c_k (1 + |p'|^k + |p|^k)$$

для некоторых $k > 0$, c_k не зависит от x . Пусть T — оператор, определенный формулой (1.1). Тогда

$$T^* \left[f \left(\overset{2}{p}, \overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right] T = \bar{\varphi} \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right) f \left(\Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right); \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left[X \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right) + X \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right]; \Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) + h^2 A_2(h), \quad (1.21)$$

где $A_2(h)$ — оператор, удовлетворяющий следующему соотношению: $\|A_2(h)\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq c_N$ для всех $N \geq 0$. Пусть T_1 — оператор, определенный формулой (1.1'). Тогда

$$T_1^* \left[f \left(\overset{2}{p}, \overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right] T_1 = \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right) f \left(\Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left[X \left(\overset{2}{x}, \overset{2}{p} \right) + X \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right], \Xi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) \right) \varphi \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p} \right) + h^2 A_3(h),$$

где $A_3(h)$ — оператор, удовлетворяющий следующему соотношению: $\|A_3(h)\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq c_N$ для всех $N \geq 0$.

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце параграфа.

Замечание. В дальнейшем будет встречаться следующая конструкция семейства кривых $\Xi(y, p)$, $X(y, p)$. Пусть $x(x^0, p^0, t)$, $p(x^0, p^0, t)$ — решение системы Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad x(0) = x^0,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(0) = p^0,$$

$$H(x, p) \in C^\infty.$$

Тогда по теореме Ливуилля (см. гл. VI)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial x_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{vmatrix} = 1 \text{ в любой момент времени } t.$$

Уравнения

$$x = x(x^0, p^0, t), \quad p = p(x^0, p^0, t)$$

при фиксированном t определяют семейство (p^0 — параметр) кривых, удовлетворяющих предъявленным выше требованиям.

Доказательство теоремы 1.6. По теореме 1.4 имеем

$$T^*T = \varphi(y(\tilde{x}, \overset{1}{p}), \overset{1}{p}) \varphi(y(\tilde{x}, \overset{2}{p}), \overset{2}{p}) \times \\ \times \frac{|J^{-1}(\tilde{x}, \overset{1}{p}, \overset{2}{p})|}{\sqrt{\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, \overset{1}{p}), \overset{1}{p}) \frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, \overset{2}{p}), \overset{2}{p}) \right|}} [1 - \psi^\delta(\overset{1}{p} - \overset{2}{p})] + O(h^\infty), \quad (1.22)$$

где $\tilde{x} = \tilde{x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \overset{2}{p})$, $J^{-1}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \overset{2}{p}) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \overset{2}{p})$, $\|O(h^\infty)\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_k N^{h^k}$ для всех k , $N \geq 0$.

Напомним, что $\tilde{x}(y, p, p')$ является решением уравнения

$$\tilde{x} + \frac{S(\tilde{x}, p) - S(\tilde{x}, p')}{p - p'} = y. \quad (1.23)$$

Теперь заметим, что из (1.15) мы имеем:

$$X(y, p) + \frac{\partial S}{\partial p}(X(y, p), p) = y.$$

Поэтому решение уравнения (1.23) естественно искать в виде:

$$\tilde{x}(y, p, p') = X(y, p) + (p' - p)X_1(y, p) + O(p' - p)^2. \quad (1.24)$$

Отметим, что в силу леммы 1.2 можно рассматривать все функции лишь в малой полоске около диагонали $p = p'$. Здесь и ниже символом $O(p' - p)^2$ мы обозначаем функции вида $(p' - p)^2 \Phi(y, p, p')$, где $\Phi \in C^\infty$.

Подставляя (1.24) в уравнение (1.23) и разлагая все функции по p' в окрестности p , легко найдем коэффициент X_1 :

$$X_1(y, p) = -\frac{1}{2} I_0(y, p) \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}(X(y, p), p), \quad (1.25)$$

где

$$I_0^{-1}(y, p) = 1 + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial p}(X(y, p), p) = \frac{\partial y(x, p)}{\partial x} \Big|_{x=X(y, p)}.$$

Или иначе: $I_0(y, p) = \frac{\partial X}{\partial y}(y, p) \neq 0$ (в неособой карте).

Докажем, что

$$X_1(y, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial p}(y, p), \quad (1.26)$$

т. е. разложение (1.24) имеет вид

$$\tilde{x}(y, p, p') = X(y, p) + \frac{1}{2}(p' - p) \frac{\partial X}{\partial p}(y, p) + O(p' - p)^2. \quad (1.27)$$

Действительно, из (1.15),

$$\frac{\partial y(x, p)}{\partial p} = \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}(x, p).$$

Однако,

$$\frac{\partial y}{\partial p}(x, p) \Big|_{x=X(y, p)} = -\frac{1}{I_0(y, p)} \frac{\partial X}{\partial p}(y, p). \quad (1.28)$$

Поэтому из (1.25) имеем

$$X_1(y, p) = -\frac{1}{2} I_0(y, p) \left[-\frac{1}{I_0(y, p)} \frac{\partial X}{\partial p}(y, p) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial p},$$

т. е. доказано (1.26).

Дифференцируя (1.27) по y , получим разложение якобиана $J^{-1}(y, p, p') = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}(y, p, p')$, а именно:

$$\begin{aligned} J^{-1}(y, p, p') &= \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{1}{2}(p' - p) \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial p} + O(p' - p)^2 = \\ &= I_0(y, p) + \frac{1}{2}(p' - p) \frac{\partial I_0}{\partial p}(y, p) + O(p' - p)^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Теперь разложим по степеням $(p' - p)$ якобианы $\frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p), p)$ и $\frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p'), p')$. Аналогично предыдущему, после несложных преобразований, учитывая (1.26), получим (здесь $\tilde{x} = \tilde{x}(y, p, p')$) из (1.27)

$$\frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p), p) = I_0(y, p) + \frac{1}{2}(p' - p) \frac{\frac{\partial X}{\partial p}(y, p)}{I_0(y, p)} \frac{\partial I_0(y, p)}{\partial p} + O(p' - p)^2.$$

Для второго якобиана имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p'), p') &= I_0(y, p) + (p' - p) \left[\frac{\frac{\partial I_0(y, p)}{\partial p}}{\partial p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{I_0(y, p)} \frac{\partial I_0(y, p)}{\partial y} \frac{\partial X(y, p)}{\partial p} \right] + O(p' - p)^2. \end{aligned}$$

Из этих двух выражений и (1.29) получим:

$$\frac{|J^{-1}(y, p, p')|}{\sqrt{\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p), p) \frac{\partial X}{\partial y}(y(\tilde{x}, p'), p') \right|}} = 1 + O(p' - p)^2. \quad (1.30)$$

Из функций, входящих в правую часть (1.22), осталось разложить $\varphi(y(\tilde{x}, \rho), \rho)$ и $\varphi(y(\tilde{x}, \rho'), \rho')$. С учетом (1.28) их разложения по степеням $(\rho' - \rho)$ будут иметь вид:

$$\varphi(y(\tilde{x}, \rho), \rho) = \varphi(y, \rho) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \rho) \frac{(\rho' - \rho)}{2I_0(y, \rho)} \frac{\partial X}{\partial \rho}(y, \rho) + O(\rho' - \rho)^2$$

и

$$\varphi(y(\tilde{x}, \rho'), \rho') = \varphi(y, \rho') - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, \rho) \frac{(\rho' - \rho)}{2I_0(y, \rho)} \frac{\partial X}{\partial \rho}(y, \rho) + O(\rho' - \rho)^2.$$

Заметим, что во втором случае мы не разлагаем $\varphi(y, \rho')$ по аргументу ρ' ; кроме того, остатки $O(\rho' - \rho)^2$ здесь имеют вид

$$(\rho' - \rho)^2 \Phi(y, \rho, \rho'), \text{ где } \Phi \in C_0^\infty.$$

Из этих равенств и (1.30) получим, что символ оператора в правой части (1.22) равен

$$\varphi(x, \rho) \bar{\varphi}(x, \rho') [1 - \psi^\delta(\rho - \rho')] + (\rho' - \rho)^2 \Phi(x, \rho, \rho'), \quad (1.31)$$

где $\Phi \in C_0^\infty$. (В (1.30) вместо аргумента y в символ подставляется оператор $\hat{x}$, поэтому мы в (1.31) заменили y на x .)

Рассмотрим оператор

$$\psi^\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}) \varphi(\hat{x}, \hat{\rho}) \bar{\varphi}(\hat{x}, \hat{\rho}) = h^m \theta_m \left(-i \frac{\partial}{\partial x}, -ih \frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

где

$$\theta_m(\xi, \rho, x, \rho', \xi') = (\xi - \xi')^m \frac{\psi^\delta(\rho - \rho')}{(\rho - \rho')^m} \varphi(x, \rho) \bar{\varphi}(x, \rho') \in C_0^\infty,$$

m — любое целое положительное.

Очевидно, имеем оценку

$$\|\psi^\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho}) \varphi(\hat{x}, \hat{\rho}) \bar{\varphi}(\hat{x}, \hat{\rho})\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq h^m \|\theta_m\|_{\mathcal{S}_N(\mathbb{R}^4)} \leq c_{N, m} h^m, \quad (1.32)$$

т. е. этот оператор есть $O(h^\infty)$ в наших обозначениях.

Аналогично,

$$(\hat{\rho} - \hat{\rho})^2 \Phi(\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\rho}) = h^2 A_1, \text{ где } \|A_1\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq c_N. \quad (1.33)$$

Поэтому из (1.32) и (1.33) следует искомое равенство (1.16). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.7. В силу теоремы 1.5 имеем

$$\begin{aligned} T_1^* T_1 &= \varphi(y(\tilde{\xi}, \hat{\rho}); \hat{\rho}) \varphi(y(\tilde{\xi} + \hat{\rho} - \hat{\rho}, \hat{\rho}); \hat{\rho}) \times \\ &\quad \times \frac{|J_1^{-1}(\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\rho})|}{\sqrt{\left| \frac{\partial \Xi}{\partial y}(y(\tilde{\xi}, \hat{\rho}); \hat{\rho}) \frac{\partial \Xi}{\partial y}(y(\tilde{\xi} + \hat{\rho} - \hat{\rho}, \hat{\rho}); \hat{\rho}) \right|}} \times \\ &\quad \times [1 - \psi^\delta(\hat{\rho} - \hat{\rho})] + O(h^\infty), \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\rho}), \quad J_1^{-1}(\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\rho}) = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\rho})$$

$$\|O(h^\infty)\|_{W_N^N \rightarrow W_N^N} \leq c_N h^k \text{ для всех } N, k \geq 0.$$

Здесь функция $\tilde{\xi}(y, p, p')$ есть решение уравнения

$$\frac{\tilde{S}(\tilde{\xi} + p - p', p') - \tilde{S}(\tilde{\xi}, p')}{p - p'} - \frac{\tilde{S}(\tilde{\xi}, p') - \tilde{S}(\tilde{\xi}, p)}{p' - p} = y. \quad (1.35)$$

Учитывая равенство (1.19), решение (1.35) естественно искать в виде

$$\tilde{\xi}(y, p, p') = \Xi(y, p) - p + (p' - p) \Xi_1(y, p) + O(p' - p)^2.$$

Подставим это разложение в (1.35). Как и в теореме 1.6, получим коэффициент Ξ_1 :

$$\Xi_1(y, p) = 1 - \frac{I_1(y, p)}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2}(\tilde{\xi}, p) - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2}(\tilde{\xi}, p) \right) \Big|_{\tilde{\xi} = \Xi(y, p) - p}, \quad (1.36)$$

где

$$(I_1)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi \partial p} \right) \Big|_{\tilde{\xi} = \Xi(y, p) - p} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\tilde{\xi} = \Xi(y, p) - p},$$

или

$$I_1(y, p) = \frac{\partial \Xi}{\partial y}(y, p).$$

Из (1.19') (дифференцируя по ξ , по p и складывая полученные равенства) имеем:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial p}.$$

Из тождества $\xi + p = \Xi(y(\xi, p), y)$ также получим

$$2 = \frac{\partial \Xi}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial p} \right) + \frac{\partial \Xi}{\partial p}.$$

Эти два равенства с учетом (1.36) дадут

$$\Xi_1(y, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Xi}{\partial p}(y, p).$$

Таким образом, разложение функции $\tilde{\xi}(y, p, p')$ по степеням $(p' - p)$ имеет вид:

$$\tilde{\xi}(y, p, p') = \Xi(y, p) - p + \frac{1}{2} (p' - p) \frac{\partial \Xi}{\partial p}(y, p) + O(p' - p)^2. \quad (1.37)$$

Дифференцируя это равенство по y , получим разложение якобиана:

$$\begin{aligned} J_1^{-1}(y, p, p') &= \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y}(y, p, p') = \\ &= I_1(y, p) + \frac{1}{2} (p' - p) \frac{\partial I_1(y, p)}{\partial p} + O(p' - p)^2. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1.6, разлагаем якобианы $\frac{\partial \Xi}{\partial y}(y(\xi, p); p)$ и $\frac{\partial \Xi}{\partial y}(y(\xi + p - p', p'); p')$, а также амплитуды $\Phi(y(\xi, p); p)$ и $\Phi(y(\xi + p - p', p'); p')$ по степеням $(p' - p)$.

В итоге получим, что символ оператора в правой части (1.34) есть,

$$\Phi(x, p) \Phi(x, p') [1 - \psi^{\delta}(p - p')] + (p' - p)^2 \Phi(x, p, p'),$$

где $\Phi \in C_0^{\infty}$.

Повторяя рассуждения теоремы 1.6, получим, что оператор с таким символом равен

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ p \end{smallmatrix}\right) + h^2 A_2(h),$$

где $\|A_2\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_N$ для всех $N \geq 0$. Отсюда вытекает (1.20). Теорема доказана.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1.8, сделаем замечание, аналогичное замечанию 1.1.

З а м е ч а н и е. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — функция, определенная в теореме 1.8. Тогда для оператора T , определенного формулой (1.1), аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1.6, получим

$$\hat{T}^* f\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \hat{T} = \varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ p \end{smallmatrix}\right) f\left(p; \tilde{x}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ p \end{smallmatrix}\right); \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) + h^2 A_2,$$

где $\tilde{x}$ решение уравнения (1.23). Поскольку $\tilde{x}(y, p', p) = \tilde{x}(y, p, p')$ то из (1.27) имеем

$$\tilde{x}(y, p', p) = \frac{1}{2} [X(y, p') + X(y, p)] + O(p' - p)^2.$$

Тогда аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1.6, получим:

$$\hat{T}^* f\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \hat{T} = \varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ p \end{smallmatrix}\right) f\left(p; \frac{1}{2} [X\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ p \end{smallmatrix}\right) + X\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right)]; \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \varphi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) + h^2 A'_2,$$

где $\|A'_2(h)\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_N$ для всех $N \geq 0$.

Точно такое же равенство получается из теоремы 1.7 для оператора $\hat{T}_1^* f\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) \hat{T}_1$.

Доказательство теоремы 1.8. Обозначим

$$\psi(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(y(x, p), p)}{\sqrt{\left| \frac{\partial X}{\partial y}(y(x, p), p) \right|}}.$$

Используя формулу коммутации с экспонентой, получим:

$$\begin{aligned} \hat{T}^* f\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ p \end{smallmatrix}\right) \hat{T} &= e^{-\frac{i}{h} S\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \\ p \end{smallmatrix}\right)} \psi\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 7 \\ p \end{smallmatrix}\right) \times \\ &\times f\left(\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ p + \frac{\partial S}{\partial x}(x, p')\right], \begin{smallmatrix} 4 \\ x, \end{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ p + \frac{\partial S}{\partial x}(x, p')\right]\right) \psi\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) e^{\frac{i}{h} S\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right)}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся K -формулой и формулой коммутации, т. е. переставим оператор $p \equiv -ih \frac{\partial}{\partial x}$ на первое и, соответственно, седьмое место. Получим:

$$\hat{T}^* f\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ p \end{smallmatrix}\right) \hat{T} = e^{-\frac{i}{h} S\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 8 \\ p \end{smallmatrix}\right)} \Phi_N\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ p, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right) e^{\frac{i}{h} S\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ x, \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix}\right)} + h^{N+2} R_N. \quad (1.39)$$

В этом равенстве функция Φ_N имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_N(p, x, p') &= \psi(x, p) \hat{T} \psi(x, p') + \\ &+ (-ih) \psi(x, p) \left[\frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, p') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p'^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, p') \psi(x, p') \right] + \\ &+ (ih) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, p) \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} \psi(x, p) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, p) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] + \sum_{k=2}^{N+1} h^k F_k(p, x, p'), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где у функции f и ее производных опущены аргументы

$$\left(p + \frac{\partial S}{\partial x}(x, p); x; p' + \frac{\partial S}{\partial x}(x, p')\right); F_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad k=2, \dots, N+1.$$

Остаток R_N в (1.39) имеет оценку:

$$\|h^N R_N\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_N \quad \text{для любого } N \geq 0. \quad (1.41)$$

Поскольку $p + \frac{\partial S}{\partial x}(x, p) = \Xi(y(x, p), p)$, то из теоремы 1.6, учитывая (1.40) для члена нулевого порядка по h в (1.39), получим выражение:

$$\begin{aligned} T^* f(\Xi(y(\overset{1}{x}, \overset{5}{p}), \overset{5}{p}), \overset{5}{x}, \Xi(y(\overset{1}{x}, \overset{1}{p}), \overset{1}{p})) T^* = \\ = \varphi(\overset{2}{x}, \overset{2}{p}) f(\Xi(\overset{2}{x}, \overset{2}{p}), \frac{1}{2}[X(\overset{2}{x}, \overset{2}{p}) + X(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})], \Xi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})) \varphi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) + h^2 A'_2, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $\|A'_2\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq c_N$.

Член первого порядка по h в (1.39) преобразуется точно так же; учитывая симметричность символа f , приведем его к виду $h(\overset{1}{p}-\overset{2}{p})Q(\overset{2}{p}, \overset{2}{x}, \overset{1}{p})$, где $Q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Как и в доказательстве теоремы 1.5, получим оценку:

$$\begin{aligned} \|h(\overset{1}{p}-\overset{2}{p})Q(\overset{2}{p}, \overset{2}{x}, \overset{1}{p})\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} = \\ = h^2 \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \right) Q(\overset{2}{p}, \overset{2}{x}, \overset{2}{p}) \right\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq h^2 c_N. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Остальные члены в (1.39) (порядка $h^2, h^3, \dots, h^{N+1}$) также преобразуем с помощью теоремы 1.5 и получим для них оценку $\|\dots\|_{W_2^N \rightarrow W_2^N} \leq h^2 c_N$. Поэтому из (1.39), (1.42) и оценок (1.41), (1.43) следует искомое равенство для оператора T .

Равенство для случая оператора T_1 устанавливается аналогично. Теорема 4.8 доказана.

§ 2. Гомоморфизм асимптотических формул

Пусть A_1 и A_2 — производящие операторы степени s_1 и s_2 соответственно с одной и той же определяющей парой банаховых пространств (B, B) , определенные на одном и том же линейном многообразии D . Замыкания этих операторов обозначим снова через A_1 и A_2 .

Теорема 2.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ и функция ψ :

$$\psi(x_1, x_2) = x_2^k \varphi(x_1, x_2),$$

где k — натуральное число, также принадлежит $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\psi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2) = A_2^k \varphi(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2).$$

Доказательство. Пусть $e \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $e(0) \neq 0$. Положим $\varphi = \overline{\varphi} + \underline{\varphi}$, $\psi = \overline{\psi} + \underline{\psi}$, где $\overline{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)e(x_2)$, $\overline{\psi}(x_1, x_2) = x_2^k \overline{\varphi}(x_1, x_2)$. Пусть $\{\varphi_n\}$ — сходящаяся к φ в $\mathcal{B}_{s_1, s_2}$ последова-

тельность функций вида

$$\varphi_n(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{m(n)} u_{nj}(x_1) v_{nj}(x_2),$$

где каждая из функций u_{nj} , v_{nj} либо принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$, либо является Фурье-образом δ -функции. Аналогично, пусть $\{\psi_n\}$ — сходящаяся к ψ в $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R})$ последовательность функций вида

$$\psi_n(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{l(n)} w_{nj}(x_1) z_{nj}(x_2),$$

где функции w_{nj} , z_{nj} берутся из того же класса, что и u_{nj} , v_{nj} . Положим

$$\begin{aligned} \varphi_{1n}(x_1, x_2) &= \varphi_n(x_1, x_2) e(x_2), & \psi_{1n}(x_1, x_2) &= \varphi_{1n}(x_1, x_2) x_2^k, \\ \varphi_{2n}(x_1, x_2) &= \varphi_n(x_1, x_2) (1 - e(x_2)), & \psi_{2n}(x_1, x_2) &= \psi_{2n}(x_1, x_2) x_2^{-k}. \end{aligned}$$

Тогда имеют место следующие соотношения сходимости в $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{1n} = \bar{\varphi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{1n} = \bar{\psi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{2n} = \bar{\bar{\varphi}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{2n} = \bar{\bar{\psi}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{1n} + \varphi_{2n}) = \varphi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_{1n} + \psi_{2n}) = \psi, \quad (2.1)$$

причем $\psi_{1n}(x_1, x_2) + \psi_{2n}(x_1, x_2) = x_2^k [\varphi_{1n}(x_1, x_2) + \varphi_{2n}(x_1, x_2)]$. Применяя к предельным соотношениям (1.1) гомоморфизм $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \varphi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] &= \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \psi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] &= \psi(\dot{A}_1, \dot{A}_2); \end{aligned} \quad (2.2)$$

соответствующие последовательности сходятся по норме операторов.

Пусть h — произвольный элемент пространства B . Из теоремы 2.1 главы III следует, что

$$[\psi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \psi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] h = A_2^k [\varphi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \varphi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] h. \quad (2.3)$$

Так как оператор A_2^k замкнут, то из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\psi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) h = A_2^k \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) h,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.1 показывает, в частности (см. замечание в § 9), что по существу в основной задаче мы ищем асимптотику «по

некоторым операторам»; в данном случае по оператору A_2 . То есть, зная поведение символа «остатка» при $x_2 \rightarrow \infty$, мы можем сделать заключение, что «остаток» принадлежит области определения оператора A_2^k .

Точнее, теорема 2.1 влечет следующее утверждение. Пусть φ и ψ принадлежат пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ и $\varphi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2) = O(x_2^{-k})$ в том смысле, что функция

$$(x_1, x_2) \rightarrow x_2^k [\varphi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)]$$

принадлежит $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого $g \in B$ вектор $\varphi(\hat{A}_1, \hat{A}_2)g - \psi(\hat{A}_1, \hat{A}_2)g$ принадлежит области определения оператора A_2^k .

В качестве примера рассмотрим метод стационарной фазы в том случае, когда фаза линейно зависит от параметра. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ вещественная функция и пусть уравнение $\mathcal{F}'(\xi) = p$ имеет для любого $p \in \mathbb{R}$ в точности одно решение $\xi = \Xi(p)$ на носителе функции φ , причем $\mathcal{F}''(\Xi(p)) \neq 0$ ни в одной точке $p \in \mathbb{R}$. Рассмотрим интеграл

$$I(x, p) = \chi(p) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ix[\mathcal{F}(\xi) - p \cdot \xi]} d\xi, \quad (2.4)$$

где $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Перейдем в интеграле (2.4) к новой переменной интегрирования t по формуле

$$x[\mathcal{F}(\xi) - p \cdot \xi - F(\Xi(p)) + p\Xi(p)] = |x| t^2 \operatorname{sign}[x\mathcal{F}''(\Xi(p))].$$

Обозначим, как и в § 3 главы III,

$$|x| = \omega, \quad \operatorname{sign} x\mathcal{F}''(\Xi(p)) = \sigma.$$

Получим:

$$I(x, p) = \chi(p) e^{ix[\mathcal{F}(\Xi(p)) - p \cdot \Xi(p)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_0(t, p) dt, \quad (2.5)$$

где $\psi_0(t, p) = \varphi(\xi(t, p)) \frac{\partial \xi(t, p)}{\partial t}$. Функция ψ_0 бесконечно дифференцируема по совокупности аргументов, причем существуют такие положительные непрерывные функции $c(p)$, $d(p)$, что $\psi_0(t, p) = 0$ при $t \notin [-c(p), d(p)]$. Построим последовательность функций $\psi_j(t, p)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\psi_{j+1}(t, p) = \frac{\partial \psi_j(t, p) - \psi_j(0, p)}{\partial t} \frac{1}{t}.$$

Очевидно, что при $t \notin [-c(p), d(p)]$

$$\psi_j(t, p) = t^{-2} P_j(t^{-1}, p),$$

где $P_j(\tau, p)$ — некоторый полином от переменной τ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, зависящими от p . В § 3

главы III показано, что имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} e^{-ix[\mathcal{F}(\Xi(p) - p\Xi(p))]} I(x, p) = \\ & = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} \mathcal{F}''(\Xi(p))} \sum_{j=0}^n \left[\frac{i}{2\omega\sigma} \right]^j \psi_j(0, p) \chi(p) + r_{n+1}(x, p), \quad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$r_{n+1}(x, p) = \sqrt{x} \left[\frac{i\sigma}{2\omega} \right]^{n+1} \chi(p) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_{n+1}(t, p) dt; \quad (2.7)$$

функция $\sqrt{x}$ определена в § 3 главы III. В разложении (2.6) можно заменить $\sqrt{x}$ на $\operatorname{grad} x$ и $\omega^{-j} = x^{-j} (-1)^j \operatorname{sign} x$ на $\rho_j(x) \times \times (-1)^j \operatorname{sign} x$, где функция grad и ρ_j также определены в § 3 главы III. При этом остаточный член $r_{n+1}(x, p)$ заменяется на функцию $r_{n+1}(x, p)$ совпадающую с $r_{n+1}(x, p)$ при $|x| > \alpha$, где α — некоторое положительное число, не зависящее от p . Заметим, что в (2.6) $\operatorname{sign} \mathcal{F}''(\Xi(p)) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 = \text{const}$, так как функция $\mathcal{F}''(\Xi(p))$ нигде не обращается в нуль. При $x \neq 0$ все члены разложения (2.6) кроме $r_{n+1}(x, p)$, очевидно, бесконечно дифференцируемы по x и p ; значит, этим свойством обладает и функция $r_{n+1}(x, p)$. Пусть $e(x)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ тождественно равная 1 при $|x| < \alpha$. Положим

$$r_{n+1}(x, p) e(x) = \mu(x, p), \quad r_{n+1}(x, p) [1 - e(x)] = v(x, p).$$

Имеем:

$$r_{n+1}(x, p) = \mu(x, p) + v(x, p).$$

Функция μ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Поэтому функция

$$(x, p) \rightarrow x^{n+1} \mu(x, p)$$

также принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Покажем, что функция

$$(x, p) \rightarrow x^{n+1} v(x, p)$$

принадлежит $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ (это будет означать также, что $v \in \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$). Положим для определенности $\operatorname{sign} \mathcal{F}''(\Xi(p)) = 1$. Так же, как и в § 3 главы III, получим, для любого натурального $m \geq n+1$:

$$\begin{aligned} x^{n+1} v(x, p) &= \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \left(\frac{i}{2} \right)^{n+1} \psi_{n+1}(0, p) \chi(p) (1 - e(x)) + \\ &+ \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \sum_{j=n+2}^m \left(\frac{i}{2} \right)^j x^{n+1-j} (1 - e(x)) \psi_j(0, p) \chi(p) + \\ &+ \sqrt{x} x^{n-m} [1 - e(x)] \left(\frac{i}{2} \right)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2} \psi_{m+1}(t, p) \chi(p) dt. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (2.8), очевидно, принадлежит

$\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$, то же относится и к каждому из слагаемых суммы $\sum_{j=n+2}^m$. Рассмотрим последний член в (2.8). Положим

$$f(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x} x^{n-m} [1 - e(x)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \psi_{m+1}(t, p) \chi(p) dt = \\ = \sqrt{x} x^{n-m} [1 - e(x)] \chi(p) g_m(x, p),$$

где

$$g_m(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \psi_{m+1}(t, p) dt.$$

Так же, как и в § 3 главы III, устанавливаем, что при $x \neq 0$ функция g бесконечно дифференцируема и

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} g(x, p)}{\partial x^{k_1} \partial p^{k_2}} = O(|x|^{-k_1}),$$

где O — оценка, равномерная по p при $p \in \text{supp } \chi$. Следовательно, при $m \geq n+2$ для любых целых неотрицательных k_1 и k_2

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} f(x, p)}{\partial x^{k_1} \partial p^{k_2}} \right| dx dp < \infty,$$

так что $f \in W_{s_1+1, s_2+1}^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Итак, мы показали, что функции $r_{n+1}(x, p)$ и $x^{n+1} r_{n+1}(x, p)$ принадлежат пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Обозначим

$$K(x, p) = \text{grad } x e^{-ix} [\mathcal{F}(\Xi(p)) - p \Xi(p)] I(x, p).$$

Из разложения

$$K(x, p) = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4\sigma_0}} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i\sigma_0}{2} \right)^j \rho_j(x) \psi_j(0, p) \chi(p) + r_{n+1}(x, p) \quad (2.9)$$

следует, что $K \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Применяя теорему 2.1, получаем следующий результат для любого $h \in B$ вектор

$$K(\overset{*}{A}_1, \overset{*}{A}_2) h = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi\sigma_0}{4}} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i\sigma_0}{2} \right)^j \rho_j(A_1) \chi_j(A_2) h, \quad (2.10)$$

где $\chi_j(p) = \psi_j(0, p) \chi(p)$, принадлежит области определения оператора A_1^{n+1} .

Теорема 2.2. Пусть A_1 и A_2 — производящие операторы степеней s_1 и s_2 соответственно с одной и той же определяющей парой (B, B) и одной и той же областью определения $D_{A_1} = D_{A_2} = D$. Пусть функции $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ связаны соотношением

$$\psi(x_1, x_2) = P(x_1) \varphi(x_1, x_2),$$

где P — полином. Тогда

$$\psi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) = \overline{\varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) P(A_1)}.$$

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, построим последовательности $\{\varphi_{1n}\}$, $\{\varphi_{2n}\}$, $\{\psi_{1n}\}$, $\{\psi_{2n}\}$ функций вида $\sum_{j=1}^{l(n)} u_{nj}(x_1) v_{nj}(x_2)$, обладающие следующими свойствами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{1n} + \varphi_{2n}) = \varphi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_{1n} + \psi_{2n}) = \psi,$$

$$\psi_{1n}(x_1, x_2) = P(x_1) \varphi_{1n}(x_1, x_2), \quad \psi_{2n}(x_1, x_2) = P(x_1) \varphi_{2n}(x_1, x_2).$$

Пусть $h \in D$. Тогда из теоремы 2.1 гл. III следует, что

$$\begin{aligned} [\psi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \psi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] h &= \\ &= [\varphi_{1n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2) + \varphi_{2n}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] P(A_1) h. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$\psi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) h = \varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) P(A_1) h.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2 влечет следующее утверждение. Пусть φ и ψ принадлежат пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ и $\varphi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2) = O(x_1^{-k})$ в том смысле, что функция

$$(x_1, x_2) \rightarrow x_1^k [\varphi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)]$$

принадлежит $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда оператор

$$[\varphi(\dot{A}_1, \dot{A}_2) - \psi(\dot{A}_1, \dot{A}_2)] A_1^k$$

ограничен.

Мы можем теперь написать аналог разложения (2.10) метода стационарной фазы в том случае, когда оператор A_1 действует первым, а оператор A_2 — вторым. Именно: оператор

$$\left[K(\dot{A}_1, \dot{A}_2) - \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi\sigma_0}{4}} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i\sigma_0}{2}\right)^j \chi_j(A_2) \rho_j(A_1) \right] A_1^{n+1} \quad (2.11)$$

ограничен.

Применим полученные результаты о методе стационарной фазы к псевдодифференциальным операторам. Разложение (2.10) в данном случае принимает вид

$$K\left(-i \frac{d}{dx}, x\right) h(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi\sigma_0}{4}} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i\sigma_0}{2}\right)^j \rho_j\left(-i \frac{d}{dx}\right) \chi_j(x) h(x) + q_{n+1}(x),$$

где $q_{n+1} \in W_{\frac{1}{2}}^{k+n+1}(\mathbb{R})$, если $h \in W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R})$.

Разложение (2.11) для псевдодифференциальных операторов имеет вид

$$K\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right)h(x) = \\ = V\pi e^{\frac{i\pi\sigma_0}{4}} \sum_{j=0}^n \left(\frac{i\sigma_0}{2}\right)^j \chi_j(x) \rho_j\left(-i\frac{d}{dx}\right)h(x) + r_{n+1}\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right)h(x),$$

где псевдодифференциальный оператор $r_{n+1}\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right)$ обладает тем свойством, что для любого k оператор $r_{n+1}\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right) \times \times \left(-i\frac{d}{dx}\right)^{n+1}$ ограничен в $W_2^k(\mathbb{R})$. Следовательно, для любого $h \in W_2^{k-n-1}(\mathbb{R})$ функция

$$r_{n+1}\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right)h(x) = \\ = r_{n+1}\left(-i\frac{d}{dx}, \frac{x}{2}\right)\left(-i\frac{d}{dx} + i\right)^{n+1}\left(-i\frac{d}{dx} + i\right)^{-n-1}h(x)$$

принадлежит $W_2^k(\mathbb{R})$.

§ 3. Геометрическая интерпретация метода стационарной фазы

Рассмотрим интеграл

$$I(p, \omega) = \frac{\text{rad } \omega}{(2\pi i)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-px + \mathcal{F}(x))} \varphi_1(x) dx, \quad (3.1)$$

где p, ω — вещественные переменные, $i^{1/2} = e^{i\pi/4}$, $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\text{rad } \omega$ — бесконечно дифференцируемая функция, определяемая при достаточно больших $|\omega|$ формулой

$$\text{rad } \omega = \omega^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{i\pi}{4}(1 - \text{sign } \omega)} |\omega|^{1/2}.$$

Отметим, что функция $i^{1/2}I(p, \omega)$ при достаточно больших $|\omega|$ является $1/\omega$ -фурье-образом функции $e^{i\omega\mathcal{F}(x)}\varphi_1(x)$, зависящей от параметра ω .

К интегралу $I(p, \omega)$ применим метод стационарной фазы, используя только первый член асимптотического разложения. Предполагая, что $\mathcal{F}'(x) \neq 0$ на носителе функции $\varphi_1(x)$ и что уравнение $-p + \mathcal{F}'(x) = 0$ имеет единственное решение $x = x(p)$

при $x \in \text{supp } \varphi_1$, получаем:

$$e^{-i \frac{\pi}{4} (\text{sign } \mathcal{F}''(x(p)) - 1) \text{sign } \omega} \frac{\text{rad } \omega}{(2\pi i)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-px + \mathcal{F}(x))} \varphi_1(x) dx = \\ = \frac{\varphi_1(x(p))}{|\mathcal{F}''(x(p))|^{1/2}} e^{i\omega[-px(p) + \mathcal{F}(x(p))]} + g(p, \omega),$$

где функция $g(p, \omega)$ обладает следующим свойством: для любого $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и любых s_1, s_2

$$\chi(p) e^{-i\omega[-px(p) + \mathcal{F}(x(p))]} g(p, \omega) \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2), \\ \omega \chi(p) e^{-i\omega[-px(p) + \mathcal{F}(x(p))]} g(p, \omega) \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2).$$

В дальнейшем мы будем писать $f_1(p, \omega) \cong f_2(p, \omega)$, если $f_1 - f_2 \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ и $\omega[f_1(p, \omega) - f_2(p, \omega)] \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$. Таким образом,

$$e^{-i \frac{\pi}{4} (\text{sign } \mathcal{F}''(x(p)) - 1) \text{sign } \omega} \chi(p) \frac{\text{rad } \omega}{(2\pi i)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[-px + \mathcal{F}(x) + px(p) - \mathcal{F}(x(p))]} \times \\ \times \varphi_1(x) dx \cong \chi(p) \frac{\varphi_1(x(p))}{|\mathcal{F}''(x(p))|^{1/2}}. \quad (3.2)$$

В пространстве точек (x, p) , которое в физике принято называть *фазовым пространством*, уравнение

$$\mathcal{F}'(x) = p \quad (3.3)$$

задает некоторую линию. Введем на кривой (3.3) параметр α :

$$x = x(\alpha), \quad p = p(\alpha).$$

Условие $\mathcal{F}''(x) \neq 0$ означает, что уравнение $p = p(\alpha)$ относительно α имеет единственное решение $\alpha = \alpha(p)$, причем функция $\alpha(p)$ бесконечно дифференцируема. В этом случае говорят, что кривая (3.3) диффеоморфно проектируется на ось p . Таким образом, любую функцию на кривой (3.3) можно рассматривать как функцию от x, p или α . Допуская неточность в обозначении, мы иногда будем писать равенства типа

$$\varphi(x) = \varphi(p) = \varphi(\alpha),$$

а также $\alpha = \alpha(x)$ — решение уравнения $x = x(\alpha)$, $\alpha = \alpha(p)$ — решение уравнения $p = p(\alpha)$ (разумеется, в тех случаях, когда не возникает опасность путаницы). Имеем

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x(\alpha_0)) + \int_{x(\alpha_0)}^x \mathcal{F}'(x) dx = \mathcal{F}(x(\alpha_0)) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx, \quad (3.4) \\ -px(p) + \mathcal{F}(x(p)) = -px(p) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx + \mathcal{F}(x(\alpha_0)) = \\ = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} x dp - p(\alpha_0) x(\alpha_0) + \mathcal{F}(x(\alpha_0)),$$

где $\int_{\alpha_0}^{\alpha} x dp$, $\int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx$ — криволинейные интегралы вдоль кривой (3.3).

Интеграл $\int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx$ вдоль кривой в фазовом пространстве будем называть *действием* (это название принято в физике).

В сравнении (3.2) положим

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(\alpha)}{\left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{1/2}} \Big|_{\alpha=\alpha(x)}.$$

Учитывая (3.4) и равенства

$$\mathcal{F}''(x) = \frac{dp}{dx}, \quad \mathcal{F}' \frac{dx}{d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha},$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega + i} \chi(p) \frac{\text{rad } \omega}{V 2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega p x} \left(e^{i\omega \int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx} \frac{\varphi(\alpha)}{\left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{1/2}} \right) \Big|_{\alpha=\alpha(x)} dx \cong \\ & \cong e^{-\frac{i\pi}{2} \sigma \text{sign } \omega} \left(e^{i\omega \int_{\alpha_0}^{\alpha} x dp - p(\alpha_0) x(\alpha_0)} \frac{\varphi(\alpha)}{\left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{1/2}} \right) \Big|_{\alpha=\alpha(p)} \chi(p) \frac{1}{\omega + i}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где $\sigma = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sign} \frac{dp}{dx} \right)$.

§ 4. Канонический оператор на незамкнутой кривой

Пусть $M^1: x=x(\alpha)$, $p=p(\alpha)$ — незамкнутая бесконечно гладкая кривая без самопересечения в фазовом пространстве с координатами (x, p) , а $\varphi(\alpha)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Определим на M^1 вещественные функции

$$S(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} p dx, \quad \tilde{S}(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} x dp + x(\alpha_0) p(\alpha_0) = -S(\alpha) + p(\alpha) x(\alpha).$$

Пусть открытая дуга U кривой M^1 , содержащая носитель функции φ , диффеоморфно проецируется на оси x и p , т. е. $\frac{dx}{d\alpha} \neq 0$, $\frac{dp}{d\alpha} \neq 0$ на U . Тогда вместо α в качестве параметра на U можно выбрать x или p :

$$\alpha = \alpha(x), \quad \alpha = \alpha(p).$$

Справедливы соотношения

$$p = \frac{dS}{dx}, \quad x = \frac{d\tilde{S}}{dp}, \quad S + \tilde{S} = px,$$

т. е. переход от x , $S(x)$ к p , $\tilde{S}(p)$ является преобразованием Лежандра.

Меняя в (3.5) ролями переменные x и p и переходя к комплексносопряженным величинам, получим для любой бесконечно дифференцируемой функции $\rho(\omega)$, равной нулю в окрестности нуля и 1 в окрестности бесконечности,

$$e^{-i\omega S(\alpha(x))} \chi(x) \rho(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p x} e^{-i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(p)} dp \cong \\ \cong \chi(x) \rho(\omega) (i \operatorname{sign} \omega)^{\sigma} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(x)}$$

при условии, что носитель функции χ содержится в проекции дуги U на ось x . Если же носитель бесконечно дифференцируемой функции $\chi(x)$ не пересекается с носителем функции $\varphi(\alpha(x))$ и $\chi(x) = 1$ в окрестности ∞ , то функция

$$g(x, \omega) = \chi(x) \rho(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p x - i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(p)} dp$$

принадлежит пространству $W_s^k(\mathbb{R}^2)$ при любом s , и этим же свойством обладает функция $\omega^k g(x, \omega)$, где k — произвольное натуральное число. Следовательно, справедливо равенство

$$\chi(x) \rho(\omega) \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p x - \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(p)} dp = \\ = \chi(x) \rho(\omega) (i \operatorname{sign} \omega)^{\sigma} e^{i\omega S(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(x)} + \\ + e^{i\omega S(\alpha(x))} g_1(x, \omega) + g_2(x, \omega), \quad (4.1)$$

где g_1, g_2 — бесконечно дифференцируемые функции, $g_1(x, \omega) = 0$ при $x \in \operatorname{supp} \varphi(\alpha(x))$, функций $\omega g_1(x, \omega), \omega g_2(x, \omega)$ принадлежат пространству $\mathcal{D}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ для любых целых неотрицательных s_1, s_2 .

В правой части равенства (4.1) функция

$$e^{i\omega S(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2}$$

бесконечно дифференцируема на U , но вне дуги U она может потерять гладкость в тех точках, где $\frac{dx}{dp} = 0$; такие точки мы будем называть фокальными. В то же время левая часть (4.1) с точностью до множителя есть ω -Фурье-преобраз функции

$$e^{-i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha(p)},$$

причем множитель $e^{-i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2}$ является бесконечно дифференцируемой функцией в окрестности фокальной точки. Это соображение наводит на мысль определить следующий оператор K — канонический оператор, переводящий бесконечно дифференцируемые финитные функции на M^1 в функции от переменных ω и x .

Пусть семейство $\{U_j\}_{j \in I}$ открытых дуг покрывает M^1 :

$$M^1 = \bigcup_{j \in I} U_j$$

(в M^1 не включены концы), причем каждая из дуг U_j пересекается лишь с конечным числом дуг U_j . Пусть, далее, на каждой дуге U_j

$$\frac{dx}{d\alpha} \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{d\alpha} \neq 0.$$

Выберем на каждой дуге U_j в качестве параметра (локальной координаты) x или p . Если на U_j выбрано x в качестве локальной координаты, то мы назовем U_j *неособой картой* кривой M^1 ; в противном случае U_j будет называться *особой картой*. Каждой карте U_j отвечает функция $\alpha = \alpha_j(x)$ или $\alpha = \alpha_j(p)$. Совокупность $\{U_j\}_{j \in I}$ неособых и особых карт на M^1 назовем *каноническим атласом кривой M^1* . Пусть дана функция $\varphi(\alpha)$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi \Subset M^1$. Возьмем разбиение единицы, отвечающее каноническому атласу, т. е. бесконечно дифференцируемые функции $\{e_j(\alpha)\}$, удовлетворяющие условиям:

$$1 = \sum_I e_j(\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha \in \text{supp } \varphi, \quad \text{supp } e_j \subset U_j.$$

Тогда

$$\varphi(\alpha) = \sum e_j(\alpha) \varphi(\alpha) = \sum \varphi_j(\alpha), \quad \text{supp } \varphi_j \subset U_j.$$

Пусть для определенности U_{j_1} — неособая карта, содержащая выделенную точку α_0 . Положим для функции $\psi(\alpha)$ с носителем в U_{j_1}

$$[K_{j_1}\psi](x) = e^{i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_j(x)}. \quad (4.2)$$

Пусть U_{j_2} — особая карта, пересекающаяся с U_{j_1} . Определим канонический оператор K_{j_2} , действующий на функции с носителем в U_{j_2} , формулой

$$[K_{j_2}\psi](x) = c \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p x - i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_{j_2}(p)} dp,$$

где константа c будет определена ниже. Потребуем, чтобы для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $\psi(\alpha)$ с носителем, содержащимся в $U_{j_1} \cap U_{j_2}$, было справедливо соотношение

$$e^{-i\omega \tilde{S}(\alpha_1(x))} \chi(x) \rho(\omega) [K_{j_1}\psi - K_{j_2}\psi](x, \omega) \cong 0,$$

каковы бы ни были функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в проекции $U_{j_1} \cap U_{j_2}$ на ось x , и функция $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, равная 0 в окрестности нуля и 1 в окрестности бесконечности. В силу (4.1) имеем:

$$e^{-i\omega S(\alpha_{j_1}(x))} \chi(x) \rho(\omega) [K_{j_2} \psi](x, \omega) \cong \\ \cong c_2 (i \operatorname{sign} \omega)^{\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}}} e^{-i\omega S(\alpha_1(x))} \chi(x) \rho(\omega) [K_{j_1} \psi](x, \omega),$$

где

$$\sigma_{U_1 \cap U_2} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \frac{dp}{dx} \right) \Big|_{\alpha \in U_{j_1} \cap U_{j_2}}.$$

Следовательно, мы должны положить

$$c = (i \operatorname{sign} \omega)^{-\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}}}.$$

Аналогично для неособой карты U_{j_3} , пересекающейся с U_{j_2} , положим

$$K_{j_3} \psi(\alpha) = (i \operatorname{sign} \omega)^{-\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} + \sigma_{U_{j_2} \cap U_{j_3}}} e^{i\omega S(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_{j_3}(x)};$$

здесь $\operatorname{supp} \psi \in U_3$.

Вообще, пусть $U_1, U_2, \dots, U_n$ — конечная последовательность карт из данного канонического атласа, причем неособые и особые карты в этой последовательности чередуются и любые две карты, стоящие в этой последовательности на соседних местах, пересекаются. Тогда положим

$$K_{j_n} \psi(\alpha) = (i \operatorname{sign} \omega)^{-\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} + \sigma_{U_{j_2} \cap U_{j_3}} - \dots + \sigma_{U_{j_{n-1}} \cap U_{j_n}}} \times \\ \times \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_{j_n}(x)}$$

при нечетном n и

$$K_{j_n} \psi(x) = (i \operatorname{sign} \omega)^{-\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} + \dots - \sigma_{U_{j_{n-1}} \cap U_{j_n}}} \times \\ \times \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\rho x - \mathcal{J}(\alpha))} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_{j_n}} dp.$$

Определим индекс и канонический оператор при четном n . Назовем число

$$\operatorname{ind}(j_1, \dots, j_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sigma_{U_{j_k} \cap U_{j_{k+1}}}$$

индексом цепочки карт $U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$. Для того, чтобы данное нами определение канонического оператора K_j в карте было непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы индекс $\operatorname{ind}(j_1, \dots, j_n)$ зависел только от j_1 и j_n или, что то же самое, — чтобы индекс замкнутой цепочки карт $U_{j_1}, \dots, U_{j_2}$ равнялся нулю. Этот факт имеет место для незамкнутой кривой M^1 .

Действительно, пусть U — дуга кривой M^1 , диффеоморфно проектирующаяся на ось p , α' , α'' — две точки на дуге U , не являющиеся фокальными (т. е. $\frac{dx}{dp} \neq 0$ в этих точках). Положим

$$\gamma(\alpha', \alpha'') = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sign} \frac{dp}{dx}(\alpha') - \operatorname{sign} \frac{dp}{dx}(\alpha'') \right].$$

Если же точки α' и α'' лежат на дуге, диффеоморфно проектирующейся на ось x , то положим

$$\gamma(\alpha', \alpha'') = 0.$$

Легко видеть, что эти два определения дают одинаковый результат в тех случаях, когда они применимы одновременно. Пусть теперь l — путь на кривой M^1 , имеющий концы β' , β'' , т. е. непрерывное отображение

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

отрезка $[0, 1]$ в M^1 , удовлетворяющее условиям

$$\alpha(0) = \beta', \quad \alpha(1) = \beta''.$$

Пусть точки β' и β'' не являются фокальными. Положим

$$\gamma[l] = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})), \quad (4.3)$$

где $\beta' = \alpha(0)$, $\beta'' = \alpha(1)$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, причем числа $t_1, \dots, t_{n-1}$ выбраны так, чтобы в правой части формулы (4.3) каждый участок пути с концами $\alpha(t_k)$, $\alpha(t_{k+1})$ либо не содержал фокальных точек, либо целиком лежал на дуге, диффеоморфно проектирующейся на ось p (такой выбор всегда возможен. Назовем $\gamma[l]$ индексом пути l . Такое название оправдано тем, что $\alpha(t)$ не зависит от выбора промежуточных точек $\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_{n-1})$ на пути l . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\gamma[l]$ не изменится, если между t_k и t_{k+1} вставить промежуточную точку t' . При этой процедуре к $\gamma[l]$ добавляется слагаемое

$$\gamma(\alpha(t_k), \alpha(t')) + \gamma(\alpha(t'), \alpha(t_{k+1})) - \gamma(\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})),$$

которое, как это следует непосредственно из определения, всегда равно 0.

Пусть два пути $l: \alpha = f(t)$ и $l': \alpha = g(t)$ на M^1 гомотопны, т. е. существует такая непрерывная функция $\mathcal{F}(t, s)$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ со значениями в M^1 , что $\mathcal{F}(t, 0) = f(t)$ и $\mathcal{F}(t, 1) = g(t)$. Если при этом для любого $s \in [0, 1]$ точки $\mathcal{F}(0, s)$ и $\mathcal{F}(1, s)$ не являются фокальными, то индексы путей l и l' совпадают. Доказательство этого факта предоставляем читателю. Теперь нам уже нетрудно убедиться в том, что индекс замкнутой цепочки

карт на M^1 равен 0. Действительно, для любой цепочки карт $U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$ число $\text{ind}(j_1, \dots, j_n)$ равно индексу некоторого пути l , начальная точка которого лежит в U_{j_1} , а конечная — в пересечении $U_{j_{n-1}} \cap U_{j_n}$. Пусть $j_n = j_1$. Тогда можно считать, что начальная и конечная точки пути l совпадают, например, с точкой α_0 , т. е. путь l замкнут. Но любой замкнутый путь на незамкнутой кривой можно непрерывно деформировать в путь $l' : \alpha = \text{const}$ (в точку). Очевидно, что $\gamma[l'] = 0$. Следовательно $\gamma[l] = \text{ind}(j_1, \dots, j_1) = 0$.

Понятие индекса пути на M^1 становится особенно наглядным, если в каждом компактном подмножестве M^1 имеется лишь конечное число фокальных точек и в каждой из них производная $\frac{dx}{dp}$ меняет знак (если эти условия выполнены, то говорят, что кривая M^1 находится в общем положении относительно проектирования на ось x). В этом случае можно ввести функцию на M^1 с целочисленными значениями — индекс $\gamma(\alpha)$ точки α — следующим образом: $\gamma(\alpha_0) = 0$; при переходе через фокальную точку в направлении уменьшения $\frac{dx}{dp}$ индекс $\gamma(\alpha)$ скачком увеличивается на единицу, а при переходе в направлении увеличения dx/dp уменьшается на единицу; в фокальных точках функция $\gamma(\alpha)$ не определена, в остальных точках — непрерывна (следовательно, локально постоянна). Подчеркнем, что начальная точка α_0 не должна быть фокальной. Для любого пути l на M^1 , начинающегося в точке α_0 и кончающегося в точке α , имеем:

$$\gamma[l] = \gamma(\alpha). \quad (4.4)$$

В случае, когда кривая M^1 не находится в общем положении, будем рассматривать формулу (4.4) как определение функции $\gamma(\alpha)$.

Определим, окончательно, канонический оператор формулой

$$\begin{aligned} [K\varphi](x, \omega) = & \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} e^{i\omega S(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} e_j(\alpha) \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_j(x)} + \\ & + \sum_{j \in I_2} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p \cdot x - i\omega S(\alpha)} \times \\ & \times \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} e_j(\alpha) \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_j(p)} dp, \end{aligned}$$

где I_1 — множество номеров неособых карт, I_2 — множество номеров особых карт;

$$\gamma_j = \gamma(\alpha), \quad \alpha \in U_j,$$

если U_j — неособая карта. Если же U_j — особая карта, то индекс $\gamma(\alpha)$ может принимать различные значения в разных точках

дуги U_j ; в этом случае

$$\gamma_j = \min_{\alpha \in U_j} \gamma(\alpha).$$

Сглаженным каноническим оператором $\mathcal{K}$ будем называть оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $[\mathcal{K}\varphi](x, \omega) = [K\varphi](x, \omega)$, если $|\omega|$ больше некоторой константы, не зависящей от φ ;

б) $[\mathcal{K}\varphi](x, \omega) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть A_1, A_2 — производящие операторы, действующие в банаховом пространстве B . Так как $[\mathcal{K}\varphi](x, \omega)$ — гладкая функция от x и ω , то можно рассматривать операторы $[\mathcal{K}\varphi](\dot{A}_1, \dot{A}_2)$ и $[\mathcal{K}\varphi](\dot{A}_1, \dot{A}_2)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{K}(\dot{A}_1, \dot{A}_1)\varphi(\alpha)h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{K}\varphi](\dot{A}_1, \dot{A}_2)h,$$

$$\mathcal{K}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)\varphi(\alpha)h \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{K}\varphi](\dot{A}_1, \dot{A}_2)h.$$

Определение. Будем говорить, что пара производящих операторов $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ (соответственно, $\dot{A}_1, \dot{A}_2$) действующих в B , согласуется с кривой M^1 , лежащей в фазовой плоскости (x, p) , если для любой неособой карты U кривой M^1 и любой бесконечно дифференцируемой функции $\chi(x)$ с носителем, содержащимся в проекции дуги U на ось x , оператор $\chi(\dot{A}_1)e^{\dot{A}_1\varphi}(\dot{A}_1)$ (соответственно, $\chi(\dot{A}_1)e^{\dot{A}_1\varphi}(\dot{A}_2)$), где $\varphi(x) = S(\alpha(x))$, ограничен в B .

Теорема. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ — два канонических оператора на M^1 , отвечающие различным каноническим атласам $\{U_j\}_{j \in I}$ и $\{U'_j\}_{j \in I'}$, разбиениям единицы $\{e_j\}$ и $\{e'_j\}$ и различным способам «сглаживания» по ω , но одной и той же начальной точке α_0 . Тогда:

а) если пара $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ согласуется с M^1 , то оператор

$$A_2[\mathcal{K}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)\varphi(\alpha) - \mathcal{K}'(\dot{A}_1, \dot{A}_2)\varphi(\alpha)]$$

ограничен в B ;

б) если пара $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ согласуется с M^1 , то оператор

$$[\mathcal{K}(\dot{A}_1, \dot{A}_2)\varphi(\alpha) - \mathcal{K}'(\dot{A}_1, \dot{A}_2)\varphi(\alpha)]A_2$$

ограничен в B .

Доказательство. Рассмотрим сумму $\{V_j\}_{j \in I''}$ канонических атласов $\{U_j\}_{j \in I}$, $\{U'_j\}_{j \in I'}$, т. е. множество I'' есть (дизъюнктная) сумма множеств I и I' , $V_j = U_j$ при $j \in I$ и $V_j = U'_j$ при $j \in I'$. Продолжим разбиения единицы $\{e_j\}$ и $\{e'_j\}$ следующим образом:

$$e_j(\alpha) = 0 \text{ при } j \in I', \quad e'_j(\alpha) = 0 \text{ при } j \in I;$$

здесь I и I' рассматриваются как непересекающиеся подмножества множества I'' . Тогда $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ можно рассматривать как два канонических оператора, отвечающих одному и тому же каноническому атласу $\{V_j\}$, но различным разбиениям единицы $\{e_j\}$, $\{e'_j\}$. Поэтому без уменьшения общности можем считать, что с самого начала канонические атласы $\{U_j\}$ и $\{U'_j\}$ совпадали.

Имеем при достаточно больших по модулю ω

$$\begin{aligned} & [(\mathcal{H} - \mathcal{H}') \varphi](x, \omega) = \\ &= \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign} \omega)^{y_j} e^{i\omega S(\alpha)} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} [e_j(\alpha) - e'_j(\alpha)] \varphi(\alpha) |_{\alpha=\alpha_j(x)} + \\ &+ \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign} \omega)^{y_j} \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p x - i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} [e_j(\alpha) - \\ &- e'_j(\alpha)] \varphi(\alpha) |_{\alpha=\alpha_j(p)} dp. \end{aligned}$$

Не уменьшая общности, можно предположить, что никакие две различные неособые карты атласа $\{U_j\}$ не пересекаются, и никакие две различные особые карты этого атласа также не пересекаются. Действительно, пусть U_{j_0} — неособая (соответственно, особая) карта данного атласа и пусть I_0 — множество номеров всех неособых (соответственно, особых) карт, пересекающихся с U_{j_0} . Тогда дугу $\bigcup_{j \in I_0} U_j \cap x$ (соответственно p) в качестве локальной координаты можно выбрать в качестве карты некоторого канонического атласа на M^1 . Вообще, назовем два элемента j' и j'' множества I эквивалентными, если карты $U_{j'}$ и $U_{j''}$ являются одновременно неособыми или особыми и пересекаются. Пусть $\tilde{I}$ — фактормножество множества I по данному отношению эквивалентности. Для каждого класса эквивалентности $\tilde{j} \in \tilde{I}$ положим

$$U_{\tilde{j}} = \bigcup_{j \in \tilde{j}} U_j, \quad e_{\tilde{j}} = \sum_{j \in \tilde{j}} e_j,$$

причем в качестве локальной координаты на $U_{\tilde{j}}$ выберем x , если U_j — неособая карта при $j \in \tilde{j}$, и p — в противоположном случае. Тогда $\{U_{\tilde{j}}\}_{\tilde{j} \in \tilde{I}}$ — канонический атлас на M^1 и $\{e_{\tilde{j}}\}_{\tilde{j} \in \tilde{I}}$ — разбиение единицы, отвечающее этому атласу. При этом никакие две различные неособые (или особые) карты атласа $\{U_{\tilde{j}}\}$ не пересекаются и канонический оператор, отвечающий атласу $\{U_{\tilde{j}}\}$ и разбиению единицы $\{e_{\tilde{j}}\}$, очевидно, совпадает с каноническим оператором, отвечающим атласу $\{U_j\}$ и разбиению единицы $\{e_j\}$.

Итак, предположим, что атлас $\{U_j\}$ совпадает с атласом $\{U_{\tilde{j}}\}$. Тогда $[e_j(\alpha) - e'_j(\alpha)] \varphi(\alpha) = 0$, если точка α не попадает ни в одну неособую (особую) карту этого атласа, так как в этом случае $e_j(\alpha) \varphi(\alpha) = e'_j(\alpha) \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Пусть U_j — особая карта атласа

$\{U_j\}$ и $U_{k_1}, \dots, U_{k_m}$ — неособые карты, пересекающиеся с U_j . Тогда носитель функции $[e_j(\alpha) - e'_j(\alpha)] \varphi(\alpha)$ содержится в $\bigcup_{\mu=1}^m (\overline{U_j \cap U_{k_\mu}})$, причем в любой точке $\alpha \in U_{k_\mu} \cap U_j$ справедливы равенства

$$e_j(\alpha) \varphi(\alpha) + e_{k_\mu}(\alpha) \varphi(\alpha) = 1, \quad e'_j(\alpha) \varphi(\alpha) + e'_{k_\mu}(\alpha) \varphi(\alpha) = 1,$$

так что в пересечении $U_j \cap U_{k_\mu}$ выполняется равенство

$$\varphi(\alpha) [\varphi_j(\alpha) - e'_j(\alpha) + e_{k_\mu}(\alpha) - e'_{k_\mu}(\alpha)] = 0.$$

Заметим еще, что так как функции e_{k_μ} и e'_{k_μ} равны нулю в некоторой окрестности концов дуги, то носитель функции $[e_j(\alpha) - e'_j(\alpha)] \varphi(\alpha)$ содержится на самом деле в некоторой открытой дуге, диффеоморфно проектирующейся на ось x . Применяя формулу (4.1), получаем, что разность $[(K - K') \varphi](x, \omega)$ является суммой конечного числа слагаемых вида

$$e^{i\omega S(\alpha_j(x))} g_1(x, \omega) + g_2(x, \omega),$$

где g_1, g_2 — бесконечно дифференцируемые функции $g_1(x, \omega) = 0$ вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в проекции неособой карты U_j на ось x , и функции $\omega g_1(x, \omega), \omega g_2(x, \omega)$ принадлежат пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^2)$ для любых целых неотрицательных s_1 и s_2 . Операторы $A_2 g_1(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2)$, $g_1(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2) A_2$, $A_2 g_2(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2)$, $g_2(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2) A_2$ ограничены в B . Утверждение теоремы теперь непосредственно следует из теоремы 10.2 главы IV.

§ 5. Метод стационарной фазы

Пусть $h \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, Φ — бесконечно дифференцируемая вещественная, φ — комплексная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, носитель которой содержится в $(a, b) \times Y \times (-c, c)$, где $a < b$, $c > 0$ — вещественные числа, Y — некоторый шар в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим интеграл

$$I(y, h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} \Phi(p, y, h)} \varphi(p, y, h) dp. \quad (5.1)$$

Предположим, что уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}(p, y, h) = 0, \quad p \in (a, b), \quad y \in Y, \quad |h| < c$$

имеет единственное решение $p = p(y, h)$, причем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2}(p(y, h), y, h) \neq 0;$$

сделаем в интеграле (5.1) замену переменных:

$$\Phi(p, y, h) - \Phi(p(y, h), y, h) = t^2 \sigma, \quad (5.2)$$

где $\sigma = \text{sign} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} (p(y, h), y, h)$. Получим:

$$I(y, h) = e^{\frac{i}{h} \Phi(p(y, h), y, h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} \sigma t^2} \psi(t, y, h) dt, \quad (5.3)$$

где $p(t, y, h)$ — решение уравнения (5.2),

$$\psi(t, y, h) = \varphi(p(t, y, h), y, h) \frac{\partial p(t, y, h)}{\partial t}.$$

Функция ψ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, причем ее носитель содержится в $(d, e) \times Y \times (-c, c)$, где d, e — некоторые вещественные числа. Применяя к интегралу (5.3) результаты § 3 гл. III, получаем следующее разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{|h|}} e^{-t \frac{\pi}{4} \sigma \text{sign } h} e^{-\frac{i}{h} \Phi(p(y, h), y, h)} I(y, h) = \sqrt{\pi} \sum_{j=0}^N \left(\frac{i\sigma h}{2}\right)^j \times \\ \times \psi_j(0, y, h) + r_{N+1}(y, h), \quad (5.4)$$

где

$$r_{N+1}(y, h) = \frac{1}{\sqrt{|h|}} e^{-t \frac{\pi}{4} \sigma \text{sign } h} \left(\frac{i\sigma h}{2}\right)^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} \sigma t^2} \psi_{N+1}(t) dt, \quad (5.5)$$

$$\psi_1(t, y, h) = \psi(t, y, h),$$

$$\psi_{j+1}(t, y, h) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\psi_j(t, y, h) - \psi_j(0, y, h)}{t}. \quad (5.6)$$

Заметим, что при достаточно больших по модулю t каждая из функций $\psi_j(t, y, h)$ имеет вид $\frac{1}{t^2} P_{y, h}\left(\frac{1}{t}\right)$, где $P_{y, h}$ — полином, коэффициенты, которого суть бесконечно дифференцируемые функции от y, h , носители которых содержатся в $Y \times (-c, c)$. Кроме того, функции

$$\chi_j(y, h) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_j(0, y, h)$$

принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и их носители содержатся в $Y \times (-c, c)$.

Оценим остаточный член. Положим $h = 1/\omega$ и рассмотрим функцию $R_{N+1}(y, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} r_{N+1}\left(y, \frac{1}{\omega}\right)$. Эта функция отлична от нуля лишь при $|\omega| > 1/c$. Покажем, что функция $\omega^{N+1} R_{N+1}(y, \omega)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ для любых s_1, s_2 . Действительно, для любого натурального $m > N+1$ имеем:

$$\omega^{N+1} R_{N+1}(y, \omega) = \sqrt{\pi} \left(\frac{i\sigma}{2}\right)^{N+1} \chi_{N+1}\left(y, \frac{1}{\omega}\right) + \\ + \sqrt{\pi} \sum_{j=N+2}^m \left(\frac{i\sigma}{2}\right)^j \omega^{N+1-j} \chi_j\left(y, \frac{1}{\omega}\right) + \\ + \sqrt{|\omega|} e^{-t \frac{\pi}{4} \sigma \text{sign } \omega} \left(\frac{i\sigma}{2}\right)^{N+1} \omega^{N-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \sigma t^2} \psi_{m+1}\left(t, y, \frac{1}{\omega}\right) dt. \quad (5.7)$$

Первое слагаемое в правой части (5.7) принадлежит

$$\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

так как

$$\chi_{N+1}\left(y, \frac{1}{\omega}\right) = \chi_{N+1}(y, 0) + \frac{1}{\omega} \bar{\chi}\left(y, \frac{1}{\omega}\right),$$

где $\bar{\chi}(y, h)$ — бесконечно дифференцируемая функция, так что функция $\frac{1}{\omega} \bar{\chi}\left(y, \frac{1}{\omega}\right)$ принадлежит любому пространству Соболева.

Далее, все слагаемые суммы $\sum_{j=N+2}^m$ в правой части равенства (5.7) интегрируемы с квадратом, и этим свойством обладают также все их производные. Рассмотрим, наконец, функцию

$$f(y, \omega) = \sqrt{|\omega|} e^{-i \frac{\pi}{4} \sigma \operatorname{sgn} \omega} \omega^{N-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega \sigma t^2} \psi_{m+1}\left(t, y, \frac{1}{\omega}\right) dt \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\omega|} e^{-i \frac{\pi}{4} \sigma \operatorname{sgn} \omega} \omega^{N-m} g(y, \omega).$$

Функция $g(y, \omega)$ отлична от нуля лишь при $y \in Y$ и ограничена, оценим ее производные. Для любого мультииндекса $k = (k_1, \dots, k_n)$ и любого номера l имеем:

$$\frac{\partial^{|k|+l} g(y, \omega)}{\partial y^k \partial \omega^l} = \sum_{j=0}^l C_l \left(-\frac{1}{2\omega}\right)^j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega \sigma t^2} \times \\ \times \left(1 + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^{l-j} \psi_{m+1}\left(t, y, \frac{1}{\omega}\right) dt. \quad (5.8)$$

Из формулы (5.8) вытекает, что функция $g(y, \omega)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены. Следовательно, при достаточно большом m функция $f(y, \omega)$ принадлежит любому наперед заданному пространству Соболева. Этим доказано, что остаточный член r_{N+1} в разложении (5.4) удовлетворяет условию

$$\omega^{N+1} r_{N+1}\left(y, \frac{1}{\omega}\right) \in \mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

В заключение параграфа рассмотрим случай, когда критическая точка фазы $\Phi(p, y, h)$ отсутствует. Рассмотрим интеграл (5.1), и пусть функции Φ и φ удовлетворяют всем прежним условиям, кроме разрешимости уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$.

Вместо этого предположим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}(p, y, h) \neq 0$$

при $p \in (a, b)$, $y \in Y$, $|h| < c$. В этом случае мы можем сделать

в интеграле (5.1) следующую замену переменных:

$$\Phi(p, y, h) = t, \quad p = p(t, y, h).$$

Получим:

$$I(y, h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}t} \psi(t, y, h) dt,$$

где

$$\psi(t, y, h) = \varphi(p(t, y, h), y, h) \frac{\partial p(t, y, h)}{\partial t}.$$

Снова, как и прежде, функция ψ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, причем ее носитель содержится в $(d, e) \times Y \times (-c, c)$, где d, e — некоторые вещественные числа. Интегрируя по частям N раз, получаем:

$$I(y, h) = (ih)^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{h}} \frac{\partial^N \psi(t, y, h)}{\partial t^N} dt. \quad (5.9)$$

Положим $h = 1/\omega$. Из формулы (5.9) следует, что если в интеграле (5.1) $\frac{\partial \Phi}{\partial p} \neq 0$ на носителе функции φ , то для любого натурального m функция $\omega^m I(y, 1/\omega)$ принадлежит любому пространству Соболева, а значит, и любому пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

§ 6. Каоноический оператор на незамкнутой кривой, зависящей от параметров, определенный с точностью до $O(1/\omega)$

1. Рассмотрим семейство незамкнутых кривых $M^1(\beta, \omega)$ на фазовой плоскости (x, p) . Пусть $\beta \in \mathbb{R}^n$, ω принадлежит расширенной числовой прямой и уравнения кривых $M^1(\beta, \omega)$ суть

$$x = x(\alpha, \beta, \omega), \quad (6.1)$$

$$p = p(\alpha, \beta, \omega), \quad (6.2)$$

где α — (один и тот же) параметр на кривых рассматриваемого семейства, $x(\alpha, \beta, \omega)$, $p(\alpha, \beta, \omega)$ — бесконечно дифференцируемые (в том числе и при $\omega = \infty$) функции.

Введем следующие функции $S(\alpha, \beta, \omega)$ и $\tilde{S}(\alpha, \beta, \omega)$:

$$\begin{aligned} dS &= p(\alpha, \beta, \omega) dx(\alpha, \beta, \omega), \\ S(0, \beta, \omega) &= 0, \\ \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega) &= -S(\alpha, \beta, \omega) + x(\alpha, \beta, \omega) p(\alpha, \beta, \omega). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Пусть $\{U(\beta, \omega)\}_{\beta \in B, \omega \in \Omega}$ — семейство дуг кривых $M^1(\beta, \omega)$, отвечающих интервалу (a, b) изменения параметра α , Ω — открытая область на расширенной числовой прямой, не содержащая нуля, B — область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что каждая из дуг $U(\beta, \omega)$ диффеоморфно проектируется как на ось x , так и на ось p , так

что уравнения (6.1) и (6.2) относительно α имеют на $(a, b) \times \mathbf{B} \times \Omega$ единственные решения

$$\alpha = \bar{\alpha}(x, \beta, \omega), \quad \alpha = \bar{\alpha}(\rho, \beta, \omega).$$

Пусть $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, содержащимся в $(a, b) \times \mathbf{B} \times \Omega$. Рассмотрим интеграл

$$I(x, \beta, \omega) = \\ = \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\rho \cdot x - i\omega \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega)} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha = \bar{\alpha}(\rho, \beta, \omega)} d\rho.$$

Для вычисления этого интеграла можно применить метод стационарной фазы. Если $\chi(\omega)$ — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, то

$$\chi(x) I(x, \beta, \omega) = \\ = \chi(x) (i \operatorname{sign} \omega)^\sigma e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha = \bar{\alpha}(x, \beta, \omega)} + \\ + e^{i\omega S(\bar{\alpha}(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} g_1(x, \beta, \omega) + g_2(x, \beta, \omega),$$

где функции $g_1(x, \beta, \omega)$, $g_2(x, \beta, \omega)$ отличны от нуля лишь при $\omega \in \Omega$, причем функции $\omega g_1(x, \beta, \omega)$, $\omega g_2(x, \beta, \omega)$ принадлежат пространству $\mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ для любых

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \frac{\partial \rho / \partial \alpha}{\partial x / \partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha = \bar{\alpha}(x, \beta, \omega)}.$$

Пусть теперь $\chi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 0 на объединении проекций дуг $U(\beta, \omega)$ на ось x и равная 1 в окрестности бесконечности. Тогда мы можем применить результаты предыдущего параграфа, касающиеся случая отсутствия критических точек фазы, положив

$$y = \left(\beta, \frac{1}{x} \right).$$

Получим, что для любого N и любых s_1, s_2, s_3

$$\omega^N \chi(x) I(x, \beta, \omega) \in \mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}).$$

Представляя единицу в виде $1 = \chi(x) + (1 - \chi(x))$, где $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, получаем окончательно следующее соотношение:

$$I(x, \beta, \omega) = \\ = (i \operatorname{sign} \omega)^\sigma e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha = \bar{\alpha}(x, \beta, \omega)} + \\ + e^{i\omega S(\bar{\alpha}(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} g_1(x, \beta, \omega) + g_2(x, \beta, \omega), \quad (6.4)$$

где функции g_1 и g_2 обладают теми же свойствами, что и выше.

2. Определение индекса. Формула (6.4), являющаяся обобщением формулы (4.1), позволяет определить канонический оператор на семействе кривых $M^1(\beta, \omega)$. Пусть C — компактное множество в пространстве параметров α, β, ω , не содержащее точек, в которых $\omega = 0$. Пусть далее $\{U_j\}$, $j = 1, \dots, N$ — семейство открытых связных множеств в пространстве параметров, покрывающее C , $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, N$ — разбиение единицы, отвечающее покрытию $\{U_j\}$:

$$e_j(\alpha, \beta, \omega) \in C_0^\infty; \quad \sum_{j=1}^N e_j(\alpha, \beta, \omega) = 1 \quad \text{при} \quad (\alpha, \beta, \omega) \in C.$$

Очевидно, покрытие $\{U_j\}$ компактного множества C можно выбрать так, чтобы для любого j выполнялось одно из следующих двух условий:

а) $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega) \neq 0$ при $(\alpha, \beta, \omega) \in U_j$,

б) $\frac{\partial p}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega) \neq 0$ при $(\alpha, \beta, \omega) \in U_j$.

Разобьем множество номеров $1, 2, \dots, N$ на два класса I_1 и I_2 , так, чтобы при $j \in I_1$ выполнялось условие а), а при $j \in I_2$ выполнялось условие б). Семейство $\{U_j\}$ вместе с парой $\{I_1, I_2\}$ мы будем называть каноническим атласом окрестности множества C в пространстве параметров; множество U_j при $j \in I_1$ будем называть неособой картой этого атласа, а при $j \in I_2$ — особой картой. Каждой неособой карте U_j отвечает функция $\alpha_j(x, \beta, \omega)$ — решение уравнения

$$x = x(\alpha, \beta, \omega), \quad (\alpha, \beta, \omega) \in U_j$$

относительно α , а особой карте $U_{j'}$ — функция $\alpha_{j'}(p, \beta, \omega)$ — решение уравнения

$$p = p(\alpha, \beta, \omega), \quad (\alpha, \beta, \omega) \in U_{j'}.$$

Канонический атлас $\{U_j\}$, I_1, I_2 окрестности компактного множества C в пространстве параметров всегда можно выбрать так, чтобы для любых $j_1 \in I_1, j_2 \in I_2$ пересечение $U_{j_1} \cap U_{j_2}$ было связно; мы будем предполагать, что это условие выполнено. Назовем индексом пересечения неособой карты U_{j_1} и особой карты U_{j_2} , имеющих непустое пересечение, число

$$\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} = -\frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \frac{\frac{\partial p}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega)}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega)} \right) \Big|_{(\alpha, \beta, \omega) \in U_{j_1} \cap U_{j_2}}$$

Положим по определению:

$$\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} = -\sigma_{U_{j_2} \cap U_{j_1}}.$$

Если же обе карты U_{j_1} и U_{j_2} являются неособыми или особыми,

то положим

$$\sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} = 0.$$

Пусть $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ — такая конечная последовательность карт канонического атласа, что любые две последовательные карты этой последовательности пересекаются. Такую конечную последовательность назовем цепочкой карт. Индексом этой цепочки карт назовем число

$$\text{ind}(j_1, \dots, j_m) = \sigma_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} + \dots + \sigma_{U_{j_{m-1}} \cap U_{j_m}}.$$

С помощью индекса цепочки карт введем индекс произвольного пути l в пространстве параметров (α, β, ω) , начинающегося и кончающегося в точках, лежащих в некоторых неособых картах. Пусть $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ — такая цепочка карт, начинающаяся и кончающаяся неособыми картами, что путь l разбивается на сумму сегментов

$$l = l_1 + \dots + l_m,$$

удовлетворяющих условию $l_\mu \subset U_{j_\mu}$. Тогда назовем индексом пути l число

$$\gamma[l] = \text{ind}(j_1, \dots, j_m).$$

Данное определение индекса пути l корректно, т. е. не зависит от выбора цепочки карт $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ и разбиения пути l на сегменты $l_1, \dots, l_m$.

Для того, чтобы убедиться в этом, прежде всего предположим, что при том же разбиении пути l на сегменты мы используем для определения его индекса другую цепочку карт $U_{j'_1}, \dots, U_{j'_m}$.

Тогда

$$\text{ind}(j_1, \dots, j_m) = \text{ind}(j'_1, \dots, j'_m). \quad (6.5)$$

Действительно, пусть M_μ — конец сегмента l_μ . Положим

$$\sigma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \text{sign} \frac{\frac{\partial p}{\partial \alpha}(M_\mu)}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}(M_\mu)} \right),$$

если $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(M_\mu) \neq 0$, $\frac{\partial p}{\partial \alpha}(M_\mu) \neq 0$ и $\sigma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} 0$ в противном случае. Представим себе путь l в виде дороги, на каждом участке l_μ которой имеется шоссе (неособая карта) или канал (особая карта) (или и то и другое). В точках находятся станции пересадки с автомобиля на теплоход (если из этой точки выходят и шоссе и канал). Путник начинает и оканчивает свой путь на автомобиле. В каждом пункте пересадки он имеет право пересест на другой вид транспорта. При пересадке на теплоход ему выплачивают сумму σ_μ за потерю скорости, а при пересадке на автомобиль он

платит сумму σ_μ . Величина выплаты не меняется вдоль каждого участка, где проходят совместно шоссе и канал. Ясно, что суммарная выплата за весь путь не зависит от того, какую схему пересадок выберет путник, а это и означает, что равенство (6.5) справедливо. Остается заметить, что индекс пути не изменяется при дроблении сегмента l_μ на части, так как при этом можно в цепочке карт несколько раз повторить особую или неособую карту.

Из определения индекса пути следует, что $\gamma[l]$ не изменяется при непрерывной деформации l , если концы пути остаются неподвижными. Поскольку в нашем случае параметр α изменяется на некотором отрезке вещественной прямой, то любой замкнутый путь l в пространстве параметров α, β, ω можно непрерывной деформацией перевести в точку. Значит $\gamma[l] = 0$ для любого замкнутого пути l , откуда следует, что индекс пути зависит только от его начальной и конечной точек.

Отсюда следует, что индекс цепочки карт, начинающейся и кончающейся неособыми картами, зависит только от первой и последней карт цепочки. Аналогично доказывается этот же факт для произвольной цепочки карт.

3. Определение канонического оператора. Теперь мы можем определить канонический оператор K на семействе кривых $\{M^1(\beta, \omega)\}$. Зафиксируем точку P_0 в пространстве параметров, и пусть эта точка лежит в некоторой неособой карте U_{j_0} . Для любой функции $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ с носителем, содержащимся в множестве C , положим по определению

$$\begin{aligned} [K\varphi](x, \beta, \omega) = & \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \times \\ & \times \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} e_j(\alpha, \beta, \omega) \varphi(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha=\alpha_j(x, \beta, \omega)} + \\ & + \sum_{j \in I_2} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\rho x - \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega))} \times \\ & \times \left| \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} e_j(\alpha, \beta, \omega) \varphi(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha=\alpha_j(\rho, \beta, \omega)} d\rho, \quad (6.6) \end{aligned}$$

где γ_j — индекс цепочки карт, начинающейся картой U_{j_0} и кончающейся картой U_j .

Определенный формулой (6.6) канонический оператор K зависит (кроме выбора начальной точки P_0 и произвола в определении действия S , связанного с возможностью перепараметризации семейства кривых) от выбора канонического атласа $\{U_j\}$ и разбиения единицы $\{e_j\}$.

Пусть $A_1, \dots, A_{n+2}$ — производящие операторы, действующие в банаховом пространстве B . Рассмотрим оператор

$$[K\varphi] \left(\overset{k}{A_1}, \overset{2}{A_2}, \dots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \overset{k+1}{A_{k+1}}, \dots, \overset{n+2}{A_{n+1}}, \overset{1}{A_{n+2}} \right).$$

Определение. Будем говорить, что упорядоченный набор производящих операторов $A = (A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_{n+1}, A_{n+2})$, действующих в B , согласуется с семейством кривых $M^1(\beta, \omega)$, лежащих в фазовой плоскости (x, p) , если для любой неособой карты U в пространстве параметров α, β, ω — семейства кривых $M^1(\beta, \omega)$ — и любой бесконечно дифференцируемой функции $\chi(\alpha, \beta, \omega)$ с носителем, содержащимся в U , оператор $\Phi(A)$, отвечающий символу

$$\Phi(x, \beta, \omega) = \chi(\alpha(x, \beta, \omega), \beta, \omega) e^{i\omega S(\alpha(x, \beta, \omega), \beta, \omega)},$$

ограничен в B .

Теорема 6.1. Пусть K и K' — два канонических оператора на семействе $\{M^1(\beta, \omega)\}$, отвечающие различным каноническим атласам $\{U_j\}_{j \in I}, I_1, I_2$ и $\{U'_j\}_{j \in I'}, (I'_1, I'_2)$ окрестности компактного множества C в пространстве параметров и разбиения единицы $\{e_j\}_{j \in I}, \{e'_j\}_{j \in I'}$ соответственно. Пусть далее набор производящих операторов

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1}, A_{n+2}),$$

действующих в банаховом пространстве B и таких, что операторы $A_1, \dots, A_k$ коммутируют друг с другом и с операторами A_{n+2} , а операторы $A_{k+1}, \dots, A_{n+1}$ коммутируют друг с другом и с оператором A_1 , согласован с семейством $\{M^1(\beta, \omega)\}$. Тогда для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ с носителем, содержащимся в C , оператор

$$\{[K\varphi](A) - [K'\varphi](A)\} A_{n+2}$$

ограничен в B .

Доказательство этой теоремы опирается на соотношение (6.4) и проводится аналогично доказательству теоремы § 4.

Замечание. В дальнейшем нам понадобится зависимость и от переводящего оператора. Этот случай аналогичен рассмотренному. Пусть для простоты $n=1$. В теореме 6.1 можно заменить вектор-оператор A на вектор-оператор

$$(A_3, A_2, T, A_1),$$

где A_2 коммутирует с A_3 , а $T: B \rightarrow B$ — переводящий оператор, или — на вектор-оператор

$$(A_3, T, A_2, A_1),$$

где A_2 коммутирует с A_1 .

§ 7. V-объекты на кривой

1. **Определение пространств L_A и L_Σ .** Пусть M^1 — бесконечно гладкая кривая в плоскости R^2 и пусть на этой плоскости фиксированы декартовы координаты x, y . Если открытая дуга U кривой M^1 диффеоморфно проектируется на ось x , то на этой дуге можно выбрать x в качестве параметра; если такой выбор сделан, то мы будем называть U неособой картой кривой M^1 . Аналогично, дуга кривой M^1 , на которой выбрано y в качестве параметра, будет называться особой картой кривой M^1 .

Назовем полным каноническим атласом $\mathcal{A}_\infty$ кривой M^1 совокупность всех неособых и особых карт этой кривой. Назовем конечным каноническим атласом кривой M^1 любое конечное семейство $\{U_j\}_{j=1, \dots, N}$ карт полного канонического атласа $\mathcal{A}_\infty$, покрывающее M^1 . Будем предполагать, что конечные атласы кривой M^1 существуют (например, M^1 — компактная кривая).

Пусть $\mathcal{A}_N$ — множество неособых карт атласа $\mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}_0$ — множество особых карт этого атласа. Каждая карта $U \in \mathcal{A}_N$ определяется уравнением

$$y = y_U(x),$$

а каждая карта $U \in \mathcal{A}_0$ определяется уравнением

$$x = x_U(y).$$

Очевидно, задание двух семейств функций

$$\{y_U\}_{U \in \mathcal{A}_N}, \{x_U\}_{U \in \mathcal{A}_0}$$

эквивалентно заданию кривой M^1 .

Пусть для любых двух пересекающихся карт $U \in \mathcal{A}_N$, $U' \in \mathcal{A}_0$ задан линейный оператор V_U, U' , действующий на бесконечно дифференцируемые функции от y с носителем в проекции пересечения $U \cap U'$ на ось y и переводящий их в бесконечно дифференцируемые функции от x с носителем в проекции пересечения $U \cap U'$ на ось x . Потребуем выполнения следующих двух аксиом.

V_1 (локальность операторов V_U, U'). Значение функции $V_U, U' \varphi$ в точке x зависит только от ростка функции φ в точке $y_U(x)$ (т. е. только от сужения функции φ на сколь угодно малую окрестность точки $y_U(x)$).

V_2 (условия согласования)

$$[V_{U_1, U_1'} \varphi](x_0) = [V_{U_2, U_2'} \varphi](x_0)$$

для любой функции φ с носителем, лежащим в проекции пересечения $U_1 \cap U_2$ на ось y , и любой точки x_0 из проекции пересечения $U_1 \cap U_2$ на ось x .

Пусть $\mathcal{A} = \{U_j\}$ — конечный атлас кривой M^1 , I_1 — множество номеров неособых карт, I_2 — множество номеров особых карт этого

атласа. Рассмотрим тройку:

$$\varphi = (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(y)\}_{j \in I_2}), \quad (7.1)$$

где $\varphi_j(x)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в проекции U_j на ось x , $\varphi_j(y)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в проекции U_j на ось y . Множество всевозможных элементов φ вида (7.1) становится при фиксированном $\mathcal{A}$ векторным пространством, если ввести на нем линейные операции по формулам

$$\begin{aligned} \lambda\varphi &= (\mathcal{A}, \{\lambda\varphi_j(x)\}_{j \in I_1}, \{\lambda\varphi_j(y)\}_{j \in I_2}), \\ (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}, \{\varphi_j(y)\}) + (\mathcal{A}, \{\psi_j(x)\}, \{\psi_j(y)\}) &= \\ &= (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x) + \psi_j(x)\}, \{\varphi_j(y) + \psi_j(y)\}). \end{aligned}$$

Полученное векторное пространство обозначим через $L_{\mathcal{A}}$. Обозначим через L_{Σ} объединение всевозможных множеств $L_{\mathcal{A}}$.

2. Определение V-объектов. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi &= (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(y)\}_{j \in I_2}), & \mathcal{A} &= \{U_j\}, \\ \psi &= (\mathcal{A}', \{\psi_j(x)\}_{j \in I'_1}, \{\psi_j(y)\}_{j \in I'_2}), & \mathcal{A}' &= \{U'_j\} \end{aligned}$$

— два элемента из L_{Σ} . Рассмотрим следующие 4 функции на M^1 :

$$\begin{aligned} \varphi_H(x, y) &= \sum_{\substack{j \in I_1 \\ (x, y) \in U_j}} \varphi_j(x), & \varphi_0(x, y) &= \sum_{\substack{j \in I_2 \\ (x, y) \in U_j}} \varphi_j(y), \\ \psi_H(x, y) &= \sum_{\substack{j \in I'_1 \\ (x, y) \in U'_j}} \psi_j(x), & \psi_0(x, y) &= \sum_{\substack{j \in I'_2 \\ (x, y) \in U'_j}} \psi_j(y). \end{aligned}$$

Будем говорить, что элементы φ и ψ эквивалентны и писать $\varphi \equiv \psi$, если эти элементы удовлетворяют следующим условиям:

а) существует такое конечное множество Δ пар (U, U') , где $U \in \mathcal{A}_H$, $U' \in \mathcal{A}'_0$, что для двух различных пар (U_1, U'_1) , (U_2, U'_2) из Δ пересечение $U_1 \cap U'_1 \cap U_2 \cap U'_2$ пусто, и

$$\varphi_H - \psi_H = \sum_{(U, U') \in \Delta} \alpha_{U, U'}, \quad \varphi_0 - \psi_0 = \sum_{(U, U') \in \Delta} \beta_{U, U'},$$

где $\alpha_{U, U'}$, $\beta_{U, U'}$ — бесконечно дифференцируемые функции с носителями, лежащими в $U \cap U'$;

б) для любой пары $(U, U') \in \Delta$ имеет место равенство

$$\alpha_{U, U'}(x, y_U(x)) + V_{U, U'}[\beta_{U, U'}(x_{U'}(y), y)](x) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ фактормножество L_{Σ} по отношению эквивалентности $\equiv$.

Введем на $\mathcal{L}$ структуру векторного пространства. Для этого прежде всего заметим, что если $\varphi, \psi \in L_{\Sigma}$, то найдутся такие $\varphi', \psi' \in L_{\Sigma}$, что $\varphi \equiv \varphi'$, $\psi \equiv \psi'$ и атласы, отвечающие элементам φ'

и ψ' , совпадают. Такие элементы φ' и ψ' можно складывать. Определим сумму классов эквивалентности $\{\varphi\}$ и $\{\psi\}$ формулой

$$\{\varphi\} + \{\psi\} = \{\varphi' + \psi'\}. \quad (7.2)$$

Легко видеть, что определение (7.2) не приводит к неоднозначности суммы. Произведение класса $\{\varphi\}$ на скаляр определим обычным образом:

$$\lambda\{\varphi\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda\varphi\}.$$

Введенное нами векторное пространство $\mathcal{L}$ будем называть пространством V -объектов на кривой M .

Пример. Функции на кривой как V -объекты.

Рассмотрим на M' V -объект, отвечающий следующему семейству «операторов перехода» $V_{U,U'}$: если U — неособая карта атласа $\mathcal{A}_\infty$ и U' — пересекающаяся с ней особая карта, то

$$V_{U,U'}\varphi(y) = \varphi(y_U(x)), \quad V_{U',U}\varphi(x) = \varphi(x_{U'}(y)). \quad (7.3)$$

Пусть φ — V -объект, отвечающий семейству операторов перехода (7.3) и являющийся классом эквивалентности, содержащим элемент

$$(\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}, \{\varphi_j(y)\})$$

множества L_Σ . Поставим в соответствие объекту φ функцию $\bar{\varphi}$ на M^1 , определенную формулой

$$\bar{\varphi}(x_0, y_0) = \sum_{i \in K_1} \varphi_i(x_0) + \sum_{i \in K_2} \varphi_i(y_0), \quad (7.4)$$

где K_1 — множество номеров неособых, а K_2 — множество номеров особых карт атласа $\mathcal{A}$, содержащих точку $(x_0, y_0) \in M^1$. Из формул (7.3) следует, что определение функции $\bar{\varphi}$ не зависит от выбора представителя объекта φ в L_Σ .

Обратно, пусть $\bar{\varphi}$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем на M^1 и пусть $\mathcal{A}$ — конечный атлас на M^1 . Рассмотрим какое-нибудь разбиение единицы $\{e_j\}$, подчиненное атласу $\mathcal{A}$:

$$e_j \in C^\infty(M), \quad \text{supp } e_j \subset U_j, \quad \sum_{j=1}^N e_j = 1;$$

тогда каждая функция $\bar{\varphi}_j = e_j \bar{\varphi}$ имеет носитель, содержащийся в U_j . Если U_j — неособая карта атласа $\mathcal{A}$, то положим

$$\varphi_j(x) = \bar{\varphi}_j(x, y_{U_j}(x)), \quad (7.5)$$

а если U_j — особая карта, то

$$\varphi_j(y) = \bar{\varphi}_j(x_{U_j}(y), y). \quad (7.6)$$

Формулы (7.5) — (7.6) ставят в соответствие функции $\bar{\varphi}$ такой эле-

мент $(\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}, \{\varphi_j(y)\})$ множества $L_{\mathcal{L}}$, что справедливо равенство (7.4). Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathcal{L}$ V -объектов, отвечающих операторам перехода (7.4), и пространством $C_0^\infty(M^1)$. В дальнейшем мы будем отождествлять V -объект φ и соответствующую ему функцию $\bar{\varphi}$.

3. Линейные операторы на пространстве V -объектов. Опишем теперь способ, которым мы будем задавать линейные операторы на пространстве V -объектов $\mathcal{L}$. Так как $\mathcal{L}$ — фактормножество, то естественно сначала задать некоторый оператор A_0 на множестве $L_{\mathcal{L}}$, а затем поставить ему в соответствие, как обычно, оператор A на $\mathcal{L}$ по формуле

$$A\{f\} = \{A_0 f\}. \quad (7.7)$$

Разумеется, для того, чтобы формула (7.7) действительно определяла оператор A на $\mathcal{L}$, необходимо, чтобы оператор A_0 был согласован с отношением эквивалентности $\equiv$:

$$(f \equiv g) \rightarrow (A_0 f \equiv A_0 g).$$

Если мы хотим задать линейный оператор на $\mathcal{L}$, то обычный подход состоит в том, чтобы сначала задать линейный оператор A_0 на $L_{\mathcal{L}}$. Однако $L_{\mathcal{L}}$ не имеет структуры векторного пространства. Поэтому назовем оператор A_0 , действующий в $L_{\mathcal{L}}$, линейным, если для каждого конечного атласа $\mathcal{A}$ кривой M^1 сужение оператора A_0 на $L_{\mathcal{A}}$ есть линейный оператор, действующий в $L_{\mathcal{A}}$. Структура векторного пространства на $\mathcal{L}$ введена таким образом, что линейному в вышеописанном смысле оператору A_0 на $L_{\mathcal{L}}$ отвечает линейный оператор A на $\mathcal{L}$.

Описанный способ задания линейных операторов на $\mathcal{L}$ является еще недостаточно гибким. Можно рассматривать также операторы A_0 , определенные не на всем $L_{\mathcal{L}}$. Достаточно предположить, что оператор A_0 определен на объединении такого семейства $\{L'_{\mathcal{A}}\}$ линейных подпространств $A_0 L'_{\mathcal{A}} \subset L'_{\mathcal{A}}$, что $L'_{\mathcal{A}} \subset L_{\mathcal{A}}$, причем для любого $\varphi \in \mathcal{L}$ найдется представитель в одном из подпространств $L'_{\mathcal{A}}$.

Пример. Дифференциальные операторы на кривой.

Снова рассмотрим пространство $C_0^\infty(M^1)$ как пространство V -объектов на M^1 . Зафиксируем произвольный конечный атлас $\mathcal{A}$ на M^1 и разбиение единицы $\{e_j\}$, подчиненное этому атласу, которое мы будем называть весовым разбиением единицы.

Рассмотрим в пространстве $L_{\mathcal{A}}$ линейное подпространство $L'_{\mathcal{A}}$, состоящее из элементов вида

$$(\mathcal{A}, \{e_j(x, y_U(x)) \varphi(x, y_U(x))\}, \{e_j(x_U(y), y) \varphi(x_U(y), y)\}),$$

где φ — произвольная функция из $C_0^\infty(M^1)$. Очевидно, что для любой

функции $\varphi \in C_0^\infty(M')$, найдется ее представитель в $L'_{\mathcal{A}}$. Пусть I_1 — множество номеров неособых карт, I_2 — множество номеров особых карт атласа $\mathcal{A}$. Дифференциальный оператор L , действующий в $C_0^\infty(M^1)$, мы определим с помощью наборов операторов $\{L_j\}_{j \in I_1}$, $\{L_j\}_{j \in I_2}$ с дифференцируемыми коэффициентами по формулам

$$(\mathcal{A}, \{\psi_j(x)\}, \{\psi_j(y)\}) = L(\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}, \{\varphi_j(y)\}), \quad (7.8)$$

$$\psi_j(x) = L_j \varphi_j(x), \quad j \in I_1, \quad (7.9)$$

$$\psi_j(y) = L_j \varphi_j(y), \quad j \in I_2.$$

Для того, чтобы определить псевдодифференциальные операторы на M^1 , мы введем соболевские пространства $W_2^k(M^1)$. Пусть снова зафиксированы конечный атлас $\mathcal{A}$ и весовое разбиение единицы $\{e_j\}$. Положим для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(M^1)$:

$$\|\varphi\|_{W_2^k(M^1)} = \sum_{j \in I_1} \|\varphi_j(x)\|_{W_2^k(\mathbb{R})} + \sum_{j \in I_2} \|\varphi_j(y)\|_{W_2^k(\mathbb{R})}, \quad (7.10)$$

где $\varphi_j(x)$, $\varphi_j(y)$ — компоненты представителя функции φ в подпространстве $L'_{\mathcal{A}}$.

Задача. Доказать, что в случае, когда кривая M^1 компактна, нормы вида (7.10), отвечающие различным конечным каноническим атласам и различным весовым разбиениям единицы, эквивалентны.

Пример. Псевдодифференциальные операторы на кривой.

Определим пространство $W_2^k(M^1)$ как пополнение векторного пространства $C_0^\infty(M^1)$ по норме (7.10). Элементы пространств $W_2^k(M^1)$ будем называть обобщенными функциями на M^1 .

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(M^1)$, $(\mathcal{A}, \{\varphi_j(x)\}, \{\varphi_j(y)\})$ — представитель φ в $L'_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим два семейства псевдодифференциальных операторов:

$$\left\{ H_j \left(x, -i \frac{d}{dx} \right) \right\}_{j \in I_1}, \quad \left\{ H_j \left(y, -i \frac{d}{dy} \right) \right\}_{j \in I_2}, \quad (7.11)$$

символы которых H_j удовлетворяют условию

$$\frac{H_j(\xi, \eta)}{(\eta + i)^m} \chi(\xi) \in \mathcal{B}_{s,0}(\mathbb{R}^2) \quad (7.12)$$

для любого $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Операторы этого семейства переводят пространство S в себя. Предположим еще, что операторы $H_j(x, -i d/dx)$, $H_j(y, -i d/dy)$ не расширяют носителя функции, на которую они действуют (например, дифференциальные операторы; не годится оператор с символом $H(\xi, \eta) = e^\eta$). Поставим в соответствие семействам функций $\{\varphi_j(x)\}_{j \in I_1}$, $\{\varphi_j(y)\}_{j \in I_2}$ новые два семейства $\{\psi_j(x)\}_{j \in I_1}$, $\{\psi_j(y)\}_{j \in I_2}$ по формулам

$$\psi_j(x) = H_j \left(x, -i \frac{d}{dx} \right) \varphi_j(x), \quad \psi_j(y) = H_j \left(y, -i \frac{d}{dy} \right) \varphi_j(y).$$

Тогда

$$(\mathcal{A}, \{\psi_j(x)\}_{j \in I_1}, \{\psi_j(y)\}_{j \in I_2})$$

принадлежит пространству $L_{\mathcal{A}}$. Тем самым определен некоторый оператор $H: C_0^\infty(M^1) \rightarrow C_0^\infty(M^1)$. Из условий (7.12) следует, что H ограничен как оператор, действующий из $W_2^{l+m}(M^1)$ в $W_2^l(M^1)$, где $|l| \leq s$. Расширение оператора H до гомоморфизма $W_2^{l+m}(M^1) \rightarrow W_2^l(M^1)$ естественно рассматривать как псевдодифференциальный оператор, отвечающий семейству символов $H_j(\xi, \eta)$.

§ 8. Канонический оператор на семействе незамкнутых кривых

В этом параграфе будет построен класс канонических операторов с точностью до $O(1/\omega^N)$, где N — любое число.

1. V -объекты для канонического оператора. Пусть уравнения

$$x = x(\alpha, \beta, \omega), \quad p = p(\alpha, \beta, \omega)$$

определяют семейство $\{M^1(\beta, \omega)\}$ бесконечно гладких кривых, в фазовой плоскости x, p , удовлетворяющее условиям, описанным в § 6. Пусть C — компактное множество в пространстве параметров α, β, ω , не содержащее точек, в которых $\omega = 0$. В § 6 мы ввели понятие канонического атласа окрестности множества C в пространстве параметров. Назовем полным каноническим атласом пространства параметров множество всех неособых и особых карт всех канонических атласов, отвечающих всевозможным компактным множествам C .

Перейдем теперь к определению объектов, к которым будет применяться канонический оператор $\mathcal{H}_1$. Это будут некоторые V -объекты в пространстве параметров. Мы допустим некоторые отклонения от общих определений, данных в предыдущем параграфе, что связано с желанием не загромождать определения § 7 излишними подробностями, чтобы они не потеряли наглядности. Опишем упомянутые отклонения. В определениях предыдущего параграфа нужно заменить полный канонический атлас кривой на полный канонический атлас пространства параметров, конечный канонический атлас кривой — на канонический атлас окрестности компактного множества C в пространстве параметров. Элементы пространства $L_{\mathcal{A}}$ будут иметь в качестве компонент функции

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, \beta, \omega), \quad j \in I_1, \\ \varphi_j(p, \beta, \omega), \quad j \in I_2, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где I_1 — множество номеров неособых карт, I_2 — множество номеров особых карт атласа A . При этом мы будем отождествлять такие функции (8.1), которые отличаются только на $O(\omega^{-l-1})$, т. е. такие, разность которых есть произведение ω^{-l-1} на

бесконечно дифференцируемую функцию; для карты, содержащей точку $\omega = \infty$, отождествлять любые две функции (8.1), если точки, в которых $\omega = \infty$, в карте отсутствуют. Иными словами, мы производим соответствующую факторизацию в каждом пространстве $L_{\mathcal{A}}$. В силу этой предварительной факторизации нужно очевидным образом видоизменить условия, которые определяют отношение эквивалентности $\equiv$.

Определим операторы перехода $V_{U, U'}$, которые переводят функции от x, β, ω в функции переменных p, β, ω , если U' — неособая, а U — особая карта, и функции от p, β, ω — в функции от x, β, ω , если U' — особая, а U — неособая карта. Пусть U — неособая, U' — особая карта атласа $\mathcal{A}_{\infty}$. Карте U отвечает функция $\alpha_U(x, \beta, \omega)$, которая удовлетворяет уравнению $x = x(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)$, а карте U' — функция $\alpha_{U'}(p, \beta, \omega)$, удовлетворяющая уравнению $p(\alpha_{U'}(p, \beta, \omega), \beta, \omega) = p$. Пусть $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в $U' \cap U$,

$$\bar{\varphi}(p, \beta, \omega) = \varphi(\alpha_U(p, \beta, \omega), \beta, \omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$I(x, \beta, \omega) = \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega p \cdot x - i\omega \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega)} \times \\ \times \left| \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \varphi(\alpha, \beta, \omega) |_{\alpha=\alpha_{U'}(p, \beta, \omega)} dp,$$

где действие $\tilde{S}(\alpha, \beta, \omega)$ определено формулами (6.3). Вычисляя интеграл $I(x, \beta, \omega)$ по методу стационарной фазы (при $x = x(\alpha, \beta, \omega)$, $(\alpha, \beta, \omega) \in U \cap U'$), получаем

$$I(x, \beta, \omega) = (i \operatorname{sign} \omega)^{\sigma} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{i\sigma_0}{2\omega} \right)^l e^{i\omega S(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} \times \right. \\ \times \left. \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} |_{\alpha=\alpha_U(x, \beta, \omega)} \chi_l(x, \beta, \omega) \right\} + r_{l+1}(x, \beta, \omega) e^{i\omega S(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)},$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) / \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \right) |_{(\alpha, \beta, \omega) \in U \cap U'},$$

$$\sigma_0 = -\operatorname{sign} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) / \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) |_{(\alpha, \beta, \omega) \in U \cap U'}$$

и функция $\omega^{l+1} r_{l+1}(x, \beta, \omega)$ принадлежит любому из пространств $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_{n+r}}(\mathbb{R}^{n+2})$. Что же касается функций χ_l , то в силу метода стационарной фазы $\chi_l(x, \beta, \omega)$ при фиксированной функции $\tilde{S}$ зависит только от значений функций φ и ее производных по α до l -го порядка включительно в точке $(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)$.

Мы определим оператор $V_{U,U'}$ так, чтобы было выполнено равенство

$$I(x, \beta, \omega) = e^{i\omega S(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} \left\{ (i \operatorname{sign} \omega)^\sigma \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_U(x, \beta, \omega)}^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times [V_{U,U'} \bar{\varphi}](x, \beta, \omega) + r_{l+1}(x, \beta, \omega) \right\}.$$

Иными словами, положим

$$[V_{U,U'} \bar{\varphi}](x, \beta, \omega) = \sum_{j=0}^l \left(\frac{i\sigma}{2\omega} \right)^j \chi_j(x, \beta, \omega). \quad (8.2)$$

2. Построение канонического элемента. Рассмотрим пространство $\mathcal{L}$ V -объектов в пространстве параметров α, β, ω , отвечающих определенному в данном параграфе семейству операторов перехода $V_{U,U'}$. Векторы из пространства $\mathcal{L}$ мы будем называть каноническими элементами.

Опишем стандартный способ построения канонического элемента. Пусть $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в компактном множестве C , $\mathcal{A} = (U_j)_{j \in I}$ — канонический атлас окрестности множества C , $\{e_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{A}$, которое мы будем называть весовым:

$$e_j \in C^\infty, \operatorname{supp} e_j \subset U_j, \sum e_j(\alpha, \beta, \omega) = 1, (\alpha, \beta, \omega) \in C.$$

Функции φ , атласу $\mathcal{A}$ и весовому разбиению единицы $\{e_j\}$ поставим в соответствие канонический элемент с помощью следующей процедуры: пусть $\mathcal{A}' = (U'_j)_{j \in I'}$ — произвольный канонический атлас окрестности множества C , $\{e'_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{A}'$; положим

$$\varphi_j(x, \beta, \omega) = e'_j(\alpha, \beta, \omega) e_n(\alpha, \beta, \omega) \varphi(\alpha, \beta, \omega) |_{\alpha=\alpha_{U'_j}(x, \beta, \omega)}, j \in I'_1, \quad (8.3)$$

$$\varphi_j(p, \beta, \omega) = e'_j(\alpha, \beta, \omega) e_0(\alpha, \beta, \omega) \varphi(\alpha, \beta, \omega) |_{\alpha=\alpha_{U'_j}(p, \beta, \omega)}, j \in I'_2,$$

где

$$e_n = \sum_{j \in I_1} e_j, \quad e_0 = \sum_{j \in I_2} e_j,$$

I_1 — множество номеров неособых карт атласа $\mathcal{A}$, I_2 — множество номеров особых карт атласа $\mathcal{A}$, I'_1, I'_2 — множество номеров соответственно неособых и особых карт атласа $\mathcal{A}'$. Таким образом, мы для каждого канонического атласа $\mathcal{A}'$ окрестности C определили элемент

$$\varphi_{\mathcal{A}'} = (\varphi_j(x))_{j \in I'_1}, \quad (\varphi_j(p))_{j \in I'_2}$$

пространства $L_{\mathcal{A}'}$. Предоставляем читателю убедиться в том, что для любых канонических атласов $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ имеет место эквивалентность $\varphi_{\mathcal{A}'} \equiv \varphi_{\mathcal{A}''}$, так что все элементы вида $\varphi_{\mathcal{A}'}$ определяют один и тот же класс $\{\varphi_{\mathcal{A}'}\} \in \mathcal{L}$.

Пусть $k_1, \dots, k_{n+2}$ — такие целые неотрицательные числа, что $l > k_1 + \dots + k_{n+1}$. Введем в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от x, β, ω следующее отношение эквивалентности $\approx: \varphi(x, \beta, \omega) \approx \psi(x, \beta, \omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega^{l-k_1-\dots-k_{n+1}} [\varphi(x, \beta, \omega) - \psi(x, \beta, \omega)] \in \mathcal{B}_{k_1, \dots, k_{n+2}}(\mathbb{R}^{n+2}).$$

Соответствующее отношению эквивалентности $\approx$ факторпространство обозначим через $S^{k_1, \dots, k_{n+2}, l}$. Допуская обычную неточность обозначений, мы будем обращаться с элементами пространства $S^{k_1, \dots, k_{n+2}, l}$ как с функциями от x, β, ω , имея при этом в виду их представители в $C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$. Точно так же мы будем часто пользоваться такими обозначениями и выражениями, будто компоненты $\varphi_j(x), \varphi_j(p)$ элемента из L_Σ являются функциями, а не классами эквивалентных функций.

3. Определение канонического оператора. Теперь мы можем определить канонический оператор K_l на семействе кривых $M^1(\beta, \omega)$ с фиксированной параметризацией и фиксированной «начальной» точкой P_0 в пространстве параметров, действующий из L_Σ в $S^{k_1, \dots, k_{n+2}, l}$. Пусть $\mathcal{A}$ — канонический атлас окрестности компактного множества C в пространстве параметров, I_1 — множество номеров неособых карт атласа $\mathcal{A}$, I_2 — множество номеров особых карт этого атласа. Пусть P_0 принадлежит неособой карте $U_{j_0} \in \mathcal{A}$, а γ — индекс цепочки карт атласа $\mathcal{A}$, начинающейся картой U_{j_0} и кончающейся картой U_j .

Определение. Для любого элемента

$$\varphi = (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x, \beta, \omega)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(p, \beta, \omega)\}_{j \in I_2})$$

пространства L_Σ положим

$$\begin{aligned} [K_l \varphi](x, \beta, \omega) &= \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \times \\ &\times \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \Big|_{\alpha = \alpha_{U_j}(x, \beta, \omega)} \varphi_j(x) + \sum_{j \in I_2} (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma_j} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega((p, x) - \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega))} \left| \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \Big|_{\alpha = \alpha_{U_j}(p, \beta, \omega)} \varphi_j(p) dp. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Задача. Показать, что определение корректно в том смысле, что если

$$\begin{aligned} \varphi' &= (\mathcal{A}, \{\varphi'_j(x, \beta, \omega)\}, \{\varphi'_j(p, \beta, \omega)\}), \\ \varphi'' &= (\mathcal{A}, \{\varphi''_j(x, \beta, \omega)\}, \{\varphi''_j(p, \beta, \omega)\}) \end{aligned}$$

— два представителя одного и того же элемента $\varphi \in L_\Sigma$, то $K_l \varphi' = K_l \varphi''$.

Теорема 8.1. Пусть $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ и $\varphi \equiv \psi$. Тогда

$$K_l \varphi = K_l \psi.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что без уменьшения общности можно считать, что φ и ψ принадлежат одному

и тому же пространству $L_{\mathcal{A}}$. Пусть

$$\begin{aligned}\varphi &= (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x, \beta, \omega)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(p, \beta, \omega)\}_{j \in I_2}), \\ \psi &= (\mathcal{A}, \{\psi_j(x, \beta, \omega)\}_{j \in I_1}, \{\psi_j(p, \beta, \omega)\}_{j \in I_2}).\end{aligned}$$

Тогда

$$[K_I \varphi - K_I \psi](x, \beta, \omega) = [K_I(\varphi - \psi)](x, \beta, \omega),$$

причем $\varphi - \psi \equiv 0$. Значит, нужно показать, что

$$(\varphi \equiv 0) \Rightarrow (K_I \varphi = 0).$$

Пусть

$$\varphi = (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x, \beta, \omega)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(p, \beta, \omega)\}_{j \in I_2}), \quad \varphi \equiv 0.$$

Согласно определению отношения эквивалентности $\equiv$ рассмотрим следующие две функции:

$$\begin{aligned}\varphi_n(\alpha, \beta, \omega) &= \sum_{j \in I_1} \varphi_j(x(\alpha, \beta, \omega), \beta, \omega), \\ \varphi_0(\alpha, \beta, \omega) &= \sum_{j \in I_2} \varphi_j(p(\alpha, \beta, \omega), \beta, \omega).\end{aligned}$$

Тогда найдется такое конечное множество Δ пар (U, U') , где U — неособая карта, U' — особая карта атласа $\mathcal{A}_{\infty}$, для которого выполнены следующие условия:

а) для любых двух различных элементов $(U_1, U'_1), (U_2, U'_2)$ множества Δ пересечение $U_1 \cap U'_1 \cap U_2 \cap U'_2$ пусто;

$$\begin{aligned}\text{б)} \quad \varphi_n(\alpha, \beta, \omega) &= \sum_{(U, U') \in \Delta} \mu_{U, U'}(\alpha, \beta, \omega), \\ \varphi_0(\alpha, \beta, \omega) &= \sum_{(U, U') \in \Delta} \nu_{U, U'}(\alpha, \beta, \omega),\end{aligned}$$

где $\mu_{U, U'}$, $\nu_{U, U'}$ — бесконечно дифференцируемые функции с носителями, содержащимися в $U \cap U'$;

в) для любой пары $(U, U') \subset \Delta$

$$\mu_{U, U'}(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega) + [V_{U, U'} \nu_{U, U'}(\alpha_{U'}(p, \beta, \omega), \beta, \omega)](x, \beta, \omega) = 0.$$

Пусть $\gamma(U)$ — индекс цепочки карт, начинающейся картой U_{j_0} и кончающейся картой U . Тогда

$$\begin{aligned}[K_I^p \varphi](x, \beta, \omega) &= \sum_{(U, U') \in \Delta} \{(i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma(U)} e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \times \\ &\times \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \mu_{U, U'}(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha = \alpha_U(x, \beta, \omega)} + \\ &+ (i \operatorname{sign} \omega)^{\gamma(U')} \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p x - \tilde{S}(\alpha, \beta, \omega))} \times \\ &\times \left| \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \nu_{U, U'}(\alpha, \beta, \omega) \Big|_{\alpha = \alpha_{U'}(p, \beta, \omega)} dp\}. \quad (8.5)\end{aligned}$$

В силу метода стационарной фазы каждое слагаемое в правой

части (8.5) имеет вид

$$(i \operatorname{sign} \omega) \gamma(U) e^{i\omega S(\alpha, \beta, \omega)} \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \Big|_{\alpha = \alpha_U(x, \beta, \omega)} \times \\ \times \{ \mu_U, \nu'(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega) + [V_U, \nu' \gamma_U, \nu'(\alpha_U(p, \beta, \omega), \beta, \omega)] \times \\ \times (x, \beta, \omega) \} + e^{i\omega S(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} r_1(x, \beta, \omega) + r_2(x, \beta, \omega),$$

где функция $r_1(x, \beta, \omega)$ имеет носитель, лежащий в области определения функции $\alpha_U(x, \beta, \omega)$, и функции r_1, r_2 удовлетворяют условию

$$\omega^{l+1} r_j(x, \beta, \omega) \in \mathcal{B}_{k_1, \dots, k_{n+2}}(R^{n+2}), \quad j = 1, 2$$

для любых $k_1, \dots, k_{n+2}$. Значит, функция

$$\omega^{l-k_1-\dots-k_{n+1}} [e^{i\omega S(\alpha_U(x, \beta, \omega), \beta, \omega)} r_1(x, \beta, \omega) + r_2(x, \beta, \omega)]$$

принадлежит пространству $\mathcal{B}_{k_1, \dots, k_1}(R^{n+2})$, т. е. эквивалентна нулю. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что оператор K_l индуцирует некоторый оператор из $\mathcal{L}$ в $S_{k_1, \dots, k_{n+2}}^l$. Этот оператор мы и назовем каноническим оператором $\mathcal{K}_l$.

Пусть теперь $A_1, \dots, A_{n+2}$ — производящие операторы степеней $k_1, \dots, k_{n+2}$ соответственно, действующие в банаховом пространстве B и определенные на всюду плотном линейном многообразии D . Оператор

$$[K_l \varphi] \left(A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_s, \dots, A_{n+1}, A_{n+2} \right) A_{n+2}^{l-k_1-\dots-k_{n+1}}$$

ограничен в B , если $\varphi \equiv 0$. Пусть $\tilde{\mathcal{O}}_r$ — пространство линейных операторов в B , определенных на D , факторизованное по следующему отношению эквивалентности $\simeq$: $A' \simeq A''$ тогда и только тогда, когда оператор $(A' - A'') A_{n+2}^{l-k_1-\dots-k_{n+1}}$ ограничен. Если элементы φ' и φ'' из L_2 суть представители одного и того же класса $\varphi \in \mathcal{L}$, то

$$[K_l \varphi'] \left(A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_s, \dots, A_{n+1}, A_{n+2} \right) \simeq \\ \simeq [K_l \varphi''] \left(A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_s, \dots, A_{n+1}, A_{n+2} \right). \quad (8.6)$$

Класс эквивалентных операторов, из $\tilde{\mathcal{O}}_r$, которому принадлежат левая и правая части равенства (8.6), мы будем обозначать

$$[K_l \varphi] \left(A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_s, \dots, A_{n+1}, A_{n+2} \right).$$

§ 9. Канонический оператор на семействе замкнутых кривых

1. Определение канонического оператора K_i на $L_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим семейство замкнутых кривых $M^1(\beta, \omega)$, лежащих в фазовой плоскости (x, p) , задаваемое уравнениями

$$x = x(\alpha, \beta, \omega), \quad p = p(\alpha, \beta, \omega),$$

где α — точка на окружности, $\beta \in \mathbb{R}^n$, ω принадлежит расширенной числовой прямой; функции $x(\alpha, \beta, \omega)$, $p(\alpha, \beta, \omega)$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми, в том числе и при $\omega = \infty$.

Для читателя, незнакомого с теорией многообразий, сделаем пояснения, касающиеся некоторых топологических понятий, относящихся к рассматриваемому в этом параграфе пространству параметров α, β, ω . Сходимость последовательности точек на окружности понимается как сходимость этой последовательности на плоскости, на которой лежит данная окружность. Сходимость последовательности точек расширенной числовой прямой к ∞ понимается очевидным образом. Будем говорить, что последовательность $\{(\alpha_m, \beta_m, \omega_m)\}$ точек пространства параметров сходится к точке (α, β, ω) , если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \beta, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = \omega.$$

После этого понятия замкнутого множества и замыкания множества в пространстве параметров (α, β, ω) определяются так же, как и в $\mathbb{R}^n$. Компактное множество в пространстве параметров (α, β, ω) — это замкнутое множество, содержащееся в некотором множестве вида $|\beta| < \text{const}$. Открытое множество — дополнение замкнутого. Если ввести на окружности в окрестности точки α_0 параметр t , то в окрестности точки $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ пространства параметров каждую функцию от α, β, ω можно рассматривать как функцию от t, β, ω ; это позволяет ввести понятие дифференцируемой функции, определенной на пространстве параметров α, β, ω . В дальнейшем считаем, что из пространства параметров удалены точки, в которых $\omega = 0$.

Так же, как и раньше, вводятся полный канонический атлас $\mathcal{A}_\infty$ и канонический атлас $\mathcal{A}$ окрестности компактного множества.

Пусть $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ — фиксированная точка в пространстве параметров, $C = (U_1, \dots, U_m)$ — цепочка карт, причем $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) \in U_1$. Рассмотрим в карте U_1 функцию $S_1(\alpha, \beta, \omega)$, определенную формулами

$$dS_1(\alpha, \beta, \omega) = p(\alpha, \beta, \omega) \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega) d\alpha, \quad S_1(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = 0;$$

для того, чтобы интерпретировать символы $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $d\alpha$, мы здесь и далее

будем отождествлять текущую точку α на окружности с полярным углом этой точки.

Пусть $(\alpha_1, \beta_1, \omega_1) \in U_1 \cap U_2$. Определим в карте U_2 функцию $S_2(\alpha, \beta, \omega)$ по формулам

$$dS_2(\alpha, \beta, \omega) = p(\alpha, \beta, \omega) \frac{\partial x}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \omega) d\alpha, \quad S_2(\alpha_1, \beta_1, \omega_1) = S_1(\alpha_1, \beta_1, \omega_1).$$

Продолжая эту процедуру, придем к функции $S_m(\alpha, \beta, \omega)$ в U_m , которую мы будем обозначать через $S_l(\alpha, \beta, \omega)$. Определим функцию $\tilde{S}(\alpha, \beta, \omega)$ с помощью формулы

$$\tilde{S}_C(\alpha, \beta, \omega) = -S_C(\alpha, \beta, \omega) + p(\alpha, \beta, \omega) x(\alpha, \beta, \omega).$$

Определим индекс γ_C цепочки карт C так же, как и раньше, в § 6. Кроме того введем V -объекты в пространстве параметров точно так же, как в предыдущем параграфе.

Поставим в соответствие каждой карте U_j атласа $\mathcal{A}$ цепочку C_j карт этого атласа, начинающуюся с карты U_{j_0} , содержащей точку $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$, и кончающуюся картой U_j . Обозначим $\gamma_{C_j} = \gamma_j$, $S_{C_j} = S_j$, $\tilde{S}_{C_j} = \tilde{S}_j$. Определим на $L_{\mathcal{A}}$ канонический оператор K_l следующим образом: пусть

$$\Phi = (\mathcal{A}, \{\varphi_j(x, \beta, \omega)\}_{j \in I_1}, \{\varphi_j(p, \beta, \omega)\}_{j \in I_2});$$

тогда

$$\begin{aligned} [K_l \Phi](x, \beta, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in I_1} (i \operatorname{sign})^{\gamma_j} e^{i\omega S_j(\alpha, \beta, \omega)} \times \\ &\times \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \Big|_{\alpha = \alpha_{U_j}(x, \beta, \omega)} \varphi_j(x, \beta, \omega) + \sum_{j \in I_2} (i \operatorname{sign})^{\gamma_j} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\omega}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\omega(p x - \tilde{S}_j(\alpha, \beta, \omega))} \left| \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right|^{-1/2} \right]_{\alpha = \alpha_{U_j}(p, \beta, \omega)} \varphi_j(p, \beta, \omega) dp. \end{aligned}$$

2. Условие квантования. Справедлива следующая лемма.

Лемма 9.1. Пусть $C = (U_1, \dots, U_m)$, где $U_m = U_1$, — замкнутая цепочка карт атласа $\mathcal{A}_{\infty}$. Тогда γ_C кратно 2.

Доказательство. Индекс замкнутого пути в пространстве параметров равен индексу окружности

$$\beta = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad [x(\alpha, \beta, \omega) - x_0]^2 + [p(\alpha, \beta, \omega) - p_0]^2 = R^2,$$

проходимой на фазовой плоскости целое число раз по или против часовой стрелки. Вычислим индекс окружности; он равен 2. Лемма доказана.

Предположим теперь для простоты, что β — одномерный параметр. Из леммы следует, что функция

$$[K_l \Phi](x, \beta, \omega)$$

не зависит от выбора цепочек карт C_j в точках, удовлетворяющих условию

$$\omega \int_{M^1(\beta, \omega)} p \, dx - \pi \equiv 0 \pmod{2\pi}. \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) связывает при заданном семействе $\{M^1(\beta, \omega)\}$ переменные β и ω . Уравнение (9.1) известно под названием «условие квантования».

Пример. Пусть кривая $M^1(\beta, \omega)$ имеет уравнение $x^2 + p^2 = \beta$. Тогда условие квантования принимает вид

$$\omega \beta - \pi = 0 \pmod{2\pi}. \quad (9.2)$$

Пусть ε — произвольное вещественное число. Положим

$$\beta(\omega) = \frac{2[\varepsilon\omega] + 1}{\omega}, \text{ где } [\varepsilon\omega] \text{ — целая часть } \varepsilon\omega.$$

Если подставить $\beta = \beta(\omega)$ в (9.2), то это условие тождественно удовлетворится. Заметим, что $\beta(\omega)$ — ограниченная функция, терпящая скачки в изолированных точках. Эта ситуация является типичной.

Перейдем к общему случаю. Пусть уравнение

$$\oint_{M^1(\beta, \omega)} p \, dx = \sigma$$

относительно неизвестной β имеет единственное решение

$$\beta = \bar{\beta}(\sigma, \omega),$$

где $\bar{\beta}(\sigma, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем производные всех порядков от $\bar{\beta}$ по ω ограничены. Положим

$$\sigma(\varepsilon, \omega) = \frac{2[\varepsilon\omega] + 1}{\omega},$$

где $[\varepsilon\omega]$ — целая часть числа $\varepsilon\omega$, и обозначим:

$$\beta(\varepsilon, \omega) = \bar{\beta}(\sigma(\varepsilon, \omega), \omega).$$

Тогда подстановка $\beta = \beta(\varepsilon, \omega)$ обращает условие квантования (9.1) в тождество.

Оператор $K_{\text{кв}}$, определенный формулой

$$[K_{\text{кв}}\varphi](x, \varepsilon, \omega) = [K\varphi](x, \beta(\varepsilon, \omega), \omega),$$

назовем *квантованным каноническим оператором*. Квантованный канонический оператор не зависит от выбора цепочек C_j .

3. Регуляризация канонического оператора. Функция $[K_{\text{кв}}\varphi](x, \varepsilon, \omega)$ не является гладкой функцией. Поэтому ее нельзя использовать для построения функции от операторов. Для того чтобы обойти эту трудность, регуляризуем канонический оператор. Пусть r — целое число. С элементом $\varphi \in L_2$ свяжем функцию

$K_{\text{рег}} \Phi$, заданную в $\mathbb{R}^3$ равенством:

$$[K_{\text{рег}} \Phi](x, \varepsilon, \omega) = \omega^{-r} \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon - \varepsilon') [K_{\text{кв}} \Phi](x, \varepsilon', \omega) d\varepsilon', \quad (9.3)$$

где $p(\varepsilon) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Оператор $K_{\text{рег}}$ назовем *регуляризованным каноническим оператором*.

Лемма 9.2. Пусть $r \geq s_1 + s_2 + 1$. Тогда

$$[K_{\text{рег}} \Phi] \in \mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}(\mathbb{R}^3).$$

Доказательство. Обозначим $f(x, \varepsilon, \omega) = [K_{\text{кв}} \Phi](x, \varepsilon, \omega)$,

$$f(x, \varepsilon, \omega) = [K_{\text{рег}} \Phi](x, \varepsilon, \omega) = \frac{1}{\omega^r} \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon - \varepsilon') f(x, \varepsilon', \omega) d\varepsilon'.$$

Функция $f(x, \varepsilon, \omega)$ имеет вид

$$f(x, \varepsilon, \omega) = h(x, \beta, \omega) |_{\beta = \bar{\beta}([\varepsilon\omega], \omega)}, \quad (9.4)$$

где $h(x, \beta, \omega) = [\mathcal{H}_1 \Phi](x, \beta, \omega)$, $\beta([\varepsilon\omega], \omega) = \bar{\beta}\left(\frac{2[\varepsilon\omega] + 1}{\omega}, \omega\right)$ и

где функции h и $\bar{\beta}$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) h бесконечно дифференцируема;
- б) $h(x, \beta, \omega) = 0$ при достаточно большом $|\beta|$, $h(x, \beta, \omega) = 0$ при достаточно малом $|\omega|$;
- в) для любой функции $e(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, равной 1 в достаточно большой окрестности нуля, функция $[1 - e(x)]h(x, \beta, \omega)$ принадлежит любому соболевскому пространству;
- г) для любой функции $e(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ функция

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{r_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{r_2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \right)^{r_3} \frac{e(x) h(x, \beta, \omega)}{\omega^r} \right| \leq \frac{c}{\sqrt{\omega^2 + 1}},$$

при $r \geq r_1 + r_2 + 1$ и любом r_3 ($c = \text{const}$ зависит только от r_1, r_2, r_3, r);

- д) функция $\bar{\beta}(\xi, \omega)$ бесконечно дифференцируема;
- е) $\bar{\beta}([\varepsilon\omega], \omega) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ равномерно по ω ;
- ж) производные всех порядков от $\bar{\beta}(\xi, \omega)$ по ω ограничены на любом множестве, на котором ограничено $\bar{\beta}(\xi, \omega)$.

Сделаем в интеграле (9.3) замену переменных $\xi = \varepsilon\omega$. Получим

$$g(x, \varepsilon, \omega) = \frac{1}{\omega^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\varepsilon - \frac{\xi}{\omega}\right) h(x, \bar{\beta}([\xi], \omega), \omega) d\xi. \quad (9.5)$$

Дифференцируя правую часть (9.5) под знаком интеграла и используя свойства а) — ж), получаем утверждение леммы. Заметим, что $g(x, \varepsilon, \omega) = 0$ при достаточно большом $|\varepsilon|$.

Рассмотрим также оператор K'_{per} , определенный формулой

$$[K'_{\text{per}} \varphi](x, e, \omega) = \frac{\chi(e)}{\omega^r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(e-e')^2 \omega^{2s}} K_{\text{кв}} \varphi](x, e', \omega) de', \quad (9.6)$$

где $\chi(e) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Лемма 9.3. Пусть $r \geq s_1 + r s s_2 + r s s_3 + r s - r_3 + 1$, если $s \geq 1$, и $r \geq s_1 + s_3 + 1$, если $s = 0$. Тогда

$$[K'_{\text{per}} \varphi] \in \mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}(\mathbb{R}^3).$$

Доказательство. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\xi = e' \omega.$$

Получим:

$$[K'_{\text{per}} \varphi](x, e, \omega) = \frac{\chi(e)}{\omega^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(e-\frac{\xi}{\omega})^2 \omega^{2s}} h(x, \bar{\beta}([\xi], \omega), \omega) d\xi, \quad (9.7)$$

где функции h и $\bar{\beta}$ — те же, что и в доказательстве предыдущей леммы. Дифференцируя правую часть (9.7) под знаком интеграла, получаем

$$[K'_{\text{per}} \varphi] \in W^{s'_1, s'_2, s'_3}(\mathbb{R}^3),$$

где $s'_i > s_i + 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}(\mathbb{R}^3)$ следующее отношение эквивалентности:

$$\varphi(x, e, \omega) \overset{l}{\approx} \psi(x, e, \omega)$$

тогда и только тогда, когда

$$\omega^{l+1} [\varphi(x, e, \omega) - \psi(x, e, \omega)] \in \mathcal{B}_{s_1, s_2, s_3}.$$

Теорема 9.1. Пусть $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ и $\varphi \equiv \psi$. Тогда при $r \geq s_1 + s_3 + 1$

$$K_{\text{per}} \varphi \overset{l}{\approx} K_{\text{per}} \psi;$$

при $r \geq \max \{s_1 + s_3 + 1, s_1 + r s s_2 + r s s_3 + r s - s_3\}$

$$K'_{\text{per}} \varphi \overset{l}{\approx} K'_{\text{per}} \psi.$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 8.1, достаточно показать, что если $\varphi \equiv 0$, то $K_{\text{per}} \varphi \approx 0$ и $K'_{\text{per}} \varphi \approx 0$. Пусть $\varphi \equiv 0$. Рассуждая, как в предыдущем параграфе, получим:

$$[K_{\text{per}} \varphi](x, e, \omega) = \frac{1}{\omega^{r+l+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(e - \frac{\xi}{\omega}\right) h(x, \bar{\beta}([\xi], \omega), \omega) d\xi,$$

$$[K'_{\text{per}} \varphi](x, e, \omega) = \frac{1}{\omega^{r+l+2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(e-\frac{\xi}{\omega})^2 \omega^{2s}} h(x, \bar{\beta}([\xi], \omega), \omega) d\xi,$$

где функции h и $\bar{\beta}$ удовлетворяют условиям а) — ж), сформулированным раньше. Отсюда получаем утверждение теоремы.

Пусть теперь A_1, A_2, A_3 — производящие операторы степеней s_1, s_2, s_3 соответственно, действующие в банаховом пространстве B и определенные на всюду плотном линейном многообразии D . Введем в пространстве $\text{Hom}(B, B)$ отношение эквивалентности $\simeq$: $A' \simeq A''$ тогда и только тогда, когда оператор $(A' - A'') A_3^{l+1}$ ограничен. Факторпространство $\text{Hom}(B, B)|_{\simeq}$ обозначим через $\tilde{\text{Op}}(B)$.

Из теоремы 9.1 следует, что если элементы Φ' и Φ'' из L_{Σ} суть представители одного и того же класса $\Phi \in \mathcal{L}$ и r удовлетворяет условиям теоремы 9.1, то

$$[K_{\text{рег}}\Phi'](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3) \simeq [K_{\text{рег}}\Phi''](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3), \quad (9.8)$$

$$[K'_{\text{рег}}\Phi'](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3) \simeq [K'_{\text{рег}}\Phi''](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3). \quad (9.9)$$

Класс эквивалентных операторов из $\tilde{\text{Op}}(B)$, которому принадлежат левая и правая части равенства (9.8), обозначим через $[\mathcal{K}_{\text{рег}}\Phi](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3)$; класс, которому принадлежат левая и правая части равенства (9.9) — через $[\mathcal{K}'_{\text{рег}}\Phi](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3)$.

Аналогично определяются регуляризованные канонические операторы, отвечающие другим способам упорядочения тройки A_1, A_2, A_3 , например,

$$[\mathcal{K}_{\text{рег}}\Phi](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3), \quad [\mathcal{K}'_{\text{рег}}\Phi](\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2, \overset{\circ}{A}_3),$$

где Φ — произвольный канонический элемент.

§ 10. Пример на коммутацию канонического оператора с гамильтонианом

В этом параграфе рассматривается простейший случай, когда кривая $M^1(\beta, \omega)$ не зависит от параметров β и ω . Для удобства обозначений мы полагаем $\omega = 1/h$. Чтобы проиллюстрировать общую ситуацию, рассмотрим сначала следующий пример.

Пример. Найдем «почти» решение уравнения $\frac{h^2}{2} y'' + xy = 0$, $h > 0$ в области $|x| < a$ с точностью до $O(h^3)$, т. е. найдем такую функцию $y(x)$, которая после подстановки в данное уравнение дает невязку $O(h^3)$.

Эта задача тривиальна, так как после $1/h$ -Фурье-преобразования приходим к уравнению $\frac{p^2}{2} \tilde{y} - i\hbar \frac{d\tilde{y}}{dp} = 0$, которое является линейным уравнением 1-го порядка. Тем не менее, мы построим ее решение с помощью канонического оператора, для того, чтобы

проиллюстрировать общую ситуацию. По той же причине мы будем использовать не простейший из канонических атласов.

Будем искать y в виде $y = K_1 \varphi$, где K_1 — канонический оператор (mod $O(h^2)$) на кривой $\Lambda = \left\{ x = \frac{\alpha^2}{2}, p = \alpha \right\}$, ассоциированной с гамильтонианом $-\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} - x$. (В каноническом операторе делаем подстановку $\omega = \frac{1}{h}$.) Рассмотрим на Λ канонический атлас, состоящий из неособых карт U_1 , U_2 и особой карты U_3 , где карта U_1 отвечает области $\alpha > 1$, U_2 — области $\alpha < -1$, U_3 — области $|\alpha| < 2$; рассмотренный случай по существу является общим. Канонический элемент φ , на который действует оператор K , задается тремя функциями: $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$, зависящими также и от h , с носителями в картах U_1 , U_2 , U_3 соответственно; эти функции определяются с точностью до $O(h^2)$. Другая тройка функций $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$, $\psi_3(\alpha)$ определяет тот же канонический элемент φ , если выполнены следующие условия (по mod $O(h^2)$):

$$\begin{aligned}\varphi_1(\alpha) &= \psi_1(\alpha) & \text{при } \alpha > 2, \\ \varphi_2(\alpha) &= \psi_2(\alpha) & \text{при } \alpha < -2, \\ \varphi_3(\alpha) &= \psi_3(\alpha) & \text{при } |\alpha| < 1,\end{aligned}$$

$$\varphi_1(\alpha) + V_{1,3} \varphi_3(\alpha) = \psi_1(\alpha) + V_{1,3} \psi_3(\alpha) \quad \text{при } \alpha \in U_1 \cap U_3,$$

$$\varphi_2(\alpha) + V_{2,3} \varphi_3(\alpha) = \psi_2(\alpha) + V_{2,3} \psi_3(\alpha) \quad \text{при } \alpha \in U_2 \cap U_3,$$

где $V_{1,3}$, $V_{2,3}$ — операторы перехода из карты U_3 в карты U_1 и U_2 соответственно, которые в данном случае согласно (8.2) имеют вид:

$$V_{1,3} = V_{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} V = 1 - ih \left[\frac{1}{2\alpha} \frac{d}{d\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \frac{1}{d\alpha} + \frac{5}{24\alpha^3} \right] \text{mod } O(h^2).$$

Канонический оператор имеет вид:

$$\begin{aligned}K\varphi &= \frac{e^{\frac{i}{h} S_1(x)}}{\sqrt{y_1(x)}} \varphi_1(\sqrt{2x}) + i \frac{e^{\frac{i}{h} S_2(x)}}{\sqrt{|y_2(x)|}} \varphi_2(-\sqrt{2x}) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{-2\pi i h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h} \left(px - \frac{p^2}{6} \right)} \varphi_3(p) dp = K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_3,\end{aligned}$$

где

$$S_1(x) = \frac{(2x)^{3/2}}{3}, \quad S_2(x) = -\frac{(2x)^{3/2}}{3}, \quad y_1(x) = \sqrt{2x}, \quad y_2(x) = -\sqrt{2x}.$$

Обозначим $H = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2}$. Имеем:

$$HK_1 = -ihK_1P_1, \quad HK_2 = -ihK_2P_2, \quad HK_3 = -ihK_3P_3,$$

где

$$P_2 = P_1 = \frac{d}{d\alpha} - ih \left\{ \frac{5}{8\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \right\}, \quad P_3 = \frac{d}{d\alpha}.$$

Тройка операторов P_1, P_2, P_3 определяет оператор P , действующий в пространстве канонических элементов, так как выполнены условия

$$VP_3 = P_1V \bmod O(h^2), \quad VP_3 = P_2V \bmod O(h^2).$$

Таким образом, имеет место следующая формула коммутации канонического оператора с гамильтонианом:

$$HK = -ihKP.$$

Значит, нужно решить уравнение $P\varphi = 0$ в окрестности области $\alpha^2 \leq 2a$, т. е. найти такой канонический элемент φ , чтобы элемент $\psi = P\varphi$ определялся функциями $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$, где $\varphi_i(\alpha) = 0$ при $|\alpha| = \sqrt{2a} + \varepsilon$, ε — произвольное положительное число. Элемент φ определяется тремя функциями: $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$. Уравнение $P\varphi = 0$ при $|\alpha| < \sqrt{2a} + \varepsilon$ будет удовлетворено, если функции φ_i удовлетворяют следующим условиям:

- а) $P_1\varphi_1(\alpha) = 0$ при $2 < \alpha < \sqrt{2a} + \varepsilon$,
- б) $P_1\varphi_1(\alpha) + VP_3\varphi_3(\alpha) = 0$ при $1 < \alpha < 2$,
- в) $P_3\varphi_3(\alpha) = 0$ при $|\alpha| < 1$,
- г) $P_2\varphi_2(\alpha) + VP_3\varphi_3(\alpha) = 0$ при $-2 < \alpha < -1$,
- д) $P_2\varphi_2(\alpha) = 0$ при $-\sqrt{2a} - \varepsilon < \alpha < -2$.

Так как P_1, P_2, P_3 определяют оператор P , то условия б) и г) можно переписать в виде:

- б') $P_1(\varphi_1(\alpha) + V\varphi_3(\alpha)) = 0$ при $1 < \alpha < 2$,
- г') $P_2(\varphi_2(\alpha) + V\varphi_3(\alpha)) = 0$ при $-2 < \alpha < -1$.

Начнем с уравнения в):

$$\varphi_3'(\alpha) = 0.$$

Решение этого уравнения (с точностью до произвольного постоянного множителя) есть

$$\varphi_3(\alpha) = 1 \quad \text{при} \quad |\alpha| < 1.$$

Обозначим теперь

$$\varphi_1(\alpha) + V\varphi_3(\alpha) = \chi(\alpha), \quad 1 < \alpha < 2.$$

Уравнение б') принимает вид:

$$\frac{d\chi}{d\alpha} - ih \left\{ \frac{5}{8\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \right\} \chi(\alpha) = 0,$$

$$\chi(1) = V\varphi_3(1) = 1 - \frac{5}{24} ih.$$

Решаем это уравнение по теории возмущений:

$$\begin{aligned}\chi &= \chi^{(0)} + h\chi^{(1)}, \\ \frac{d\chi^{(0)}}{d\alpha} &= 0, \quad \chi^{(0)}(\alpha) = \chi^{(0)}(1) = 1, \\ \frac{d\chi^{(1)}}{d\alpha} &= +i \left\{ \frac{5}{8\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \right\} \chi^{(0)}(\alpha), \\ \frac{d\chi^{(1)}}{d\alpha} &= \frac{5i}{8\alpha^4}, \quad \chi^{(1)}(1) = -\frac{5i}{24}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\chi^{(1)}(\alpha) = -\frac{5i}{24\alpha^3}, \quad \chi(\alpha) = 1 - \frac{5ih}{24\alpha^3}.$$

Пусть $e(\alpha) = 1$ в окрестности 1, $e(\alpha) = 0$ в окрестности 2. Можем положить

$$V\varphi_3(\alpha) = e(\alpha)\chi(\alpha), \quad \varphi_1(\alpha) = (1 - e(\alpha))\chi(\alpha), \quad 1 < \alpha < 2.$$

Отсюда находим $\varphi_3(\alpha)$ при $1 < \alpha < 2$:

$$\begin{aligned}\varphi_3(\alpha) &= V^{-1}e(\alpha) \left(1 - \frac{5ih}{24\alpha^3} \right) = \left[1 + ih \left\{ \frac{1}{2\alpha} \frac{d^2}{d\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d}{d\alpha} + \frac{5}{24\alpha^3} \right\} \right] e(\alpha) \times \\ &\times \left(1 - \frac{5ih}{24\alpha^3} \right) = e(\alpha) + ih \left[\frac{1}{2\alpha} e''(\alpha) - \frac{1}{2\alpha^2} e'(\alpha) \right], \quad 1 < \alpha < 2.\end{aligned}$$

При $\alpha = 2$ получаем следующее начальное условие для $\varphi_1(\alpha)$:

$$\varphi_1(2) = \chi(2) = 1 - \frac{5ih}{192}.$$

Далее решаем задачу Коши:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1^{(0)}}{d\alpha} &= 0, \quad \varphi_1^{(0)}(2) = 1, \\ \frac{d\varphi_1^{(1)}}{d\alpha} &= i \left\{ \frac{5}{8\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \right\} \varphi_1^{(0)}(\alpha), \quad \varphi_1^{(1)}(2) = -\frac{5i}{192}, \\ &2 < \alpha < \sqrt{2a} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(0)}(\alpha) &= 1, \quad \varphi_1^{(1)}(\alpha) = -\frac{5i}{24\alpha^3}, \\ \varphi_1(\alpha) &= 1 - \frac{5ih}{24\alpha^3} \quad \text{при} \quad 2 < \alpha < \sqrt{2a} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$\varphi_2(\alpha) + V\varphi_3(\alpha) = 1 - \frac{5ih}{24\alpha^3},$$

$$\varphi_3(\alpha) = e(\alpha) + ih \left[\frac{1}{2\alpha} \bar{e}''(\alpha) - \frac{1}{2\alpha^2} \bar{e}'(\alpha) \right] \quad \text{при} \quad -2 < \alpha < 1,$$

где $\bar{e}(\alpha) = 1$ в окрестности 1 и $\bar{e}(\alpha) = 0$ в окрестности -2 ,

$$\varphi_2(\alpha) = (1 - \bar{e}(\alpha)) \left(1 - \frac{5ih}{24\alpha^3} \right) \quad \text{при} \quad -2 < \alpha < 1$$

и

$$\varphi_2(\alpha) = 1 - \frac{5ih}{24\alpha^3} \quad \text{при} \quad -\sqrt{2a} - \varepsilon < \alpha < -2.$$

Теперь легко выписать ответ и выяснить, как он связан с точным решением, которое можно написать в этом примере?

Пусть теперь M^1 — произвольная гладкая кривая в фазовой плоскости (x, p) , K — канонический оператор $\text{mod } O(h^{l+1})$ на кривой $M^1 = \{x(\alpha), p(\alpha)\}$. Оператор действует на канонические элементы. Пусть $\mathcal{A} = \{U_j\}_{j \in I}$ — канонический атлас кривой M^1 . Канонический элемент Φ задается семейством функций $\{\varphi_j(\alpha)\}_{j \in I}$, где $\text{supp } \varphi_j \subseteq U_j$. Функции φ_j определены $\text{mod } O(h^{l+1})$, $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$.

Пусть $\mathcal{A}' = \{U'_j\}_{j \in I'}$ — другой канонический атлас. Семейство функций $\psi_j(\alpha) \in C_0^\infty(U'_j)$, $j \in I'$ определяет тот же элемент Φ , что и семейство $\{\varphi_j(\alpha)\}_{j \in I}$, если выполнены следующие условия:

а) в достаточно малой окрестности любой нефокальной точки на M' выполняется равенство

$$\sum_{j \in I_1} \varphi_j(\alpha) + \sum_{j \in I_2} V \varphi_j(\alpha) = \sum_{j \in I'_1} \psi_j(\alpha) + \sum_{j \in I'_2} V \psi_j(\alpha),$$

где

I_1 — множество номеров неособых карт атласа $\mathcal{A}$,

I'_1 — множество номеров неособых карт атласа $\mathcal{A}'$,

I_2 — множество номеров особых карт атласа $\mathcal{A}$,

I'_2 — множество номеров особых карт атласа $\mathcal{A}'$.

V — оператор перехода от особых карт к неособым (он определен в окрестности любой нефокальной точки и имеет вид

$$V = 1 + \sum_{k=1}^l (ih)^k L_k \text{ mod } O(h^{l+1}),$$

где L_k — дифференциальный оператор порядка $2k$;

б) в достаточно малой окрестности любой фокальной точки на M^1 выполняется равенство

$$\sum_{j \in I_2} \varphi_j(\alpha) = \sum_{j \in I'_2} \psi_j(\alpha).$$

Канонический оператор K действует по формуле

$$K\Phi = \sum_{j \in I} i^{y_j} K_j \varphi_j(\alpha),$$

где

$$K_j \varphi_j(\alpha) = \frac{e^{\frac{i}{h} S(\alpha)}}{\sqrt{\left| \frac{d\chi}{d\alpha} \right|}} \varphi_j(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_j(x)}$$

при $j \in I_1$ и

$$K_j \varphi_j(\alpha) = \frac{1}{V - 2\pi i h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i}{h} (px - \tilde{S}(\alpha))} \varphi_j(\alpha)}{V \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|} \Big|_{\alpha = \alpha_j(p)} dp$$

при $j \in I_2$.

Пусть H — гамильтониан, т. е. псевдодифференциальный оператор вида

$$H = \mathcal{K} \left(x, \frac{1}{p}, h \right),$$

где $\hat{p} = -ih \frac{d}{dx}$ (оператор h коммутирует с x и $\hat{p}$, поэтому неважно, каким по порядку он действует), и пусть кривая M^1 ассоциирована с гамильтонианом H , т. е.

$$\mathcal{K}(x(\alpha), p(\alpha), 0) = 0,$$

и параметр α выбран так, чтобы на M^1 выполнялись соотношения

$$d\alpha = \frac{dx}{H_p(x, p, 0)} = - \frac{dp}{H_x(x, p, 0)}.$$

Тогда для любого $j \in I$ имеем:

$$HK_j \varphi_j(\alpha) = -ih K_j P_j \varphi_j(\alpha),$$

где P_j имеет вид

$$P_j = \sum_{k=0}^l (ih)^k P_j^{(k)} \bmod (h^{l+1}),$$

где $P_j^{(k)}$ — дифференциальные операторы, причем

$$P_j^{(0)} = \frac{d}{dx} + f(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ не зависит от j ; легко видеть, что в окрестности любой точки на M^1 оператор P_j зависит только от того, является ли U_j неособой картой или особой.

Семейство операторов $\{P_j\}$ определяет некоторый оператор P , действующий в пространстве канонических элементов, иными словами, если U_{j_1} — неособая карта, а U_{j_2} — особая карта, то для любой функции $\chi \in C_0^\infty(U_{j_1} \cap U_{j_2})$ справедливо равенство

$$P_{j_1} V \chi = V P_{j_2} \chi.$$

Действительно, имеем

$$HK\psi = -ih K\psi,$$

где канонический элемент ψ определяется семейством функций $\psi_j = P_j \varphi_j$. Остается показать, что канонический элемент ψ определяется каноническим элементом φ однозначно, или, что то же самое, что канонический оператор мономорфен:

$$(K\psi = 0) \Rightarrow (\psi = 0).$$

Пусть канонический элемент ψ отличен от нуля; докажем, что $K\psi \neq 0$. Пусть, например, $\psi(\bar{\alpha}) \neq 0$. Обозначим $\bar{x} = x(\bar{\alpha})$ и рассмотрим функцию $K\psi$ в достаточно малой окрестности точки $\bar{x}$. Выберем на M^1 такой канонический атлас $\mathcal{A}$, что любые две карты этого атласа, проекции которых на ось x содержат точку $\bar{x}$, имеют непересекающиеся проекции на ось p . Существует такой канонический элемент Ψ , определяемый семейством функций $\{\Psi_j\}$, отвечающим атласу $\mathcal{A}$, что выполнены следующие условия:

а) $\psi_j = 0$, если проекция карты U_j на ось x не содержит точки $\bar{x}$.

б) $K\Psi = K\psi$ в окрестности точки $\bar{x}$. Достаточно убедиться, что $K\Psi \neq 0$. Обозначим $K\Psi(x) = \Phi(x)$. Имеем в достаточно малой окрестности точки $\bar{x}$

$$\tilde{\Phi}(p) = i^{|J|} e^{-\frac{i}{h} \tilde{S}(\alpha)} \frac{\Psi_J(\alpha)}{\sqrt{\frac{dp}{d\alpha}}} \Big|_{\alpha=\alpha_J(p)} \mod O(h^\infty),$$

где U_j — карта, содержащая точку $\bar{\alpha}$. Таким образом, $\tilde{\Phi}(p) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу: найти такую функцию $y(x)$, чтобы уравнение $Hy = 0$ удовлетворялось при $|x| < a$ с погрешностью $O(h^{l+2})$. Будем искать y в виде

$$y = K\phi.$$

Для канонического элемента ϕ при этом получаем условия:

$$\text{supp } P\phi \cap M_a = \emptyset,$$

где M_a — прообраз отрезка $|x| < a$ при проектировании M^1 на ось x . Канонический элемент ϕ , удовлетворяющий этому условию, можно построить с помощью теории возмущений так же, как это было сделано в рассмотренном выше конкретном примере.

§ 11. Коммутация оператора Гамильтона с каноническим оператором

Пусть $\{\rho_1(\alpha), \rho_2(\alpha)\}$ — весовое разбиение единицы на M^1 , т. е. $\rho_1, \rho_2 \in C^\infty$, $\text{supp } \rho_1$ не содержит точек, не входящих ни в одну неособую карту полного канонического атласа $\mathcal{A}_\infty$ кривой M^1 , $\text{supp } \rho_2$ лежит в объединении особых карт атласа $\mathcal{A}_\infty$; $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Весовому разбиению единицы $\{\rho_1, \rho_2\}$ отвечает оператор $\mathfrak{H}$, переводящий функцию ϕ (определенную $\mod O(h^{l+1})$) на M^1 в канонический элемент на M^1 , задаваемый в каноническом атласе $\mathcal{A} = \{U_j\}_{j \in I}$ формулами

$$\phi_j(\alpha) = e_j(\alpha) \rho_1(\alpha) \phi(\alpha) + V e_j(\alpha) \rho_2(\alpha) \phi(\alpha),$$

если U_j — неособая карта,

$$\phi_j(\alpha) = V^{-1} e_j(\alpha) \rho_1(\alpha) \phi(\alpha) + e_j(\alpha) \rho_2(\alpha) \phi(\alpha),$$

если U_j — особая карта; здесь $\{e_j\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{A}$.

Обозначим: $S = K\mathfrak{X}$.

Лемма 11.1. Оператор S обратим.

Доказательство аналогично доказательству обратимости канонического оператора K .

Лемма 11.2. Пусть кривая M^1 ассоциирована с гамильтонианом H . Тогда для любой функции φ из области определения оператора S функция $HS\varphi$ имеет вид $-ihS\psi$, где ψ — некоторая функция на M^1 .

Доказательство. Имеем $HS\varphi = HK\mathfrak{X}\varphi = -ihKP\mathfrak{X}\varphi$. Пусть в атласе $\mathcal{A} = \{U_j\}_{j \in I}$ канонический элемент $P\mathfrak{X}\varphi$ определяется семейством функций $\{\psi_j(\alpha)\}$. Достаточно показать, что для любого $j \in I$ существует такая функция χ_j на M^1 , что элемент $\mathfrak{X}\chi_j$ определяется семейством функций

$$\bar{\psi}_k = \psi_k \delta_{kj}.$$

Пусть U_j — неособая карта. Тогда функция χ_j определяется из уравнения

$$(\rho_1 + V\rho_0)\chi_j = \psi_j. \quad (11.1)$$

Оператор V имеет вид

$$V = 1 + \sum_{k=1}^l (ih)^k L_k.$$

Поэтому уравнение (11.1) переписывается в виде

$$\left[1 + \sum_{k=1}^l (ih)^k L_k\right]\chi_j = \psi_j.$$

Функция χ_j находится теперь по теории возмущений. В случае, когда U_j — особая карта, функции χ_j находятся аналогично. Лемма доказана.

Теорема 11.1. В условиях леммы 11.2 имеет место следующее коммутационное соотношение:

$$HS = -ihSP_\Phi, \quad (11.2)$$

$$P_\Phi = \frac{d}{d\alpha} + r(\alpha) + \sum_{l=1}^l (-ih)^l P_\Phi^{(l)}, \quad (11.3)$$

где $r(\alpha)$ — некоторая функция, $P_\Phi^{(l)}$ — дифференциальные операторы на M^1 .

Доказательство. Согласно леммам 11.1, 11.2 имеет место соотношение коммутации (11.2) с некоторым оператором P_Φ , действующим на функции, определенные на M^1 по модулю $O(\hbar^{l+1})$. Остается показать, что P_Φ имеет вид (11.3). Для этого достаточно рассмотреть действие этого оператора на функцию с носителем

в одной карте канонического атласа. Пусть, например, $\varphi(\alpha)$ — функция с носителем в неособой карте U_j . Тогда канонический элемент $\mathfrak{X}\varphi$ можно задать набором функций: $\varphi_k(\alpha) = 0$ при $k \neq j$,

$$\varphi_j(\alpha) = \rho_1(\alpha) \varphi(\alpha) + V\rho_2(\alpha) \varphi(\alpha).$$

Применяя к элементу $\mathfrak{X}\varphi$ оператор P , получим элемент $P\mathfrak{X}\varphi$, который можно задать следующим семейством функций $\{\psi_k(\alpha)\}$:

$$\psi_k(\alpha) = 0 \text{ при } k \neq j,$$

$$\psi_j(\alpha) = \frac{d\varphi_j(\alpha)}{d\alpha} + r(\alpha) \varphi_j(\alpha) + \sum_{\mu=1}^l (-ih)^\mu P_j^{(\mu)} \varphi_j(\alpha),$$

где $r(\alpha)$ — некоторая функция, $P_j^{(\mu)}$ — дифференциальные операторы. Вычисляя теперь функцию $\psi = P_{\Phi}\varphi = \mathfrak{X}^{-1}P\mathfrak{X}\varphi$ по теории возмущений так же, как при доказательстве леммы 11.2, получаем формулу (11.3) для данного случая.

Случай, когда $\varphi(\alpha)$ — функция с носителем в особой карте, рассматривается совершенно аналогично. Теорема доказана.

Теорема 11.1 позволяет свести уравнение $Hu = 0$ к уравнению $P_{\Phi}\varphi = 0$. Решение последнего уравнения легко построить по теории возмущений.

§ 12. Общее каноническое преобразование псевдодифференциального оператора

Пусть $\dot{\omega} = ih \frac{\partial}{\partial x}$, $T = [K\varphi](x, \dot{\omega})$, где K — канонический оператор на семействе кривых, зависящем от параметра ω , φ — некоторая вещественная функция. Рассмотрим преобразование псевдодифференциального оператора $L = f(x, \dot{\omega}, \omega)$ по формуле

$$L \rightarrow T^*LT. \quad (12.1)$$

Это преобразование содержит в качестве частных случаев канонические преобразования § 1. В этом параграфе будет получено асимптотическое разложение преобразования (12.1) с точностью до $O(h^2)$.

Лемма 12.1. Пусть $M^1: \{x = x(\alpha), p = p(\alpha)\}$ — гладкая кривая в фазовой плоскости (x, p) , K — канонический оператор (с точностью до $O(\omega^{-1})$ на M^1), $f(x)$ — гладкая функция. Тогда для любых функций $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha) \in C_0^\infty(M^1)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (f(x) [K\varphi_1](x, \omega), [K\varphi_2](x, \omega))_{L_2(x)} = \\ = (f(x(\alpha)) \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))_{L_2(\alpha)} + O\left(\frac{1}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда носитель функции f достаточно мал. На кривой M^1

можно тогда выбрать такой канонический атлас $\mathcal{A}$, что если проекции двух карт $U_j, U_k, j \neq k$ атласа $\mathcal{A}$ на ось x пересекаются с носителем функции f , то проекции этих карт на ось p не пересекаются. Пусть $\{U_j\}_{j \in J_0}$ — семейство карт атласа $\mathcal{A}$, проекции которых на ось x пересекаются с $\text{supp } f$. Обозначим через U'_j множество $\pi^{-1}[(\text{supp } f) \cap (\pi U_j)]$, где π — проектирование на ось x . Тогда с точностью до $O(\omega^{-\infty})$

$$K\varphi_1 = \sum_{j \in J_0} K\varphi_{1j}, \quad K\varphi_2 = \sum_{j \in J_0} K\varphi_{2j},$$

где $\text{supp } \varphi_{1j} \subset U_j, \text{supp } \varphi_{2j} \subset U_j, \varphi_{1j}(\alpha) = \varphi_{2j}(\alpha)$ при $\alpha \in U'_j, \varphi_{2j}(\alpha) = \varphi_{2j}(\alpha)$ при $\alpha \in U'_j$. Если $j \neq k$, то $(f(x(\alpha))\varphi_{1j}(\alpha), \varphi_{2k}(\alpha))_{L_2(\alpha)} = 0$. Кроме того,

$$(f(x) [K\varphi_{1j}](x, \omega), [K\varphi_{2k}](x, \omega)) = O(\omega^{-1}). \quad (12.2)$$

Действительно, обозначим:

$\psi_{1j}(x) = [K\varphi_{1j}](x, \omega), \psi_{2k}(x) = [K\varphi_{2k}](x, \omega), \psi_{1j}(x)f(x) = \Psi_{1j}(x)$ (функции ψ_{1j}, ψ_{2k} зависят от ω как от параметра). Имеем:

$$\tilde{\psi}_{1j}(p) = e^{-i\omega\tilde{S}(\alpha_j(p))} \chi_{1j}(p), \quad \tilde{\psi}_{2k} = e^{-i\omega\tilde{S}(\alpha_k(p))} \chi_{2k}(p),$$

где функции χ_{1j} и χ_{2k} имеют непересекающиеся носители. Обозначим: $\tilde{S}_j(p) = \tilde{S}(\alpha_j(p))$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_{1j}(p) &= f\left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial p}\right) e^{-i\omega\tilde{S}_j(p)} \chi_{1j}(p) = e^{-i\omega\tilde{S}_j(p)} f\left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial p} + \tilde{S}'_j(p)\right) \chi_{1j}(p) = \\ &= e^{-i\omega\tilde{S}_j(p)} f(\tilde{S}'_j(p)) \chi_{1j}(p) + O(\omega^{-1}), \end{aligned}$$

так что на носителе функции $\tilde{\psi}_{2k}$ функция $\Psi_{1j}(p)$ равна $O(\omega^{-1})$.

В силу (12.1) достаточно доказать утверждение леммы в том случае, когда $\varphi_1(\alpha) = \varphi_{1j}(\alpha), \varphi_2(\alpha) = \varphi_{2j}(\alpha)$. Но в этом случае утверждение леммы непосредственно следует из определения канонического оператора.

Лемма 12.2. Пусть $M^1: \{x = x(\alpha), p = p(\alpha)\}$ — гладкая кривая в фазовой плоскости (x, p) , K_1 — канонический оператор на Λ (с точностью до $O(\omega^{-2})$), $f(x)$ — гладкая функция, $\mathfrak{X}$ — оператор, стандартным образом переводящий гладкие функции на M^1 в канонические элементы, отвечающий вещественному весовому разбиению единицы. Тогда для любой вещественной функции $\varphi(\alpha) \in C_0^\infty(M^1)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (f(x) [K_1 \mathfrak{X}\varphi](x, \omega), f(x) [K_1 \mathfrak{X}\varphi](x, \omega))_{L_2(x)} = \\ = (\|f(x(\alpha))\|^2 \varphi(\alpha), \varphi(\alpha))_{L_2(\alpha)} + O(\omega^{-2}). \quad (*) \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 12.1. Отметим только дополнительные по сравнению с доказательством леммы 12.1 моменты.

1) Пусть функция φ имеет носитель, лежащий в неособой карте U . Тогда, как нетрудно проверить, пользуясь определением операторов V_U, U' , получаем:

$$[K_1 \mathfrak{X} \varphi](x, \omega) = c e^{i\omega S(\alpha(x))} \left| \frac{dx}{d\alpha} \right|^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{i}{\omega} L \right) \varphi(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha(x)},$$

где L — некоторый дифференциальный оператор (второго порядка) с вещественными коэффициентами, $|c|=1$. Утверждение леммы справедливо в этом случае, так как

$$\left| \left(1 + \frac{i}{\omega} L \right) \varphi(\alpha) \right|^2 = |\varphi(\alpha)|^2 + O(\omega^{-2}).$$

2) Аналогичная формула имеет место для ω -Фурье-образа функции $K_1 \mathfrak{X} \varphi$, если U — особая карта.

3) Пусть U — особая карта. Обозначим $\psi(x) = [K_1 \mathfrak{X} \varphi](x, \omega)$,

$$\Psi(x) = f(x) \psi(x), \quad \tilde{S}_1(p) = \tilde{S}(\alpha(p)), \quad \frac{dp}{d\alpha} = J_1(p(\alpha)).$$

Разлагая функцию

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p) = C_1 e^{-i\omega \tilde{S}(p)} f \left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial p} + \tilde{S}'_1(p) \right) |J_1(p)|^{-1/2} \times \\ \times \left[\left(1 + \frac{i}{\omega} L_1 \right) \varphi(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha(p)} \end{aligned} \quad (12.3)$$

по степеням ω , получаем, что в равенстве (12.3) с точностью до $O(\omega^{-2})$ можно заменить оператор $f \left(\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial p} + \tilde{S}'_1(p) \right)$ на оператор

$$f(\tilde{S}'_1(p)) + \frac{i}{\omega} L_2,$$

где L_2 — дифференциальный оператор, коэффициенты которого вещественны, если вещественна функция f (последнее можем предположить без уменьшения общности). Рассмотрим множество операторов, зависящих от параметра $\omega \rightarrow \infty$ вида

$$A_1 + \frac{i}{\omega} A_2 + O(\omega^{-2}), \quad (12.4)$$

где A_1, A_2 — непрерывные операторы, действующие в C_0^∞ и переводящие вещественные функции в вещественные. Множество операторов вида (12.4) образует кольцо $\mathfrak{K}$ относительно композиции операторов:

$$\left(A_1 + \frac{i}{\omega} A_2 + O(\omega^{-2}) \right) \left(A_3 + \frac{i}{\omega} A_4 + O(\omega^{-2}) \right) = A_1 A_3 + \frac{i}{\omega} A_5 + O(\omega^{-2}).$$

Следовательно,

$$\tilde{\Psi}(p(\alpha)) = c_1 e^{-i\omega \tilde{S}(\alpha)} \left| \frac{dp}{d\alpha} \right|^{-1/2} \left(f(x(\alpha)) + \frac{i}{\omega} L_2 \right) \varphi(\alpha),$$

откуда и следует утверждение леммы в данном случае.

Замечание. Лемма 12.2 останется верной, если в левой части (*) заменить $f(x)$ на оператор $f\left(x, -\frac{i}{\omega} \frac{d}{dx}\right)$, а в правой части — $f(x(\alpha))$ на $f(x(\alpha), p(\alpha))$. Доказательство полностью аналогично.

Теорема 12.1. Пусть $\Gamma_\omega = \{(x, p): x = X(\alpha, \omega), p = P(\alpha, \omega)\}$ — однопараметрическое семейство кривых в фазовом пространстве $R_x^n \times R_p^n$, причем $D(X, P + \omega)/D(\alpha, p) = 1$.

Рассмотрим канонический оператор $[K\Phi](x, \omega)$ на семействе Γ_ω , примененный к вещественной функции $\Phi(\alpha, \omega) \in C_0^\infty$.

Пусть $T = [K\Phi]\left(x, \frac{1}{\omega}\right)$, где $\frac{1}{\omega} = -i\hbar \partial/\partial x$. Тогда в пространстве $L_2(R)$

$$T^*T = \Phi\left(x, \frac{1}{\omega}\right)\Phi\left(x, \frac{1}{\omega}\right) + \hbar^2 R_2(\hbar),$$

где оператор R_2 ограничен в L_2 равномерно по $\hbar$: $\|R_2(\hbar)\| \leq C$.

Доказательство. Из определения канонического оператора следует, что $[K\Phi](x, \omega)$ имеет компактный носитель Q . Пусть Q_ω — проекция Q на ось ω ;

$$Q_1 = \{(x, \omega', \omega): (x, \omega) \in Q \text{ и } (x, \omega') \in Q\}.$$

Рассмотрим в окрестности Q_1 некоторое конечное разбиение единицы $\{f_\mu(x, \omega', \omega)\} \subset C_0^\infty$, в котором носители f_μ достаточно малы. Тогда

$$T^*T = \sum_\mu f_\mu\left(x, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right)[K\Phi]\left(x, \frac{1}{\omega}\right)[\overline{K\Phi}]\left(x, \frac{1}{\omega}\right),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Докажем, что

$$\begin{aligned} f_\mu\left(x, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right)[K\Phi]\left(x, \frac{1}{\omega}\right)[\overline{K\Phi}]\left(x, \frac{1}{\omega}\right) = \\ = \Phi\left(x, \frac{1}{\omega}\right)\Phi\left(x, \frac{1}{\omega}\right)f_\mu\left(\frac{1}{2}\left(X\left(x, \frac{1}{\omega}\right) + X\left(x, \frac{1}{\omega}\right)\right), \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega}\right) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (12.5)$$

Суммируя затем эти операторы по μ , получим утверждение теоремы.

Пусть $\pi, \tilde{\pi}$ — проекции кривой Γ_ω на оси x и p соответственно. Учтем, что носитель f_μ сколь угодно мал. Тогда если проекции $\pi^{-1}(\text{supp } f_\mu(x, \omega, \omega'))$ при $\omega, \omega' \in Q_\omega$ пересекается с картами $U_1, \dots, U_l$ канонического атласа Γ_ω , то можно считать, что

$$e_i(\tilde{\pi}^{-1}(p + \omega - \omega', \omega), \omega)e_j(\pi^{-1}(p, \omega'), \omega') = 0$$

при $i \neq j$; $\omega, \omega', \omega'' \in Q_\omega$, где $\{e_i(\alpha, \omega)\}$ — разбиение единицы, подчиненное каноническому атласу. (Если это не выполнено, то

можно для данного f_μ выбрать другой канонический атлас и воспользоваться инвариантностью канонического оператора при замене атласа.)

На носителе f_μ канонический оператор имеет вид

$$[K\varphi](x, \omega) = \sum_{j=1}^{l-} [K(\varphi e_j)](x, \omega),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} f_\mu \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right) [K\varphi] \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega} \right) [\overline{K\varphi}] \left(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega} \right) = \\ = \sum_{i,j=1}^l [\overline{K(\varphi e_i)}] \left(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega} \right) [K(\varphi e_j)] \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega} \right) f_\mu \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Докажем, что

$$[\overline{K(\varphi e_i)}] \left(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega} \right) [K(\varphi e_j)] \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega} \right) f_\mu \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right) = h^2 R_2(h) \text{ при } i \neq j, \quad (12.7)$$

где $\|R_2(h)\| \leq c$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} F_{x \rightarrow p} [K(\varphi e_i)](x, \omega) &= e^{-\frac{i}{h} \tilde{S}_i(p, \omega)} \psi_i(p, \omega), \\ F_{x \rightarrow p} [K(\varphi e_j)](x, \omega') &= e^{-\frac{i}{h} \tilde{S}_j(p, \omega')} \psi_j(p, \omega'), \end{aligned} \quad (12.8)$$

где

$$\psi_i(p, \omega) \psi_j(p + \omega - \omega', \omega') = 0 \text{ при } \omega, \omega' \in Q_\omega. \quad (12.9)$$

Поскольку носители ψ_i, ψ_j не пересекаются, то можно считать, что в (12.8)

$$\tilde{S}_i(p, \omega) = \tilde{S}(p, \omega) \text{ и } \tilde{S}_j(p, \omega) = \tilde{S}(p, \omega),$$

где $\tilde{S}(p, \omega)$ — некоторая гладкая вещественная функция. Тогда

$$\begin{aligned} [\overline{K(\varphi e_i)}] \left(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega} \right) [K(\varphi e_j)] \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega} \right) f_\mu \left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right) = \\ = [\overline{K(\varphi e_i)}] \left(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega} \right) \int e^{\frac{i}{h} p x^3} f_\mu \left(i h \frac{\partial}{\partial p}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right) \times \\ \times e^{-\frac{i}{h} \tilde{S}(p, \omega)} \psi_j(p, \omega) dp = T_{\Phi_i}^* T_{\chi_j}, \end{aligned} \quad (12.10)$$

где

$$T_g \stackrel{\text{def}}{=} \int e^{\frac{i}{h} [p x^3 - \tilde{S}(p, \omega)]} g \left(p, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega} \right) dp,$$

$$\chi_j(p, \omega', \omega) = f_\mu \left(i h \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p}(p, \omega'), \omega', \omega \right) \psi_j(p, \omega').$$

Разлагая оператор, стоящий в правой части, по степеням $\hbar$, получаем:

$$\chi_j = f_\mu \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p} (p, \omega'), \omega', \omega \right), \psi_j (p, \omega') + \\ + \sum_{n=1}^{m-1} (-i\hbar)^n V^{(n)} \psi_j (p, \omega') + (-i\hbar)^m Q_j^{(m)} (p, \omega', \omega),$$

где $V^{(1)}, \dots, V^{(m-1)}$ — известные дифференциальные операторы, $Q_j^{(m)} \in W_2^r(\mathbb{R}^3)$ для всех r .

Но в силу (12.9)

$$\overline{\psi_j(p, \omega)} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \psi_j(p + \omega - \omega', \omega') = 0 \quad (i \neq j);$$

следовательно, согласно результатам § 1 имеем:

$$T_{\Psi_i}^* T_{\chi_j} = (-i\hbar)^m T_{\Psi_i}^* T_{Q_j^{(m)}} \quad (i \neq j).$$

Поэтому, учитывая (12.10), для доказательства (12.7) достаточно оценить норму в $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^3)$ символа оператора $T_{\Psi_i}^* T_{Q_j^{(m)}}$, т. е. норму функции

$$\eta(x, \omega', \omega) = (-i\hbar)^m \iint dp dp' \left\{ e^{\frac{i}{\hbar}(p' - p)x} \times \right. \\ \left. \times e^{\frac{i}{\hbar}[\tilde{S}(p, \omega) - \tilde{S}(p', \omega')]} \overline{\psi_i(p, \omega)} Q_j^{(m)}(p', \omega', \omega) \right\}.$$

Имеем

$$\|\eta\|_{\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\omega'} \times \mathbb{R}_{\omega})} \leq c_1 \hbar^m \iint dp dp' \times \\ \times \left\| e^{\frac{i}{\hbar}[\tilde{S}(p, \omega) - \tilde{S}(p', \omega')]} \overline{\psi_i(p, \omega)} Q_j^{(m)}(p', \omega', \omega) \right\|_{\mathcal{B}_0(\mathbb{R}_{\omega'} \times \mathbb{R}_{\omega})} \leq \\ \leq c_2 \hbar^m \iint dp dp' \left\| e^{\frac{i}{\hbar}[\tilde{S}(p, \omega) - \tilde{S}(p', \omega')]} \times \right. \\ \left. \times \overline{\psi_i(p, \omega)} Q_j^{(m)}(p', \omega', \omega) \right\|_{W_3(\mathbb{R}_{\omega'} \times \mathbb{R}_{\omega})} \leq c_3 \hbar^{m-2}.$$

Этим доказано (12.7). Из (12.6) тогда получим:

$$f_\mu(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega}) [K\Phi](\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}) [\overline{K\Phi}](\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega}) = \\ = \sum_{j=1}^l [K(\Phi e_j)](\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega}) [K(\Phi e_j)](\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}) f_\mu(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega}) + O(\hbar^2).$$

По теоремам § 1, этот оператор преобразуется так:

$$\sum_{j=1}^l (\Phi e_j)(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega}) (\Phi e_j)(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}) f_\mu \left(\frac{1}{2} X(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}) + \frac{\Gamma}{2} X(\overset{2}{x}, \overset{3}{\omega}, \overset{1}{\omega}, \overset{3}{\omega}) \right) + O(\hbar^2). \quad (12.11)$$

Далее имеем

$$(\varphi e_i)(x, \omega)(\varphi e_j)(x, \omega') = 0 \text{ при } i \neq j; \omega, \omega' \in Q_\omega,$$

поскольку мы, в частности, предположили, что

$$\sup_x e_i(x, \omega) \cap \sup_x e_j(x, \omega') = \emptyset \text{ при } i \neq j; \omega, \omega' \in Q_\omega.$$

Тогда выражение (12.11) совпадает с правой частью (12.5), что и доказывает (12.5). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\omega \times \mathbb{R}_h)$ и

$$\varphi = \varphi_0(x, \omega) + (-ih)\varphi_1(x, \omega) + h^2\varphi_2(x, \omega, h),$$

где φ_0, φ_1 — вещественные функции, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty$,
 $\sup_{0 \leq h \leq 1} \|\varphi_2\|_{W_2^r(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\omega)} \leq c_r$ при достаточно большом r .

Тогда при выполнении условий теоремы имеет место равенство

$$\begin{aligned} & [[\overline{K\varphi}](\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega})][f(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}, \overset{0}{\omega})][[K\varphi](\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega})] = \\ & = \varphi_0(\overset{2}{x}, \overset{0}{\omega})\varphi_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega})f\left(\frac{1}{2}(X(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}) + X(\overset{2}{x}, \overset{0}{\omega})), \overset{1}{\omega}, \overset{0}{\omega}\right) + h^2 R_2(h), \end{aligned}$$

где $\|R_2(h)\| \leq c$.

§ 1. Основные определения и формулировки теорем

На примерах волнового уравнения (§ 8 Введения), уравнения колебаний кристалла (§ 8 введения) и уравнения Шредингера для осциллятора (§ 8 введения) мы убедились, что проблема отыскания асимптотического решения этих уравнений приводит «в нулевом приближении» к уравнению с частными производными первого порядка, которое мы называем уравнением характеристик, или иначе — уравнением Гамильтона — Якоби. Это последнее уравнение не содержало параметра, по которому искалась асимптотика исходной задачи. Его решение $S(x, t)$ было действительной функцией. В случае уравнения Шредингера, например, эта функция определяла фазу колебаний, и решение, после выделения множителем выражения $\exp \frac{i}{h} S(x, t)$, можно было разложить в асимптотический ряд по степеням h . Для ряда задач, однако (в которых имеет место явление «поглощения»), аналогичная функция является комплексной, так что $\exp \frac{i}{h} S(x, t)$ быстро затухает при $h \rightarrow 0$ в области, где $\text{Im } S(x, t) > 0$. Если исходная задача решается с точностью до $O(h^N)$, то ясно, что в области, где $\text{Im } S(x, t) > 0$, значение величины $\text{Re } S(x, t)$ несущественно. Поэтому асимптотические решения такого типа приводят к более сложной постановке задачи на уравнение первого порядка, чем та, с которой мы сталкивались в приведенных выше примерах. К формулировке этой задачи мы сейчас и перейдем.

Задача заключается в том, чтобы найти не зависящие от h вещественные функции $S_1(x, t)$ и $S_2(x, t)$ такие, что $S_1(x, t), S_2(x, t) \in C^\infty(R^n[0, T])$, $S_2(x, t) \geq 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ на компактном множестве выполнены соотношения *)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S_1}{\partial t} + f\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}, x, t\right) \right] e^{-S_2(x, t)/h} &= O(h), \\ \left[\frac{\partial S_2}{\partial t} + \tilde{f}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}, x, t\right) \right] e^{-S_1(x, t)/h} &= O(h), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $S_1(x, 0) = S_{10}(x)$, $S_2(x, 0) = S_{20}(x) \geq 0$, а функции $f(p, \tilde{p}, x, t)$

*) Поэтому можно считать, что все рассматриваемые функции имеют компактный носитель.

и $\tilde{f}(p, \tilde{p}, x, t)$ при $\tilde{p}=0$ связаны соотношениями

$$\tilde{f}_{\tilde{p}} = -\tilde{f}_p, \quad \tilde{f}_{\tilde{p}} = \tilde{f}_p, \quad \tilde{f}_{\tilde{p}\tilde{p}} = -\tilde{f}_{pp}, \quad \tilde{f}_{\tilde{p}\tilde{p}} = -\tilde{f}_{pp}$$

и выполнено условие $\tilde{f}(p, 0, x, t) \leq 0$ ($\tilde{f}$, $\tilde{f}$ не зависят от h).

Определение. Приведенную выше систему мы будем называть *диссипативной системой* *) Гамильтона — Якоби.

Основной задачей этой главы является построение глобального решения этой системы.

Введем следующее обозначение. Пусть $f(x) \geq 0$ — гладкая функция. Мы будем обозначать через $O_f(h^\alpha)$ функции $g(x) \in C^\infty$, удовлетворяющие оценке

$$\left| \frac{\partial^{|\mathbf{l}|} g(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} e^{-\frac{f(x)}{h}} \right| = O\left(h^{\alpha - \frac{|\mathbf{l}|}{2}}\right) \text{ при } \alpha - \frac{|\mathbf{l}|}{2} \geq 0, h \rightarrow 0.$$

Нетрудно убедиться, что это соотношение эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{\partial^{|\mathbf{l}|} g(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \right| \leq c_l |f(x)|^{\alpha - \frac{|\mathbf{l}|}{2}}, \text{ где } c_l \text{ — некоторая константа.}$$

Рассмотрим $2n$ -мерное евклидово пространство $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Это пространство будем называть *фазовым пространством*.

Многообразие $\Lambda = \{p = p(\alpha), q = q(\alpha)\}$ размерности n , удовлетворяющее условию

$$[p, q]_{jk} = \sum_i \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\} = 0, \quad (1.2)$$

называется *лагранжевым многообразием* и обозначается Λ^n . Выражение $[p, q]_{jk}$ мы будем называть *скобками Лагранжа*.

Пусть $H(p, q) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — некоторая функция **). Решение $\{p(\alpha, t), q(\alpha, t)\}$ системы Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1.3)$$

где $q|_{t=0} = q(\alpha)$, $p|_{t=0} = p(\alpha)$, $(p(\alpha), q(\alpha)) \in \Lambda^n$ при фиксированном t является лагранжевым многообразием. Выполнение условия (1.2) для решения системы (1.3) может быть проверено непосредственно. Сдвиг вдоль траекторий гамильтониана $H(p, q)$ мы будем обозначать через g_H^t ; таким образом, $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda^n$, и если a — точка на Λ^n , то при сдвиге она переходит в точку $g_H^t a$ на Λ_t^n . Пре-

*) В частности, при $S_{20}=0$, $\tilde{f} = \tilde{p}H_p$, $f = -1/2 \tilde{p}^2 H''_{pp} + H$, где $H = H(p, x, t)$, она сводится к уравнению Гамильтона — Якоби.

**) В этой главе функцию Гамильтона мы будем называть *гамильтонианом*, что не вызовет, разумеется, путаницы с гамильтонианом — оператором, определенным во введении и используемым в следующей главе.

образование g_H^t мы будем называть *каноническим преобразованием, отвечающим гамильтониану* $H(p, q)$.

Пусть α — координата точки $a \in \Lambda^n$. Очевидно, α можно рассматривать как координату точки $g_H^t a$ на Λ_t^n . Надо иметь в виду, что в различные моменты времени один и тот же набор чисел α служит координатами различных точек.

Пусть $F(a)$, $a \in \Lambda^n$ — функция на Λ^n . При каноническом преобразовании g_H^t задается следующий (обычный) закон изменения функции: значение функции $F_t(g_H^t a)$ на Λ_t^n равно значению $F(a)$.

Иначе говоря, $\frac{d}{dt} F_t(\alpha) = 0$. Пусть $\begin{pmatrix} z(\alpha) \\ w(\alpha) \end{pmatrix} (z = z_1, \dots, z_n, w = w_1, \dots$

$\dots, w_n) — 2n$ -мерный комплекснозначный вектор на Λ^n . При каноническом преобразовании g_H^t задается следующий (обычный)

закон его изменения: вектор $\begin{pmatrix} z_t(g_H^t(\alpha)) \\ w_t(g_H^t(\alpha)) \end{pmatrix}$ на Λ_t^n есть решение

системы в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -H_{qq}z - H_{pq}w, \\ \dot{z} &= H_{pq}z + H_{pp}w, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$w|_{t=0} = w(\alpha), \quad z|_{t=0} = z(\alpha),$$

где α — координата точки $a \in \Lambda^n$. Будем обозначать преобразование, отвечающее системе (1.4), через dg_H^t .

Введем важные для дальнейшего понятия диссипации, комплексного ростка, потенциала и μ -действия.

1. Пусть на лагранжевом многообразии $\Lambda^n = (p(\alpha), q(\alpha))$ задана неотрицательная функция $D(\alpha) \in C^\infty$, называемая *диссипацией*. Множество ее нулей обозначим через Γ .

2. *Комплексным ростком* называется совокупность двух комплексных вектор-функций на Λ^n , $\{w(\alpha), z(\alpha)\}$, $w(\alpha) = w_1(\alpha), \dots, w_n(\alpha)$, $z(\alpha) = z_1(\alpha), \dots, z_n(\alpha)$, такая, что выполнены следующие условия (аксиомы комплексного ростка):

2.1.

$$|z(\alpha)| = O_D(h^{1/2}), \quad |w(\alpha)| = O_D(h^{1/2});$$

2.2.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial(p+z)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(q+z)}{\partial\alpha} \\ i \frac{\partial(p+w)}{\partial\alpha} & i \frac{\partial(q+z)}{\partial\alpha} \end{pmatrix}_{\alpha \in \Gamma} = 2n \quad \text{над } \mathbb{R}; \quad (1.4')$$

2.3. существует функция $E(\alpha)$ на Λ^n , называемая потенциалом, такая, что

$$dE(\alpha) = \langle w, dq \rangle - \langle z, dp \rangle + \frac{\langle w, dz \rangle - \langle z, dw \rangle}{2} + \langle f, d\alpha \rangle,$$

где $f = O_D(h)$.

Замечание. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами P, Q как $4n$ -мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^{4n}$. Оператору умножения на i в $\mathbb{C}^{2n}$ отвечает некоторый оператор I в $\mathbb{R}^{4n}$ (выпишите его матрицу). Пусть L — подпространство $\mathbb{R}^{4n}$, порожденное первыми n строками матрицы (1.4'). Условие 2.2 означает, что $L \cap IL = 0$. В этом случае говорят, что подпространство L вещественноподобно.

Перейдем к определению важной квадратичной формы от ростка, называемой μ -действием.

Определение. В тех точках, где $\frac{\partial(q+z)}{\partial\alpha} \neq 0$, μ -действие определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{2} \langle z, C^{-1}Bz \rangle,$$

где

$$C_{ij} = \frac{\partial(q+z)_j}{\partial\alpha_i}, \quad B_{ij} = \frac{\partial(p+w)_j}{\partial\alpha_i}.$$

Из аксиомы 2.3 комплексного ростка вытекает следующее

Следствие. При $\alpha \in \Gamma$ выполняется следующее соотношение для скобок Лагранжа:

$$[p+w, q+z]_{j,k} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial(p_i+w_i)}{\partial\alpha_j} \frac{\partial(q_i+z_i)}{\partial\alpha_k} - \frac{\partial(p_i+w_i)}{\partial\alpha_k} \frac{\partial(q_i+z_i)}{\partial\alpha_j} \right\} = 0.$$

Мы покажем, что отсюда и условия 2.2 следует, что существует покрытие Λ^n (пересекающимися) областями Ω_I , в каждой из которых отличен от нуля один из якобианов:

$$J_I = \det \frac{\partial(q_i+z_i, p_i+w_i)}{\partial\alpha} \neq 0,$$

где I — последовательность целых чисел $I \subset (1, \dots, n)$, $I \cup I = (1, \dots, n)$. Через q_I мы будем обозначать набор $(q_{i_1}, \dots, q_{i_k})$ такой, что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ($i_1, \dots, i_k = I$). Аналогично мы будем понимать символы p_I, z_I, w_I . Через (q_I, p_I) обозначим смешанный набор координат, индексы которых также упорядочены по возрастанию. (Например, (q_1, p_2, q_3) .)

Пару (Ω, I) такую, что $J_I \neq 0$ в Ω , мы будем называть зоной. Мы будем пользоваться обозначением $(\Omega, I) = \Omega_I$.

Определение. Если $I = (1, 2, \dots, n)$, то зона Ω_I называется неособой зоной; в противном случае Ω_I называется особой зоной.

Прежде всего отметим, что произведения $\langle p, q \rangle$ и $\langle w, z \rangle$ определим при переходе в особую зону Ω_I следующим образом:

$$\langle w, z \rangle_I = \langle w_I, z_I \rangle - \langle w_{\bar{I}}, z_{\bar{I}} \rangle,$$

$$\langle p, q \rangle_I = \langle p_I, q_I \rangle - \langle p_{\bar{I}}, q_{\bar{I}} \rangle.$$

Приведем формулу для μ -действия в особой зоне Ω_I . По определению,

$$\det \frac{\partial (q_I + z_I, p_I + w_I)}{\partial \alpha} \neq 0, \quad \alpha \in \Omega_I.$$

Положим по определению

$$2\mu_I = \left\langle \begin{pmatrix} -z_I \\ w_I \end{pmatrix}, \mathcal{J}_I^{-1} \mathcal{J}_I \begin{pmatrix} -z_I \\ w_I \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где мы обозначили

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

и $\mathcal{J}_I$ — матрица Якоби, определяемая равенством

$$\mathcal{J}_I = \frac{\partial (q_I + z_I, p_I + w_I)}{\partial \alpha},$$

а матрица $\mathcal{J}_I$ определяется равенством

$$\mathcal{J}_I = \frac{\partial (p_I + w_I, -q_I - z_I)}{\partial \alpha}.$$

Перейдем теперь к основному в этой главе определению.

Определение. Пусть Λ^n — лагранжево многообразие $\{p(\alpha), q(\alpha)\}$, $D_0(\alpha)$ — диссипация, $E(\alpha)$ — потенциал, $\{w(\alpha), z(\alpha)\}$ — росток на нем, $\mathcal{X}$ — совокупность зон Ω_I , а μ_I — μ -действие в них.

Пусть выполнено следующее соотношение (неравенство диссипативности):

Существуют такие константы $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и функция $c(\alpha, \varepsilon) \geq 0$, что для любого сколь угодно малого ε выполняется неравенство

$$\operatorname{Im} \left(\mu_I + \frac{\langle w, z \rangle_I}{2} \right) \geq \gamma D_0 - \operatorname{Im} E - c(\alpha, \varepsilon) D_0^{3/2 - \varepsilon}. \quad (1.5)$$

Тогда совокупность $\{p(\alpha), q(\alpha)\}$, $\{w(\alpha), z(\alpha)\}$ называется лагранжевым многообразием с комплексным ростком и обозначается (Λ^n, r^n) .

Замечание. Чтобы доказать, что это определение не зависит от способа разбиения окрестности Γ на зоны, нам нужно будет доказать, что из того, что это неравенство при $\alpha \in \Omega_{I_1} \cap \Omega_{I_2}$, выполнено в зоне Ω_{I_1} , следует, что оно выполнено в зоне Ω_{I_2} .

Определение. Выражение

$$\operatorname{Im} \mu_I + \frac{\operatorname{Im} \langle w, z \rangle_I}{2} + \operatorname{Im} E + c(\alpha, \varepsilon) D_0^{3/2 - \varepsilon}$$

мы будем называть энтропией и обозначать буквой $\mathcal{S}_I$.

Энтропия, таким образом, определяется с точностью до $O_{D_0}(h^{3/2}-\varepsilon)$.

Теперь неравенство (1.5) будет иметь вид

$$\mathcal{E}_I \geq \gamma D_0. \quad (1.6)$$

Определение. Выражение вида

$$\mathcal{K} = H(p, q, t) + i\tilde{H}(p, q, t)$$

будем называть комплексным гамильтонианом.

Преобразование $\{p(\alpha), q(\alpha)\}, \{w(\alpha), z(\alpha)\}$ такое, что $\Lambda_I^n = g_{H'}^i \Lambda^n$, а

$$dg_{H'}^i + i\tilde{H} \{w(\alpha), z(\alpha)\} = \{w(\alpha, t), z(\alpha, t)\},$$

где $dg_{H'}^i + i\tilde{H}$ определяется сдвигом вдоль траектории линейной системы

$$\dot{w} = -i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} - \mathcal{K}_{qq}z - \mathcal{K}_{qp}w,$$

$$\dot{z} = i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} + \mathcal{K}_{pq}z + \mathcal{K}_{pp}w,$$

$$w(\alpha, 0) = w(\alpha), \quad z(\alpha, 0) = z(\alpha),$$

будем называть комплексным каноническим преобразованием роста (Λ^n, r^n) .

Если дополнительно выполнено условие $\dot{H} \leq 0$, то это преобразование будем называть диссипативным. Если же при комплексном каноническом преобразовании, отвечающем гамильтониану $\mathcal{K}$, не изменяется энтропия с точностью до $O(h)$, то мы будем называть его адиабатическим преобразованием.

Отметим, что в дальнейшем, если зона — неособая, то индекс I у $\Omega_I, \mathcal{E}_I, \mu_I, p_I, q_I, w_I, z_I$ мы будем опускать.

Теорема 1.1. Определение лагранжева многообразия с комплексным ростком корректно (т. е. не зависит от способа разбиения на зоны). При диссипативном преобразовании росток (Λ^n, r^n) переходит в (Λ_I^n, r_I^n) ; при этом диссипация на (Λ_I^n, r_I^n) равна

$$D_I = D_0 - \int_0^t \tilde{H} dt,$$

а потенциал равен

$$E_I = E - \frac{i}{2} \int_0^t (\langle w, \tilde{H}_p \rangle + \langle z, \tilde{H}_q \rangle + \tilde{H}) dt,$$

где D_0 и E — соответственно диссипация и потенциал на (Λ^n, r^n) и интегралы берутся вдоль путей *) g_H^t .

Но, как уже говорилось, основной нашей задачей будет конструкция решения в целом системы Гамильтона — Якоби с диссипацией. Для этого введем еще одно определение.

Пусть Λ^n таково, что существует функция $s(\alpha)$, удовлетворяющая уравнению $ds(\alpha) = p(\alpha) dq(\alpha)$. Положим $s_I(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} s(\alpha) - \langle p_I, q_I \rangle$. В каждой зоне Ω_I будем называть s -действием функцию $s_I(\alpha)$.

Определение. Фазой роста (Λ^n, r^n) в зоне Ω_I называется выражение вида

$$\Phi_I = -\frac{1}{2} \langle \omega, z \rangle_I + \mu_I + s_I + E.$$

Мы докажем ниже, что, если неособая зона проектируется диффеоморфно на q -плоскость, то пара функций на (Λ_I^n, r_I^n)

$$S_1 = \text{Re } \Phi(\alpha, t), \quad S_2 = \mathcal{E}(\alpha, t),$$

где $\alpha = \alpha(x, t)$ — решение уравнения $q(\alpha, t) = x$, удовлетворяет системе Гамильтона — Якоби с диссипацией. Если же Ω_I -зона проектируется диффеоморфно на (p_I, q_I) -плоскость, то

$$S_1 = \text{Re } \Phi'_I, \quad S_2 = \mathcal{E}_I, \quad q_I(\alpha, t) = x_I, \quad p_I(\alpha, t) = \xi_I$$

удовлетворяет другой системе Гамильтона — Якоби с диссипацией, связанной с исходной некоторым простым преобразованием, которое мы назовем « I -преобразованием Лежандра». Возникает вопрос, как определить решения системы Гамильтона — Якоби с диссипацией в окрестности Ω^{α_0} точки α_0 зоны Ω_I , не проектирующейся диффеоморфно на соответствующую плоскость (q_I, p_I) (I -плоскость).

При построении такого классического решения в зоне Ω_I мы для простоты можем ограничиться случаем неособой зоны.

Это построение основано на следующем простом факте. Из того, что матрица $\frac{\partial(q+z)}{\partial\alpha}$ невырождена, немедленно следует

Лемма 1.1. В окрестности любой точки $\alpha^0 \in \Omega$, где Ω — неособая зона, найдутся такие функции $\gamma_i(\alpha)$, равные либо $\text{Im } z_i$, либо $\text{Re } z_i$, либо нулю, что $\det \left\| \frac{\partial(q_i + \gamma_i)}{\partial\alpha_j} \right\| \neq 0$.

*) Например,

$$\int_0^t \tilde{H} dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \tilde{H}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t) dt,$$

где

$$\{p(\alpha, t), q(\alpha, t)\} = g_H^t \{p(\alpha), q(\alpha)\}.$$

(Доказательство см. на стр. 448.)

Определение. Разобьем зону Ω на области ω^γ , в каждой из которых отличен от 0 один из якобианов указанного выше вида. Такое разбиение назовем каноническим покрытием (зоны).

Аналогично определим каноническое покрытие для особой зоны Ω_1 .

На пересечении областей ω^0 и ω^γ мы перестроим решение (произведем γ -перестройку) с помощью отображения $\alpha \rightarrow \sigma(\alpha)$, где

$$q(\alpha) = q(\sigma) + \gamma(\sigma).$$

Выразим функции, входящие в полученное ранее решение, через σ и затем разложим $\text{Re } \Phi$ и $\mathcal{E}$ по степеням γ (это приводит к вычитанию γ из z в энтропии и фазе).

В новые формулы входит функция $\sigma(x)$, которая есть решение уравнения

$$q(\sigma) + \gamma(\sigma) = x,$$

разрешимого во всей области ω^γ ; оказывается, они дают решение системы Гамильтона — Якоби с диссипацией в этой области. Область ω^γ (вместе с отображением σ) назовем γ -картой. Решение в разных γ -картах склеим с помощью разбиения единицы.

Оказывается, решение в γ -карте неособой зоны получается по таким же формулам, как и решение в зоне ω^0 , если заменить отображение $\alpha(x)$ на $\sigma(x)$ и функции $E, \mu, \mathcal{E}, \Phi$ — на $E^\gamma, \mu^\gamma, \mathcal{E}^\gamma, \Phi^\gamma$ согласно следующему определению.

Определение. В γ -карте положим

$$E^\gamma(\sigma) = E(\sigma) + \langle p, \gamma \rangle + \frac{\langle w, \gamma \rangle}{2},$$

$$\mu^\gamma(\sigma) = \frac{\langle z - \gamma, C^{-1}B(z - \gamma) \rangle}{2}(\sigma),$$

$$\mathcal{E}^\gamma = \mathcal{E}(\sigma) + \text{Im} \left[-\langle z, C^{-1}B\gamma \rangle + \frac{\langle \gamma, C^{-1}B\gamma \rangle}{2} \right],$$

$$\Phi^\gamma = \Phi(\sigma) + \langle p, \gamma \rangle - \langle z, C^{-1}B\gamma \rangle + \frac{\langle \gamma, C^{-1}B\gamma \rangle}{2}.$$

Под γ -дiffeоморфизмом мы понимаем взаимно однозначное отображение $q(\sigma) + \gamma(\sigma) = x$, $\sigma = \sigma(x)$ с невырожденным якобианом.

Обозначим

$$S_1(x) = \sum_{\gamma} e^\gamma(x) \text{Re } \Phi^\gamma(\sigma(x)),$$

$$S_2(x) = \sum_{\gamma} e^\gamma(x) \mathcal{E}^\gamma(\sigma(x)), \quad \sum_{\gamma} e^\gamma(x) = 1, \quad \forall x: \sigma(x) \in \Omega.$$

Аналогично определим $S_1(x_I, \xi_{\bar{I}})$ и $S_2(x_I, \xi_{\bar{I}})$ в зоне Ω_I . Именно, по определению, положим

$$E\gamma(\sigma) = E(\sigma) + \langle p_I, \gamma_I \rangle - \langle q_{\bar{I}}, \gamma_{\bar{I}} \rangle + \frac{\langle \omega_I, \gamma_I \rangle}{2} - \frac{\langle z_{\bar{I}}, \gamma_{\bar{I}} \rangle}{2},$$

$$\mu\gamma(\sigma) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} -z_I - \gamma_I \\ \omega_{\bar{I}} - \gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \mathcal{J}_{\bar{I}}^{-1} \mathcal{J}_{\bar{I}} \begin{pmatrix} -z_I - \gamma_I \\ \omega_{\bar{I}} - \gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix} \right\rangle (\sigma),$$

$$\mathcal{E}\gamma(\sigma) = \mathcal{E}_I(\sigma) + \\ + \operatorname{Im} \left[\left\langle \begin{pmatrix} -z_I \\ \omega_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \mathcal{J}_{\bar{I}}^{-1} \mathcal{J}_{\bar{I}} \begin{pmatrix} \gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} +\gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \mathcal{J}_{\bar{I}}^{-1} \mathcal{J}_{\bar{I}} \begin{pmatrix} \gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix} \right\rangle \right],$$

$$\Phi\gamma(\sigma) = \Phi_I(\sigma) + \langle p_I, \gamma_I \rangle - \langle q_{\bar{I}}, \gamma_{\bar{I}} \rangle + \\ + \left\langle \begin{pmatrix} -z_I \\ \omega_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \mathcal{J}_{\bar{I}}^{-1} \mathcal{J}_{\bar{I}} \begin{pmatrix} \gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix}, \mathcal{J}_{\bar{I}}^{-1} \mathcal{J}_{\bar{I}} \begin{pmatrix} \gamma_I \\ -\gamma_{\bar{I}} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Возьмем какое-нибудь разбиение зоны Ω_I на $\omega\gamma$ -карты и фиксируем его.

Пусть $e^\gamma(x_I, \xi_{\bar{I}})$ — разбиение единицы в $(x_I, \xi_{\bar{I}})$ -плоскости по γ -диффеоморфизму $\omega\gamma$ -карт. Здесь под γ -диффеоморфизмом мы понимаем отображение

$$q_I(\sigma) + \gamma_I(\sigma) = x_I, \quad p_{\bar{I}}(\sigma) + \gamma_{\bar{I}}(\sigma) = \xi_{\bar{I}}, \quad \sigma = \sigma(x_I, \xi_{\bar{I}}).$$

Раз и навсегда фиксировав это разбиение единицы, мы будем называть его *весовым разбиением единицы* по $\omega\gamma$ -картам. Положим по определению

$$S_1^I(x_I, \xi_{\bar{I}}) = \sum_{\gamma} e^\gamma(x_I, \xi_{\bar{I}}) \operatorname{Re} \Phi\gamma(\sigma(x_I, \xi_{\bar{I}})), \\ S_2^I(x_I, \xi_{\bar{I}}) = \sum_{\gamma} e^\gamma(x_I, \xi_{\bar{I}}) \mathcal{E}\gamma(\sigma(x_I, \xi_{\bar{I}})). \quad (1.6')$$

Пусть $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda^n$, а $r_t^n = dg_{H+i\tilde{H}}^t r^n$. Будем обозначать функции S_1^I и S_2^I на (Λ_t^n, r_t^n) через $S_1^I(x_I, \xi_{\bar{I}}, t)$, $S_2^I(x_I, \xi_{\bar{I}}, t)$ соответственно. Пусть функции

$$f_1(x, y_1, y_2, y_4, y_5, \xi) \text{ и } f_2(x, y_1, y_2, y_4, y_5, \xi),$$

$x, y_4, y_5 \in \mathbb{R}^{|I|}$, $\xi, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{|I|}$, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $|I| = k$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_i} = (-1)^j \frac{\partial f_2}{\partial y_j}$$

и

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_i^k \partial y_j^m} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_j^k \partial y_i^m}, \quad f_2 \geq 0$$

при $y_2 = y_5 = 0$ и

$\forall i, j: (i \in 1, 2, 4, 5; j \in 1, 2, 4, 5; j = i + 1 \text{ либо } j = i - 1)$.

Рассмотрим диссипативную систему Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S_1^I}{\partial t} - f_1 \left(x_I, \frac{\partial S_1^I}{\partial \xi_I}, \frac{\partial S_1^I}{\partial \xi_I}, \frac{\partial S_1^I}{\partial x_I}, \frac{\partial S_1^I}{\partial x_I}, \xi_I \right) = O_{S_1^I} (h^{3/2-\varepsilon}), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial S_2^I}{\partial t} - f_2 \left(x_I, \frac{\partial S_1^I}{\partial \xi_I}, \frac{\partial S_2^I}{\partial \xi_I}, \frac{\partial S_1^I}{\partial x_I}, \frac{\partial S_2^I}{\partial x_I}, \xi_I \right) = O_{S_2^I} (h^{3/2-\varepsilon}), \quad t \geq \delta.$$

(Напомним, что в обозначение $O_{S_2^I}(h)$ уже входит условие положительности S_2^I). Положим

$$H = f_1(q_I, q_I, 0, p_I, 0, p_I), \quad \tilde{H} = f_2(q_I, q_I, 0, p_I, 0, p_I), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{H} = H + i\tilde{H},$$

и пусть $\mathcal{H}$ не зависит от I .

Мы докажем ниже следующую основную в этой главе теорему.

Теорема 1.2. Пусть (Λ^n, r^n) — лагранжево многообразие с комплексным ростком, а $(g_H^t, dg_{H+i\tilde{H}}^t) \stackrel{\text{def}}{=} Dg_{H+i\tilde{H}}^t$ — диссипативное преобразование, определяемое гамильтонианом $\mathcal{H}(p, q, t)$. Тогда функции $S_1^I(x_I, \xi_I, t)$ и $S_2^I(x_I, \xi_I, t)$, отвечающие ростку $(g_H^t \Lambda^n, dg_{H+i\tilde{H}}^t r^n)$ и особой зоне Ω_I^t , удовлетворяют (для любого конечного t) диссипативной системе Гамильтона — Якоби (1.7).

Замечание. Для достаточно малого t очевидно, что для всех точек $\alpha \in \Omega_I$ якобиан $|J_I(\alpha, t)|$ при сдвиге вдоль траектории диссипативного гамильтониана не обращается в нуль. И таким образом, мы можем написать, что для достаточно малого t

$$(\Omega_I)^t = (\Omega_I^t)_I. \quad (1.9)$$

Из леммы 3.1 следует, что любой отрезок времени $(0, T)$ может быть разбит на такое конечное число отрезков $(0, t_1, t_2, \dots, t_k, T)$, что для каждого t_i можно выбрать такое разбиение $(\Lambda_{t_i}^n, r_{t_i}^n)$ на зоны $\{\Omega_I\}^i$, чтобы для каждой зоны выполнялось условие (1.9) при $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Но в силу теоремы 1.1 переход от разбиения $\{\Omega_I\}^i$ к $\{\Omega_I\}^{i+1}$ при фиксированном t_i сохраняет все величины на $(\Lambda_{t_i}^n, r_{t_i}^n)$.

Поэтому если доказать справедливость утверждения теоремы 1.2 для малого отрезка времени, такого, при котором имеет место условие (1.9), то из такого рассуждения немедленно следует справедливость утверждения теоремы 1.2 в целом, т. е. на любом конечном интервале времени t .

Таким образом, нам остается лишь доказать теорему 1.2 в малом для отдельной зоны Ω_l . Совершенно очевидно, что мы не уменьшим общности, если докажем ее лишь для неособой зоны.

Доказательство теоремы 1.2 для неособой зоны изложено в § 2 и § 3. Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется знание решения уравнения переноса с диссипацией. Исследование этого уравнения проводится в § 5. В § 6 на основе результатов § 3, § 4 и § 5 осуществляется операция обхода фокусов — важная конструкция, которая позволяет переносить неравенство диссипативности из зоны в зону. Этот факт, как легко видеть, — единственное, что требуется для доказательства теоремы 1.1. В силу сделанных выше замечаний, таким образом, из результатов § 6 следует доказательство теоремы 1.2 в целом.

Пусть теперь $\Lambda^n = \{p = p(\alpha), q = q(\alpha)\}$ — лагранжево многообразие с комплексным ростком. Напомним, что через $Dg_{H+i\tilde{H}}^t$ мы обозначаем комплексное каноническое преобразование, соответствующее гамильтониану $\mathcal{H}(p, q, t) = H(p, q, t) + i\tilde{H}(p, q, t)$. Предположим, что наше преобразование обладает свойством диссипативности (т. е. $-\tilde{H} \geq 0$).

Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$ переменных (q, t, p, p_0) многообразие, задаваемое уравнениями

$$\tilde{\Lambda}^{n+1} = (q(\alpha, t), p(\alpha, t), t, p_0(\alpha, t)),$$

где $p(\alpha, t), q(\alpha, t)$ — решение системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(p, q, t), & p(0) = p(\alpha), \\ \dot{p} = -H_q(p, q, t), & q(0) = q(\alpha). \end{cases}$$

Функция $p_0(\alpha, t)$ определяется равенством

$$p_0(\alpha, t) = H(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t).$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что скобки Лагранжа

$$[p, q]_{j,k}, [p, p_0]_{j,k}, [q, p_0]_{j,k} \text{ и т. д.}$$

обращаются в 0, т. е. $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ — лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Определим на $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ комплексный вектор (z, z_0, w, w_0) , где $z = z(\alpha, t)$, $w = w(\alpha, t)$, $(w(\alpha, t), z(\alpha, t)) = dg_{H+i\tilde{H}}^t(w(\alpha), z(\alpha))$, $z_0 = 0$, $w_0 = -\frac{i}{2}(\langle w, \tilde{H}_p \rangle + \langle z, \tilde{H}_q \rangle + \tilde{H})$.

Определим еще диссипацию $D(\alpha, t)$:

$$D(\alpha, t) = D(\alpha) - \int_0^t \tilde{H}(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau)) d\tau$$

и потенциал

$$E(\alpha, t) = E(\alpha) - \frac{i}{2} \int_0^t (\langle \omega, \dot{H}_p \rangle + \langle z, \dot{H}_q \rangle + H) dt.$$

Из результатов §§ 2—6 следует, что лагранжево многообразие с определенными на нем только что функциями удовлетворяет аксиомам комплексного ростка. Именно, справедливость аксиомы 2.1 следует из лемм 2.1 и 2.4, аксиомы 2.2 — из лемм 3.1 и 3.2, справедливость аксиомы 2.3 следует из леммы 2.5.

Таким образом, мы получаем, что $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ есть лагранжево многообразие с комплексным ростком. Обозначим $(\tilde{\Lambda}^{n+1}, r^{n+1}) = Dg_{H+i\tilde{H}}^t(\Lambda^n, r^n)$. Из теоремы 1.2 следует, что функции $S_1^i(x_j, \xi_j, t)$ и $S_2^i(x_j, \xi_j, t)$, определенные соответственно как действительная и мнимая часть фазы ростка $(\tilde{\Lambda}^{n+1}, r^{n+1})$ в зоне $\Omega^{n+1} \subset \tilde{\Lambda}^{n+1}$, являются решениями (для любого конечного t) системы Гамильтона — Якоби (1.7).

§ 2. Решение в малом уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией

Наша задача — получить в явном виде решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией (1.7), выразив их через решения системы Гамильтона и системы уравнений для ростка. В предыдущем параграфе уже были приведены явные формулы, и теперь задачей является их доказательство. На эвристических соображениях, при помощи которых они были получены, мы останавливаться не будем. Очевидно, можно доказать, что предъявленная функция удовлетворяет уравнению, подставив ее в уравнение и произведя дифференцирование и приведение подобных членов. И в данном случае мы поступим именно таким образом.

Однако, поскольку уже само определение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией содержит оценку, то эта процедура будет еще сопряжена с некоторыми оценками. Поэтому мы предварительно докажем несколько элементарных оценок, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1 (неравенство Гординга). Пусть $F(x) \geq 0$, $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $|\nabla F(x)|^2 \leq c \cdot F(x) \max \|F'_{x_i x_j}\|$.

Доказательство. Имеем

$$0 \leq F(x_1, \dots, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq F(x_1, \dots, x_n) + t \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{t^2}{2} \max |F'_{x_k x_k}|.$$

Известно, что условием положительности квадратного трехчлена

является положительность его дискриминанта, т. е.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_h} \right|^2 \leq 2 \max |F''_{x_h x_h}| F(x). \quad (2.1)$$

Из неравенства (2.1) непосредственно следует утверждение леммы.

Неравенство Гординга имеет важное

Следствие. Пусть $F(x) \geq 0$, $F(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|\nabla F(x)|^N e^{-F(x)/h} = O(h^{N/2}).$$

Доказательство. Элементарные выкладки показывают, что

$$\max_{t \geq 0} |t^N e^{-t/h}| = O(h^N). \quad (2.2)$$

В силу неравенства Гординга имеем:

$$|\nabla F(x)|^N e^{-F(x)/h} \leq c (F(x))^{N/2} e^{-F(x)/h}, \\ c = \text{const.}$$

Обозначая теперь $F(x) = t$ и используя оценку (2.2), мы получаем, что $|\nabla F(x)|^N \exp\left(-\frac{F(x)}{h}\right) \leq ch^{N/2}$, $c = \text{const.}$ Следствие доказано.

Пусть $p(p_0, q_0, t)$, $q(p_0, q_0, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$. Рассмотрим функцию $\tilde{H}(p, q, t) \geq 0$, $\tilde{H} \in C^\infty$, p, q, t принадлежат компакту.

Лемма 2.2. Для любого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства

$$|\tilde{H}_p| \left| \int_0^t \tilde{H}_p d\tau \right| \leq c_1(\varepsilon) D^{1-\varepsilon},$$

$$|\tilde{H}_q| \left| \int_0^t \tilde{H}_q d\tau \right| \leq c_2(\varepsilon) D^{1-\varepsilon},$$

$$t\tilde{H} \leq c_3(\varepsilon) D^{1-\varepsilon}, \text{ где } D = \int_0^t \tilde{H}(p, q, \tau) d\tau.$$

Доказательство. 1) Предположим вначале, что не все коэффициенты разложения функции $\tilde{H}(p, q, t)$ по формуле Тейлора по t в точке $t=0$ равны 0. Тогда

$$\tilde{H}(p(p_0, q_0, t), q(p_0, q_0, t), t) = c(p_0, q_0) t^s + O(t^{s+1}),$$

где s — целое неотрицательное число, и

$$D = \int_0^t \tilde{H}(p, q, \tau) d\tau = c(p_0, q_0) t^{s+1} + O(t^{s+1}) \geq$$

$$\geq c_1 t \tilde{H}(p, q, t), \quad c_1 = \text{const.}$$

Значит, в этом случае

$$\tilde{H}(p, q, t) \leq c_2 (D)^{1-\frac{1}{s+1}}.$$

В силу леммы 2.1

$$|\tilde{H}_p(p, q, t)| \leq c_3(D)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(s+1)}},$$

$$|\tilde{H}_q(p, q, t)| \leq c_4(D)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(s+1)}}$$

и

$$\int_0^t |\tilde{H}_p| d\tau \leq c_5(D)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2(s+1)}},$$

$$\int_0^t |\tilde{H}| d\tau \leq c_6(D)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2(s+1)}},$$

$$c_i = \text{const}, i = 1, \dots, 6.$$

Из последних неравенств и следует утверждение леммы в этом случае.

2) Пусть все коэффициенты разложения функции $\tilde{H}(p, q, t)$ по формуле Тейлора равны 0, т. е. $\tilde{H} = O(t^N)$, где N — любое целое число, и пусть точка t_0 такова, что $D(t_0) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{[D(t)]^\varepsilon - [D(t_0)]^\varepsilon}{t - t_0} = O(t - t_0)^{N(\varepsilon)},$$

где $N(\varepsilon) \geq 0$ — любое целое число, поскольку, если $t_0 = 0$, то это следует из предположения, а если $t_0 \neq 0$, то, в силу монотонности, $D(t) \equiv 0$ при $t \leq t_0$ и, следовательно, все ее производные в точке t_0 равны 0. Поэтому производная $\frac{d[D(t)]^\varepsilon}{dt}$ ограничена, и, значит, $D'(t) \leq c(\varepsilon)(D(t))^{1-\varepsilon}$, т. е. $\tilde{H} \leq c(\varepsilon)(D)^{1-\varepsilon}$. Из этого неравенства и леммы 2.1 получаем утверждение леммы в этом случае. Аналогично доказывается последняя оценка леммы.

Получим еще нужные для дальнейшего оценки решений линейных уравнений первого порядка в частных производных.

Пусть $X = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ — векторное поле на R_x^n , трансверсальное некоторой бесконечно дифференцируемой $n-1$ -мерной поверхности M^{n-1} . Тогда решение задачи

$$Xu(x) = f(x), \quad u|_{M^{n-1}} = 0,$$

где $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, существует и единственно в некоторой окрестности M^{n-1} .

Если мы введем криволинейную систему координат $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ на M^{n-1} и «длину» l траектории векторного поля X , то

$$u(x) = u(x(\alpha, l)) = \int_0^l f(x(\alpha, l)) dl. \quad (2.3)$$

Интеграл (2.3) мы будем сокращенно писать в виде

$$u = \int^x f(x) dl.$$

Имеет место следующая элементарная лемма.

Лемма 2.3. Пусть функции $u_i(x)$, $i = 1, 2$, такие, что $u_i|_{M^{n-1}} = 0$, удовлетворяют неравенству:

$$\begin{aligned} |Xu_i(x)| \leq & c_1 \sqrt{f_1(x)} \sqrt{|u_i(x)|} + c_2 |f_2(x)| + c_3 |u_1(x)| + \\ & + c_4 |u_2(x)| + c_5 \int^x |f_3(x)| dl + c_6 \int^x \sqrt{|f_4(x)|} \sqrt{|u_i(x)|} dl + \\ & + c_7 \int^x \sqrt{|f_5(x)|} dl, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где c_i , $i = 1, 2, \dots, 7$ — некоторые положительные числа, f_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ — бесконечно дифференцируемые функции. Тогда

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| \leq c_0 F(x),$$

где

$$F(x) = \sum_{i=1}^4 \int^x |f_i(x)| dl + \sqrt{\int^x |f_5(x)| dl}$$

и c_0 — некоторая константа.

Доказательство. Используя неравенства $2ab < a^2 + b^2$,

$$\left(\int^x \sqrt{|f(x)|} dl \right)^2 \leq l \int^x |f(x)| dl,$$

и неравенство

$$\int^x \left\{ \int^x |f(x)| dl \right\} dl \leq l \int^x |f(x)| dl$$

(поскольку функция в фигурных скобках не убывает вдоль траекторий векторного поля), получаем из (2.3)

$$\begin{aligned} |u_i(x)| \leq & \left| \int^x \left\{ \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\} dl \right| \leq \int^x \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| dl \leq \\ \leq & c_1 \left(\int^x |f_1(x)| dl + \int^x |u_i(x)| dl \right) + c_2 \int^x |f_2(x)| dl + c_3 \int^x |u_1(x)| dl + \\ & + c_4 \int^x |u_2(x)| dl + c_5 \int^x |f_3(x)| dl + c_6 \left(\int^x |f_4(x)| dl + \int^x |u_i(x)| dl \right) + \\ & + c_7 l^{3/2} \sqrt{\int^x |f_5(x)| dl} \leq c_8 \left(F(x) + \int^x (|u_1(x)| + |u_2(x)|) dl \right). \end{aligned}$$

То есть

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| \leq c_0 \left(F(x) + \int^x (|u_1(x)| + |u_2(x)|) dl \right). \quad (2.5)$$

Из неравенства (2.5) немедленно получаем:

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| \leq c_0 F(x) + c_0^2 \int^x F(x) dl + \int^x dl \int^x (|u_1(x)| + |u_2(x)|) dl.$$

Продолжая этот процесс и учитывая, что для неубывающей $f(x)$

$$\int^x dl \dots \int^x |f(x)| dl \leq \frac{|f(x)| l^n}{n!},$$

получаем для любого $N > 0$

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| \leq F(x) \sum_{n=0}^N \frac{c_0^{n+1} l^n}{n!} + \frac{l^N}{N!} \int^x (|u_1(x)| + |u_2(x)|) dl.$$

Устремляя теперь N к бесконечности, получим утверждение леммы.

Используя следствие леммы 2.1, преобразуем систему (1.1) к более удобному для нас виду. Для этого разложим функции $f(p, \tilde{p}, x, t)$ и $\tilde{f}(p, \tilde{p}, x, t)$ по формуле Тейлора в точке $\tilde{p} = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p, \tilde{p}, x, t) &= \tilde{f}(p, 0, x, t) + \langle \tilde{p}, \tilde{f}_p(p, 0, x, t) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \tilde{p}, \tilde{f}_{pp}(p, 0, x, t) \tilde{p} \rangle + O(\|\tilde{p}\|^3), \\ f(p, \tilde{p}, x, t) &= f(p, 0, x, t) + \langle \tilde{p}, f_p(p, 0, x, t) \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \tilde{p}, f_{pp}(p, 0, x, t) \tilde{p} \rangle + O(\|\tilde{p}\|^3). \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$. Заметим, что в силу следствия из леммы 2.1 система уравнений (1.1) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S_1}{\partial t} + f\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) + \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) \right\rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle \right] = O_s(h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}), \quad (2.6) \\ \left[\frac{\partial S_2}{\partial t} + \tilde{f}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) + \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) \right\rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right) \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle \right] = O_s(h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Положим

$$H(p, x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(p, 0, x, t), \quad \tilde{H}(p, x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(p, 0, x, t)$$

и введем функцию $\mathcal{H}(p, x, t) \stackrel{\text{def}}{=} H(p, x, t) + i\tilde{H}(p, x, t)$. Теперь умножим на i второе уравнение системы и сложим первое уравнение со вторым. Вспоминая свойства функций $f(p, \tilde{p}, x, t)$ и $\tilde{f}(p, \tilde{p}, x, t)$, мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(S_1 + iS_2)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right) + i \left\langle \mathcal{H}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right), \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \mathcal{H}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right) \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle \right] = O_s(h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}). \quad (2.7) \end{aligned}$$

Таким образом, мы свели поставленную в § 1 задачу к следующей: найти функции $S_1(x, t)$ и $S_2(x, t)$ такие, что $S_1(x, t)$, $S_2(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, $S_2(x, t) \geq 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение (2.7).

Легко видеть, что пара функций, удовлетворяющих соотношению (2.7), удовлетворяет также и соотношениям (2.6). Кроме того, соотношение (2.7) будет играть важную роль в гл. VII.

Определение. Соотношение (2.7) мы будем называть уравнением Гамильтона—Якоби с диссипацией, соответствующим гамильтониану $\mathcal{H}(p, q, t)$.

Рассмотрим задачу Коши для системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= H_p(p, q, t) & q(0) &= q_0(\alpha), \\ \frac{dp}{dt} &= -H_q(p, q, t) & p(0) &= p_0(\alpha). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условия на действительный гамильтониан $H(p, q, t)$, при которых существует решение в целом системы Гамильтона, приводятся в главе I, § 8.

Решения системы (2.8) обозначим

$$q = q(\alpha, t), \quad p = p(\alpha, t).$$

Предположим далее, что на Λ^n заданы комплекснозначные функции $z_{01}(\alpha), \dots, z_{0n}(\alpha); w_{01}(\alpha), \dots, w_{0n}(\alpha)$. Обозначим точкой дифференцирование по t в силу системы (2.8) (т. е. при фиксировании α) и рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\tilde{H}_p(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t) + \mathcal{K}_{pq}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t)z + \\ &\quad + \mathcal{K}_{pp}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t)w, \\ \dot{w} &= -i\tilde{H}_q(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t) - \mathcal{K}_{qq}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t)z - \\ &\quad - \mathcal{K}_{qp}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t)w \\ z|_{t=0} &= z_0(\alpha), \quad w|_{t=0} = w_0(\alpha). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $\mathcal{K}_{pq}$, $\mathcal{K}_{pp}$, $\mathcal{K}_{qq}$ — матрицы. Например, $(\mathcal{K}_{pq})_{ij} = \mathcal{K}_{p_i q_j}$. Систему уравнений (2.9) мы называем уравнениями (комплексного) роста. Условимся, что всюду в дальнейшем, если аргумент у функции $\mathcal{K}$ опущен, то подразумевается подстановка $p = p(\alpha, t)$, $q = q(\alpha, t)$, $z = z(\alpha, t)$, $w = w(\alpha, t)$. Мы будем называть полным лагранжианом роста функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\langle H_p, p \rangle + \langle H_q, q \rangle - i \langle \tilde{H}_p, w \rangle - i \langle \tilde{H}_q, z \rangle + \\ + \frac{d}{dt} [\langle p, q \rangle - \langle w, z \rangle]) - \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Предположим далее, что на отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$ не

обращается в нуль ни один из якобианов:

$$\frac{Dq}{D\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|,$$

$$\frac{D(q+z)}{D\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \det \left\| \frac{\partial (q_k + z_k)}{\partial \alpha_s} \right\|.$$

Тогда по теореме о неявной функции при $0 \leq t \leq t_0$ система уравнений

$$q_i(\alpha, t) = x_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение $\alpha = \alpha(x, t)$. Введем функцию $S_n(x, t)$, которую мы будем называть *полным ростковым действием*:

$$S_n(x, t) = S_{0n}(\alpha(x, t)) + \left[\int_0^t \mathcal{L}(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau) d\tau \right]_{\alpha = \alpha(x, t)}. \quad (2.12)$$

Здесь $S_{0n} = E_0(\alpha) - 1/2 \langle z, w \rangle$.

Теорема 2.1. Пусть при $0 \leq t \leq T$

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial (q_i + z_i)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Тогда соотношению (2.7) удовлетворяют функции $S_1(x, t)$ и $S_2(x, t)$, определяемые равенствами

$$S_1(x, t) = \text{Re } \Phi(\alpha(x, t), t), \quad S_2(x, t) = \mathcal{S}(\alpha(x, t), t),$$

где $\Phi(\alpha, t)$ — фаза, а $\mathcal{S}(\alpha, t)$ — энтропия на лагранжевом многообразии Λ_t^n с комплексным ростком, полученном при сдвиге за время t , $0 \leq t \leq T$ начального лагранжева многообразия вдоль траекторий системы (2.8), (2.9), $\alpha = \alpha(x, t)$ — решение уравнений (2.11).

Замечание 1. Мы будем иногда говорить также, что функция $S(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} S_1(x, t) + iS_2(x, t)$ удовлетворяет соотношению (2.7).

Замечание 2. Легко видеть, что фазу $\Phi(\alpha, t)$ можно еще определить равенством

$$\Phi(\alpha, t) = S_n(\alpha, t) + \mu(\alpha, t),$$

где $S_n(\alpha, t)$ — полное ростковое действие, определяемое равенством (2.12).

Изложим кратко план доказательства теоремы. Вначале мы будем вычислять и оценивать производные функции $S_n(x, t) + \mu(x, t)$ по аргументам t и x , используя леммы 2.1 — 2.3 и вводя для удобства промежуточные функции. Итогом этой части доказательства является лемма 2.8. Затем мы покажем, что из условий теоремы следует, что функция $S_n(x, t) + \mu(x, t)$ удовлетворяет неравенству диссипативности при $t > 0$. Этот факт позволит

нам завершить доказательство теоремы. Мы получаем в первой части доказательства оценки через диссипацию $D(x, t)$, так как, во-первых, через функцию $D(x, t)$ удобно оценивать росток $(z(\alpha, t), w(\alpha, t))$, а во-вторых — неравенство диссипативности позволяет легко перейти от оценок вида $O_D(h^\alpha)$ к нужным нам оценкам вида $O_{S_1}(h^\alpha)$.

Мы начнем с доказательства простого, но важного неравенства — оценки решений системы (2.9). По лемме 2.3 имеем

$$|\omega(\alpha, t)| + |z(\alpha, t)| \leq \leq \text{const} \left(|z_0(\alpha)| + |\omega_0(\alpha)| + \int_0^t (|\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q|) d\tau \right).$$

Но по лемме 2.1

$$\int_0^t |\tilde{H}_q| d\tau \leq c_1 \int_0^t |V \tilde{H}| d\tau \leq c_2 \left| t \cdot \int_0^t \tilde{H} d\tau \right|^{1/2},$$

и, аналогично,

$$\int_0^t |\tilde{H}_p| d\tau \leq c_3 \left| t \cdot \int_0^t \tilde{H} d\tau \right|^{1/2}.$$

Из этих неравенств, а также из аксиомы 2.1 комплексного ростка и определения диссипации, немедленно следует

Лемма 2.4. *Справедливо неравенство*

$$|\omega(\alpha, t)| + |z(\alpha, t)| \leq c (tD(\alpha, t))^{1/2}, \quad c = \text{const}.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\alpha, t) = E_0(\alpha) + \int_0^t \left\{ -i\tilde{H} - \frac{i}{2} \langle \tilde{H}_p; w \rangle - \frac{i}{2} \langle \tilde{H}_q; z \rangle \right\} d\tau, \quad \begin{matrix} p=p(\alpha, \tau) \\ q=q(\alpha, \tau) \\ w=w(\alpha, \tau) \\ z=z(\alpha, \tau) \end{matrix} \quad (2.13)$$

где $E_0(\alpha)$ — потенциал на начальном лагранжевом многообразии.

Вычислим F_{α_j} . Для этого преобразуем подынтегральное выражение в (2.13). Введем функцию

$$w^0 \stackrel{\text{def}}{=} -i\tilde{H} - \langle \mathcal{H}_p; w \rangle - \langle \mathcal{H}_q; z \rangle - \frac{1}{2} (\langle z, \mathcal{H}_{qq}z \rangle + 2 \langle w, \mathcal{H}_{pq}z \rangle + \langle w, \mathcal{H}_{pp}w \rangle). \quad (2.14)$$

Используя теперь системы уравнений (2.8) и (2.9), подынтегральное выражение в равенстве (2.13) можно переписать в виде

$$-i\tilde{H} - \frac{i}{2} \langle \tilde{H}_p; w \rangle - \frac{i}{2} \langle \tilde{H}_q; z \rangle = \\ = \langle w, \dot{q} \rangle - \langle z, \dot{p} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, \dot{w} \rangle + \frac{1}{2} \langle w, \dot{z} \rangle + w^0.$$

Поэтому в силу аксиомы 2.3 (стр. 417)

$$F_{\alpha_j} = \langle w_0, q_{0\alpha_j} \rangle - \langle z_0, p_{0\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z_0, w_{0\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle w_0, z_{0\alpha_j} \rangle + \\ + f_j + \int_0^t \left\{ \langle w_{\alpha_j}, \dot{q} \rangle + \langle w, \dot{q}_{\alpha_j} \rangle - \langle z_{\alpha_j}, \dot{p} \rangle - \langle z, \dot{p}_{\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z_{\alpha_j}, \dot{w} \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle z, \dot{w}_{\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle w_{\alpha_j}, \dot{z} \rangle + \frac{1}{2} \langle w, \dot{z}_{\alpha_j} \rangle + w_{\alpha_j}^0 \right\} d\tau.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$F_{\alpha_j} = \langle w_0, q_{0\alpha_j} \rangle - \langle z_0, p_{0\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z_0, w_{0\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle w_0, z_{0\alpha_j} \rangle + f_j + \\ + \left[\langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, w_{\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle w, z_{\alpha_j} \rangle \right]_0^t + \\ + \int_0^t \left\{ \langle w_{\alpha_j}, \dot{q} \rangle - \langle \dot{w}, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z_{\alpha_j}, \dot{p} \rangle + \langle \dot{z}, p_{\alpha_j} \rangle - \langle z_{\alpha_j}, \dot{w} \rangle + \right. \\ \left. + \langle w_{\alpha_j}, \dot{z} \rangle + w_{\alpha_j}^0 \right\} d\tau = f_j(\alpha) + \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, w_{\alpha_j} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle w, z_{\alpha_j} \rangle + \int_0^t \Lambda_j(\alpha, \tau) d\tau,$$

где через Λ_j обозначено подынтегральное выражение, оставшееся в интеграле после интегрирования по частям. Преобразуем Λ_j :

$$\Lambda_j = \langle w_{\alpha_j}, H_p \rangle - \langle (q_{\alpha_j} + z_{\alpha_j}), -i\tilde{H}_q - \mathcal{K}_{qq}z - \mathcal{K}_{qp}w \rangle + \\ + \langle z_{\alpha_j}, H_q \rangle + \langle p_{\alpha_j} + w_{\alpha_j}, i\tilde{H}_p + \mathcal{K}_{pq}z + \mathcal{K}_{pp}w \rangle + w_{\alpha_j}^0.$$

Дифференцируя (2.14) по α_j , получим:

$$w_{\alpha_j}^0 = -i \langle \tilde{H}_p, p_{\alpha_j} \rangle - i \langle \tilde{H}_q, q_{\alpha_j} \rangle - \langle w, \mathcal{K}_{pq}q_{\alpha_j} \rangle - \langle w, \mathcal{K}_{pp}p_{\alpha_j} \rangle - \\ - \langle \mathcal{K}_p, w_{\alpha_j} \rangle - \langle z, \mathcal{K}_{qq}q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, \mathcal{K}_{pq}p_{\alpha_j} \rangle - \langle \mathcal{K}_q, z_{\alpha_j} \rangle - \\ - \langle z, \mathcal{K}_{qq}z_{\alpha_j} \rangle - \langle w, \mathcal{K}_{pq}z_{\alpha_j} \rangle - \langle z, \mathcal{K}_{pq}w_{\alpha_j} \rangle - \langle w, \mathcal{K}_{pp}w_{\alpha_j} \rangle + \\ + \langle z, f_{1j}z \rangle + \langle z, f_{2j}w \rangle + \langle w, f_{3j}w \rangle,$$

где f_{1j} , f_{2j} , f_{3j} — некоторые гладкие матричнозначные функции.

Отсюда получаем, что

$$\Lambda_j = \langle z, f_{1j}z \rangle + \langle z, f_{2j}w \rangle + \langle w, f_{3j}w \rangle.$$

Так как

$$\left| \int_0^t \Lambda_j(\alpha, \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |\Lambda_j(\alpha, \tau)| d\tau$$

и поскольку диссипация $D(\alpha, t)$ есть неубывающая функция t , то

$$\left| \int_0^t \Lambda_j(\alpha, \tau) d\tau \right| = O_D(h).$$

Сформулируем полученные результаты в виде отдельного утверждения:

Лемма 2.5. Пусть $F(\alpha, t)$ — функция, определенная равенством (2.13). Тогда $F(\alpha, t)$ есть потенциал на $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ (см. стр. 426):

$$F_{\alpha_j} = \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, w_{\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle w, z_{\alpha_j} \rangle + O_D(h),$$

$$\dot{F} = -i \left(\dot{H} + \frac{1}{2} \langle \dot{H}_p, w \rangle + \frac{1}{2} \langle \dot{H}_q, z \rangle \right).$$

Введем теперь функцию $F_{\text{ст}} = F(\alpha, t) - \frac{\langle z, w \rangle}{2}$. Подставляя $\dot{z}$ и $\dot{w}$ из системы уравнений (2.9) и используя лемму 2.4, получаем

$$\dot{F}_{\text{ст}} = -i\dot{H} - i \langle \dot{H}_p, w \rangle - \frac{1}{2} \langle w, \mathcal{K}_{pp} w \rangle + \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{K}_{qq} z \rangle + O_D(h^{1/2}). \quad (2.15)$$

Кроме того, в силу леммы 2.5

$$(F_{\text{ст}})_{\alpha_j} = \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} + w_{\alpha_j} \rangle + O_D(h). \quad (2.16)$$

Вычислим производные от $\mu(\alpha, t)$ по переменным α_j и t . Имеем:

$$\mu_{\alpha_j} = \frac{1}{2} \langle z, C^{-1} B z_{\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle z_{\alpha_j}, C^{-1} B z \rangle + O_D(h). \quad (2.17)$$

Обозначим теперь

$$S_{\text{доб}} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{ст}} + \mu. \quad (2.18)$$

Тогда

$$(S_{\text{доб}})_{\alpha_j} = \langle w, x_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} + w_{\alpha_j} \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle z, C^{-1} B z_{\alpha_j} \rangle + \frac{1}{2} \langle z_{\alpha_j}, C^{-1} B z \rangle + O_D(h). \quad (2.19)$$

Сейчас мы докажем, что матрица $C^{-1}B$ «почти» симметрична. Это позволит нам упростить формулы (2.17) и (2.19).

Лемма 2.6. Обозначим $C^{-1}B = \mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}^t - \mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} e$, и элементы матрицы e удовлетворяют неравенствам

$$|e_{ij}| = O_D(h^{1/2}).$$

Доказательство. Так как при фиксированном t

$$dF = \langle w, dq \rangle - \langle z, dp \rangle - \frac{1}{2} \langle z, dw \rangle + \frac{1}{2} \langle w, dz \rangle + \langle f, d\alpha \rangle,$$

то для скобок Лагранжа

$$[p + w, q + z]_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial(p_i + w_i)}{\partial \alpha_j} \frac{\partial(q_i + z_i)}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial(p_i + w_i)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial(q_i + z_i)}{\partial \alpha_j} \right\}$$

справедлива оценка

$$|[p + w, q + z]_{jk}| = O_D(h^{1/2}) \quad j, k = 1, \dots, n$$

(здесь мы учли еще, что $[p, q]_{jk} = 0$, $j, k = 1, \dots, n$). Но

$$[p + w, q + z]_{jk} = \sum_i B_{ji} C_{ki} - B_{ik} C_{ij}.$$

Умножая последнее равенство на $C_{lj}^{-1}C_{mk}^{-1}$ и суммируя по k и j , получаем равенство

$$\sum_{j,k} [p + w, q + z]_{jk} C_{lj}^{-1} C_{mk}^{-1} = \mathcal{E}_{lm} - \mathcal{E}_{ml},$$

из которого и вытекает утверждение леммы.

В силу только что доказанной леммы можно переписать равенство (2.17) в виде

$$\mu_{\alpha_j} = \langle z, C^{-1} B z_{\alpha_j} \rangle + O_D(h).$$

Равенство (2.19) примет вид

$$(S_{\text{доб}})_{\alpha_j} = \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, p_{\alpha_j} + w_{\alpha_j} \rangle + \langle z, C^{-1} B z_{\alpha_j} \rangle + O_D(h) = \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, C^{-1} B q_{\alpha_j} \rangle + f,$$

где $|f(\alpha, t)| \leq c[D(\alpha, t)]$, $c = \text{const}$.

Вычислим теперь $\dot{\mathcal{E}}$. Дифференцируя уравнения (2.8) и (2.9) по α_j , получим:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\alpha} &= q_{\alpha} H_{qp} + p_{\alpha} H_{pp}; \quad \dot{p}_{\alpha} = -q_{\alpha} H_{qq} - p_{\alpha} H_{pq}, \\ \dot{z}_{\alpha} &= i q_{\alpha} \tilde{H}_{qp} + i p_{\alpha} \tilde{H}_{pp} + z_{\alpha} \mathcal{H}_{qp} + w_{\alpha} \mathcal{H}_{pp} + O_D(h^{1/2}), \\ \dot{w}_{\alpha} &= -i q_{\alpha} \tilde{H}_{qq} - i p_{\alpha} \tilde{H}_{pq} - z_{\alpha} \mathcal{H}_{qq} - w_{\alpha} \mathcal{H}_{pq} + O_D(h^{1/2}). \end{aligned}$$

Из последних равенств получаем по mod $O_D(h^{1/2})$:

$$\dot{B} = -\{C \mathcal{H}_{qq} - B \mathcal{H}_{pq}\}, \quad \dot{C} = \{C \mathcal{H}_{qp} + B \mathcal{H}_{pp}\}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= -C^{-1} \dot{C} C^{-1} B + C^{-1} \dot{B} = \\ &= -C^{-1} \{C \mathcal{H}_{qp} + B \mathcal{H}_{pp}\} C^{-1} B - C^{-1} \{C \mathcal{H}_{qq} + B \mathcal{H}_{pq}\} = \\ &= -\mathcal{H}_{qp} \mathcal{E} - \mathcal{E} \mathcal{H}_{pp} \mathcal{E} - \mathcal{H}_{qq} - \mathcal{E} \mathcal{H}_{pq}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно,

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{H}_{qp} - \mathcal{H}_{qp} \mathcal{E} - \mathcal{E} \mathcal{H}_{pq} - \mathcal{E} \mathcal{H}_{pp} \mathcal{E} + O_D(h^{1/2}). \quad (2.20)$$

Равенство (2.20) позволяет вычислить производную $\dot{\mu}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \langle \dot{z}, \mathcal{E} z \rangle + \frac{1}{2} \langle z, \dot{\mathcal{E}} z \rangle = \\ &= \langle \dot{z}, \mathcal{E} z \rangle - \frac{1}{2} \langle z, (\mathcal{H}_{qq} + \mathcal{H}_{qp} \mathcal{E} + \mathcal{E} \mathcal{H}_{pq} + \mathcal{E} \mathcal{H}_{pp} \mathcal{E}) z \rangle + O_D(h^{1/2}). \end{aligned}$$

Используя полученную формулу, вычислим производную $(\dot{S}_{\text{доб}})$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{доб}} &= -i \tilde{H} - i \langle \tilde{H}_p, w \rangle - \frac{1}{2} \langle w, \mathcal{H}_{pp} w \rangle + \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{H}_{qq} z \rangle + \\ &\quad + i \langle \tilde{H}_p, \mathcal{E} z \rangle + \langle \mathcal{H}_{pq} z, \mathcal{E} z \rangle + \langle \mathcal{H}_{pp} w, \mathcal{E} z \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{H}_{qq} z \rangle - \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{H}_{qp} \mathcal{E} z \rangle - \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{E} \mathcal{H}_{pq} z \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle z, \mathcal{E} \mathcal{H}_{pp} \mathcal{E} z \rangle + O_D\left(h^{\frac{3}{2}}\right) = -i \tilde{H} - i \langle \tilde{H}_p, w - \mathcal{E} z \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle w - \mathcal{E} z, \mathcal{H}_{pp} (w - \mathcal{E} z) \rangle + O_D(h^{1/2}); \end{aligned}$$

мы здесь воспользовались следующими тождествами:

$$\langle w, \mathcal{K}_{pp} \mathcal{E} z \rangle = \langle \mathcal{K}_{pp} w, \mathcal{E} z \rangle$$

в силу симметричности матрицы $\mathcal{K}_{pp}$;

$$\langle \mathcal{E} z, \mathcal{K}_{pp} w \rangle = \langle \mathcal{K}_{pp} w, \mathcal{E} z \rangle$$

в силу симметричности «скалярного произведения» $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

$$\langle \mathcal{E} z, \mathcal{K}_{pp} \mathcal{E} z \rangle = \langle z, \mathcal{E} \mathcal{K}_{pp} \mathcal{E} z \rangle + O_D(h^{1/2})$$

в силу леммы 2.6. Итак, нами получены важные формулы:

Лемма 2.7. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{доб}} &= -i\dot{H} - i\langle \dot{H}_p, w - \mathcal{E} z \rangle - \frac{1}{2} \langle w - \mathcal{E} z, \mathcal{K}_{pp} (w - \mathcal{E} z) \rangle + O_D(h^{1/2}), \\ (S_{\text{доб}})_{\alpha_j} &= \langle w, q_{\alpha_j} \rangle - \langle z, \mathcal{E} q_{\alpha_j} \rangle + f, \end{aligned}$$

где $|f| \leq c \cdot D(\alpha, t)$, $c = \text{const}$.

Пусть $s_0(\alpha)$ — s -действие на Λ^n , а решения системы (2.8) при $0 \leq t \leq t_0$ удовлетворяют условию $\det \left\| \frac{\partial q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0$. Обозначим через $\alpha = \alpha(x, t)$ решение системы уравнений

$$q_i(\alpha, t) = x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

и введем новую функцию

$$\sigma(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{доб}}(\alpha(x, t), t).$$

Введем также вещественное действие $s(x, t)$, полагая

$$s(x, t) = \left[s_0(\alpha) + \int_0^t (\langle p, H_p \rangle - H) \Big|_{\substack{p=p(\alpha, \tau) \\ q=q(\alpha, \tau)}} d\tau \right]_{\alpha=\alpha(x, t)}. \quad (2.21)$$

Заметим, что определенная таким образом функция $s(x, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби $\frac{\partial s}{\partial t} + H(s_x, x, t) = 0$.

Теперь вычислим и оценим функцию $g(x, t)$, равную

$$\begin{aligned} g(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \langle \mathcal{K}_p(s_x, x, t), \sigma_x \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \sigma_x, \mathcal{K}_{pp}(s_x, x, t) \sigma_x \rangle + i\dot{H}(s_x, x, t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (S_{\text{доб}}(\alpha(x, t), t)) = \\ &= \dot{S}_{\text{доб}} - \langle (S_{\text{доб}})_{\alpha}, q_{\alpha}^{-1} \dot{q} \rangle = \dot{S}_{\text{доб}} - \langle (S_{\text{доб}})_{\alpha}, q_{\alpha}^{-1} H_p \rangle, \\ \nabla_x \sigma(x, t) &= q_{\alpha}^{-1} (S_{\text{доб}})_{\alpha}. \end{aligned}$$

Используя лемму 2.7, последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla_x \sigma(x, t) = w - \mathcal{E} z + q_{\alpha}^{-1} f. \quad (2.23)$$

Подставляя вычисленные значения производных функции $\sigma(x, t)$ в равенство (2.22), получаем (используя лемму 2.4):

$$\begin{aligned} g(x, t) = & -i\tilde{H}(s_x, x, t) - i\langle \tilde{H}_p(s_x, x, t), \omega - \mathcal{E}z \rangle - \\ & - \frac{1}{2} \langle \omega - \mathcal{E}z, \mathcal{K}_{pp}(\omega - \mathcal{E}z) \rangle + O_D(h^{1/2}) - \langle \omega - \mathcal{E}z + q\bar{\alpha}^{-1}f, H_p \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle \omega - \mathcal{E}z + q\bar{\alpha}^{-1}f, \mathcal{K}_{pp}(\omega - \mathcal{E}z + q\bar{\alpha}^{-1}f) \rangle + \\ & + \langle \mathcal{K}_p, \omega - \mathcal{E}z + q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle + i\tilde{H}(s_x, x, t) = \\ & = i\langle \tilde{H}_p, q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle + \langle \mathcal{K}_{pp}(\omega - \mathcal{E}z), q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \langle \mathcal{K}_{pp}q\bar{\alpha}^{-1}f, q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle + O_D(h^{1/2}). \end{aligned}$$

Изучим подробнее слагаемое $\langle \tilde{H}_p, q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle$. Из определения функции f видно, что (см. стр. 436)

$$|f| \leq c(|z(\alpha, t)|^2 + |\omega(\alpha, t)|^2), \quad c = \text{const.}$$

Из системы уравнений комплексного роста (2.9) можно получить оценку

$$|z(\alpha, t)| + |\omega(\alpha, t)| \leq c \left(D_0^{1/2}(\alpha) + \int_0^t \left| \nabla_{p, q} \tilde{H} \right| d\tau \right), \quad c = \text{const.},$$

или

$$|z(\alpha, t)|^2 + |\omega(\alpha, t)|^2 \leq c D_0^2(\alpha) + c \left(\int_0^t (|\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q|) d\tau \right)^2, \quad c = \text{const.}$$

Из оценки для f , последнего неравенства и леммы 2.2 окончательно получаем

$$\langle \tilde{H}_p, q\bar{\alpha}^{-1}f \rangle = O_D(h^{1/2-\varepsilon}).$$

Применяя теперь лемму 2.4, получаем

$$|g(x, t)| = O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \quad (2.24)$$

Обозначим теперь:

$$\sigma_1(x, t) = \text{Re } \sigma(x, t), \quad \sigma_2(x, t) = \text{Im } \sigma(x, t)$$

и

$$\xi = \nabla_x \sigma_2(x, t), \quad \eta = \nabla_x \sigma_1(x, t). \quad (2.25)$$

Из равенства (2.22) очевидным образом получаются неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} + \langle H_p, \xi \rangle \right| & \leq c_1 (|\eta| + |\xi| + |\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q| + O_D(h^{1/2})), \\ \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} + \langle H_p, \eta \rangle \right| & \leq c_2 (|\eta| + |\xi| + |\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q| + O_D(h^{1/2})), \quad c_1, c_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Из этих неравенств и леммы 2.3 получаем, что

$$|\eta| = O_D(h^{1/2}), \quad |\xi| = O_D(h^{1/2}). \quad (2.26)$$

Здесь мы использовали еще неравенство

$$\|\eta + i\xi\|_{t=0} \leq c (\|(F_{\text{ст}})_\alpha\|_{t=0} + \|\mu_2\|_{t=0}) = O_D(h^{1/2}), \quad c = \text{const.}$$

В самом деле, по определению,

$$\sigma(x, t)|_{t=0} = S_{\text{доб}}(\alpha(x, t), t)|_{t=0} = F_{\text{ст}}(x_0(\alpha)) + \mu(x, 0).$$

Отсюда в силу формул (2.13), определения μ -действия и аксиомы 2.1 роста и следует нужное неравенство.

Введем теперь функцию $\tilde{S}(x, t)$:

$$\tilde{S}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} s(x, t) + \sigma(x, t), \quad (2.27)$$

где $s(x, t)$ — действительное действие, определенное равенством (2.21).

Замечание. Из равенства (2.12), (2.13), замечания 2, сделанного после теоремы 2.1, и определений функций $S_{\text{доб}}(\alpha, t)$, $F_{\text{ст}}(\alpha, t)$ и $\sigma(x, t)$ легко видеть, что функция $\tilde{S}(x, t)$, определенная равенством (2.27), является фазой в неособой карте неособой зоны роста (Λ_t^n, r_t^n) , полученного сдвигом начального роста (Λ^n, r^n) за время t вдоль траекторий системы (2.8), (2.9).

Обозначим $\tilde{p} = p + \eta$, $p = \partial s / \partial x$.

Лемма 2.8. *Справедлива оценка:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(\tilde{p}, x, t) + i \langle \mathcal{H}_p(\tilde{p}, x, t), \xi \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle \xi, \mathcal{H}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \xi \rangle = O_D(h^{1/2}). \end{aligned}$$

Доказательство. Напомним вначале, что действительное действие $s(x, t)$ по построению удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + H(s_x, x, t) = 0.$$

Поэтому выполняется равенство (ср. (2.22))

$$\begin{aligned} g(x, t) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(p, x, t) + \langle \mathcal{H}_p(p, x, t), \eta + i\xi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \eta + i\xi, \mathcal{H}_{pp}(p, x, t) (\eta + i\xi) \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Разложим теперь функции $\mathcal{H}(p, x, t)$, $\mathcal{H}_p(p, x, t)$, $\mathcal{H}_{pp}(p, x, t)$ по первому аргументу по формуле Тейлора в точке $p = \tilde{p} - \eta$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p, x, t) = \mathcal{H}(\tilde{p} - \eta, x, t) = \mathcal{H}(\tilde{p}, x, t) - \langle \mathcal{H}_p(\tilde{p}, x, t), \eta \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \eta, \mathcal{H}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \eta \rangle + O(\|\eta\|^3). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_p(p, x, t) &= \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t) - \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t)\eta + O(\|\eta\|^2), \\ \mathcal{K}_{pp}(p, x, t) &= \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) + O(\|\eta\|).\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в равенство (2.28), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \mathcal{K}(\tilde{p}, x, t) - \langle \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t), \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta, \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \eta \rangle + \\ + O(\|\eta\|^3) + \langle \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t), \eta + i\xi \rangle - \langle \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \eta, \eta + i\xi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \eta + i\xi, \mathcal{K}_{pp}(\eta + i\xi) \rangle + O(\|\eta\| \|\xi\|^2 + \|\xi\| \cdot \|\eta\|^2) = g(x, t),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \mathcal{K}(\tilde{p}, x, t) + i \langle \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t), \xi \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi, \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \xi \rangle = \\ = O(\|\eta\|^3 + \|\eta\| \|\xi\|^2 + \|\xi\| \|\eta\|^2) + g(x, t).\end{aligned}$$

Вспоминая неравенства (2.24) и (2.26), получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \mathcal{K}(\tilde{p}, x, t) + i \langle \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t), \xi \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle \xi, \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \xi \rangle = O_D(h^{3/2-\varepsilon}).\end{aligned}\quad (2.29)$$

Лемма доказана.

Таким образом, функция $\tilde{S}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{S}_1(x, t) + i\tilde{S}_2(x, t)$ есть «почти» решение (по модулю $O_D(h^{3/2-\varepsilon})$) поставленной выше задачи, так как пока неизвестно, выполнено ли условие $\tilde{S}_2(x, t) \geq 0$. Ответить на поставленный вопрос нам позволит

Лемма 2.9. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\gamma > 0$ и гладкая функция $c(\alpha, t) \geq 0$, удовлетворяющая оценке $c(\alpha, t) \leq c_1(\alpha)(1+t)$, что выполнено неравенство

$$\gamma D(\alpha(x, t), t) \leq \tilde{S}_2(x, t) + c(\alpha(x, t), t) D(\alpha(x, t), t)^{1/2-\varepsilon}.$$

Доказательство. Запишем мнимую часть равенства (2.28) в виде

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \langle H_p, \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \rangle - \langle H_{pp} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_{pp} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \rangle = \\ = \tilde{H} + \langle \tilde{H}_p, \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_{pp} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \rangle - \text{Im } g(x, t).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Вспомним теперь, что мы обозначали $\eta = \nabla_x \sigma_1(x, t)$, $\xi = \nabla_x \sigma_2(x, t)$ (см. формулы (2.25)).

Введем векторное поле d/dt по формуле:

$$-\frac{d}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} - \langle H_p, \frac{\partial}{\partial x} \rangle - \langle H_{pp} \eta, \frac{\partial}{\partial x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_{pp} \xi, \frac{\partial}{\partial x} \rangle.$$

Обозначим правую часть равенства (2.30) через G ,

$$G = \tilde{H} + \langle \tilde{H}_p, \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_{pp} \eta, \eta \rangle - \text{Im } g(x, t).$$

В силу оценки для $|\eta|$ (2.26) и разложения $\tilde{H}(p+\eta, x, t)$, по формуле Тейлора имеем:

$$\left| \tilde{H}(p+\eta, x, t) - \tilde{H}(p, x, t) - \langle \tilde{H}_p(p, x, t), \eta \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{H}_{pp} \eta, \eta \rangle \right| \leq c D^{3/2}. \quad (2.31)$$

Значит, в силу неравенства (2.31) найдется такая постоянная M_ε , — что

$$G_1(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} G(x, t) + M_\varepsilon (D)^{3/2-\varepsilon} \geq -\tilde{H}(p+\eta, x, t) \geq 0.$$

Пусть функция $\psi(x, t)$ есть решение задачи

$$\frac{d\psi}{dt} = G_1(x, t), \quad \psi|_{t=0} = \gamma D_0,$$

где γ — постоянная из неравенства диссипативности на начальном многообразии. Очевидно, что $\psi(x, t) \geq 0$. Заметим теперь, что

$$-\tilde{H} - \eta \tilde{H}_p \leq +G_1(x, t) + c[D(x, t)],$$

где c — некоторая постоянная, а также (см. лемму 2.1)

$$-\tilde{H}(p, x) - \eta \tilde{H}_p(p+\eta, x, t) \leq G_1(x, t) + c_1 D(x, t).$$

Применяя последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} -\tilde{H}(p, x, t) &\leq G_1(x, t) + c_1 D + c_2 \sqrt{D} \sqrt{-\tilde{H}(p+\eta, x, t)} \leq \\ &\leq G_1 + c_1 D + c_2 \sqrt{D} \sqrt{-\tilde{H}(p, x, t) - \eta \tilde{H}_p(p, x, t) + c_3 D} \leq \\ &\leq G_1(x, t) + c_1 D + c_2 \sqrt{D} \sqrt{G_1 + c_4 D} \leq G_1 + c_5 D. \end{aligned}$$

По определению $D(x, t)$ имеем $\frac{d}{dt} D = -\tilde{H}$, где через $\frac{d}{dt}$ мы обозначили векторное поле $\frac{d}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \langle H_p, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$; учитывая, что в силу леммы 2.1 $|\nabla_x D| \leq c \sqrt{D}$, $c = \text{const}$, получаем

$$\left| \frac{dD}{dt} \right| \leq |\tilde{H}| + \left| \langle H_{pp} \eta, \frac{\partial D}{\partial x} \rangle \right| + \frac{1}{2} \left| \langle \tilde{H}_{pp} \xi, \frac{\partial D}{\partial x} \rangle \right| \leq G_1 + c_6 D$$

и в силу леммы 2.3

$$D(x, t) \leq D_0(\alpha)|_{\alpha=\alpha(x, t)} + c \int_0^x G_1(x, t) dl \leq c \psi(x, t), \quad (2.32)$$

$$c = \text{const}.$$

Теперь заметим, что по определению функции $\tilde{S}(x, t)$

$$\tilde{S}_2(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } \tilde{S}(x, t) = \sigma_2(x, t).$$

Значит, в силу равенства (2.27) и определения векторного поля

d/dl функция $\tilde{S}_2(x, t)$ есть решение задачи

$$\frac{d\tilde{S}_2(x, t)}{dl} = G(x, t), \quad \tilde{S}_2(x, t)|_{t=0} = \tilde{S}_{02} = \text{Im } \Phi(\alpha).$$

Тогда разность $\psi(x, t) - \tilde{S}_2(x, t)$ есть решение задачи

$$\frac{d}{dl}(\psi - \tilde{S}_2) = G_1(x, t) - G(x, t),$$

$$(\psi - \tilde{S}_2)|_{t=0} = \gamma D_0 - \tilde{S}_{02}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\psi(x, t) - \tilde{S}_2(x, t)| &\leq |\gamma D_0 - \tilde{S}_{02}| + M_e \int_0^x (D)^{3/2-\varepsilon} dl \leq \\ &\leq |\gamma D_0 - \tilde{S}_{02}| + M_e L (D^{3/2-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где L — длина траектории векторного поля d/dl , $M_e = \text{const}$.

Покажем, что $L \leq \text{const } t$. В самом деле,

$$\left| \frac{d}{dl} L \right| \leq 1 + c(|\eta| + |\xi|) \leq \text{const},$$

откуда и следует требуемое неравенство. Заметим еще, что из неравенства диссипативности на начальном многообразии следует

$$|\gamma D_0 - \tilde{S}_{02}| \leq c_1(\alpha, \varepsilon) D^{3/2-\varepsilon}. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.34) в (2.33) и учитывая, что $L \leq \text{const} \cdot t$, получаем, что

$$\begin{aligned} D(x, t) &\leq c\psi(x, t) \leq \\ &\leq c(\tilde{S}_2(x, t) + c_1(\alpha, \varepsilon) D_0^{3/2-\varepsilon} + c_2(\alpha, \varepsilon, t) D^{3/2-\varepsilon}), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Докажем теперь, что если выполнены условия леммы, то функция

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{S}(x, t) + i c(\alpha(x, t), t) D(\alpha(x, t), t)^{3/2-\varepsilon}$$

удовлетворяет соотношениям (2.7). Обозначим

$$S_1(x, t) = \text{Re } S(x, t), \quad S_2(x, t) = \text{Im } S(x, t).$$

Отметим, что в силу леммы 2.9 $S_2(x, t) \geq 0$. Покажем теперь, что выполнена оценка

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right) + i \left\langle \mathcal{H}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right), \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle - \\ - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \mathcal{H}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right) \frac{\partial S_2}{\partial x} \right\rangle = O_D(h^{3/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Заметим, что $\text{Re } S = \text{Re } \tilde{S}$ и, следовательно, $\frac{\partial S_1}{\partial x} = \tilde{p}$. Поэтому,

в силу леммы 2.9 достаточно показать, что

$$\begin{aligned} & \left| M_e \frac{\partial}{\partial t} ((D_0)^{3/2-\varepsilon} + t(D)^{3/2-\varepsilon}) + \right. \\ & \quad \left. + M_e \langle \mathcal{K}_p(\tilde{p}, x, t), \frac{\partial}{\partial x} (D_0^{3/2-\varepsilon} + tD^{3/2-\varepsilon}) \rangle \right| + \\ & \quad \left| \frac{M_e}{2} \langle \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial x}, \mathcal{K}_{pp}(\tilde{p}, x, t) \frac{\partial}{\partial x} (D_0^{3/2-\varepsilon} + tD^{3/2-\varepsilon}) \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \frac{M_e^2}{2} \langle \frac{\partial}{\partial x} (D_0^{3/2-\varepsilon} + tD^{3/2-\varepsilon}), \mathcal{K}_{pp} \frac{\partial}{\partial x} (D_0^{3/2-\varepsilon} + tD^{3/2-\varepsilon}) \rangle \right| \leq \\ & \leq c(D)^{3/2-\varepsilon}, \quad c = \text{const.} \quad (2.36) \end{aligned}$$

Очевидно, что для доказательства этой оценки достаточно показать, что

$$\left| \frac{d}{dt} (tD^{3/2-\varepsilon}) \right| \leq c(D)^{3/2-\varepsilon}, \quad c = \text{const.}$$

Имеем:

$$\frac{d}{dt} (tD^{3/2-\varepsilon}) = D^{3/2-\varepsilon} - t\tilde{H}D^{1/2-\varepsilon};$$

но в силу леммы 2.2, $-t\tilde{H} \leq c_\varepsilon(D)^{1-\varepsilon}$ и, значит,

$$\frac{d}{dt} (tD^{3/2-\varepsilon}) \leq c(\varepsilon) D^{3/2-\varepsilon}.$$

Для завершения доказательства теоремы нам нужно доказать, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{K} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) + i \langle \mathcal{K}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right), \frac{\partial S_2}{\partial x} \rangle - \\ & \quad - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \mathcal{K}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial S_2}{\partial x} \rangle = O_{S_1}(h^{3/2-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Но это неравенство немедленно следует из (2.36) и доказанного в лемме 2.9 неравенства (оценки) $O_D(h^\alpha) \leq O_{S_1}(h^\alpha)$ ($\alpha \geq 0$ — любое число). Далее, заметим, что $S_2 = \mathcal{F}$.

Таким образом, теорема 2.1 доказана.

§ 3. Решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией в зоне

Этот параграф будет посвящен γ -перестройкам. Основным моментом, на который мы опираемся здесь, является следующее соображение. Пусть $\alpha_0 \in \Omega$, где Ω (для простоты) — неособая зона, и якобиан $dq/d\alpha$ равен нулю в этой точке. Тогда, сдвинув окрестности точки α_0 вдоль траекторий осциллятора на время $t = O(h^\infty)$, мы получим, что в сдвинутой точке этот якобиан уже отличен от нуля, хотя и имеет порядок $O(h^\infty)$. Вместе с тем этот сдвиг вдоль траекторий всей зоны нечувствителен для решения, которое мы получаем лишь с точностью до $O(h^{3/2-\varepsilon})$. Поэтому мы всегда можем как бы считать, что в данной точке α_0 якобиан

не равен нулю, а равен лишь $O(h^\infty)$. Значит, $q(\alpha) = x$ в $O(h^\infty)$ -окрестности точки $\alpha = \alpha_0$ разрешимо относительно α . Но мы должны, следовательно, внимательно следить за оценками и их зависимостью от поведения якобиана $dq/d\alpha$.

Теперь мы построим решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией на отрезке времени $[0, T]$ таким, что

$$\det \left\| \frac{\partial (x_i + z_i)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Приведем вначале некоторые вспомогательные рассуждения.

Лемма 3.1 (о локальных координатах). Пусть $p(\alpha)$, $q(\alpha)$, $w(\alpha)$, $z(\alpha)$ таковы, что $[p, q]_{j_k} = [w, z]_{j_k} + [p, z]_{j_k} + [w, q]_{j_k} = 0$, и

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial (p+w)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial (q+z)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = n \quad \text{в точке } \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0);$$

тогда существует такой набор попарно неравных индексов $(i_1, \dots, i_k, j_{k+1}, \dots, j_n) = (1, \dots, n)$, что

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial (p_{i_s} + w_{i_s})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial (q_{j_r} + z_{j_r})}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{в точке } \alpha_0.$$

Доказательство леммы 3.1. Условимся, что слово «ранг» будет означать ранг над полем $\mathbb{R}$. Аналогичное соглашение примем относительно выражений типа «линейная зависимость», «линейная комбинация».

Пусть ранг матрицы A со строками

$$\frac{\partial (q_1 + z_1)}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial (q_n + z_n)}{\partial \alpha}$$

равен k . Если $k = n$, то утверждение леммы верно. Пусть $k < n$. Без уменьшения общности предположим, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу. Пусть, далее, B — матрица со строками

$$\frac{\partial (p_1 + w_1)}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial (p_n + w_n)}{\partial \alpha}.$$

Покажем, что ранг матрицы C , составленной из k первых строк матрицы A и $n - k$ последних строк матрицы B , равен n (это означает, что утверждение леммы верно). Предположим противное:

$$\text{rang } C = m < n.$$

Тогда $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = m$, так что можно (изменяя, если нужно, выбор локальных координат) считать выполненными условия

$$\frac{\partial (q_l + z_l)}{\partial \alpha_j} = 0, \quad \frac{\partial (p_l + w_l)}{\partial \alpha_j} = 0, \quad 1 \leq l \leq n,$$

$$n - m < j \leq n, \quad k + 1 \leq l \leq n.$$

По условию леммы для любого $l = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (q_j + z_j)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial (p_j + w_j)}{\partial \alpha_n} - \frac{\partial (q_j + z_j)}{\partial \alpha_n} \frac{\partial (p_j + w_j)}{\partial \alpha_i} \right) = \\ = \sum_{j=1}^k \frac{\partial (q_j + z_j)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial (p_j + w_j)}{\partial \alpha_n} = 0. \end{aligned}$$

Так как $\det \left(\frac{\partial (q_j + z_j)}{\partial \alpha_i} \right)_{i, j=1}^k \neq 0$, то отсюда следует, что последний столбец матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ равен 0, что неверно, так как $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = n$. Лемма доказана.

Обозначим теперь через $P_k(p, q, t)$, $Q_k(p, q, t)$, $W_k(p, q, w, z, t)$, $Z_k(p, q, w, z, t)$, $1 \leq k \leq n$ решения системы уравнений комплексного роста с гамильтонианом $\mathcal{H} = H + i\tilde{H}$:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (3.1)$$

$$\dot{w}_k = -i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_k \partial p_j} w_j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_k \partial q_j} z_j \right),$$

$$\dot{z}_k = i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_k \partial p_j} w_j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_k \partial q_j} z_j \right),$$

и начальными условиями $P_k(p, q, 0) = p_k$, $Q_k(p, q, 0) = q_k$, $W_k(p, q, w, z, 0) = w_k$, $Z_k(p, q, w, z, 0) = z_k$, $1 \leq k \leq n$.

Лемма 3.2. Пусть

$$\Delta(t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial (P+W)}{\partial p} & \frac{\partial (P+W)}{\partial q} \\ \frac{\partial (Q+Z)}{\partial p} & \frac{\partial (Q+Z)}{\partial q} \end{pmatrix};$$

тогда существуют такие гладкие функции $\varphi_k(q, p, z, w, t)$, $\psi_k(q, p, z, w, t)$, $1 \leq k \leq n$, что

$$\frac{d\Delta}{dt} = \sum_{k=1}^n \varphi_k W_k + \psi_k Z_k.$$

Доказательство. Для простоты выкладок ограничимся моментом времени $t=0$. В силу (3.1) имеем:

$$P_k(p, q, t) = p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} t + o(t), \quad Q_k(p, q, t) = q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} t + o(t),$$

$$W_k(p, q, w, z, t) = w_k - t \left(i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q_k \partial p_j} w_j + \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial q_k \partial q_j} z_j \right) \right) + o(t),$$

$$Z_k(p, q, w, z, t) = z_k + t \left(i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial p_k \partial p_j} w_j + \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial p_k \partial q_j} z_j \right) \right) + o(t).$$

Далее, обозначив, для простоты вычислений,

$$P_k(q, p, t) = p_k + A_k t + o(t),$$

$$Q_k(q, p, t) = q_k + B_k t + o(t),$$

$$W_k(q, p, w, z, t) = w_k + C_k t + o(t),$$

$$Z_k(q, p, w, z, t) = z_k + D_k t + o(t),$$

получим

$$\left| \frac{d\Delta}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial p_k} (A_k + C_k) + \frac{\partial}{\partial q_k} (B_k + D_k) \right).$$

Подставляя выражения A_k, B_k, C_k, D_k через производные, получаем лемму.

В качестве непосредственного следствия леммы 3.2 получаем следующий классический результат.

Теорема (Лиувилль). Пусть $P(p, q, t), Q(p, q, t)$ — решения гамильтоновой системы

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.2)$$

$$P_k(p, q, 0) = p_k, \quad Q_k(p, q, 0) = q_k;$$

тогда, если $\Omega_t \subset \mathbb{R}^{2n}$ — область, получаемая сдвигом на время t вдоль решений системы (3.2) измеримой области Ω_0 , то

$$\int_{\Omega_t} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int_{\Omega_0} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

Пусть теперь $\Lambda^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ — лагранжево многообразие, $\Gamma_0 \subset \Lambda^n$ — множество ростка; соответственно Λ_t^n — лагранжево многообразие, полученное сдвигом вдоль гамильтоновой системы с гамильтонианом H на время t , $\Gamma_t \subset \Lambda_t^n$ соответствующее множество ростка. Далее, пусть $P_k(q, p, t), Q_k(q, p, t), W_k(q, p, 0, 0, t), Z_k(q, p, 0, 0, t)$ — решение системы (3.1) такое, что в любой момент времени t , $(P, Q, W, Z) \in \Gamma_t$. При сделанных выше предположениях справедлив также следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial (P+W)}{\partial \alpha} & \frac{\partial (Q+Z)}{\partial \alpha} \\ i \frac{\partial (P+W)}{\partial \alpha} & i \frac{\partial (Q+Z)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = 2n \text{ над } \mathbb{R}$$

при $t=0$, где $\alpha_1 \dots \alpha_n$ — некоторая система локальных координат в окрестности точки роста $(P(q, p, 0), Q(q, p, 0)) \in \Gamma_0$; тогда

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial (P+W)}{\partial \alpha} & \frac{\partial (Q+Z)}{\partial \alpha} \\ i \frac{\partial (P+W)}{\partial \alpha} & i \frac{\partial (Q+Z)}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = 2n \text{ над } \mathbb{R} \quad (3.3)$$

в любой точке $(P(q, p, t), Q(q, p, t)) \in \Gamma_t$.

Доказательство. Система (3.1) с начальными условиями $P(0) = p_0$, $Q(0) = q_0$, $Z(0) = i\eta_0$, $W(0) = iv_0$, $\eta_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$ определяет семейство отображений

$$U_t: (p_0 + iv_0, q_0 + i\eta_0) \rightarrow (P(t) + W(t), Q(t) + Z(t))$$

фазового пространства $\mathbb{C}^{2n}$ в себя. Дифференциал (при фиксированном t)

$$dU_t: (dp_0 + idv_0, dq_0 + id\eta_0) \rightarrow (dP + dW, dQ + dZ)$$

этого преобразования в точке p, q есть линейный оператор в $\mathbb{R}^{4n}$. Покажем, что оператор dU_t невырожден. Обозначим $\xi = \text{Re } Z$, $\eta = \text{Im } Z$, $u = \text{Re } W$, $v = \text{Im } W$,

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{\partial \xi}{\partial \eta_0} + \frac{\partial \eta}{\partial q_0}, & a_2(t) &= \frac{\partial \eta}{\partial \eta_0} - \frac{\partial (Q+\xi)}{\partial q_0}, \\ a_3(t) &= \frac{\partial \xi}{\partial v_0} + \frac{\partial \eta}{\partial p_0}, & a_4(t) &= \frac{\partial \eta}{\partial v_0} - \frac{\partial (Q+\xi)}{\partial p_0}, \\ a_5(t) &= \frac{\partial u}{\partial \eta_0} + \frac{\partial v}{\partial q_0}, & a_6(t) &= \frac{\partial v}{\partial \eta_0} - \frac{\partial (P+u)}{\partial q_0}, \\ a_7(t) &= \frac{\partial u}{\partial v_0} + \frac{\partial v}{\partial p_0}, & a_8(t) &= \frac{\partial v}{\partial v_0} - \frac{\partial (P+u)}{\partial p_0}. \end{aligned}$$

На Γ_t выполняются следующие условия Коши — Римана: $a_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, 8$. Действительно, прежде всего $a_i(0) = 0$. Вычислим, например, a_1 . Учитывая, что на Γ_t $Z(t) \equiv W(t) = 0$, получаем из системы (3.1)

$$\frac{d}{dt} a_1 = H_{pp} a_5 - \tilde{H}_{pp} a_6 + H_{pq} a_1 - \tilde{H}_{pq} a_2.$$

Аналогичные вычисления показывают, что функции a_i удовлетворяют системе линейных однородных уравнений с нулевыми начальными условиями, откуда и следует, что $a_i \equiv 0$.

Из условий Коши — Римана вытекает, что оператор dU_t действует следующим образом:

$$dP + dW = \frac{\partial(P + W)}{\partial p_0} (dp_0 + idv_0),$$

$$dQ + dZ = \frac{\partial(Q + Z)}{\partial q_0} (dq_0 + id\eta_0).$$

Невырожденность оператора dU_t следует теперь из леммы 3.2.

Пусть L_t — подпространство $\mathbb{R}^{4n}$, порожденное строками матрицы (3.3) (от t). Справедливо соотношение $L_t = dU_t L_0$. Из условий Коши — Римана следует, что $IU_t = U_t I$. Поэтому

$$L_t \cap IL_t = dU_t L_0 \cap IdU_t L_0 = dU_t (L_0 \cap IL_0) = 0.$$

Теорема доказана.

Предположим, что $\det(\partial q_i(\alpha)/\partial \alpha_j) = 0$ в некоторой точке α_0 .

Лемма 3.3. Пусть $\det C(\alpha) \neq 0$; тогда существует окрестность U_{α_0} точки α_0 и вещественная вектор-функция $\gamma(\alpha)$, такая, что ее компоненты равны либо 0 либо одной из компонент действительной или мнимой части вектора $z(\alpha)$ и

$$\det \frac{D(q + \gamma)}{D\alpha} \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in U_{\alpha_0}.$$

Доказательство. Пусть $\text{rang } q_\alpha = K$. Преобразованием системы координат в Ω преобразуем матрицу q_α так, чтобы первые k строк ее были линейно независимы в окрестности точки α_0 , а остальные $n - k$ строк были нулевыми. Из невырожденности матрицы C следует, что в матрице $\begin{pmatrix} \text{Re } z_\alpha \\ \text{Im } z_\alpha \end{pmatrix}$ найдется $n - k$ столбцов

$$(r_{k+1}), \dots, (r_n), \quad \text{где} \quad (r_j) = \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} (z_{k(j)})_\alpha$$

таких, что матрица $(q_{1\alpha}, \dots, q_{k\alpha}, r_{k+1}, \dots, r_n)^t$ будет невырождена в некоторой окрестности U_{α_0} точки α_0 . Для завершения доказательства осталось положить

$$\gamma_i(\alpha) = \begin{cases} 0 & i \leq k, \\ r_i & i > k. \end{cases}$$

Тогда по построению $\det \{q_\alpha + \gamma_\alpha\} \neq 0$ при $\alpha \in U_{\alpha_0}$. Лемма доказана.

Введем некоторые новые объекты.

Определим функцию $\sigma(x)$ как решение уравнения

$$x = q(\sigma) + \gamma(\sigma). \quad (3.4)$$

По только что доказанной лемме решение уравнения (3.4) существует и единственно в некоторой окрестности точки α_0 . Пусть

в окрестности U_{α_0} задана функция

$$\bar{S}^{\gamma}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} W_0(\sigma) - \langle p(\sigma) + w(\sigma), z(\sigma) - \gamma(\sigma) \rangle + \frac{1}{2} \langle z - \gamma, C^{-1}B(z - \gamma) \rangle, \quad (3.5)$$

где $W_0(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial W_0}{\partial \sigma} = C(\sigma)(p(\sigma) + w(\sigma)). \quad (3.6)$$

Определение. Функцию $W_0(\sigma)$, удовлетворяющую условию (3.6), будем называть энтальпией (комплексного) ростка.

Положим

$$S^{\gamma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}^{\gamma}(\sigma(x)), \quad (3.7)$$

где $\sigma(x)$ — решение уравнений (3.4).

Пусть теперь $U_1 \subset \Omega$ — некоторая окрестность, пересекающаяся с U_{α_0} ; и

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in U_1.$$

Введем функцию $S(x)$:

$$S(x) = W_0(\alpha) - \langle p(\alpha) + w(\alpha), z(\alpha) \rangle + \frac{1}{2} \langle z, C^{-1}Bz \rangle \Big|_{\alpha=\alpha(x)}, \quad (3.8)$$

где функция $\alpha(x)$ есть решение уравнений

$$x = q(\alpha), \quad (3.9)$$

а $W_0(\alpha)$ — энтальпия комплексного ростка.

Определение. Функцию $S^{\gamma}(x)$

$$S^{\gamma}(x) = W_0(\sigma) - \langle p(\sigma) + w(\sigma), z(\sigma) - \gamma(\sigma) \rangle + \frac{1}{2} \langle z - \gamma, C^{-1}B(z - \gamma) \rangle \Big|_{\sigma=\sigma(x)},$$

где $\sigma(x)$ — решение уравнений (3.4), будем называть γ -перестройкой функции $S(x)$, определенной формулой (3.8).

Сравним теперь функцию $S(x)$ с ее γ -перестройкой $S^{\gamma}(x)$ и вычислим производные функции $S^{\gamma}(x)$.

Лемма 3.4. Пусть функция $S^{\gamma}(x)$ есть γ -перестройка функции $S(x)$. Тогда равномерно по α на пересечении окрестностей $U_1 \cap U_{\alpha_0}$ выполняются оценки

$$\frac{\partial S^{\gamma}}{\partial x} = [p + w - \mathcal{E}z] + O_D(h), \quad (S^{\gamma}(x) - S(x)) = O_D(h^{3/2}).$$

Доказательство. Оценим сначала разность

$$\psi_1(x) = |\nabla_x S^{\gamma}(x) - \nabla_x S(x)|_{x(\alpha) - x(\sigma) + \gamma(\sigma)}.$$

Мы полагаем $D(x) \stackrel{\text{def}}{=} D(\alpha(x))$ в U_1 и $D(x) \stackrel{\text{def}}{=} D(\sigma(x))$ в U_{α_0} . Обозначим

$$D_0(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{\partial (q_i + \gamma_i)(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\|$$

и пусть $\sigma(\alpha)$ — решение уравнений

$$q(\alpha) = q(\sigma) + \gamma(\sigma), \quad (3.10)$$

которое существует и единственно, так как $\det D_0(\sigma) \neq 0$ по лемме 3.3. Разложим $\sigma(\alpha)$ в асимптотический ряд по степеням γ :

$$\sigma = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + O_D(h^{3/2}), \quad (3.11)$$

где $\alpha_1 = -(D'_0)^{-1} \gamma(\alpha) = O_D(h^{1/2})$,

$$\alpha_{2i} = -\frac{1}{2} D_0^{-1} D_0 / s \alpha_k \alpha_{1s} \alpha_{1k}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и повторение индексов при умножении здесь и в дальнейшем означает суммирование.

Вычислим производную $\frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma)}{\partial \sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma)}{\partial \sigma} &= C(\sigma) (p(\sigma) + w(\sigma)) - B(z(\sigma) - \gamma(\sigma)) - \\ &\quad - (z_\sigma - \gamma_\sigma) (p + w) + (z_\sigma - \gamma_\sigma) C^{-1} B (z - \gamma) + O_D(h) = \\ &= (C(\sigma) - (z_\sigma - \gamma_\sigma)) (p + w) - [C - (z_\sigma - \gamma_\sigma)] C^{-1} B (z - \gamma) + O_D(h) = \\ &= D_0(\sigma) (p + w) - D_0 C^{-1} B (z - \gamma) + O_D(h). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Воспользовавшись разложением (3.11), можно получить равенство

$$\sigma = \alpha + \alpha_1 + f_0, \quad |f_0| \leq \frac{1}{\det D_0(\alpha)} O_D(h). \quad (3.13)$$

Подставляя выражение для σ из (3.13) в формулу для производной $\frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma)}{\partial \sigma}$ (3.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma(\alpha))}{\partial \sigma} &= D_0(\sigma(\alpha)) (p(\alpha) + w(\alpha)) + D_0(\sigma(\alpha)) B^t \alpha_1 - \\ &\quad - D_0(\sigma) C^{-1}(\alpha) B(\alpha) (z(\alpha) - \gamma(\alpha)) - D_0 C^{-1}(\alpha) B(\alpha) (z_\alpha(\alpha) - \\ &\quad - \gamma_\alpha(\alpha))^t \alpha_1 + O_D(h). \end{aligned}$$

Напомним, что $(C^{-1}B) = B^t (C^t)^{-1} + O_D(h^{1/2})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma(\alpha))}{\partial \sigma} &= D_0(\sigma) (p + w)(\alpha) + D_0 C^{-1} B (z - \gamma)(\alpha) - \\ &\quad - D_0 B^t (C^t)^{-1} [(z_\alpha - \gamma_\alpha)^t - C^t] \cdot \alpha_1 + O_D(h) = D_0(\sigma) (p + w)(\alpha) - \\ &\quad - D_0 C^{-1} B z + D_0 C^{-1} B \gamma + D_0 B^t (C^t)^{-1} D'_0 \alpha_1 + O_D(h). \end{aligned}$$

Но в силу (3.11)

$$D'_0 \alpha_1 = -\gamma(\alpha).$$

Окончательно получаем равенство:

$$\frac{\partial \bar{S}^Y(\sigma(\alpha))}{\partial \sigma} = D_0(\sigma) [p + w - C^{-1} B z] + O_D(h). \quad (3.14)$$

Заметим, что равенство (3.14) выполняется равномерно в области U_{α_0} . Это следует из (3.13).

Легко проверить, что из уравнения (3.4) следует равенство

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = \frac{1}{D_0}.$$

Таким образом, на пересечении окрестностей U_{α_0} и U_1 , производная функция $\frac{\partial S^V(x)}{\partial x}$ равна, в силу (3.14),

$$\frac{\partial S^V(x)}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial S^V}{\partial \sigma} \Big|_{\alpha=\alpha(x)} = [p + w - \mathcal{E}z] |_{\alpha=\alpha(x)} + O_D(h), \quad (3.15)$$

причем эта оценка равномерна при $\alpha \in U_{\alpha_0}$, $\det q_\alpha \neq 0$. Для доказательства оценки (3.15) мы воспользовались только двумя первыми членами разложения (3.11). Используя все члены разложения, можно записать

$$\begin{aligned} W_0(\sigma) &= W_0(\alpha) + \langle C(p+w)(\alpha), \alpha_1 + \alpha_2 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \langle CB' \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \left\langle \sum_k C'_{\alpha_k}(p+w), \alpha_1 \right\rangle \alpha_{1k} \right\} + O_D(h^{3/2}), \\ p+w &= (p+w)(\alpha) + B'(\alpha_1 + \alpha_2) + O_D(h), \\ (z-\gamma)(\sigma) &= (z-\gamma)(\alpha) + (z_\alpha - \gamma_\alpha)(\alpha_1 + \alpha_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \langle (z_\alpha - \gamma_\alpha)_{\alpha_k} \alpha_1 \rangle \alpha_{1k} + O_D(h^{3/2}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь мы обозначили через $z_\alpha - \gamma_\alpha$ матрицу с элементами

$$(z_\alpha - \gamma_\alpha)_{ji} = \frac{\partial (z_i - \gamma_i)}{\partial \alpha_j},$$

а через $(z_\alpha - \gamma_\alpha)_{\alpha_k}$ — матрицу с элементами

$$[(z_\alpha - \gamma_\alpha)_{\alpha_k}]_{ji} = \frac{\partial^2 (z_i - \gamma_i)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}.$$

Аналогично определяется матрица C'_{α_k} . Подставляя выражения (3.16) в определение функции $S^V(\sigma)$ и производя вычисления, аналогичные предложенным для доказательства равенства (3.14), получим оценку

$$(S^V(x) - S(x))|_{x(\alpha)} = q(\sigma) + \gamma(\sigma) = O_D(h^{3/2}), \quad (3.17)$$

причем оценка равномерна в области, где

$$\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \text{ и } \alpha \in U_{\alpha_0}.$$

Замечание. Можно показать, что разность $S^V(x) - S(x)$, обозначаемая нами $O_D(h^{3/2})$, есть сумма членов типа $f_1 \cdot z_i \cdot w_i \cdot \operatorname{Re} z_j$, $f_2 \cdot \operatorname{Im} z_k \cdot \operatorname{Re} w_k \cdot \gamma_l$ и т. д., где f_1, f_2 — гладкие функции.

Пусть теперь Λ^n — лагранжево многообразие с комплексным ростком, $\det C(\alpha) \neq 0$ на Λ^n . По определению, на Λ^n задана функция $E(\alpha)$ с дифференциалом

$$dE(\alpha) = \langle \omega, dx \rangle - \langle z, dp \rangle - \frac{1}{2} \langle z, d\omega \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega, dz \rangle + \langle f, d\alpha \rangle.$$

Из этого факта легко следуют существование на Λ^n функции $W_0(\alpha)$ — энтальпии ростка — и равенство:

$$\Phi(\alpha) = W(\alpha) - \langle p + \omega, z \rangle + \mu(\alpha),$$

где $\Phi(\alpha)$ — фаза ростка, $\mu(\alpha)$ — μ -действие.

По лемме 3.3 существует покрытие многообразия Λ^n атласом $\{\omega_j\}$, таким, что в каждой карте определена функция $\gamma^j(\alpha)$ и

$$\det \left\| \frac{\partial (q_i + \gamma_i^j)(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \text{ при } \alpha \in \omega_j.$$

Предположим, что в некоторой карте ω_i

$$\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Определим в ней функцию $\tilde{\Phi}(x)$ равенством

$$\tilde{\Phi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\alpha(x)).$$

В ω_j -картах определим (см. определение, стр. 449) функции $\tilde{\Phi}^{j'}(x)$ как γ^j -перестройки функции $\tilde{\Phi}(x)$. По функциям $\tilde{\Phi}^{j'}(x)$ можно определить функцию $\Phi'(x)$ с помощью разбиения единицы $\{e^i(x)\}$, подчиненного атласу $\{\omega_i\}$:

$$\Phi'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \Phi^{j'}(x) e_i(x). \quad (3.18)$$

Функцию $\Phi'(x)$, определенную равенством (3.18), будем называть x -фазой на многообразии Λ^n с комплексным ростком.

В силу неравенства диссипативности и леммы 3.4 найдется такая функция $C(\alpha) > 0$, что мнимая часть функции $S_0(x)$, определенной равенством

$$S_0(x) = \Phi'(x) + iC(\alpha(x)) D_0^{3/2-\varepsilon}(x), \quad (3.19)$$

неотрицательна.

Имеет место теорема

Теорема 3.2 Пусть при $t \in [0, T]$

$$\det \left\| \frac{\partial (q_i + z_i)(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Тогда решение $S(x, t)$ задачи (2.7), удовлетворяющее условию $S(x, 0) = S_0(x)$, где функция $S_0(x)$ определена равенством (3.19) при любом $t \in [0, T]$, определяется формулой

$$\tilde{S}(x, t) = \Phi'(x, t) + iC(x, t) D^{3/2-\varepsilon},$$

где $\Phi'(x, t)$ — x -фаза на многообразии Λ_t^n с комплексным ростком, которое получено сдвигом начального многообразия Λ^n вдоль траекторий системы (2.8), (2.9) за время t , $C(x, t) > 0$ — некоторая функция, причем $\text{Im } S(x, t) \geq 0$ и $C(x, t) \leq \text{const}$.

Доказательство. Пусть $\{\omega_i^t\}$ — атлас многообразия Λ_t^n , такой, что в каждой карте ω_i^t определена функция $\gamma^t(\alpha, t)$ и

$$\det \left\| \frac{\partial (q_i(\alpha, t) + \gamma_i^t(\alpha, t))}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \omega_i^t.$$

Пусть в некоторой карте ω_i^t выполнено неравенство

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Определим в ω_i^t функцию $\tilde{\Phi}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\alpha(x, t), t)$, где $\Phi(\alpha, t)$ — фаза ростка (Λ_t^n, r_t^n) . Определим функции $\Phi \gamma^t(x, t)$ в картах ω_i^t как γ^t -перестройки функции $\Phi(x, t)$.

Непосредственным дифференцированием равенства (3.17) можно показать, что в силу замечания, сделанного нами после доказательства равенства (3.17), оценок решений уравнений роста и леммы 3.4, равномерно по α при $\det q_\alpha \neq 0$ выполняется оценка

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\Phi} \gamma^t(x, t) - \tilde{\Phi}(x, t)) = O_D(h^{3/2-\varepsilon}), \quad (3.20)$$

где через $\frac{d}{dt}$ мы обозначили дифференцирование вдоль траекторий системы Гамильтона (2.8)

Из формул § 2 следует равенство (см. лемму 2.7)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = \mathcal{H}(p, q, t) - i \langle \tilde{H}_p(p, x, t), \omega - \mathcal{E}z \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle \omega - \mathcal{E}z, \mathcal{H}_{pp}(\omega - \mathcal{E}z) \rangle + f, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $|f| \leq \text{const } D^{3/2}$.

Анализируя вычисления, приводящие к формуле (3.21), легко усмотреть, что выражение, обозначенное через f , равномерно ограничено по α (не содержит слагаемых или сомножителей вида $(q_\alpha)^{-1}$).

Таким образом, из (3.20) и (3.21) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\Phi} \gamma^t(x, t) = H(p, q, t) - i \langle \tilde{H}_p(p, q, t), \omega - \mathcal{E}z \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle \omega - \mathcal{E}z, \mathcal{H}_{pp}(\omega - \mathcal{E}z) \rangle + O_D(h^{3/2}) \end{aligned}$$

и функция, обозначенная нами через $O_D(h^{3/2})$, равномерно по α ограничена при $\det q_\alpha \neq 0$.

Заметим теперь, что если мы будем подставлять в соотношение (2.7) производные функции $\tilde{\Phi}(x, t)$ без слагаемых вида $O_D(h^0)$, то оценки (2.29), (2.35) также будут выполняться. Значит,

функции $\tilde{\Phi}^t(x, t)$ всюду в точках, где $\det q_\alpha \neq 0$, удовлетворяют соотношению (2.7), причем оценка выполняется равномерно по α .

По непрерывности заключаем, что функции $\tilde{\Phi}^t(x, t)$ всюду в картах ω_i^t удовлетворяют соотношению (2.7). Кроме того, в силу леммы (3.4), функции $\tilde{\Phi}^t(x, t)$ удовлетворяют неравенству диссипативности; точнее, в силу замечания, сделанного после доказательства оценки (3.17) и оценок решений уравнений комплексного роста, найдется такая функция $C(\alpha, t)$, что $0 < C(\alpha, t) \leq \text{const}$ и в каждой карте ω_i^t выполнено условие

$$\gamma_i D(x, t) \leq \text{Im } \tilde{\Phi}^t(x, t) + C(\alpha^t, t) O_D(h^{3/2-\varepsilon}).$$

Таким образом, функции $\Phi^t(x, t)$

$$\Phi^t(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Phi}^t(x, t) + iC(\alpha^t(x, t), t) O_D(h^{3/2-\varepsilon})$$

суть решения уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией, каждая в своей карте. Рассмотрим теперь вещественное разбиение единицы $\{e_i^t(x, t)\}$, подчиненное покрытию $\{\omega_i^t\}$, и определим функцию

$$S(x, t) = \sum_i \Phi^t(x, t) e_i^t(x, t). \quad (3.22)$$

По построению функций $\Phi^t(x, t)$ функция $S(x, t)$, определенная равенством (3.22), является решением задачи (2.7) в момент времени t .

Таким образом, нами указан способ построения решения задачи уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией до комплексной фокальной точки, т. е. в моменты времени от 0 до T , в которых

$$\det \left\| \frac{\partial(q_i + z_i)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Замечание. Можно было бы, рассмотрев в расширенном фазовом пространстве (q, t, p, E) лагранжево многообразие Λ^T , которое получается при движении начального многообразия Λ вдоль траекторий системы Гамильтона (2.8) способом, совершенно аналогичным изложенному, построить решение задачи сразу для всего отрезка времени до комплексной фокальной точки.

§ 4. γ -перестройки как адиабатические преобразования

В этом параграфе мы установим связь γ -перестройки с адиабатическими преобразованиями. Именно, мы покажем, что для всякой γ -перестройки фазы существует адиабатическое преобразование, задаваемое гамильтонианом, который определяется этой γ -перестройкой.

Пусть снова Λ^n — лагранжево многообразие комплексным ростком. Через $D_0(\alpha)$ обозначим диссипацию на Λ^n .

Пусть в карте ω^t определена функция $\gamma(\alpha)$ такая, что

$$\det \left\| \frac{\partial(q_i + \gamma_i)(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \text{ при } \alpha \in \omega^t.$$

Определим $\sigma(x)$ как решение уравнений

$$x = q(\sigma) + \gamma(\sigma).$$

Пусть, кроме того, в карте ω выполнено условие

$$\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Определим еще функцию $\alpha = \alpha(x)$ как решение уравнений

$$q(\alpha) = x.$$

Положим

$$\mathcal{K}(p, q) = \frac{1}{2} [p - p(\sigma) - w(\sigma) + B^t (C^t)^{-1} (z(\sigma) - \gamma(\sigma))]^2 |_{\sigma=\sigma(q)}. \quad (4.1)$$

Определение. Гамильтониан $\mathcal{K}(p, q)$, определенный равенством (4.1), будем называть собственным.

Для удобства вычислений введем функции

$$\begin{aligned} \varphi(p, q) &= p - p(\sigma) - \operatorname{Re} [w(\sigma) + B^t (C^t)^{-1} (\gamma(\sigma) - z(\sigma))] |_{\sigma=\sigma(q)}, \\ \psi &= \psi(q) = -\operatorname{Im} [w(\sigma) + B^t (C^t)^{-1} (\gamma(\sigma) - z(\sigma))] |_{\sigma=\sigma(q)}. \end{aligned}$$

Представим гамильтониан $\mathcal{K}(p, q)$ в виде

$$\mathcal{K}(p, q) = H(p, q) + i\tilde{H}(p, q),$$

где

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \operatorname{Re} \mathcal{K}(p, q) = \frac{1}{2} (\varphi^2 - \psi^2), \\ \tilde{H}(p, q) &= \operatorname{Im} \mathcal{K}(p, q) = \langle \varphi, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что из определения функций $\varphi(p, q)$ и $\psi(q)$ следует, что

$$\varphi = O(p - p(\sigma)) + O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad \psi = O_{D_0}(\sqrt{h}).$$

Оценим величину $\varphi_q + i\psi_q$:

$$\begin{aligned} \varphi_q + i\psi_q &= (-p_\sigma - w_\sigma + B^t (C^{-1})^t (z_\sigma - \gamma_\sigma)) [(q_\sigma + \gamma_\sigma)^{-1}]^t + O_{D_0}(\sqrt{h}) = \\ &= (-B^t + B^t (C^{-1})^t (z_\sigma - \gamma_\sigma)^t) [(q_\sigma + \gamma_\sigma)^t]^{-1} + O_{D_0}(\sqrt{h}) = -B^t (C^{-1})^t + O_{D_0}(\sqrt{h}). \end{aligned}$$

Но в силу леммы 2.6

$$B^t (C^{-1})^t = C^{-1}B + O_{D_0}(\sqrt{h}).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\varphi_q + i\psi_q = -C^{-1}B + O_{D_0}(\sqrt{h}). \quad (4.3)$$

Напишем систему Гамильтона, соответствующую гамильтониану $\mathcal{K}(p, q)$. Легко видеть, что в силу (4.1) она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= p - p_0 + O_{D_0}(\sqrt{h}) (p - p_0) + O_{D_0}(h), \quad p|_{t=0} = p(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} p_0, \\ \dot{q} &= p - p_0 + O_{D_0}(\sqrt{h}) (p - p_0) + O_{D_0}(h) \quad q|_{t=0} = q(\sigma). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система уравнений комплексного роста имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -i\tilde{H}_q - \mathcal{K}_{qq}z - \mathcal{K}_{qp}w \quad w|_{t=0} = w(\sigma), \\ \dot{z} &= i\tilde{H}_p + \mathcal{K}_{pq}z + \mathcal{K}_{pp}w \quad z|_{t=0} = z(\sigma). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как

$$|p(\alpha) - p(\sigma)|_{q(\alpha)=q(\sigma)+\gamma(\sigma)} = O_{D_0}(\sqrt{h})$$

в силу леммы 3.3, то из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} p(\sigma, t) &= p(\alpha) + O_{D_0}(\sqrt{h}), \\ q(\sigma, t) &= q(\alpha) + O_{D_0}(\sqrt{h}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

и, кроме того, на решениях системы (4.4)

$$\varphi(p, q) = O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad \mathcal{H}(p, q) = O_{D_0}(h).$$

Оценим теперь производные гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$ по p и q на решениях системы уравнений (4.4):

$$\begin{aligned} H_p &= \varphi + O_{D_0}(h), \quad H_q = \langle \varphi, \varphi_q \rangle - \psi \psi_q + O_{D_0}(h), \\ \tilde{H}_p &= \psi + O_{D_0}(h), \quad \tilde{H}_q = \psi \varphi_q + \varphi \psi_q + O_{D_0}(h), \\ H_{pp} &= 1, \quad H_{pq} = \varphi_q + O_{D_0}(h), \\ H_{qq} &= (\varphi_q^2 - \psi_q^2) + O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad \tilde{H}_{pp} = O_{D_0}(\sqrt{h}) (=0), \\ \tilde{H}_{pq} &= \psi_q + O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad \tilde{H}_{qq} = \langle \varphi_q, \psi_q \rangle + \langle \psi_q, \varphi_q \rangle + O_{D_0}(\sqrt{h}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из системы 4.5) и оценок (4.7) получаем, что

$$\omega(\sigma, t) = O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad z = O_{D_0}(\sqrt{h}). \quad (4.8)$$

Покажем теперь, что сдвиг вдоль траекторий системы за произвольно малое время переводит карту ω_V в карту ω_V^1 диффеоморфно проектирующуюся на плоскость q .

Лемма 4.1. Пусть $\det q_\sigma = 0$ в точке $\sigma_0 \in \Omega_1$; тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\det q_\sigma(\sigma, t) \neq 0$ при $t \in [0, \varepsilon]$, $\sigma = \sigma(\alpha)$.

Доказательство. Пусть

$$\text{rang } q_\alpha = k, \quad 0 \leq k < n.$$

Выберем такую систему координат, в которой первые k строк матрицы q_α линейно независимы, а остальные равны нулю.

Рассмотрим производные по t от функции $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det \{q_\alpha(\sigma, t)\}$ в точке $t=0$. В силу того, что матрица $q_\alpha(\sigma, 0)$ имеет $N-k$ строк тождественно равных нулю, $(N-k-1)$ производная по t от функции $f(t)$ равна нулю при $t=0$.

Докажем, что

$$\frac{\partial^{N-k}}{\partial t^{N-k}} f(t) \Big|_{t=0} = \det a_{ij} \neq 0,$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{i\alpha_j} \Big|_{t=0} & i \leq k, \\ \frac{\partial}{\partial t} q_{i\alpha_j} \Big|_{t=0} & i > k. \end{cases} \quad (4.9)$$

Предположим противное: пусть матрица $\{a_{ij}\}$ вырождена. В силу того, что по построенным первым k строк матрицы a_{ij} линейно независимы, из условия $\det a_{ij} = 0$ следует, что $\exists s (k < s \leq N)$ такое, что

$$a_{sj} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N D_i a_{ij}, \quad j=1, \dots, N. \quad (4.10)$$

Подставим в (4.10) значения a_{ij} , найденные из (4.9):

$$\sum_{i=1}^k D_i q_{i\alpha_j} + \sum_{i=k+1}^N D_i \left\{ p_{i\alpha_j} - \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N B_{im} \sum_{l=1}^k C_{ml}^{-1} q_{l\alpha_j} \right\} \Big|_{t=0} = O_{D_0}(h^{1/2}),$$

для $\forall, j=1, \dots, N,$ (4.11)

где $D_s \stackrel{\text{def}}{=} -1$; но из (4.11) следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} q_{1\alpha_j} \\ \dots \\ q_{k\alpha_j} \\ p_{k+1\alpha_j} \\ \dots \\ p_{N\alpha_j} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \Gamma$$

вырождена, что противоречит лемме о локальных координатах. Следовательно:

$$f(0) = 0, \dots, \frac{\partial^{N-k-1} f(0)}{\partial t^{N-k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{N-k} f(0)}{\partial t^{N-k}} \neq 0$$

и в некоторой ε -окрестности точки $t=0$ функция $f(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Лемма доказана.

Докажем еще одну вспомогательную лемму

Лемма 4.2. Пусть функция $S(q) \stackrel{\text{def}}{=} S_1 + iS_2$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p(\sigma) + w(\sigma) + B^t(C^{-1})^t(\sigma) [z - \gamma] |_{\sigma=\sigma(q)} + O_{D_0}(h),$$

$$S_2(q) \geq c D_0(q); \quad c = \text{const.}$$

Тогда выполняется оценка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q \right) + i \left\langle \mathcal{H}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q \right), \frac{\partial S_2}{\partial q} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial q}, \mathcal{H}_{pp} \frac{\partial S_2}{\partial q} \right\rangle = O_{S_1}(h^{3/2-\varepsilon}), \quad (4.12)$$

где $\mathcal{H}(p, q)$ — собственный гамильтониан.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial S_1}{\partial q} - p(\sigma) - w(\sigma) - C^{-1} B (z(\sigma) - \gamma(\sigma)) \right]_{\sigma=\sigma(q)}^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial q}, \frac{\partial S_2}{\partial q} \right\rangle + O_{D_0}(h)^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathcal{H}_p = \left[\frac{\partial S_1}{\partial q} - p(\sigma) - w(\sigma) - C^{-1} B (z(\sigma) - \gamma(\sigma)) \right]_{\sigma=\sigma(q)} = -i \frac{\partial S_2}{\partial q} + O_{D_0}(h)$$

и $\mathcal{H}_{pp} = 1$. Подставляя полученные выражения для производных гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$ в (4.12), получаем утверждение леммы.

Теперь мы можем выяснить геометрический смысл γ -перестройки.

Теорема 4.1. Обозначим через $Dg^t \mathcal{H}_{(p,q)}$ преобразование исходного ростка (Λ^n, r^n) с помощью собственного гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < t \leq \delta$ выполнена оценка

$$\Phi^t(x) - \Phi(x) = O_{D_0}(h^{3/2-\varepsilon}),$$

где через $\Phi^t(x)$ мы обозначили фазу на ростке $Dg^t \mathcal{H}_{(p,q)}(\Lambda^n, r^n)$.

Доказательство. Предположим для простоты, что многообразие Λ^n покрывается одной неособой зоной, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial (q_i(\alpha) + z_i(\alpha))}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \text{ на } \Lambda^n,$$

а $\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|$ обращается в 0 в некоторых точках многообразия Λ^n . Нам нужно показать, что решение диссипативной задачи Гамильтона — Якоби, соответствующей собственному Гамильтониану $\mathcal{H}(p, q)$, взятое в некоторый момент времени t (обозначим его $S_t(x)$), мало отличается от функции $\Phi(x)$, т. е. справедливо равенство см. теорему 3.2)

$$S_t(x) - \Phi(x) = O_{D_0}(h^{3/2-\epsilon}). \quad (4.13)$$

Отметим одно важное обстоятельство. Так как мнимая часть собственного гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$, очевидно, не удовлетворяет условию $\text{Im } \mathcal{H}(p, q) = -\dot{H}(p, q) \geq 0$, то мы не можем прямо использовать ранее доказанные теоремы, в которых определялось решение диссипативной задачи Гамильтона — Якоби. Однако, анализируя доказательство теоремы 2.1, мы покажем, что в силу специального вида собственного гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$ и начального условия $\Phi(q)$ функция $S_t(q)$, построенная по формулам теоремы 2.1, удовлетворяет соотношению (2.7).

В случае, когда гамильтониан $\mathcal{H}(p, q, t)$ не удовлетворяет условию $\dot{H}(p, q, t) = \text{Im } \mathcal{H}(p, q, t) \leq 0$, мы не можем проводить оценки с помощью диссипации $D(x, t)$, определенной в § 1. Однако свойства собственного гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$ таковы, что все нужные оценки можно получить через $D_0(x)$ — диссипацию на начальном лагранжевом многообразии с комплексным ростком. В самом деле, нетрудно заметить, что во всех формулах, полученных при доказательстве теоремы 2.1, вплоть до оценки функции $g(x, t)$ (2.24), оценки можно получать через соответствующие степени роста $|z(\sigma, t)| + |w(\sigma, t)|$. Но в силу (4.8) росток в нашем случае оценивается через диссипацию D_0 на начальном лагранжевом многообразии.

Для проведения оценок во всех остальных случаях достаточно заметить, что в силу (4.7) $\dot{H}_p(p, q, t) = O_{D_0}(\sqrt{h})$. Таким образом, функция S_t , построенная по формулам теоремы (2.1), удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_t}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\text{Re } \frac{\partial S_t}{\partial q}, q\right) + i \left\langle \mathcal{H}_p\left(\text{Re } \frac{\partial S_t}{\partial q}, q\right), \text{Im } \frac{\partial S_t}{\partial q} \right\rangle - \\ - \frac{1}{2} \left\langle \text{Im } \frac{\partial S_t}{\partial q}, \mathcal{H}_{pp}\left(\text{Re } \frac{\partial S_t}{\partial q}, q\right) \text{Im } \frac{\partial S_t}{\partial q} \right\rangle = O_{D_0}(h^{3/2-\epsilon}). \end{aligned}$$

Представим теперь функцию $S_t(x)$ в виде, уже использовавшемся нами ранее:

$$\begin{aligned} S_t(x) = W(\alpha, t) - \langle p(\alpha, t) + w(\alpha, t), z(\alpha, t) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle z(\alpha, t), C^{-1}Bz(\alpha, t) \rangle|_{\alpha=\alpha(q,t)}, \end{aligned}$$

где $W(\alpha, t)$ — энтальпия комплексного ростка на лагранжевом многообразии Λ^n_t , полученном из начального многообразия Λ^n сдвигом за время t вдоль траекторий системы (4.4), $\alpha(q, t)$ — решение уравнений $q(\alpha, t) = q$, которое существует в силу леммы 4.1.

Вычислим производную $\frac{\partial S_t}{\partial x}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_t}{\partial x} = q_a^{-1} C(p+w) - q_a^{-1} Bz - q_a^{-1} z_a(p+w) + q_a^{-1} z_a C^{-1} Bz + O_{D_0}(h) = \\ = O_{D_0}(h) + q_a^{-1} [C - z_a](p+w) - q_a^{-1} (C - z_a) C^{-1} Bz = p + w - C^{-1} Bz + O_{D_0}(h). \end{aligned}$$

В силу оценок решений системы (4.5)

$$w = O_{D_0}(\sqrt{h}), \quad z = O_{D_0}(\sqrt{h}).$$

Заметим, что диссипация D_0 в оценках решений системы (4.5) определена на начальном лагранжевом многообразии.

Подставляя теперь $S_t = S_1 + iS_2$ в выражение

$$L(S_t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q\right) + i \langle \mathcal{H}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q\right), \frac{\partial S_2}{\partial q} \rangle - \\ - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial q}, \mathcal{H}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q}, q\right) \frac{\partial S_2}{\partial q} \right\rangle$$

и производя вычисления, совершенно аналогичные проделанным при доказательстве леммы 4.2, получим

$$L(S_t, q) = O_{D_0}(h).$$

Обозначим теперь $\omega(q, t)$ разность

$$\omega(q, t) = S_t(q) - \Phi(q).$$

Очевидно, что $\omega(q, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = O_{D_0}(h), \quad \omega(q, 0) = 0.$$

Следовательно, $|\omega| = O_{D_0}(h)$, $|\omega'_q| = O_{D_0}(h^{1/2})$.

Разложим теперь функцию $L(S_t, q)$ по формуле Тейлора:

$$L(S_t, q) = \mathcal{H} + \langle \mathcal{H}_p \operatorname{Re} \omega'_q \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Re} \omega'_q, \mathcal{H}_{pp} \operatorname{Re} \omega'_q \rangle + \\ + i \langle \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{pp} \operatorname{Re} \omega'_q, \operatorname{Im} \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \operatorname{Im} \omega'_q \rangle - \\ - \frac{1}{2} \langle \operatorname{Im} \Phi'_q + \operatorname{Im} \omega'_q, \mathcal{H}_{pp} (\operatorname{Im} \Phi'_q + \operatorname{Im} \omega'_q) \rangle + O_{D_0}(h^{3/2}). \quad (4.14)$$

Здесь функции $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_p$, $\mathcal{H}_{pp}$ вычисляются в точке $(\operatorname{Re} \Phi'_q, q)$.

Приводя в (4.14) подобные члены и учитывая, что в силу леммы 4.2

$$L(\Phi, q) = O_{D_0}(h^{3/2}),$$

получаем из (4.1)

$$L(S_t, q) = \langle \omega'_q, \mathcal{H}_{pp} \omega'_q \rangle + O_{D_0}(h^{3/2}).$$

Таким образом, получаем соотношение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle \omega'_q \mathcal{H}_{pp} \omega'_q \rangle = O_{D_0}(h^{3/2}), \quad (4.15)$$

$$\omega|_{t=0} = 0.$$

Дифференцируя (4.15) по q , получаем соотношение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega'_q) + \mathcal{H}_{pp} \omega_{qq} \omega'_q = O_{D_0}(h), \quad (4.16)$$

$$\omega'_q|_{t=0} = 0.$$

Из (4.16) следуют оценки

$$|\omega'_q| = O_{D_0}(h), \quad |\omega| = O_{D_0}(h^{3/2-\varepsilon}).$$

Из последней оценки и следует утверждение теоремы.

§ 5. Решение уравнения переноса с диссипацией в зоне

Роль якобиана и уравнений переноса в асимптотических формулах и геометрических конструкциях была уже ясна нам из многочисленных примеров. Здесь мы приведем решение уравнения переноса для общей ситуации, отвечающей лагранжеву многообразию с комплексным ростком.

Будем называть решением уравнения переноса с диссипацией функцию $\varphi(x, t)$, удовлетворяющую соотношению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle \mathcal{H}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) + i \mathcal{H}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial S_2}{\partial x}(x, t), \nabla_x \varphi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum \mathcal{H}_{p_i p_j} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \varphi + G(x, t) \varphi = O_{S_2}(h^{1/2-\varepsilon}), \quad (5.1)$$

где $S_1(x, t)$, $S_2(x, t)$ — решения диссипативной задачи Гамильтона — Якоби, соответствующей гамильтониану $\mathcal{H}(p, q, t)$, $G(x, t)$ — гладкая функция $S(x, t) = S_1(x, t) + i S_2(x, t)$.

Обозначим, как и раньше, через $\frac{d}{dt}$ векторное поле вида

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle H_p, \frac{\partial}{\partial q} \rangle. \quad (5.2)$$

Кроме того, обозначим через J_α и J_x определители

$$J_\alpha = \det \left\| \frac{\partial (q_i(\alpha, t) + z_i(\alpha, t))}{\partial \alpha_j} \right\|, \quad (5.3)$$

$$J_x = \det \left\| \frac{\partial (q_i(\alpha(x), t) + z_i(\alpha(x), t))}{\partial x_j} \right\|. \quad (5.4)$$

Напомним, что функции $q_i(\alpha, t)$ являются решениями системы Гамильтона (2.8) и $z_i(\alpha, t)$ — решение системы уравнений роста (2.9), $\bar{q}(\alpha(x), 0) = x$.

Мы докажем теорему.

Теорема 5.1. Пусть

$$\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0, \quad J_\alpha \neq 0$$

при $0 \leq t \leq T$. Тогда решение уравнения переноса с диссипацией при $t \in [0, T]$ имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{J_\alpha}} (\varphi(\alpha) - \langle z(\alpha, t), C^{-1}(\alpha, t) \nabla_\alpha \varphi(\alpha) \rangle) \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau) d\tau \right\} \Big|_{\alpha = \alpha(x, t)}.$$

$\varphi(\alpha)$ — гладкая функция, $z(\alpha, t)$ — решение системы уравнений роста (2.9), функция $\Psi(p, q, t)$ определена равенством (5.19) и $\alpha = \alpha(x, t)$ — решение уравнений $q(\alpha, t) = x$.

Замечание. Из доказательства теоремы легко следует, что формулу для решения $\varphi(x, t)$ можно записать в виде

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{J_x}} (\varphi(\alpha) - \langle z(\alpha, t), c^{-1} \nabla_{\alpha} \varphi(\alpha) \rangle) \times \\ \times \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau) d\tau \right\} \Big|_{\alpha=\alpha(x, t)}.$$

Вначале получим лемму. В силу системы Гамильтона (2.8) и комплексного роста (2.9) имеем для $i=1, \dots, n$

$$\dot{q}_i + \dot{z}_i = \mathcal{K}_{p_i} (p, q, t) + \mathcal{K}_{p_i q_i} z + \mathcal{K}_{p_i p_i} w. \quad (5.5)$$

По правилу дифференцирования определителей

$$\frac{d}{dt} J_{\alpha} = \dot{J}_{\alpha} = \\ = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_1 + \dot{z}_1)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial(\dot{q}_n + \dot{z}_n)}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(\dot{q}_1 + \dot{z}_1)}{\partial \alpha_n} & \dots & \frac{\partial(\dot{q}_n + \dot{z}_n)}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \frac{\partial(q_1 + z_1)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial(q_n + z_n)}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(q_1 + z_1)}{\partial \alpha_n} & \dots & \frac{\partial(q_n + z_n)}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Используя равенство (5.5), имеем

$$\frac{\partial(\dot{q}_i + \dot{z}_i)}{\partial \alpha_j} = \sum_k \mathcal{K}_{p_i p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} + \sum_k \mathcal{K}_{p_i q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha_j} + \\ + \sum_k \mathcal{K}_{p_i q_k} \frac{\partial z_k}{\partial \alpha_j} + \sum_k \mathcal{K}_{p_i p_k} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_j} + O_D(h^{1/2}). \quad (5.7)$$

Приводя в (5.7) подобные члены, получим (по mod $O_D(h^{1/2})$)

$$\frac{\partial(\dot{q}_i + \dot{z}_i)}{\partial \alpha_j} = \sum_k \mathcal{K}_{p_i p_k} \left(\frac{\partial(p_k + w_k)}{\partial \alpha_j} \right) + \sum_k \mathcal{K}_{p_i q_k} \frac{\partial(q_k + z_k)}{\partial \alpha_j} = \\ = \sum_l \left[\sum_k \mathcal{K}_{p_i p_k} (C^{-1} B)_{ik} + \mathcal{K}_{p_i q_l} \right] \frac{\partial(q_l + z_l)}{\partial \alpha_j}. \quad (5.8)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках в (5.8) не зависит от j (номера строки определителя J_{α}). Поэтому при подстановке выражений (5.8) при $i, j=1, \dots, n$ в равенство (5.6), как легко видеть, получим

$$\frac{d}{dt} J_{\alpha} = \sum_{ik} [\mathcal{K}_{p_i p_k} (C^{-1} B)_{ik} + \mathcal{K}_{p_i q_i}] J_{\alpha}. \quad (5.9)$$

Воспользуемся формулой (2.23), выведенной в § 2.

$$\nabla_x \sigma(x, t) = w - \mathcal{E} z + q_{\alpha}^{-1} O_D(h).$$

Имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = q_a^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \xi \right) + O_D(h^{1/2}). \quad (5.10)$$

Кроме того, справедливо равенство для матриц

$$\left\| \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right\| = q_a^{-1} \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right\|. \quad (5.11)$$

Вспоминая, что по определению (см. стр. 421) действия $\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j}$ и учитывая, что в силу определения (2.26)

$$\tilde{S}(x, t) = s(x, t) + \sigma(x, t),$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial x_j} \right\| &= q_a^{-1} B - q_a^{-1} z_\alpha C^{-1} B + O_D(h^{1/2}) = \\ &= q_a^{-1} (C - z_\alpha) C^{-1} B + O_D(h^{1/2}) = C^{-1} B + O_D(h^{1/2}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Нам остается напомнить, что решениями диссипативной задачи Гамильтона — Якоби, соответствующей гамильтониану $\mathcal{H}(p, q, t)$, являются действительная и мнимая части функции $\hat{S}(x, t)$, определяемой равенством

$$\hat{S}(x, t) = \tilde{S}(x, t) + i[c_1(\alpha, \varepsilon)(D^{3/2-\varepsilon}) + c_2(\alpha, t, \varepsilon)D^{3/2-\varepsilon}].$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial x_j} + O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \quad (5.13)$$

Из формул (5.12), (5.13) получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = C^{-1} B + O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \quad (5.14)$$

Таким образом, нами доказана лемма.

Лемма 5.1. Якобиан J_α , определенный равенством (5.3), удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_\alpha &= \sum_{ij} \left[\mathcal{H}_{p_i p_j}(p, x, t) \frac{\partial^2 \hat{S}(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \mathcal{H}_{p_i x_j}(p, x, t) \right] J_\alpha + \\ &+ O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Лемма 5.1 имеет очевидное следствие, которое мы будем в дальнейшем использовать.

Следствие. Якобиан J_x , определенный равенством (5.4), удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_x &= \sum_{ij} \left[\mathcal{H}_{p_i p_j}(p, x, t) \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_i \partial x_j} + \mathcal{H}_{p_i x_j}(p, x, t) \right] J_x + \\ &+ O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Доказательство. Легко видеть, что $J_x = J_\alpha \left(\frac{Dq(\alpha)}{D\alpha} \right)^{-1}$ и повторяя дословно доказательство леммы 5.1, мы получим равенство (5.16).

Доказательство теоремы. Для преобразования суммы

$$\mathcal{K}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) + i \mathcal{K}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial S_2}{\partial x}$$

воспользуемся снова равенством (2.23). Разлагая функции

$$\mathcal{K}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \text{ и } \mathcal{K}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right)$$

в точке $p = \frac{\partial s}{\partial x}$ и учитывая, что $\left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| \leq c D^{1/2}$, $c = \text{const}$ получим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) + i \mathcal{K}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial S_2}{\partial x} = \\ = \mathcal{K}_p(p, x, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, x, t)(\omega - \mathcal{E}z) + O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Теперь мы можем переписать соотношение (5.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle \mathcal{K}_p(p, x, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, x, t)(\omega - \mathcal{E}z), \nabla_x \varphi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum \mathcal{K}_{p_i p_j} \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_i \partial x_j} \varphi + G(x, t) \varphi = O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Положив теперь

$$\varphi(x, t) = \frac{\psi(x, t)}{\sqrt{J_\alpha}},$$

получим, что функция ψ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} + \langle i \tilde{H}_p(p, x, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, x, t)(\omega - \mathcal{E}z), \nabla_x \psi \rangle + \\ + \left\{ \sqrt{J_\alpha} \langle i \tilde{H}_p(p, x, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, x, t)(\omega - \mathcal{E}z), \nabla_x \frac{1}{\sqrt{J_\alpha}} \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{p_i q_i}(p, x, t) + G(x, t) \right\} \psi = O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Обозначим через Ψ сумму в фигурных скобках из соотношения (5.18):

$$\begin{aligned} -\Psi(p, q, t) = \sqrt{J_\alpha} \langle i \tilde{H}_p(p, q, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, q, t)(\omega - \mathcal{E}z), \nabla_x \frac{1}{\sqrt{J_\alpha}} \rangle - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{p_i q_i}(p, q, t) + G(q, t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Обозначим через Π «оператор переноса»

$$\Pi = \frac{d}{dt} + \langle i \tilde{H}_p(p, x, t) + \mathcal{K}_{pp}(p, x, t)(\omega - \mathcal{E}z), \nabla_x \rangle.$$

Предположим теперь, что $\Psi = 0$. Покажем, что в этом случае функция

$$\psi_0(x, t) = \varphi(\alpha) - \langle z(\alpha, t), C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle|_{\alpha=\alpha(x, t)} \quad (5.20)$$

удовлетворяет соотношению (5.1).

Вычислим вначале производную $\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} &= q_{\alpha}^{-1} \nabla \alpha \varphi - q_{\alpha}^{-1} z_{\alpha} C^{-1} \nabla \alpha \varphi + f = \\ &= q_{\alpha}^{-1} (C - z_{\alpha}) C^{-1} \nabla \alpha \varphi + f = C^{-1} \nabla \alpha \varphi + f, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $|f| \leq c|z|$, $c = \text{const}$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_0(x, t) &= - \frac{d}{dt} \langle z, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle|_{\alpha=\alpha(x, t)} = \\ &= - \langle i \tilde{H}_p, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle - \langle \mathcal{K}_{pp} w, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle - \langle \mathcal{K}_{pq} z, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + \\ &+ \langle z, C^{-1} C C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle = - \langle i \tilde{H}_p, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle - \langle \mathcal{K}_{pp} w, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle - \\ &- \langle z, \mathcal{E} \mathcal{K}_{pp} C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + O_D(h^{1/2}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь мы использовали выражение для $\dot{C}$, полученное при вычислении $\dot{\mathcal{E}}$ (см. (2.20)).

Подставляя (5.21) и (5.22) в (5.18), получим, учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \varphi \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} &- \frac{d}{dt} \langle z, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + \langle i \tilde{H}_p + \mathcal{K}_{pp}(w - \mathcal{E}z), C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + O_D(h^{1/2}) = \\ &= - \langle i \tilde{H}_p, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle - \langle \mathcal{K}_{pp}(w - \mathcal{E}z), C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + \langle i \tilde{H}_p, C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + \\ &+ \langle \mathcal{K}_{pp}(w - \mathcal{E}z), C^{-1} \nabla \alpha \varphi \rangle + f = f, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где $|f| \leq cD^{1/2-\varepsilon}$, $c = \text{const}$.

Таким образом, доказано, что при $\Psi = 0$ функция $\psi_0(x, t)$, определенная равенством (5.20), удовлетворяет соотношению (5.1).

Легко видеть, что в общем случае соотношению (5.1) удовлетворяет функция

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p, q, \tau) d\tau \right\}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что в силу неравенства диссипативности (см. лемму 2.9) справедлива оценка

$$D^{1/2-\varepsilon} e^{-\frac{S_2(x, t)}{\hbar}} = O(h^{1/2-\varepsilon}).$$

Замечание. Учитывая, что в силу леммы 2.2 и оценок решений уравнений роста (2.13) выполняется неравенство

$$|\tilde{H}_p| \cdot |z| \leq cD^{1-\varepsilon}, \quad c = \text{const},$$

из доказательства теоремы легко усмотреть, что функция f в равенстве (5.23) имеет вид

$$f = \langle g_1, \nabla_\alpha \varphi \rangle + g_2 \cdot \varphi + g_3 \Delta_\alpha \varphi,$$

где

$$|g_3|, |g_1| \leq c_1 D^{1-\varepsilon}, |g_2| \leq c_2 D^{1/2-\varepsilon}, c_1, c_2 = \text{const}, t > \delta > 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение с правой частью

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle \mathcal{K}_p \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) + i \mathcal{K}_{pp} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial S_2}{\partial x}, \nabla_x \varphi \rangle + \\ + \left(\frac{1}{2} \mathcal{K}_{p_i p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} + G(x, t) \right) \varphi + F(x, t) = O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

(Обозначения здесь те же, что и в (5.1).)

Из теоремы 5.1 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда функция $\varphi(x, t)$, определяемая равенством

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{V J_\alpha} (\varphi_1(\alpha, t) - \langle z, C^{-1} \nabla_\alpha \varphi_1(\alpha, t) \rangle) \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p, q, \tau) d\tau \right\} \Big|_{\alpha=\alpha(x, t)},$$

где функция $\Psi(p, q, t)$ определена равенством (5.19),

$$-\varphi_1(\alpha, t) = \int_0^t F(q(\alpha, \tau), \tau) d\tau$$

и $\alpha = \alpha(x, t)$ — решение уравнений $q(\alpha, t) = x$, удовлетворяет соотношению (5.24).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в этом случае

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(\alpha(x, t), t) = F(q, t).$$

Все же остальные формулы для производных, которые вычислены для доказательства теоремы 5.1, сохраняются с заменой $\varphi(\alpha)$ на $\varphi_1(\alpha, t)$. Пусть $L^\gamma \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \langle z(\sigma, t) - \gamma(\sigma, t), C^{-1}(\sigma, t) \nabla \varphi(\sigma) \rangle$.

Обозначим через ω_t^γ особую карту в неособой зоне Ω_t , полученную при сдвиге карты ω^γ вдоль траекторий системы Гамильтона (2.8) за время t . Мы построим решение $\varphi^\gamma(x, t)$ уравнения переноса с диссипацией (5.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi^\gamma(x, 0) = L^\gamma \varphi(\sigma) |_{\sigma=\sigma^\gamma(x)}, \quad (5.25)$$

где $\varphi(\sigma)$ — гладкая финитная функция, $\text{supp } \varphi(\sigma) \subset \omega^\gamma$, $\sigma = \sigma^\gamma(x)$ — решение уравнения $q(\sigma) + \gamma(\sigma) = x$, $\sigma \in \omega^\gamma$.

Теорема 5.2. Пусть

$$\det \frac{\partial(q(\sigma, t) + \gamma(\sigma, t))}{\partial \sigma} \neq 0, \quad J_\sigma = \det \frac{\partial(q(\sigma, t) + z(\sigma, t))}{\partial \sigma} \neq 0$$

при $0 \leq t \leq T$. Тогда решение уравнения переноса с диссипацией $\psi^\gamma(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию (5.25) при $0 \leq t \leq T$, определяется равенством

$$\psi^\gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{J_\sigma}} L^\gamma \Phi(\sigma) \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p(\sigma, \tau), q(\sigma, \tau), \tau) d\tau \right\} \Big|_{\sigma=\sigma^\gamma(x, t)},$$

где функция $\Psi(p, q, t)$ определена равенством (5.19) и функция $\sigma = \sigma^\gamma(x, t)$ — решение уравнения $q(\sigma, t) + \gamma(\sigma, t) = x$.

Доказательство. Прежде всего напомним, что уравнение Гамильтона — Якоби с диссипацией, соответствующее гамильтониану $\mathcal{H}(p, q, t)$ в особой карте, имеет решение, определяемое по формуле

$$\hat{S}(x, t) = \Phi^\gamma(\sigma, t) + iC(\sigma, \varepsilon, t) D^{3/2-\varepsilon} \Big|_{\sigma=\sigma^\gamma(x, t)}.$$

В силу (2.23)

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial x} = p(\sigma) + w(\sigma) - \mathcal{E}(z(\sigma) - \gamma(\sigma)) + O_D(h) \Big|_{\sigma=\sigma^\gamma(x, t)}. \quad (5.26)$$

Дифференцируя равенство (5.26) по x , получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x_i \partial x_j} \right\| &= q_\sigma^{-1} B - q_\sigma^{-1} (z_\sigma - \gamma_\sigma) C^{-1} B + O_D(h^{1/2}) = \\ &= q^{-1} (c - z_\sigma + \gamma_\sigma) C^{-1} B + O_D(h^{1/2}) = C^{-1} B + O_D(h). \end{aligned}$$

Таким образом, как и в теореме 5.1, мы получаем, что замена $\phi(x, t)$ на $\tilde{\phi}(x, t)/\sqrt{J_\sigma}$ в уравнении (5.1) приводит его к виду

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{\phi}(x, t)}{\partial t} + \langle \mathcal{H}_p(p(\sigma, t), x, t) + i\mathcal{H}_{pp}(p(\sigma, t), x, t)(w(\sigma, t) - \right. \\ \left. - \mathcal{E}(z(\sigma, t) - \gamma(\sigma, t))), \nabla_x \tilde{\phi} \rangle \right] + \Psi(p, x, t) \tilde{\phi}(x, t) = \\ = O_S(h^{1/2-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

где $\sigma = \sigma^\gamma(x, t)$, функция $\Psi(p, x, t)$ определена равенством (5.19). (Мы произвели здесь разложение функций $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_{pp}$ по формуле Тейлора в точке $p = \partial S / \partial x$, воспользовавшись равенством (5.26) аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 5.1).

Предположим теперь, как и при доказательстве теоремы 5.1, что $\Psi(p, x, t) \equiv 0$. Обозначим через Π^γ «оператор переноса в особой карте» — дифференциальный оператор, стоящий в квадратных скобках в равенстве (5.27). Положим

$$\psi_0^\gamma(x, t) = \phi(\sigma) - \langle z - \gamma, C^{-1} \nabla_\sigma \phi(\sigma) \rangle \Big|_{\sigma=\sigma^\gamma(x, t)} \stackrel{\text{def}}{=} L^\gamma \phi. \quad (5.28)$$

Мы покажем, что выполняется соотношение

$$\Pi^\gamma \psi_0^\gamma(x, t) = O_S(h^{1/2-\varepsilon}). \quad (5.29)$$

Доказательство этой оценки мы проведем, используя продолжение

по непрерывности, точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы (3.2) о решении уравнения Гамильтона—Якоби с диссипацией, до комплексной фокальной точки.

Заметим, что на множестве точек x карты ω' , в которых одновременно разрешимы уравнения

$$q(\alpha, t) = x \quad \text{и} \quad q(\sigma, t) + \gamma(\sigma, t) = x,$$

справедливо равенство

$$(\Pi v - \Pi)v = O_S(h^{1/2-\varepsilon}), \quad \forall v \in C^\infty, \quad (5.30)$$

где Π — оператор переноса в неособой карте. Эту оценку легко получить, если воспользоваться разложением (3.11). Если мы докажем теперь, что функция $\psi_0^y(x, t)$ на множестве x удовлетворяет равномерно по σ оценкам

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\psi_0^y(x, t) - \psi_0(x, t)] &= O_S(h^{1/2-\varepsilon}), \\ \frac{\partial}{\partial x} [\psi_0^y(x, t) - \psi_0(x, t)] &= O_S(h^{1/2-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\psi_0(x, t)$ определена равенством (5.20), то тем самым мы докажем, что на множестве x выполнена оценка (5.29), которая непосредственно следует из оценок (5.30), (5.31) и доказанной в теореме 5.1 оценки

$$\Pi \psi_0(x, t) = O_S(h^{1/2-\varepsilon}).$$

Для доказательства оценки (5.31) мы воспользуемся равенством (3.11) и разложим функцию

$$\tilde{\psi}_0^y(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\sigma) - \langle z(\sigma) - \gamma(\sigma), C^{-1}(\sigma) \nabla \varphi(\sigma) \rangle$$

по формуле Тейлора в точке $\sigma = \alpha$.

Получим

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^y(\sigma(\alpha)) &= \varphi(\alpha) - \langle {}^t D_0^{-1} \gamma, \nabla \varphi \rangle - \langle z(\alpha) - \gamma(\alpha), C^{-1} \nabla \varphi(\alpha) \rangle + \\ &\quad + \langle {}^t D_0^{-1} \gamma, (z_\alpha \rightarrow \gamma_\alpha) C^{-1} \nabla \varphi \rangle + O_D(h) = \\ &= \varphi(\alpha) - \langle z(\alpha), C^{-1} \nabla \varphi(\alpha) \rangle + \langle \gamma, (C^{-1} + D_0^{-1} (z_\alpha - \gamma_\alpha) C^{-1} \nabla \varphi) - \\ &- {}^t D_0^{-1} \gamma, \nabla \varphi \rangle + O_D(h) = \varphi(\alpha) - \langle z(\alpha), C^{-1} \nabla \varphi(\alpha) \rangle + O_D(h). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Совершенно аналогично лемме 3.4 доказывается, что функция $O_D(h)$ равномерно ограничена в окрестности тех точек, в которых $q_\alpha = 0$. Из равенства (5.32) дифференцированием получаем первую из оценок (5.31). Для получения второй оценки достаточно разложить по формуле Тейлора в точке $\sigma = \alpha$ производную $\frac{\partial \tilde{\psi}_0^y}{\partial \sigma}$ точно так же, как это было только что проделано. Таким образом, оценка (5.31) доказана.

Совершенно очевидно теперь, что функция

$$\psi^y(x, t) = \psi^y(x, t) \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p(\sigma, \tau), q(\sigma, \tau), \tau) d\tau \Big|_{\sigma=\sigma^y(x, t)} \right\} \quad (5.33)$$

удовлетворяет в ω^y уравнению переноса. Таким образом, теорема доказана.

Пусть теперь Λ_t^n — лагранжево многообразие с комплексным ростком, полученное сдвигом начального лагранжева многообразия Λ^n вдоль траектории гамильтоновой системы (2.9) за время t . Пусть Ω_t — некоторая неособая зона на Λ_t^n . Мы построим сейчас формулу, дающую решение уравнения переноса с диссипацией в зоне Ω_t .

Пусть $\{\omega^i\}$ — покрытие зоны Ω_t картами. Обозначим через $\tilde{\omega}^i$ образы ω^i при отображении

$$q(\sigma, t) + \gamma^i(\sigma, t) = x, \quad \sigma \in \omega^i.$$

Пусть теперь $\{e_i(x, t)\}$ — разбиение единицы на множестве $\tilde{\Omega}_t = \bigcup \tilde{\omega}^i$. Положим

$$\psi(x, t) = \sum_i e_i(x, t) \psi^i(x, t), \quad (5.34)$$

где функция $\psi^i(x, t)$ определена в теореме 5.1 в случае, если карта ω^i неособая, а в случае особой карты функция $\psi^i(x, t)$ определена в теореме 5.2. Из теорем 5.1 и 5.2 легко получается следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Решение уравнения переноса в момент времени t в неособой зоне лагранжева многообразия Λ_t^n определяется формулой (5.34).*

Из вычислений, проведенных для доказательства теорем 5.1 и 5.2, следует еще одно важное для нас утверждение.

Следствие. *Справедлива следующая формула:*

$$P^y L^y = L^y \left[\frac{d}{dt} + \Psi \right] + O_D(h^{1/2-\varepsilon}). \quad (5.35)$$

§ 6. Операция обхода фокусов и глобальное определение роста

Пусть g_H^t — каноническое преобразование, заключающееся в повороте некоторых осей фазового пространства на угол $\pi/2$. При этом преобразовании q_I переходит в p_I , а z_I переходит в ω_I . Его можно описать с помощью системы Гамильтона для осциллятора.

Это преобразование можно получить с помощью другой гамильтоновой системы, лишь бы в конечном счете указанный поворот был совершен.

Но если для данной неособой (для простоты) зоны Ω_0 при повороте с помощью осциллятора встречаются фокальные точки (в которых $\frac{D(q+z)}{D\alpha} = 0$), то их нельзя избежать и выбором другой гамильтоновой системы, с помощью которой мы производим преобразование.

Это обстоятельство затрудняет проведение доказательства неравенства диссипации, которое мы получим лишь для случая, когда фокальная точка отсутствует для произвольного времени.

В этом параграфе будет описан прием, позволяющий обойти указанную трудность. Этот прием мы называем *операцией обхода фокусов*.

В случае, когда I — строго возрастающая подпоследовательность последовательности $(1, \dots, n)$, мы обозначаем через $\bar{I}$ упорядоченную последовательность, дополнительную к I . Под p_I , например, мы понимаем такой набор $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$, что $(i_1, \dots, i_k) = I$. Через $(p_I, p_{\bar{I}})$ (или (p_I, q_I)) обозначаем смешанные наборы координат, индексы у которых также упорядочены по возрастанию.

Введем теперь последовательности индексов $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$ и обозначим

$$I \setminus I_1 \cup I_2 = K.$$

Предположим для простоты, что лагранжево многообразие Λ^n покрывается двумя зонами Ω_I и Ω_K так, что

$$\det \frac{\partial (q_I + z_I, p_{\bar{I}} + w_{\bar{I}})}{\partial \alpha} \neq 0 \quad \text{при } \alpha \in \Omega_I \quad (6.1)$$

$$J_K \stackrel{\text{def}}{=} \det \frac{\partial (q_K + z_K, p_{\bar{K}} + w_{\bar{K}})}{\partial \alpha} \neq 0 \quad \text{при } \alpha \in \Omega_K.$$

Предположим дополнительно, что в зоне Ω_I отличен от нуля якобиан $\det \left\| \frac{\partial (q_I, p_{\bar{I}})}{\partial \alpha} \right\|$, а в зоне Ω_K якобиан $\det \left\| \frac{\partial (q_K, p_{\bar{K}})}{\partial \alpha} \right\| \neq 0$.

Обозначим через $\alpha_I(q_I, p_{\bar{I}})$ решение уравнений

$$q_I(\alpha) = q_I, \quad p_{\bar{I}}(\alpha) = p_{\bar{I}}, \quad \alpha \in \Omega_I, \quad (6.2)$$

а через $\alpha_K(q_K, p_{\bar{K}})$ — решение уравнений

$$q_K(\alpha) = q_K, \quad p_{\bar{K}}(\alpha) = p_{\bar{K}}, \quad \alpha \in \Omega_K. \quad (6.3)$$

Пусть B_I — диагональная матрица, состоящая из 1 и -1. В дальнейшем знаки при ее элементах будут выбраны в зависимости от зоны Ω_I . Пусть A — некоторая ортогональная матрица. Обозначим через x набор координат $x = (q_I, p_{\bar{I}})$, $\xi = (p_I, q_{\bar{I}})$.

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2}(x, A^* B_I A x) + \frac{1}{2}(\xi, A^* B_I A \xi). \quad (6.4)$$

Имеет место следующий факт, частный случай которого был использован в п. 8 § 9 Введения. Оказывается, можно так подобрать матрицы A и B_I , что при преобразовании g_H^t , dg_H^t пересечения зон $\Omega_I \cap \Omega_K$, отвечающем гамильтониану (6.4), при $0 \leq t \leq \pi/2$ отсутствуют фокальные точки, т. е. якобиан

$$J(\alpha, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D(q_I + z_I, p_I + w_I)}{D\alpha} \neq 0$$

при $0 \leq t \leq \pi/2$.

Обозначим через σ_{IK} число отрицательных диагональных элементов матрицы B_I . Пусть $S(\alpha, t, b_{I_1}, a_{\bar{I}_2})$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией, отвечающего гамильтониану (6.4), такое, что

$$S(\alpha, 0, b_{I_1}, a_{\bar{I}_2}) = \langle q_{I_1}(\alpha), b_{I_1} \rangle - \langle a_{\bar{I}_2}, p_{\bar{I}_2}(\alpha) \rangle + \text{Re} \Phi_I(\alpha) + i \mathcal{S}_I(\alpha), \quad (6.5)$$

где Φ_I и $\mathcal{S}_I$ — фаза и энтропия роста в зоне Ω_I . Условию (6.5) отвечает зависящее от параметров лагранжево многообразие $\Lambda^n(b_{I_1}, a_{\bar{I}_2})$, которое получается из многообразия Λ^n с помощью отображения $g_{b_{I_1}, a_{\bar{I}_2}}$, переводящего

$$p_{I_1} \text{ в } p_{I_1} - b_{I_1}, \quad q_{\bar{I}_2} \text{ — в } q_{\bar{I}_2} - a_{\bar{I}_2},$$

а остальные координаты фазового пространства оставляющего без изменений. Обозначим

$$g_H^{t, g_{b_{I_1}, a_{\bar{I}_2}}}(q(\alpha)) = \begin{pmatrix} q(\alpha, t, b_{I_1}, a_{\bar{I}_2}) \\ p(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, функции $q(\alpha, t, b_{I_1}, a_{\bar{I}_2})$, $p(\alpha, t, b_{I_1}, a_{\bar{I}_2})$ удовлетворяют следующей задаче Коши для системы Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^* B_I A \xi, & \dot{\xi} &= -A^* B_I A x, \\ x &= (q_{I_1}, p_{\bar{I}_2}), & \xi &= (p_{I_1}, q_{\bar{I}_2}), \\ \dot{q}_i &= \dot{p}_i = 0, & i &\notin I_1 \cup I_2, \\ q_i|_{t=0} &= q_i(\alpha), & i &\notin I_2, \\ q_i|_{t=0} &= q_i(\alpha) + a_i, & i &\in I_2, \\ p_i|_{t=0} &= p_i(\alpha), & i &\notin I_1, \\ p_i|_{t=0} &= p_i(\alpha) - b_i, & i &\in I_1. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При некотором выборе знаков элементов матрицы B_I и для некоторой матрицы A , зависящей от параметров $(b_{I_1}, a_{\bar{I}_2})$, справедливы соотношения:

Теорема 6.1. *Существуют такие матрицы A и B_I , что при $\alpha \in \Omega_I \cap \Omega_K$, и таком, что $q_{I_1}(\alpha, \frac{\pi}{2}, b_{I_1}, a_{\bar{I}_1}) = p_{\bar{I}_1}(\alpha, \frac{\pi}{2}, b_{I_1}, a_{\bar{I}_1}) = 0$ выполняются соотношения*

- 1) $J(\alpha, t) \neq 0$ при $0 \leq t \leq \pi/2$;
- 2) $J(\alpha, \pi/2) = (-1)^{\sigma_{IK}} J_K(\alpha)$;
- 3) $q_{I_1}(\alpha, \pi/2, p_{I_1}(\alpha), q_{\bar{I}_1}(\alpha)) = 0$, $p_{\bar{I}_1}(\alpha, \pi/2, p_{I_1}(\alpha), q_{\bar{I}_1}(\alpha)) = 0$;
 $q_{I_1 \setminus I_1}(\alpha, \pi/2, p_{I_1}(\alpha), q_{\bar{I}_1}(\alpha)) = q_{I_1 \setminus I_1}(\alpha)$,
 $p_{\bar{I}_1 \setminus \bar{I}_1}(\alpha, \pi/2, p_{I_1}(\alpha), q_{\bar{I}_1}(\alpha)) = p_{\bar{I}_1 \setminus \bar{I}_1}(\alpha)$;
- 4) $S(\alpha, \pi/2, p_{I_1}(\alpha), q_{\bar{I}_1}(\alpha)) = \operatorname{Re} \Phi_K(\alpha) + i \mathcal{E}_K(\alpha)$,

где Φ_K и $\mathcal{E}_K$ — фаза роста и энтропия в зоне Ω_K .

Доказательство. Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма 6.1. *Пусть A и B — вещественные симметрические матрицы, причем A диагональна, а B неотрицательна. Пусть C — вещественная диагональная матрица, диагональные элементы которой равны ± 1 , и пусть $AC \geq 0$.*

Тогда матрица $(A + iB)C$ не имеет отрицательных собственных значений.

Доказательство. Предположим противное. Пусть h — комплексный вектор, такой, что $ACH + iBCh = -a^2 h$. Тогда $SACH + iCBCh = -a^2 Ch$ и, следовательно,

$$(\bar{h}, SACH) + i(\bar{h}, CBCh) = -a^2 (\bar{h}, Ch).$$

Значит $(\bar{h}, CBCh) = 0$. Но поскольку $CBC \geq 0$, то $CBCh = 0$, то есть $BCh = 0$. Поэтому $ACH = -a^2 h$, что невозможно. Лемма доказана.

Первое утверждение теоремы мы для упрощения выкладок докажем в случае $I = (1, \dots, n)$, $K = \emptyset$.

Равенство (6.5) в рассматриваемом случае имеет вид

$$S(\alpha, 0, b) = \langle q(\alpha), b \rangle + \operatorname{Re} \Phi_I(\alpha) + i \mathcal{E}_I(\alpha).$$

Рассмотрим задачу Коши для системы Гамильтона, соответствующей гамильтониану $H(p, q)$ (ср. (6.6)):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= A^* B_I A p, & q(0) &= q(\alpha), & p(0) &= p(\alpha) - b. \\ \dot{p} &= -A^* B_I A q. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Система уравнений комплексного роста имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^* B_I A w, & z(0) &= z(\alpha), \\ \dot{w} &= -A^* B_I A z, & w(0) &= w(\alpha). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Решение системы (6.8) легко найти, сделав замену переменных вида $Ap = p'$, $Aq = q'$.

В новых переменных получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= B_1 p', & q'(0) &= Aq(0), \\ \dot{p}' &= -B_1 q', & p'(0) &= Ap(0). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из (6.10) следует, что решение системы (6.8) имеет вид

$$\begin{aligned} q(\alpha, t, b) &= A^* U_1 A q(\alpha) + A^* U_2 A (p(\alpha) - b), \\ p(\alpha, t, b) &= A^* U_1 A (p(\alpha) - b) - A^* U_2 A q(\alpha). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь U_1 и U_2 — диагональные матрицы, причем

$$(U_1)_{ii} = \cos \gamma_i t, \quad (U_2)_{ii} = \sin \gamma_i t, \quad i = 1, \dots, n,$$

$\gamma_i = \pm 1$ — диагональные элементы матрицы B_1 . Аналогично (6.11) можно написать решения уравнений (6.9):

$$\begin{aligned} z(\alpha, t) &= A^* U_1 A z(\alpha) + A^* U_2 A w(\alpha), \\ w(\alpha, t) &= A^* U_1 A w(\alpha) - A^* U_2 A z(\alpha). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Из формул (6.11) следует, что для любых невырожденных матриц A и B_1 из условий $t = \pi/2$, $q(\alpha, \pi/2, b) = 0$ следует соотношение $p(\alpha) = b$.

Обозначим теперь через $\alpha(q, t, b)$ решение уравнения $q(\alpha, t, b) = q$, где $q(\alpha, t, b)$ — решения системы (6.8). Выберем ортогональную матрицу A (раз и навсегда) так, чтобы матрица

$$A^* \left\| \frac{\partial^2 \operatorname{Re} S(\alpha(q, \pi/2, b), 0, b)}{\partial q_i \partial q_j} \right\| A$$

была диагональной в точке $q = 0$. В силу сделанного здесь замечания о свойствах решений системы (6.8) определение матрицы A корректно, т. е. она существует.

Матрицу B_1 выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$A^* \left\| \frac{\partial^2 \operatorname{Re} S(\alpha(q, \pi/2, b), 0, b)}{\partial q_i \partial q_j} \right\|_{q=0} A B_1 \geq 0. \quad (6.13)$$

Вычислим теперь якобиан $J(\alpha, t, b)$,

$$J(\alpha, t, b) = \frac{D(q(\alpha, t, b) + z(\alpha, t))}{D\alpha}.$$

Из равенств (6.11) и (6.12) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q(\alpha, t, b) + z(\alpha, t))}{\partial \alpha} &= \\ &= \frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_1 A + \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2 A. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Преобразуем равенство (6.14), используя определение матрицы U_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q(\alpha, t, b) + z(\alpha, t))}{\partial \alpha} &= \frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} U_1 + \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2 A = \\ &= \frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \left(U_1 + \left(\frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2 A \right) = \\ &= \frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} A^* \left(U_1 + A \left(\frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2 \right) A. \end{aligned}$$

Напомним теперь, что в § 5 гл. 6 доказано равенство

$$\left(\frac{\partial^2 S(\alpha(q), 0, b)}{\partial q_i \partial q_j} \right) = \left(\frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \right)^{-1} \left(\frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} \right) + O_D(h^{1/2-\epsilon}). \quad (6.15)$$

Из равенств (6.15), (6.13), определений матриц A и U_2 следует, что при условии $q\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, b\right) = 0$ к матрице $A \left(\frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \right)^{-1} \times \times \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2$ применима лемма 6.1. В силу этой леммы матрица (при $\alpha \in \Gamma$)

$$A \left(\frac{\partial(q(\alpha) + z(\alpha))}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial(p(\alpha) + w(\alpha))}{\partial \alpha} A^* U_2 \quad \text{при} \quad q\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, b\right) = 0$$

не имеет отрицательных собственных значений. Следовательно, при условии $q\left(\alpha, \frac{\pi}{2}, b\right) = 0$ справедливо неравенство

$$J(\alpha, t, b) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано в случае $I = (1, \dots, n)$, $K = \emptyset$. Аналогично оно доказывается и в случае перехода из любой зоны Ω_I в любую зону Ω_K , $\Omega_I \cap \Omega_K \neq \emptyset$.

Пусть снова $H(x, \xi)$ — функция Гамильтона вида

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2}(x, A^* B_I A x) + \frac{1}{2}(\xi, A^* B_I A \xi).$$

Здесь $x = (q_{I_1}, p_{I_2})$, $\xi = (p_{I_1}, q_{I_2})$. Предположим, что матрицы A и B_I выбраны так, что справедливо утверждение 1) теоремы.

Рассмотрим систему Гамильтона, соответствующую $H(x, \xi)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^* B_I A \xi \\ \dot{\xi} &= -A^* B_I A x \\ q_i &= 0, \quad p_i = 0, \quad i \notin I_1 \cup I_2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} q_i|_{t=0} &= q_i(\alpha), \quad p_i|_{t=0} = p_i(\alpha) - b_i, \quad i \in I_1, \\ q_i|_{t=0} &= q_i(\alpha) - a_i, \quad p_i|_{t=0} = p_i(\alpha), \quad i \in I_2, \\ q_i|_{t=0} &= q_i(\alpha), \quad i \in I \setminus I_1, \quad p_i|_{t=0} = p_i(\alpha), \quad i \in I \setminus I_2. \end{aligned} \quad (6.16')$$

Из (6.16), (6.16') следует, что $p_i(\alpha, t) \equiv p_i(\alpha)$, $i \in I \setminus I_2$, $q_i(\alpha, t) \equiv q_i(\alpha)$, $i \in I \setminus I_1$.

Преобразуем оставшиеся уравнения системы (6.16) с помощью замены переменных $A\xi = \eta$, $Ax = \zeta$. Получим

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= B_1 \eta & \zeta(0) &= Ax(\alpha, 0) = \zeta_0, \\ \dot{\eta} &= -B_1 \zeta & \eta(0) &= A\xi(\alpha, 0) = \eta_0.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Обозначим через U_1 и U_2 диагональные матрицы, элементы которых суть

$$(U_1)_{ii} = \cos t, \quad (U_2)_{ii} = \sin \gamma_i t, \quad i = 1, \dots$$

Здесь $\gamma_i = \pm 1$ — диагональные элементы матрицы B_1 . Решение системы (6.17) есть

$$\zeta = U_1 \zeta_0 + U_2 \eta_0, \quad \eta = U_1 \eta_0 - U_2 \zeta_0. \quad (6.18)$$

Поэтому решение системы (6.16) имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= A^* \zeta = A^* U_1 \zeta_0 + A^* U_2 \eta_0, \\ \xi &= A^* \eta = A^* U_1 \eta_0 - A^* U_2 \zeta_0.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Полагая $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, получим $A^* U_2 \eta_0 = 0$. Так как матрица $A^* U_2$ невырождена, то отсюда следует, что $\eta_0 = A\xi(\alpha, 0) = 0$ или $\xi(\alpha, 0) = 0$. Из последнего равенства и системы уравнений (6.16), (6.16') непосредственно следует утверждение 3) теоремы.

Для доказательства утверждения 4) теоремы рассмотрим систему комплексного роста, соответствующую функции Гамильтона $H(x, \xi)$

$$\begin{aligned}\dot{z}' &= A^* B_1 A w', & z_i|_{t=0} &= z_i(\alpha), & i &= 1, \dots, n, \\ \dot{w}' &= -A^* B_1 A z', & w_i|_{t=0} &= w_i(\alpha), \\ z_i &= \dot{w}_i = 0, & i &\notin I_1 \cup I_2, & z' &= (z_{I_1}, w_{I_1}), & w' &= (w_{I_1}, z_{I_1}).\end{aligned}$$

Из системы уравнений комплексного роста следует, что $z_i(\alpha, t) \equiv z_i(\alpha)$, $w_i(\alpha, t) \equiv w_i(\alpha)$ при $i \notin I_1 \cup I_2$. Для решения оставшихся уравнений в системе роста положим

$$w'' = A w', \quad z'' = A z', \quad (6.20)$$

В новых переменных получим

$$\begin{aligned}\dot{z}'' &= B_1 w'', & z''(\alpha, 0) &= A z'(\alpha, 0) = z''_0(\alpha), \\ \dot{w}'' &= -B_1 z'', & w''(\alpha, 0) &= A w'(\alpha, 0) = w''_0(\alpha).\end{aligned}\quad (6.21)$$

Решение системы (6.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned}z''(\alpha, t) &= U_1 z''_0 + U_2 w''_0, \\ w''(\alpha, t) &= U_1 w''_0 - U_2 z''_0,\end{aligned}\quad (6.22)$$

Используя равенства (6.20), получим

$$\begin{aligned} z'(\alpha, t) &= A^* U_1 A z'(\alpha, 0) + A^* U_2 A w'(\alpha, 0), \\ w'(\alpha, t) &= A^* U_1 A w'(\alpha, 0) - A^* U_2 A z'(\alpha, 0). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Полагая $t = \pi/2$, из равенств (6.23) получаем

$$\begin{aligned} z'(\alpha, \pi/2) &= A^* B_I A w'(\alpha, 0), \\ w'(\alpha, \pi/2) &= -A^* B_I A z'(\alpha, 0). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из формул (6.19) и (6.23) для решения систем Гамильтона и комплексного роста следует, что

$$J(\alpha, t) = \frac{D(q_I(\alpha, t) + z_I(\alpha, t), p_I(\alpha, t) + w_I(\alpha, t))}{D\alpha} = \det B_I J_K(\alpha). \quad (6.25)$$

Но $\det B_I = (-1)^{\sigma_{IK}}$, где σ_{IK} — число отрицательных диагональных элементов матрицы B_I . Таким образом, утверждение 2) теоремы доказано.

Мы уже показали, что $\frac{D(q_{I_1}(\alpha, t) + z'_{I_1}(\alpha, t), p_{I_1}(\alpha, t) + w'_{I_1}(\alpha, t))}{D(\alpha)} \neq 0$ при $0 \leq t \leq \pi/2$, $q_{I_1}(\alpha, \pi/2, b_{I_1}, a_{I_1}) = p_{I_1}(\alpha, \pi/2, b_{I_1}, a_{I_1}) = 0$. Кроме того, в силу наших предположений и равенств (6.19)

$$\frac{D(q_{I_1}(\alpha, t), p_{I_1}(\alpha, t))}{D\alpha} \neq 0 \quad \text{при } t \in [\pi/2 - \delta, \pi/2],$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число. Таким образом, в силу теоремы 2.1 при $t \in [\pi/2 - \delta, \pi/2]$ решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией, соответствующего функции Гамильтона $H(x, \xi)$, определяется по формуле

$$\begin{aligned} S(\alpha, (q_I, p_I, \alpha), t, b_{I_1}, a_{I_1}) = \\ = S_0(\alpha, b_{I_1}, a_{I_1}) + \int_0^t \mathcal{L}(q_I(\alpha, \tau), p_I(\alpha, \tau)) d\tau - \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle_I}{2} + \\ + \mu_I(\alpha, t) + i c(\alpha) D(\alpha)^{1/2 - \varepsilon} |_{\alpha = \alpha_I(q_I, p_I, t)}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

где по условиям теоремы,

$$S_0(\alpha, b_{I_1}, a_{I_1}) = \langle q_{I_1}(\alpha), b_{I_1} \rangle - \langle a_{I_1}, p_{I_1}(\alpha) \rangle + s_I(\alpha) + E(\alpha).$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\pi/2} \mathcal{L}(q_I(\alpha, t), p_I(\alpha, t)) dt$. В силу вещественности гамильтониана $H(x, \xi)$ и определения лагранжиана роста (2.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \{ \langle \xi, H_\xi \rangle + \langle x, H_x \rangle + \frac{d}{dt} (\langle \xi, x \rangle_I - \langle z, w \rangle_I) \} = \\ &= \langle \xi, H_\xi \rangle - H - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle z, w \rangle_I. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Вычислим теперь выражение

$$\int_0^{\pi/2} (\langle \xi, H_\xi \rangle - H) dt \Big|_{\substack{b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha) \\ a_{I_2} = q_{I_2}(\alpha)}}$$

имеем

$$\int_0^{\pi/2} (\langle \xi, H_\xi \rangle - H) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\langle \xi, A^* B_I A \xi \rangle - \langle x, A^* B_I A x \rangle) dt.$$

Сделав замену $A\xi = \eta$, $Ax = \zeta$, получим

$$\int_0^{\pi/2} (\langle \xi, H_\xi \rangle - H) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\langle \eta, B_I \eta \rangle - \langle \zeta, B_I \zeta \rangle) dt.$$

Очевидно, достаточно рассмотреть интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\eta_i^2 - \zeta_i^2) dt &= \int_0^{\pi/2} (\eta_{0i} \cos t - \zeta_{0i} \sin \gamma_i t)^2 dt - \\ &\quad - \int_0^{\pi/2} (\zeta_{0i} \cos t + \eta_{0i} \sin \gamma_i t)^2 dt. \end{aligned}$$

Легко проверить, что из условия $b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha)$, $a_{I_2} = q_{I_2}(\alpha)$ и последнего равенства следует

$$\int_0^{\pi/2} (\eta_i^2 - \zeta_i^2) dt = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2} \mathcal{L}(q, p) dt \Big|_{\substack{b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha) \\ a_{I_2} = q_{I_2}(\alpha)}} = - \frac{\langle z(\alpha, \pi/2), w(\alpha, \pi/2) \rangle_I}{2} + \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle_I}{2}.$$

Но из равенств (6.24) следует, что

$$\frac{\langle z(\alpha, \pi/2), w(\alpha, \pi/2) \rangle_I}{2} = \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle_K}{2}.$$

То есть

$$\int_0^{\pi/2} \mathcal{L}(p, q) dt \Big|_{\substack{b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha) \\ a_{I_2} = q_{I_2}(\alpha)}} = - \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle_K}{2} + \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle_I}{2}. \quad (6.28)$$

Заметим еще, что из определения μ -действия с помощью канонических преобразований следует равенство

$$\mu_I \left(\alpha, \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{\substack{b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha) \\ a_{I_2} = q_{I_2}(\alpha)}} = \mu_K(\alpha). \quad (6.29)$$

Подставляя (6.28) и (6.29) в (6.26), получим

$$S\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \Big|_{\substack{b_{I_1} = p_{I_1}(\alpha) \\ a_{\bar{I}_1} = q_{\bar{I}_1}(\alpha)}} = S_0(\alpha) - \frac{\langle z(\alpha), w(\alpha) \rangle}{2} + \mu_K(\alpha) + ic(\alpha) D(\alpha)^{3/2} - \varepsilon.$$

Отсюда непосредственно следует тождество 4). Таким образом, теорема доказана.

Обратимся теперь к неравенству диссипативности.

Теорема 6.2. Пусть в зоне Ω_I выполняется неравенство диссипативности, т. е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $\gamma_1(\varepsilon) > 0$ и такая гладкая функция $c_1(\alpha, \varepsilon) \geq 0$, что

$$\gamma_1(\varepsilon) D(\alpha) \leq \operatorname{Im} \left(\mu_I(\alpha) + \frac{\langle w_I(\alpha), z_I(\alpha) \rangle}{2} + E(\alpha) + c_1(\alpha, \varepsilon) D(\alpha)^{3/2} - \varepsilon \right).$$

Тогда при $\alpha \in \Omega_I \cap \Omega_K$ существует такая константа $\gamma_2(\varepsilon)$ и такая гладкая функция $c_2(\alpha, \varepsilon) \geq 0$, что выполняется неравенство

$$\gamma_2(\varepsilon) D(\alpha) \leq \operatorname{Im} \left(\mu_K(\alpha) + \frac{\langle w(\alpha), z(\alpha) \rangle_K}{2} + E(\alpha) + c_2(\alpha, \varepsilon) D(\alpha)^{3/2} - \varepsilon \right).$$

Операция обхода фокусов позволяет переносить неравенство диссипативности из зоны в зону. Действительно, пусть в карте $\omega_I^0 \subset \Omega_I$ выполняется неравенство $\gamma_1 D(\alpha) \leq \mathcal{S}_I(\alpha)$; тогда на пересечении карт $\omega_I^0 \cap \omega_K^0$ (предполагается, что $\omega_I^0 \cap \omega_K^0 \neq \emptyset$) выполнено неравенство диссипативности

$$\gamma_2 D(\alpha) \leq \mathcal{S}_K(\alpha).$$

Это непосредственно следует из доказанной в § 2 леммы 2.9 о сохранении неравенства диссипативности при решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией и теоремы 6.1. Из теоремы 3.2 и операции обхода фокусов следует, что неравенство диссипативности сохраняется и при переходе из особой карты $\omega_I^0 \subset \Omega_I$ в неособую карту $\omega_K^0 \subset \Omega_K$.

Для перенесения неравенства диссипативности из карты $\omega_I \subset \Omega_I$ (при этом несущественно, является карта ω_I особой или неособой) в особую карту $\omega_K^0 \subset \Omega_K$ мы можем воспользоваться теоремой (3.2). В самом деле, неравенство диссипативности выполняется в силу операции обхода фокусов в тех точках карты ω_K^0 , где

$$\det \frac{\partial(q_K, p_{\bar{K}})}{\partial \alpha} \neq 0.$$

Переходя к γ -перестройке и используя теорему 3.2, мы получаем, что неравенство диссипативности по непрерывности переносится во все точки пересечения карт $\omega_I \cap \omega_K^0$. Теорема доказана.

Г Л А В А VII

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НА ЛАГРАНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ С КОМПЛЕКСНЫМ РОСТКОМ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Формулы коммутации гамильтониана с комплексной экспонентой

В соболевской шкале $\{W^k_q(\mathbb{R}^n)\}$ рассмотрим производящие наборы $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, где x_j — оператор умножения на j -ую независимую переменную, $\hat{p}_j = -i\hbar \partial/\partial x_j$, $0 < \hbar$ — параметр. Пусть

$$\mathcal{K}(x, p) \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^{2n}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{s_1, \dots, s_{2n} = 0}^\infty \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_{2n}}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Далее, пусть $S(x, \omega)$, $\varphi(x, \omega)$ — бесконечно дифференцируемые функции, причем $\text{Im } S(x, \omega) \geq 0$, φ — финитная функция, $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим коммутацию гамильтониана $\mathcal{K}(x, \hat{p})$ и экспоненты $e^{\frac{i}{\hbar} S(x, \omega)}$. Для этого применим оператор $\mathcal{K}(x, \hat{p})$ к функции $[e^{-\text{Im } S(x, \omega)/\hbar} \varphi(x, \omega)] e^{\frac{i}{\hbar} \text{Re } S(x, \omega)}$. Очевидно, без ограничения общности можно предполагать, что S — финитная функция. Обозначим

$$\Phi(x, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\text{Im } S(x, \omega)/\hbar} \varphi(x, \omega).$$

По формуле коммутации (9.5) гл. IV имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, \hat{p}) \cdot \Phi &= [\Phi \cdot \mathcal{K}(x, \hat{p})] + \\ &+ \sum_{j=1}^n (-i\hbar) \left[\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta p_j} (x; \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_j, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_n) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Применяя повторно ту же формулу коммутации, получим

$$\mathcal{K}(x, \hat{p}) \Phi = \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \frac{(-i\hbar)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \mathcal{K}}{\partial p^\alpha} (x, \hat{p}) + (-i\hbar)^k R_k(\Phi), \quad (1.1)$$

где обозначено $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j = 0, 1, 2, \dots$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}; \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!;$$

остаток $R_k(\Phi)$ есть некоторая функция от упорядоченных операторов $p_j = -ih\partial/\partial x_j$ и x_j , ($j=1, \dots, n$).

Выпишем здесь формулу для $R_k(\Phi)$ (ниже в подобных разложениях мы уже не будем приводить явных формул для остаточных членов, ввиду их громоздкости):

$$R_k(\Phi) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^n \left[\frac{\partial^k \Phi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \frac{\delta^k \mathcal{H}}{\delta p_{i_1} \dots \delta p_{i_k}} \times \right. \\ \left. \times \left(x; \overset{1}{p}_1, \dots, \overset{1}{p}_{i_1}, \overset{1}{p}_{i_1}, \dots, \overset{1}{p}_{i_{k-1}}, \overset{1}{p}_{i_{k-1}}, \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots, \overset{1}{p}_{i_k-1}, \overset{1}{p}_{i_k}, \overset{2}{p}_{i_k}, \overset{2}{p}_{i_k+1}, \dots, \overset{2}{p}_n \right) \right]. \quad (1.2)$$

Используя формулу (1.1), мы теперь рассмотрим коммутацию гамильтониана $\mathcal{H}(x, p)$ и функции $e^{\frac{i}{h}S}$. Прежде всего, если S — вещественная функция ($\text{Im } S = 0$), то по формуле коммутации с вещественной экспонентой (8.7) гл. IV имеем:

$$\mathcal{H}(x, p) \left(e^{\frac{i}{h}S} \varphi \right) = e^{\frac{i}{h}S} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k L_k(S) \varphi + (-ih)^N L_N(S; h) \varphi \right\}, \quad (1.3)$$

где $L_k(S)$, $L_N(S, h)$ — некоторые операторы, причем, $L_k(S)$ имеют вид

$$L_k(S) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=0}^{2k} \frac{\partial^\alpha \mathcal{H}}{\partial p^\alpha} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, \omega) \right) \Phi_{\alpha, \beta}^{(k)}(S) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$\Phi_{\alpha, \beta}^{(k)}(S)$ — полиномы относительно производных $\frac{\partial |\gamma| S(x, \omega)}{\partial x^\gamma} | \gamma | = 2, \dots, 2k^*$. Например, $L_0(S) = \mathcal{H}(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, \omega))$.

Остаток $[L_N(S, h) \varphi](x, \omega)$ в формуле (1.3) имеет следующую оценку

$$\|L_N(S, h) \varphi\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\mathbb{R}^{2n})} \leq c_{N, k}$$

где константа $c_{N, k}$ не зависит от h .

Для случая комплексной функции S , удовлетворяющей условию $\text{Im } S(x, \omega) \geq 0$, имеет место формула коммутации, аналогичная (1.3).

Лемма 1.1. В сформулированных выше условиях имеем:

$$\mathcal{H}(x, p) \left(e^{\frac{i}{h}S} \varphi \right) = e^{\frac{i}{h}S} \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k L_k^{(N)}(S) \varphi + h^N Q_N \varphi, \quad (1.4)$$

* Здесь и далее буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ обозначаются мультииндексы из $\mathbb{N}$ целых неотрицательных чисел, например $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j = 0, 1, 2, \dots$

где $L_k^{(N)}(S)$, Q_N — некоторые операторы, причем $L_k^{(N)}(S)$ строятся исходя из соответствующих операторов $L_k(S)$ следующим образом:

$$L_k^{(N)}(S) = \sum_{|\gamma|=0}^{2N-1-2k} \left[\sum_{|\alpha|=k}^{2k} \sum_{\beta=0}^k \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{\partial \operatorname{Im} S(x, \omega)}{\partial x} \right)^\gamma \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{\alpha+\gamma} \mathcal{H}}{\partial \rho^{\alpha+\gamma}} \left(x, \frac{\partial \operatorname{Re} S}{\partial x} \right) \cdot \Phi_{\alpha, \beta}(S) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right]. \quad (1.5)$$

Остаток $(Q_N \Phi)(x, \omega)$ в формуле (1.4) имеет оценку:

$$\|h^N (Q_N \Phi)\|_{W_2^k(R^{2n})} \leq c_{N, k} h^{N - \frac{3}{2}k}; \quad k \geq 0. \quad (1.6)$$

Доказательство. В выражении

$$\mathcal{H} \left(x, \frac{1}{\rho} \right) \left(e^{\frac{i}{h} S} \varphi \right) = \mathcal{H} \left(x; \frac{1}{\rho} \right) \left(\Phi e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S} \right)$$

произведем вначале коммутацию гамильтониана $\mathcal{H} \left(x, \frac{1}{\rho} \right)$ с функцией $\Phi(x, \omega) \equiv \varphi(x, \omega) e^{-i \operatorname{Im} S(x, \omega)/h} (1 + |x|^{2n})$ по формуле (1.1):

$$\mathcal{H} \left(x, \frac{1}{\rho} \right) \left(e^{\frac{i}{h} S} \varphi \right) = \sum_{|\alpha|=0}^{2N-1} \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \mathcal{H}}{\partial \rho^\alpha} \left(x, \frac{1}{\rho} \right) \times \\ \times \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2n}} \right) + (-ih)^{2N} R_{2N}(\Phi) \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2n}} \right). \quad (1.7)$$

В этой сумме каждое выражение $\frac{\partial^\alpha \mathcal{H}}{\partial \rho^\alpha} \left(x, \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2n}} \right)$ преобразуем с помощью формулы (1.3):

$$\frac{\partial^\alpha \mathcal{H}}{\partial \rho^\alpha} \left(x, \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2n}} \right) = e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \times L_k(\operatorname{Re} S) \left(\frac{1}{1 + |x|^{2n}} \right) + \right. \\ \left. + (-ih)^N L_N(\operatorname{Re} S, h) \left(\frac{1}{1 + |x|^{2n}} \right) \right\}. \quad (1.8)$$

После подстановки выражения (1.8) в формулу (1.7) для доказательства леммы остается совершить некоторые тождественные преобразования и привести правую часть (1.7) к виду, указанному в формуле (1.4). При этом возникнут остаточные члены, сумма которых образует остаток Q_N в формуле (1.4). Трудность представляет лишь оценка остатка

$$R_{2N}(\Phi) \cdot \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2n}} \right). \quad (1.9)$$

Оценим норму $\|h^{2N} R_{2N}(\Phi)\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k}$. Из формулы (1.2) следует что достаточно оценить $\left\| h^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha} \right\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k}$ при $|\alpha| = 2N$. Индук-

цией по $|\alpha|$ легко устанавливается, что выражение $h^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha}$ является суммой слагаемых вида

$$h^r \psi(x, \omega) \frac{\partial \operatorname{Im} S}{\partial x_{\mu_1}} \dots \frac{\partial \operatorname{Im} S}{\partial x_{\mu_l}} e^{-\operatorname{Im} S(x, \omega)/h},$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ и $r \geq \frac{|\alpha| - l}{2}$.

Тогда из неравенств

$$\left| \left(\frac{\partial \operatorname{Im} S}{\partial x_{\mu_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial \operatorname{Im} S}{\partial x_{\mu_l}} \right) e^{-\operatorname{Im} S(x, \omega)/h} \right| \leq c_l \cdot h^{\frac{l}{2}}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

следует оценка

$$\left\| h^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial x^\alpha} \right\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq c_k \cdot h^{|\alpha| - k}.$$

Поэтому остаток (1.9) оценивается нужным образом:

$$\left\| R_{2N}(\Phi) \left(\frac{e^{\frac{i}{h} \operatorname{Re} S}}{1 + |x|^{2N}} \right) \right\|_{W_2^k} \leq c_k \cdot N h^{N - \frac{3k}{2}}.$$

Лемма доказана.

Аналогично рассматривается действие гамильтониана $\mathcal{H}(x, p)$ на преобразование Фурье от экспоненты:

$$\mathcal{H}(x, p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i[\xi \cdot x - \tilde{S}(\xi, \omega)]} \tilde{\varphi}(\xi, \omega) d\xi \right), \quad (1.10)$$

где $\tilde{S}, \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\operatorname{Im} \tilde{S}(\xi, \omega) \leq 0$, $\xi \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$.

Внесем оператор $\mathcal{H}(x, p)$ под знак интеграла (1.10); получим следующее выражение:

$$\int e^{i \xi \cdot x} \left[\mathcal{H} \left(i h \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{1}{h} \right) \left(e^{-\frac{i}{h} \tilde{S}(\xi, \omega)} \tilde{\varphi}(\xi, \omega) \right) \right] d\xi.$$

Далее под интегралом остается воспользоваться уже полученной формулой типа (1.4).

В заключение этого параграфа отметим, что в лемме 1.1 функция $\mathcal{H}(x, p)$, а также функция $\varphi(x, \omega)$ по переменной ω могут принадлежать классу $\mathcal{S}^\infty$, т. е. классу таких функций $f(y)$, все производные которых растут не быстрее некоторой степени $|y|^k$ при $y \rightarrow \infty$ (см. гл. IV, § 10). При этом соответственно изменяется норма в оценке (1.6) по переменной ω .

§ 2. Квантовая операция обхода фокусов

В этом параграфе мы приведем асимптотику преобразования Фурье от выражения типа (9.24), которое было приведено во Введении в § 9. Это нам нужно сделать для той же цели, что и в главе V, в которой мы вычисляли асимптотику преобразования Фурье от осциллирующей экспоненты (3.1) с тем, чтобы потом определить канонический оператор.

В нашем случае экспонента может, вообще говоря, содержать быстро затухающий член, и на первый взгляд казалось бы, что нам нужно применить для получения асимптотики интеграла метод, аналогичный методу перевала. Трудность, однако, заключается в том, что аналогично тому, как это было сделано в гл. V, мы хотели бы получить асимптотику преобразования Фурье выражения (9.24) (см. § 9 Введения) в таком виде, чтобы диссипация, μ -действие, якобиан и фаза преобразовались бы по законам перехода комплексного ростка из неособой зоны в особую. Мы уже видели на примере главы V, что именно подобная геометрическая интерпретация асимптотики преобразования Фурье приводит к определению канонического оператора, и тем самым глобального решения уравнений. С помощью формул метода перевала это сделать, по-видимому, чрезвычайно трудно из-за того, что комплексная функция неоднозначно представима в виде суммы δ -действия, μ -действия и потенциала. Поэтому мы для вычисления такого интеграла применим прием, аналогичной операции обхода фокуса и подобный тому, который был приведен в п. 4 § 8 Введения. Этот прием естественно называть *квантовой операцией обхода фокусов*. Часто, впрочем, мы будем его снова называть *методом стационарной фазы*.

Пусть Λ^n — лагранжево многообразие с комплексным ростком. Предположим, что оно покрывается двумя особыми зонами Ω_I и Ω_K , в которых дополнительно выполнены условия

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial (q_I, p_I)}{\partial \alpha} &\neq 0, \quad \alpha \in \Omega_I \cap \Omega_K, \\ \det \frac{\partial (q_K, p_K)}{\partial \alpha} &\neq 0, \quad \alpha \in \Omega_K \cap \Omega_I. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим через $\alpha_I(q_I, p_I)$ решение уравнений

$$q_I(\alpha) = q_I, \quad p_I(\alpha) = p_I,$$

а через $\alpha_K(q_K, p_K)$ — решение уравнений

$$q_K(\alpha) = q_K, \quad p_K(\alpha) = p_K.$$

В силу наших предположений функции

$$\alpha_I(q_I, p_I) \text{ и } \alpha_K(q_K, p_K)$$

определены на пересечении карт $\Omega_I \cap \Omega_K$. Пусть $K = (I \setminus I_1) \cup I_2$, где $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$ и $\Phi_I(\alpha)$ — фаза ростка в зоне Ω_I , $|I_1| + |I_2| \stackrel{\text{def}}{=} m$.

Обозначим через L_I оператор, определенный на функциях, носители которых принадлежат неособой карте $\omega_I^0 \subset \Omega_I$:

$$L_I \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \langle \beta, \nabla \varphi \rangle + \dots + \sum_{|v|=N} \frac{1}{v!} \frac{\partial^{|v|} \varphi}{\partial \alpha^v} \beta^v, \quad (2.2)$$

где $\beta = - \left[\left(\frac{\partial(q_I + z_I, p_I + w_I)}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right]^t \begin{pmatrix} z_I \\ w_I \end{pmatrix}$ при $\text{supp } \varphi(\alpha) \in \omega_I^0$. Через $L_I^{v_i}$ обозначим оператор (2.2), где вместо β поставлены β^v :

$$\beta^v = - \left[\left(\frac{\partial(q_I + z_I, p_I + w_I)}{\partial \sigma} \right)^{-1} \right]^t \begin{pmatrix} z_I - \gamma_I \\ w_I - \gamma_I \end{pmatrix} \text{ при } \text{supp } \varphi(\sigma) \in \omega_I^0. \quad (2.3)$$

Определение. Будем говорить, что дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{P}}$ порядка k с гладкими коэффициентами принадлежит классу $\mathcal{L}_{\alpha, k}$ если для любой функции $\varphi(x, h)$, бесконечно дифференцируемой по x и равномерно ограниченной по h со всеми производными, и для всех мультииндексов l таких, что $|l| \leq 2\alpha$, выполняется соотношение

$$\frac{\partial^{|l|}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \hat{\mathcal{P}} \varphi = O_D \left(h^{\alpha - \frac{|l|}{2}} \right),$$

а при $|l| > 2\alpha$ функция $\frac{\partial^{|l|}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \hat{\mathcal{P}} \varphi$ равномерно ограничена по h .

Если оператор $\hat{\mathcal{P}}$ — не дифференциальный, то индекс k мы будем опускать.

Фиксируем такую ветвь функции $\sqrt{z}$, что $-\pi/2 < \arg \sqrt{z} \leq \pi/2$.

Вычислим асимптотическое разложение при $h \rightarrow 0$ интеграла

$$I(h) = F_{p_I^{-1} \rightarrow q_I}^{-1} F_{q_I \rightarrow p_I} \left\{ e^{\frac{i}{h} [\text{Re } \Phi_I(\alpha) + i \mathcal{S}_I(\alpha)]} \times \right. \\ \left. \times (J_I)^{-\frac{1}{2}} L_I \varphi(\alpha, h) \Big|_{\alpha = \alpha_I(q_I, p_I)} \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь через F , F^{-1} обозначены прямое и обратное $\frac{1}{h}$ -преобразования Фурье, функция $\varphi(\alpha, h) \in C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$ имеет носитель $\text{supp } \varphi(\alpha, h) \subset \Omega_I \cap \Omega_K$, функции Φ_I , $\mathcal{S}_I$, J_I — соответственно фаза, энтропия ростка и комплексный якобиан в зоне Ω_I ; дифференциальный оператор N -го порядка L_I определен в (2.2).

Рассмотрим функцию Гамильтона H из (6.4) гл. VI, отвечающую операции обхода фокусов при переходе из зоны Ω_I в зону Ω_K , и пусть B_I — соответствующая этой функции Гамильтона матрица (см. § 6 гл. VI). Обозначим через $\sigma_{IK}(\alpha)$ число отрицательных диагональных элементов матрицы B_I ,

Пусть $J(\alpha, t)$ — комплексный якобиан, соответствующий сдвигу вдоль траекторий операции обхода фокусов при переходе из Ω_I в Ω_K (см. теорему 6.1, гл. VI). Обозначим через $\Delta_{IK}(\alpha)$ количество оборотов, которое совершает комплексная точка $J(\alpha, t)$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} : \Delta_{IK}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [\text{Arg } J(\alpha, t) - \arg J(\alpha, t)] \Big|_0^{\pi/2}$. Далее обозначим

$$\delta_{IK}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{IK}(\alpha) + 2\Delta_{IK}(\alpha) + \frac{1}{2} [(-1)^{\sigma_{IK}(\alpha)} - 1] \text{sign}(\text{Im } J_K(\alpha)).$$

Лемма 2.1 Пусть выполнены условия (2.1). Тогда справедливо асимптотическое разложение:

$$I(h) = \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\delta_{IK}(\alpha)} e^{\frac{i}{h}[\text{Re } \Phi_K(\alpha) + i\mathcal{S}_K(\alpha)]} (J_K(\alpha))^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times L_K \sum_{l=0}^N \varphi_l(\alpha, h) \right\} \Big|_{\alpha=\alpha_K(q_K, p_K)} + R_N(h^{N/2}), \quad (2.5)$$

где $\varphi_l \in C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$, $\varphi_l \in O_D(h^{l/2 - l\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое число; $\Phi_K, \mathcal{S}_K, J_K$ — соответственно фаза, энтропия и якобиан в зоне Ω_K ; остаток $R_N(h^{N/2})$ имеет оценку

$$|\partial^l I / \partial \alpha^l R_N| \leq c_N h^{N/2 - |l|/2}.$$

Функции $\varphi_l(\alpha, h)$ определяются по формулам:

$$\varphi_0(\alpha, h) = \varphi(\alpha, h), \quad \varphi_1(\alpha, h) = (h\hat{P}_1^{(2)} + \hat{P}_2^{(2)} + \hat{P}_3^{(2)}) \varphi(\alpha, h) = \hat{\mathcal{P}}_1 \varphi, \\ \varphi_l(\alpha, h) = (h\hat{P}_1^{(1)} + \hat{P}_2^{(1)} + \hat{P}_3^{(1)}) (h\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3)^{l-2} (h\hat{P}_1^{(0)} + \hat{P}_2^{(0)} + \hat{P}_3^{(0)}) \varphi(\alpha, h) = \hat{\mathcal{P}}_l \varphi, \quad l=2, 3, \dots, N, \quad (2.5')$$

где $P_1, P_1^{(0)}, P_1^{(1)}, P_1^{(2)} \in \mathcal{L}_0$; $P_2, P_2^{(0)}, P_2^{(1)}, P_2^{(2)} \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon}$; $P_3, P_3^{(0)}, P_3^{(1)}, P_3^{(2)} \in \mathcal{L}_{1/2-\varepsilon}$, $\hat{\mathcal{P}}_l \in \mathcal{L}_{l/2-l\varepsilon, k_N}$, k_N — целое. (Способ вычисления операторов $P^{(k)}$ приводится в приложении 2, лемма 7; коэффициенты этих дифференциальных операторов не зависят от N и бесконечно дифференцируемы по параметру h .)

Доказательство. Применим уже использованный во Введении прием для вычисления асимптотики при $h \rightarrow 0$ интеграла $I(h)$. Рассмотрим задачу Коши

$$-ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, \frac{x}{h} \right) \psi, \quad (2.6) \\ \psi(q_l, p_l; 0) = \psi^0(q_l, p_l),$$

где $H(\xi, x)$ — функция Гамильтона, отвечающая операции обхода фокусов при переходе из зоны Ω_I в зону Ω_K ; здесь, как и в § 6 гл. VI, мы обозначаем $x = (q_l, p_l)$, $\xi = (p_l, q_l)$. Выберем

начальные данные в (2.6) следующим образом:

$$\psi^0(q_i, p_i) = \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} [\operatorname{Re} \Phi_I(\alpha) + i \Im \Phi_I(\alpha) + \langle q_{I_1}, p_{I_1} \rangle - \langle q_{\bar{I}_1}, p_{\bar{I}_1} \rangle]} (J_I)^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times L_I \Phi(\alpha, \hbar) \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_I(q_i, p_i)}. \quad (2.6')$$

Сделаем замену переменных $Ax = \zeta$. Функцию $\psi(q_i, p_i, t)$ в новых переменных обозначим через $\psi_H(\zeta, t)$; соответственно, функцию $\psi^0(q_i, p_i)$ обозначим через $\psi_{0H}(\zeta)$.

Задача (2.6) в новых переменных примет вид

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_H}{\partial t} = H_1 \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \zeta}, \zeta \right) \psi_H, \quad (2.7) \\ \psi_H(\zeta, 0) = \psi_{0H}(\zeta),$$

где $H_1(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_i \gamma_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2)$, γ_i — диагональные элементы матрицы B_I .

Во Введении приведена следующая точная формула для решения задачи (2.7) в одномерном случае:

$$\psi_H(\zeta, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{2}(1 - \sin t)}}{\sqrt{2\pi\hbar |\sin t|}} \int e^{i \frac{\zeta^2 \cos t - 2\zeta y + y^2 \cos t}{2\hbar \sin t}} \psi_{0H}(y) dy.$$

Для решения многомерной задачи (2.7) достаточно последовательно решить одномерные задачи Коши, соответствующие гамильтонианам $\gamma_i \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_i^2} + \frac{1}{2} \zeta_i^2 \right)$. Тогда для точного решения задачи (2.7) при $t > 0$ получим формулу:

$$\psi_H(\zeta, t) = \frac{e^{-im\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{2}\sigma_I K}}{(\sqrt{2\pi\hbar \sin t})^m} \int \psi_{0H}(y) e^{i \frac{\sum \gamma_j (\zeta_j^2 \cos t - 2\zeta_j y_j + y_j^2 \cos t)}{2\hbar \sin t}} dy.$$

Из этой формулы, а также из вида начальных данных (2.6') следует, что для вычисления асимптотики интеграла $I(\hbar)$ достаточно вычислить асимптотическое решение задачи (2.6) при $x=0$, $t=\pi/2$.

Докажем, что это асимптотическое решение имеет вид

$$g_N(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \psi_k(x, t, \hbar), \quad (2.8)$$

где $S \in C^\infty$, $\operatorname{Im} S \geq 0$; $\psi_k \in C^\infty$, $k=0, \dots, N$, и вычислим функции $S, \psi_0, \dots, \psi_N$ в точке $x=0$, $t=\pi/2$.

Применяя оператор $-ih \frac{\partial}{\partial t} - H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ к функции g_N , учитывая явный вид оператора H (см. (6.4) гл. VI) и производя коммутацию гамильтониана $H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ с экспонентой $e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)}$, получим:

$$\begin{aligned} & \left[-ih \frac{\partial}{\partial t} - H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] g_N(x, t) = \\ & = \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, A^* B_I A \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle \right] \psi_k - \right. \\ & \left. - ih \left[\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \left\langle A^* B_I A \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right\rangle \right] - \frac{\hbar^2}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, A^* B_I A \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \psi_k \right\}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Пусть функция S есть решение уравнения Гамильтона — Якоби с диссипацией, вида (1.6') гл. VI при $\mathcal{H} = H(\xi, x)$. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, A^* B_I A \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle = \hat{R}'_1, \quad (2.10)$$

где *) $\hat{R}'_1 \in \mathcal{L}_{\frac{3}{2}-\varepsilon, 0}$. Решение такого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$S(x, t)|_{t=0} = [\text{Re } \Phi_I(\alpha) + i\mathcal{F}_I(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_I(q_I, p_I)} + \langle q_I, p_I \rangle - \langle p_I, q_I \rangle,$$

уже было вычислено нами в точке $x=0, t=\pi/2$ при доказательстве формул операции обхода фокусов (гл. VI, § 6). Напомним, что

$$S(0, \pi/2) = [\text{Re } \Phi_K(\alpha) + i\mathcal{F}_K(\alpha)]|_{\alpha=\alpha_K(q_K, p_K)}.$$

Теперь построим функции ψ_k из (2.8) так, чтобы правая часть равенства (2.9) имела порядок $O(\hbar^{N/2})$: пусть ψ_0 удовлетворяет уравнению переноса с диссипацией:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \left\langle A^* B_I A \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right\rangle = O_D(\hbar^{1/2-\varepsilon}) \quad (2.11)$$

и начальному условию

$$\psi_0(x, t)|_{t=0} = \{(J_I(\alpha))^{-1/2} L_I \varphi(\alpha, \hbar)\}|_{\alpha=\alpha_I(q_I, p_I)}. \quad (2.12)$$

В силу предположений $\exists \delta > 0$ такое, что $D(q_I(\alpha, t), p_I(\alpha, t))/D\alpha \neq 0$ при $t \in [\pi/2 - \delta, \pi/2]$. Поэтому из формул § 5 гл. VI следует,

*) Оператор $\hat{R}'_1$ легко вычисляется явно с помощью подстановки в уравнение Гамильтона — Якоби с диссипацией решения, построенного по формулам §§ 1, 2 гл. VI.

что решение задачи (2.11), (2.12) в точке $x=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ имеет вид

$$\psi_0\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} \delta_{IK}(\alpha)\right) L_K \varphi(\alpha, h)}}{\sqrt{J_K}} \Big|_{\alpha=\alpha_K(q_K, p_K)}. \quad (2.13)$$

Кроме того, из результатов § 5 гл. VI следует равенство

$$\hat{\Pi} \psi_0 = (\hat{R}_1^* + \hat{R}_2) \psi_0 + O_D(h^{(N+1)/2-\varepsilon}), \quad \hat{R}_2 = \sum_{i=1}^{N+1} T_i, \quad (2.14)$$

где *) $\hat{R}_1^* \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}-\varepsilon, 0}$, $T_i \in \mathcal{L}_{i/2-\varepsilon, i}$, а через $\hat{\Pi}$ обозначен оператор переноса,

$$\hat{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \langle A^* B_I A \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle.$$

Обозначим также

$$-\hat{R}_0 = \Delta_Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i\hbar}{2} \langle \frac{\partial}{\partial x}, A^* B_I A \frac{\partial}{\partial x} \rangle.$$

Из (2.10), (2.14) следует, что правая часть (2.9) равна

$$-i\hbar \left[\sum_{k=1}^N \left(\hat{\Pi} \psi_k - \hbar \Delta_Y \psi_k + \hat{R}_1^* \psi_k \right) + \hat{R}_1 \psi_0 + \hat{R}_2 \psi_0 - \hbar \Delta_Y \psi_0 \right] e^{\frac{i}{\hbar} S(x, n)}, \quad (2.15)$$

где

$$\hat{R}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{R}_1^* + \frac{1}{(-i\hbar)} \hat{R}_1^* \right) \in \mathcal{L}_{1/2-\varepsilon, 0}.$$

Теперь определим функцию ψ_1 как решение уравнения переноса с правой частью:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} \psi_1 - \hbar \Delta_Y \psi_0 + \hat{R}_1 \psi_0 + \hat{R}_2 \psi_0 &= O_D(h^{1-\varepsilon}), \\ \psi_1(x, t) \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В силу леммы 6 приложения 2 функция ψ_1 в неособой карте может быть представлена в виде

$$\psi_1(x, t) = \frac{\hat{\psi}_1(\alpha, t)}{\sqrt{J(\alpha, t)}} \Big|_{\alpha=\alpha_I(q_I, p_I, t)},$$

где

$$\hat{\psi}_1 = L_I \int_0^t R_N \{ \sqrt{J(\alpha, \tau)} (\hbar \Delta_Y \psi_0 - (\hat{R}_1 + \hat{R}_2) \psi_0) \} d\tau, \quad (2.17)$$

*) Вычисление явного вида операторов $\hat{R}_1^*$ и $\hat{R}_2$ эквивалентно вычислению невязки, получающейся при подстановке в уравнение переноса с диссипацией решения, построенного по формулам § 5 гл. VI, $B\omega^0 \hat{R}_1^* = g_2$ (см. стр. 465).

причем интегрирование производится вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей функции Гамильтона $H(\xi, x)$.

В особой карте

$$\psi_1 = \frac{\hat{\psi}_1(\alpha, t)}{\sqrt{J(\alpha, t)}} \Big|_{\alpha = \alpha_I(q_I, p_I, t)},$$

где

$$\hat{\psi}_1 = L \int_0^t R_N \{ \sqrt{J(\alpha, \tau)} (h \Delta_\gamma \psi_0 - (\hat{R}_1 + \hat{R}_2) \psi_0) \} d\tau, \quad (2.18)$$

(операторы L были определены выше).

Обозначим

$$\psi_k(\alpha, t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_k(q_I(\alpha, t), p_I(\alpha, t), t), \quad k=0, 1, 2, \dots, N,$$

где $q_I(\alpha, t)$, $p_I(\alpha, t)$ — решение системы Гамильтона (6.6) гл. VI.

Из формул (2.17), (2.18) и теоремы 5.3 гл. VI следует, что функцию $\psi_1(\alpha, t)$ можно представить в виде

$$\psi_1(\alpha, t) = (h \hat{P}_1^0(t) + \hat{P}_2^0(t) + \hat{P}_3^{(0)}(t)) \varphi(\alpha, h), \quad (2.19)$$

где операторы $\hat{P}_1^0$, $\hat{P}_2^0$, $\hat{P}_3^0$ определяются через операторы Δ_γ , $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ соответственно и удовлетворяют условиям леммы.

Рассмотрим $\psi_1(\alpha, \frac{\pi}{2})$; используя доказанное в теореме 6.1 гл. VI равенство

$$J\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\sigma_{IK}} J_K(\alpha),$$

получим:

$$\left(J\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1/2} = (J_K(\alpha))^{-1/2} e^{i \frac{\pi}{2} (\delta_{IK} - \sigma_{IK})}.$$

Отсюда и из формулы (2.19) имеем:

$$\psi_1(\alpha, h) = (h \hat{P}_1^1 + \hat{P}_2^1 + \hat{P}_3^1) G \varphi(\alpha, h),$$

где линейный оператор G переводит начальные условия для уравнения переноса в решение этого уравнения, а $\hat{P}_j^{(1)}$ — операторы, удовлетворяющие условиям леммы и связанные с операторами $\hat{P}_j^{(0)}$ равенствами:

$$\hat{P}_j^0 v \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i \frac{\pi}{2} (\delta_{IK} - \sigma_{IK})}}{\sqrt{J_K}} L_K P_j^{(1)} G v$$

для $v(\alpha, t, h) \in C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, \infty) \times [0, 1])$.

Для остальных функций ψ_l , $l=2, 3, \dots, N$ аналогично предыдущему получим уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{P} \psi_l - h \Delta_\gamma \psi_{l-1} + (\hat{R}_1 + \hat{R}_2) \psi_{l-1} &= O_D(h^{1/2-\varepsilon}), \\ \psi_l|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

решение которого задается формулой:

$$\psi_l(\alpha, t) = (h\hat{P}_1(t) + \hat{P}_2(t) + \hat{P}_3(t))^{l-1} (h\hat{P}_1^{(0)} + \hat{P}_2^{(0)}(t) + \hat{P}_3^{(0)}(t)) \varphi(\alpha, h),$$

причем

$$\psi_l\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}(\delta_{IK} - \sigma_{IK})} (J_K)^{-\frac{1}{2}} L_K (h\hat{P}_1^{(1)} + \hat{P}_2^{(1)} + \hat{P}_3^{(1)}) (h\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3)^{l-2} (h\hat{P}_1^{(0)} + \hat{P}_2^{(0)} + \hat{P}_3^{(0)}) \varphi.$$

Отсюда вытекает формула (2.5') для $\psi_l(\alpha, h)$, приведенная в формулировке леммы. Из (2.5') непосредственно следует оценка $\psi_l(\alpha, h) = O_D(h^{l/2-\delta})$, где $\delta \geq l\varepsilon$.

Кроме того, при указанном выборе функций ψ_l , $l = 0, 1, \dots, N$ равенство (2.9) приобретает вид:

$$\left[-ih \frac{\partial}{\partial t} - H \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \right] g_N(x, t) = G_N(x, t),$$

где

$$G_N(x, t) = (-ih) e^{\frac{i}{h} S(x, t)} [\hat{R}_1 + \hat{R}_2 - h \Delta_V] \psi_N + O(h^{(N+1)/2-\varepsilon}).$$

Функция G_N в силу приведенных выше формул для ψ_N удовлетворяет оценке:

$$|G_N(x, t)| \leq c_N \cdot h^{\frac{N+1}{2}-\delta},$$

где $\delta > 0$ — некоторое малое число, c_N — константа.

Используя эту оценку и точную формулу для решения задачи (2.6), можно аналогично тому как это было сделано во Введении, показать, что функция g_N , определенная равенством (2.8), является асимптотическим разложением решений задачи (2.6). Поэтому и левая часть (2.5) является асимптотикой при $h \rightarrow 0$ интеграла (2.4).

Лемма доказана.

Следствие. Пусть на пересечении зон $\Omega_I \cap \Omega_K$

$$\det \frac{\partial(q_K, p_K)}{\partial \alpha} \neq 0, \quad \alpha \in \Omega_I \cap \Omega_K, \quad (2.19)$$

$$\det \frac{\partial(q_I + \gamma_I, p_I + \gamma_I)}{\partial \sigma} \neq 0.$$

Пусть $I(h)$ — интеграл, определенный равенством

$$I(h) = F_{p_I, \rightarrow q_I}^{-1} F_{q_I, \rightarrow p_I} \left(e^{\frac{i}{h} [Re \Phi(\sigma) + i S(\sigma)]} (J_I)^{-1/2} L \chi(\sigma) \right) \Big|_{\sigma=\sigma} (q_I, p_I) \quad (2.20)$$

(обозначения здесь те же, что и в равенстве (2.4)).

Тогда интеграл (2.20) разлагается в асимптотический ряд (2.5).

Доказательство. Для доказательства достаточно принять во внимание утверждение теорем 3.2 и 5.3 гл. VI, в силу которых вид решения уравнений переноса и Гамильтона — Якоби с диссипацией при $t = t_0$ не зависит от того, в какой — особой или неособой — карте была задана начальная функция.

Далее, в случае, если $\det \frac{\partial(q_K, p_{\bar{K}})}{\partial \alpha}$ обращается в нуль в некоторых точках пересечения зон $\Omega_I \cap \Omega_K$, мы можем сделать канонический поворот на угол $t = O_D(h^\infty)$, который приведет к тому, что такие точки исчезнут. В этом случае на пересечении $\tilde{\Omega}_I \cap \tilde{\Omega}_K$ зон, полученных в результате поворота, будут выполнены условия вида (2.1). Однако при этом в некоторых точках карты $\tilde{\omega}_K^* \subset \tilde{\Omega}_I \cap \tilde{\Omega}_K$ может быть.

$$\det \frac{\partial(\tilde{q}_K, \tilde{p}_{\bar{K}})}{\partial \alpha} = O_D(h^\infty).$$

И несмотря на то, что мы можем применить операцию обхода фокусов, для выполнения которой достаточно разрешимости системы уравнений

$$\tilde{q}_K(\alpha) = -\tilde{q}_K, \quad \tilde{p}_{\bar{K}}(\alpha) = p_{\bar{K}},$$

производные от решений соответствующих уравнений переноса и Гамильтона — Якоби с диссипацией могут в некоторых точках $\tilde{\omega}_K^*$ иметь порядок $O_D(h^{-\infty})$. Но мы можем после получения решений этих уравнений перейти к их γ -перестройкам, как мы уже поступали, например, при доказательстве теорем 3.2 и 5.2 гл. VI.

Совершив затем канонический поворот на угол $-t$, мы получим следующую формулу для асимптотического разложения интеграла $I(h)$ (мы предположили здесь, что пересечение зон $\Omega_I \cap \Omega_K$ покрывается одной особой картой ω_K^*):

$$I(h) = \left(e^{i \frac{\pi}{2} \delta_{IK} \frac{i}{h}} [\Phi_K^*(\sigma) + i c_1(\sigma) D(\sigma)^{3/2 - \varepsilon}] \times \right. \\ \left. \times [J_K(\sigma)]^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\sigma) \right) \Big|_{\sigma = \sigma_K^*(q_K, p_{\bar{K}})} + O(h^\infty), \quad (2.21)$$

где Φ_K^* есть γ -перестройка фазы роста в зоне Ω_K ; $c_1(\sigma)$ — гладкая функция, для которой выполнено неравенство

$$\gamma_1 D(\sigma) \leq \operatorname{Im} \Phi_K^*(\sigma) + c_1(\sigma) D(\sigma)^{3/2 - \varepsilon},$$

с некоторой константой γ_1 . Под $O(h^\infty)$ мы понимаем $O(h^{N/2})$, где

N — любое, а верхний предел суммы равен N ;

$$\varphi_0(\alpha, h) = \varphi(\alpha, h), \quad \varphi_1(\alpha, h) = (h\hat{P}_1^{(2)} + \hat{P}_2^{(2)} + \hat{P}_3^{(2)})\varphi(\alpha, h),$$

$$\varphi_l(\alpha, h) = (h\hat{P}_1^{(1)} + \hat{P}_2^{(1)} + \hat{P}_3^{(1)})(h\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3)^{l-2} \times$$

$$\times (h\hat{P}_1^{(0)} + \hat{P}_2^{(0)} + \hat{P}_3^{(0)})\varphi = \hat{\mathcal{P}}_l\varphi,$$

где $\hat{\mathcal{P}}_l$ — дифференциальные операторы с коэффициентами, не зависящими от N и бесконечно гладкими по h , причем

$$\hat{P}_1, \hat{P}_1^{(0)}, \hat{P}_1^{(1)}, \hat{P}_1^{(2)} \in \mathcal{L}_0; \quad \hat{P}_2, \hat{P}_2^{(0)}, \hat{P}_2^{(1)}, \hat{P}_2^{(2)} \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon};$$

$$\hat{P}_3, \hat{P}_3^{(0)}, \hat{P}_3^{(1)}, \hat{P}_3^{(2)} \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

$\varepsilon > 0$ — малое число.

Используя (2.5) и (2.21), дадим определения операторов, переводящих функции от аргументов (q_j, p_j) в функции от аргументов (q_K, p_K) .

Пусть Λ^n — лагранжево многообразие с комплексным ростком, ω_j^0 — неособая карта в зоне Ω_j , ω_K^0 — неособая карта в зоне Ω_K . Предположим, что $\omega_j^0 \cap \omega_K^0 \neq \emptyset$ и что задана гладкая функция $\varphi(\alpha)$, $\text{supp } \varphi(\alpha) \subset \omega_j^0 \cap \omega_K^0$. По лемме 2.1 имеем (мы сохраняем здесь прежние обозначения):

$$F_{p_j, q_j}^{-1} \rightarrow q_j, F_{q_j, p_j} \rightarrow p_j, \left(e^{\frac{i}{h} [\Phi_j(\alpha) + ic(\alpha)D^{3/2-\varepsilon}]} \times \right.$$

$$\times (J_j(\alpha))^{-1/2} L_j \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_j(q_j, p_j)} \Big) = e^{\frac{i\pi}{2} \sigma_{jK}} e^{\frac{i}{h} [\Phi_K(\alpha) + ic(\alpha)D^{3/2-\varepsilon}]} \times$$

$$\times (J_K(\alpha))^{-1/2} L_K \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_K(q_K, p_K)} + O(h^\infty),$$

где $(I \setminus I_1) \cup I_2 = K$. Определим оператор V_{jK}^{00} равенством

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_K(q_K, p_K)} = V_{jK}^{00} \varphi \Big|_{\alpha = \alpha_K(q_K, q_K)} \quad (2.22)$$

Из леммы 2.1 следует, что

$$V_{jK}^{00} = 1 + \sum_l [V_{jK}^{00}]_l, \quad (2.23)$$

где

$$[V_{jK}^{00}]_l \in \mathcal{L}_{l/2-\varepsilon, 3l-1} \quad (2.24)$$

Нетрудно показать, что операторы $[V_{jK}^{00}]_l$ не увеличивают носитель функции $\varphi(\alpha)$.

С помощью формулы (2.21) определим операторы перехода из неособой карты в зоне Ω_j в особую карту зоны Ω_K . Пусть $\omega_j^0 \cap \omega_K^0 \neq \emptyset$, $\varphi(\alpha)$ — гладкая функция, $\text{supp } \varphi(\alpha) \subset \omega_j^0 \cap \omega_K^0$. Определим оператор $V_{jK}^{0\gamma}$ из условия

$$\sum \varphi_l(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_K^{\gamma}(q_K, p_K)} = V_{jK}^{0\gamma} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha = \alpha_K^{\gamma}(q_K, p_K)}. \quad (2.25)$$

Из (2.21) следует, что

$$V_{IK}^{0\gamma} = 1 + \sum_l |V_{IK}^{0\gamma}|_l h^{\frac{l}{2} - \varepsilon}, \quad (2.26)$$

где операторы $[V_{IK}^{0\gamma}]_l$ определяются аналогично операторам $[V_{IK}^{00}]_l$ (см. (2.24)).

Аналогично, с помощью следствия из леммы 2.1 определяются операторы $V_{IK}^{\gamma 0}$, $V_{IK}^{\gamma \gamma}$. Они также являются локальными (не увеличивают носителя функции).

Из теоремы о решении уравнений переноса и Гамильтона — Якоби с диссипацией следуют соотношения

$$\begin{aligned} V_{IK}^{0\gamma} &= V_{IK}^{\gamma\gamma} \pmod{O_D(h^{1/4-\varepsilon})}, \\ V_{IK}^{\gamma 0} &= V_{IK}^{00} \pmod{O_D(h^{1/4-\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из обратимости преобразования Фурье и единственности асимптотического разложения вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} V_{IK}^{00} V_{KI}^{00} &= 1 \pmod{O_D(h^\infty)}, \\ V_{IK}^{0\gamma} V_{KI}^{\gamma 0} &= 1 \pmod{O_D(h^\infty)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Определим еще операторы перехода из особой в неособую и из неособой в особую карты одной и той же зоны. Предположим вначале, что для карт ω_I^0 и ω_{γ} выполнено условие $\omega_I^0 \cap \omega_{\gamma} \neq \emptyset$, $\omega_I^0 \cap \omega_{\gamma} \subset \omega_K^0$. Тогда мы положим

$$V_K^{0\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} V_{IK}^{00} V_{KI}^{0\gamma}. \quad (2.29)$$

Если же $\omega_I^0 \cap \omega_{\gamma} \subset \omega_K^{\gamma}$, то положим

$$V_K^{0\gamma} = V_{IK}^{0\gamma} \cdot V_{KI}^{\gamma\gamma}. \quad (2.30)$$

Легко видеть, что оператор $V^{0\gamma}$ определен корректно, т. е. не зависит от зоны Ω_K , которой принадлежит пересечение карт $\omega_I^0 \cap \omega_{\gamma}$. Для определения операторов перехода $V_{\gamma}^{0\gamma}$ и $V_{\gamma}^{\gamma 0}$ в общем случае мы используем метод, аналогичный операции обхода фокусов (другое определение см. в приложении 2).

Мы не доказали в гл. VI единственности (в каком-либо классе функций) решений уравнений Гамильтона — Якоби и переноса с диссипацией. Однако из формул, дающих решения этих уравнений, легко получить следующее утверждение. Рассмотрим диссипативное уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее некоторому вещественному гамильтониану, не зависящему от времени. Будем обозначать решение этого уравнения через $S(x, t)$. Пусть $S(x, 0) = S_0(x)$. Через $S_{t_0}(x)$ обозначим решение нашего уравнения в момент времени $t = t_0$ (мы предположили для простоты, что

начальное условие задано в неособой карте ω неособой зоны Ω и что карта ω остается неособой при сдвиге за время t , $0 \leq t \leq t_0$ вдоль траекторий соответствующей системы Гамильтона. Это предположение несущественно; важно лишь, чтобы зона оставалась неособой).

Положим теперь $\tilde{S}(x, 0) = S_{t_0}(x)$ и будем решать задачу Коши для нашего уравнения «назад», т. е. рассмотрим функцию $\tilde{S}(x, t)$ при $t = -t_0$. Тогда

$$\tilde{S}(x, -t_0) = S_0(x) + O_D(h^{3/2-\varepsilon}).$$

Доказательство этого факта следует из теоремы 2.1, если учесть, что соответствующие системы уравнений Гамильтона и комплексного роста обратимы во времени. Аналогичный факт справедлив и для уравнения переноса с диссипацией.

Для определения операторов $V_l^{0\gamma}$ мы теперь поступим следующим образом. Пусть $\mathcal{K}(\xi, x)$ — гамильтониан вида

$$\mathcal{K}(\xi, x) = \frac{1}{2} \sum_i \gamma_i (\xi_i^2 + x_i^2), \quad (2.31)$$

где $\gamma_i = \pm 1$, через x обозначен набор $x = (q_{l_0}, p_{l_0})$, $l_0 \subseteq l$, а $\xi = (p_{l_0}, q_{l_0})$.

Рассмотрим квазиклассическую асимптотику задачи Коши:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{K}(\hat{\xi}, x) \psi,$$

$$\psi(q_l, p_l, 0, \hbar) = e^{\frac{i}{\hbar} [\Phi_l(\alpha) + c(\alpha) D(\alpha)^{3/2-\varepsilon}]} \times \\ \times (J_l(\alpha))^{-1/2} L_l \varphi(\alpha) |_{\alpha=\alpha(x)}, \quad (2.32)$$

где $\varphi(\alpha)$ — гладкая функция, $\text{supp } \varphi(\alpha) \subset \omega_l^0 \cap \omega_l$.

Асимптотическое решение задачи (2.32) находится аналогично асимптотике решения уравнения типа Шрёдингера, использованной в методе стационарной фазы.

Обозначим через $(q_l(\alpha, t), p_l(\alpha, t))$ решение соответствующей системы Гамильтона, а через $(Z_l(\alpha, t), w_l(\alpha, t))$ — решения системы уравнений роста. Предположим, что

$$\det \left\| \frac{\partial(q_l(\alpha, t) + Z_l(\alpha, t), p_l(\alpha, t) + w_l(\alpha, t))}{\partial \alpha} \right\| \neq 0$$

при $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 > 0$ некоторое число (очевидно, что существует хотя бы один гамильтониан, для которого это условие выполнено). Вычисляя асимптотику задачи (2.32), так же, как в методе

стационарной фазы, получим

$$\begin{aligned} \psi(q_I, p_I, t, h) = & e^{\frac{i}{h} S(q_I, p_I, t_0)} \sum_i e_i(q_I, p_I, t) L_I^i(t_0) \times \\ & \times \left(1 + \sum h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} V_I^i(\alpha) \right) \Big|_{\alpha=\alpha^i(q_I, p_I, t)}. \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили через $S(q_I, p_I, t_0)$ решение диссипативной задачи Гамильтона — Якоби, соответствующей $H(\xi, x)$, $\{e_i(q_I, p_I, t)\}$ — разбиение единицы, подчиненное разбиению на карты области $\omega_I^0(t_0) \cap \omega_I^i(t_0)$, где через $\omega_I^0(t)$, $\omega_I^i(t)$ мы обозначили карты, полученные при сдвиге карт ω_I^0 и ω_I^i вдоль траекторий системы Гамильтона, с гамильтонианом (2.31) за время t , V_I^i — некоторые операторы (не увеличивающие носитель функции $\varphi(\alpha)$), и L_I^i определены равенством (2.3) на $\omega_I^0(t_0)$.

Рассмотрим теперь решение задачи Коши

$$-ih \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \mathcal{H}\left(\hat{\xi}, \hat{x}\right) \tilde{\psi},$$

$$\tilde{\psi}(q_I, p_I, 0, h) = \psi(q_I, p_I, t_0, h) \quad (2.33)$$

в момент времени $t = -t_0$. Известно, что решения задач вида (2.33) обладают групповым свойством. Именно, если мы положим

$$\psi(q_I, p_I, t, h) = E(t) \psi(q_I, p_I, 0, h),$$

то операторы $E(t)$ удовлетворяют равенству $E(t_1) E(t_2) = E(t_1 + t_2)$, т. е.

$$\tilde{\psi}(q_I, p_I, -t_0, h) = \psi(q_I, p_I, 0, h).$$

Теперь, вычисляя квазиклассическую асимптотику задачи (2.33) точно так же, как при доказательстве формул метода стационарной фазы, и считая, что при $t = -t_0$ мы находимся в карте ω_I^i , получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1(q_I, p_I, -t_0, h) = & e^{\frac{i}{h} [\Phi_I^i(\sigma) + i\varepsilon(\sigma) D(\sigma)^{3/2-\varepsilon}]} (J_I(\sigma))^{-1/2} L_I^i \times \\ & \times \left(1 + \sum_i h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} [V_I^{0i}] \right) \varphi(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma^i(q_I, p_I)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Легко доказывается, что функция $\tilde{\psi}_1(q_I, p_I, -t_0, h)$ действительно является асимптотическим разложением функции $\tilde{\psi}(q_I, p_I, -t_0, h)$. Таким образом,

$$\tilde{\psi}_1(q_I, p_I, -t_0, h) - \psi(q_I, p_I, 0, h) = O_D(h^{N/2}). \quad (2.35)$$

Мы можем определить оператор V_I^{0Y} из равенства (2.34) формулой

$$V_I^{0Y} = 1 + \sum_l h^{\frac{l}{2}-\varepsilon} [V_l^{0Y}]_l. \quad (2.36)$$

Оператор V_I^{0Y} , определенный равенством (2.36), не зависит от выбора гамильтониана $\mathcal{H}(p, q)$ и момента времени t_0 . Это следует из сделанных выше замечаний о решении уравнений Гамильтона — Якоби и переноса с диссипацией и групповых свойств решений уравнений типа (2.33). Легко видеть также, что определение (2.36) является непосредственным обобщением определений (2.29), (2.30).

Из определения операторов перехода следуют равенства

$$\begin{aligned} V_I^{0Y} V_{KI}^{Y0} &= V_{KI}^{00} V_K^{Y0} \pmod{O_D(h^\infty)}; \\ V_{KI}^{0Y} V_K^{Y0} &= V_{IK}^{0Y} \pmod{O_D(h^\infty)}, \\ V_{KI}^{0Y} V_{IK}^{00} &= V_{IK}^{Y0} \pmod{O_D(h^\infty)}, \\ V_{KI}^{Y0} V_{IK}^{Y0} &= V_{IK}^{0Y} \pmod{O_D(h^\infty)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

и т. д.

Кроме того, из определения операторов перехода (2.22), (2.25), (2.30), (2.36) следует, что для каждого из них существует квазиобратный оператор (по модулю $O_D(h^\infty)$), который легко строится методами теории возмущений.

§ 3. Индекс комплексного ростка и канонический оператор

Для того, чтобы определить индекс на Γ , введем некоторый класс многообразий, который включает в себя класс вещественных лагранжевых многообразий.

Пусть S^{2n} — фазовое пространство комплексной размерности $2n$ с координатами $P = (P_1, \dots, P_n)$, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, а $\Lambda_\gamma^n : \{P = P(\alpha), Q = Q(\alpha)\}$, $(\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вещественное n -мерное многообразие, вложенное в S^{2n} (локальные координаты α вещественны, а $P_j(\alpha)$, $Q_j(\alpha)$ — комплексные функции).

Предположим, что для $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ выполняется условие равенства нулю скобок Лагранжа:

$$\{P(\alpha), Q(\alpha)\} = \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial P}{\partial \alpha_j} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0$$

и касательные плоскости к Λ_γ^n вещественноподобны. Обозначим:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = B, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = C, \quad B_t = B + itC.$$

Нетрудно видеть, что при фиксированном α матрица B_t невырождена при достаточно малых положительных t .

Потребуем, чтобы многообразие Λ_y^n удовлетворяло следующему условию:

$$\operatorname{Im} (B_t^{-1}Ch, h) \leq 0 \quad (3.1)$$

при $0 < t \leq t_0(\alpha)$ для любого $h \in C^n$.

Многообразие Λ_y^n , удовлетворяющее этому дополнительному условию, будем называть Y -лагранжевым.

Для определения индекса замкнутого пути Y -лагранжева многообразия напомним, что, если путь на Γ лежал целиком в неособой карте, то индекс пути определялся через приращение аргумента (фазы) якобиана $D(q+z)/D\alpha$.

Пусть ε — достаточно малое положительное число,

$$\tilde{Q} = Q - i\varepsilon P, \quad \tilde{P} = P \quad (3.2)$$

отвечает сдвигу на $t = \varepsilon$ вдоль гамильтоновой системы с гамильтонианом $-iP^2$. Покажем, что это преобразование переводит Y -лагранжево многообразие

$$\Lambda_y^n: \{P = P(\alpha), \quad Q = Q(\alpha)\}$$

в Y -лагранжево многообразие

$$\tilde{\Lambda}_y^n: \{P = \tilde{P}(\alpha), \quad Q = \tilde{Q}(\alpha)\}, \quad (3.3)$$

для которого матрица $\partial\tilde{Q}/\partial\alpha$ невырождена при всех α .

Действительно, обозначим

$$\tilde{C} = \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\alpha} = C - i\varepsilon B. \quad (3.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (B_t^{-1}\tilde{C}h, h) &= (B_t^{-1}Ch, h) - i\varepsilon (B_t^{-1}Bh, h) = \\ &= (B_t^{-1}Ch, h) - i\varepsilon (h, h) - i\varepsilon (B_t^{-1}(B - B_t)h, h) = \\ &= (B_t^{-1}Ch, h)(1 - \varepsilon t) - i\varepsilon (h, h), \end{aligned}$$

так что $\operatorname{Im} (B_t^{-1}\tilde{C}h, h) \leq 0$ при достаточно малых t .

Следовательно, $\tilde{\Lambda}_y^n$ есть Y -лагранжево многообразие.

Далее, $\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\alpha} = \frac{\partial Q}{\partial\alpha} - i\varepsilon \frac{\partial P}{\partial\alpha} = C - i\varepsilon B$. Предположим, что матрица $C - i\varepsilon B$ вырождена. Тогда существует такой ненулевой вектор $h \in C^n$, что $(C - i\varepsilon B)h = 0$. При этом $Ch \neq 0$, $Bh \neq 0$, так как матрица $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ имеет ранг n . Обозначим $g_t = B_th$; $g_t \neq 0$ при достаточно малых t .

Имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +0} ((CB_t^{-1} - i\varepsilon)g_t, g_t) = \lim_{t \rightarrow +0} ((C - i\varepsilon B_t)h, g_t) = ((C - i\varepsilon B)h, g) = 0.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Im} ((CB_t^{-1} - i\varepsilon)g_t, g_t) = \operatorname{Im} (CB_t^{-1}g_t, g_t) - \varepsilon \|g_t\|^2 \leq -\varepsilon \|g_t\|^2,$$

откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \operatorname{Im} ((CB_t^{-1} - ie) g_t, g_t) \leq \varepsilon \|g_t\|^2 < 0.$$

Полученное противоречие доказывает невырожденность матрицы $\partial \tilde{Q} / \partial \alpha$.

Задача. Пусть $\mathcal{H}(p, q) = H(p, q) + i\tilde{H}(p, q)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^n$ — голоморфная функция от p и q и пусть $\tilde{H}(p, q) \leq 0$. Доказать, что сдвиг вдоль траекторий этого гамильтониана переводит U -лагранжево многообразие в U -лагранжево; т. е. $g_{\mathcal{H}}(p, q) \Lambda_{\mathcal{H}}^n$ U -лагранжево, где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{H}}^n &= \{Q(\alpha), P(\alpha)\}, \quad g_{\mathcal{H}}(p, q) \Lambda_{\mathcal{H}}^n: \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}, \\ Q(\alpha, 0) &= Q(\alpha), \quad P(\alpha, 0) = P(\alpha), \\ \dot{Q}(\alpha, t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(P(\alpha, t), Q(\alpha, t)), \\ P(\alpha, t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(P(\alpha, t), Q(\alpha, t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим гамильтониан $H = p^2 + q^2$, $p \in \mathbb{R}^k$, $q \in \mathbb{R}^k$. Сдвиг вдоль траекторий такого гамильтониана U -лагранжева многообразия $\Lambda_{\mathcal{H}}^n = \{Q(\alpha), P(\alpha)\}$ осуществляется следующим преобразованием:

$$\begin{aligned} Q_i(\alpha, t) &= Q_i(\alpha) \cos t + P_i(\alpha) \sin t, \quad i \leq k, \\ Q_j(\alpha, t) &= Q_j(\alpha), \quad P_j(\alpha, t) = P_j(\alpha) \quad \text{при } n \geq j > k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, аналогично тому, как это было проделано выше, что якобиан

$$J_{\varepsilon}(\alpha, t) = \frac{D(Q(\alpha, t) - i\varepsilon P(\alpha, t))}{D\alpha} \quad (3.6)$$

не равен нулю при $\varepsilon > 0$ для любых действительных t . При $t = \pi/2$ мы получим, очевидно, что

$$J_{\varepsilon}(\alpha, \pi/2) = \det \left(\frac{\partial (P_1(\alpha) + i\varepsilon Q_1(\alpha), Q_1(\alpha))}{\partial \alpha} \right), \quad (3.7)$$

где $I = (1, \dots, k)$.

Теперь мы можем определить индекс пути, лежащего на $\Lambda_{\mathcal{H}}^n$.

Пусть сначала путь l целиком лежит в одной координатной окрестности.

Пусть $\Delta\varphi(l)$ — приращение аргумента (фазы) якобиана

$$\det [C(\alpha) - i\varepsilon B(\alpha)] = \frac{D(Q - i\varepsilon P)}{D\alpha} \quad (3.8)$$

вдоль этого пути. Положим:

$$\operatorname{Ind}_{\varepsilon} l = \left[\frac{\Delta\varphi(l)}{\pi} \right], \quad (3.9)$$

где скобки $[\]$ означают целую часть числа.

Очевидно, что $\text{Ind}_\varepsilon l$ не зависит от выбора локальных координат, так как при переходе к другим локальным координатам $\det [C(\alpha) - i\varepsilon B(\alpha)]$ умножается на положительную функцию. Если путь l не лежит целиком в одной координатной окрестности, то $\text{Ind}_\varepsilon l$ определим по аддитивности. Очевидно, что для замкнутого пути γ , $\text{Ind } \gamma$ не зависит от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$. В этом случае мы положим $\text{Ind } \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_\varepsilon \gamma$. Справедлива формула

$$\text{Ind } \gamma = \oint_\gamma d \ln \frac{D(Q - i\varepsilon P)}{D\alpha} \left| \frac{D(Q - i\varepsilon P)}{D\alpha} \right|. \quad (3.10)$$

Легко видеть, что если замкнутый путь γ можно стянуть в точку, то $\text{Ind } \gamma = 0$; таким образом, Ind есть одномерный класс когомологий многообразия Λ_y^n (характеристический класс).

Заметим, что индекс Ind можно определить и для некоторых незамкнутых путей l . Именно, если при достаточно малых ε дробная часть $\Delta\varphi(l)$ превосходит некоторую положительную константу, то положим

$$\text{Ind } l = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Ind}_\varepsilon l. \quad (3.11)$$

Кроме того, если концы пути l являются неособыми точками, т. е. в них отличен от нуля якобиан $\frac{DQ(\alpha)}{D\alpha}$, то

$$\Delta\varphi_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_l \text{Arg} \frac{D(Q - i\varepsilon P)}{D\alpha} \quad (3.12)$$

существует, и мы можем определить индекс пути l как $[\Delta\varphi_0/\pi]$.

Предположим теперь, что на Λ_y^n все индексы замкнутых циклов равны нулю (т. е. целочисленный класс когомологий, введенный выше, тривиален). Тогда индекс пути из неособой точки α_1 в неособую точку α_2 не будет зависеть от пути, а будет зависеть лишь от точек α_1 и α_2 . Пусть α_0 — некоторая точка на Λ_y^n , которую мы назовем начальной. Для определенности будем считать, что она неособая, а аргумент якобиана $\frac{DQ}{D\alpha}(\alpha_0)$ в ней будем считать заключенными между 0 и 2π . Теперь мы можем по непрерывности однозначно определить Arg (фазу) якобиана $DQ/D\alpha$ в любой другой неособой точке $\alpha \in \Lambda_y^n$, поскольку изменение фазы якобиана $\Delta\varphi_0$, определенное в (3.12), не зависит от пути.

В силу леммы о локальных координатах многообразие Λ_y^n можно покрыть областями Ω_I , в каждой из которых отличен от нуля якобиан

$$\frac{D(Q_I(\alpha), P_I(\alpha))}{D\alpha}. \quad (3.13)$$

Мы можем определить однозначно по непрерывности и Arg этих якобианов с помощью преобразования (3.5) и перехода к пределу, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\text{Arg } J_\varepsilon(\alpha, \pi/2)$ в формуле (3.7).

Нетрудно убедиться, что, если определить Arg якобианов с помощью сдвига вдоль траекторий гамильтониана $H(p, q)$, отвечающего операции обхода фокусов (или какого-либо другого (действительного) гамильтониана, приводящего к тому же конечному каноническому преобразованию поворота на угол π), то в силу того, что индекс не зависит от пути, мы получим то же самое определение Arg якобиана (3.13).

Множество Γ комплексного ростка зачастую является пересечением лагранжева многообразия Λ^n и U -лагранжева многообразия $\Lambda^n_U: \{P(\alpha), Q(\alpha)\}$, причем, с точностью до $O_{D_0}(h)$, $P(\alpha) = p(\alpha) + \omega(\alpha)$, $Q(\alpha) = q(\alpha) + z(\alpha)$. В этом случае все определения Arg якобианов непосредственно переносятся на лагранжево многообразие с комплексным ростком. Если же это не так, то нетрудно убедиться, что вообще все предыдущие рассуждения переносятся без изменений, если вместо $\{P(\alpha), Q(\alpha)\}$ рассматривать $p(\alpha) + \omega(\alpha)$, $q(\alpha) + z(\alpha)$ в достаточно малой окрестности множества Γ .

Перейдем к определению канонического оператора.

Пусть Λ^n — лагранжево многообразие с комплексным ростком. Рассмотрим некоторое покрытие его картами $\{\omega_j\}$, которое в дальнейшем будем называть *весовым атласом*. Обозначим через $\{\rho_j\}$ разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\omega_j\}$:

$$\rho_j \in C^\infty(\Lambda^n), \quad \text{supp } \rho_j \subset \omega_j, \quad \sum_j \rho_j = 1; \quad (3.14)$$

это разбиение единицы будем называть *весовым*.

Весовой атлас и весовое разбиение единицы будем считать фиксированными.

Пусть $\{u_k\}$ — некоторое покрытие Λ^n картами, причем карта u_k имеет тип $\omega_k^{i_k}$, $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$ и $e_k \in C_0^\infty$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{u_k\}$ проекции носителя φ на Λ^n . Положим

$$\Psi_k = \sum_j V_{jk} \rho_j e_k \varphi, \quad (3.15)$$

где V_{jk} — определенные выше операторы перехода из карты u_j в карту u_k .

Определим *предканонический оператор* $\mathcal{K}$ с помощью формулы

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \sum_k F_{\bar{t}_k \rightarrow x}^{-1} \left\{ e^{\frac{-i \text{Arg } J_k(\sigma)}{2}} + \frac{i}{h} [\Phi_k(\sigma) + i c(\sigma) D(\sigma)^{3/2 - \varepsilon}] \times \right. \\ \left. \times (|J_k(\sigma)|^{-1/2} L_k \Psi_k(\sigma)) \right\}_{\sigma = \sigma_k(x_{I_k}, \bar{t}_{I_k})},$$

где J_k — якобиан, отвечающий карте u_k , $\text{Arg } J_k$ — определенный выше аргумент этого якобиана, $\sigma_k(x_{I_k}, \xi_{\bar{I}_k})$ — решение системы уравнений:

$$q_{I_k}(\sigma) + \gamma_{I_k}^{i_k}(\sigma) = x_{I_k}, \quad p_{\bar{I}_k}(\sigma) + \gamma_{\bar{I}_k}^{i_k}(\sigma) = \xi_{\bar{I}_k}, \quad \sigma \in u_k,$$

Φ_k, L_k — соответственно $\Phi_k^{i_k}$ и $L_k^{i_k}$ в карте u_k .

Введем теперь в пространстве $C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $\varphi(\alpha, h) \sim \tilde{\varphi}(\alpha, h)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\alpha, h) - \tilde{\varphi}(\alpha, h) = O_D(h^{N/2-\varepsilon})$. В частности, $\varphi \sim \tilde{\varphi}$, если проекция носителя разности $\varphi - \tilde{\varphi}$ на Λ^n не пересекается с Γ (напомним, что через Γ мы обозначили множество нулей комплексного ростка).

Обозначим через $[C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])]_\Gamma$ факторпространство $C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$ по отношению эквивалентности $\sim$.

Обозначим через $C^\infty(\mathbb{R}^n, C_{(0,1)})$ пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве непрерывных функций на полуинтервале $(0, 1]$ и введем в нем отношение эквивалентности $\approx$, полагая

$$(f \approx g) \Leftrightarrow (f - g = O(h^{\frac{N-n}{2}-\varepsilon})). \quad (3.16)$$

Обозначим через $[C^\infty(\mathbb{R}^n, C_{(0,1)})]$ факторпространство $C^\infty(\mathbb{R}^n, C_{(0,1)})$ по введенному отношению эквивалентности. Учитывая локальность V -операторов перехода, получаем, что предканонический оператор индуцирует оператор

$$\mathcal{K}_{\Lambda^n} : [C_0^\infty(\Lambda_{[0,1]}^n)]_\Gamma \rightarrow [C^\infty(\mathbb{R}^n, C_{(0,1)})], \quad (3.17)$$

который мы и будем называть каноническим оператором на лагранжевом многообразии с комплексным ростком (сокращенно — к. о.).

(Иногда, чтобы подчеркнуть, что асимптотические разложения ведутся по параметру $h \rightarrow +0$, мы будем писать $\mathcal{K}_{\Lambda^n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}_{\Lambda^n}^{1/h}$.)

Элементы пространств $[C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])]_\Gamma$ и $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, C_{(0,1)})$ мы также будем называть функциями, там, где это не вызовет путаницы.

Лемма 3.1. *Канонический оператор $\mathcal{K}_{\Lambda^n}$ не зависит от выбора покрытия $\{u_k\}$ и разбиения единицы $\{e_k\}$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательствам соответствующих теорем гл. V. Достаточно убедиться в справедливости следующего факта.

Пусть проекция носителя функции $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^n \times [0, 1])$ лежит в пересечении карт ω^{i_1} и ω^{i_2} и пусть $I_1 \subset I, I_2 \subset I$,

$K = (I \setminus I_1) \cup I_2$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{\xi_{I_1}}^{-1} \rightarrow x_{I_1} F_{x_{I_1}} \rightarrow \xi_{I_2} \left\{ e^{-\frac{i \operatorname{Arg} J_K(\sigma)}{2} + \frac{i}{h} \left[\Phi_K^{\gamma_K}(\sigma) + i C(\sigma) D(\sigma)^{3/2 - \varepsilon} \right]} \times \right. \\ \left. \times |J_K(\sigma)|^{-1/2} L_K^{\gamma_K} V_{IK}^{\gamma_K} \Phi \right\}_{\sigma = \sigma_K^{\gamma_K}(x_K, \xi_K)} = \\ = \left\{ e^{-i \operatorname{Arg} J_I(\sigma)/2} e^{\frac{i}{h} \left[\Phi_I^{\gamma_I}(\sigma) + i c(\sigma) D(\sigma)^{3/2 - \varepsilon} \right]} |J_I(\sigma)|^{-1/2} L_I^{\gamma_I} V_{II}^{\gamma_I} \Phi \right\}_{\sigma = \sigma_I^{\gamma_I}} + \\ + O(h^{N/2 - \varepsilon}), \end{aligned}$$

где $V_{IK}^{\gamma_K}$ и $V_{II}^{\gamma_I}$ — V -операторы перехода из карты ω_j в карты $\omega_K^{\gamma_K}$ и $\omega_I^{\gamma_I}$ соответственно.

Этот факт проверяется с помощью метода стационарной фазы.

Замечание 1. Случай зависимости лагранжева многообразия с комплексным ростком от параметров может быть рассмотрен аналогично тому, как это было сделано в гл. V. Если интегралы от $p dq$ по циклам c на Γ не равны нулю и Ind по этим циклам также не равен нулю по $\bmod 4$, то для определения канонического оператора требуется выполнение условий квантования

$$\frac{1}{\pi h} \oint c p dq = \operatorname{Ind} c \pmod{4}. \quad (3.18)$$

Если вместо параметров в этом случае нужно подставлять упорядоченные операторы, то можно использовать регуляризованный канонический оператор совершенно аналогично тому, как это было сделано в гл. V.

Замечание о дальнейших обозначениях. Во избежание громоздкости формул мы иногда будем (без уменьшения общности) предполагать, что на Λ^n имеется всего по одной карте каждого типа ω_j^i . При этом мы будем писать ω_j^i вместо u_k , e_i^j вместо e_k ; аналогичным образом будут изменены индексы при других буквах. Обозначим $\gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} J_I$, набор $(1, \dots, n)$ — через 0.

Перейдем теперь к коммутации гамильтониана с каноническим оператором. Рассмотрим гамильтониан вида

$$\hat{H} = -i\hbar \partial/\partial t + \mathcal{H}(p, x, t, \hbar), \quad p = -i\hbar \partial/\partial x$$

и пусть $\mathcal{H}_1(p, q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}(p, q, t, 0) = H_1(p, q, t) + i\tilde{H}_1(p, q, t)$ гладкая комплексная функция, причем $\tilde{H}_1(p, q, t) \leq 0$.

Пусть $(\tilde{\Lambda}^{n+1}, r^{n+1})$ — лагранжево многообразие с комплексным ростком, определенное в гл. VI § 1. Обозначим через $\{u_K^{\gamma_K}\}$ атлас на $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ и пусть $\varphi \in [C_0^\infty(\tilde{\Lambda}^{n+1} \times R)]_\Gamma$.

Теорема 3.1. Для любого целого $N > 0$ справедливо равенство

$$\hat{H}\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}\Psi = ih\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}R_H\Psi + O(h^N),$$

где R_H — оператор вида

$$R_H = \frac{d}{dt} + R(\sigma, t) + \sum_{l=1}^{2N} G_H^l + \sum_{n=1}^N (ih)^n R_H^n.$$

В этом равенстве через $\frac{d}{dt}$ обозначена производная вдоль траекторий гамильтонова векторного поля, отвечающего функции Гамильтона $H_1(p, q, t)$,

$$G_H^l \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}-\varepsilon, k}, \quad l \geq k+1, \quad k=1, 0; \quad R_H^n \in \mathcal{L}_{0, n}.$$

Функция $R(\sigma, t)$ бесконечно дифференцируема по σ, t и не зависит от h , $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Доказательство. Предположим, что $\text{supp } \Psi \subset u_K^k$. Рассмотрим оператор $\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}: [C^\infty(\Lambda^n)]_\Gamma \rightarrow [C^\infty(\mathbb{R}^n, C(0, 1))]$, определенный равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}\Psi = \sum_K \sum_k e^{\frac{i\pi}{2} \gamma_K} F_{\xi_{\bar{K}} \rightarrow x_{\bar{K}}} \left[e^{\frac{i}{h} [\Phi_K^k(\sigma, t) + c(\sigma, t) D(\sigma, t)^{3/2} - \varepsilon]} \times \right. \\ \left. \times (J_K)^{-1/2} L_K^k e_K^k \Psi \Big|_{\sigma = \sigma_K^k(x_K, \xi_{\bar{K}}, t)} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_K \sum_k [\mathcal{K}\Psi]_{K,k}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Рассмотрим сначала одно слагаемое в сумме (3.19), соответствующее неособой карте неособой зоны. Положим $e_0^0(\sigma, t)\Psi(\sigma, t) = \Psi_0(\sigma, t)$. По формуле коммутации гамильтониана с комплексной экспонентой имеем:

$$\begin{aligned} \hat{H} [\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}\Psi]_0^0 = e^{\frac{i\pi}{2} \gamma} e^{\frac{i}{h} [\Phi(\sigma) + c(\sigma) D(\sigma)^{3/2} - \varepsilon]} \Big|_{\sigma = \sigma(x, t)} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \mathcal{K}_1 \left(\frac{\partial s_1}{\partial s}, x, t \right) + i \langle \mathcal{K}_{1p} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x}, x, t \right), \frac{\partial s_2}{\partial x} \rangle - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle \frac{\partial s_2}{\partial x}, \mathcal{K}_{1pp} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial s_2}{\partial x} \rangle \right] \frac{L_0^0(e_0^0\Psi)(\sigma(x, t), t)}{V J_0(\sigma(x, t), t)} + \\ + ih \left[\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathcal{K}_{1p} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x}, x, t \right) + i \mathcal{K}_{1pp} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial s_2}{\partial x}, \nabla \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{K}_{1p_i p_j} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} + \mathcal{K}_h \left(\frac{\partial s_1}{\partial x}, x, t, 0 \right) \right] \frac{L_0^0(e_0^0\Psi)(\sigma(x, t), t)}{V J_0(\sigma(x, t), t)} + \\ \left. + \frac{1}{V J_0(\sigma(x, t), t)} \left(\sum_{l=1}^{2N} (\tilde{G}_0^0)_l + \sum_{n=1}^N (ih)^n (\tilde{P}_0^0)_n \right) \Psi_0(\sigma(x, t), t) \right\} + \\ + O(h^N), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $(\tilde{G}_0^0)_l \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}-\varepsilon, k}$, $l \geq k+1$, $k=0, 1$, $(\tilde{P}_0^0)_n \in \mathcal{L}_{0, n}$, $O(h^N)$ —

остаток в формуле коммутации гамильтониана с экспонентой. Его оценка приведена в § 1. Здесь через $s(x, t)$ мы обозначили функцию $s(x, t) = [\Phi(\sigma, t) + ic(\sigma, t)D(\sigma, t)^{3/2-\varepsilon}]|_{\sigma=\sigma(x, t)}$ и $s_1(x, t) = \operatorname{Re} s(x, t)$, $s_2(x, t) = \operatorname{Im} s(x, t)$.

Заметим, что первое слагаемое в фигурных скобках в (3.20) (обозначим его Q_1) есть уравнение Гамильтона—Якоби с диссипацией. В силу результатов гл. VI $Q_1 = O_s(h^{3,2-\varepsilon}) \cdot (e_0^0 \psi) \times \times (\sigma(x, t), t)$. Второе слагаемое в фигурных скобках в (3.20) (обозначим его Q_2) в силу следствия из теоремы 5.3 гл. VI можно записать в виде

$$Q_2 = ih \left[\frac{L_0^0}{V J_0(\sigma(x, t), t)} \left(\frac{d}{dt} (e_0^0 \psi)(\sigma(x, t), t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \Psi(\sigma(x, t), t) (e_0^0 \psi)(\sigma(x, t), t) \right) + (F_1 + F_2) (e_0^0 \psi)(\sigma(x, t), t) \right],$$

где $\Psi(\sigma, t)$ — гладкая функция (см. следствие из теоремы 5.3 гл. VI), $F_1 \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}-\varepsilon, 0}$, $F_2 \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon, 1}$.

Таким образом, мы получаем соотношение

$$\hat{H} [\hat{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} \varphi]_0^0 = ih [\hat{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} \tilde{P}_0^0 \varphi] + O(h^N). \quad (3.21)$$

Здесь $\tilde{P}_0^0$ — оператор вида

$$\tilde{P}_0^0 = \frac{d}{dt} + \Psi(\sigma, t) + \sum_{l=1}^{2N} (\tilde{G}_0^0)_l + \sum_{n=1}^N (ih)^n (\tilde{P}_0^0)_n, \quad (3.22)$$

где

$$(\tilde{P}_0^0)_n \in \mathcal{L}_{0n}, \quad (\tilde{G}_0^0)_l \in \mathcal{L}_{\frac{l}{2}-\varepsilon, k}, \quad l+1 \geq k, \quad k=0,1.$$

Таким образом, мы получим равенство *):

$$\hat{H} [\hat{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} \varphi]_0^0 = ih e^{\frac{i\pi}{2} \gamma} e^{\frac{i}{h}} [\Psi(\sigma) + ic(\sigma) D^{3/2-\varepsilon}] [J_0(\sigma)]^{-1/2} \times \\ \times \left[L \left(\frac{d}{dt} + \Psi(\sigma, t) \right) + \sum_{l=1}^{2N} (G_0^0)_l + \sum_{n=1}^N (ih)^n (P_0^0)_n \right] \varphi_0|_{\sigma=\sigma(x, t)} + O(h^N). \quad (3.23)$$

Напомним, что по определению при $N=1$

$$L = 1 - \langle z, \left(\frac{\partial(q+z)}{\partial \sigma} \right)^{-1} \nabla \sigma \rangle.$$

Рассмотрим оператор L_1

$$L_1 = 1 + \langle z, \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma} \right)^{-1} \nabla \sigma \rangle.$$

*) Так как все рассмотрение производится в фиксированной карте, индексы у оператора L_0^0 мы в дальнейшем опускаем.

Вычислим оператор LL_1 . Для любой гладкой функции $v(\sigma)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} LL_1 v(\sigma) &= (1 - \langle z, (q_\sigma + z_\sigma)^{-1} \nabla \rangle) (v + \langle z, q_\sigma^{-1} \nabla v \rangle) = \\ &= v + \langle z, q_\sigma^{-1} \nabla v \rangle - \langle z, (q_\sigma + z_\sigma)^{-1} \nabla v \rangle - \\ &\quad - \langle z, (q_\sigma + z_\sigma)^{-1} z_\sigma q_\sigma^{-1} \nabla v \rangle + \tilde{L}_1 v, \end{aligned}$$

где $\tilde{L}_1 \in \mathcal{L}_{1,2}$. Далее покажем, что $LL_1 = 1 + \tilde{L}_1$:

$$\langle z, q_\sigma^{-1} \nabla v \rangle - \langle z, (q_\sigma + z_\sigma)^{-1} \nabla v \rangle = \langle z, (q_\sigma + z_\sigma)^{-1} z_\sigma q_\sigma^{-1} \nabla v \rangle.$$

В лемме 6 Приложения 2 мы построим оператор L_1 для любого N , причем оператор $\tilde{L}_1$ будет равен сумме операторов классов $L_{k/2-e, k}$, $k \leq N$.

Положим теперь $L_2 = L_1 - L_1 \tilde{L}_1$. Легко видеть, что справедливо равенство

$$LL_2 = LL_1 - LL_1 \tilde{L}_1 = 1 - \tilde{L}_1 \tilde{L}_1.$$

Очевидно, что продолжая этот процесс, мы можем для любого целого $N > 0$ построить оператор L_N , такой, что

$$LL_N = 1 + \tilde{L}_N,$$

где

$$L_N \in \mathcal{L}_{\frac{N}{2}, N}, \quad \tilde{L}_N \in \mathcal{L}_{\frac{N+1}{2}, N+1}.$$

Таким образом, мы показали, что существует оператор, обратный к оператору L по модулю функций вида $O_D(h^\infty)$. Обозначим его L_N^{-1} .

Используя равенство (3.23), можем записать

$$\hat{H} [\tilde{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} \Phi]_0^0 = ih [\tilde{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} P_0^0 \Phi] + O(h^N). \quad (3.24)$$

Здесь через P_0^0 мы обозначили оператор вида

$$P_0^0 = \frac{d}{dt} + \Psi(\sigma, t) + \sum_{l=1}^{2N} (G_0^0)_l + \sum_{n=1}^N (ih)^n (P_0^0)_n, \quad (3.25)$$

где $(G_0^0)_l \stackrel{\text{def}}{=} L_N^{-1} (\tilde{G}_0^0)_l \in \mathcal{L}_{\frac{l}{2}-e, k}$, $l \geq k+1$, $k=0,1$ в силу указанных выше свойств операторов $(\tilde{G}_0^0)_l$ и вида оператора L , $(P_0^0)_n = L_N^{-1} (\tilde{P}_0^0)_n \in \mathcal{L}_{0,n}$.

Аналогично для любой карты u_K^k зоны Ω_K доказывается равенство

$$\hat{H} [\tilde{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} \Phi]_K^k = ih [\tilde{\mathcal{K}}_{\lambda^{n+1}} P_K^k \Phi]_K^k + O(h^N), \quad (3.26)$$

где P_K^k — оператор вида

$$P_K^k = \frac{d}{dt} + \Psi(\sigma, t) + \sum_{l=1}^{2N} (G_K^k)_l + \sum_{n=1}^N (ih)^n (P_K^k)_n,$$

где $(G_K^k)_l \in \mathcal{L}_{\frac{l}{2}-e, k}$, $l \geq k+1$, $k=0,1$, $(P_K^k)_n \in \mathcal{L}_{0,n}$.

Получим теперь соотношения коммутации между V -операторами перехода и определенными только что операторами P_K^k .

Пусть $\varphi(\alpha) \in C_0^\infty(\Lambda^n)$ и $\text{supp } \varphi(\alpha) \subset u_K^k \cap u_l^i$. Используя определение V -операторов перехода, можно получить равенства

$$\hat{H}[\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}\varphi}]_K^k = ih [\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} P_K^k \varphi]_K^k = ih [\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} V_K^k \gamma^i P_K^k \varphi]_l^i. \quad (3.27)$$

С другой стороны,

$$\hat{H}[\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}\varphi}]_K^k = \hat{H}[\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} V_K^k \gamma^i \varphi]_l^i = ih [\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} P_l^i V_K^k \gamma^i \varphi]_l^i. \quad (3.28)$$

Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}$ является мономорфизмом. Из этого факта и равенств (3.27) и (3.28) получаем следующее соотношение:

$$V_K^k \gamma^i P_K^k = P_l^i V_K^k \gamma^i. \quad (3.29)$$

Рассмотрим теперь функцию $(\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}\varphi})(x, t)$, где $\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}}$ — канонический оператор на лагранжевом многообразии с комплексным ростком, $\varphi \in [C_0^\infty(\Lambda^n)]_\Gamma$. Мы предположим вначале, что существует такой представитель ψ класса φ , $\psi \in C_0^\infty(\Lambda^n)$, что носитель ψ целиком содержится в некоторой карте u_K^k . Тогда в силу (3.26) и определения канонического оператора

$$\hat{H}(\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}\varphi}) = ih \left[\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} P_K^k \left(\sum_l \sum_i V_l^i \gamma^i \rho_l^i \psi \right) \right]_K^k + O(h^N). \quad (3.30)$$

Определим оператор R_K^k равенством

$$R_K^k = \left(\sum_l \sum_i V_l^i \gamma^i \rho_l^i \right)^{-1} P_K^k \left(\sum_l \sum_i V_l^i \gamma^i \rho_l^i \right). \quad (3.31)$$

Тогда, очевидно, равенство (3.30) можно переписать в виде

$$\hat{H}[\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}\varphi}]_K^k = ih [\mathcal{K}_{\lambda^{n+1}} (R_K^k \varphi)]_K^k. \quad (3.32)$$

Покажем, что на пересечении карт $u_M^m \cap u_K^k$ выполняется равенство

$$R_K^k = R_M^m.$$

В самом деле, используя равенства (2.37) и (3.29), имеем (mod $O(h^\infty)$)

$$\begin{aligned} R_K^k &= \left(\sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right)^{-1} P_K^k \left(\sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right) = \\ &= \left(\sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right)^{-1} P_K^k V_{MK}^m \gamma_K^k \left(V_{KM}^m \sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right) = \\ &= \left(\sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right)^{-1} V_{MK}^m \gamma_K^k P_M^m \left(\sum_i \sum_l V \gamma_K^l \rho_l^k \right) = \\ &= \left(\sum_i \sum_l V \gamma_M^l \rho_l^k \right)^{-1} P_M^m \left(\sum_i \sum_l V \gamma_M^l \rho_l^k \right) = R_M^m. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Обозначим теперь через R_H оператор на $\tilde{\Lambda}^{n+1}$, определенный в карте u_X^k равенством (3.31). (В силу (3.33) это определение инвариантно относительно выбора атласа на Λ^n .) Тогда

$$\hat{H} \mathcal{K} \tilde{\chi}_{\Lambda^{n+1}} \psi = i h \mathcal{K} \tilde{\chi}_{\Lambda^{n+1}} R_H \psi + O(h^N). \quad (3.34)$$

Доказательство равенства (3.34) следует непосредственно из определения оператора R_H . Заметим теперь, что оператор R_H имеет вид

$$R_H = \frac{d}{dt} + R(\sigma, t) + \sum_{l=1}^{2N} G_H^l + \sum_{n=1}^N (ih)^n R_H^n, \quad (3.35)$$

где G_H^l, R_H^n — операторы на $\tilde{\Lambda}^{n+1}$, причем

$$G_H^l \in \mathcal{L}_{\frac{l}{2} - \varepsilon, k}, \quad l \geq k+1 \quad k=0, 1, \quad R_H^n \in \mathcal{L}_{0, n}.$$

Доказательство равенства (3.35) легко следует из определения оператора R_H и возможности представить любой V -оператор в виде

$$V = 1 + \sum_{l=1}^{2N} (ih)^{l/2 - \varepsilon} V_l, \quad V_l \in \mathcal{L}_\delta, \quad \delta > 0.$$

Пусть

$$-ih\partial/\partial t \psi + \mathcal{K} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ p, x, t, h \end{smallmatrix} \right) \psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = \mathcal{K}_{\Lambda^n} \tilde{\Phi}, \quad (3.35')$$

где $\mathcal{K}_{\Lambda^n}$ — канонический оператор на многообразии с комплексным ростком r^n , $\tilde{\Phi} \in [C_0^\infty(\Lambda^n)]_\Gamma$, $\mathcal{K} \in C^\infty$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Im} \mathcal{K}(p, q, t, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H}(p, q, t) \leq 0.$$

Обозначим еще $\operatorname{Re} \mathcal{K}(p, q, t, 0) = H(p, q, t)$ и введем лагранжево многообразие с комплексным ростком $(\tilde{\Lambda}^{n+1}, r^{n+1})$, построенное с помощью комплексного канонического преобразования $g_H^l + i\tilde{H}$ аналогично § 1 главы VI.

Непосредственно из теоремы 3.1 получаем:

Теорема 3.2. *Асимптотическое решение задачи (3.35') определяется равенством*

$$\psi(x, t, h) = \mathcal{K} \tilde{\lambda}^{n+1} \Phi,$$

где Φ удовлетворяет соотношениям

$$R_H \Phi = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \tilde{\Phi}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в гл. V, можно определить канонический оператор на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком, зависящим от параметра. Мы рассмотрим здесь лишь частный случай, однако только он и понадобится нам в дальнейшем.

Пусть $\Lambda^n = \{p = p(\alpha), q = q(\alpha)\}$ — лагранжево многообразие с комплексным ростком и

$$\mathcal{K}(p, q, t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} H(p, q, t, \omega) + i\tilde{H}(p, q, t, \omega)$$

— некоторая комплексная бесконечно дифференцируемая функция в фазовом пространстве, зависящая от параметров $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ и удовлетворяющая условию $\text{Im } \mathcal{K}(p, q, t, \omega) = \tilde{H}(p, q, t, \omega) \leq 0$. Для построения нужного нам семейства лагранжевых многообразий с комплексным ростком мы используем тот же прием, что и при построении лагранжева многообразия $\tilde{\Lambda}^{n+1}$ с комплексным ростком в § 1 гл. VI.

Определим вначале многообразие $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ в пространстве переменных (t, q, p_0, p) , полагая

$$\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega) = \{t, q = q(\alpha, t, \omega), p_0 = H(p(\alpha, t, \omega), q(\alpha, t, \omega), t, \omega), \\ p = p(\alpha, t, \omega)\},$$

где $p(\alpha, t, \omega), q(\alpha, t, \omega)$ — решения системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(p, q, t, \omega), & q(0) = q(\alpha), \\ \dot{p} = -H_q(p, q, t, \omega), & p(0) = p(\alpha). \end{cases}$$

Аналогично § 1 гл. VI можно проверить, что при каждом фиксированном ω $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ есть лагранжево многообразие. Определим на $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ комплексные функции $z(\alpha, t, \omega), w(\alpha, t, \omega)$ как решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{z} = i\tilde{H}_p + \mathcal{K}_{pq}z + \mathcal{K}_{pp}w, & z(0) = z(\alpha), \\ \dot{w} = -i\tilde{H}_q - \mathcal{K}_{qp}w - \mathcal{K}_{qq}z, & w(0) = w(\alpha). \end{cases}$$

Здесь у функций $\tilde{H}$ и $\mathcal{K}$ опущены аргументы (p, q, t, ω) .

Определим еще диссипацию

$$D(\alpha, t, \omega) = D_0(\alpha) - \int_0^t \tilde{H} dt$$

и потенциал

$$E(\alpha, t, \omega) = E_0(\alpha) - \frac{i}{2} \int_0^t (\langle \omega, \hat{H}_q \rangle + \langle z, \hat{H}_p \rangle + \hat{H}) dt.$$

Введем, наконец, фазу на $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ по формуле (мы рассмотрим здесь лишь случай неособой карты неособой зоны. В остальных картах фаза определяется аналогично):

$$\Phi(\alpha, t, \omega) = -\frac{1}{2} \langle z(\alpha, t, \omega), w(\alpha, t, \omega) \rangle + \mu(\alpha, t, \omega) + s(\alpha, t, \omega) + E(\alpha, t, \omega).$$

Легко проверить, что многообразие $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ с определенными на нем функциями z , w , D и E удовлетворяет аксиомам роста (см. § 1 гл. VI).

Аналогично § 1 гл. VI мы будем говорить, что лагранжево многообразие с комплексным ростом $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ построено с помощью семейства комплексных канонических преобразований $g_{H+i\tilde{H}}^t(\omega)$.

Дословно повторяя все приведенные нами рассуждения, определим канонический оператор $\mathcal{K}_{\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)}$ аналогично равенствам (3.12), (3.13), (3.14).

Легко видеть, что определенный таким образом оператор есть непрерывное отображение

$$\mathcal{K}_{\tilde{\Lambda}^{n+1}}: [C_0^\infty(\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega))]_{\Gamma(\omega)} \rightarrow [C^\infty(R^n, C(0,1))],$$

где через $\Gamma(\omega)$ мы обозначили множество точек многообразия $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$, в которых функции $z(\alpha, t, \omega)$ и $w(\alpha, t, \omega)$ обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$-ih \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{K}(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{x}, t, \omega, h) \psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = \mathcal{K}_{\Lambda^n} \tilde{\Phi}, \quad (3.36)$$

где $\overset{\cdot}{p} = -ih \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathcal{K}(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{x}, t, \omega, h)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Im} \mathcal{K}(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{x}, t, \omega, 0) = \hat{H}(\overset{\cdot}{p}, \overset{\cdot}{x}, t, \omega) \leq 0,$$

$\mathcal{K}_{\Lambda^n}$ — канонический оператор на начальном лагранжевом многообразии Λ^n . Обозначим через $\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)$ семейство лагранжевых многообразий с комплексным ростом, определенное выше.

Аналогично теореме 3.2 доказывается утверждение:

Теорема 3.3. Асимптотическое разложение решения задачи (3.36) определяется равенством

$$\psi(x, t, \omega, h) = \mathcal{K}_{\tilde{\Lambda}^{n+1}(\omega)} \Phi,$$

где Φ удовлетворяет условиям

$$R_H(\omega) \Phi = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \tilde{\Phi}.$$

§ 4. Доказательство основной теоремы

Прежде чем переходить к доказательству основной теоремы в ее простейшем варианте, мы отметим несколько простых обстоятельств.

Поскольку при $p=0$ функции $L_i(x, p)$ обращаются в x_i (что следует из их построения), то функция $f(L(x, p), \alpha)$ (где $L = (L_1, \dots, L_n)$) при $p=0$ равна $f(x, \alpha)$. Следовательно, из условий асимптотической p -квазиоднородности ($p = (p_1, \dots, p_{n+m})$) для гамильтониана следует асимптотическая p' -квазиоднородность символа $\hat{f}(x, \alpha)$, где $p' = (p_1, \dots, p_n)$.

Лемма 4.1. Пусть $f_0(x, \alpha)$ — старшая часть $f(x, \alpha)$ и пусть p' -квазиоднородная функция $F(x, \alpha)$ на многообразии

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k)^{2/p_k} = 1 \right\} \times M^m$$

обращается в нуль в окрестности нулей функции $f_0(x, \alpha)$. Тогда существует последовательность $v_N \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$, удовлетворяющая соотношению

$$\begin{aligned} \llbracket f(A_1, \dots, A_n, \overset{n+1}{B}) \rrbracket \llbracket v_N(A_1, \dots, A_n, \overset{n+1}{B}) \rrbracket = \\ = F(A_1, \dots, A_n, \overset{n+1}{B}) + R_N(A_1, \dots, A_n, \overset{n+1}{B}), \end{aligned}$$

где $R_N \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$, $R_N(x_1, \dots, x_n; \alpha) = O(|x|^{-N})$, т. е. стремится к нулю быстрее $|x|^{-N}$ при $x \rightarrow \infty$ со всеми производными.

Доказательство этой леммы приведено в Приложении I.

Из этой леммы следует, что, не уменьшая общности, вместо единицы в правой части ((9.1), стр. 94) можно рассматривать оператор, носитель символа которого лежит в окрестности нулей функции $f_0(x, \alpha)$.

Отметим также следующее. Выберем любое конечное покрытие многообразия $M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k)^{2/p_k} = 1 \right\} \times M^m$ открытыми множествами $\{U_i, i=1, \dots, s\}$, возьмем отвечающее ему разбиение единицы $\{e_i, i=1, \dots, s\}$, $e_i = e_i(x_1, \dots, x_n; \alpha)$ и затем рассмотрим набор p -квазиоднородных функций $F_i(x, \alpha) = e_i(x_1 \Lambda_0(x)^{-p_1}, \dots, x_n \Lambda_0(x)^{-p_n}; \alpha)$, где $\Lambda_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^{2/p_k} \right)^{1/2}$. Очевидно, $\sum_{i=1}^s F_i(x, \alpha) \equiv 1$.

Тогда, если мы найдем такие функции $v_N^{(i)}(x, \alpha)$, $R_N^{(i)}(x, \alpha)$, $i=1, \dots, s$, где $R_N^{(i)} = O_{\mathcal{S}}(|x|^{-N})$, что

$$\llbracket f(A, \overset{2}{B}) \rrbracket \llbracket v_N^{(i)}(A, \overset{2}{B}) \rrbracket = F_i(A, \overset{2}{B}) + R_N^{(i)}(A, \overset{2}{B}),$$

то их сумма $v_N = \sum_{i=1}^s v_N^{(i)}$ даст решение исходной задачи:

$$\|f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})\| \|v_N(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})\| = 1 + \sum_{i=1}^s R_N^{(i)}(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}).$$

Покрытие $\{U_i\}$ многообразия M_1 мы выберем с учетом условий поглощения (Введение, § 9, пункт 3). Пусть множества U_i и константы T_i таковы, что $0 < T_i \leq \tau'(q^0, \omega, 0, 0)$ и

$$\tilde{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, T_i); q(q^0, \omega, p^0, \eta, T_i); \omega; \eta) < 0$$

при $(q^0, \omega, p^0, \eta) \in \Omega_e$, $(q^0, \omega) \in U_i$, $i = 1, \dots, s$ (см. формулировку условий поглощения). В силу непрерывности функций $\tilde{H}$, p , q такое покрытие $\{U_i, i = 1, \dots, s\}$ и набор констант $\{T_i, i = 1, \dots, s\}$ существуют при достаточно малом ε .

Тем самым, в силу предыдущих рассуждений, мы сводим задачу о квазиобращении к решению уравнения вида

$$\|f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})\| \|v_N(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})\| = F(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) + R_N(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}), \quad (4.1)$$

$$R_N(x, \alpha) = O_{\mathcal{L}}(|x|^{-N}),$$

где функция $F(x, \alpha)$ — квазиоднородна степени 0 по переменным x , равна нулю в окрестности нулей функции Гамильтона $H(0, q, \omega, 0)$ и для некоторого $T > 0$ справедливо неравенство

$$\tilde{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, T); q(q^0, \omega, p^0, \eta, T); \omega; \eta) < 0,$$

при $(q^0, \omega, p^0, \eta) \in \Omega_e$, $(q^0, \omega) \in \supp_{(x, \alpha) \in M_1} F(x, \alpha)$.

Обозначим через $(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) \equiv (\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha})$ набор упорядоченных операторов, являющихся представлением образующих нильпотентной алгебры $(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B})$. В силу правил редукции решение указанного выше уравнения сводится к задаче Коши (см. стр. 101) для гамильтониана

$$f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\|L_1(\overset{1}{x}, i\partial/\partial x, -i\partial/\partial \alpha)\|, \dots, \|L_n(\overset{1}{x}, i\partial/\partial x, -i\partial/\partial \alpha)\|, \overset{n+1}{\alpha}).$$

По предположению этот гамильтониан является асимптотически ρ -квазиоднородной функцией степени r относительно переменных $y_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$, $y_{n+j} = -i\partial/\partial \alpha_j$, $1 \leq j \leq m$, где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$, причем $\rho_{n+1} = \rho_{n+2} = \dots = \rho_{n+m} = 1$.

Мы должны найти такую функцию $\psi_N(\alpha, \eta, x, t)$, $\psi_N \in C_{\mathcal{L}}^\infty$, которая удовлетворяла бы следующим условиям:

$$\| -i\overset{1}{L}^{r-1} \frac{\partial}{\partial t} + (\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) \| \psi_N(\overset{2}{\alpha}, i\partial/\partial x, \overset{1}{x}, t) = B_N(\overset{2}{\alpha}, i\partial/\partial x, \overset{1}{x}, t), \quad (4.2)$$

$$\psi_N(\overset{2}{\alpha}, i\partial/\partial x, \overset{1}{x}, 0) = P(\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}) \cdot \rho(i\partial/\partial x).$$

Здесь $B_N(\alpha, \eta, x, t)$ — некоторая функция класса C^∞_∞ , убывающая при $x \rightarrow \infty$ быстрее $|x|^{-N}$, где N — сколь угодно большое; функция ρ такова, что $\rho \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, носитель ρ содержится в шаре радиуса ε , $\rho(\eta) = 1$ в окрестности точки $\eta = 0$.

Операторы в задаче (4.1) рассматриваются в шкале $\{H^s_r(\mathbb{R}^n \times M^m)\}$ с нормами

$$\|\varphi\|_{H^s_r} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \alpha \in M^m}} \left\{ (1 + |x|)^r \sum_{|\beta| + |\gamma| = 0}^s \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^\gamma \varphi(x, \alpha) \right| \right\}$$

(ср. гл. IV, § 13).

Очевидно, для любой ограниченной функции $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$ функция $B_N u$ убывает быстрее $|x|^{-N}$ при $x \rightarrow \infty$ и, кроме того, $B_N u \in C^\infty_\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$. Мы возьмем $u(x, \alpha) \equiv 1$.

Если носитель функции $\psi_N(\alpha, \eta, x, t)$ по переменным $x = (x_1, \dots, x_n)$ компактен, то функция

$$\left[-i\lambda'^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \right] \psi_N\left(\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \alpha}, t\right) u(x, \alpha)$$

убывает при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-N}$. Поэтому, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что носитель $\psi_N(\alpha, \eta, x, t)$ принадлежит области $|x| > c > 0$.

Обозначим через $\Lambda = \Lambda(x)$ функцию

$$\Lambda(x) = \begin{cases} c/2 & \text{при } |x| < c/2 \\ \Lambda_0(x) & \text{при } |x| > c \end{cases}, \quad \Lambda \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Тогда в задаче Коши (4.2) вместо оператора Λ_0 можно поставить оператор Λ .

Преобразуем теперь гамильтониан $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$. Прежде всего отметим, что условия асимптотической ρ -квазиоднородности некоторой функции $\varphi(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ можно записать следующим образом: для любого $\lambda > 0$ справедливо представление:

$$\varphi(\lambda^{\rho_1} \xi_1, \dots, \lambda^{\rho_n} \xi_n) = \sum_{j=0}^k \lambda'^j \varphi_j(\xi) + \lambda'^{-1} \varphi_{k+1}(\xi, \lambda),$$

где $r_0 > r_1 > \dots > r_k$, φ_j есть ρ -квазиоднородная функция степени r_j , $\text{Im } \varphi_j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, k$, $\varphi_{k+1} \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, функция $\varphi_{k+1}(\xi, \lambda)$ и все ее производные по ξ ограничены по λ .

Поэтому асимптотически ρ -квазиоднородную функцию $\varphi(\xi)$ можно представить в виде

$$\varphi(\xi) = \lambda'^0 \left\{ \sum_{j=0}^k \lambda'^j \lambda^{-r_0} \varphi_j(\lambda^{-\rho} \xi) + \lambda^{-1} \varphi_{k+1}(\lambda^{-\rho} \xi, \lambda) \right\}, \quad (4.3)$$

где обозначено $\lambda^{-\rho} \xi \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda^{-\rho_1} \xi_1, \dots, \lambda^{-\rho_n} \xi_n)$.

Числа $r_0 - r_j$ при $j = 1, 2, \dots, k$ будем обозначать через ε_j и с каждой ρ -квазиоднородной функцией будем ассоциировать набор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ (очевидно, $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, \dots, n$).

С помощью представления (4.3) оператор $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})$ записывается в виде:

$$f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) = f_0 \left(\overset{2}{L}_1 \left(\overset{1'}{\Lambda}^{-\rho_1} x, i \frac{\partial}{\partial x}, -i \overset{1'}{\Lambda}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \dots \right. \\ \left. \dots, \overset{n+1}{L}_n \left(\overset{1'}{\Lambda}^{-\rho_n} x, i \frac{\partial}{\partial x}, -i \overset{1'}{\Lambda}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \overset{n+2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda} \right) \overset{1}{\Lambda}, \quad (4.4)$$

где через $\overset{1'}{\Lambda}^{-\rho} x$ обозначен вектор $(\overset{1'}{\Lambda}^{-\rho_1} x_1, \dots, \overset{1'}{\Lambda}^{-\rho_n} x_n)$, а функция $f_0(L(\omega, \eta, \rho_0), \alpha, \Lambda)$ от аргументов

$$\alpha \in M^m, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_0 = (\rho_0^{(1)}, \dots, \rho_0^{(m)}) \in \mathbb{R}^m, \quad \Lambda \in \left[\frac{c}{2}, \infty \right)$$

имеет вид:

$$f_0(L(\omega, \eta, \rho_0), \alpha, \Lambda) = \mathcal{H}_1(\alpha, \eta, \rho_0, \omega, \kappa_1) + \\ + (-i \overset{1'}{\Lambda}^{-1}) \mathcal{H}_2(\alpha, \eta, \rho_0, \omega, \Lambda). \quad (4.5)$$

В последней формуле $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}^\infty$, $\text{Im } \mathcal{H}_1 \leq 0$, функция $\mathcal{H}_2(\alpha, \eta, \rho_0, \omega, \Lambda)$ ограничена вместе со всеми производными при $\Lambda \rightarrow \infty$, $\kappa_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^{-\varepsilon_1}, \dots, \Lambda^{-\varepsilon_k})$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ набор, ассоциированный с ρ -квазиоднородной функцией f_0 .

Из равенств (4.4), (4.5), используя лемму 2, стр. 526, получим выражение для гамильтониана:

$$f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) = \overset{1'}{\Lambda} \left[\overset{2}{\mathcal{H}}_1 \left(\overset{2}{\alpha}, i \frac{\partial}{\partial x}, -i \overset{1'}{\Lambda}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{1}{x} \overset{1'}{\Lambda}^{-\rho}, \overset{1'}{\Lambda}^{-\varepsilon} \right) + \right. \\ \left. + (-i \overset{1'}{\Lambda}^{-1}) \overset{2}{\mathcal{H}}_2 \left(\overset{2}{\alpha}, i \frac{\partial}{\partial x}, -i \overset{1'}{\Lambda}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{1}{x} \overset{1'}{\Lambda}^{-\rho}, \overset{1'}{\Lambda} \right) \right], \quad (4.6)$$

где функция $\overset{2}{\mathcal{H}}_3 \in \mathcal{S}^\infty$ выражается явно через $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ с помощью указанной леммы, $\overset{2}{\mathcal{H}}_3$ ограничена с производными при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Задачу (4.2), в которой гамильтониан $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})$ имеет вид (4.6), мы решим с помощью теории канонического оператора на лагранжевом многообразии с комплексным ростком, развитой в этой главе.

Обозначим

$$\overset{2}{\mathcal{H}}_0(X_0, X; P_0, P; \omega, \kappa_1, \kappa_2) \stackrel{\text{def}}{=} \overset{2}{\mathcal{H}}_1(X_0, X, P_0, \omega + \Lambda^{1-\rho} P, \Lambda^{-\varepsilon})$$

где

$$X_0 \in M^m, \quad X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P_0 \in \mathbb{R}^m, \\ P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n, \\ \kappa_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^{-\varepsilon_1}, \dots, \Lambda^{-\varepsilon_k}), \quad \kappa_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^{1-\rho_1}, \dots, \Lambda^{1-\rho_n}).$$

Функция $\mathcal{H}_0$ зависит гладко от параметров ω , κ_1 и κ_2 при $\omega \in \mathbb{R}^n$ и $\kappa_1 \rightarrow 0$, $\kappa_2 \rightarrow 0$. При $\kappa_1 \rightarrow 0$, $\kappa_2 \rightarrow 0$ функция $\mathcal{H}_0$ сходится к функции Гамильтона $\mathcal{H}$, отвечающей оператору $f(A_1, \dots, A_n, B)$ (см. определение функции Гамильтона в § 9 Введения).

Функцию $\mathcal{H}_0$ будем рассматривать в фазовом пространстве

$$\{(X_0, X; P_0, P)\} = (M^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{m+n}.$$

Обозначим $M^m \times \mathbb{R}^n$ через M^{m+n} , а фазовое пространство — через T^*M^{m+n} . Очевидно, что M^{m+n} — лагранжево многообразие. Из условия асимптотической ρ -квазиоднородности гамильтониана следует, что $\text{Im } \mathcal{H}_1 \leq 0$ и, следовательно,

$$\text{Im } \mathcal{H}_0 \leq 0.$$

Обозначим $H_0 = \text{Re } \mathcal{H}_0$ и рассмотрим систему бихарактеристик

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_0}{\partial t} &= \frac{\partial H_0}{\partial P_0}(X_0, X, P_0, \omega + \kappa_2 P, \kappa_1), \quad X_0|_{t=0} = \alpha, \\ \frac{\partial X_k}{\partial t} &= \frac{\partial H_0}{\partial P_k}(X_0, X, P_0, \omega + \kappa_2 P, \kappa_1), \quad X_k|_{t=0} = \eta, \\ k &= 1, \dots, n; \\ \frac{\partial P_0}{\partial t} &= -\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X_0, X, P_0, \omega + \kappa_2 P, \kappa_1), \quad P_0|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial P_k}{\partial t} &= -\frac{\partial H_0}{\partial X_k}(X_0, X, P_0, \omega + \kappa_2 P, \kappa_1), \quad P_k|_{t=0} = 0, \\ k &= 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (4.7)$$

В силу условий поглощения, наложенных на предельную функцию Гамильтона $\mathcal{H} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{H}_0$, когда параметры системы (4.7) лежат в области Ω_ε , решение этой системы существует при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Поэтому по теории возмущений легко построить асимптотическое решение системы (4.7), т. е. такие функции $X_0, X, P_0, P \in C^\infty$, которые удовлетворяют системе (4.7) по mod Λ^{-N} , где N — сколь угодно большое.

Обозначим через $g_{H_0 + i\tilde{H}_0}^t(\omega, \kappa_1, \kappa_2)$ сдвиг вдоль этого асимптотического решения.

Очевидно, что все свойства комплексного роста сохраняются, если решение системы Гамильтона заменить на указанное асимптотическое решение системы (4.7).

Следовательно, семейство

$$(M_t^{m+n}, r_t^{m+n}) = g_{H_0 + i\tilde{H}_0}^t\{M^{m+n}, 0\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

построенное из M^{m+n} с помощью преобразований $g_{H_0 + i\tilde{H}_0}^t(\omega, \kappa_1, \kappa_2)$, будет семейством лагранжевых многообразий с комплексным

ростком (здесь число T определено в условии теоремы) и будет гладко зависеть от параметров $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $t \in (0, T)$ и κ_1, κ_2 . Как доказано выше, семейству (M_t^{m+n}, r_t^{m+n}) отвечает лагранжево многообразие (M^{m+n+1}, r^{m+n+1}) (с краем при $t=0$ и $t=T$) с комплексным ростком в $(2(n+m)+2)$ -мерном фазовом пространстве $T^*M^{m+n} \times \mathbb{R}^2$. Это многообразие, очевидно, при достаточно малых κ_1 и κ_2 будет гладко зависеть от параметров ω .

Пусть $\mathcal{K}^\Lambda$ — канонический оператор на (M^{m+n+1}, r^{m+n+1}) , отвечающий параметру $h = \Lambda^{-1}$.

Как видно из формул (4.2), (4.6) мы должны рассмотреть следующую задачу Коши;

$$\begin{aligned} \left[-i\Lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K}_1 + (-i\Lambda^{-1}) \mathcal{K}_3 \right] \psi \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, x, t \right) &= 0, \\ \psi \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, x, 0 \right) &= \rho \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) P \left(x, \alpha \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где у операторов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$ опущены аргументы, указанные в формуле (4.6).

Покажем, что приближенное решение задачи (4.8) имеет вид

$$\psi_N \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, x, t \right) = (\mathcal{K}^\Lambda \varphi_N) \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \omega, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}, t \right), \quad (4.9)$$

где φ_N — некоторая функция из $\mathcal{S}^\infty(M^{m+n+1})$, $\omega = [x\Lambda^{-\rho}]$.

Прежде всего отметим, что в силу выбора начального многообразия M^{m+n}

$$(\mathcal{K}^\Lambda \varphi_N)(\alpha, \eta, \omega, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}, t)|_{t=0} = \varphi_N(\alpha, \eta, \omega, t)|_{t=0}.$$

Поэтому оператор (4.9) удовлетворяет начальным условиям задачи Коши (4.8), если положить

$$\varphi_N(\alpha, \eta, \omega, 0) = \rho(\eta) P(\omega, \alpha). \quad (4.10)$$

Применив к обеим частям уравнения (4.8) преобразование Фурье $F_{x \rightarrow y}^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + (\mathcal{K}_1 + (-i\hbar) \mathcal{K}_3) \right] \left(\alpha, y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \hbar^2 \right) \times \\ \times \psi \left(\alpha, y, -i \frac{\partial}{\partial y}, t \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\hbar$ — оператор $\Lambda^{-1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \equiv \left(\sum_{k=1}^n \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^{1/\rho_k} \right)^{-1/2}$.

Докажем вспомогательную лемму.

Пусть канонический оператор $\mathcal{K}^{1/\hbar}$ задан mod $(\hbar^\infty)$ на лагранжевом многообразии M с комплексным ростком, зависящим от параметра $\omega \in \mathbb{R}^n$ так, что $(\mathcal{K}^{1/\hbar} \varphi)(y, \omega) \in C_{\mathcal{L}}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда

$$H \left(y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \omega \right) (\mathcal{K}^{1/\hbar} \varphi) = (\mathcal{K}^{1/\hbar} R \varphi)(y, \omega),$$

где $H \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$ — некоторая функция Гамильтона, R_H — оператор на многообразии M (см. теорему 3.1).

Лемма 4.2. В сформулированных условиях справедлива формула коммутации (mod $O(\hbar^\infty)$)

$$[H(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}})] \cdot [(\mathcal{K}^{1/\hbar} \Phi)(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}})] = (\mathcal{K}^{1/\hbar} R_H \Phi)(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}}).$$

Доказательство. Пара вектор-операторов $A_1 = i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}}$, $A_2 = \overset{\circ}{y}$ являются образующими нильпотентной алгебры. Их упорядоченное представление (см. Введение, § 9) имеет вид $(\overset{\circ}{L}_1, \overset{\circ}{L}_2)$, где $\overset{\circ}{L}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_1} + x_1$, $\overset{\circ}{L}_2 = x_2$.

Тогда для $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $g \in C^\infty_x(\mathbb{R}^{2n})$ имеет место формула (см. § 13, гл. IV):

$$[f(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2)] \cdot [g(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2)] = [\chi(\overset{\circ}{A}_1, \overset{\circ}{A}_2)],$$

где $\chi(x_1, x_2) = f(L_1, L_2) g$.

Отсюда, учитывая условие леммы, получим:

$$\begin{aligned} [H(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}})] \cdot [(\mathcal{K}^{1/\hbar} \Phi)(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}})] &= \\ &= \left[H(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}} + \omega) ((\mathcal{K}^{1/\hbar} \Phi)(\overset{\circ}{y}, \omega)) \right] \Big|_{\omega = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}}, \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{y}} = \\ &= [(\mathcal{K}^{1/\hbar} R_H \Phi)(\overset{\circ}{y}, \omega)] \Big|_{\omega = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}}, \overset{\circ}{y} = \overset{\circ}{y}} = (\mathcal{K}^{1/\hbar} R_H \Phi)(\overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь построенный выше канонический оператор $\mathcal{K}^\Lambda$; заменим Λ на $1/\hbar$.

Из теоремы 3.1 следует формула

$$\begin{aligned} [-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + (\mathcal{K}_1 + (-i\hbar) \mathcal{K}_3)(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{\alpha}}, -i\hbar^0 \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{y}} + \omega, \hbar^e)] \times \\ \times (\mathcal{K}^{1/\hbar} \Phi_N) = (-i\hbar) (\mathcal{K}^{1/\hbar} R_N \Phi_N)(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{y}, \omega, \hbar^{0-1}, \hbar^e, t) + \\ + \hbar^N \chi_N(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{y}, \omega, \hbar, t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где χ_N — некоторая бесконечно дифференцируемая функция, ограниченная при $\hbar \rightarrow 0$, а оператор R_N имеет следующий вид:

$$R_N = \frac{d}{dt} + q + \sum_{k=1}^{2N-1} (-i\hbar)^{k/2} R_N^{(k)}, \quad (4.13)$$

где q — гладкая функция на многообразии M^{m+n+1} ; $R_N^{(k)}$ — операторы на этом многообразии (см. теорему 3.1).

Заметим, что остаток $\chi_N(\alpha, y, \omega, h, t)$ в формуле (4.12) по аргументу y вместе со всеми производными убывает быстрее любой степени $|y|^{-k}$ при $y \rightarrow \infty$. Действительно, преобразование Фурье переводит функции из C_0^∞ в класс S функций, убывающих со всеми производными быстрее любой степени $|y|^{-k}$ при $y \rightarrow \infty$. Поэтому канонический оператор $\mathcal{K}^{1/h}$ на лагранжевом многообразии M переводит функцию $\varphi \in C_0^\infty(M)$ в функцию $(\mathcal{K}^{1/h}\varphi) \in S$.

Поскольку гамильтониан $\mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial y}, -ih\frac{\partial}{\partial y}\right)$ при $\mathcal{H}(x, p) \in \mathcal{S}^\infty$ переводит пространство S в себя, то утверждение об убывании остатка $\chi_N(\alpha, y, \omega, h, t)$ по аргументу y доказано.

Теперь подставим в (4.11) оператор

$$\psi_N\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih\frac{\partial}{\partial y}, t\right) = (\mathcal{K}^{1/h}\varphi_N)\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, h^{0-1}, h^e, t\right).$$

Учитывая лемму 4.2 и формулу (4.12), получим

$$\begin{aligned} & \left[-ih\frac{\partial}{\partial t} + (\mathcal{K}_1 + (-ih)\mathcal{K}_3) \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, h^e \right) \right] \times \\ & \quad \times (\mathcal{K}^{1/h}\varphi_N) \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, h^{0-1}, h^e, t \right) = \\ & = (-ih)(\mathcal{K}^{1/h}R_N\varphi) \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, h^{0-1}, h^e, t \right) + \\ & \quad + h^N\chi_N \left(\alpha, \frac{\partial}{\partial y}, -ih^0\frac{\partial}{\partial y}, h, t \right). \end{aligned}$$

Подставим сюда $h = \Lambda^{-1} \left(-i\frac{\partial}{\partial y} \right)$ и совершим преобразование Фурье $F_{y \rightarrow x}$. Получим

$$\begin{aligned} & \left[-i\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + (\mathcal{K}_1 + (-ih)\mathcal{K}_3) \right] \times (\mathcal{K}^{1/h}\varphi_N) \left(\alpha, i\frac{\partial}{\partial x}, \omega, \Lambda^{1-0}, \Lambda^{-e}, t \right) = \\ & = (-i\Lambda^{-1})(\mathcal{K}^{1/h}R_N\varphi) \left(\alpha, i\frac{\partial}{\partial x}, \omega, \Lambda^{1-0}, \Lambda^{-e}, t \right) + \\ & \quad + \Lambda^{-N}\chi_N \left(\alpha, i\frac{\partial}{\partial x}, \omega, \Lambda^{-1}, t \right), \quad (4.14) \end{aligned}$$

где $\omega_k = \Lambda^{-0_k}x_k$, $k = 1, \dots, n$, а у операторов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3$ опущены следующие аргументы:

$$\left(\alpha, i\frac{\partial}{\partial x}, -i\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial \alpha}, \Lambda^{1-0}, \Lambda^{-e} \right).$$

В силу (4.14) и (4.6) для приближенного решения задачи Коши (4.2) достаточно найти функцию φ_N , удовлетворяющую соотношению

$$R_N\varphi_N = 0 \quad (\text{mod } O_D(\Lambda^{-N})).$$

Учитывая формулу (4.13), из этого уравнения и условия (4.10) функция φ_N находится по теории возмущений (ср. стр. 403).

Тем самым найдено искомое приближенное решение задачи Коши (4.2) для оператора $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})$ (см. лемму 4 Приложения 2).

Действительно, остается лишь проверить, что при $t=T$ функция

$$\psi_N(\alpha, \eta, x, t) = (\mathcal{K}^{\Lambda} \varphi_N)(\alpha, \eta, \omega, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}, t) \quad (4.15)$$

убывает быстрее любой степени $|x|^{-N}$ при $x \rightarrow \infty$.

Бихарактеристики (X, P) , отвечающие функции H_0 (см. (4.7)), зависят от параметров κ_1, κ_2 , причем, в пределе при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ эти бихарактеристики совпадают с бихарактеристиками, отвечающими функции $H \equiv \text{Re } \mathcal{K}$ (системы (9.11), см. Введение, § 9). По условию теоремы для последних выполнены условия поглощения. Следовательно, они выполнены и на бихарактеристиках, отвечающих H_0 , если число c достаточно велико*). Именно, при $t=T$ и достаточно большом c справедливо неравенство:

$$\text{Im } \mathcal{K}_0(X_0, X; P_0, P; \omega, \kappa_1, \kappa_2) \leq -\delta < 0.$$

Отсюда и из построения канонического оператора (см. § 3) $\mathcal{K}^{\Lambda}$ следует, что при $x \rightarrow \infty$ функция $\mathcal{K}^{\Lambda} \varphi_N|_{t=T}$ убывает при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой степени Λ^{-N} . Непосредственно проверяется, что формула (9.8) Введения дает решение задачи (4.1), если ψ_N определяется формулой (4.15).

Доказательство основной теоремы в общей форме, сформулированной в пункте 4 § 9 Введения, проводится аналогично. Здесь мы подробно рассмотрим лишь сведение более общих условий поглощения (пункт 4) к обычным условиям (пункт 3 § 9 Введения), а также наметим аналог предыдущего доказательства для случая оператора $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \xi)$, зависящего от параметра ξ (но не зависящего от эталона r).

Общие условия поглощения пункта 4 § 9 Введения существенно отличаются от обычных условий лишь в случае, когда множество Ω_0 является несвязным, т. е. состоит из замкнутых непересекающихся частей $\Omega_0^{(i)}$, $i=1, \dots, s$. Им отвечают непересекающиеся части множества Ω_ε , на каждой из которых функция

$$\tilde{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau'); q(q^0, \omega, p^0, \eta, \nu, \tau'); \omega; \nu, \eta)$$

по условию строго больше или строго меньше нуля. Поэтому, как уже было продемонстрировано в начале этого параграфа, можно выбрать некоторое покрытие многообразия M_1 и соответствующее ему разбиение единицы так, что задача о квазиобра-

*) В силу замечания, сделанного в начале доказательства теоремы, $\Lambda(x) \geq c/2$.

щении сведется к уравнениям $fg_N^{(i)} = F^{(i)} + R_N^{(i)}$, $i = 1, \dots, s$, где на носителе $F^{(i)}$ мнимая часть функции Гамильтона $\tilde{H}(p|_{\tau=\tau}; q|_{\tau=\tau}; \omega, \nu, \eta)$ отрицательна (если она положительна, то все уравнение умножаем на -1 и получаем уравнение с отрицательной мнимой частью). Таким образом, общий случай сводится к случаю обычных условий поглощения.

Рассмотрим теперь гамильтониан $f(\llbracket L(x, i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial \alpha}) \rrbracket; \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\xi})$, не зависящий от эталона и являющийся $(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n, \rho_{n+1})$ -квазиоднородной функцией степени r по аргументам $(-i\frac{\partial}{\partial \alpha} = x_0, x_1, \dots, x_n; \overset{2}{\xi})$, причем $\rho_0 = \rho_{n+1} = 1$. Тогда оператор $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\xi})$ можно, аналогично предыдущему, представить в виде суммы (ср. (4.6)):

$$f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\xi}) = \overset{1}{\Lambda}' \llbracket \mathcal{H}_1(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial x}, -i\overset{1}{\Lambda}^{-1}\frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{1}{\Lambda}^{-\rho_1}x, \overset{1}{\nu}, \overset{1}{\Lambda}^{-\varepsilon}) + \\ + (-i\overset{1}{\Lambda}^{-1}) \mathcal{H}_3(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial x}, i\overset{1}{\Lambda}^{-1}\frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{1}{\Lambda}^{-\rho_1}x, \overset{1}{\nu}, \overset{1}{\Lambda}') \rrbracket, \quad (4.16)$$

где оператор $\Lambda = \Lambda(x)$ определен выше, а через $\overset{1}{\Lambda}^{-\varepsilon}$, $\overset{1}{\Lambda}^{-\rho_1}x$, как и выше, обозначаются векторы

$$\Lambda^{-\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^{-\varepsilon_1}, \dots, \Lambda^{-\varepsilon_n}), \quad \varepsilon_j > 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \overset{1}{\Lambda}^{-\rho_1}x \stackrel{\text{def}}{=} (\overset{1}{\Lambda}^{-\rho_1}x_1, \dots, \overset{1}{\Lambda}^{-\rho_n}x_n).$$

Тогда в предположении, что пространство функций, на котором действует гамильтониан, таково, что оператор $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{-1}\Lambda$ ограничен (см. ниже), функция $\mathcal{H}_3(\alpha, \eta, \rho_0, \omega, \nu, \Lambda)$ будет ограничена при $\Lambda \rightarrow \infty$, равномерно по всем параметрам.

По правилу редукции задача о квазиобращении оператора $f(\overset{1}{A}_1, \dots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, \overset{2}{\xi})$ сводится к задаче Коши вида (4.2) для гамильтониана $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\xi})$. Гамильтониан затем представляется в виде (4.16) и весь дальнейший ход решения задачи Коши не отличается от приведенного выше. В частности, строится функция Гамильтона

$$\mathcal{H}_0(X_0, X; P_0, P, \omega, \nu, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}) \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_1(X_0, X, P_0, \omega + \Lambda^{1-\rho}P, \nu, \Lambda^{-\varepsilon}),$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — параметры, отвечающие операторам $x\Lambda^{-\rho} = (x_1\Lambda^{-\rho_1}, \dots, x_n\Lambda^{-\rho_n})$.

Функция $\mathcal{H}_0$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ переходит в функцию Гамильтона $\mathcal{H}$, отвечающую оператору $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\xi})$ (см. Введение, § 9).

Исходя из функции $\mathcal{H}_0$, как и выше, строится приближенное решение задачи Коши (4.2) в виде

$$\Psi_N \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, x, t, \xi \right) = (\mathcal{H}^1 \Phi_N) \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, \omega, v, \Lambda^{-2}, \Lambda^{1-2}, t \right), \quad (4.17)$$

где $\omega_k = x_k \Lambda^{-\rho_k}$, $v = \xi^{-1} \Lambda$.

Символ g_N элемента квазиобратной последовательности имеет вид

$$g_N(x, \alpha, \xi) = i \int_0^T \Psi_N \left(\alpha, i \frac{\partial}{\partial x}, x, t, \xi \right) \Lambda^{1-2} \varphi dt, \quad (4.18)$$

где

$$\varphi = \varphi(x; \alpha; \xi) = P_0(x_1 \xi^{-\rho_1}, \dots, x_n \xi^{-\rho_n}; \alpha),$$

где $P_0(x, \alpha)$ определена в условиях теоремы.

Носитель $\text{supp } \varphi(x; \alpha; \xi)$, очевидно, содержится в области $\Lambda(x) \leq c\xi$. Следовательно, на носителе φ функция v имеет оценку $|v| \leq c$.

Мы построили правую квазиобратную последовательность. Построение левой квазиобратной последовательности проводится аналогично, с использованием той же функции Гамильтона. Для этого достаточно заметить, что произведение

$$[g_N({}^{n+1}A_1, \dots, {}^2A_n, {}^1B)] [f({}^1A_1, \dots, {}^nA_n, {}^{n+1}B)]$$

равно

$$\begin{aligned} r_N({}^{n+1}A_1, \dots, {}^2A_n, {}^1B), r_N(x, \alpha) = \\ = f({}^{n+1}L_1^*, \dots, {}^2L_n^*, {}^1\alpha) g_N, L_f^*(\eta, x, p_0) \stackrel{\text{def}}{=} L_f(-\eta, x, -p_0). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим следующее обобщение основной задачи — задачу об отыскании приближенного решения уравнений

$$\hat{f}\hat{v} = \hat{F}, \quad \hat{w}\hat{f} = \hat{F},$$

где

$$\hat{f} = f({}^1A_1, \dots, {}^nA_n, {}^{n+1}B) \in \mathcal{A}, \quad \hat{v} \in \mathcal{L},$$

$$\hat{F} = F({}^1A_1, \dots, {}^nA_n, {}^{n+1}B_1) \in \mathcal{A}$$

произвольная функция, носитель символа которой сосредоточен в фиксированной области $\Delta \in M_1$. Элемент $\hat{v} \in \mathcal{L}$ будем называть правым Δ -обратным, а $\hat{w}$ — левым Δ -обратным.

Под приближенным решением мы понимаем такие последовательности

$$\hat{v}_N = v_N({}^1A_1, \dots, {}^nA_n, {}^{n+1}B) \quad \text{и} \quad \hat{w}_N = w_N({}^{n+1}A_1, \dots, {}^2A_n, {}^1B), \quad \text{что}$$

$$[\hat{f}]v_N = \hat{F} + \hat{R}_N, \quad [\hat{w}_N]f = \hat{F} + \hat{R}'_N,$$

где $\hat{R}_N$ и $\hat{R}_N^1 \in \mathcal{L}$ имеют символы, убывающие быстрее $|y|^{-N}$. Последовательность $\hat{v}_N$ будем называть правой Δ -квазиобратной, а $\hat{w}_N$ — левой Δ -квазиобратной.

Справедлив аналог основной теоремы для Δ -квазиобратных элементов.

Основная теорема о Δ -квазиобратных элементах отличается от основной теоремы о квазиобратных элементах лишь тем, что начальные условия α^0, q^0 в условиях поглощения (Введение, § 9) здесь принадлежит пересечению области Δ и окрестности нулей f_0 .

Теперь рассмотрим вопрос о носителе Δ -квазиобратного элемента. Из формулы для Δ -квазиобратного элемента, частный случай которой мы привели во Введении, немедленно следует, что носитель Δ -квазиобратного элемента (как левого, так и правого) принадлежит проекции пленки, образованной траекториями (Введение, (9.11)) с начальными условиями $\alpha^0, q^0 \in \Delta \cap \Omega_e$, $0 \leq t \leq T$, на многообразие M_1 . Символически это можно записать так:

$$\text{supp } v_N \subset \text{pr}_{S^{n-1} \times M^m} \bigcup_{0 \leq t \leq T} g_H^t(\Delta \cap \Omega_e),$$

где $\text{pr}_{S^{n-1} \times M^m}$ — проекция на M_1 , а $g_H^t(\Delta \cap \Omega_e)$ сдвиг области $\Delta \cap \Omega_e$ по траекториям системы Гамильтона, отвечающей функции Гамильтона H .

Задача. С помощью квантовой операции обхода фокусов получить формулу (9.14) Введения из формул (4.17), (4.18) для правой квазиобратной последовательности (в предположениях, сформулированных на стр. 109).

Отметим, далее, что основная теорема может быть обобщена на случай, когда операторы $A_1, \dots, A_n, B$ являются порождающими операторами произвольной (не nilпотентной) алгебры Ли. Точнее, в произвольной алгебре Ли можно выбрать базисные элементы $A_1, \dots, A_n, B$ так, чтобы отвечающие им элементы упорядоченного представления были псевдодифференциальными производящими операторами.

Рассмотрим нелинейную задачу о колебаниях кристалла

$$h^2 \ddot{u}_n + c^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \alpha [(u_{n+1} - u_n)^2 - (u_n - u_{n+1})^2] = 0, \quad (1)$$

$$u_n|_{t=0} = v_n, \quad h \dot{u}_n|_{t=0} = c(x) (\omega_{n+1} - \omega_n),$$

где

$$-N+1 \leq n \leq N; \quad f_{n+2N} \stackrel{\text{def}}{=} f_n.$$

От последовательностей v_n и ω_n потребуем, чтобы последовательность $(v_n + \omega_n)$ отвечала предельному распределению $g_+(x, \omega)$, а последовательность $(v_n - \omega_n)$ отвечала предельному распределению $g_-(x, \omega)$ (условия предельности). Переходим к псевдодифференциальному уравнению

$$L_h u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4c^2(x)}{h^2} \sin^2 \frac{\hat{\omega}}{2} u = 8i \frac{\alpha}{h^2} \sin \frac{\hat{\omega}}{2} \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u \right)^2, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = v(x, h),$$

$$ih \partial u / \partial t|_{t=0} = 2c(x) \sin \frac{\hat{\omega}}{2} \omega(x, h), \quad v(x, h), \omega(x, h) \in M_N, \quad (3)$$

$$\omega(x, h) \rightarrow 0, \quad v(x, h) \rightarrow 0$$

с условием предельности (аналогично Введению): для любой $a(x) \in C^\infty(S)$ (S — единичная окружность)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (v(x) \pm \omega(x)) a(x) \cos n\omega(x) \pm \omega(x) dx = \\ = \iint g_{\pm}(x, \omega) \cos n\omega a(x) dx d\omega.$$

Пусть $\varphi(x, t) \in C^\infty$, $\varphi(x, T) = 0$, $\varphi'_t(x, t) = 0$. Умножив обе части уравнения (2) на $\varphi(x, t)$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^T \int [L_h^* \varphi(x, t) u(x, t) dx dt + \int \varphi'_t(x, 0) v(x, h) dx - \\ - \int \frac{2i}{h} \sin \frac{\hat{\omega}}{2} (c(x) \varphi(x, 0)) \omega(x, h) dx = \\ = \frac{8i\alpha}{h^2} \int_0^T \int \left[\sin \frac{\hat{\omega}}{2} \varphi(x, t) \right] \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u \right)^2 dx dt; \quad (4)$$

пусть u_0 — решение задачи (2), (3) с правой частью в (2), равной нулю. Предположим, что $\alpha(h)$ таково, что $\left| \frac{h}{\alpha(h)} \right| \leq c_1$, где c_1 не зависит от h и $\sin \frac{\hat{\omega}}{2}(u - u_0)$ сильно сходится к нулю при $h \rightarrow 0$. Последнее условие означает, что амплитуды начальных данных таковы, что главным членом, определяющим осцилляции в задаче (2), (3) является решение соответствующего линейного уравнения. В высказанном предположении

$$\frac{2i}{h} \int_0^T \int \left[\sin \frac{\hat{\omega}}{2} \varphi(x, t) \right] \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u \right)^2 dx dt - \\ - \int_0^T \int \varphi'_x(x, t) \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u_0 \right)^2 dx dt = \sigma_h,$$

где $\sigma_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Тогда из равенства (4) будет следовать соотношение

$$\int_0^T \int L^* \varphi(x, t) u(x, t) dx dt + h \int \psi(x, t, h) u dx dt + \\ + \delta_h = \frac{8\alpha i}{h} \left(\int_0^T \int \varphi'_x(x, t) \left(\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u_0 \right)^2 dx dt + \delta_h \right), \quad (5)$$

где $\psi(x, t, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $L^* = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2 c^2(x)/\partial x^2$ и $\delta_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Вычислим теперь предел при $h \rightarrow 0$ интеграла $\mathcal{J}_h$, стоящего в правой части этого равенства. Система бихарактеристик для линейного уравнения имеет вид

$$\dot{X}^\pm = \mp c(X^\pm) \cos \frac{P^\pm}{2}, \quad X(0) = x^0, \\ \dot{P}^\pm = \pm 2(\partial c(X^\pm)/\partial x) \sin \frac{P^\pm}{2}, \quad P(0) = p^0. \quad (6)$$

Обозначим $v_\pm = v \pm w$. Из основной теоремы, примененной к этому случаю, следует, что

$$\sin \frac{\hat{\omega}}{2} u_0 = \sum_{\pm} \frac{1}{2} \sin \frac{\hat{\omega}}{2} K^\pm \varphi^\pm v_\pm + O(h).$$

Здесь $K^\pm$ — канонический оператор, отвечающий семейству (параметр p^0) лагранжевых поверхностей вида $\bigcup_{0 \leq t \leq T} g_t^\pm(x^0, p^0)$, где $g_t^\pm$ — сдвиг вдоль траекторий, определяемый бихарактеристиками (6), а

$$\varphi^\pm = \frac{c(x)}{c(x_0)}$$

(См. § 9 гл. V). Используя формулы § 1 гл. V и лемму 8.4 Введения получим аналогично тому, как это было сделано в п. 8 § 8 Введения,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{S}_h = \sum_{\pm} \int_0^T \varphi'_x(X^{\pm}(x^0, p^0, t), t) \times \\ \times \sin^2 \frac{p^{\pm}(x^0, p^0, t)}{2} \frac{c^2(X^{\pm}(x^0, p^0, t))}{c^2(x^0)} g_{\pm}(x^0, p^0) dx^0 dp^0 dt \quad (7)$$

Здесь учтено также, что произведение членов, отвечающих плюсу и минусу, стремится к нулю в силу метода стационарной фазы.

Пусть $F(x, t) \in C^{\infty}$, а $\varphi(x, t)$ — решение задачи $L^* \varphi = F$, $\varphi|_{t=\tau} = \varphi'|_{t=\tau} = 0$. Правая часть соотношения (5) после интегрирования по частям приводится к виду

$$\int_0^T \int F(x, t) \left\{ \sum_{\pm} \int G'_{\pm}(x, X^{\pm}(x^0, p^0, \tau), t - \tau) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \frac{p^{\pm}(x^0, p^0, \tau)}{2} \frac{c^2(X^{\pm}(x^0, p^0, \tau))}{c^2(x^0)} g_{\pm}(x^0, p^0) dx^0 dp^0 \right\}, \quad (8)$$

где $G'(x, \xi, t - \tau)$ — функция Римана решения волнового уравнения. Из (8) следует, что

$$\frac{h}{\alpha(h)} u(x, t) \rightarrow \sum_{\pm} \int_0^t \int G'_{\pm}(x, X^{\pm}(x^0, p^0, \tau), t - \tau) \times \\ \times \sin^2 \frac{p^{\pm}(x^0, p^0, \tau)}{2} \frac{c^2(x^0)}{c^2(X^{\pm}(x^0, p^0, \tau))} g_{\pm}(x^0, p^0) dx^0 dp^0 d\tau$$

при $h \rightarrow 0$.

Задача. При $t > t_5$ кривая на рис. 5 будет «выгибаться», причем точка «выгиба» (фокальная точка) будет при $t \rightarrow \infty$ приближаться к оси q , а скорость $v(t)$ движения q -координаты точки выгиба — к скорости звука. Показать, что сформировавшийся при $t = t_5$ «фронт волны» (рис. 9, 10) будет двигаться по оси q с той же скоростью $v(t)$.

В этом приложении мы докажем некоторые факты, которые используются при доказательстве теорем в §§ 2, 3 и 4 гл. VII. Все обозначения соответствуют введенным в гл. VI и VII и в § 9 Введения.

Напомним, что через $L_j(\overset{3}{i}\partial/\partial x, \overset{1}{x}, -i\overset{1}{\partial}/\partial\alpha)$, $j=1, \dots, n$ обозначаются операторы упорядоченного представления нильпотентной алгебры Ли. Кроме того, мы используем следующие сокращения:

$$\begin{aligned} x\lambda^p &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1\lambda^{p_1}, \dots, x_n\lambda^{p_n}), \\ -ih^p \frac{\partial}{\partial\eta} &\stackrel{\text{def}}{=} (-ih^{p_1} \frac{\partial}{\partial\eta_1}, \dots, -ih^{p_n} \frac{\partial}{\partial\eta_n}), \\ f(\overset{1}{[L]}, \overset{2}{\alpha}) &\stackrel{\text{def}}{=} f(\overset{1}{[L_1]}, \dots, \overset{1}{[L_n]}, \overset{n+1}{\alpha}), \\ f(L(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha}), \overset{2}{\alpha}) &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f(L_1(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha}), \dots, L_n(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha}), \overset{2}{\alpha}). \end{aligned} \quad (1)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f(g) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$ и $p_j \geq 1$, $j=1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\overset{1}{[L}(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha})), \overset{2}{\alpha}) &= \\ &= f(L(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha}), \overset{2}{\alpha}) + (ih) R_1, \end{aligned}$$

где R_1 есть некоторая функция класса $\mathcal{S}^\infty$ от упорядоченных операторов η , $x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}$, $-ih \frac{\partial}{\partial\alpha}$, α , $[L]$, ограниченная по h (при $h \rightarrow 0$) вместе со всеми производными.

Доказательство. Ниже через $[L_j]$ будем обозначать оператор $[L_j(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial\alpha})]$. С помощью K -формулы

получим:

$$\begin{aligned}
 f(\llbracket L \rrbracket, \alpha) &= f\left(L_1\left(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right), \llbracket L_2 \rrbracket, \dots, \llbracket L_n \rrbracket, \alpha\right) + \\
 &+ \sum_{k=1}^n (-ih^p) \frac{\delta L_1}{\delta \eta_k} \left(\overset{3}{\eta}_1, \dots, \overset{3}{\eta}_k, \overset{5}{\eta}_k, \dots, \overset{5}{\eta}; x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}; -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \times \\
 &\times \frac{\partial L_1}{\partial x_k} \left(\overset{5}{\eta}; x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta y_1^2} \left(L_1\left(\overset{7}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial \alpha}\right), \llbracket L_1 \rrbracket, \right. \\
 &\quad \left. \llbracket L_1 \rrbracket; \llbracket L_2 \rrbracket, \dots, \llbracket L_n \rrbracket, \alpha\right).
 \end{aligned}$$

В первом слагаемом правой части этой формулы поменяем порядок операторов $\overset{2}{\eta}$ и $\llbracket L_2 \rrbracket$, пользуясь формулой коммутации и тем фактом, что

$$[\eta_j, \llbracket L_k \rrbracket] = ih^p \Phi_{j,k} \left(\overset{2}{\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right), \quad j, k = 1, \dots, n,$$

где $\Phi_{j,k}$ — некоторый моном (см. § 13 гл. IV, где приводится вид операторов L_k). Получим:

$$\begin{aligned}
 f\left(L_1\left(\overset{2}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right), \llbracket L_2 \rrbracket, \dots, \llbracket L_n \rrbracket, \alpha\right) &= \\
 = f\left(L_1\left(\overset{3}{\eta}, x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right), \llbracket L_2 \rrbracket, \dots, \llbracket L_n \rrbracket, \alpha\right) &+ \\
 + (-ih) \sum_{k=1}^n (-ih^p)^{k-1} \Phi_{k,2} \left(\overset{4}{\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial L_1}{\partial \eta_k} \left(\overset{2}{\eta}_1, \dots, \overset{2}{\eta}_{k-1}, \overset{4}{\eta}_k, \overset{6}{\eta}_{k+1}, \dots \right. \\
 \dots, \overset{6}{\eta}_n, x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta y_1 \delta y_2} \left(\hat{L}_1, \hat{L}_1; \llbracket L_2 \rrbracket, \right. \\
 \left. \llbracket L_2 \rrbracket; \llbracket L_3 \rrbracket, \dots, \llbracket L_n \rrbracket, \alpha\right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где через $\hat{L}_1$ обозначено выражение

$$\hat{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} L_1\left(\overset{2}{\eta}_1, \dots, \overset{2}{\eta}_{k-1}, \overset{4}{\eta}_k, \overset{6}{\eta}_{k+1}, \dots, \overset{6}{\eta}_n; x - ih^p \frac{\partial}{\partial \eta}; \dots, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}\right).$$

Первое слагаемое в правой части формулы (2) преобразуем, применяя K -формулу по отношению к аргументу $\llbracket L_2 \rrbracket$ и меняя затем в первом слагаемом результата порядок действия операторов η и $\llbracket L_3 \rrbracket$.

Повторяя эту процедуру, получим формулу, приведенную в формулировке леммы, с остаточным членом

$$-ihR_1 = -ih \left(\sum_{j=1}^n r_j' + \sum_{i=1}^{n-1} r_i'' \right),$$

где

$$hr'_j = \sum_{k=1}^n (-ih^{\rho_k}) \frac{\delta L_j}{\delta \eta_k} \left(\overset{1}{\eta}_1, \dots, \overset{1}{\eta}_k, \overset{5}{\eta}_1, \dots, \overset{6}{\eta}_n; x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \times \\ \times \frac{\partial L_j}{\partial x_k} \left(\overset{5}{\eta}; x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \times \\ \times \frac{\delta^2 f}{\delta y_j^2} \left(L_1 \left(\overset{7}{\eta}, x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \dots, L_k \left(\overset{1}{\eta}, x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \right. \\ \left. \overset{2}{[L_k]}, \overset{6}{[L_k]}, \dots, \overset{n+7-k}{[L_n]}, \overset{n+8-k}{\alpha} \right),$$

$$r'_j = \sum_{l=1}^l \sum_{k=1}^n (-ih)^{\rho_k-1} \Phi_{k,j+1} \left(\overset{4}{\eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial L_j}{\partial \eta_k} \left(\overset{1}{\eta}_1, \dots, \overset{4}{\eta}_{k-1}, \overset{4}{\eta}_k, \right. \\ \left. \overset{6}{\eta}_{k+1}, \dots, \overset{6}{\eta}_n, x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \frac{\delta}{\delta y_{j+1}} \frac{\partial f}{\partial y_l} \times \\ \times \left(\overset{1}{L}_1, \dots, \overset{1}{L}_j, \overset{3}{[L_{j+1}]}, \overset{5}{[L_{j+1}]}, \overset{7}{[L_{j+2}]}, \dots, \overset{n+5-j}{[L_n]}, \overset{n+6-j}{\alpha} \right),$$

и через $\hat{L}$ обозначено выражение $L \left(\overset{2}{\eta}_1, \dots, \overset{1}{\eta}_{k-1}, \overset{4}{\eta}_k, \overset{6}{\eta}_{k+1}, \dots, \overset{6}{\eta}_n, x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Используя оценки § 13 гл. IV, получаем следующее следствие.

Следствие. Оператор R_1 ограничен равномерно по h (при $h \rightarrow 0$) в норме C_r^k для некоторого r и всех k .

Как было показано в § 13 гл. IV, оператор

$$f \left(\overset{1}{[L]} \left(i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x} h^{\rho}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \overset{2}{\alpha} \right)$$

представим в виде псевдодифференциального оператора $\psi \left(\overset{2}{\alpha}, i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x} h^{\rho}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$ с символом

$$\psi(\alpha, \eta, x, p_0) = f \left(\overset{1}{[L]} \left(\overset{2}{\eta}, x - ih^{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta}, p_0 \right), \overset{2}{\alpha} \right) 1. \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{S}^{\infty}(\mathbb{R}^n \times M^m)$. Тогда

$$f \left(\overset{1}{[L]} \left(i \frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x} h^{\rho}, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \overset{2}{\alpha} \right) = \\ = f \left(L \left(i \frac{\partial}{\partial x}, h^{\rho} x, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \overset{2}{\alpha} \right) + \\ + (-ih) f_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x}, h^{\rho} x, -ih \frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{2}{\alpha}, h \right),$$

где $f_1 \in \mathcal{S}^{\infty}$ есть некоторая функция, ограниченная по h (при $h \rightarrow 0$) со всеми производными.

Доказательство. Достаточно применить операторы, стоящие в формуле леммы 1, к функции $\varphi(\alpha)$ — т. е. к функции,

зависящей только от α . Очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} f(L(\overset{a}{\eta}, x - ih^0 \partial/\partial \eta, -ih^0 \partial/\partial \alpha), \overset{a}{\alpha}) \varphi(\alpha) = \\ = f(L(\overset{a}{\eta}, x, -ih^0 \partial/\partial \alpha), \overset{a}{\alpha}) \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Поэтому

$$f(L(\overset{a}{\eta}, x - ih^0 \partial/\partial \eta, p_0), \alpha) 1 = f(L(\eta, x, p_0), \alpha), \quad (4)$$

где 1 — единичная функция на R^n .

Утверждение леммы вытекает из формулы леммы 1 и (3), (4). Лемма доказана.

Теперь приведем доказательство основной теоремы в ее простейшем варианте (см. лемму 4.1 гл. VII).

Напомним, что через $f_0(x, \alpha)$ обозначается главная часть асимптотически ρ -квазиоднородной по переменным x функции $f(x, \alpha)$ (здесь $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$).

Лемма 3. Пусть $\mathcal{F}(x, \alpha)$ есть ρ -квазиоднородная функция от x степени s , причем $\mathcal{F}(x, \alpha) = 0$ в окрестности нулей функции $f_0(x, \alpha)$. Тогда существует функция $g_N \in \mathcal{S}^\infty(R^n \times M^m)$ такая, что

$$f(\overset{1}{L}, \overset{a}{\alpha}) g_N = \mathcal{F} + R_N,$$

где

$$|R_N(x, \alpha)| \leq c \Lambda^{-N}(x), \quad \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^{2/\rho_k} \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Как уже было отмечено в § 4 гл. VII,

$$f(x, \alpha) \equiv f(L(0, x, 0), \alpha),$$

поскольку $L_j(i\partial/\partial x, \overset{a}{\alpha}, -i\partial/\partial \alpha)$ есть полином относительно $i\partial/\partial x, -i\partial/\partial \alpha$ со свободным членом x_j .

По условию основной теоремы функция $f(L(\eta, x, p_0), \alpha)$ является асимптотически $(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}, \dots, \rho_{n+m})$ -квазиоднородной степени r по переменным $(x_1, \dots, x_n, p_0^{(1)}, \dots, p_0^{(m)})$, причем $\rho_{n+m} = \dots = \rho_{n+m} = 1$. Следовательно, при $\lambda > 0$ имеем:

$$f(L(\eta, x, p_0), \alpha) = \lambda F(L(\eta, \lambda^{-\rho} x, \lambda^{-1} p_0), \alpha, \lambda), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F(L(\eta, \lambda^{-\rho} x, \lambda^{-1} p_0), \alpha, \lambda) = \\ = \sum_{j=0}^k F_j(\eta, \lambda^{-\rho} x, \lambda^{-1} p_0, \alpha) \lambda^{-\delta_j} + F_{k+1}(\eta, \lambda^{-\rho} x, \lambda^{-1} p_0, \alpha, \lambda) \lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $F_j(\eta, x, p_0, \alpha)$, $j=0, \dots, k$, есть ρ -квазиоднородная функция степени r_j по переменным (x, p_0) , причем $r_0 = r > r_1 > \dots > r_k$; $\delta_0 = 0$, $\delta_j = r_0 - r_j$, $j=1, \dots, k$; функция $F_{k+1}(\eta, x, p_0, \lambda) \in \mathcal{S}^\infty$ ограничена по λ со всеми производными. Главная часть $F_0(\eta, x, p_0, \alpha)$ при $\eta = p_0 = 0$, очевидно, совпадает с функцией $f_0(x, \alpha)$:

$$F_0(0, x, 0, \alpha) = f_0(x, \alpha). \quad (7)$$

Используя эти формулы, преобразуем оператор $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})$. Имеем в силу (5):

$$f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}) = \overset{2}{\Lambda}' [F(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})], \quad (8)$$

где $\overset{2}{L} \stackrel{\text{def}}{=} L, (i \partial/\partial x, \overset{2}{\Lambda}^{-p} x, -i \overset{2}{\Lambda}^{-1} \partial/\partial \alpha)$.

Выражение в правой части этой формулы преобразуем с помощью леммы 2 к виду:

$$\begin{aligned} [F(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})] &= [F(L(i \partial/\partial x, \overset{2}{\Lambda}^{-p} x, -i \overset{2}{\Lambda}^{-1} \partial/\partial \alpha), \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})] + \\ &+ \overset{2}{\Lambda}^{-1} [B(i \partial/\partial x, \overset{2}{\Lambda}^{-p} x, -i \overset{2}{\Lambda}^{-1} \partial/\partial \alpha, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})], \end{aligned} \quad (9)$$

где $B(\eta, x, p_0, \alpha, \lambda)$ — некоторый символ, ограниченный по λ со всеми производными.

Теперь заметим, что оператор вида $\psi(i \partial/\partial x)$, $\psi \in \mathcal{S}^\infty$ можно всегда представить в виде разложения по формуле Тейлора:

$$\psi\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\beta|=0}^{N-1} \frac{1}{\beta!} \psi^{(\beta)}(0) \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta + \sum_{|\beta|=N} P_\beta \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta, \quad (10)$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$, $\beta! = \beta_1! \dots \beta_n!$; $\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \stackrel{\text{def}}{=} (i)^{|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$, $P_\beta \in \mathcal{S}^\infty$ — некоторая функция, которая выражается явно через производные от ψ порядка N . Пользуясь формулой (10), разложим оба оператора в правой части (9) по переменным $i \partial/\partial x$ и $-i \overset{2}{\Lambda}^{-1} \partial/\partial \alpha$. Тогда из (9) получим:

$$\begin{aligned} [F(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})] &= [F(L(0, \overset{2}{\Lambda}^{-p} x, 0), \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda})] + \\ &+ \sum_{|\gamma|=0}^{N-1} \sum_{|\beta|=1}^{N-1-|\gamma|} \overset{2}{\Lambda}^{-|\gamma|} [\Phi_{\gamma, \beta}(\overset{2}{\Lambda}^{-p} x, \overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda}) \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(-i \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^\gamma] + \\ &+ \sum_{|\gamma|=0}^{N-1} \sum_{|\beta|=N-1-|\gamma|} \overset{2}{\Lambda}^{-|\gamma|} [\Phi_{\gamma, \beta}^{(N)}(\overset{2}{\Lambda}^{-p} x, \overset{2}{\alpha}, i \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{2}{\Lambda}) \times \\ &\times \left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(-i \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^\gamma], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Phi_{\gamma, \beta}(x, \alpha, \lambda)$ и $\Phi_{\gamma, \beta}^{(N)}(x, \alpha, \eta, p_0, \lambda)$ — функции класса $\mathcal{S}^\infty$, ограниченные по λ со всеми производными; $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Обозначим через p оператор $i \overset{2}{\Lambda} \partial/\partial x$. Имеет место оценка:

$$\|\overset{2}{\Lambda}^k f(\overset{2}{\Lambda}^{-p}; i \partial/\partial x) \overset{2}{\Lambda}^{-k}(x) \varphi(x)\|_{C_0^r} \leq c_k \|\varphi\|_{C_0^s} \quad k=1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $f \in \mathcal{S}^\infty$, $\varphi \in C_0^m$ для любого m , $s=s(r)$.

Обозначим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} x_k \Lambda^{-\rho_k}$.

С помощью (11), (8) оператор $f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Lambda^{-r} [f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})] &= \{F(L(0, \omega, 0), \alpha, \Lambda) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \Lambda^{-k} \left(\sum_{|\delta|, |\gamma|=0}^{N-1} \psi_k^{\delta, \gamma}(\omega, \alpha, \Lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^\gamma \rho^\delta \right) + \\ &+ \Lambda^{-N} \psi_N(\overset{2}{\omega}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\rho}, -i \frac{\partial}{\partial \alpha}, \overset{1}{\Lambda})\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\psi_k^{\delta, \gamma}$, ψ_N — некоторые функции класса $\mathcal{S}^\infty$, ограниченные по Λ со всеми производными.

Главный член в формуле (13) в силу (6), (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} F(L(0, \omega, 0), \alpha, \Lambda) &= \\ &= f_0(\omega, \alpha) + \sum_{j=1}^k F_j(0, \omega, 0, \alpha) \Lambda^{-\delta_j} + \Lambda^{-1} F_{k+1}(0, \omega, 0, \alpha, \Lambda). \quad (14) \end{aligned}$$

В силу ρ -квазиоднородности функции $\mathcal{F}$, нам нужно найти функцию g_N , удовлетворяющую уравнению

$$\Lambda^{-r} [f(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha})] g_N = \Lambda^{s-r} \mathcal{F}(\omega, \alpha) + \Lambda^{-r} R_N. \quad (15)$$

С помощью (13), (14) это уравнение решается по теории возмущений. Функцию g_N ищем в виде

$$g_N(x, \alpha) = \Lambda^{s-r} \left(g_0(\omega, \alpha) + \sum_{m=0}^{N-1} \Lambda^{-m} g_m(\omega, \Lambda, \alpha) \right), \quad (16)$$

где $g_0(\omega, \alpha) = \frac{\mathcal{F}(\omega, \alpha)}{f_0(\omega, \alpha)} \in \mathcal{S}^\infty$.

Подставляя это разложение для g_N , а также (13), (14) в уравнение (15), получим для каждого из коэффициентов g_m уравнение вида:

$$f_0(\omega, \alpha) g_m = P_m(\overset{1}{\Lambda}, \overset{2}{\omega}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{1/f_0}, \overset{1}{\rho}, \overset{1}{\partial/\partial \alpha}) \mathcal{F}, \quad (17)$$

где $P_m(\overset{1}{\Lambda}, \overset{2}{\omega}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{1/f_0}, \overset{1}{\rho}, \overset{1}{\partial/\partial \alpha})$ — дифференциальный оператор, полиномиально зависящий от $1/f_0$. Очевидно, правая часть (17) есть функция класса $\mathcal{S}^\infty$, равная нулю в окрестности нулей функции $f_0(\omega, \alpha)$. Поэтому решение уравнения (17) существует.

Оператор ρ , очевидно, ограничен в C^k на функциях вида $\Lambda^k \phi(\omega, \alpha)$; поэтому $|g_m(\omega, \Lambda, \alpha)| \leq c_m$. Из этого же соображения следует оценка остатка R_N , который получится в (15) после всех указанных вычислений. Лемма доказана.

Перейдем еще к одному предложению, использованному в последнем параграфе главы VII. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $g(\xi, x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в 0 при $|\xi| > \xi_0$. Пусть, далее, $\rho_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, $\Lambda(x) = \left(\sum_{j=1}^n x_j^{2/\rho_j} \right)^{1/2}$,

$\omega_j(x) = x_j [\Lambda(x)]^{-\rho_j}$, $S(\xi, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция, $\Phi(\xi, x) = \Lambda(x) S(\xi, \omega(x))$. Обозначим $\operatorname{Re} \Phi = \Phi_1$, $\operatorname{Im} \Phi = \Phi_2$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу C_l^∞ , если $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция,

$$\|f\|_{C_l^s} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq s} \left| (1+x^2)^{l/2} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| < \infty$$

для любого натурального s .

Лемма 4. Пусть $g(\xi, x)$ принадлежит по совокупности переменных классу C_m^∞ , функция Φ_1 удовлетворяет условию

$$J(\xi', \xi'', x) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left(\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta \Phi_1}{\delta \xi_i}(\xi', \xi'', x) \right) \neq 0$$

при $|\xi'| \leq \xi_0$, $|\xi''| \leq \xi_0$, а функция Φ_2 неотрицательна.

Тогда оператор

$$T \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\Phi}(\xi, \frac{1}{2}) g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad p = -i\partial/\partial x$$

переводит любую функцию $f \in \widetilde{W}_2^{-s}$, $s \geq 0$ в функцию из класса $C_{-2s-2m-\frac{7}{2n}-e}^\infty$, $\forall e > 0$.

Доказательство. 1) Обозначим $T_0 = e^{i\Phi_1}(\xi, \frac{1}{2}) g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $T_0^* = e^{-i\Phi_1}(\xi, \frac{1}{2}) g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Рассмотрим оператор

$$T_0 (1+x^2)^l \varphi_r(x) T_0^* \stackrel{\text{def}}{=} A_{l,r},$$

где $\varphi_r \in C_0^\infty$, $0 \leq \varphi_r(x) \leq 1$, $\varphi_r(x) = 1$ при $|x| < r$. Справедлива формула

$$A_{l,r} = Q_{l,r}(\xi, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad (18)$$

где

$$Q_{l,r}(x, \xi', \xi'') = g(\xi', \tilde{x}(x, \xi', \xi'')) \bar{g}(\xi'', \tilde{x}(x, \xi', \xi'')) \times \\ \times (1 + \tilde{x}^2(x, \xi', \xi''))^l \varphi_r(\tilde{x}(x, \xi', \xi'')) |J^{-1}(\xi', \xi'', \tilde{x}(x, \xi', \xi''))|, \\ \tilde{x}(x, \xi', \xi'') - \text{решение уравнения}$$

$$\tilde{x} + \frac{\delta \Phi_1}{\delta \xi}(\xi', \xi'', \tilde{x}) = x.$$

Действительно, для любого $h \in C_0^\infty$

$$A_{l,r} h(x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i[-x''\xi'' + x'\xi'' - x'\xi' + x\xi' + \Phi_1(\xi', x') - \Phi_1(\xi'', x'')]} \times \\ \times g(\xi', x') g(\xi'', x') (1+x'^2)^l \varphi_r(x') h(x'') dx'' d\xi'' dx' d\xi'.$$

Производя в последнем интеграле ту же замену переменных, что и при доказательстве теоремы 1.1 главы V, получаем формулу (18).

2) Символ $Q_{l,r}$ можно оценить следующим образом: при $k > l + m + n$

$$\|Q_{l,r}\|_{\mathcal{B}_{0,k,k}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \leq c_{l,k},$$

где $c_{l,k}$ не зависит от r . Поэтому $\forall h \in C_0^\infty$, получаем, учитывая, что $(T^*u, v)_{L_1} = (u, Tv)_{L_1}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |T_0^*h(x)|^2 (1+x^2) \varphi_r(x) dx \right| &= |(h, A_{l,r}h)_{L_1}| \leq \\ &\leq \|h\|_{\widetilde{W}_2^k}^2 \|A_{l,r}\|_{\widetilde{W}_2^k \rightarrow \widetilde{W}_2^{-k}} \leq c_{l,k} \|h\|_{\widetilde{W}_2^k}^2. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим

$$\|T_0^*h\|_{\widetilde{W}_2^l}^2 \leq c_{l,k} \|h\|_{\widetilde{W}_2^k}^2,$$

так что $T_0^* \in \text{Hom}(\widetilde{W}_2^k, \widetilde{W}_2^l)$ при $k > l + m + n$. Пусть $u, v \in C_0^\infty$. Тогда

$$|(T_0u, v)_{L_1}| = |(u, T_0^*v)_{L_1}| \leq \|u\|_{\widetilde{W}_2^{-l}} \|T_0^*\|_{\widetilde{W}_2^k \rightarrow \widetilde{W}_2^l} \|v\|_{\widetilde{W}_2^k},$$

так что

$$\|T_0u\|_{\widetilde{W}_2^{-k}} \leq \|T_0^*\|_{\widetilde{W}_2^k \rightarrow \widetilde{W}_2^{-l}} \|u\|_{\widetilde{W}_2^{-l}},$$

и, значит, $T_0 \in \text{Hom}(\widetilde{W}_2^{-l}, \widetilde{W}_2^{-k})$ при $k > l + m + n$.

3) Справедлива формула

$$T = [T_0(1+x^2)] e^{-\Phi_0(\xi, x)} e^{(\frac{s}{p}, \frac{1}{x})} (1+x^2)^{-r}, \quad (19)$$

где $e(\xi, x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, $e(\xi, x) = 1$ при $|\xi| < \xi_0$ и $e(\xi, x) = 0$ при $|\xi| > 2\xi_0$. Оператор $T_0(1+x^2)^r$ принадлежит пространству $\text{Hom}(\widetilde{W}_2^{-l+2r}, \widetilde{W}_2^{-k})$ при $k > l + m + n$. Оценим символ

$$e^{-\Phi_0(\xi, x)} e(\xi, x) (1+x^2)^{-r} \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, x).$$

Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Тогда

$$\left| \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} e^{-\Phi_0(\xi, x)} e(\xi, x) \right| \leq c_{\mu\nu} (1+x^2)^{|\mu|/4},$$

откуда следует, что $h \in B_{k_0}$ при $r > \frac{k}{4} + \frac{3}{8}n$. Поэтому из (2) следует, что $\forall s \geq 0, \varepsilon > 0$

$$T \in \text{Hom}(\widetilde{W}_2^{-s}, \widetilde{W}_2^{-2s-2m-\frac{7}{2}n-\varepsilon}).$$

4) Продифференцируем функцию $Tf(x)$; если $\mathcal{P}(\xi)$ — полином, то

$$\mathcal{P}(p) Tf(x) = \mathcal{P}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ p \end{smallmatrix}\right) e^{i\Phi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ p, \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)} g\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ p, \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) f(x) = e^{i\Phi\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ p, \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)} g_1\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ p, \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) f(x),$$

где функция $g_1(\xi, x) = \mathcal{P}(\xi) g(\xi, x)$ наряду с функцией $g(\xi, x)$ удовлетворяет условиям леммы. Поэтому если $f \in \widetilde{W}_s^{-s}$, то

$$\mathcal{P}(p) Tf \in \widetilde{W}_s^{-2s-2m-\frac{7}{2}n-s},$$

и значит, функция $\mathcal{P}(p) Tf$ для любого l принадлежит пространству $H_{2s-2m-\frac{7}{2}n-s}^l$ (см. § 13, гл. IV). Для завершения доказательства остается сослаться на вложение

$$H_k^l \subset C_k^{l - \left[\frac{n}{2}\right] - 1}, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана.

Построим почти обратный оператор для оператора

$$L\gamma = \sum_{|v|=0}^N (-1)^{|v|} \frac{1}{v!} \beta^v \frac{\partial^{|v|}}{\partial \alpha^v},$$

где

$$\beta = \left(\frac{\partial(q_I + z_I, p_I + w_I)}{\partial \alpha} \right)^{-1} \begin{pmatrix} z_I - \gamma_I \\ w_I - \gamma_I \end{pmatrix}$$

и N — фиксированное целое число.

Лемма 5. Справедливо равенство:

$$L\gamma R_1 = 1 + \tilde{R}_1, \quad (21)$$

где

$$\tilde{R}_1 = \sum_{k=1}^N T_k + T^{(N)}, \quad T_k \in \mathcal{L}_{\frac{k+1}{2}, k}, \quad T^{(N)} \in \mathcal{L}_{\frac{N+1}{2}},$$

$$R_1 = \sum_{|v|=0}^N \frac{1}{v!} \beta_0^v \frac{\partial^{|v|}}{\partial \alpha^v},$$

$$\beta_0 = \left(\frac{\partial(q_I + \gamma_I, p_I + \gamma_I)}{\partial \alpha} \right)^{-1} \begin{pmatrix} z_I - \gamma_I \\ w_I - \gamma_I \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Во избежание громоздкости в вычислениях докажем равенство (21) для одномерного случая при $N=2$ в неособой карте неособой зоны.

Имеем:

$$\begin{aligned} L_1 R_1 &= 1 + q_{\alpha}^{-1} z \partial / \partial \alpha + 1/2 (q_{\alpha}^{-1} z)^2 \partial^2 / \partial \alpha^2 - (C^{-1} z) \partial / \partial \alpha - \\ &- C^{-1} z q_{\alpha} z_{\alpha} \partial / \partial \alpha - C^{-1} q_{\alpha}^{-1} z^2 \partial^3 / \partial \alpha^3 - C^{-1} (q_{\alpha}^{-1} z) z_{\alpha} \partial^3 / \partial \alpha^3 + \\ &+ 1/2 (C^{-1} z)^2 \partial^2 / \partial \alpha^2 + (C^{-1} z)^2 q_{\alpha}^{-1} z_{\alpha} \partial^2 / \partial \alpha^2 + \\ &+ 1/2 (C^{-1} z)^2 (q_{\alpha}^{-1})^2 z_{\alpha}^2 \partial^2 / \partial \alpha^2 + T_1 + T_2 + T^{(2)} = \\ &= 1 + 1/2 (q_{\alpha}^{-1} - C^{-1})^2 z^2 - C^{-1} q_{\alpha}^{-1} z^2 z_{\alpha} (q_{\alpha}^{-1} - C^{-1}) + \\ &+ 1/2 (C^{-1} q_{\alpha}^{-1} z z_{\alpha})^2 \partial^2 / \partial \alpha^2 + T_1 + T_2 + T^{(2)} = 1 + T_1 + T_2 + T^{(2)}, \end{aligned}$$

где операторы T_1 , T_2 и $T^{(2)}$ удовлетворяют утверждениям леммы, что и требовалось доказать.

Построим оператор R_N^{γ} такой, что $L^{\gamma} R_N^{\gamma} = 1 + \tilde{R}_N^{\gamma}$, где $\tilde{R}_N^{\gamma} \in \mathcal{L}_{\frac{N+1}{2}}$. Положим $R_2 = R_1 (1 - \tilde{R}_1)$. Тогда

$$L^{\gamma} R_2 = L^{\gamma} R_1 - L^{\gamma} R_1 \tilde{R}_1 = 1 - (\tilde{R}_1)^2.$$

Аналогично, полагая

$$R_N = R_{N-1} - R_1 (\tilde{R}_1)^{N-1}, \quad (22)$$

получим $L^{\gamma} R_N = 1 - (\tilde{R}_1)^N$. Из леммы 5 следует, что $\tilde{R}_1^N \in \mathcal{L}_{\frac{N+1}{2}}$.

Используя равенство (22) и определения операторов R_1 и $\tilde{R}_1$, по индукции легко доказать, что

$$R_N = 1 + \sum_{k=1}^N R_N^k + R^{(N)}; \quad R_N^k \in \mathcal{L}_{\frac{k}{2}}, \quad R^{(N)} \in \mathcal{L}_{\frac{N+1}{2}}.$$

Пусть ω_1^{γ} и ω_2^{γ} — карты зоны Ω_j роста (Λ^n, r^n) , $\omega_1^{\gamma} \cap \omega_2^{\gamma} \neq \emptyset$. Дадим определение V -оператора, действующего на функции $\varphi(\sigma, h) \in C_0^{\infty}((\omega_1^{\gamma} \cap \omega_2^{\gamma}) \times [0, 1])$ (зависящего от N , $N > 0$ — любое целое число). Пусть $\varphi(\sigma, h) \in C_0^{\infty}((\omega_1^{\gamma} \cap \omega_2^{\gamma}) \times [0, 1])$, а $\sigma(\alpha)$ — решение уравнений

$$\begin{aligned} q_I(\alpha) + \gamma_{1I}(\alpha) &= q_I(\sigma) + \gamma_{2I}(\sigma), \\ p_{\bar{I}}(\alpha) + \gamma_{1\bar{I}}(\alpha) &= p_{\bar{I}}(\sigma) + \gamma_{2\bar{I}}(\sigma). \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (23) разрешимы относительно σ на носителе функции $\varphi(\sigma, h)$, причем $\sigma(\alpha) = \alpha + O_D(h^{1/2})$ (ср. 3.11) гл. VI). Разложим функцию $\varphi(\sigma(\alpha), h)$ по формуле Тейлора в точке $\sigma = \alpha$:

$$\varphi(\sigma(\alpha), h) = \varphi(\alpha, h) + \sum_{i=1}^N (P_i \varphi)(\alpha, h) + O_D(h^{N/2}), \quad (24)$$

где $P_l \in \mathcal{L}_{l/2, 1}$. Из результатов § 3 главы VI следует равенство

$$\operatorname{Re} \Phi^{\gamma}(\sigma) + i \mathcal{S}^{\gamma}(\sigma) \Big|_{\sigma=\sigma(\alpha)} = \operatorname{Re} \Phi^{\gamma} + i \mathcal{S}^{\gamma}(\alpha) + O_D(h^{3/2-\varepsilon}),$$

где Φ^{γ} и $\mathcal{S}^{\gamma}$ — соответственно фаза и энтропия в карте ω^{γ} зоны Ω_l . Кроме того,

$$J_k(\sigma) = J_k(\alpha) + O_D(h^{1/2}).$$

Разлагая функции $e^{\pm}$ и $(z)^{-1/2}$ по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{h}} [\operatorname{Re} \Phi^{\gamma}(\sigma) + i \mathcal{S}^{\gamma}(\sigma)] (J_k(\sigma))^{-1/2} L^{\gamma} \varphi(\sigma, h) \Big|_{\sigma=\sigma(\alpha)} = \\ = e^{\frac{i}{h}} [\operatorname{Re} \Phi^{\gamma}(\alpha) + i \mathcal{S}^{\gamma}(\alpha)] (J_k(\alpha))^{-1/2} \left(\varphi(\alpha, h) + \sum_{l=1}^N (\mathcal{F}_l \varphi)(\alpha, h) \right) + \\ + O_D(h^{N/2}), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\mathcal{F}_l \in \mathcal{L}_{l/2-1\varepsilon, 1}$. Используя построенный выше почти обратный оператор к оператору L^{γ} , перепишем равенство (25) в виде

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{h}} [\operatorname{Re} \Phi^{\gamma}(\sigma) + i \mathcal{S}^{\gamma}(\sigma)] (J_k(\sigma))^{-1/2} L^{\gamma} \varphi(\sigma, h) \Big|_{\sigma=\sigma(\alpha)} = \\ = e^{\frac{i}{h}} [\operatorname{Re} \Phi^{\gamma}(\alpha) + i \mathcal{S}^{\gamma}(\alpha)] (J_k(\alpha))^{-1/2} L^{\gamma} R_N \left[\varphi(\alpha, h) + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^N (\mathcal{F}_l \varphi)(\alpha, h) + O_D(h^{N/2}) \right]. \end{aligned}$$

Положим

$$V^{\gamma \gamma_1} \varphi(\sigma, h) = R_N \left[\varphi(\alpha, h) + \sum_{l=1}^N (\mathcal{F}_l \varphi)(\alpha, h) \right]. \quad (26)$$

Из (26) следует:

$$V^{\gamma \gamma_1} \varphi(\sigma, h) = \varphi(\alpha, h) + \sum_{l=1}^N (\mathcal{F}_l \varphi)(\alpha, h) \pmod{O_D(h^{N/2})},$$

где $\mathcal{F}_l \in \mathcal{L}_{l/2-1\varepsilon, 1}$.

Пусть $\varphi(\alpha)$ — гладкая функция с носителем в неособой карте неособой зоны ω_0^{γ} . Положим

$$\begin{aligned} L\varphi(\alpha) = \sum_{|v|=0}^N \frac{1}{|v|!} \frac{\partial^{|v|}}{\partial \alpha^v} \varphi(\alpha) \beta^v, \\ \beta = -^t \left[\left(\frac{\partial(q+z)}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right] z. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть R_N — оператор, почти обратный к оператору L . Из результатов § 5 главы VI следует, что функция

$$\psi(x, t) = \frac{-L \int_0^t R_N F(q(\alpha, \tau), \tau) d\tau}{\sqrt{J_\alpha(\alpha, t)}} \exp \left\{ \int_0^t \Psi(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau) d\tau \right\} \quad (27')$$

при $N=1$ удовлетворяет уравнению переноса (5.24) (см. теорему 5.1), причем при подстановке ее в уравнение (5.24) правая часть принимает вид

$$(P_1 + P_2 + P_3) \varphi,$$

где $P_1 \in L_{1/2 - \varepsilon, 0}$, $P_2 \in L_{1 - \varepsilon, 1}$, $P_3 \in L_{1 - \varepsilon, 2}$.

Лемма 6. Пусть

$$\frac{Dq(\alpha, t)}{D\alpha} \neq 0, \quad \frac{D(q(\alpha, t) + z(\alpha, t))}{D\alpha} \neq 0$$

при $t \in [0, T]$. Тогда после подстановки в левую часть уравнения (5.24) главы VI функции $\psi(x, t)$, определенной равенством (27'),

получается выражение вида $\left(T'_1 + \sum_{k=1}^N T_k + T'_N \right) F$, где

$$T'_1 \in L_{\frac{1}{2} - \varepsilon, 0}, \quad T_k \in L_{\frac{k+1}{2} - \varepsilon, k}, \quad T'_N \in L_{\frac{N+1}{2} - \varepsilon, N+1}.$$

Доказательство. Во избежание громоздких выкладок докажем утверждение леммы в случае $N=2$. Аналогично § 5 главы VI преобразуем уравнение переноса с диссипацией к виду (ср. (5.18)):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + \langle i\hat{H}_p(p, x, t) + \mathcal{H}_{pp}(p, x, t)(w - \mathcal{E}z), \nabla_x f \rangle - \\ - \Psi(x, t)f + F(x, t) = (Q_1 + Q_2)f, \end{aligned} \quad (28)$$

где $f(x, t) = \psi(\alpha(x, t), t) \sqrt{J_\alpha(\alpha(x, t), t)}$ и $Q_1 \in L_{1/2, 0}$, $Q_2 \in L_{1, 1}$.

Предположим, что $\Psi=0$ и докажем, что в этом случае утверждение леммы справедливо для функции

$$\begin{aligned} \psi_0(x, t) = L\varphi(\alpha, t)|_{\alpha=\alpha(x, t)} = \\ = \left[\varphi - \langle z, C^{-1}\varphi_\alpha \rangle + \frac{1}{2} \langle (C^{-1})z, \varphi_{\alpha\alpha} (C^{-1})z \rangle \right]_{\alpha=\alpha(x, t)}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\varphi(\alpha, t) = - \int_0^t R_N F(q(\alpha, \tau), \tau) d\tau.$$

Пусть

$$\frac{Dq(\alpha, t)}{D\alpha} \neq 0, \quad \frac{D(q(\alpha, t) + z(\alpha, t))}{D\alpha} \neq 0 \text{ при } t \in [0, T].$$

Вычислим производные функции $\psi_0(x, t)$ по x и t . Имеем

$$\frac{\partial \psi_0(x, t)}{\partial x} = q_a^{-1} \varphi_a - q_a^{-1} z_a C^{-1} \varphi_a + g_1 \varphi - q_a^{-1} \varphi_{aa} C^{-1} z - \\ - q_a^{-1} z_a C^{-1} \varphi_a {}^t(C^{-1}) z + g_2 \varphi + g_3 \varphi,$$

где $g_1 \in L_{\frac{1}{2}, 1}$, $g_2 \in L_{1, 2}$, $g_3 \in L_{1, 3}$.

Произведя несложные преобразования, получим (ср. (5.21) гл. VI):

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = C^{-1} \varphi_a - C^{-1} \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z + (g_1 + g_2 + g_3) \varphi. \quad (29')$$

Вычислим производную $\frac{d}{dt} \psi_0(x, t)$:

$$\frac{d}{dt} \psi_0(x, t) = -LR_2 F(x, t) - \langle \dot{z}, C^{-1} \varphi_a \rangle - \langle z, (\dot{C}^{-1}) \varphi_a \rangle + \\ + \langle \frac{d}{dt} {}^t(C^{-1}) z, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle + \langle {}^t(C^{-1}) \dot{z}, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle. \quad (30)$$

С помощью равенств (2.9), (2.20), (5.22) главы VI преобразуем (30) к виду

$$\frac{d}{dt} \psi_0(x, t) = -LR_2 F(x, t) - \langle i\tilde{H}_p, C^{-1} \varphi_a \rangle - \\ - \langle \mathcal{K}_{pp} \omega, C^{-1} \varphi_a \rangle - \langle z, \mathcal{E} \mathcal{K}_{pp} C^{-1} \varphi_a \rangle + \\ + \langle {}^t(C^{-1}) \tilde{H}_p + {}^t(C^{-1}) \mathcal{K}_{pq} z + {}^t(C^{-1}) \mathcal{K}_{pp} \omega, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle - \\ - \langle {}^t(C^{-1}) (\mathcal{K}_{pq} {}^t C + \mathcal{K}_{pp} {}^t B) {}^t(C^{-1}) z, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle. \quad (31)$$

Подставим найденные значения производных $\psi_0(x, t)$ в левую часть (28). В силу равенства (5.23) главы VI достаточно рассмотреть выражение

$$(F - LR_2 F) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle {}^t(C^{-1}) z, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle - \\ - \langle i\tilde{H}_p + \mathcal{K}_{pp} (\omega - \mathcal{E} z), C^{-1} \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle + \\ + \langle i\tilde{H} + \mathcal{K}_{pp} (\omega - \mathcal{E} z), (g_1 + g_2 + g_3) \varphi \rangle. \quad (32)$$

Сумма первых трех слагаемых в (32) в силу (31) и определения оператора R_2 равна

$$\langle {}^t(C^{-1}) \tilde{H}_p + {}^t(C^{-1}) \mathcal{K}_{pq} z + {}^t(C^{-1}) \mathcal{K}_{pp} \omega, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle - \\ - \langle {}^t(C^{-1}) (\mathcal{K}_{pq} {}^t C + \mathcal{K}_{pp} {}^t B) {}^t(C^{-1}) z, \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle - \\ - \langle i\tilde{H}_p - \mathcal{K}_{pp} (\omega - \mathcal{E} z), C^{-1} \varphi_{aa} {}^t(C^{-1}) z \rangle + g_4 F = g_5 F, \quad (33)$$

где $g_4, g_5 \in \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, k}$, k — некоторое целое число (здесь мы использовали лемму 2.6 главы VI).

Из леммы 2.2 главы VI следует, что справедлива оценка $t|\tilde{H}_p| \leq D^{1/2-\varepsilon}$. Поэтому из формулы (5.23) главы VI, а также из (29'), (32), (33) следует, что при подстановке в (28) функции

$\Psi_0(x, t)$, определенной равенством (29), правая часть (28) примет вид

$$\left(T'_1 + \sum_{k=1}^2 T_k + T''_2 \right) F(x, t),$$

где $T'_1 \in \mathcal{L}_{1/2-\varepsilon, 0}$, $T_k \in \mathcal{L}_{\frac{k+1}{2}-\varepsilon, k}$, $T''_2 \in \mathcal{L}_{3/2, n}$, n — целое число.

Доказательство завершается теперь так же, как доказательство теоремы 5.1 главы VI.

Аналогично, в случае особой зоны, β в формуле (27) заменяется на $\beta\gamma$, и, при условии необращения в нуль соответствующих якобианов, остается справедливым утверждение леммы 5.

Пусть (Λ^n_t, r^n_t) — росток, полученный из начального ростка (Λ^n, r^n) с помощью канонического преобразования, отвечающего функции Гамильтона операции обхода фокусов $H(x, \xi)$. Обозначим через $\Omega^0 \subset \Lambda^n$ пересечение зон $\Omega_I \cap \Omega_K$ на Λ^n и пусть $\Omega^t \subset \Lambda^n_t$ — образ Ω^0 при этом каноническом преобразовании. Из результатов § 6 главы VI следует, что $\bigcup_t \Omega^t$ при $0 \leq t \leq \pi/2$ принадлежит некоторой зоне Ω^t_I ростка $\bigcup_t (\Lambda^n_t, r^n_t)$. Пусть $\{\omega^{\gamma_i}_t\}$ — покрытие Ω^t_I γ -картами. Обозначим через $\{\tilde{e}^{\gamma_i}(q_I, p_I, t)\}$ разбиение единицы по образам карт $\omega^{\gamma_i}_t$ при γ -дiffeоморфизме. Положим

$$e^{\gamma_i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{e}^{\gamma_i}(q_I(\alpha, t) + \gamma^t_I(\alpha, t), p_I(\alpha, t) + \gamma^t_I(\alpha, t), t).$$

Пусть $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ — операторы, введенные на стр. 487, $\hat{R}_0 = -i\Delta_\gamma$. Карте $\omega^{\gamma_k}_t$ сопоставим операторы

$$P_{k,i}(t)v = -e^{\gamma_k}(t)(J(\alpha, t))^{-1/2}L^{\gamma_k}_t \int_0^t R_N J^{1/2} \hat{R}_{i-1} v dt, \quad (33')$$

$$i = 1, 2, 3, v \in C^\infty(\Lambda^n \times [0, \pi/2]).$$

В правой части равенства (33') интегрирование ведется вдоль траекторий системы Гамильтона, соответствующей функции $H(x, \xi)$.

Лемма 7. Операторы $\hat{P}_t$, $\hat{P}^{(1)}_t$, $\hat{P}^{(0)}_t$ в лемме 2.1 главы VII имеют вид

$$\hat{P}_t(t) = \sum_k \hat{P}_{k,i}(t), \quad \hat{P}^{(0)}_t(t) = \hat{P}_t(t) \sum_k e^{\gamma_k} J^{-\frac{1}{2}} L^{\gamma_k}_t,$$

$$\hat{P}^{(1)}_t = - \int_0^{\pi/2} R_N J^{1/2} \hat{R}_{i-1} dt, \quad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. В силу результатов § 5 главы VI и леммы 5 решение уравнения (2.16) главы VII можно представить в виде

$$\psi_1(q_I, p_I, t) = \sum_k [h\hat{P}_{k,1} + \hat{P}_{k,2} + \hat{P}_{k,3}] \psi_0 \Big|_{\alpha=\sigma^Y t (q_I, p_I, t)},$$

где функция $\psi_0 = \psi_0(\alpha, t)$ определяется равенством

$$\psi_0(\alpha, t) = \sum_k e^{Y_k(t)} (J(\alpha, t))^{-1/2} L_I^{Y_k} \varphi(\alpha, h).$$

Из условий леммы 2.1 главы VII следует, что при $t \in [\pi/2 - \delta, \pi/2]$ ($\delta > 0$ — достаточно малое число) область Ω^t покрывается одной неособой картой ω^t . Из равенства (2.2) главы VII и доказательства теоремы 6.1 главы VI следует, что $L_I|_{t=\pi/2} = L_K|_{t=0}$. В силу выбора ветви функции $\sqrt{z}$ и теоремы 6.1 главы VI из предыдущих равенств следует, что операторы $\hat{P}_i(t)$ в области $\Omega^{\pi/2}$ можно представить в виде

$$\hat{P}_i = e^{i\pi/2 (\delta_{IK} - \sigma_{IK})} (J_K)^{-1/2} L_K \hat{P}_i^{(1)}.$$

Отсюда, из результатов § 5 главы VI, леммы 5 и равенства (2.5) главы VII нетрудно получить утверждения леммы.

- Аксиомы μ -структуры 36, 37, 43, 45, 46, 49, 100, 120, 122, 129
- Алгебра 120
 - банахова 167
 - коммутативная 120
 - Ли нильпотентная 97
 - нормированная 167
 - операторов 36
 - степенных рядов 22
 - с μ -структурой 36, 44
 - с единицей 120
 - топологическая 167
 - формальных степенных рядов 120
- Асимптотика квазиклассическая 51, 64, 70, 117
 - по гладкости 51
- Атлас канонический 349, 369, 384
- — весовой 499
- Базис 119, 137
- Бихарактеристики 106, 107, 116
- Бочка 124
- Вектор-оператор 280
- Вещественноподобная плоскость 418
- Гамильтониан 27, 103, 104
 - для операции обхода фокусов 469
 - комплексный 420
 - собственный 455
- Гомоморфизм 121, 143
- График замкнутой 149
 - оператора 147
- Группа 118
 - дуопараметрическая 277
 - обратимых операторов 150
 - порожденная производящим оператором 204
 - сдвигов 233
- Действие вещественное 437
 - ростковое 432
- δ -действие 421
- μ -действие 418, 452
- Диссипация 110, 407, 425, 427, 507
- μ -диффеоморфизм 422, 423
- Дополнение ортогональное 135
- Замыкание оператора 145
- Значение собственное 151
- Зона (неособая, особая) 418
- Идеал 121, 150, 168
- Изоморфизм 122
 - изометрический 125
- Индекс пути 371, 382
 - на U -лагранжевом многообразии 498
 - цепочки карт 370, 381
- Интеграл несобственный 161
- Римана 160
- Карта 349, 369
- γ -карта 422
- Квазиобратимость 94
- Δ -квазиобратимость 519
- Q -квазиоднородность 104
 - асимптотическая 105, 511
 - старшая часть 105
 - существенная часть 105
 - степень 104
- Класс характеристический 498
- эквивалентности 428
- Коммутатор 29, 120
- Компакт 123
- Композиция операторов 154
- Кратность спектра 32, 34, 97
- Кривая, ассоциированная с гамильтонианом 405
- Лагранжиан роста полный 431
- Лемма о бочке 124
- о локальных координатах 444
- Метод стационарной фазы 70, 74, 224, 361, 365, 375, 482
 - Хевисайда 11, 19
- Многообразие лагранжево 416
 - U -лагранжево 496
 - линейное 119
 - с комплексным ростком 419
 - множество выпуклое 119, 124
 - нулей роста 417
 - плотное 125
 - резольвентное 43
 - факторрезольвентное 330
- Набор производящий 264
- Неравенство Бесселя 135
- Гординга 426
- диссипативности 110, 419
- Коши — Буяковского 129
- Норма 122
 - в промежуточном пространстве 209
- Гильберта — Шмидта 152
- оператора 143
- функционала 137
- эквивалентная 194
- Носитель квазиобратного элемента 520
- компактный 127
- Область значений 142
 - определения 142
- Оболочка выпуклая 119
- линейная 119
- Образующие нильпотентной алгебры Ли 97
- V -объекты 384
- Оператор вполне непрерывный 150
 - волновой 56, 113, 117
 - вырожденный 150
 - Гильберта 235
 - дифференцирования 143, 387
 - единичный 154
 - замкнутый 145
 - канонический (к. о.) 367, 372, 379, 392, 396, 397
 - — на многообразии с ростком 500

- Оператор канонический регуляризованный 398
 — сглаженный 373
 — компактный 150
 — конечномерный 154
 — Лапласа 169
 — линейный 142
 — непрерывный 142
 — нулевой 154
 — обратный 150, 154
 — обратный 150, 154
 — ограниченный 143
 — переводящий 280
 — переноса 34, 53, 463, 466
 — перехода из карты в карту 390
 — порождающий группу 245
 — предканонический 499
 — производящий 203, 215
 — — в банаховом пространстве 204
 — —, степень, шаг 203, 279
 — псевдодифференциальный 47, 303
 — — на кривой 388
 — — на окружности 49
 — регулярный 265
 — —, степень 265
 — рождения, уничтожения 306
 — самосопряженный 158
 — сдвига 15
 — симметричный 158
 — существенно самосопряженный 158
 — тождественный 150, 154
 — умножения 144
 — унитарный 262
 — упорядоченный 22
 — Шмидта 274
 — Шредингера 107
 V-оператор 491, 506
 Операция бинарная 118
 — обхода фокусов 469
 — — квантовая 482
 — подстановки 25
 — «штриха» 26, 45
 μ -операция 23, 36, 49, 50
 Отображение дифференцируемое 163
 — полулинейное 152
 — сжатое 164

 Перестройка (гамма) 422, 443, 449, 454
 Покрытие 123
 — каноническое 422
 Поле векторное 428, 440
 Пополнение 127
 Последовательность квазиобратная 94
 — слабо ограниченная 141, 142
 — сходящаяся 141, 142
 — фундаментальная 141, 142
 — стационарная 125
 — сходящаяся 122
 — фундаментальная 123
 Потенциал 417, 508
 Правила редукции 96, 100—102
 Представление (упорядоченное) нильпотентной алгебры Ли 97, 99, 336
 — алгебры левое регулярное 167
 Преобразование адиабатическое 420, 454
 — диссипативное 420
 — каноническое 417
 — — псевдодифференциального оператора 342, 408
 — Лежандра 352, 368
 — ростка каноническое комплексное 420
 — Фурье 47, 171, 282
 — обратное 171
 J-преобразование Лежандра 421
 Проекция вектора 135
 Произведение оператора на число 154
 — операторов 154

 Произведение пространств 119
 — скалярное 129
 Производная вдоль траекторий 61, 72
 — обобщенной функции 178
 — разностная 28, 319
 — семейства операторов 316
 — функций со значениями в банаховом пространстве 160
 — Фреше 163
 Пространство банахово 123
 — — промежуточное 209
 — бесконечномерное 119
 — векторное 118
 — гильбертово 130
 — компактное 123
 — метрическое 122
 — l -мерное 119
 — нормированное 122
 — полное 123
 — предгильбертово 129
 — рефлексивное 141
 — сепарабельное 137
 — Соболева 170, 173
 — сопряженное 140, 179
 — счетномерное 137
 — фазовое 103, 416
 — функционал, интегрируемых по Бохнеру 161
 — — по Лебегу 161
 — Фурье-образов 188

 Равенство Парсеваля 136, 171
 Разбиение единиц весовое 423, 499
 Разложение спектральное 32, 34
 Разностная производная 28
 — схема 117
 Расширение оператора 144
 — — наименьшее замкнутое 145
 Регуляризатор 67, 65
 — ослабленный 55
 Резольвента оператора 151
 Решенное асимптотическое 51, 64, 65
 — — по гладкости 51
 Росток комплексный 417
 Ряд формальный степенной 120

 Свертка функций 244
 Символ k -местный 36, 49
 — на торе 48, 49
 — оператора 12, 14, 50, 217, 265, 293, 318
 — операторнозначный 331
 — растущий 327, 330
 Система алгебраическая 121
 — бихарактеристик 61, 69, 71, 103, 106, 116
 — в вариациях 417
 — Гамильтона 61, 69, 77, 103, 106, 116, 416, 425, 431
 — Гамильтона — Якоби диссипативная 416, 424
 — дифференциальных уравнений 19
 — колебаний решетки 54, 521
 — обобщенных собственных и присоединенных (с. п.) функций 271
 — ортонормированная 135
 — полная 136
 — — обобщенных с. п. функций 271
 — уравнений роста 431
 Скобки автономные 25, 295
 — Лагранжа 416, 418, 425, 435, 495
 Спектр дискретный 242
 — вектор-оператора 291
 — матрицы в S 32
 — — в R^3 35
 — оператора 151
 — пары в S 33
 — — в R^3 42, 44
 — — операторов A, B относительно T 292

- Спектр пары производящих наборов Λ, Λ'
 — относительно T 292
 — производящего вектор-набора 317
 — набора 265
 — оператора 239
 Степень оператора 154
 — производящего оператора 203, 279
 π -структура 36, 48, 50
 Сужение оператора 144
 Сумма операторов 154
 — прямая 135
 Сходимость в метрике 122
 — обобщенная 88
 — сильная 141
 — слабая 141, 142
 Теорема Банаха 147
 — Баха — Штейнгауза 149
 — Бэра 123
 — вложения 184
 — — Соболева 185
 — Лнувилля 446
 — о замкнутом графике 149
 — о неподвижной точке 164
 — о параллелограмме 131
 — осевая 109, 116, 117, 519
 — Ф. Рисса 139
 — Хана — Баха 138
 Точка неподвижная 164
 — резольвентного множества 282, 291, 292, 317
 — стационарная 70
 — фокальная 82
 Траектории гамильтоновой системы 71
 Уравнение волютовое 56
 — Гамильтона — Якоби 52, 60, 69, 71, 103
 — — с диссипацией 431
 — дифференциально-разностное 54
 — кристалла 54
 — — нелинейное 85, 521
 — переноса 53
 — — с диссипацией в зоне 460
 — разностное 17
 — роста 110, 417
 — с постоянными коэффициентами 95, 109
 — характеристик 52, 60, 69, 71, 103
 — Шредингера 107
 — — для осциллятора 70
 Условия квантования 396, 501
 — поглощения 108, 116
 Фаза на многообразии с ростом 452, 508
 — роста 421, 452
 Факторпространство 128
 Факторспектр 331
 Фокусировка в кристалле 82, 93
 Формула коммутации (перестановки индексов) 25, 29, 32, 39, 326
 — — канонического оператора с гамильтонианом 402, 407
 — — с экспонентой 27, 48, 321, 322, 335, 342, 479, 481
 — Ньютона 31, 41, 323
 — Тейлора 65, 98, 102
 К-формула 29, 30, 40
 Функционал линейный 137
 — непрерывный 137
 — ограниченный 137
 Функция Гамильтона 104, 105
 — Дирака 179, 191
 — интегрируемая 161
 — — по Бохнеру 161
 — — по Лебегу 161
 — обобщенная 171
 — порожденная комплексной функцией 197
 — разрывная 171
 — со значениями в банаховом пространстве 160
 δ -функция 193
 Черное тело 108, 109
 Шаг оператора 203, 279
 Шар 123
 Шкала банахова 279
 Шлейф осцилляций 76
 Элемент единичный 118
 — канонический 391
 — квазиобратный 94
 — нейтральный 155
 — нулевой 118
 — обратный 118
 — присоединенный 242
 — собственный 242
 — с. п. 242
 Энтальпия роста 449
 Энтропия 419
 Эталон 102
 Эффект типа Черенкова 78, 117
 Ядро 140
 — оператора 147, 155
 — тривиальное 155
 Якобиан 62, 343, 344, 347, 460, 484

R^n, C^n — n -мерные (вещественное и комплексное) арифметические пространства.

$\delta, \frac{\delta}{\delta x}$ — разностная производная 28.

$[[\dots]]$ — автономные скобки 25, 295.

$[\dots, \dots]$ — коммутатор 29.

$[\dots, \dots] \stackrel{\text{def}}{=} [[\dots, \dots]]$ 325.

$[\dots, \dots]_k$ — скобки Лагранжа 416.

$\|\dots\|_{\text{mld}}$ норма в пространстве B_{mld} 209, 264.

$\langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^h a_i b_i$.

$f * g$ — свертка функций f и g 244.

δ_{ij} — символ Кронекера.

$\text{ind}(j_1, \dots, j_n)$ — индекс цепочки карт 370, 381.

$\gamma[l]$ — индекс пути на лагранжевом многообразии 371, 381.

$\text{Ind } \gamma$ — индекс пути на U -лагранжевом многообразии 498.

g_H^f — каноническое преобразование, отвечающее гамильтониану H 417.

$g_{H+i\hbar}^f$ — комплексное каноническое преобразование 420, 425.

$\mathcal{H}^{1/\hbar}$ — канонический оператор (к. о.), отвечающий параметру $\hbar \rightarrow 0$ 500.

$\mathcal{H}^\Lambda$ — к. о., отвечающий параметру $\Lambda \rightarrow \infty$ 514.

$K_{\text{кв}}$ — квантованный канонический оператор 397.

$K_{\text{рег}}$ — регуляризованный канонический оператор 398.

$E_\lambda(\Delta), E'_\lambda(\Delta)$ — ортогональные проекторы, отвечающие интервалу 260, 261.

$U_A(f)$ — группа гомоморфизмов, порожденная оператором A 204, 280.

$\hat{T}\Phi(A_2, A_1)$ — функция от трех упорядоченных операторов 287, 293.

$\square_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — волновой оператор 56.

$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^1 v}{\partial \alpha^v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^1 v + \dots + v_n}{\partial \alpha_1^{v_1} \dots \partial \alpha_n^{v_n}},$ где $v = (v_1, \dots, v_n)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

A^* — матрица, сопряженная к A .

${}^tA$, A^t — матрица, транспонированная по отношению к A .

${}^tA^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-1})^t$.

$(x_1, \dots, x_n)^t$, ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ — вектор-столбец.

$L_4(\Omega)$ — пространство функций, интегрируемых в квадрате на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 127, 132.

$\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_N}(\mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_N})$ — банахова алгебра символов 282.

S — пространство быстро убывающих гладких функций 169.

$W_2^k(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева 170, 173.

$\tilde{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ — образ пространства Соболева при преобразовании Фурье 172.

$C_i^k(\mathbb{R}^n)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, имеющих конечную норму (337):

$$\|\varphi\|_{C_i^k} = \sup_{|\gamma|=0} \sum_{|\gamma|=0}^k (1+|x|)^i \left| \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} \varphi(x) \right|.$$

H_i^k — пополнение пространства S по норме (337):

$$\|\varphi\|_{H_i^k} = \left\| (1+|x|^2)^{i/2} \left(1 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 \right)^{k/2} \varphi \right\|_{L_1}.$$

M_N — векторное пространство, натянутое на функции $e^{ik \cdot x}$, $k=0, \pm 1, \dots, \pm N$; $x \in \mathbb{R}$ 54.

$C_{h,t}^{(s)}$ — пространство s раз дифференцируемых по x , $t \in \mathbb{R}$, 2π -периодических по x функций φ таких, что (55):

$$\sup_{0 < h < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, t; h)}{\partial x^k} \right|^2 dx \leq C_k < \infty, \quad k=0, 1, \dots, s.$$

$\mathfrak{S}^\infty$ — пространство символов μ -структуры на алгебре 36.

$C_{\mathcal{L}}^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$ — пространство символов μ -структуры на модуле $\mathcal{L}$ 50.

$O_{\mathcal{L}}(|x|^{-N})$ — функция класса $C_{\mathcal{L}}^\infty(\mathbb{R}^n \times M^m)$, для которой 50):

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\gamma O_{\mathcal{L}}(|x|^{-N}) \right| \leq C_{\nu, \gamma} |x|^{-N+2|\nu|}, \quad |\nu|, |\gamma|=0, 1, 2, \dots$$

$O_D(h^k)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, такая, что (416):

$$\left| e^{-D(x)/h} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\gamma O_D(h^k) \right| \leq C_{k, \gamma} h^{k-|\gamma|/2} \quad \text{при } k \geq \frac{|\gamma|}{2}.$$

Виктор Павлович Маслов

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ

М., 1973 г., 544 стр., с илл.

Редакторы А. А. Кириллов, Е. И. Стечкина

Техн. редактор А. П. Колесникова

Корректор Е. Я. Строева

Сдано в набор 2/X 1973 г. Подписано к печати 28/XII 1973 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 2. Физ. печ. л. 34. Условн. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 33,72. Тираж 20 000 экз, Т-20429, Цена книги 1 р, 28 к, Заказ № 1038.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26,