

Основы теории
гладких многообразий
и групп Ли

Graduate Texts in Mathematics 94

Frank W. Warner

**Foundations
of Differentiable
Manifolds
and Lie Groups**

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg Tokyo
1983

Ф. Уорнер

ОСНОВЫ ТЕОРИИ
ГЛАДКИХ
МНОГООБРАЗИЙ
И ГРУПП ЛИ

Перевод с английского
Ф. Ф. Воронова и А. В. Хохлова

под редакцией
А. А. Кириллова



Москва „Мир“ 1987

ББК 22.15
У64
УДК 514.76 + 512.81

Уорнер Ф.

У64 Основы теории гладких многообразий и групп Ли: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 304 с., ил.

Книга известного американского математика, дающая доступное и обстоятельное введение в теорию гладких многообразий и групп Ли. Наряду с классическими разделами — многообразия, тензорные поля, дифференциальные формы, интегрирование — изложены два важнейших результата: изоморфизм между четырьмя теориями когомологий и теория Ходжа гармонических форм.

Для математиков разных специальностей, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

У $\frac{1702030000-144}{041 (01)-87}$ 18-87, ч. 1

ББК 22.15

Редакция литературы по математическим наукам

Originally published © 1971 by Scott, Foresman and Co.

© 1983 by Frank W. Warner
All Right Reserved
Authorized translation from English Language
edition published by Springer-Verlag Berlin
Heidelberg New York Tokyo

© перевод на русский язык, «Мир», 1987

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В последние 10—15 лет появилось много изложений теории гладких многообразий в связи с тем, что геометрический, «бескоординатный» подход стал основным орудием во многих областях математики и теоретической физики. Такие изложения появляются и в виде отдельных книг, и как вводные главы к монографиям, посвященным более специальным вопросам. Отбор материала и уровень его сложности довольно сильно меняются от книги к книге.

Предлагаемая читателю книга Уорнера выделяется тщательностью и простотой изложения, а также наличием хорошо подобранных упражнений. Это позволяет рекомендовать ее студентам, желающим ознакомиться с теорией многообразий и групп Ли, и преподавателям, ведущим специальные курсы и семинары.

Кроме того, в книге приводится полное, не зависящее от других источников доказательство теорем де Рама и Ходжа о когомологиях и гармонических формах на гладких многообразиях. До сих пор это доказательство можно было прочитать лишь в журнальных статьях и монографиях, рассчитанных на специалистов.

Первый вариант этой монографии, опубликованный в 1971 г., оказался настолько удачным, что Springer-Verlag предложило автору второе издание в известной серии Graduate Texts in Mathematics. Я уверен, что русский перевод этой книги также найдет много читателей.

А. А. Кириллов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга дает студентам, которые интересуются любой из тех многочисленных областей математики, где используется понятие гладкого многообразия, необходимые теоретические основы. Она задумана как вводный учебник для старшекурсников¹⁾; предполагается, что читатели имеют хорошие предварительные навыки в алгебре и анализе и, кроме того, немного знакомы с теоретико-множественной топологией, накрывающими пространствами и фундаментальной группой. Книгу можно также использовать для ссылок, так как в ней есть ряд тем, изложение которых трудно отыскать в литературе, в частности полные и замкнутые в себе доказательства фундаментальных теорем де Рама и Ходжа.

Ядро книги составляют гл. 1, 2 и 4. В них включены гладкие многообразия, касательные векторы, подмногообразия, теоремы о неявной функции, векторные поля, распределения и теорема Фробениуса, дифференциальные формы, интегрирование, теорема Стокса и когомологии де Рама.

В гл. 3 излагаются основы теории групп Ли, включая связь между группами Ли и их алгебрами Ли, экспоненциальное отображение, присоединенное представление и теорему о замкнутой подгруппе. Приводится множество примеров и устанавливаются многие свойства классических групп. Глава завершается обсуждением однородных многообразий. Обычно по поводу групп Ли в течение более чем двух десятилетий ссылаются на книгу Шевалле «Теория групп Ли», которая была мне чрезвычайно полезна.

Для доказательства теоремы де Рама, которое является главной целью гл. 5, развивается аксиоматическая теория когомологий с коэффициентами в пучках. В дополнение к доказательству сильной формы теоремы де Рама, т. е. того, что задаваемый интегрированием гомоморфизм из кольца когомологий де Рама в кольцо сингулярных когомологий является изоморфизмом, доказываются существование канонических изоморфизмов между всеми классическими теориями когомологий на многообразиях. Некоторые разделы этих теорий изложены в книге. В аксиоматической теории когомологий с коэффициентами в пучках я следовал подходу А. Картана, который опубликован в трудах его семинара 1950—1951 гг.

Что же касается теоремы Ходжа, то в гл. 6 дано полное изложение локальной теории эллиптических операторов, использующее в качестве основного инструмента ряды Фурье. Предполагается, что читатель лишь немного знаком с гильбертовыми пространствами. Мне хочется поблагодарить Джерри Каждана, который потратил большую часть лета 1969 г., растолковывая мне, зачем и почему нужны различные неравенства, и существенно помог при подготовке этой главы. Большую пользу я извлек также из записок лекций Дж. Дж. Кона и Стивена Андреа, ряда статей Л. Ниренберга и книги «Дифференциальные уравнения с частными производными» Берса, Джона и Шехтера, к которой читатель может обратиться за дальнейшими ссылками на литературу.

В конце каждой главы собраны упражнения. Они являются неотъемлемой частью текста, и часто, когда в основном тексте главы приводится некоторое утверждение, а его доказательство оставляется читателю, упражнения напоминают читателю, что ему следует провести такое доказательство. Некоторые упраж-

¹⁾ В оригинале *beginning graduate-level textbook*. — *Прим. перев.*

нения вполне стандартны и приведены для проверки общего понимания главы. Многие представляют собой значительные дополнения к основному тексту; например, свойства собственных функций лапласиана и теорема Петера—Вейля, содержащиеся в упр. к гл. 6. Многие из трудных упражнений снабжены указаниями.

Несколько достойных внимания тем не вошли в книгу. Я не рассматривал комплексных многообразий, хотя читатель получит в гл. 5 один из главных инструментов для их изучения — теорию пучков. Не рассматривались и бесконечномерные многообразия, по поводу которых я отсылаю читателя к книге Ленга «Введение в теорию дифференцируемых многообразий», а также теорема Сарда и теоремы о вложении, которые читатель найдет в «Лекциях по дифференциальной геометрии» Стернберга.

Этот учебник может стать основой для нескольких различных курсов. В типичный односеместровый курс можно было бы включить основную материал гл. 1, 2 и 4, а затем либо гл. 3, либо гл. 5, либо гл. 6 в зависимости от интересов аудитории. Всю книгу можно изложить в течение годичного курса.

Студенты, желающие продолжить изучение дифференциальной геометрии, должны обратиться к таким более глубоким курсам, как «Дифференциальная геометрия и симметрические пространства» Хелгасона, «Геометрия многообразий» Бишопа и Критендена и «Основы дифференциальной геометрии» Кобаяси и Номидзу (в двух томах).

Я счастлив выразить благодарность проф. И. М. Зингеру, который обучил меня многому из того, что вошло в книгу, и чьи лекции всегда волнуют слушателей и пробуждают большой интерес к изучению предмета.

Многие люди потратили значительное время и усилия на чтение ранних вариантов моей рукописи, сделали много исправлений и ценных предложений. Отдельно я хочу поблагодарить Манфредо до Кармо, Джерри Каждана, Стюарта Ньюбергера, Марка Риффеля, Джона Торпа, Нолана Уоллача, У Хун-си и всех моих студентов в Калифорнийском университете (Беркли) и Пенсильванском университете. Особая благодарность — Джин Робинсон, Мэриан Гриффитс и Мэри Энн Хиппл за великолепную перепечатку текста и Нату Вайтробу из издательства Scott, Foresman and Company за сотрудничество, помощь и отличную работу по подготовке рукописи к изданию.

Фрэнк Уорнер

ПРЕДИСЛОВИЕ К ИЗДАНИЮ SPRINGER-VERLAG

Это издание воспроизводит оригинальное, выпущенное издательством Scott, Foresman and Company за исключением того, что были исправлены известные мне математические и типографские ошибки. К библиографии добавлено несколько названий.

Я чрезвычайно признателен всем коллегам, написавшим мне о своем опыте использования первого издания этой книги. Я получил много хороших предложений по улучшению и расширению текста и некоторое время подумывал о написании совершенно нового второго варианта. Однако многие из добавлений, которые я предполагал включить, легко найти в других великолепных источниках. Кроме того, немало коллег склоняли меня к тому, чтобы оставить книгу, как она есть. Итак, она переиздана без особых изменений. В частности, для удобства тех, кто ссылается на нее в других публикациях, сохранена нумерация разделов и страниц.

В прошедшее десятилетие были достигнуты замечательные успехи в приложении анализа (особенно теории эллиптических уравнений с частными производными) к геометрии и в приложении геометрии (особенно теории связностей в главных расслоениях) к физике. В библиографию включены ссылки на некоторые работы в этом очень интересном направлении, а также на несколько превосходных изложений различных вопросов дифференциальной и римановой геометрии, к которым студенты, возможно, захотят обратиться при чтении книги или после этого.

Наконец, я хочу поблагодарить Springer-Verlag за то, что оно предложило переиздать мою книгу в серии Graduate Text in Mathematics. Очень приятно, что она выходит из печати.

Филадельфия, Пенсильвания
Октябрь 1983

Фрэнк Уорнер

Многообразия

Введя некоторые соглашения относительно обозначений, которые будут использоваться в этой книге, мы приступим к изучению понятия дифференцируемого многообразия. Дифференцируемые многообразия — это пространства, которые локально выглядят как евклидово пространство и которые наделены специальной структурой, позволяющей перенести на них основные понятия классического анализа. В этой главе мы большей частью будем иметь дело с аналогами и следствиями фундаментальных теорем дифференциального исчисления применительно к многообразиям. Позже, в четвертой главе, будет рассмотрена теория интегрирования на многообразиях.

Используя понятие производной по направлению в евклидовом пространстве, мы введем понятие касательного вектора к дифференцируемому многообразию. Затем будем изучать отображения многообразий и то, как действуют эти отображения на касательные векторы. Мы разберем следствия классических теорем об обратной функции и неявной функции для отображений многообразий и увидим, что фундаментальная теорема существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений превращается в теорему существования и единственности для интегральных кривых векторных полей. Глава заканчивается теоремой Фробениуса о существовании и единственности интегрального многообразия инволютивного распределения на многообразии.

Предварительные замечания

1.1. Основные обозначения и терминология. Множества мы будем описывать либо перечислением элементов, например

$$\{a_1, \dots, a_n\},$$

либо выражением вида

$$\{x: P\},$$

которое обозначает множество всех x , обладающих свойством P . Выражение $a \in A$ означает, что a — элемент множества A .

Если множество A является *подмножеством* множества B (т. е. $a \in B$ для любого $a \in A$), мы будем писать $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то A *совпадает* с B , что обозначается формулой $A = B$. Отрицания для $\in$, $\subset$ и $=$ обозначаются соответственно через $\notin$, $\not\subset$ и $\neq$. Множество A называется *собственным подмножеством* множества B , если $A \subset B$, но $A \neq B$. Для *пустого множества* употребляется символ $\emptyset$. Мы будем часто обозначать семейство $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ множеств U_α , пронумерованное элементами множества A , просто через $\{U_\alpha\}$, если нет необходимости в явном упоминании множества индексов. *Объединение* множеств из набора $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ мы будем обозначать символом $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ или просто

$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Точно так же их *пересечение* будет обозначаться символом $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ или просто $\bigcap U_\alpha$.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{a: a \text{ принадлежит некоторому } U_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{a: a \text{ принадлежит каждому } U_\alpha\}.$$

Выражение $f: A \rightarrow B$ означает, что f является *отображением* множества A в множество B . В тех случаях, когда отображение описывается действием на отдельные элементы, мы будем использовать специальную стрелку $\mapsto$; например, отображение $m \mapsto f(m)$ из A в B — это отображение множества A в множество B , переводящее элемент m множества A в элемент $f(m)$ множества B . Если $U \subset A$, то $f|U$ обозначает *ограничение f на U* , и $f(U) = \{b \in B: f(a) = b \text{ для некоторого } a \in U\}$. Если $C \subset B$, то $f^{-1}(C) = \{a \in A: f(a) \in C\}$. Отображение f называется *инъективным отображением*, если $f(a) \neq f(b)$ для любых различных элементов a и b из множества A . Отображение f называется *отображением на* или *сюръективным отображением*, если $f(A) = B$.

Если $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$, то *композиция $g \circ f$* определяется как отображение

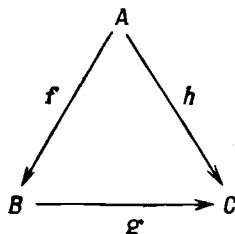
$$g \circ f: f^{-1}(B \cap C) \rightarrow D,$$

такое, что $g \circ f(a) = g(f(a))$ для любого $a \in f^{-1}(B \cap C)$. Для удобства обозначений мы не будем исключать случай $f^{-1}(B \cap C) = \emptyset$. Таким образом, имея два отображения f и g , мы будем рассматривать их композицию $g \circ f$, как она определена выше, понимая, что ее область определения вполне может быть пустой.

Прямое произведение $A \times B$ двух множеств A и B — это множество всех пар (a, b) точек $a \in A$ и $b \in B$. Если $f: A \rightarrow C$ и $g: B \rightarrow D$, то *прямое произведение $f \times g$ отображений f и g* — это отображение $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ из $A \times B$ в $C \times D$.

Тождественное отображение будет обозначаться символом id .

Диаграмму отображений вида



будем называть *коммутативной*, если $g \circ f = h$.

Термин *функция* мы будем употреблять для отображений в поле вещественных чисел.

Пусть $d \geq 1$ — целое число, и пусть

$\mathbb{R}^d = \{a: a = (a_1, \dots, a_d), \text{ где } a_i \text{ — вещественные числа}\}$.

Тогда $\mathbb{R}^d$ — это d -мерное *евклидово пространство*. В случае когда $d = 1$, *вещественная прямая* $\mathbb{R}^1$ будет обозначаться просто через $\mathbb{R}$. *Начало координат* $(0, \dots, 0)$ в евклидовом пространстве любой размерности обозначается через 0. Символы $[a, b]$ и (a, b) , как правило, обозначают промежутки числовой прямой $a \leq t \leq b$ и $a < t < b$ соответственно. Функция $r_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$r_i(a) = a_i,$$

где $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, и называется i -й (*канонической*) *координатной функцией*¹⁾ на $\mathbb{R}^d$. Каноническая координатная функция r_1 на $\mathbb{R}$ будет обозначаться просто через r . Таким образом, $r(a) = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$, то мы положим

$$f_i = r_i \circ f,$$

где функцию f_i называют i -й *компонентой отображения* f .

Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$, то *производную функции* f в t мы будем обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_t (f) = \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

¹⁾ Здесь и далее автор применяет нестандартные обозначения. Обычно не- явно отождествляют i -ю координатную функцию и ее значение на «типичном элементе» из $\mathbb{R}^n$, т. е. в обозначениях автора r_i и $r_i(a)$. Более общепринятым,

но менее четким обозначением для $\frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_t (f)$ служит $\frac{\partial f}{\partial t_i}$. То же относится к координатам и производным на многообразиях, см. далее. — *Прим. перев.*

Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, то *частную производную функции f по r_i в t* мы обозначаем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_t (f) = \frac{\partial f}{\partial r_i} \Big|_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + h, t_{i+1}, \dots, t_n) - f(t)}{h}.$$

Если $p \in \mathbb{R}^d$, то $B_p(r)$ обозначает *открытый шар* радиуса r с центром в p . Открытый шар радиуса r с центром в начале координат обозначается просто через $B(r)$. Символ $\bar{C}(r)$ означает *открытый куб* со сторонами длины $2r$ и с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Таким образом,

$$C(r) = \{(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d : |a_i| < r \text{ для всех } i\}.$$

Через $\mathbb{C}$ будет обозначаться *поле комплексных чисел*, а через $\mathbb{C}^n$ — *комплексное n -мерное пространство*

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C} \text{ для } 1 \leq i \leq n\}.$$

Если не оговорено противное, то под *окрестностью* будет пониматься *открытая окрестность*. *Замыкание* подмножества A топологического пространства обозначается через $\bar{A}$. Если функция f задана на топологическом пространстве X , то ее *носитель* — это подмножество

$$\text{supp } f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}$$

пространства X .

Мы будем пользоваться *символом Кронекера*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — набор из d целых неотрицательных чисел, то мы положим

$$[\alpha] = \sum \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$$

и

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial r_1^{\alpha_1} \dots \partial r_d^{\alpha_d}}.$$

Если $\alpha = (0, \dots, 0)$, то полагаем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r^\alpha} (f) = f.$$

Дифференцируемые многообразия

1.2. Определения. Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — открытое подмножество, и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Мы говорим, что f — *дифференцируемая функция класса C^k на U* (или просто что f *принадлежит C^k*), где k — целое неотрицательное число, если на U существуют непрерывные частные производные $\partial^\alpha f / \partial r^\alpha$ для всех $[\alpha] \leq k$. В частности, f

принадлежит классу C^0 , если она непрерывна. Если $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, то f называется *дифференцируемым отображением класса C^k* , если каждая из компонент $f_i = r_i \circ f$ принадлежит C^k . Мы будем говорить, что f принадлежит классу C^∞ , если f принадлежит C^k для любого $k \geq 0$.

1.3. Определения. *Локально евклидово пространство M размерности d* — это хаусдорфово топологическое пространство M , каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому подмножеству евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Если φ — гомеоморфное отображение связного открытого множества $U \subset M$ на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, то φ называют *координатным отображением*, функции $x_i = r_i \circ \varphi$ — *координатными функциями*¹⁾, а пару (U, φ) (иногда обозначаемую через $(U, x_1, \dots, x_d)$) — *системой координат*. Система координат (U, φ) называется *кубической*, если $\varphi(U)$ — открытый куб с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $m \in U$ и $\varphi(m) = 0$, то говорят, что *началом* данной системы координат является точка m .

1.4. Определения. *Дифференцируемая структура $\mathcal{F}$ класса C^k ($1 \leq k \leq \infty$) на локально евклидовом пространстве M* — это набор систем координат $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A\}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ принадлежит классу C^k для всех $\alpha, \beta \in A$;

(c) семейство $\mathcal{F}$ максимально, т. е. если (U, φ) — система координат, такая, что $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ и $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ принадлежат классу C^k для всех $\alpha \in A$, то $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A\}$ — произвольный набор систем координат, удовлетворяющих условиям (a) и (b), то существует единственная дифференцируемая структура $\mathcal{F}$, содержащая $\mathcal{F}_0$. А именно, положим

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi): \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ и } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ принадлежат классу } C^k \text{ для всех } \varphi_\alpha \in \mathcal{F}_0\}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{F}_0$; ясно, что она удовлетворяет условию (a), и нетрудно проверить, что она удовлетворяет условию (b). Набор $\mathcal{F}$ оказывается максимальным по построению, и, значит, он является дифференцируемой структурой, содержащей $\mathcal{F}_0$. Очевидно, что это единственная такая структура.

Упомянем еще два важных типа дифференцируемых структур на локально евклидовых пространствах, которые мы не будем рас-

¹⁾ Обычно не различают r_i и x_i . — Прим. перев.

смаивать в этой книге. Это структура класса C^ω и комплексно-аналитическая структура. Для дифференцируемой структуры класса C^ω дополнительно требуется, чтобы композиции функций в п. (b) локально задавались сходящимися степенными рядами. Для комплексно-аналитической структуры на локально евклидовом пространстве размерности $2d$ требуется, чтобы координатные системы задавались наборами функций со значениями в пространстве $\mathbb{C}^d$, а на пересечении координатных областей преобразования координат были голоморфны.

Дифференцируемым многообразием класса C^k размерности d называется пара $(M, \mathcal{F})$, состоящая из локально евклидова пространства M размерности d , удовлетворяющего второй аксиоме счетности, и дифференцируемой структуры класса C^k (аналогично определяются также многообразия класса C^ω или комплексно-аналитические многообразия). Обычно мы будем опускать $\mathcal{F}$ и обозначать дифференцируемое многообразие $(M, \mathcal{F})$ одной буквой M , понимая, что когда мы говорим о «дифференцируемом многообразии M », то подразумеваем локально евклидово пространство M с некоторой заданной дифференцируемой структурой $\mathcal{F}$. В дальнейшем наше внимание будет направлено на случай класса C^∞ , и под термином «дифференцируемое» мы всегда будем понимать «дифференцируемое класса C^∞ ». Дифференцируемость класса C^∞ принято также называть *гладкостью*, и мы будем рассматривать эти термины как синонимы. Часто мы будем называть гладкие многообразия просто многообразиями, неявно предполагая дифференцируемость класса C^∞ . Можно рассматривать многообразие как тройку, состоящую из основного точечного множества, локально евклидовой топологии на этом множестве, для которой выполняется вторая аксиома счетности, и дифференцируемой структуры. Под *структурой многообразия на множестве X* мы будем подразумевать выбор как локально евклидовой топологии, для которой выполняется вторая аксиома счетности, так и дифференцируемой структуры.

Несмотря на то что мы ограничиваемся случаем C^∞ , многие из наших теорем имеют аналоги для случая C^k , где $k < \infty$, которые не намного сложнее, чем те, которые мы докажем. При рассмотрении случая C^k , $k < \infty$, требуется просто следить за степенью дифференцируемости, потому что, дифференцируя функцию класса C^k , мы получаем функцию лишь класса C^{k-1} , если $1 \leq k < \infty$.

Если не оговорено противное, буквы M и N всегда будут обозначать дифференцируемые многообразия, а символ M^d обозначает, что M — многообразие размерности d .

1.5. Примеры

(а) Стандартная дифференцируемая структура на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ получается, если в качестве $\mathcal{F}$ взять максималь-

ный набор (в смысле п. 1.4(b)), содержащий $(\mathbb{R}^d, i)$, где $i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — тождественное отображение.

(b) Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство. Оно обладает естественной структурой многообразия. Действительно, если $\{e_i\}$ — базис пространства V , то элементы сопряженного базиса $\{r_i\}$ — это координатные функции глобальной системы координат на V . Такая глобальная система координат единственным образом определяет дифференцируемую структуру $\mathcal{F}$ на V , эта дифференцируемая структура не зависит от выбора базиса, так как замена базиса определяет преобразования координат класса C^∞ . В данном случае замена координат задается постоянной невырожденной матрицей.

(c) Комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ размерности n является вещественным векторным пространством размерности $2n$ и потому (см. пример (b)) обладает естественной структурой вещественного многообразия размерности $2n$. Если $\{e_i\}$ — стандартный комплексный базис, где e_i есть n -ка, в которой на всех местах, кроме места i , стоят нули, и на i -м месте находится единица, то

$$\{e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n\}$$

будет вещественным базисом пространства $\mathbb{C}^n$, а его дуальный базис — стандартной глобальной системой координат на $\mathbb{C}^n$.

(d) d -мерной сферой называется множество всех точек из $\mathbb{R}^{d+1}$, таких, что

$$S^d = \left\{ a \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} a_i^2 = 1 \right\}.$$

Пусть $n = (0, \dots, 0, 1)$ и $s = (0, \dots, 0, -1)$. Мы получим на S^d стандартную дифференциальную структуру, если в качестве $\mathcal{F}$ возьмем максимальное семейство, содержащее $(S^d - n, p_n)$ и $(S^d - s, p_s)$, где p_n и p_s — стереографические проекции из n и s соответственно.

(e) Открытое подмножество U дифференцируемого многообразия $(M, \mathcal{F}_M)$ само является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой

$$\mathcal{F}_U = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M\}.$$

Если не оговорено противное, открытые подмножества дифференцируемых многообразий всегда будут снабжаться такими естественными дифференцируемыми структурами.

(f) Полная линейная группа $GL(n; \mathbb{R})$ — это множество всех невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$. Если мы естественным образом отождествим точки пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ с вещественными матрицами размера $n \times n$, то определитель станет непрерывной функцией на пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Тогда $GL(n; \mathbb{R})$

получит структуру многообразия как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, на котором определитель не обращается в 0.

(г) *Произведение многообразий.* Пусть $(M_1, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2, \mathcal{F}_2)$ — дифференцируемые многообразия размерностей d_1 и d_2 соответственно. Тогда $M_1 \times M_2$ станет дифференцируемым многообразием размерности $d_1 + d_2$, если в качестве дифференцируемой структуры $\mathcal{F}$ взять максимальный набор, содержащий

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_1, (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{F}_2\}.$$

1.6. Определения. Пусть $U \subset M$ — открытое подмножество. Будем говорить, что $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ — *функция класса C^∞ на U* (обозначение: $f \in C^\infty(U)$), если композиция $f \circ \varphi^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для каждого координатного отображения φ на M . Говорят, что непрерывное отображение $\psi: M \rightarrow N$ является *дифференцируемым класса C^∞* (обозначение: $\psi \in C^\infty(M, N)$ или просто $\psi \in C^\infty$), если композиция $g \circ \psi$ является функцией класса C^∞ на множестве ψ^{-1} (область определения функции g) для всех функций g класса C^∞ , определенных на открытых множествах многообразия N . Это равносильно следующему: непрерывное отображение ψ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ принадлежит классу C^∞ для любых координатных отображений τ на M и φ на N . Функции и отображения класса C^∞ будем называть *гладкими*.

Очевидно, что композиция двух дифференцируемых отображений является снова дифференцируемым отображением. Заметим, что отображение $\psi: M \rightarrow N$ принадлежит классу C^∞ тогда и только тогда, когда для любой точки $m \in M$ существует ее открытая окрестность U , такая, что $\psi|U$ принадлежит классу C^∞ .

Вторая аксиома счетности

Из того что многообразия удовлетворяют второй аксиоме счетности, вытекает много следствий, в частности нормальность, метризуемость и паракомпактность многообразий. Паракомпактность гарантирует существование разбиения единицы, исключительно полезного инструмента для построения глобальных функций и структур из локальных и, обратно, для представления глобальных структур в виде локально конечных сумм локальных структур. Сформулировав несколько необходимых определений, мы приведем простое доказательство паракомпактности многообразий, а затем докажем существование разбиения единицы. Очевидно, что многообразия — это регулярные топологические пространства. Из этого факта и из паракомпактности следует нормальность многообразий — доказательство мы оставим читателю в качестве упражне-

ния. Доказательство того, что многообразия метризуемы, см. [13].

1.7. Определения. Набор $\{U_\alpha\}$ подмножеств многообразия M называется *покрытием* множества $W \subset M$, если $W \subset \bigcup U_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если каждое из подмножеств U_α открыто. Часть набора $\{U_\alpha\}$, которая тоже покрывает множество W , называется *подпокрытием*. *Измельчение* $\{V_\beta\}$ *покрытия* $\{U_\alpha\}$ — это такое покрытие, что для любого β существует α , такое, что $V_\beta \in U_\alpha$. Набор $\{A_\alpha\}$ подмножеств множества M называется *локально конечным*, если для любого элемента $m \in M$ существует его окрестность W_m , такая, что $W_m \cap A_\alpha \neq \emptyset$ лишь для конечного числа α . Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие имеет локально конечное измельчение.

1.8. Определение. *Разбиением единицы на многообразии M* называется набор $\{\varphi_i : i \in I\}$ функций класса C^∞ на M (здесь I — произвольное множество индексов, не обязательно счетное), таких, что

(a) набор носителей этих функций $\{\text{supp } \varphi_i : i \in I\}$ локально конечен;

(b) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ для всех $p \in M$ и $\varphi_i(p) \geq 0$ для всех $p \in M$ и $i \in I$.

Говорят, что разбиение единицы $\{\varphi_i : i \in I\}$ *подчинено* покрытию $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, если для каждого i существует α , такой, что $\text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha$. Разбиение единицы подчинено покрытию $\{U_i : i \in I\}$ с тем же множеством индексов, если $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ для каждого $i \in I$.

1.9. Лемма. Пусть X — хаусдорфово локально компактное (каждая точка имеет по крайней мере одну компактную окрестность) топологическое пространство, для которого выполнена вторая аксиома счетности (например, многообразие). Тогда оно паракомпактно. В частности, любое его открытое покрытие имеет счетное локально конечное измельчение, состоящее из открытых множеств с компактными замыканиями.

Доказательство. Сначала покажем, что существует последовательность $\{G_i : i = 1, 2, \dots\}$ открытых множеств, такая, что

$$(1) \quad \bar{G}_i \text{ — компакт, } \bar{G}_i \subset G_{i+1}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Пусть $\{U_i : i = 1, 2, \dots\}$ — счетная база топологии пространства X , состоящая из открытых множеств с компактными замыканиями. Таковую базу всегда можно построить, начиная с любой счетной базы

и выбирая в ней подпоследовательность, состоящую из множеств с компактными замыканиями. Поскольку X является хаусдорфовым и локально компактным, эта подпоследовательность сама является базой. Положим $G_1 = U_1$. Предположим, что

$$C_k = U_1 \cup \dots \cup U_{j_k}.$$

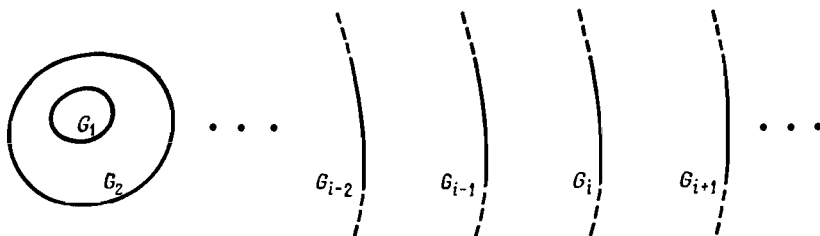
Пусть j_{k+1} — наименьшее положительное целое число, большее j_k , для которого

$$\bar{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Положим

$$G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i.$$

Итак, мы определили по индукции последовательность компактных множеств $\{G_k\}$, удовлетворяющих (1).



Пусть $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X . Множество $\bar{G}_i - G_{i-1}$ является компактом и содержится в открытом множестве $G_{i+1} - \bar{G}_{i-2}$. Для каждого $i \geq 3$ выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap (G_{i+1} - \bar{G}_{i-2}): \alpha \in A\}$ множества $\bar{G}_i - G_{i-1}$ и выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\{U_\alpha \cap G_3: \alpha \in A\}$ компакта $\bar{G}_2$. Как легко видеть, этот набор открытых множеств счетен, является локально конечным измельчением открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ и состоит из открытых множеств с компактными замыканиями.

1.10. Лемма. На $\mathbb{R}^d$ существует неотрицательная функция φ класса C^∞ , которая равна 1 на замкнутом кубе $\bar{C}(1)$ и нулю на дополнении к открытому кубу $C(2)$.

Доказательство. Нам надо представить функцию φ в виде произведения

$$(1) \quad \varphi = (h \circ r_1) \dots (h \circ r_d),$$

где h — неотрицательная функция класса C^∞ на вещественной прямой, принимающая значение 1 на отрезке $[-1, 1]$ и значение нуль вне интервала $(-2, 2)$. Построение такой функции мы начнем с функции

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

которая неотрицательна, принадлежит классу C^∞ и положительна при $t > 0$. Тогда функция

$$(3) \quad g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

тоже неотрицательна, принадлежит классу C^∞ и принимает значение 1 при $t \geq 1$ и 0 при $t \leq 0$. Мы получим нужную нам функцию h , если положим

$$(4) \quad h(t) = g(t+2)g(2-t).$$

1.11. Теорема. (Существование разбиения единицы.) Пусть M — гладкое многообразие и $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует счетное разбиение единицы $\{\varphi_i: i = 1, 2, 3, \dots\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\text{supp } \varphi_i$ для всех i . Если не требовать компактности носителей, то тогда существует разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ (т. е. $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$), в котором не более чем счетное количество φ_α отлично от 0.

Доказательство. Пусть последовательность $\{G_i\}$ покрывает M , как в 1.9(1), и возьмем в качестве G_0 пустое множество. Для элемента $p \in M$ положим i_p равным наибольшему целому числу, при котором $p \in M - \overline{G}_{i_p}$. Выберем α_p таким, что $p \in U_{\alpha_p}$, и построим систему координат (V, τ) с началом в точке p , такую, что $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G}_{i_p})$ и, кроме того, $\tau(V)$ содержит замкнутый куб $\overline{C}(2)$. Положим

$$(1) \quad \psi_p = \begin{cases} \varphi \circ \tau & \text{на } V, \\ 0 & \text{на } M - V, \end{cases}$$

где φ — функция, построенная в 1.10 (1). Поэтому ψ_p — функция класса C^∞ на M , принимающая значение 1 на некоторой открытой окрестности W_p элемента p и имеющая компактный носитель, лежащий в $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} - \overline{G}_{i_p})$. Для каждого $i \geq 1$ выберем конечное множество точек p из M так, чтобы соответствующие окрестности W_p покрывали $\overline{G}_i - G_{i-1}$. Упорядочим соответствующие функции ψ_p , составив из них последовательность ψ_j ,

$j = 1, 2, 3, \dots$. Носители функций ψ_j образуют локально конечное семейство подмножеств в M . Таким образом, функция

$$(2) \quad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i$$

является корректно определенной функцией класса C^∞ на M , и, кроме того, $\psi(p) > 0$ для каждого $p \in M$. Положим теперь для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$

$$(3) \quad \varphi_i = \psi_i / \psi.$$

Функции $\{\varphi_i: i = 1, 2, 3, \dots\}$ образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, с компактными носителями $\text{supp } \varphi_i$ для каждого i . Теперь возьмем в качестве φ_α функцию, тождественно равную нулю, если ни один из носителей $\text{supp } \varphi_i$ не лежит в U_α , и сумму тех φ_i , чьи носители лежат в U_α , в противном случае; тогда $\{\varphi_\alpha\}$ образует разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ с не более чем счетным числом ненулевых функций φ_α . Для того чтобы проверить, лежит ли носитель функции φ_α в U_α , заметим, что если $\mathcal{A}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств, то $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Отметим, что носители функций φ_α не обязательно компактны.

Следствие. Если множество G открыто в M , а множество A замкнуто в M и, кроме того, $A \subset G$, то существует функция $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^∞ , такая, что

(а) $0 \leq \varphi(p) \leq 1$ для всех $p \in M$;

(б) $\varphi(p) = 1$, если $p \in A$;

(с) $\text{supp } \varphi \subset G$.

Доказательство. На многообразии M существует разбиение единицы $\{\varphi, \psi\}$, подчиненное покрытию $\{G, M - A\}$, с носителями $\text{supp } \varphi \subset G$ и $\text{supp } \psi \subset M - A$. Эта функция φ удовлетворяет требованиям следствия.

Касательные векторы и дифференциалы

1.12. Вектор v с компонентами $v_1, \dots, v_d$ в точке p евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать как оператор на дифференцируемых функциях. Точнее, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p , то вектор v ставит в соответствие этой функции вещественное число $v(f)$, являющееся значением ее производной в точке p по направлению вектора v , т. е.

$$(1) \quad v(f) = v_1 \left. \frac{\partial f}{\partial r_1} \right|_p + \dots + v_d \left. \frac{\partial f}{\partial r_d} \right|_p.$$

Этот оператор взятия производной по направлению вектора v на дифференцируемых функциях обладает двумя важными свойствами:

$$(2) \quad \begin{aligned} v(f + \lambda g) &= v(f) + \lambda v(g), \\ v(f \circ g) &= f(p) v(g) + g(p) v(f) \end{aligned}$$

для любых функций f и g , дифференцируемых в окрестности точки p и для любого вещественного числа λ . Первое свойство означает, что оператор v линейно действует на функциях, а второе — что он является *дифференцированием*. Это обосновывает наше определение касательного вектора на многообразии. Касательный вектор будет производной по направлению, т. е. линейным дифференцированием на функциях. Операция взятия производной зависит только от локальных свойств функции, свойств в сколь угодно малых окрестностях точки, в которой берется производная. Чтобы лучше объяснить эту зависимость производной от локальных свойств функций, мы введем понятие ростков функций.

1.13. Определения. Пусть $m \in M$. Говорят, что функции f и g , определенные на открытых множествах, содержащих m , имеют одинаковый *росток* в m , если они совпадают в некоторой окрестности точки m . Тогда в пространстве функций из класса C^∞ , определенных на окрестностях точки m , можно ввести следующее отношение эквивалентности: две функции эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый росток. Классы эквивалентности называются *ростками*, и мы будем обозначать множество ростков в точке m символом $\tilde{F}_m$. Если f — функция класса C^∞ на некоторой окрестности точки m , то $\mathbf{f}$ будет обозначать ее росток. Операции сложения, скалярного умножения и умножения на функциях индуцируют на $\tilde{F}_m$ структуру алгебры над $\mathbb{R}$. Росток $\mathbf{f}$ имеет корректно определенное значение $\mathbf{f}(m)$ в точке m , а именно значение в m любого представителя этого ростка. Пусть $F_m \subset \tilde{F}_m$ — множество ростков, принимающих в m нулевое значение. Тогда F_m — это идеал алгебры $\tilde{F}_m$, и мы обозначим символом F_m^k его k -ю степень. Последняя является идеалом в $\tilde{F}_m$, состоящим из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m . Получается убывающая последовательность идеалов $\tilde{F}_m \supset F_m \supset F_m^2 \supset F_m^3 \supset \dots$.

1.14. Определение. Касательным вектором v в точке $m \in M$ называется линейное дифференцирование алгебры $\tilde{F}_m$. То есть для любых ростков $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \tilde{F}_m$ и вещественного λ выполнены следующие два условия:

$$\begin{aligned} (a) \quad v(\mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}) &= v(\mathbf{f}) + \lambda v(\mathbf{g}), \\ (b) \quad v(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \mathbf{f}(m) v(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(m) v(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

Символ M_m будет обозначать множество касательных векторов к M в точке m , которое будет называться *касательным пространством многообразия M в точке m* . Заметим, что если мы определим $(v + w)(f)$ и $(\lambda v)(f)$ формулами

$$(1) \quad \begin{aligned} (v + w)(f) &= v(f) + w(f), \\ (\lambda v)(f) &= \lambda(v(f)) \end{aligned}$$

для любых $v, w \in M_m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $v + w$ и λv также будут касательными векторами в точке m . Таким образом, мы наделили M_m структурой вещественного векторного пространства. Важным свойством векторного пространства M_m , которое мы установим в разд. 1.17, является то, что его размерность совпадает с размерностью пространства M . Сформулированное нами определение касательного вектора не подходит для случая C^k , где $1 \leq k < \infty$. (Мы обсудим случай C^k в разд. 1.21.) Мы даем такое определение касательного вектора в силу нескольких причин. Первая причина состоит в том, что это определение дано в инвариантных терминах, т. е. не зависит от системы координат. Другая — это то, что данное определение естественно обобщается на случай касательных векторов высшего порядка, как мы увидим в разд. 1.26.

1.15. Если c — росток функции с постоянным значением c на некоторой окрестности точки m и если v — касательный вектор в m , то $v(c) = 0$, так как

$$\text{и} \quad v(c) = cv(1)$$

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1v(1) + 1v(1) = 2v(1).$$

1.16. Лемма. *Существует естественный изоморфизм пространства M_m на пространство $(F_m/F_m^2)^*$. (Символ $*$ обозначает сопряженное векторное пространство.)*

Доказательство. Пусть $v \in M_m$, тогда он является линейной функцией на F_m , обращающейся в нуль на F_m^2 , в силу свойств дифференцирования. Обратно, если $l \in (F_m/F_m^2)^*$, то мы определим касательный вектор v_l в точке m , полагая $v_l(f) = l(\{f - f(m)\})$ для $f \in \tilde{F}_m$. (Здесь $f(m)$ обозначает росток функции с постоянным значением $f(m)$, а $\{ \}$ употреблены для обозначения смежных классов из F_m/F_m^2). Линейность v_l на $\tilde{F}_m$ очевидна. Кроме того, v_l — дифференцирование, потому что

$$\begin{aligned} v_l(f \cdot g) &= l(\{f \cdot g - f(m)g(m)\}) = \\ &= l(\{(f - f(m))(g - g(m)) + f(m)(g - g(m)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (f - f(m))g(m)) = \\
& = l((f - f(m))(g - g(m))) + f(m)l((g - g(m))) + \\
& + g(m)l((f - f(m))) = \\
& = f(m)v_l(g) + g(m)v_l(f).
\end{aligned}$$

Итак, мы получили отображения из M_m на $(F_m/F_m^2)^*$ и обратно. Нетрудно проверить, что эти отображения являются обратными друг другу и, таким образом, изоморфизмами.

1.17. Теорема. $\dim (F_m/F_m^2) = \dim M$.

Доказательство основано на следующей лемме из математического анализа [31].

Лемма. Если g является функцией класса C^k ($k \geq 2$) на выпуклом открытом множестве U , содержащем $p \in \mathbb{R}^d$, то для каждого $q \in U$

$$\begin{aligned}
(1) \quad g(q) &= g(p) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial r_i} \Big|_p (r_i(q) - r_i(p)) + \\
&+ \sum_{i,j} (r_i(q) - r_i(p))(r_j(q) - r_j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{(p+t(q-p))} dt.
\end{aligned}$$

В частности, если $g \in C^\infty$, то вторая сумма в (1) определяет элемент из F_p^2 , потому что стоящий в ней интеграл как функция от q принадлежит классу C^∞ .

Доказательство теоремы 1.17. Пусть (U, φ) — система координат в окрестности точки m с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$ ($d = \dim M$). Пусть $f \in F_m$. Применим (1) к функции $f \circ \varphi^{-1}$ и возьмем композицию с φ ; в результате получим

$$f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (x_i - x_i(m)) + \sum_{i,j} (x_i - x_i(m))(x_j - x_j(m)) h$$

в окрестности точки m , где $h \in C^\infty$. Имеем

$$f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (x_i - x_i(m)) \bmod F_m^2.$$

Следовательно, F_m/F_m^2 натянуто на $\{\{x_i - x_i(m)\}: i = 1, \dots, d\}$. Поэтому $\dim F_m/F_m^2 \leq d$. Мы утверждаем, что элементы $\{x_i - x_i(m)\}$ линейно независимы. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^d a_i (x_i - x_i(m)) \in F_m^2.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d a_i (x_i - x_i(m)) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^d a_i (r_i - r_i(\varphi(m))).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^d a_i (r_i - r_i(\varphi(m))) \in F_{\varphi(m)}^2.$$

Но отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial r_j} \right|_{\varphi(m)} (\sum a_i (r_i - r_i(\varphi(m)))) = 0$$

для $j = 1, \dots, d$, а это означает, что все a_i должны быть нулями.

Следствие. $\dim M_m = \dim M$.

1.18. На самом деле мы чаще будем рассматривать касательные векторы как операторы на функциях, а не на их ростках. Если f — дифференцируемая функция, определенная в окрестности точки m , и $v \in M_m$, положим

$$(1) \quad v(f) = v(f).$$

Тогда $v(f) = v(g)$ для любых f и g , совпадающих в некоторой окрестности точки m , и очевидно, что

$$(2) \quad \begin{aligned} v(f + \lambda g) &= v(f) + \lambda v(g) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ v(f \cdot g) &= f(m) v(g) + g(m) v(f), \end{aligned}$$

где $f + \lambda g$ и $f \cdot g$ определены на пересечении областей определения функций f и g .

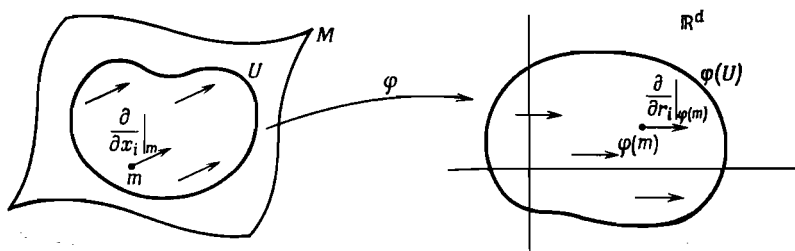
1.19. Определение. Пусть (U, φ) — система координат с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, и пусть $m \in U$. Для каждого $i \in (1, \dots, d)$ определим касательный вектор $(\partial/\partial x_i)|_m \in M_m$, полагая

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_m (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности точки m . Мы интерпретируем выражение (1) как производную функции f

в точке m по направлению x_i i -й координаты. Мы также будем использовать обозначение

$$(2) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_m = \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m \right) (f).$$



1.20. Замечания к разд. 1.19

(а) Очевидно, что $\left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m \right) (f)$ зависит только от ростка функции f в m , и пп. (а) и (b) из разд. 1.14 выполняются, т. е. $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m$ — касательный вектор в точке m . Кроме того, $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m : i = 1, \dots, d \right\}$ — базис пространства M_m . Он является базисом в M_m , сопряженным к базису $\{x_i - x_i(m)\} : i = 1, \dots, d\}$ пространства F_m/F_m^2 , потому что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m (x_j - x_j(m)) = \delta_{ij}.$$

(b) Если $v \in M_m$, то

$$v = \sum_{i=1}^d v(x_i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m.$$

Легко проверяется, что при применении к функциям $x_j - x_j(m)$ обе стороны дают одинаковые результаты.

(с) Пусть (U, φ) и (V, ψ) — системы координат в окрестности точки m с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$ и $y_1, \dots, y_d$ соответственно. Как следует из замечания (b),

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_m = \sum_{i=1}^d \left. \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right|_m \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_m.$$

Заметим, что частная производная $\partial/\partial x_i$ зависит не только от x_i , но и от φ . В частности, даже если x_1 совпадает с y_1 , то необязательно, чтобы $\partial/\partial x_1$ совпадала с $\partial/\partial y_1$.

(d) Если мы применим определение 1.19 к канонической системе координат $r_1, \dots, r_d$ на пространстве $\mathbb{R}^d$, то касательные векторы будут иметь вид обыкновенных частных производных $(\partial/\partial r_i)$.

1.21. Доказанное нами утверждение о конечности размерности пространства F_m/F_m^2 не проходит в случае, если функции принадлежат классу C^k , где $k < \infty$, так как остаточный член в формуле из леммы разд. 1.17 не будет суммой произведений функций класса C^k , а для случая $k = 1$ эта лемма просто не имеет смысла. Оказывается, что для случая C^k , где $1 \leq k < \infty$, размерность пространства F_m/F_m^2 всегда является бесконечной (см. [21]). Существуют различные способы так определить касательные векторы для случая функций класса C^k , чтобы $\dim M_m = \dim M$ (все эти способы годятся и для случая C^∞). Один из них — определить касательный вектор v в точке m как отображение, ставящее в соответствие каждой функции (определенной и дифференцируемой класса C^k в окрестности точки m) вещественное число $v(f)$, такое, что если (U, φ) — локальная система координат в окрестности точки m , то существует такой набор вещественных чисел $(a_1, \dots, a_d)$ (зависящих от φ), что

$$v(f) = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)}.$$

При таком определении касательное пространство M_m снова оказывается пространством конечной размерности с базисом $\{(\partial/\partial x_i)|_m\}$.

1.22. Дифференциал. Пусть отображение $\psi: M \rightarrow N$ принадлежит классу C^∞ , и пусть $m \in M$. Дифференциалом отображения ψ в m называется линейное отображение

$$(1) \quad d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)},$$

определенное следующим образом. Если $v \in M_m$, то $d\psi(v)$ должен быть касательным вектором в $\psi(m)$, и мы опишем, как он действует на функциях. Если g — функция класса C^∞ в окрестности точки $\psi(m)$, то определим $d\psi(v)(g)$, полагая

$$(2) \quad d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi).$$

Легко проверить, что дифференциал $d\psi$ — линейное отображение пространства M_m в пространство $N_{\psi(m)}$. Строго говоря, дифференциал следует обозначать символом $d\psi|_{M_m}$ или просто $d\psi_m$. Однако в тех случаях, когда невозможны недоразумения, мы будем опускать индекс m . Отображение ψ называется невырожденным в m , если дифференциал $d\psi_m$ является невырожденным, т. е. если ядро отображения (1) состоит только из нуля. Сопряженное отображение

$$(3) \quad \psi^*: N_{\psi(m)}^* \rightarrow M_m^*$$

определяется, как обычно, соотношением

$$(4) \quad \psi^*(\omega)(v) = \omega(d\psi(v))$$

для любых $v \in M_m$ и $\omega \in N_{\psi(m)}^*$. В частном случае, когда функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу C^∞ , если $v \in M_m$ и $f(m) = r_0$, то

$$(5) \quad df(v) = v(f) \frac{d}{dr} \Big|_{r_0}.$$

В этом случае используем символ df , чтобы обозначить элемент сопряженного пространства M_m^* , определенный формулой

$$(6) \quad df(v) = v(f).$$

То есть мы отождествляем df с $f^*(\omega)$, где ω — базис 1-мерного пространства $\mathbb{R}_{r_0}^*$, сопряженный к базису $(d/dr)|_{r_0}$. Конкретное употребление введенных обозначений будет ясно из контекста.

1.23. Замечания к разд. 1.22

(а) Пусть $(U, x_1, \dots, x_d)$ и $(V, y_1, \dots, y_l)$ — системы координат в окрестности точек m и $\psi(m)$ соответственно. Согласно формулам 1.22 (2) и 1.20 (b),

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_m\right) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \Big|_m \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\psi(m)}.$$

Матрица $\{\partial(y_i \circ \psi)/\partial x_j\}$ называется *матрицей Якоби* (якобианом) отображения ψ (относительно заданной системы координат). Для отображений между евклидовыми пространствами якобиан всегда берется относительно канонических систем координат.

(b) Если $(U, x_1, \dots, x_d)$ — система координат на M и $m \in U$, то набор $\{dx_i|_m\}$ оказывается базисом пространства M_m^* , сопряженным базису $\{\partial/\partial x_i|_m\}$. Если $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция из класса C^∞ , то

$$df_m = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m dx_i|_m \circ d\psi_m.$$

(c) *Цепное правило.* Пусть $\psi: M \rightarrow N$ и $\varphi: N \rightarrow X$ — отображения класса C^∞ . Тогда

$$d(\varphi \circ \psi)_m = d\varphi_{\psi(m)} \circ d\psi_m,$$

или просто $d(\varphi \circ \psi) = d\varphi \circ d\psi$. Полезным упражнением было бы найти форму, которую принимает это равенство, когда после выбора систем координат дифференциалы записываются матрицами.

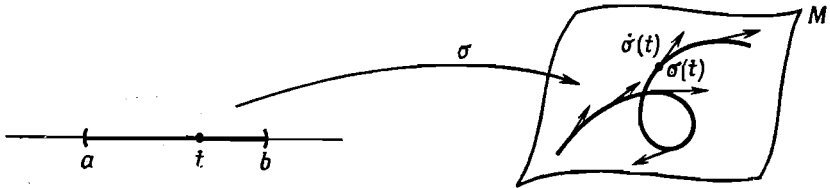
(d) Пусть функции $\psi: M \rightarrow N$ и $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежат классу C^∞ ; тогда $\psi^*(df_{\psi(m)}) = d(f \circ \psi)_m$, так как для любых векторов $v \in M_m$

$$\psi^*(df_{\psi(m)})(v) = df(d\psi(v)) = d(f \circ \psi)_m(v).$$

(е) Гладкой кривой на многообразии M называется отображение $\sigma: (a, b) \rightarrow M$ класса C^∞ . Пусть $t \in (a, b)$. Касательным вектором к кривой σ в t называется вектор

$$d\sigma\left(\frac{d}{dr}\right)\Big|_t \in M_{\sigma(t)}.$$

Для касательного вектора к σ в t мы примем обозначение $\dot{\sigma}(t)$.



Теперь, если взять любой ненулевой вектор v из касательного пространства M_m , то он будет касательным вектором к некоторой гладкой кривой на M . Действительно, можно просто выбрать систему координат (U, φ) с началом в m , для которой

$$v = d\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)\Big|_0.$$

Тогда вектор v окажется касательным вектором в нуле к кривой $t \mapsto \varphi^{-1}(t, 0, \dots, 0)$. Следует отметить, что две гладкие кривые σ и τ на многообразии M , для которых $\sigma(t_0) = \tau(t_0) = m$, имеют одинаковый касательный вектор в точке t_0 тогда и только тогда, когда

$$\frac{d(f \circ \sigma)}{dr}\Big|_{t_0} = \frac{d(f \circ \tau)}{dr}\Big|_{t_0}$$

для всех функций f класса C^∞ в окрестности m .

Если σ — кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma_1}{dr}\Big|_t \frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{\sigma(t)} + \dots + \frac{d\sigma_n}{dr}\Big|_t \frac{\partial}{\partial r_n}\Big|_{\sigma(t)}.$$

Если мы отождествляем касательный вектор с элементом

$$\left(\frac{d\sigma_1}{dr}\Big|_t, \dots, \frac{d\sigma_n}{dr}\Big|_t\right)$$

пространства $\mathbb{R}^n$, то

$$\dot{\sigma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h}.$$

При таком отождествлении наше понятие касательного вектора в этом частном случае совпадает с геометрическим понятием касательного вектора к кривой в евклидовом пространстве.

1.24. Теорема. Пусть ψ — отображение класса C^∞ связного многообразия M в многообразии N . Если $d\psi_m \equiv 0$ для каждой точки $m \in M$, то ψ — постоянное отображение.

Доказательство. Пусть $n \in \psi(M)$. Тогда множество $\psi^{-1}(n)$ замкнуто. Нам нужно только показать, что оно открыто. Для этого возьмем другую точку $m \in \psi^{-1}(n)$ и выберем системы координат $(U, x_1, \dots, x_d)$ и $(V, y_1, \dots, y_c)$ в окрестности точек m и n соответственно так, что $\psi(U) \subset V$. Тогда на U из того, что

$$0 = d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^c \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (j = 1, \dots, d),$$

следует, что

$$\frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, c; \quad j = 1, \dots, d).$$

Таким образом, функции $y_i \circ \psi$ постоянны на U , т. е. $\psi(U) = n$; следовательно, $\psi^{-1}(n)$ открыто и потому $\psi^{-1}(n) = M$.

Сейчас мы увидим, что множество всех касательных векторов к дифференцируемому многообразию само образует естественным образом дифференцируемое многообразие, называемое *касательным расслоением*. Аналогично линейные функционалы на касательных пространствах составляют двойственный объект, называемый *кокасательным расслоением*.

1.25. Касательное и кокасательное расслоения. Пусть M — гладкое многообразие с дифференцируемой структурой $\mathcal{F}$. Положим

$$(1) \quad T(M) = \bigcup_{m \in M} M_m,$$

$$T^*(M) = \bigcup_{m \in M} M_m^*.$$

Существуют естественные проекции

$$(2) \quad \begin{aligned} \pi: T(M) &\rightarrow M, & \pi(v) &= m, & \text{если } v \in M_m, \\ \pi': T^*(M) &\rightarrow M, & \pi'(\tau) &= m, & \text{если } \tau \in M_m^*. \end{aligned}$$

Пусть $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$. Определим отображения $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ и $\tilde{\varphi}': (\pi')^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, полагая

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}(v) &= (x_1(\pi(v)), \dots, x_d(\pi(v)), dx_1(v), \dots, dx_d(v)), \\ \tilde{\varphi}'(\tau) &= \left(x_1(\pi'(\tau)), \dots, x_d(\pi'(\tau)), \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)\right) \end{aligned}$$

для всех $v \in \pi^{-1}(U)$ и $\tau \in (\pi')^{-1}(U)$. Заметим, что $\tilde{\phi}$ и $\tilde{\phi}'$ являются взаимно однозначными отображениями на открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^{2d}$. Следующие утверждения намечают построение топологии и дифференцируемой структуры на $T(M)$. Построение для $T^*(M)$ проводится аналогично. Доказательства мы оставляем в качестве упражнения.

(а) Если (U, ϕ) и $(V, \psi) \in \mathcal{F}$, то отображение $\tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ гладкое.

(б) Семейство $\{\phi^{-1}(W) : W \text{ открыто в } \mathbb{R}^{2d}, (U, \phi) \in \mathcal{F}\}$ составляет базу топологии на $T(M)$, с которой это пространство становится локально евклидовым пространством размерности $2d$, удовлетворяющим второй аксиоме счетности.

(с) Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — максимальный набор, удовлетворяющий условию 1.4 (б) и содержащий

$$\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi}) : (U, \phi) \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда $\tilde{\mathcal{F}}$ — дифференцируемая структура на $T(M)$.

Пространства $T(M)$ и $T^*(M)$ вместе с такими дифференцируемыми структурами называются соответственно *касательным* и *кокасательным расслоениями* многообразия M . Иногда будет удобно обозначать точки из $T(M)$ парами (t, v) , где $t \in M$ и $v \in M_t$ (аналогичное обозначение употребляется для $T^*(M)$).

Если $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, то дифференциал $d\psi$ определяет отображение касательных расслоений

$$(4) \quad d\psi: T(M) \rightarrow T(N),$$

где $d\psi(t, v) = d\psi_t(v)$ для любого вектора $v \in M_t$. Легко проверяется, что (4) будет гладким отображением.

1.26 ¹⁾. Касательные векторы и дифференциалы высшего порядка. Полезно взглянуть на касательное пространство M_t как на $(F_m/F_m^2)^*$, потому что такое его представление непосредственно приводит к определению касательных векторов высшего порядка. Дадим необходимые определения.

Вспомним, что $\tilde{F}_m$ — это алгебра ростков функций в t . Множество $F_m \subset \tilde{F}_m$ является идеалом в $\tilde{F}_m$, состоящим из ростков, принимающих нулевое значение в t , а F_m^k (k — целое число ≥ 1) — это идеал $\tilde{F}_m$, состоящий из всех конечных линейных комбинаций произведений по k элементов из F_m .

Векторное пространство F_m/F_m^{k+1} называется пространством дифференциалов k -го порядка в t , и мы будем обозначать его символом ${}^kM_m$. Как и раньше, f будет обозначать росток функции f в t и скобки $\{ \}$ будут использоваться для обозначения смежных

¹⁾ Материал этого раздела нигде в дальнейшем использоваться не будет. Поэтому его можно пропустить, не нарушив связности изложения.

классов в факторпространстве F_m/F_m^{k+1} . Пусть f — дифференцируемая функция в окрестности точки m . Мы определим дифференциал $d^k f$ порядка k функции f в m , полагая

$$(1) \quad d^k f = \{f - f(m)\}.$$

Касательным вектором k -го порядка в m называется линейная функция на $\tilde{F}_m$, принимающая нулевое значение на F_m^{k+1} , а также на множестве ростков функций, постоянных в некоторой окрестности точки m . Вещественное линейное пространство касательных векторов k -го порядка в m будет обозначаться символом M_m^k . Естественным путем можно отождествить M_m^k с $({}^k M_m)^*$, так как любому касательному вектору порядка k , ограниченному на F_m , соответствует линейная функция на F_m , принимающая нулевое значение F_m^{k+1} , и, следовательно, некоторый элемент пространства $({}^k M_m)^*$; обратно, элемент пространства $({}^k M_m)^*$ единственным образом определяет линейную функцию на F_m , принимающую нулевое значение на F_m^{k+1} , которую единственным способом можно продолжить до касательного вектора k -го порядка, потребовав, чтобы она обращалась в нуль на ростках постоянных функций.

Мы можем связать это понятие касательного вектора высшего порядка и с обычным понятием производной высшего порядка в евклидовом пространстве, рассматривая их представления в некоторой системе координат. Пусть (U, φ) — система координат с началом в m и координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, такая, что $\varphi(U)$ — выпуклое открытое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — набор неотрицательных целых чисел. В добавление к принятым нами в разд. 1.1 соглашениям мы положим

$$(x - x(m))^\alpha = (x_1 - x_1(m))^{\alpha_1} \dots (x_d - x_d(m))^{\alpha_d}.$$

Пусть f — гладкая функция на U . Используя лемму 1.17, получим

$$(2) \quad f = f(m) + \sum_{|\alpha|=1}^k a_\alpha (x - x(m))^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} h_\alpha (x - x(m))^\alpha,$$

где h_α — гладкие функции на U и где

$$(3) \quad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \left. \frac{\partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^\alpha} \right|_{\varphi(m)}.$$

Отсюда

$$(4) \quad d^k f = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} a_\alpha \{(x - x(m))^\alpha\}.$$

Таким образом, пространство ${}^k M_m$ натянуто на

$$(5) \quad \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}(m))^{\alpha}\} : 1 \leq [\alpha] \leq k\}.$$

Доказательство того, что эти элементы линейно независимы в ${}^k M_m$, является очевидным обобщением доказательства для случая $k = 2$, которое было проведено в разд. 1.17. Итак, семейство (5) образует базис пространства ${}^k M_m$. Следовательно, ${}^k M_m$ оказывается пространством конечной размерности, которая равна биномиальному

коэффициенту $\sum_{i=1}^k \binom{d+j-1}{i}$. Поскольку M_m^k — сопряженное пространство к ${}^k M_m$, то оно имеет ту же размерность. Используя отождествление M_m^k с $({}^k M_m)^*$ и то, что эти пространства имеют конечную размерность, мы получаем канонический изоморфизм между пространствами ${}^k M_m$ и $(M_m^k)^*$, при котором элемент $d^k f \in ({}^k M_m)^*$, рассматриваемый как элемент пространства $(M_m^k)^*$, обладает следующим свойством:

$$(6) \quad d^k f(v) = v(f).$$

Положим

$$(7) \quad \left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|_m = \left. \frac{\partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^\alpha} \right|_{\varphi(m)}.$$

Поскольку производная — это линейный оператор и поскольку значение $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha$ в m зависит только от ростка функции f в m и равно нулю, если f постоянна в окрестности m или если f имеет вид произведения $[\alpha] + 1$ функций, принимающих нулевое значение в m , то $(\partial^\alpha / \partial x^\alpha)|_m$ будет касательным вектором $[\alpha]$ -го порядка в m . Таким образом,

$$(8) \quad \left\{ \left(\frac{1}{\alpha!} \right) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right\}_m : 1 \leq [\alpha] \leq k \}$$

оказывается базисом пространства M_m^k , сопряженным к базису (5) пространства ${}^k M_m$. Если v — касательный вектор k -го порядка в m , то

$$(9) \quad v = \sum_{[\alpha]=1}^k b_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \Big|_m,$$

где

$$(10) \quad b_\alpha = \left(\frac{1}{\alpha!} \right) v((\mathbf{x} - \mathbf{x}(m))^\alpha).$$

В базисе (8) равенства (3) приобретают вид

$$(11) \quad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \Big|_m.$$

Как и в случае касательных векторов 1-го порядка, мы обычно будем рассматривать касательные векторы как операторы на функциях, а не на их ростках; поэтому мы положим

$$(12) \quad v(f) = v(i),$$

если f — гладкое отображение в окрестности m , а v — касательный вектор любого порядка в m .

И наконец, подобно тому как существуют естественные отображения касательных векторов и дифференциалов, ассоциированные с дифференцируемым отображением $\varphi: M \rightarrow N$, существуют линейные отображения

$$(13) \quad \begin{aligned} d^k \varphi: M_m^k &\rightarrow N_{\varphi(m)}^k, \\ \delta^k \varphi: {}^k N_{\varphi(m)} &\rightarrow {}^k M_m, \end{aligned}$$

определенные соотношениями ¹⁾

$$(14) \quad \begin{aligned} d^k \varphi(v)(g) &= v(g \circ \varphi), \\ \delta^k \varphi(d^k g) &= d^k(g \circ \varphi) \end{aligned}$$

для любых $v \in M_m^k$ и гладких функций g в окрестности точки $\varphi(m)$. Легко проверяется, что равенства (14) действительно задают отображения (13) и что отображения $d^k \varphi$ и $\delta^k \varphi$ являются сопряженными.

Наше определение касательного вектора первого порядка, данное в этом разделе, совпадает с определением 1.14 в силу леммы 1.16. В результате мы получили три интерпретации дифференциала первого порядка df функции f : представление (13) совпадает с нашим исходным определением 1.22(1), интерпретация (6) эквивалентна 1.22(6), и, кроме того, мы имеем добавочную интерпретацию (1).

Подмногообразия, диффеоморфизмы и теорема об обратной функции

1.27. Определения. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение.

(а) Отображение ψ называется *погружением*, если его дифференциал $d\psi_m$ является невырожденным для каждой точки $m \in M$.

(б) Пара (M, ψ) называется *подмногообразием* многообразия N , если ψ — инъективное погружение.

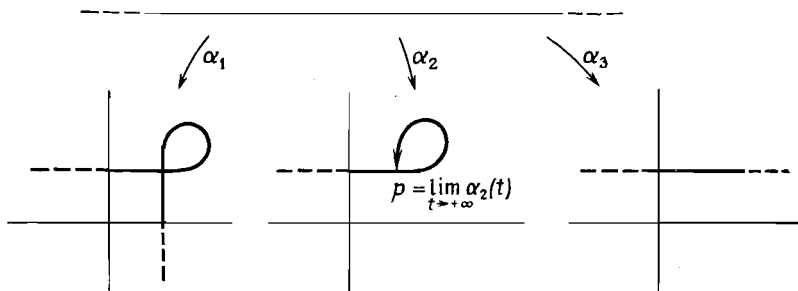
(с) Инъективное погружение ψ называется *вложением*, если оно является гомеоморфизмом на свой образ, т. е. ψ открыто как отображение в $\psi(M)$ в индуцированной топологии.

(д) ψ называется *диффеоморфизмом*, если ψ взаимно однозначно отображает M на N и ψ^{-1} — гладкое отображение.

¹⁾ Заметим, что $\delta^1 \varphi = \varphi^*$. — Прим. перев.

² Уорнер Ф.

1.28. Замечания к разд. 1.27. Как показано на следующем рисунке, вещественную прямую $\mathbb{R}$ можно погрузить в плоскость по-разному. В первом случае отображение будет погружением, но образ не будет подмногообразием, во втором случае мы получим подмногообразие, но соответствующее отображение не является вложением, а в третьем случае имеем вложение.



(а) Погружение, но образ не является подмногообразием.

(б) Подмногообразие, но соответствующее отображение — не вложение.

(с) Вложение.

Заметим, что если (U, φ) — система координат, то отображение $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ является диффеоморфизмом.

Композиция диффеоморфизмов снова будет диффеоморфизмом. Таким образом, отношение диффеоморфности является отношением эквивалентности на совокупности дифференцируемых многообразий. Локально евклидово пространство вполне может допускать различные дифференцируемые структуры, являющиеся диффеоморфными (см. упр. 2). Дж. Милнор в своей замечательной работе [19] установил существование локально евклидовых пространств, допускающих недиффеоморфные дифференцируемые структуры (например, сфера S^7). Имеются также такие локально евклидовы пространства, которые не допускают дифференцируемой структуры (см. [14]).

Если ψ — диффеоморфизм, то $d\psi_m$ — изоморфизм, потому что оба отображения $(d\psi \circ d\psi^{-1})|_{\psi(m)}$ и $(d\psi^{-1} \circ d\psi)|_m$ являются тождественными преобразованиями. Теорема об обратной функции дает локально обратное утверждение, а именно если дифференциал $d\psi_m$ — изоморфизм, то отображение ψ оказывается диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки m . Прежде чем напомнить точную формулировку теоремы об обратной функции, мы дадим определение, которое нам потребуется в следствиях.

1.29. Определение. Множество гладких функций $y_1, \dots, y_j$, определенных в некоторой окрестности точки m из M , называется

независимым множеством в точке m , если их дифференциалы $dy_1, \dots, dy_i$ образуют независимое множество в M_m^* .

1.30. Теорема об обратной функции. Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество и $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ — функция класса C^∞ . Если матрица Якоби

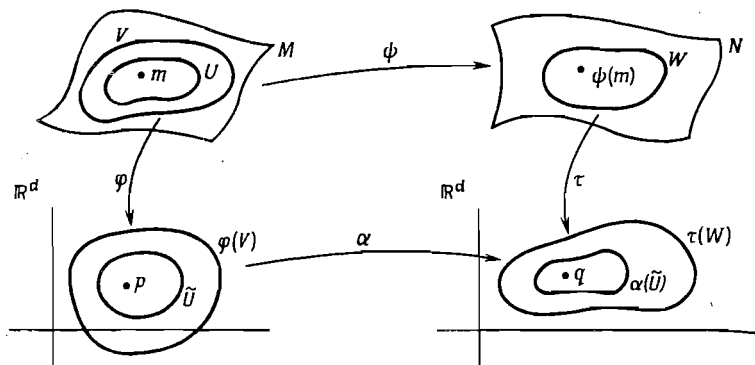
$$\left\{ \frac{\partial r_i \circ f}{\partial r_j} \right\}_{i,j=1, \dots, d}$$

невыврождена в точке $r_0 \in U$, то существует открытое множество V , такое, что $r_0 \in V \subset U$, $f|_V$ взаимно однозначно отображает V на открытое множество $f(V)$ и $(f|_V)^{-1}$ — отображение класса C^∞ .

Эта теорема — один из результатов математического анализа, который мы приводим без доказательства. Читатель может найти его доказательство, например, в [31] или [6].

Следствие (а). Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, такое, что $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ — изоморфизм для $m \in M$. Тогда существует окрестность U точки m , такая, что отображение $\psi: U \rightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$ многообразия N .

Доказательство. Заметим, что $\dim M = \dim N$; пусть эта размерность равна d . Выберем системы координат (V, φ) с началом в m и (W, τ) с началом в $\psi(m)$, такие, что $\psi(V) \subset W$. Пусть $\varphi(m) = p$ и $\tau(\psi(m)) = q$. Дифференциал отображения $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(V)}$ оказывается невырожденным в p . Таким образом, теорема об обратной функции обеспечивает существование диффеоморфизма $\alpha: \tilde{U} \rightarrow \alpha(\tilde{U})$ в окрестности $\tilde{U}$ точки p , лежащей в $\varphi(V)$. Тогда $\tau^{-1} \circ \alpha \circ \varphi$ будет требуемым диффеоморфизмом в окрестности $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ точки m .



Следствие (b). *Предположим, что $\dim M = d$ и что $y_1, \dots, y_d$ — независимое множество функций в точке $m_0 \in M$. Тогда функции $y_1, \dots, y_d$ образуют систему координат в некоторой окрестности точки m_0 .*

Доказательство. Допустим, что y_i определены в открытом множестве U , содержащем m_0 . Определим отображение $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$, полагая

$$\psi(m) = (y_1(m), \dots, y_d(m)) \quad (m \in U).$$

Тогда ψ гладко. Отображение ψ^* является изоморфизмом на пространстве $(\mathbb{R}_{\psi(m_0)}^d)^*$, потому что

$$\psi^*(dr_i) = d(r_i \circ \psi) = dy_i,$$

а это означает, что отображение $\psi^*|_{\psi(m_0)}$ переводит базис в базис. Следовательно, дифференциал $d\psi_{m_0}$ (который сопряжен к $\psi^*|_{\psi(m_0)}$) является изоморфизмом. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что ψ — диффеоморфизм в окрестности $V \subset U$ точки m_0 , а потому ограничения функций $y_1, \dots, y_d$ на V образуют в V систему координат.

Следствие (c). *Предположим, что $\dim M = d$ и $y_1, \dots, y_l$, $l < d$, образует независимое множество функций в m . Тогда этот набор функций составляет часть системы координат в некоторой окрестности точки m .*

Доказательство. Пусть $(U, x_1, \dots, x_d)$ — система координат с началом в m . Тогда пространство M_m^* натянуто на $\{dy_1, \dots, dy_l, dx_1, \dots, dx_d\}$. Выберем $d - l$ функций из x_i так, что $\{dy_1, \dots, dy_l, dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{d-l}}\}$ будет базисом пространства M_m^* , и применим следствие (b).

Следствие (d). *Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, а отображение $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ сюръективно. Если функции $x_1, \dots, x_l$ образуют систему координат в некоторой окрестности точки $\psi(m)$, то $x_1 \circ \psi, \dots, x_l \circ \psi$ составляют часть системы координат в некоторой окрестности точки m .*

Доказательство. Тот факт, что отображение $d\psi_m$ является сюръективным, означает, что сопряженное отображение $\psi^*|_{\psi(m)}$ инъективно. Функции $\{x_i \circ \psi: i = 1, \dots, l\}$ независимы в m , так как $\psi^*(dx_i) = d(x_i \circ \psi)$. Наше утверждение вытекает из следствия (c).

Следствие (e). *Пусть $y_1, \dots, y_k$ — такой набор гладких функций, определенных в некоторой окрестности точки m , что пространство M_m^* натянуто на их дифференциалы; тогда некоторое*

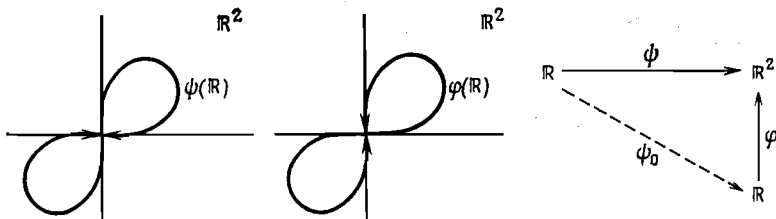
подмножество функций y_i образует систему координат в некоторой окрестности точки t .

Доказательство. Выберем те функции, дифференциалы которых образуют базис пространства M_m^* , и применим следствие (б).

Следствие (f). Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, и допустим, что его дифференциал $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ инъективен. Пусть $x_1, \dots, x_k$ образуют систему координат в окрестности точки $\psi(m)$. Тогда некоторое подмножество функций из $\{x_i \circ \psi\}$ образует систему координат в окрестности точки t , в частности ψ инъективно в окрестности точки t .

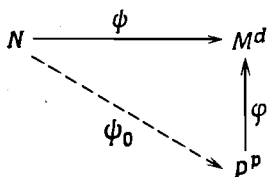
Доказательство. Поскольку $d\psi_m$ инъективно, $\psi^*|_{\psi(m)}$ сюръективно. Поэтому M_m^* натянуто на $\{d(x_i \circ \psi) = \psi^*(dx_i): i = 1, \dots, k\}$. Теперь утверждение данного следствия вытекает из предыдущего.

1.31. Часто возникает ситуация, когда имеется гладкое отображение $\psi: N \rightarrow M$ одного многообразия в другое, пропускающее через подмногообразие $(P, \varphi) \subset M$. Это означает, что $\psi(N) \subset \varphi(P)$, откуда следует существование единственного отображения $\psi_0: N \rightarrow P$, такого, что $\varphi \circ \psi_0 = \psi$. Возникает вопрос: когда ψ_0 является гладким отображением? Это не всегда так. Рассмотрим следующий пример: в качестве N и P возьмем вещественные прямые, а в качестве M — плоскость. Пусть $(\mathbb{R}, \psi)$ и $(\mathbb{R}, \varphi)$ — подмногообразия «восьмерки» (см. рисунок ниже), совпадающие как множества, но различающиеся тем, что при $t \rightarrow \pm \infty$ $\psi(t)$ приближается к точке пересечения вдоль горизонтального направления, а $\varphi(t)$ — вдоль вертикального. Пусть, кроме того, $\psi(0) = \varphi(0) = 0$. Тогда ψ_0 не будет даже непрерывным, потому что $\psi_0^{-1}(-1, 1)$ состоит из начала координат и двух открытых множеств вида $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, -\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$.



1.32. Теорема. Пусть $\psi: N \rightarrow M$ — гладкое отображение, и пусть (P, φ) — подмногообразие многообразия M . Предположим, что ψ пропускается через подмногообразие (P, φ) , так что $\psi(N) \subset$

$\subset \varphi(P)$. Так как φ инъективно, то существует единственное отображение $\varphi_0: N \rightarrow P$, такое, что $\varphi \circ \varphi_0 = \psi$.



Тогда

(а) φ_0 — отображение класса C^∞ , если оно непрерывно.

(б) φ_0 непрерывно, если φ — вложение.

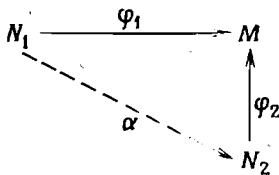
Отображение φ_0 оказывается непрерывным в другом важном случае, когда (P, φ) является интегральным многообразием инволютивного распределения на многообразии M , как мы покажем в разд. 1.62.

Доказательство. Пункт (б) очевиден. Предположим, что φ_0 — непрерывное отображение, и покажем, что оно является гладким. Достаточно построить покрытие для P системами координат (U, τ) , такими, что отображение $\tau \circ \varphi_0$, ограниченное на открытом множестве $\varphi_0^{-1}(U)$, является гладким. Возьмем точку $p \in P$ и систему координат (V, γ) в окрестности точки $\varphi(p) \in M^d$. Следствие (f) из разд. 1.30 обеспечивает существование проекции π пространства $\mathbb{R}^d$ на подходящее подпространство (оно получается, если положить некоторые из координатных функций равными нулю), такой, что отображение $\tau = \pi \circ \gamma \circ \varphi$ задает систему координат в окрестности U точки p . Тогда

$$\begin{aligned} \tau \circ \varphi_0 |_{\varphi_0^{-1}(U)} &= \pi \circ \gamma \circ \varphi \circ \varphi_0 |_{\varphi_0^{-1}(U)} = \\ &= \pi \circ \gamma \circ \psi |_{\varphi_0^{-1}(U)} \end{aligned}$$

является гладким.

1.33. Дальнейшие замечания о подмногообразиях. Два подмногообразия (N_1, φ_1) и (N_2, φ_2) многообразия M называются эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\alpha: N_1 \rightarrow N_2$, такой, что $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \alpha$.



Итак, мы имеем отношение эквивалентности на множестве всех подмногообразий многообразия M . У каждого класса эквивалентности ξ имеется единственный представитель вида (A, i) , где A — подмножество из M вместе со структурой многообразия, такой, что отображение включения $i: A \rightarrow M$ является гладким погружением. А именно, если (N, φ) — любой представитель класса ξ , то в качестве подмножества $A \subset M$ надо взять $\varphi(N)$. Мы индуцируем структуру многообразия на множестве A требованием, чтобы отображение $\varphi: N \rightarrow A$ было диффеоморфизмом. С такой структурой многообразия (A, i) становится подмногообразием в M , эквивалентным (N, φ) . И это единственная структура многообразия на A , такая, что (A, i) эквивалентно (N, φ) . Таким образом, это единственный представитель класса ξ нужного вида.

Утверждения некоторых теорем в следующих разделах заключаются в том, что существуют единственные подмногообразия, удовлетворяющие определенным условиям. Имеется в виду единственность с точностью до эквивалентности, как определено выше. Более точно, если подмногообразия многообразия M рассматриваются как подмножества $A \subset M$ вместе со структурой многообразия, для которой отображения включения оказываются гладкими погружениями, то единственность означает единственное подмножество с единственной локально евклидовой топологией, для которой выполняется вторая аксиома счетности, и единственная дифференцируемая структурой.

Когда речь идет о подмногообразии (A, i) многообразия M , где i — отображение включения, мы часто будем i опускать и говорить просто о подмногообразии $A \subset M$.

Пусть A — подмножество в M . Структура многообразия на A , такая, что (A, i) — подмногообразие в M , как правило, определена неоднозначно, если существует вообще. Например, на рисунке в разд. 1.31 изображены две различные структуры многообразия на одной «восьмерке» на плоскости, каждая из которых превращает эту «восьмерку» вместе с отображением включения в подмногообразие в $\mathbb{R}^2$. Однако имеются следующие две теоремы единственности, включающие условия на топологию на A .

(а) Пусть M — гладкое многообразие и A — подмножество в M . Фиксируем топологию на A . Тогда на A существует не более одной дифференцируемой структуры, такой, что (A, i) — подмногообразие в M , где i — отображение вложения.

(б) Пусть снова A — подмножество в M . Если в индуцированной топологии A обладает дифференцируемой структурой, такой, что (A, i) — подмногообразие в M , то на A существует единственная структура многообразия (т. е. единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счетности и един-

ственная дифференцируемая структура), такая, что (A, i) — подмногообразие в M .

Мы оставляем доказательство этих теорем читателю в качестве упражнения. Теорема (а) доказывается с помощью теоремы 1.32. В теореме (б) существенно предположение, что для многообразий выполнена вторая аксиома счетности, а для ее доказательства нужно использовать результат упр. 6 и теорему 1.32.

1.34. Срезы. Рассмотрим систему координат (U, φ) на многообразии M с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$. Пусть c — целое число, $0 \leq c \leq d$, и пусть $a \in \varphi(U)$. Положим

$$(1) \quad S = \{q \in U : x_i(q) = r_i(a), i = c+1, \dots, d\}.$$

Подпространство S многообразия M вместе с системой координат

$$(2) \quad \{x_j | S : j = 1, \dots, c\}$$

образует многообразие, которое является подмногообразием многообразия M и будет называться *срезом* системы координат (U, φ) .

1.35. Предложение. Пусть $\psi: M^c \rightarrow N^d$ — погружение и $m \in M$. Тогда существуют кубическая система координат (V, φ) с началом в $\psi(m)$ и окрестность U точки m , такие, что ограничение $\psi|_U$ инъективно и множество $\psi(U)$ является срезом системы координат (V, φ) .

Доказательство. Рассмотрим систему координат (W, τ) с началом в $\psi(m)$ и координатными функциями $y_1, \dots, y_d$. Согласно следствию (f) разд. 1.30, мы можем перенумеровать координатные функции таким образом, чтобы

$$(1) \quad \tilde{\tau} = \pi_c \circ \tau \circ \psi$$

было координатным отображением в окрестности V' точки m , где $\pi_c: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^c$ — проекция на первые c координат. Определим функции $\{x_i\}$ на $(\pi_c \circ \tau)^{-1}(\tilde{\tau}(V'))$, полагая

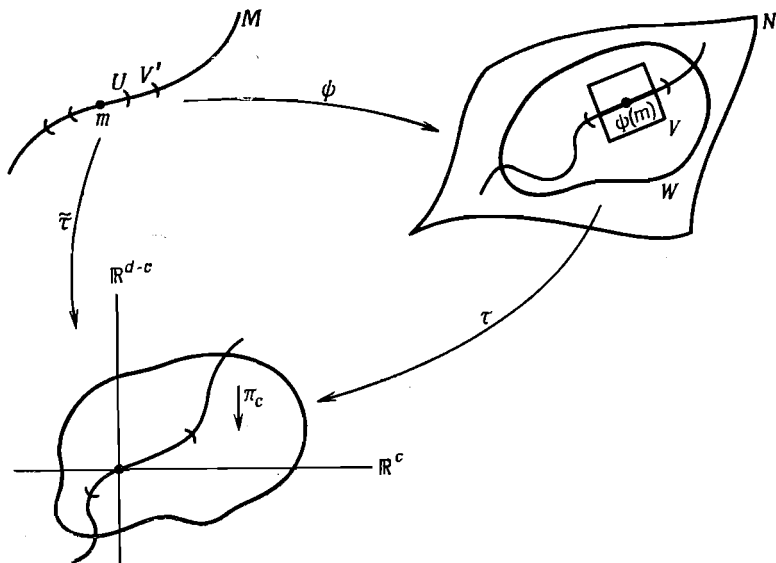
$$(2) \quad x_i = \begin{cases} y_i & (i = 1, \dots, c), \\ y_i - y_i \circ \psi \circ \tilde{\tau}^{-1} \circ \pi_c \circ \tau & (i = c+1, \dots, d). \end{cases}$$

Функции $\{x_i\}$ являются независимыми в точке $\psi(m)$, так как в ней

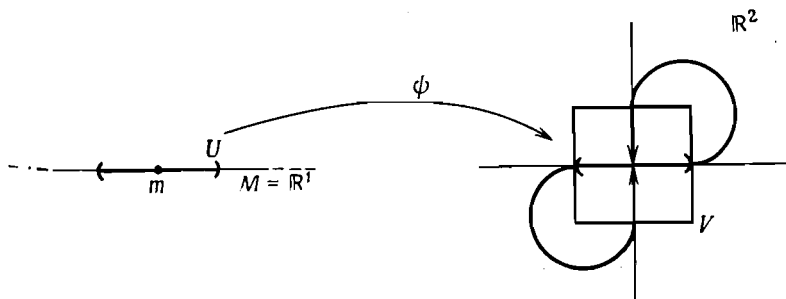
$$(3) \quad dx_i = \begin{cases} dy_i & (i = 1, \dots, c), \\ dy_i + \sum_{j=1}^c a_{ij} dy_j & (i = c+1, \dots, d), \end{cases}$$

где a_{ij} — некоторые постоянные. Согласно следствию (b) из разд. 1.30, набор $\{x_i\}$ образует систему координат в окрестности точки $\psi(m)$. Пусть V — окрестность точки $\psi(m)$, в которой функции $x_1, \dots, x_d$ образуют кубическую систему координат.

Соответствующее координатное отображение обозначим через ϕ . Положим $U = \psi^{-1}(V) \cap V'$. Тогда U и (V, ϕ) — искомые окрестность и система координат.



Мы подчеркнем, что в утверждении 1.35 говорится о существовании *окрестности* U точки m , такой, что $\psi(U)$ — срез системы координат (V, ϕ) . Даже если (M, ψ) — подмногообразие в N , вполне может оказаться, что пересечение $\psi(M) \cap V$ не будет ни срезом, ни объединением срезов. В качестве примера снова рассмотрим подмногообразие-«восьмерку» на плоскости:



Однако если (M, ψ) — вложенное подмногообразие, то систему координат (V, ϕ) можно выбрать таким образом, чтобы каждое из пересечений $\psi(M) \cap V$ являлось единственным срезом.

Обсудим теперь вопрос: в какой мере множество всех функций класса C^∞ на многообразии определяет множество всех функций

класса C^∞ на некотором его подмногообразии? Пусть (M, ψ) — подмногообразие в N . Очевидно, что если $f \in C^\infty(N)$, то ограничение $f|_M$ будет гладкой функцией на M . (Более точно, $f \circ \psi$ будет гладкой функцией на M .) Обратное, вообще говоря, не всегда верно, т. е. не все гладкие функции на M оказываются ограничениями на M гладких функций на многообразии N . Для того чтобы обратное было верным, необходимо и достаточно, чтобы ψ было вложением и множество $\psi(M)$ было замкнутым. Достаточность мы докажем в следующем утверждении, а доказательство необходимости оставим читателю (см. упр. 11).

1.36. Предложение. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — вложение, такое, что $\psi(M)$ замкнуто в N . Если g — гладкая функция на M , то существует гладкая функция f на N , такая, что $f \circ \psi = g$.

Чтобы упростить обозначения, мы забудем об отображении ψ и будем считать, что $M \subset N$.

Доказательство. Для каждой точки $p \in M$ существуют открытое множество O_p в N , содержащее точку p , и гладкое продолжение $\tilde{g}_p$ функции g с $O_p \cap M$ на O_p . Можно выбрать O_p кубической координатной окрестностью точки p с началом в этой точке, для которой пересечение $M \cap O_p$ будет срезом, и затем определить функцию $\tilde{g}_p$ как композицию естественной проекции O_p на срез и функции g . Семейство $\{O_p; p \in M\}$ вместе с $N - M$ образует открытое покрытие многообразия N . По теореме 1.11 существует разбиение единицы $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, подчиненное этому покрытию. Выберем подпоследовательность (которую мы будем по-прежнему обозначать $\{\varphi_i\}$), такую, что $\text{supp } \varphi_j \cap M \neq \emptyset$. Для каждого j можно найти такую точку p_j , что $\text{supp } \varphi_j \subset O_{p_j}$. Тогда функция $f = \sum_j \varphi_j \tilde{g}_{p_j}$ будет гладкой на N и $f|_M = g$.

Теорема о неявной функции

Из теоремы об обратной функции мы выведем две другие теоремы, которые дадут нам исключительно полезный способ доказывать, что некоторые подмножества многообразий являются подмногообразиями. Для гладкого отображения, удовлетворяющего определенным условиям, прообраз подмногообразия из области значений будет подмногообразием области определения. Сначала мы напомним формулировку классической теоремы о неявной функции. Это просто локальный вариант первой теоремы о неявной функции (теорема 1.38), которую мы докажем для многообразий. Мы предполагаем, что читатель докажет теорему 1.37 самостоятельно, познакомясь с доказательством теоремы 1.38.

1.37. Теорема о неявной функции. Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$, открыто, и пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ — гладкое отображение. Пусть $(r_1, \dots, r_{c-d}, s_1, \dots, s_d)$ обозначает каноническую систему координат на пространстве $\mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$. Предположим, что в точке $(r_0, s_0) \in U$

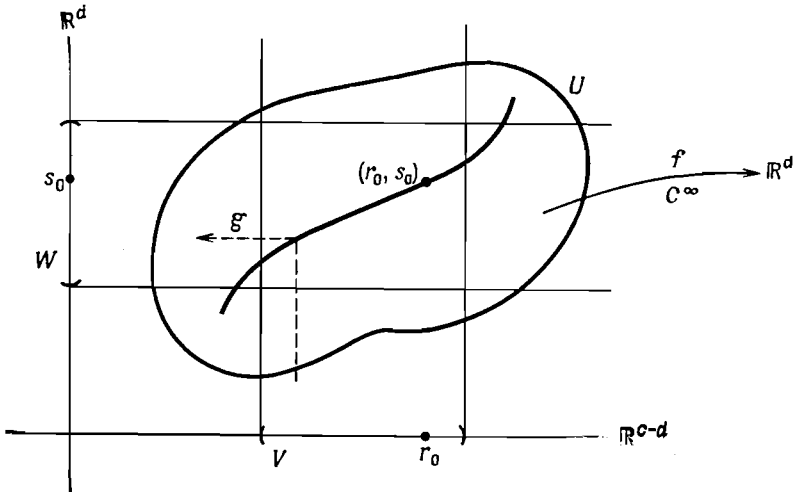
$$f(r_0, s_0) = 0$$

и что матрица

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \right\}_{(r_0, s_0)} \Big|_{i, j=1, \dots, d}$$

невырождена. Тогда существуют открытая окрестность V точки r_0 в $\mathbb{R}^{c-d}$ и открытая окрестность W точки s_0 в $\mathbb{R}^d$, такие, что $V \times W \subset U$, и существует гладкое отображение $g: V \rightarrow W$, такое, что для каждой точки $(p, q) \in V \times W$

$$(1) \quad f(p, q) = 0 \Leftrightarrow q = g(p).$$



1.38. Теорема. Пусть $\psi: M^c \rightarrow N^d$ — гладкое отображение и n — точка из N . Предположим, что множество $P = \psi^{-1}(n)$ непусто и что $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ — сюръективное отображение для всех точек $m \in P$. Тогда на P существует единственная структура многообразия, такая, что (P, i) будет подмногообразием в M , где i , как обычно, — отображение включения. Кроме того, $i: P \rightarrow M$ — вложение, а размерность P равна $c - d$.

Доказательство. Согласно теореме (b) из разд. 1.33, достаточно доказать, что в индуцированной топологии P обладает такой дифференцируемой структурой, что (P, i) является подмногообразием в M размерности $c - d$. Для этого достаточно показать, что

для любой точки $m \in P$ существует система координат в некоторой ее окрестности U в M , такая, что пересечение $P \cap U$ будет срезом соответствующей размерности. Рассмотрим систему координат $x_1, \dots, x_d$ с началом n в N . Используя сюръективность дифференциала $d\psi: M_m \rightarrow N_n$ и следствие (d) из разд. 1.30, получаем, что набор функций

$$\{y_i = x_i \circ \psi: i = 1, \dots, d\}$$

составляет часть системы координат в окрестности точки $m \in M$. Дополним ее до системы координат $y_1, \dots, y_d, y_{d+1}, \dots, y_c$ в окрестности U точки m . Тогда пересечение $P \cap U$ окажется в точности срезом этой системы координат, задаваемым равенством

$$y_1 = y_2 = \dots = y_d = 0.$$

Теорема доказана.

Эта теорема утверждает, что прообраз точки будет подмногообразием, если дифференциал будет сюръективным отображением в каждой точке этого прообраза. Точку можно рассматривать как подмногообразие нулевой размерности. Сейчас мы покажем, что при определенных условиях прообразы подмногообразий более высоких размерностей также будут подмногообразиями.

1.39. Теорема. Пусть $\psi: M \rightarrow N^d$ — гладкое отображение, и пусть (O^c, φ) — подмногообразие в N . Предположим, что

$$(1) \quad N_{\psi(m)} = d\psi(M_m) \vdash d\varphi(O_{\varphi^{-1}(\psi(m))})$$

для любой точки $m \in \psi^{-1}(\varphi(O))$ (сумма не обязательно прямая). Тогда, если множество $P = \psi^{-1}(\varphi(O))$ непусто, на нем может быть задана структура многообразия, такая, что (P, i) будет подмногообразием в M , где i , как обычно, — отображение включения, при этом для размерностей выполнено соотношение

$$(2) \quad \dim M - \dim P = \dim N - \dim O.$$

Кроме того, если (O, φ) — вложенное подмногообразие, то и (P, i) — вложенное подмногообразие, и в этом случае на P существует единственная структура многообразия, такая, что (P, i) — подмногообразие в M .

Вообще говоря, если φ не является вложением, топология на P не обязательно должна быть индуцированной топологией и потому на нем может не быть единственной структуры многообразия, такой, что (P, i) — подмногообразие. Мы оставляем читателю придумать соответствующие примеры.

Доказательство. Доказательство будет заключаться в том, чтобы локально свести эту теорему к предыдущей. Пусть $p \in O$. Согласно предложению 1.35, мы можем выбрать окрестность W

точки p и систему координат (V, τ) с началом $\varphi(p)$ и координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, такие, что $\varphi(W)$ будет срезом, задаваемым уравнениями

$$(3) \quad x_{c+j} = 0 \quad (j = 1, \dots, d - c).$$

Пусть

$$(4) \quad \begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^{d-c}, \\ \pi(a) &= (a_{c+1}, \dots, a_d). \end{aligned}$$

Тогда

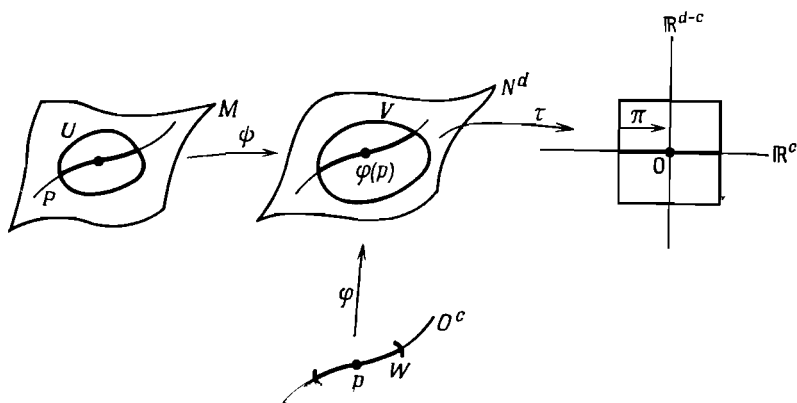
$$(5) \quad \pi \circ \tau (\varphi(W)) = \{0\}.$$

Положим

$$(6) \quad U = \psi^{-1}(V)$$

и

$$(7) \quad \psi_1 = \pi \circ \tau \circ \psi|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^{d-c}.$$



Из (3)—(7) получаем

$$(8) \quad \psi_1^{-1}(0) = \psi^{-1}(\varphi(W)).$$

Для каждой точки $m \in \psi_1^{-1}(0)$ ограничение дифференциала $d\psi_1|_{M_m}$ будет сюръективным отображением, поскольку $d(\pi \circ$

$\circ \tau) | N_{\psi(m)}$ является сюръективным и поскольку в силу (1), (5) и (7)

$$d(\pi \circ \tau)(N_{\psi(m)}) = d\psi_1(M_m) + \{0\}.$$

Согласно теореме 1.38, множество $\psi^{-1}(\varphi(W))$ имеет единственную структуру многообразия, такую, что $(\psi^{-1}(\varphi(W)), i)$ — подмногообразие в M ; в этой структуре многообразия топология на $\psi^{-1}(\varphi(W))$ — индуцированная топология и его размерность равна $\dim M - \dim N + \dim O$. Покроем O счетным набором $\{W_i; i = 1, 2, 3, \dots\}$ таких множеств. Тогда

$$(9) \quad P = \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi^{-1}(\varphi(W_i)).$$

Если $i \neq j$, то пересечение подмногообразий $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ и $\psi^{-1}(\varphi(W_j))$ является открытым подмножеством в них обоих. Это означает, что объединение топологий на различных $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ образует базу топологии на P . В этой топологии P будет локально евклидовым пространством размерности $\dim M - \dim N + \dim O$. Кроме того, для P выполняется вторая аксиома счетности, поскольку оно (согласно (9)) является счетным объединением открытых подмножеств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Структуры многообразий на различных $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ согласованы на пересечениях, потому что на $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ (или на любом открытом подмножестве из $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$) существует единственная структура многообразия, при которой $(\psi^{-1}(\varphi(W_i)), i)$ будет подмногообразием в M (см. теоремы из разд 1.33). Набор систем координат на P , содержащий системы координат на различных $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ и максимальный среди удовлетворяющих условию 1.4 (b), образует дифференцируемую структуру на P . Поскольку $(\psi^{-1}(\varphi(W_i)), i)$ — подмногообразия в M , то (P, i) — подмногообразие в M . Если подмногообразие (O, φ) вложенное, то координатная окрестность V может быть выбрана настолько малой, что пересечение $\varphi(O) \cap V$ будет состоять из единственного среза $\varphi(W)$, и, таким образом, $U \cap P = \psi^{-1}(\varphi(W))$. Значит, в этом случае топология на P — индуцированная топология, поэтому (P, i) — вложение. Единственность структуры многообразия в этом случае гарантируется теоремой (b) из разд. 1.33.

1.40. Примеры

(а) Дифференциал функции $f(p) = \sum_{i=1}^d r_i^2(p)$ на $\mathbb{R}^d$ будет сюръективным отображением везде, кроме начала координат. Согласно теореме 1.38, на сфере $f^{-1}(r^2)$, где r — некоторая положительная постоянная, имеется единственная структура много-

образия, которая превращает ее вместе с отображением включения в подмногообразие в $\mathbb{R}^d$. Заметим, что это та же структура многообразия, которая была определена в примере 1.5 (d).

(b) Мы определим отображение ψ полной линейной группы $GL(d; \mathbb{R})$ (пример 1.5 (f)) в векторное пространство всех вещественных симметричных матриц размера $d \times d$, полагая

$$\psi(A) = AA^t,$$

где A^t — матрица, транспонированная к A . Положим

$$O(d) = \psi^{-1}(I),$$

где I — это единичная матрица размера $d \times d$. Совокупность $O(d)$ является подгруппой группы $GL(d; \mathbb{R})$ относительно операции матричного умножения и называется *ортогональной группой*. Для того чтобы с помощью теоремы 1.38 убедиться, что $O(d)$ имеет единственную структуру многообразия, такую, что $(O(d), i)$ будет подмногообразием в $GL(d; \mathbb{R})$, а также что i будет вложением относительно этой структуры и что размерность $O(d)$ равна $(1/2)(d(d-1))$, надо только проверить, что $d\psi_\sigma$ сюръективно в каждой точке $\sigma \in O(d)$. Для этого достаточно проверить, что $d\psi_I$ сюръективно, поскольку для всех $\sigma \in O(d)$

$$\psi = \psi \circ r_\sigma,$$

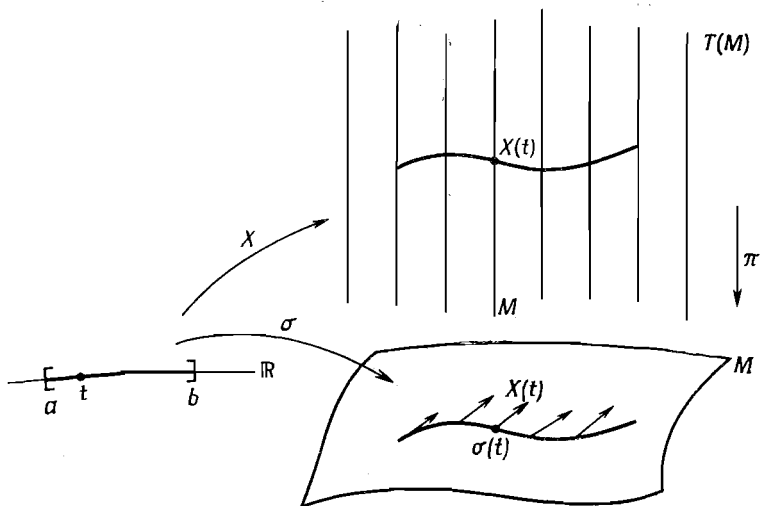
где r_σ (правый сдвиг на σ) — диффеоморфизм $GL(d; \mathbb{R})$, определенный соотношением $r_\sigma(\tau) = \tau\sigma$. Мы оставляем детали доказательства читателю в качестве упражнения.

Векторные поля

1.41. Определения. Понятия гладких кривых $\sigma: (a, b) \rightarrow M$ и их касательных векторов $\dot{\sigma}(t)$ были введены в разд. 1.23 (e). Скажем, что отображение $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ есть *гладкая кривая в M* , если для некоторого $\varepsilon > 0$ отображение σ продолжается до гладкого отображения $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow M$. Кривая $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ называется *кусочно-гладкой*, если существует такое разбиение отрезка $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$, что каждое ограничение $\sigma|_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}$ будет гладкой кривой для любого $i = 0, \dots, n-1$. Заметим, что кусочно-гладкие кривые обязательно непрерывны. Для гладкой кривой $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ в каждой точке $t \in [a, b]$ определен ее касательный вектор

$$\dot{\sigma}(t) = d\sigma \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in M_{\sigma(t)}.$$

1.42. Определения. Векторным полем X вдоль кривой $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ называется отображение $X: [a, b] \rightarrow T(M)$, которое накрывает σ , т. е. $\pi \circ X = \sigma$. Векторное поле X называется



гладким (или класса C^∞) векторным полем вдоль σ , если отображение $X: [a, b] \rightarrow T(M)$ гладкое. Векторным полем X на открытом множестве U в M называется сечение проекции π , т. е. отображение $X: U \rightarrow T(M)$, такое, что

$$\pi \circ X = \text{тождественное отображение на } U.$$

То, что векторное поле X является гладким, означает, что $X \in C^\infty(U, T(M))$. Множество гладких векторных полей над U образует векторное пространство над $\mathbb{R}$ и модуль над кольцом гладких функций на U . Если X — векторное поле на U и $t \in U$, то $X(t)$ (часто его обозначают X_t) — элемент касательного пространства M_t . Если f — гладкая функция на U , то $X(f)$ будет функцией на U , принимающей в точке t значение $X_t(f)$.

1.43. Предложение. Пусть X — векторное поле на M . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) X — гладкое векторное поле.

(б) Если $(U, x_1, \dots, x_d)$ — система координат на M и $\{a_i\}$ — набор функций на U , определенный формулой

$$X|U = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

то $a_i \in C^\infty(U)$.

(с) Если V — открытое множество в M , f — гладкая функция на V , то $X(f) \in C^\infty(V)$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (b). Тот факт, что X — гладкое векторное поле, означает, что ограничение $X|U$ тоже гладкое, и так как композиция гладких отображений гладкая, то $dx_i \circ X|U$ гладкое. (Вспомним, что dx_i — это координатные функции на $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$, см. разд. 1.25 (3).) Но

$$dx_i \circ X|U = a_i.$$

Поэтому a_i — гладкие функции на U .

(b) $\Rightarrow$ (с). Достаточно доказать, что $X(f)|U \in C^\infty(U)$, где $(U, x_1, \dots, x_d)$ — произвольная система координат на M , для которой $U \subset V$. Но по п. (b)

$$X(f)|U = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

и правая часть является гладкой функцией на U .

(с) $\Rightarrow$ (а). В этом случае достаточно доказать, что ограничение $X|U$ будет гладким для произвольной системы координат в $(U, x_1, \dots, x_d)$ на M . Для этого надо проверить, что $X|U$ в композиции с каноническими координатными функциями 1.25 (3) на $\pi^{-1}(U)$ дает гладкие отображения. Теперь $x_i \circ \pi \circ X|U = x_i$ и $dx_i \circ X|U = X(x_i)$ и все они являются гладкими на U .

1.44. Скобки Ли. Пусть X и Y — гладкие векторные поля на M . Определим векторное поле $[X, Y]$, называемое *скобками Ли* векторных полей X и Y , полагая

$$(1) \quad [X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf).$$

1.45. Предложение. (а) $[X, Y]$ — гладкое векторное поле на M .

(b) Если f и g — гладкие функции на M , то $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

(с) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(d) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ для всех гладких векторных полей X, Y и Z на M .

Оставляем доказательство этого предложения в качестве упражнения. Утверждение (d) известно под названием *тождества Якоби*. Векторное пространство с билинейной операцией, удовлетворяющей условиям (с) и (d), называется *алгеброй Ли*.

1.46. Определение. Пусть X — гладкое векторное поле на M . Гладкая кривая σ на M называется *интегральной кривой* векторного поля X , если

$$(1) \quad \dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$$

для любого значения параметра t из области определения кривой σ .

1.47. Пусть X — гладкое векторное поле на M и $m \in M$. Зададимся вопросом: существует ли интегральная кривая X , проходящая через m , и если существует, то будет ли она единственной?

Кривая $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ будет интегральной кривой поля X тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad d\gamma \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = X(\gamma(t)) \quad (t \in (a, b)).$$

Запишем это в координатах. Допустим, что $0 \in (a, b)$ и $\gamma(0) = m$. Выберем систему координат (U, φ) с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$ и с началом m . Согласно 1.43 (b),

$$(2) \quad X|U = \sum_{i=1}^d f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где f_i — гладкие функции на U . Кроме того, для каждого параметра t , такого, что $\gamma(t) \in U$, имеем

$$(3) \quad d\gamma \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = \sum_{i=1}^d \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Таким образом, с учетом равенств (2) и (3) уравнение (1) переписывается в виде

$$(4) \quad \sum_{i=1}^d \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dr} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^d f_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Значит, кривая γ будет интегральной кривой поля X на $\gamma^{-1}(U)$ тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad \frac{d\gamma_i}{dr} \Big|_t = f_i \circ \varphi^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_d(t)) \quad (i = 1, \dots, d; \quad t \in \gamma^{-1}(U)),$$

где $\gamma_i = x_i \circ \gamma$. Уравнения (5) — это система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для которой имеются фундаментальные теоремы существования и единственности решения [11]. Записывая эти теоремы на языке многообразий, получим следующую теорему.

1.48. Теорема. Пусть X — гладкое векторное поле на дифференцируемом многообразии M . Для каждой точки m из M существуют $a(m)$ и $b(m)$ из $\mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ и гладкая кривая

$$(1) \quad \gamma_m: (a(m), b(m)) \rightarrow M,$$

такие, что

(а) $0 \in (a(m), b(m))$ и $\gamma_m(0) = m$.

(б) γ_m — интегральная кривая поля X .

(с) Если $\mu: (c, d) \rightarrow M$ — гладкая кривая, для которой выполнены условия (а) и (б), то $(c, d) \subset (a(m), b(m))$ и $\mu = \gamma_m|_{(c, d)}$.

Мы продолжим формулировку теоремы после того, как дадим следующее определение.

Определение. Для каждой точки $t \in \mathbb{R}$ мы определим преобразование X_t на области

$$(2) \quad \mathcal{D}_t = \{m \in M: t \in (a(m), b(m))\},$$

полагая

$$(3) \quad X_t(m) = \gamma_m(t).$$

(д) Для каждого $m \in M$ существуют открытая окрестность V точки m и такое $\varepsilon > 0$, что отображение

$$(4) \quad (t, p) \mapsto X_t(p)$$

определено на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ и является гладким отображением из $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ в M .

(е) $\mathcal{D}_t$ — открытое множество для каждого t .

$$(f) \quad \bigcup_{t > 0} \mathcal{D}_t = M.$$

(г) Преобразование $X_t: \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$ — диффеоморфизм и X_{-t} — обратный к нему диффеоморфизм.

(h) Пусть s и t — вещественные числа. Тогда область определения композиции $X_s \circ X_t$ содержится в $\mathcal{D}_{s+t}$, но, вообще говоря, не совпадает с ней. Эти множества будут совпадать, если s и t имеют одинаковые знаки. Кроме того, на области определения $X_s \circ X_t$

$$(5) \quad X_s \circ X_t = X_{s+t}.$$

Доказательство. Пусть $(a(m), b(m))$ — объединение всех открытых интервалов, содержащих начало координат и являющихся областями определения интегральных кривых поля X , для которых выполнено начальное условие, что начало координат переходит в m . Применяя фундаментальную теорему существования (см. [11, теорема 4, с. 28]) к системе 1.47 (5), получим, что $(a(m), b(m)) \neq \emptyset$ (и, следовательно, выполнен п. (f)). Если интегральные кривые α и β поля X , областями определения которых служат открытые интервалы A и B (такие, что $A \cap B \neq \emptyset$), удовлетворяют одинаковым начальным условиям $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ в некоторой точке $t_0 \in A \cap B$, то подмножество $A \cap B$, на котором α и β совпадают, будет непустым, открытым, согласно основной теореме

единственности (см. [11, теорема 3, с. 28]), и замкнутым по непрерывности. Поскольку $A \cap B$ связно, получаем, что это подмножество должно совпадать с $A \cap B$. Из этого заключаем, что существует кривая γ_m , определенная на $(a(m), b(m))$ и удовлетворяющая условиям (a), (b) и (c).

Существование такого $\varepsilon > 0$ и такой окрестности V точки m , что отображение (4) определено на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$, составляет содержание теоремы 7 на с. 29 в [11]. Тот факт, что отображение (4) гладкое (и, следовательно, справедлив п. (d)), следует из теоремы 9 на с. 29 в [11] о дифференцируемости решений системы 1.47 (5) по начальным условиям.

Теперь докажем п. (h). Пусть $t \in (a(m), b(m))$. Тогда $s \mapsto \gamma_m(t + s)$ задает интегральную кривую поля X с начальным условием $0 \mapsto \gamma_m(t)$ и с максимальной областью определения $(a(m) - t, b(m) - t)$. Из п. (c) получим, что

$$(6) \quad (a(m) - t, b(m) - t) = (a(\gamma_m(t)), b(\gamma_m(t))),$$

а для каждого s из интервала (6)

$$(7) \quad \gamma_{\gamma_m}(s) = \gamma_m(t + s).$$

Пусть m принадлежит области определения композиции $X_s \circ X_t$. В этом случае $t \in (a(m), b(m))$ и $s \in (a(\gamma_m(t)), b(\gamma_m(t)))$ и в силу (6) $s + t \in (a(m), b(m))$. Таким образом, $m \in \mathcal{D}_{s+t}$, и (5) следует из (7). Вообще говоря, область определения преобразования $X_s \circ X_t$ не совпадает с $\mathcal{D}_{s+t}$, и легко строятся примеры, показывающие это. (Рассмотрим, например, векторное поле $\partial/\partial r_1$ на $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ и возьмем $s = -1$ и $t = 1$.) Однако, если s и t имеют одинаковые знаки и если $m \in \mathcal{D}_{s+t}$, т. е. если $s + t \in (a(m), b(m))$, то $t \in (a(m), b(m))$ и, согласно (6), $s \in (a(\gamma_m(t)), b(\gamma_m(t)))$; следовательно, m принадлежит области определения преобразования $X_s \circ X_t$.

Утверждения (e) и (g) очевидны, когда $t = 0$. Поэтому предположим, что $t > 0$ и что $m \in \mathcal{D}_t$. (Доказательство этих утверждений при $t < 0$ проводится аналогично.) Используя утверждение (d) и компактность отрезка $[0, t]$, получаем, что существуют окрестность W образа $\gamma_m([0, t])$ и $\varepsilon > 0$, такие, что отображение (4) определено и является гладким на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$. Выберем достаточно большое целое n , чтобы $t/n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Пусть $\alpha_1 = X_{t/n}|W$, и пусть $W_1 = \alpha_1^{-1}(W)$. Для $i = 2, \dots, n$ определим по индукции

$$\alpha_i = X_{t/n}|W_{i-1}$$

и

$$W_i = \alpha_i^{-1}(W_{i-1}),$$

тогда α_i — гладкое отображение на открытом множестве $W_{i-1} \subset W$. Отсюда вытекает, что W_n — открытое подмножество в W ,

содержащее m (потому что, применяя к m n раз преобразование $X_{t/n}$, мы получим точку $\gamma_m(t)$, которая лежит в W). Теперь, согласно утверждению (h),

$$(8) \quad \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n | W_n = X_t | W_n.$$

Поэтому $W_n \subset \mathcal{D}_t$; следовательно, $\mathcal{D}_t$ открыто, что и доказывает утверждение (e).

Окончательно получаем, что X_t — взаимно однозначное отображение $\mathcal{D}_t$ на $\mathcal{D}_{-t}$ с обратным X_{-t} . Тот факт, что X_t является гладким, следует из равенства (8), локально представляющего X_t как композицию гладких отображений (аналогично устанавливается гладкость X_{-t}). Следовательно, X_t — это диффеоморфизм $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_{-t}$, что доказывает утверждение (g) и завершает доказательство теоремы 1.48.

1.49. Определения. Гладкое векторное поле X на M называется *полным*, если $\mathcal{D}_t = M$ для всех t (т. е. для каждой точки $m \in M$ областью определения кривой γ_m будет $(-\infty, \infty)$). В этом случае преобразования X_t образуют группу преобразований многообразия M , параметризованную вещественными числами. Эта группа носит название *однопараметрической группы*, порожденной полем X . Однако если векторное поле X не будет полным, то преобразования X_t не будут образовывать группу, поскольку их области определения будут зависеть от t . В этом случае мы будем называть семейство преобразований X_t *локальной однопараметрической группой*, порожденной полем X .

1.50. Замечания. Простым примером неполного векторного поля служит векторное поле $\partial/\partial r_1$ на плоскости с выколотым началом координат. При $a > 0$ область определения максимальной интегральной кривой, проходящей через точку $(a, 0)$, равна $(-a, +\infty)$. Если же многообразие M является компактом, любое гладкое векторное поле на M полно. Мы оставляем доказательство читателю в качестве упражнения.

1.51. Определение. Пусть отображение $\psi: M \rightarrow N$ гладкое. Говорят, что гладкое векторное поле X вдоль ψ (это означает, что $X \in C^\infty(M, T(N))$ и $\pi \circ X = \psi$) *локально гладко продолжается* на N , если для заданной точки $m \in M$ существуют ее окрестность U и окрестность V точки $\psi(m)$, такие, что $\psi(U) \subset V$, а также гладкое векторное поле $\tilde{X}$ на V , такое, что

$$(1) \quad \tilde{X} \circ \psi | U = X | U.$$

1.52. Замечание. Легко доказать, что гладкое векторное поле X вдоль погружения $\psi: M \rightarrow N$ всегда имеет локальные гладкие продолжения в N . Тем не менее, если ψ — не погружение, таких продолжений, вообще говоря, не существует. Рассмотрим

следующий пример. Зададим гладкое векторное поле X вдоль гладкой кривой $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ на вещественной прямой. Положим

$$(1) \quad \alpha(t) = t^3$$

(т. е. $\alpha = r^3$, где r — каноническая координатная функция на $\mathbb{R}$) и

$$(2) \quad X(t) = \dot{\alpha}(t) = d\alpha \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right).$$

Поскольку α — гомеоморфизм, на прямой $\mathbb{R}^1$ индуцируется векторное поле $\tilde{X}$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}^1) & \xrightarrow{d\alpha} & T(\mathbb{R}^1) \\ \uparrow \frac{d}{dr} & \nearrow X & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \tilde{X} \end{array}$$

коммутативна. Тогда X — гладкое векторное поле вдоль α , однако $\tilde{X}$ не будет гладким векторным полем на $\mathbb{R}^1$. Рассмотрим $u = t^3$. Тогда

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{X}_u &= \tilde{X}_{\alpha(t)} = X(t) = d\alpha \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = \\ &= \frac{d\alpha}{dr} \Big|_t \frac{d}{dr} \Big|_{\alpha(t)} = 3t^2 \frac{d}{dr} \Big|_{\alpha(t)} = 3u^{2/3} \frac{d}{dr} \Big|_u. \end{aligned}$$

Получаем

$$(4) \quad \tilde{X} = 3r^{2/3} \frac{d}{dr},$$

и функция $r^{2/3}$ недифференцируема в начале координат. Если мы будем рассматривать α как отображение в плоскость, полагая

$$(5) \quad \alpha(t) = (t^3, 0),$$

и положим $X(t) = \dot{\alpha}(t)$, то X будет гладким векторным полем вдоль инъективной гладкой кривой α на плоскости, которое не имеет локальных гладких продолжений на окрестность начала координат.

1.53. Предложение. Пусть $m \in M^d$ и X — гладкое векторное поле на M , такое, что $X(m) \neq 0$. Тогда существует система координат (U, φ) с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$ в окрестности точки m , для которых

$$(1) \quad X|U = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_U.$$

Доказательство. Выберем систему координат (V, τ) с началом m и координатными функциями $y_1, \dots, y_d$, такими, что

$$(2) \quad X_m = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_m.$$

Согласно 1.48 (d), существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность W начала координат в $\mathbb{R}^{d-1}$, такие, что отображение

$$\sigma(t, a_2, \dots, a_d) = X_t(\tau^{-1}(0, a_2, \dots, a_d))$$

корректно определено и является гладким при $(t, a_2, \dots, a_d) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \subset \mathbb{R}^d$. Получаем, что σ невырожденно в начале координат, поскольку

$$d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_0\right) = X_m = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_m, \quad d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_0\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_m \quad (i \geq 2).$$

По следствию (а) из разд. 1.30 отображение $\varphi = \sigma^{-1}$ будет координатным в некоторой окрестности U точки m . Пусть $x_1, \dots, x_d$ обозначают координатные функции системы координат (U, φ) . Поскольку

$$d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_{(t, a_2, \dots, a_n)}\right) = X_{\sigma(t, a_2, \dots, a_n)},$$

получаем

$$X|U = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_U.$$

1.54. Определение. Пусть отображение $\varphi: M \rightarrow N$ гладкое. Гладкие векторные поля X на M и Y на N называются φ -связанными, если $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.

1.55. Предложение. Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Пусть X и X_1 — гладкие векторные поля на M , а Y и Y_1 — гладкие векторные поля на N . Если X и Y φ -связаны и X_1 и Y_1 φ -связаны, то векторные поля $[X, X_1]$ и $[Y, Y_1]$ тоже φ -связаны.

Доказательство. Нам нужно показать, что $d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$. Пусть $m \in M$ и $f \in C^\infty(N)$. Надо показать, что

$$(1) \quad d\varphi([X, X_1]_m)(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f).$$

Мы просто развернем определения:

$$\begin{aligned} (2) \quad d\varphi([X, X_1]_m)(f) &= [X, X_1]_m(f \circ \varphi) = \\ &= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1|_m(X(f \circ \varphi)) = \\ &= X_m((d\varphi \circ X_1)(f)) - X_1|_m((d\varphi \circ X)(f)) = \\ &= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1|_m(Y(f) \circ \varphi) = \\ &= d\varphi(X_m)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1|_m)(Y(f)) = \\ &= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1|_{\varphi(m)}(Y(f)) = \\ &= [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f). \end{aligned}$$

Распределения и теорема Фробениуса

1.56. Определения. Пусть c — целое число, $1 \leq c \leq d$. Скажем, что на d -мерном многообразии M определено c -мерное *распределение* $\mathcal{D}$, если для каждой точки m из M выбрано c -мерное подпространство $\mathcal{D}(m)$ пространства M_m . Распределение называется *гладким*, если для каждой точки m из M существует ее окрестность U и c гладких векторных полей $X_1, \dots, X_c$ на этой окрестности, порождающих $\mathcal{D}$ в каждой точке окрестности U . Говорят, что векторное поле X на M *принадлежит* распределению $\mathcal{D}$, или *лежит в* $\mathcal{D}$ ($X \in \mathcal{D}$), если $X_m \in \mathcal{D}(m)$ для каждой точки $m \in M$. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ называется *инволютивным* (или *вполне интегрируемым*), если $[X, Y] \in \mathcal{D}$ для любых гладких векторных полей X и Y , лежащих в $\mathcal{D}$.

1.57. Определение. Подмногообразие (N, ψ) многообразия M называется *интегральным многообразием* распределения $\mathcal{D}$ на M , если

$$(1) \quad d\psi(N_n) = \mathcal{D}(\psi(n)) \text{ для каждого } n \in N.$$

1.58. Замечания. Цель раздела «Распределения и теорема Фробениуса» — доказать, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы через каждую точку многообразия M проходило интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, является инволютивность $\mathcal{D}$. Объясним в нескольких словах, почему вместо термина «инволютивный» иногда употребляется выражение «вполне интегрируемый». Мы потребовали, чтобы интегральные многообразия были такими подмногообразиями в M , касательные пространства которых совпадают с подпространствами, составляющими данное распределение. Однако можно ввести более слабое понятие интегрального многообразия, требуя, чтобы касательные пространства подмногообразия содержались, но не обязательно совпадали с распределением в каждой точке. Распределение $\mathcal{D}$ может быть «интегрируемым» в том смысле, что оно имеет интегральные многообразия малых размерностей, но не быть «вполне интегрируемым» в том смысле, что оно не имеет интегральных многообразий максимальной размерности. Мы, однако, если не оговорено противное, под интегральными многообразиями распределения всегда будем понимать интегральные многообразия максимальной размерности, как это определено в разд. 1.57.

1.59. Предложение. Пусть $\mathcal{D}$ — гладкое распределение на многообразии M , такое, что через каждую точку из M проходит его интегральное многообразие. Тогда $\mathcal{D}$ — инволютивное распределение.

Доказательство. Пусть X и Y — гладкие векторные поля, лежащие в $\mathcal{D}$, и пусть $m \in M$. Нам надо доказать, что $[X, Y]_m \in \mathcal{D}(m)$. Пусть (N, ψ) — интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через m , и допустим, что $\psi(n_0) = m$. Поскольку $d\psi: N_n \rightarrow \mathcal{D}(\psi(n))$ — изоморфизм в каждой точке n из N , то существуют векторные поля $\tilde{X}, \tilde{Y}$ на N , такие, что

$$(1) \quad d\psi \circ \tilde{X} = X \circ \psi, \quad d\psi \circ \tilde{Y} = Y \circ \psi.$$

Легко проверить, что они гладкие. Согласно 1.55, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ и $[X, Y]$ оказываются ψ -связанными. Следовательно, $[X, Y]_m = d\psi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{n_0}) \in \mathcal{D}(m)$.

1.60. Теорема Фробениуса. Пусть $\mathcal{D}$ — инволютивное гладкое s -мерное распределение на M^d . Пусть $m \in M$. Тогда существует интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через точку m . На самом деле существует кубическая система координат (U, φ) с началом в m и координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, такими, что срез

$$(1) \quad x_i = \text{const} \text{ для всех } i \in \{s+1, \dots, d\}$$

будут интегральными многообразиями распределения $\mathcal{D}$, а если (N, ψ) — связанное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, такое, что $\psi(N) \subset U$, то $\psi(N)$ лежит в одном из этих срезов.

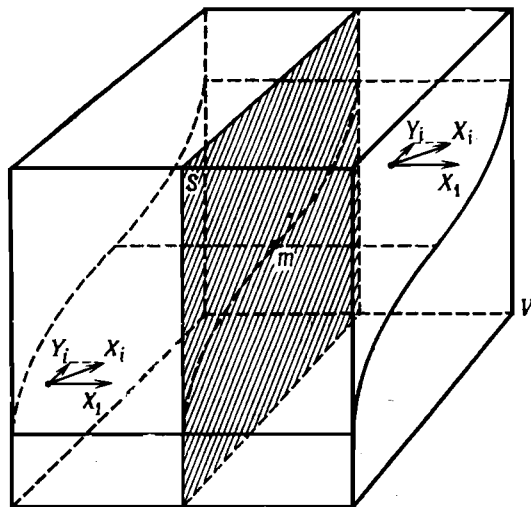
Доказательство. Мы докажем утверждение о существовании интегрального многообразия индукцией по s . Для $s = 1$ выберем векторное поле X , лежащее в $\mathcal{D}$, определенное в открытой окрестности точки m и такое, что $X(m) \neq 0$. Согласно утверждению 1.53, существует система координат (U, φ) с началом в m , которую можно выбрать кубической и для которой $X|U = \partial/\partial x_1$. Теорема доказана для $s = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы выполнено для $s-1$, теперь докажем теорему для распределения $\mathcal{D}$ размерности s . Поскольку $\mathcal{D}$ гладкое, то существуют гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_s$, которые порождают $\mathcal{D}$ в окрестности $\tilde{V}$ точки m . Согласно 1.53, существует система координат $(V, y_1, \dots, y_d)$ с началом в m , такая, что $V \subset \tilde{V}$ и

$$(2) \quad X_1|V = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

На V положим

$$(3) \quad \begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1) X_1 \quad (i = 2, \dots, s). \end{aligned}$$



Тогда векторные поля $Y_1, \dots, Y_c$ оказываются независимыми гладкими векторными полями, на которые натянуто $\mathcal{D}$ в окрестности V . Пусть S обозначает срез $y_1 = 0$, и пусть

$$(4) \quad Z_i = Y_i|_S \quad (i = 2, \dots, c).$$

Поскольку из (2) и (3) следует, что

$$Y_i(y_1) = 0 \quad (i = 2, \dots, c),$$

то Z_i действительно оказываются векторными полями на S , т. е. $Z_i(q) \in S_q$ для любых $q \in S$. На Z_i натянуто гладкое $(c-1)$ -мерное распределение на S . Мы утверждаем, что оно инволютивно. Действительно, Z_i и Y_i оказываются i -связанными (i — отображение включения S в M) и, согласно предложению 1.55, их скобки Ли также являются i -связанными. Составляющая скобок Ли $[Y_i, Y_j]$ ($i, j \geq 2$) в направлении Y_1 будет нулевой (примените скобки Ли к y_1 и получите 0). Поэтому существуют гладкие функции c_{ijk} , такие, что

$$(6) \quad [Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk} Y_k$$

на V , а следовательно,

$$(7) \quad [Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk}|_S Z_k.$$

Мы доказали, что распределение на S инволютивно. По предположению индукции существует система координат $\omega_2, \dots, \omega_d$

в некоторой окрестности точки m из S и с началом в этой точке, такая, что срезы, определенные равенствами $w_i = \text{const}$ для всех $i \in \{c+1, \dots, d\}$, оказываются интегральными многообразиями распределения, натянутого на $Z_2, \dots, Z_c$ в этой окрестности.

Функции

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_j &= w_j \circ \pi \quad (j = 2, \dots, d), \end{aligned}$$

где $\pi: V \rightarrow S$ — естественная проекция в системе координат $(V, y_1, \dots, y_d)$, определены в некоторой окрестности точки m из M , независимы в этой точке и принимают в ней нулевое значение. Итак, мы видим, что можно построить кубическую систему координат (U, φ) с координатными функциями $x_1, \dots, x_d$ на подходящей окрестности U точки m . Сейчас мы докажем, что

$$(9) \quad Y_i(x_{c+r}) \equiv 0 \text{ на } U \quad (i = 1, \dots, c; r = 1, \dots, d-c).$$

Из этих равенств мы получим, что векторные поля $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_c$ образуют базис распределения $\mathcal{D}$ в каждой точке окрестности U , а поэтому срезы, определенные соотношениями (1), будут интегральными многообразиями распределения $\mathcal{D}$.

Сначала заметим, что из равенств (8) вытекает

$$(10) \quad \frac{\partial x_j}{\partial y_1} = \begin{cases} 1 & (j = 1), \\ 0 & (j = 2, \dots, d) \end{cases}$$

на U , а поэтому из (2), (3) и (10) получаем, что

$$(11) \quad Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ на } U,$$

так что, разумеется, (9) выполняется для $i = 1$. Пусть $i \in (2, \dots, c)$ и $r \in \{1, \dots, d-c\}$. Согласно (11),

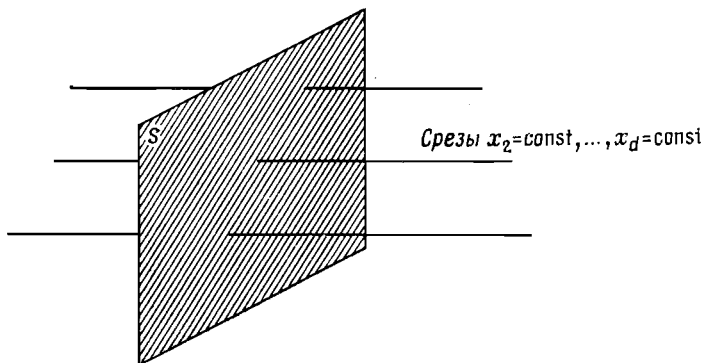
$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (Y_i(x_{c+r})) = Y_1(Y_i(x_{c+r})) = [Y_1, Y_i](x_{c+r}).$$

Из инволютивности распределения $\mathcal{D}$ следует существование гладких функций c_{ij} , таких, что

$$(13) \quad [Y_1, Y_i] = \sum_{k=1}^c c_{ik} Y_k.$$

Используя (13), (12) можно переписать в виде

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (Y_i(x_{c+r})) &= \sum_{k=2}^c c_{ik} Y_k(x_{c+r}) \quad (i = 2, \dots, \\ &\dots, c; r = 1, \dots, d-c). \end{aligned}$$



Рассмотрим срез U вида $x_2 = \text{const}, \dots, x_d = \text{const}$. На таком срезе $Y_i(x_{c+r})$ будет функцией только одного аргумента x_1 , а (14) станет системой из $c - 1$ однородных линейных дифференциальных уравнений относительно x_1 . Такая система имеет единственное решение с заданными начальными условиями [11]. Поскольку система однородна, решением будут нулевые функции. Но ровно по одной точке каждого такого среза лежит в $S \cap U$, и на $S \cap U$

$$(15) \quad Y_i(x_{c+r}) = Z_i(\omega_{c+r}) = 0 \quad (i = 2, \dots, c).$$

Первое равенство следует из (4) и (8), а второе — из того, что интегральные многообразия распределения на S , определенного векторными полями Z_i , задаются подходящими срезами координатной системы $\omega_2, \dots, \omega_d$. Согласно (14) и (15), функции $Y_i(X_{c+r})$ будут тождественными нулями на U . Итак, (9) имеет место, и доказательство по индукции завершено.

Предположим, что (N, ψ) — связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, такое, что $\psi(N) \subset U$. Пусть π — проекция $\mathbb{R}^d$ на последние $d - c$ координат. Векторы из $\mathcal{D}$ аннулируются $d(\pi \circ \varphi)$. Тогда

$$d(\pi \circ \varphi \circ \psi)|_n \equiv 0$$

для каждого n из N . Поскольку N связно, то, согласно 1.24, $\pi \circ \varphi \circ \psi$ будет постоянным отображением. Следовательно, $\psi(N)$ содержится в одном из срезов (1).

1.61. Замечания. Классическая формулировка теоремы Фробениуса совсем не похожа на представленную нами в разд. 1.60. Классический вариант можно сформулировать в следующем виде.

Пусть U и V — открытые множества в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Обозначим через $r_1, \dots, r_m$ координаты в $\mathbb{R}^m$ и через $s_1, \dots, s_n$ координаты в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$(1) \quad b: U \times V \rightarrow M(n, m)$$

— гладкое отображение из $U \times V$ в множество всех вещественных матриц размера $n \times m$. Пусть $(r_0, s_0) \in U \times V$. Если на $U \times V$ для всех $i = 1, \dots, n$ и всех $\gamma, \beta = 1, \dots, m$ выполнено равенство

$$(2) \quad \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial r_\beta} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_{i\beta}}{\partial s_j} b_{j\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial s_j} b_{j\beta} \right) = 0,$$

то существуют окрестность U_0 точки r_0 в U и окрестность V_0 точки s_0 в V , а также единственное гладкое отображение

$$(3) \quad \alpha: U_0 \times V_0 \rightarrow V,$$

такие, что если

$$\alpha_s(r) = \alpha(r, s) \quad (s \in V_0, r \in U_0),$$

то

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha_s(r_0) &= s, \\ d\alpha_s|_r &= b(r, \alpha)(r, s) \end{aligned}$$

для всех $(r, s) \in U_0 \times V_0$.

Уравнение (4) — это так называемое *уравнение в полных дифференциалах*. В (4) мы показываем, как дифференциал отображения α_s связан со значениями отображения b на графике α_s , а в (2) выражено необходимое и достаточное условие существования такого отображения с заданными начальными условиями. Можно показать, что эта формулировка эквивалентна данной в разд. 1.60. Например, если задано инволютивное гладкое c -мерное распределение $\mathcal{D}$ на M^d в точке $m \in M$, то, исходя из классического варианта теоремы, мы получим формулировку из разд. 1.60 следующим образом. Сначала выберем систему координат (W, τ) в окрестности точки m с координатными функциями $y_1, \dots, y_d$ и с $\tau(W) = U \times V \subset \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{d-c}$, для которой существуют гладкие функции f_{ij} на $U \times V$ ($i = 1, \dots, c$; $j = 1, \dots, d - c$), такие, что векторные поля

$$(5) \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{d-c} f_{ij} \circ \tau \frac{\partial}{\partial y_{c+j}} \quad (i = 1, \dots, c)$$

порождают распределение $\mathcal{D}$ на W . Теперь определим отображение b (см. (1)), полагая

$$(6) \quad b(r, s) = \{f_{ji}(r, s)\}.$$

Оказывается, что из инволютивности распределения $\mathcal{D}$ следует справедливость равенств (2) и что по отображению α можно построить нужную систему координат 1.60 (1). Обратно, классическую формулировку можно получить из 1.60 аналогичным способом.

Во второй главе мы дадим еще одну формулировку теоремы Фробениуса в терминах дифференциальных форм и дифференциальных идеалов.

В разд. 1.32 мы рассмотрели ситуацию, когда гладкое отображение $\psi: M \rightarrow N$ пропускается через подмногообразие (P, φ) многообразия M , так что $\psi = \varphi \circ \psi_0$, где $\psi_0: N \rightarrow P$, и нашли достаточные условия для гладкости ψ_0 . Рассмотрим теперь важный случай, когда (P, φ) — интегральное многообразие инволютивного распределения на M .

1.62. Теорема. Пусть $\psi: N \rightarrow M^d$ — гладкое отображение, а (P^c, φ) — интегральное многообразие инволютивного распределения $\mathcal{D}$ на M , причем ψ пропускается через (P, φ) , т. е. $\psi(N) \subset \subset \varphi(P)$. Пусть $\psi_0: N \rightarrow P$ — (единственное) отображение, для которого $\varphi \circ \psi_0 = \psi$.

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi} & M^d \\ & \searrow \psi_0 & \uparrow \varphi \\ & & P^c \end{array}$$

Тогда ψ_0 — непрерывное (а следовательно, и гладкое согласно 1.32 (а)) отображение.

Доказательство. Пусть p принадлежит открытому множеству U в P , и пусть $n \in \psi_0^{-1}(p)$. Используя теорему 1.60, мы можем найти открытое множество $\tilde{U}$, удовлетворяющее условию $p \in \tilde{U} \subset U$, и кубическую систему координат (V, τ) с началом $\varphi(p)$ и координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, такие, что срезы

$$(2) \quad x_i = \text{const} \text{ для всех } i \in \{c+1, \dots, d\}$$

будут интегральными многообразиями распределения $\mathcal{D}$ на V , а $\varphi(\tilde{U})$ будет срезом

$$(3) \quad x_{c+1} = \dots = x_d = 0.$$

Множество $\psi^{-1}(V)$ открыто в N . Пусть W — связная компонента множества $\psi^{-1}(V)$, содержащая n ; это множество открыто. Для того чтобы доказать, что ψ_0 непрерывно, надо лишь показать, что $\psi_0(W) \subset \tilde{U} \subset U$. Используя коммутативность диаграммы (1) и инъективность отображения φ , достаточно доказать, что $\psi(W)$ лежит в срезе (3) системы координат V . Поскольку ψ непрерывно и W связно, то и $\psi(W)$ связно. Кроме того, $\psi(W)$ имеет по крайней мере одну общую точку $\psi(n)$ со срезом (3). Поскольку $\psi(W)$

принадлежит связной компоненте множества $\varphi(P) \cap V$, достаточно доказать, что связные компоненты множества $\varphi(P) \cap V$ содержатся в срезах вида (2).

Предположим, что C — связная компонента в $\varphi(P) \cap V$, и определим отображение $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^{d-c}$ соотношением

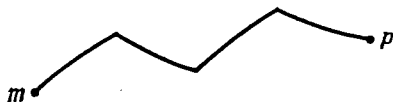
$$(4) \quad \pi(m) = (x_{c+1}(m), \dots, x_d(m)).$$

Поскольку для P выполнена вторая аксиома счетности и так как $\varphi(P) \cap V$ является объединением срезов (2) в силу того, что (P, φ) — интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, то $\pi(\varphi(P) \cap V)$ состоит из счетного числа точек пространства $\mathbb{R}^{d-c}$. Поэтому $\pi(C)$ — связное счетное подмножество в $\mathbb{R}^{d-c}$, а следовательно, $\pi(C)$ состоит из единственной точки и C лежит в единственном срезе.

1.63. Определение. Максимальным интегральным многообразием (N, ψ) распределения $\mathcal{D}$ на многообразии M называется связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, образ которого в M не является собственным подмножеством никакого другого связного интегрального многообразия распределения $\mathcal{D}$. То есть не существует связного интегрального многообразия (N_1, ψ_1) распределения $\mathcal{D}$, такого, что $\psi(N)$ будет собственным подмножеством в $\psi_1(N_1)$.

1.64. Теорема. Пусть $\mathcal{D}$ — гладкое инволютивное s -мерное распределение на M^d . Пусть $t \in M$. Тогда через t проходит единственное связное максимальное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, и любое другое связное интегральное многообразие этого распределения, проходящее через t , содержится в максимальном.

Доказательство. Существование. Пусть K — множество всех точек p из M , для которых существует кусочно-гладкая кривая, соединяющая t с p , гладкие участки которой — это одномерные



Интегральная кривая распределения $\mathcal{D}$.

интегральные кривые распределения $\mathcal{D}$, т. е. их касательные векторы принадлежат $\mathcal{D}$. Согласно теореме 1.60 и в силу того, что для M справедлива вторая аксиома счетности, существует счетное покрытие M кубическими системами координат $\{(U_i,$

$x_1^i, \dots, x_d^i$: $i = 0, 1, 2, \dots$ }, такими, что интегральные многообразия распределения $\mathcal{D}$ на U_i будут срезами

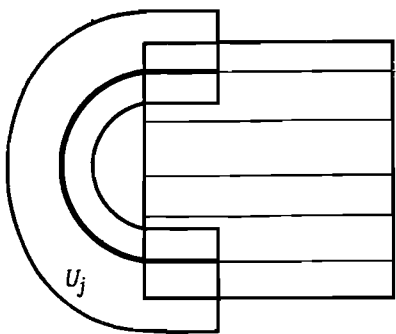
$$(1) \quad x_{c+j}^i = \text{const для всех } j \in \{1, \dots, d-c\}.$$

Будем предполагать, что $m \in U_0$.

Для любой точки $p \in K$ существуют индекс i_p , такой, что $p \in U_{i_p}$, и срез S_{i_p} окрестности U_{i_p} вида (1), содержащий p . Заметим, что $S_{i_p} \subset K$. Согласно теореме 1.60, набор всех открытых подмножеств всех срезов S_{i_p} по всем p из K образует базу локально евклидовой топологии на K , и если взять максимальное относительно свойства 1.4 (b) семейство систем координат (см. 1.4 (b)), содержащее набор

$$(2) \quad \{(S_{i_p}, x_1^{i_p} | S_{i_p}, \dots, x_c^{i_p} | S_{i_p}) : p \in K\},$$

то на K возникает дифференцируемая структура. Мы утверждаем, что K с такой топологией и дифференцируемой структурой будет связным дифференцируемым многообразием размерности c . Очевидно, что K связно, так как оно линейно связно по построению. Мы должны только доказать, что для топологии на K выполнена вторая аксиома счетности. Фиксируем $i \in (0, 1, 2, \dots)$. Нам надо лишь показать, что в K лежит не более чем счетное число срезов U_i . Каждую точку из U_i , принадлежащую K , можно



соединить с m кусочно-гладкой кривой, образ которой лежит в K . Каждой такой кривой, соединяющей m с точками из U_i , соответствует (не обязательно одна) конечная последовательность

$$(3) \quad U_0, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_i$$

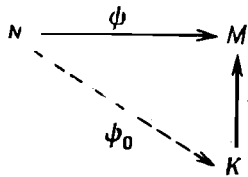
координатных окрестностей, которые поочередно пересекает эта

кривая. Таким образом, кривая начинается в срезе координатной окрестности U_0 , содержащем m , затем проходит через некоторый срез окрестности U_{i_1} , потом через некоторый срез окрестности U_{i_2} и так далее до тех пор, пока через конечное число шагов эта кривая не достигнет среза координатной окрестности U_i . Поскольку существует не более чем счетное число последовательностей (3) от U_0 до U_i , то нам нужно только показать, что для каждой такой последовательности существует не более чем счетное число срезов окрестности U_i , которых можно достичь описанным выше образом. Достаточно заметить, что для любых

$j, k \in (0, 1, \dots)$ один срез окрестности U_j может пересекать не более чем счетное число срезов окрестности U_k . Если S — срез окрестности U_j , то $S \cap U_k$ — открытое подмногообразие в S и, следовательно, состоит из не более чем счетного числа связных компонент, каждая из которых является связным интегральным многообразием распределения $\mathcal{D}$ на U_k и потому лежит в срезе окрестности U_k . Этим доказано выполнение второй аксиомы счетности для K .

(K, i) , где $i: K \rightarrow M$ — отображение включения, будет подмногообразием в M и связным интегральным многообразием распределения $\mathcal{D}$, проходящим через точку m . Кроме того, (K, i) — максимальное связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$. Действительно, пусть (N, ψ) — произвольное связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через точку m , и пусть $p \in \psi(N)$. Существует кусочно-гладкая кривая $c: [0, 1] \rightarrow N$, соединяющая $\psi^{-1}(m)$ и $\psi^{-1}(p)$. (Связные многообразия являются линейно связными.) Тогда $\psi \circ c$ будет кусочно-гладкой одномерной интегральной кривой распределения $\mathcal{D}$, соединяющей m и p . Таким образом, $p \in K$ и, значит, $\psi(N) \subset K$, что и доказывает максимальность K . Итак, мы доказали существование максимального связного интегрального многообразия (K, i) распределения $\mathcal{D}$, проходящего через точку m , и тот факт, что образ любого связного интегрального многообразия распределения $\mathcal{D}$, проходящего через m , лежит в K .

Единственность (ср. с разд. 1.33). Пусть (N, ψ) — любое другое связное максимальное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через m . Как мы заметили выше, $\psi(N) \subset K$; поэтому отображение ψ пропускается через K следующим образом:



Согласно 1.62, ψ_0 — гладкое отображение. Оно инъективно и невырожденно, поскольку ψ инъективно и невырожденно, и является отображением на, поскольку из того, что (N, ψ) — максимальное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через m , следует, что $\psi(N)$ не может быть собственным подмножеством в K . Согласно следствию (а) разд. 1.30, ψ_0 — диффеоморфизм. Таким образом, подмногообразия (N, ψ) и (K, i) эквивалентны, и максимальное связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через m , единственно.

Упражнения

1. Докажите, что в примере 1.5 (d) действительно получается дифференцируемая структура на сфере S^d .

2. Когда в качестве $\mathcal{F}$ был взят максимальный (относительно свойства 1.4 (b)) набор, содержащий тождественное отображение, то на вещественной прямой $\mathbb{R}$ была получена стандартная дифференцируемая структура. Пусть $\mathcal{F}_1$ — максимальный относительно свойства 1.4 (b) набор, содержащий отображение $t \mapsto t^3$. Докажите, что $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_1$, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ диффеоморфны.

3. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие многообразия M . Докажите, что существует его измельчение $\{V_\alpha\}$, такое, что $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого α .

4. Считая известным тот факт, что многообразия регулярны и паракомпактны, докажите, что они — нормальные топологические пространства.

5. Докажите 1.25(a), (b) и (c).

6. Докажите, что если $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое инъективное и сюръективное отображение, которое невырожденно в каждой точке, то ψ — диффеоморфизм. (Справедливость этого утверждения существенно зависит от того, что для M выполняется вторая аксиома счетности. Предложим набросок доказательства. Отображение ψ будет диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда дифференциал $d\psi$ будет сюръективным отображением в каждой точке. Если $d\psi$ не является сюръективным в некоторой точке, то размерность многообразия M меньше размерности многообразия N . Пусть $\dim M = p$ и $\dim N = d$. Предполагая, что $p < d$, мы следующим образом придем к противоречию. Пусть (U, φ) — система координат на N , такая, что $\varphi(U) = \mathbb{R}^d$. Поскольку ψ отображает M на N , то областью значений $\varphi \circ \psi$ будет все пространство $\mathbb{R}^d$. К противоречию можно прийти двумя путями. Можно использовать предложение 1.35 и заметить, что область значений $\varphi \circ \psi$ представляет собой счетное объединение нигде не плотных множеств в $\mathbb{R}^d$ и поэтому по теореме Бэра о категориях не может оказаться всем пространством $\mathbb{R}^d$. Другой путь — использовать тот факт, что $p < d$, чтобы доказать, что область значений $\varphi \circ \psi$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^d$, что тоже ведет к противоречию (подмножество в $\mathbb{R}^d$ имеет меру 0, если его можно покрыть последовательностью шаров со сколь угодно малой суммой объемов). То, что область изменения $\varphi \circ \psi$ имеет меру 0 в $\mathbb{R}^d$, следует из справедливости для M второй аксиомы счетности и того факта, что отображение $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ класса C^1 имеет образ меры 0, а это, в свою очередь, вытекает из того, что отображение $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ класса C^1 преобразует множества меры 0 в множества меры 0. Чтобы доказать последнее, заметим, что если $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ принадлежит классу C^1 и множество A является ком-

пактом в $\mathbb{R}^d$, то для f существует постоянная Липшица K на A , т. е.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \quad (x, y \in A),$$

так что f увеличивает объем шаров в множестве A не более чем в K^d раз и потому преобразует множества меры 0 в множества меры 0.)

7. Докажите 1.33 (a) и (b).

8. Получите классический вариант теоремы 1.38 о неявной функции.

9. Пусть отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (1/3, 1/3)$, $p = (-1/3, -1/3)$ $f^{-1}(f(p))$ будет вложенным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

10. Пусть M — компактное многообразие размерности n , и пусть отображение $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ гладкое. Докажите, что f не может быть невырожденным в каждой точке.

11. Постройте контрпримеры, опровергающие утверждение 1.36, если любое из предположений о *замкнутости* или *вложенности* будет опущено. Можно доказать большее, а именно если (M, ψ) — подмногообразие в N , такое, что для любой гладкой функции g на M существует гладкая функция f на N , такая, что $f \circ \psi = g$, то ψ — вложение, а $\psi(M)$ замкнуто в N .

12. Восстановите подробности в рассуждениях п. 1.40 (a) и (b).

13. Докажите предложение 1.45.

14. Каждое ли векторное поле на вещественной прямой является полным?

15. Покажите, что если $(U, x_1, \dots, x_d)$ — система координат на M , то $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$ на U .

16. Пусть $N \subset M$ — подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma: (a, b) \rightarrow M$, такую, что $\gamma(a, b) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot{\gamma}(t) \in N_{\gamma(t)}$ для каждой $t \in (a, b)$.

17. Докажите, что любое гладкое векторное поле на компактном многообразии является полным.

18. Докажите, что гладкое отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ не может быть инъективным.

19. Разверните доказательство эквивалентности двух формулировок 1.60 и 1.61 теоремы Фробениуса.

20. Пусть $\varphi: N \rightarrow M$ — гладкое отображение, и пусть X — гладкое векторное поле на N . Предположим, что $d\varphi(X(p)) = d\varphi(X(q))$, когда $\varphi(p) = \varphi(q)$. Существует ли гладкое векторное поле Y на M , такое, что Y и X φ -связаны?

21. Тор — это многообразие $S^1 \times S^1$. Рассмотрим S^1 как единичную окружность в комплексной плоскости. Определим отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$,

где α — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R}, \varphi)$ — плотное подмногообразие в $S^1 \times S^1$. Это подмногообразие называется *обмоткой тора*.

22. Пусть $\gamma(t)$ — интегральная кривая векторного поля X на M . Предположим, что $\dot{\gamma}(t) = 0$ для некоторого t . Докажите, что γ — постоянное отображение, т. е. что его множество значений состоит из одной точки.

23. Задать риманову структуру на дифференцируемом многообразии M — значит выбрать гладким образом скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ на каждом касательном пространстве M_m ; под выражением «гладким образом» подразумевается, что если X и Y — гладкие векторные поля на M , то $\langle X, Y \rangle$ — гладкая функция на M . Докажите, что на каждом дифференцируемом многообразии существует риманова структура. Для доказательства следует использовать разбиение единицы. *Римановым многообразием* называется дифференцируемое многообразие вместе с римановой структурой.

24. Рассмотрим произведение многообразий $M \times N$ и канонические проекции $\pi_1: M \times N \rightarrow M$ и $\pi_2: M \times N \rightarrow N$.

(а) Докажите, что $\alpha: \tilde{M} \rightarrow M \times N$ будет гладким тогда и только тогда, когда $\pi_1 \circ \alpha$ и $\pi_2 \circ \alpha$ будут гладкими.

(б) Докажите, что отображение $v \mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v))$ — изоморфизм между $(M \times N)_{(m, n)}$ и $M_m \oplus N_n$.

(с) Пусть X и Y — гладкие векторные поля на M и N соответственно. Согласно (б), X и Y определяют векторные поля $\tilde{X} = (X, 0)$ и $\tilde{Y} = (0, Y)$ на $M \times N$. Докажите, что $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.

(д) Пусть $(m_0, n_0) \in M \times N$, и определим вложения $i_{n_0}: M \rightarrow M \times N$ и $i_{m_0}: N \rightarrow M \times N$, полагая

$$i_{n_0}(m) = (m, n_0), \quad i_{m_0}(n) = (m_0, n).$$

Пусть $v \in (M \times N)_{(m_0, n_0)}$, $v_1 = d\pi_1(v) \in M_{m_0}$, $v_2 = d\pi_2(v) \in N_{n_0}$ и $f \in C^\infty(M \times N)$. Докажите, что

$$v(f) = v_1(f \circ i_{n_0}) + v_2(f \circ i_{m_0}).$$

Тензоры и дифференциальные формы

С касательным пространством M_m естественно связан ряд векторных пространств и алгебр. Соответствующим образом гладко сопоставляя точкам многообразия M элементы этих пространств и алгебр, мы получаем различные тензорные поля и дифференциальные формы. Сначала мы рассмотрим ряд необходимых нам результатов из полилинейной алгебры, которые затем, начиная с разд. 2.14, будем применять к многообразиям.

Тензорные и внешние алгебры

В разд. 2.1—2.13 V , W и U будут обозначать конечномерные вещественные векторные пространства. Как обычно, V^* будет обозначать сопряженное к V пространство, состоящее из всех вещественных линейных функций на V .

2.1. Определения. Пусть $F(V, W)$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$, свободно порожденное элементами декартова произведения $V \times W$. Таким образом, пространство $F(V, W)$ состоит из всех конечных линейных комбинаций пар (v, w) , где $v \in V$, $w \in W$. Пусть $R(V, W)$ — подпространство в $F(V, W)$, порожденное всеми элементами, имеющими вид

$$(1) \quad \begin{aligned} (v_1 + v_2, w) &= (v_1, w) + (v_2, w), \\ (v, w_1 + w_2) &= (v, w_1) + (v, w_2), \\ (av, w) &= a(v, w), \\ (v, aw) &= a(v, w), \end{aligned}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$. Факторпространство $F(V, W)/R(V, W)$ называется *тензорным произведением* пространств V и W и обозначается через $V \otimes W$. Смежный класс из факторпространства $V \otimes W$, содержащий элемент (v, w) пространства $F(V, W)$, обозначается через $v \otimes w$. Из определения пространства $V \otimes W$ вытекает, что в нем выполняются тождества

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ a(v \otimes w) &= av \otimes w = v \otimes aw. \end{aligned}$$

2.2. Легко проверить следующие свойства тензорного произведения (и мы оставляем эту проверку читателю в качестве упражнения):

(а) *Свойство универсальности.* Пусть φ — билинейное отображение $V \times W$ в $V \otimes W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$. Тогда для любого векторного пространства U и билинейного отображения $l: V \times W \rightarrow U$ существует единственное отображение $\tilde{l}: V \otimes W \rightarrow U$, такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & V \otimes W & \\ \uparrow \varphi & \searrow \tilde{l} & \\ V \times W & \xrightarrow{l} & U \end{array}$$

Говорят, что пара $(V \otimes W, \varphi)$ решает задачу универсальности для билинейных отображений с областью определения $V \times W$. Кроме того, пара $(V \otimes W, \varphi)$ единственна в том смысле, что если X — векторное пространство, а $\tilde{\varphi}: V \times W \rightarrow X$ — билинейное отображение, обладающее свойством универсальности, то существует изоморфизм $\alpha: V \otimes W \rightarrow X$, такой, что $\alpha \circ \varphi = \tilde{\varphi}$.

(b) $V \otimes W$ канонически изоморфно $W \otimes V$.

(c) $V \otimes (W \otimes U)$ канонически изоморфно $(V \otimes W) \otimes U$.

(d) Билинейное отображение $V^* \times W$ в векторное пространство $\text{Hom}(V, W)$ линейных преобразований из V в W , задаваемое формулой $(f, w)(v) = f(v) \cdot w$, определяет по свойству (а) единственное линейное отображение $\alpha: V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$, причем α — изоморфизм. Отсюда следует, что

$$(2) \quad \dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W).$$

(е) Пусть $\{e_i: i = 1, \dots, c\}$ — базис в V , а $\{f_j: j = 1, \dots, d\}$ — базис в W . Тогда $\{e_i \otimes f_j: i = 1, \dots, c; j = 1, \dots, d\}$ — базис в $V \otimes W$.

2.3. Определения. Пространством тензоров $V_{r,s}$ типа (r, s) , ассоциированным с пространством V , называется пространство

$$(1) \quad \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r \text{ экз.}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s \text{ экз.}}$$

Прямая сумма

$$(2) \quad T(V) = \sum V_{r,s} \quad (r, s \geq 0),$$

где $V_{0,0} = \mathbb{R}$, называется *тензорной алгеброй* пространства V . Элементы пространства $T(V)$ — конечные линейные комбинации элементов различных пространств $V_{r,s}$ — называются *тензорами*. $T(V)$ — некоммутативная, ассоциативная, градуированная

ная алгебра относительно умножения $\otimes$, где произведение элементов $u = u_1 \otimes \dots \otimes u_{r_1} \otimes u_1^* \otimes \dots \otimes u_{s_1}^*$ из V_{r_1, s_1} , $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_{r_2} \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_{s_2}^*$ из V_{r_2, s_2} определяется формулой

$$u \otimes v = u_1 \otimes \dots \otimes u_{r_1} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{r_2} \otimes u_1^* \otimes \dots \\ \dots \otimes u_{s_1}^* \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_{s_2}^*$$

и принадлежит $V_{r_1+r_2, s_1+s_2}$. Тензоры, лежащие в пространстве $V_{r, s}$, называются *однородными типа (r, s)* . Однородный тензор (скажем, тензор типа (r, s)) называется *разложимым*, если он может быть представлен в форме

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_s^*,$$

где $v_i \in V$ ($i = 1, \dots, r$), $v_j^* \in V^*$ ($j = 1, \dots, s$).

2.4. Определения. Пусть $C(V)$ означает подалгебру $\sum_{k=0}^{\infty} V_{k, 0}$ тензорной алгебры $T(V)$, а $I(V)$ — двусторонний идеал в $C(V)$, порожденный множеством элементов вида $v \otimes v$, где $v \in V$. Положим

$$(1) \quad I_k(V) = I(V) \cap V_{k, 0}.$$

Тогда $I(V)$ превращается в градуированный идеал в $C(V)$:

$$(2) \quad I(V) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(V).$$

Внешней алгеброй $\Lambda(V)$ пространства V называется градуированная алгебра $C(V)/I(V)$. Если положить

$$(3) \quad \Lambda_k(V) = V_{k, 0}/I_k(V), \quad k \geq 2, \\ \Lambda_0(V) = \mathbb{R}, \quad \Lambda_1(V) = V,$$

то

$$(4) \quad \Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V).$$

Умножение в алгебре $\Lambda(V)$ мы будем обозначать символом $\wedge$. Его называют *внешним произведением*. В частности, смежный класс, содержащий $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$, есть $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$.

2.5. Определение. Полилинейное отображение

$$(1) \quad h: \underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ эл.}} \rightarrow W$$

называется *кососимметричным*, если

$$(2) \quad h(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}) = (\operatorname{sgn} \pi) h(v_1, \dots, v_r)$$

для всех перестановок π из группы S_r перестановок на r символах. Знак перестановки π (который равен $+1$, если π — четная перестановка, и -1 , если π — нечетная перестановка) обозначается символом $\operatorname{sgn} \pi$. Векторное пространство всех кососимметричных полилинейных функций

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ экз.}} \rightarrow \mathbb{R}$$

будет обозначаться через $A_r(V)$, и для удобства положим $A_0(V)$ равным $\mathbb{R}$.

2.6. Следующие свойства внешней алгебры мы оставляем читателю в качестве упражнения:

(а) Если $u \in \Lambda_k(V)$, $v \in \Lambda_l(V)$, то $u \wedge v \in \Lambda_{k+l}(V)$ и $u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u$.

(b) Если $e_1, \dots, e_d$ — базис в V , то совокупность

$$(1) \quad \{e_\Phi\},$$

где Φ пробегает все подмножества множества $\{1, \dots, d\}$, включая пустое, образует базис в $\Lambda(V)$. (Под e_Φ мы понимаем $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, где $i_1 < \dots < i_r$ — элементы подмножества $\Phi = \{i_1, \dots, i_r\}$ множества $\{1, \dots, d\}$, причем если $\Phi = \emptyset$, то полагаем $e_\Phi = 1$.) Отсюда, в частности, следует, что

$$(2) \quad \begin{aligned} \Lambda_d(V) &\cong \mathbb{R}, \\ \Lambda_{d+j}(V) &= \{0\} \quad (j > 0), \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \dim \Lambda(V) &= 2^d, \\ \dim \Lambda_k(V) &= \binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} \quad (0 \leq k \leq d). \end{aligned}$$

(Указание. Заметим, что элементы $\{e_\Phi\}$ порождают $\Lambda(V)$. Для доказательства их линейной независимости покажите сначала, что $e_1 \wedge \dots \wedge e_d$ не равен нулю в $\Lambda_d(V)$, т. е. что $e_1 \otimes \dots \otimes e_d$ не принадлежит $I(V)$. Выразите произвольный элемент из $I(V)$ через базисные векторы $e_1, \dots, e_d$ и покажите, что он не может совпадать с $e_1 \otimes \dots \otimes e_d$. Домножая равенство $\sum v_\Phi e_\Phi = 0$ на подходящие произведения элементов e_i так, чтобы попадать в $\Lambda_d(V)$, убедитесь, что все коэффициенты a_Φ нулевые.)

(с) *Свойство универсальности.* Отображение $\varphi: (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ произведения $V \times \dots \times V$ (k экземпляров) в $\Lambda_k(V)$ кососимметрично и полилинейно. Каждому кососимметричному полилинейному отображению h произведения $V \times \dots \times V$ в век-

торное пространство W соответствует единственное линейное отображение $\tilde{h}: \Lambda_k(V) \rightarrow W$, такое, что $\tilde{h} \circ \varphi = h$.

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} & \Lambda_k(V) & \\ \varphi \uparrow & \text{---} \tilde{h} \text{---} & \\ V \times \dots \times V & \xrightarrow{h} & W \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{k \text{ экз.}} & & \end{array}$$

Говорят, что пара, состоящая из $\Lambda_k(V)$ и φ , решает задачу универсальности для косимметричных полилинейных отображений с областью определения $V \times \dots \times V$, причем это решение единственно в том смысле, что для любого векторного пространства X и косимметричного полилинейного отображения $\tilde{\varphi}: V \times \dots \times V \rightarrow X$, также обладающего свойством универсальности для косимметричных полилинейных отображений, существует изоморфизм $\alpha: \Lambda_k(V) \rightarrow X$, такой, что $\alpha \circ \varphi = \tilde{\varphi}$.

Для частного случая $W = \mathbb{R}$ диаграмма (4) устанавливает естественный изоморфизм

$$(5) \quad \Lambda_k(V^*) \cong A_k(V)$$

между пространством $\Lambda(V_k)^*$ и векторным пространством $A_k(V)$ всех косимметричных полилинейных функций на $V \times \dots \times V$ (k экземпляров). Из свойства (b) следует, что

$$A_k(V) = \{0\} \quad \text{для } k > \dim V.$$

Сейчас мы рассмотрим различные соотношения между пространствами $V_{r,s}$, $\Lambda_k(V)$, $\Lambda(V)$ и соответствующими пространствами $(V^*)_{r,s}$, $\Lambda_k(V^*)$, $\Lambda(V^*)$.

2.7. Определение. Пусть V и W — вещественные векторные пространства конечной размерности. *Спаривание пространств* V, W — это билинейное отображение $(,): V \times W \rightarrow \mathbb{R}$. Спаривание называется *невыврожденным*, если для любого $w \neq 0$, $w \in W$, найдется элемент $v \in V$, такой, что $(v, w) \neq 0$, и для любого $v \neq 0$, $v \in V$, найдется элемент $w \in W$, такой, что $(v, w) \neq 0$.

Пусть $(,)$ — невыврожденное спаривание пространств V и W . Пусть

$$(1) \quad \varphi: V \rightarrow W^*$$

задается формулой $\varphi(v)(w) = (v, w)$, $v \in V$, $w \in W$. Нетрудно показать, что φ инъективно. Таким же образом определяется инъективное отображение $W \rightarrow V^*$. Значит, V и W имеют одина-

ковую размерность, а следовательно, φ — изоморфизм пространства V на W^* . Итак, невырожденное спаривание V и W устанавливает канонический изоморфизм пространств V и W^* .

2.8. Определение. *Невырожденное спаривание пространств $(V^*)_{r,s}$ и $V_{r,s}$.* Рассмотрим билинейное отображение $(V^*)_{r,s} \times \times V_{r,s} \rightarrow \mathbb{R}$, которое для разложимых элементов

$$v^* = v_1^* \otimes \dots \otimes v_r^* \otimes u_{r+1} \otimes \dots \otimes u_{r+s} \in (V^*)_{r,s}$$

и

$$u = u_1 \otimes \dots \otimes u_r \otimes v_{r+1}^* \otimes \dots \otimes v_{r+s}^* \in V_{r,s}$$

задается так:

$$(1) \quad (v^*, u) = v_1^*(u_1) \dots v_{r+s}^*(u_{r+s}).$$

Легко проверить, что оно определено однозначно. Легко установить, что такое билинейное отображение является невырожденным спариванием пространств $V_{r,s}^*$ и $V_{r,s}$. Это спаривание устанавливает изоморфизм

$$(2) \quad (V^*)_{r,s} \cong (V_{r,s})^*.$$

С другой стороны, очевидное обобщение свойства универсальности 2.2(a) показывает, что существует естественный изоморфизм

$$(3) \quad (V_{r,s})^* \cong M_{r,s}(V),$$

где $M_{r,s}(V)$ — векторное пространство всех полилинейных функций

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{r \text{ эл.}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s \text{ эл.}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

При изоморфизме (3) вектору $\tilde{h} \in (V_{r,s})^*$ соответствует полилинейная функция $h \in M_{r,s}(V)$, такая, что

$$(4) \quad h(v_1, \dots, v_r, v_1^*, \dots, v_s^*) = \tilde{h}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_s^*).$$

Объединяя (2) и (3), получаем изоморфизм

$$(5) \quad (V^*)_{r,s} \cong M_{r,s}(V).$$

2.9. Определение. *Невырожденное спаривание пространств $\Lambda_k(V^*)$ и $\Lambda_k(V)$.* Рассмотрим билинейное отображение $\Lambda_k(V^*) \times \times \Lambda_k(V) \rightarrow \mathbb{R}$, которое для разложимых элементов $v^* = v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*$ из $\Lambda_k(V^*)$ и $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ из $\Lambda_k(V)$ задается равенством

$$(1) \quad (v^*, u) = \det(v_i^*(u_j)).$$

Снова легко проверить, что оно определено однозначно и является невырожденным спариванием пространств $\Lambda_k(V^*)$ и $\Lambda_k(V)$.

Для $k = 0$ это спаривание будет просто умножением вещественных чисел. Это спаривание устанавливает изоморфизм

$$(2) \quad \Lambda_k(V)^* \cong \Lambda_k(V^*).$$

Объединяя (2) с естественным изоморфизмом

$$(3) \quad \Lambda_k(V)^* \cong A_k(V),$$

из 2.6 (5) получаем изоморфизм

$$(4) \quad \Lambda_k(V^*) \cong A_k(V).$$

Учитывая изоморфизмы (2) и (3) и замечая, что пространство, сопряженное конечной прямой сумме пространств, канонически изоморфно прямой сумме соответствующих сопряженных пространств, получаем изоморфизмы

$$(5) \quad \Lambda(V^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V^*) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(V)^* \cong \Lambda(V)^*,$$

$$(6) \quad \Lambda(V)^* \cong A(V) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(V).$$

В дальнейшем мы будем использовать отождествление (5) пространств $\Lambda(V^*)$ и $\Lambda(V)^*$ при помощи спаривания (1) без дальнейших комментариев.

2.10. Замечания к разд. 2.9

(а) Если $\{e_1, \dots, e_d\}$ — базис пространства V , а $\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ — сопряженный к нему базис в V^* , то базисы $\{e_\Phi\}$ и $\{\gamma_\Phi\}$, определенные в 2.6(b), — это сопряженные базисы пространств $\Lambda(V)$ и $\Lambda(V^*)$ (с учетом изоморфизма 2.9 (5)).

(б) В 2.9 (5) и (6) были установлены следующие изоморфизмы:

$$\Lambda(V^*) \cong \Lambda(V)^* \cong A(V).$$

Последний изоморфизм — это естественный изоморфизм, возникающий как следствие свойства универсальности 2.6(c). Первый изоморфизм, обозначим его α , возник в силу нашего выбора спаривания 2.9(1). Вообще говоря, существует другое спаривание, которое получается заменой 2.9(1) на

$$(1) \quad (v^*, u) = \frac{1}{k!} \det(v_i^*(u_j)).$$

Это спаривание дает другой изоморфизм между $\Lambda(V^*)$ и $\Lambda(V)^*$; обозначим его β . Далее, $\Lambda(V^*)$ является алгеброй относительно внешнего умножения. При помощи построенных выше изоморфизмов мы получим две структуры алгебры $\wedge_\alpha$ и $\wedge_\beta$ на $A(V)$. Нетрудно заметить, что если $f \in A_p(V)$, $g \in A_q(V)$, то эти

индуцированные умножения $\wedge_\alpha$ и $\wedge_\beta$ принимают следующий вид:

$$(2) \quad f \wedge_\alpha g(v_1, \dots, v_{p+q}) = \\ = \sum_{(p, q)\text{-перестановки}} (\operatorname{sgn} \pi) f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \cdot g(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})$$

и

$$(3) \quad f \wedge_\beta g(v_1, \dots, v_{p+q}) = \\ = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} (\operatorname{sgn} \pi) f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \cdot g(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}).$$

Здесь перестановка $\pi \in S_{p+q}$ называется (p, q) -перестановкой, если $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(p)$ и $\pi(p+1) < \dots < \pi(p+q)$. Из (2) и (3) следует, что

$$(4) \quad f \wedge_\alpha g = \frac{(p+q)!}{p!q!} f \wedge_\beta g.$$

Для примера рассмотрим случай, когда $p = q = 1$. Пусть γ и δ принадлежат $V^* = A_1(V)$, и пусть $v, w \in V$. Тогда

$$(5) \quad \gamma \wedge_\alpha \delta(v, w) = \gamma(v) \delta(w) - \gamma(w) \delta(v)$$

и

$$(6) \quad \gamma \wedge_\beta \delta(v, w) = (1/2) (\gamma(v) \delta(w) - \gamma(w) \delta(v)).$$

В дальнейшем мы будем использовать только спаривание 2.9(1), чтобы избежать таких множителей, как $1/2$ в (6).

2.11. Линейные преобразования пространства $\Lambda(V)$. Символом $\operatorname{End}(\Lambda(V))$ будем обозначать векторное пространство всех эндоморфизмов пространства $\Lambda(V)$ (т. е. линейных отображений из $\Lambda(V)$ в $\Lambda(V)$). Пусть $u \in \Lambda(V)$. *Левым умножением на u* называется эндоморфизм $\varepsilon(u)$ пространства $\Lambda(V)$, определенный следующим образом:

$$(1) \quad \varepsilon(u)v = u \wedge v \quad (v \in \Lambda(V)).$$

Сопряженное к $\varepsilon(u)$ отображение $i(u)$ есть эндоморфизм пространства $\Lambda(V)^*$. Используя отождествление $\Lambda(V)^*$ и $\Lambda(V^*)$, можно рассматривать отображение $i(u)$ как эндоморфизм пространства $\Lambda(V^*)$, этот эндоморфизм называется *внутренним умножением на u* . В терминах нашего спаривания пространств $\Lambda(V)$ и $\Lambda(V^*)$ $i(u)$ определяется так:

$$(2) \quad (i(u)v^*, w) = (v^*, \varepsilon(u)w) = (v^*, u \wedge w) \quad (v^* \in \Lambda(V^*), w \in \Lambda(V)).$$

Если $u \in V$, то $i(u)$ отображает $\Lambda_k(V^*)$ в $\Lambda_{k-1}(V^*)$ для каждого k . В частности, если $v^* \in V^*$, то $i(u)v^* \in \mathbb{R}$ и

$$i(u)v^* = (i(u)v^*, 1) = (v^*, \varepsilon(u) \cdot 1) = (v^*, u) = v^*(u).$$

Линейное преобразование l алгебры $\Lambda(V)$ (или вообще любой градуированной алгебры) называется

(а) *дифференцированием*, если $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + u \wedge l(v)$ ($u, v \in \Lambda(V)$),

(б) *антидифференцированием*, если $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge l(v)$ ($u \in \Lambda_p(V)$; $v \in \Lambda(V)$),

(с) *эндоморфизмом степени k* , если $l: \Lambda_j(V) \rightarrow \Lambda_{j+k}(V)$ для всех j .

(Предполагается, что $\Lambda_i(V) = \{0\}$, если $i < 0$.)

Легко заметить, что $l \in \text{End } \Lambda(V)$ — антидифференцирование тогда и только тогда, когда на разложимых элементах

$$(3) \quad l(v_1 \wedge \dots \wedge v_j) = \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} v_1 \wedge \dots \wedge l(v_i) \wedge \dots \wedge v_j.$$

2.12. Предложение. Если $u \in V$, то $i(u)$ есть антидифференцирование степени -1 .

Доказательство. То, что степень $i(u)$ действительно равна -1 , ясно из определения 2.11(2). Чтобы доказать, что $i(u)$ является антидифференцированием, проверим выполнение равенства 2.11(3). Рассмотрим спаривание обеих частей 2.11(3) с элементом из $\Lambda(V)$, имеющим вид $w_2 \wedge \dots \wedge w_j$. Нам достаточно показать, что

$$(1) \quad (i(u)(v_1^* \wedge \dots \wedge v_j^*), w_2 \wedge \dots \wedge w_j) = \\ = \left(\sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} v_1^* \wedge \dots \wedge i(u) v_i^* \wedge \dots \wedge v_j^*, w_2 \wedge \dots \wedge w_j \right).$$

Левая часть в (1) равна

$$(v_1^* \wedge \dots \wedge v_j^*, u \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_j) = \det(v_i^*(w_l)),$$

где мы положили $w_1 = u$. Правая часть приводится к тому же виду:

$$\sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} v_i^*(u) (v_1^* \wedge \dots \wedge v_i^* \wedge \dots \wedge v_j^*, w_2 \wedge \dots \wedge w_j) = \\ = \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} v_i^*(u) \det(v_k^*(w_l)) \quad \left(\begin{matrix} k = 1, \dots, \hat{i}, \dots, j \\ l = 2, \dots, j \end{matrix} \right) = \\ = \det(v_i^*(w_l)) \quad \left(\begin{matrix} i = 1, \dots, j \\ l = 1, \dots, j \end{matrix} \right).$$

(Здесь «крышка» над символом означает, что он пропущен.)

2.13. Действие линейных преобразований. Пусть $l: V \rightarrow W$ — линейное преобразование. Тогда l продолжается до гомоморфизма алгебр

$$(1) \quad l: \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(W),$$

где $l(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = l(v_1) \wedge \dots \wedge l(v_k)$ и $l(1) = 1$. Сопряженное отображение $l^*: W^* \rightarrow V^*$ также продолжается до гомоморфизма алгебр

$$(2) \quad l^*: \Lambda(W^*) \rightarrow \Lambda(V^*).$$

Наши изоморфизмы 2.9(5) между $\Lambda(V^*)$ и $\Lambda(V)^*$, а также между $\Lambda(W^*)$ и $\Lambda(W)^*$ естественны в том смысле, что гомоморфизм (2) является сопряженным отображением к (1), т. е.

$$(3) \quad (l^*(\omega^*), v) = (\omega^*, l(v)) \quad (\omega^* \in \Lambda(W^*); v \in \Lambda(V)).$$

Тензорные поля и дифференциальные формы

2.14. Определения. Пусть M — гладкое многообразие. Назовем

$$(1) \quad T_{r,s}(M) = \bigcup_{m \in M} (M_m)_{r,s} \text{ тензорным расслоением типа } (r, s)$$

над M ;

$$(2) \quad \Lambda_k^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_k(M_m^*) \text{ расслоением } k\text{-х внешних степеней над } M;$$

ней над M ;

$$(3) \quad \Lambda^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda(M_m^*) \text{ расслоением внешних алгебр над } M.$$

В случаях когда $k = 0$ или $(r, s) = (0, 0)$, объединения в (1) и (2) оказываются непересекающимися объединениями вещественных прямых — по одной прямой для каждой точки из M . Расслоения $T_{r,s}(M)$, $\Lambda_k^*(M)$ и $\Lambda^*(M)$ обладают естественными структурами многообразия, такими, что канонические проекции на M — гладкие отображения многообразий. Для системы координат (U, φ) на M с координатными функциями $y_1, \dots, y_d$ базисы $\{\partial/\partial y_i\}$ пространства M_m и $\{dy_i\}$ сопряженного пространства M_m^* для $m \in U$ задают базисы в $(M_m)_{r,s}$, $\Lambda_k(M_m^*)$ и $\Lambda(M_m^*)$. Например, базисом в $\Lambda_k(M_m^*)$ служит набор $\{dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} : i_1 < \dots < i_k\}$. С помощью этих базисов определяются отображения прообразов (относительно соответствующих проекций) множества U в расслоениях $T_{r,s}(M)$, $\Lambda_k^*(M)$ и $\Lambda^*(M)$ в $\varphi(U) \times \times$ (евклидовы пространства подходящих размерностей). Объявляя эти отображения координатными, мы получим естественные структуры многообразия на расслоениях $T_{r,s}(M)$, $\Lambda_k^*(M)$ и $\Lambda^*(M)$, как мы это делали в разд. 1.25 для пространств $T(M)$ и $T^*(M)$ (которое мы теперь можем рассматривать как $\Lambda_1^*(M)$).

2.15. Определение. Гладкое отображение многообразия M в расслоения $T_{r,s}(M)$, $\Lambda_k^*(M)$ и $\Lambda^*(M)$, композиция которого

с канонической проекцией является тождественным отображением, называется (гладким) тензорным полем типа (r, s) на M , (дифференциальной) формой ранга k (или k -формой) на M и (дифференциальной) формой на M соответственно. Поскольку мы будем иметь дело с гладкими (в этом смысле) тензорными полями и дифференциальными формами, то будем опускать слова «гладкий» и «дифференциальный», если это не надо специально подчеркнуть.

2.16. Замечания. Сечение $\alpha: M \rightarrow T_{r,s}(M)$ является гладким тензорным полем типа (r, s) тогда и только тогда, когда для каждой системы координат $(U, y_1, \dots, y_d)$ на многообразии M

$$(1) \quad \alpha|U = \sum a_{i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_s} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y_{i_r}} \otimes dy_{j_1} \otimes \dots \otimes dy_{j_s},$$

где $a_{i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_s} \in C^\infty(U)$. В классических тензорных обозначениях касательные векторы нумеруются нижними индексами, а координатные функции и дифференциалы — верхними, у коэффициентов же соответствующие индексы ставятся наоборот, поэтому в классической записи (1) будет выглядеть как ¹⁾

$$a_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_s}.$$

Сечение $\beta: M \rightarrow \Lambda_k^*(M)$ является дифференциальной формой ранга k тогда и только тогда, когда для каждой системы координат $(U, y_1, \dots, y_d)$ на многообразии M

$$(2) \quad \beta|U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} b_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k},$$

где $b_{i_1, \dots, i_k}$ — гладкие функции на U .

2.17. Определения. Обозначим через $E^k(M)$ множество всех гладких k -форм на многообразии M , а через $E^*(M)$ — множество всех дифференциальных форм. Тогда $E^0(M)$ можно отождествить с $C^\infty(M)$; действительно, гладкое многообразие $\Lambda_0^*(M)$ — это просто $M \times \mathbb{R}$, а гладкие сечения расслоения $M \times \mathbb{R}$ над M — это просто графики гладких функций на многообразии M . Формы можно складывать, умножать на скаляры и перемножать друг с другом при помощи внешнего произведения ($\wedge$). Если $\omega, \varphi \in$

¹⁾ В классических тензорных обозначениях применяется еще правило суммирования Эйнштейна: если одинаковый индекс встречается и наверху и внизу, то подразумевается суммирование по нему, причем знак Σ не ставится. — *Прим. перев.*

$\in E^*(M)$, $c \in \mathbb{R}$, то $\omega + \varphi$, $c\omega$, $\omega \wedge \varphi$ будут формами, принимающими в m значения $\omega_m + \varphi_m$, $c\omega_m$ и $\omega_m \wedge \varphi_m$ соответственно. В случае когда f — форма ранга 0 и $\omega \in E^*(M)$, мы вместо $f \wedge \omega$ будем писать $f\omega$. Таким образом, $E^*(M)$ обладает как структурой модуля над кольцом $C^\infty(M)$, так и структурой градуированной алгебры над $\mathbb{R}$ относительно внешнего умножения.

2.18. Пусть $\omega \in E^k(M)$. Тогда $\omega_m \in \Lambda_k(M_m^*)$ можно рассматривать (используя изоморфизм 2.9(4)) как кососимметричную полилинейную функцию на M_m . Поэтому для набора векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на M приобретает смысл выражение $\omega(X_1, \dots, X_k)$ — это функция, принимающая в m значение

$$(1) \quad \omega(X_1, \dots, X_k)(m) = \omega_m(X_1(m), \dots, X_k(m)).$$

Обозначая $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на многообразии M через $\mathfrak{X}(M)$, получаем отображение

$$(2) \quad \omega: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ экз.}} \rightarrow C^\infty(M),$$

которое будет кососимметричным, полилинейным отображением модуля $\mathfrak{X}(M)$ в $C^\infty(M)$. Мы подчеркиваем, что ω — полилинейное отображение $C^\infty(M)$ -модуля $\mathfrak{X}(M)$, т. е.

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_k) = \\ = f\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_k) + \\ + g\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots, X_k) \end{aligned}$$

для любых $f, g \in C^\infty(M)$ и $X_1, \dots, X_{i-1}, X, Y, X_{i+1}, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Обратно, полезно заметить, что *любое гладкое кососимметричное $C^\infty(M)$ -полилинейное отображение (2) модуля $\mathfrak{X}(M)$ в пространство $C^\infty(M)$ определяет форму*. Действительно, мы утверждаем, что если ω — такое отображение, то $\omega(X_1, \dots, X_k)(m)$ зависит только от значений векторных полей X_i в m . Если предположить, что это так, то ω определяет кососимметричную полилинейную функцию ω_m на M_m и, следовательно, определяет элемент алгебры $\Lambda_k(M_m^*)$; а именно, если задан элемент $(v_1, \dots, v_k) \in M_m \times \dots \times M_m$, выберем векторные поля $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$, такие, что $V_i(m) = v_i$ ($i = 1, \dots, k$), и положим

$$(4) \quad \omega_m(v_1, \dots, v_k) = \omega(V_1, \dots, V_k)(m).$$

Согласно нашему (недоказанному) утверждению, $\omega_m(v_1, \dots, v_k)$ корректно определено и не зависит от выбора расширений V_i . Таким образом, ω задает сечение $m \mapsto \omega_m$ расслоения $\Lambda^*(M)$ над M ; нетрудно заметить, что оно гладкое, поэтому ω — форма.

Для упрощения обозначений мы проиллюстрируем наше утверждение для случая, когда ω — линейное отображение мо-

дуля $\mathfrak{X}(M)$ в $C^\infty(M)$. Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$. Мы хотим показать, что $\omega(X)(m)$ зависит только от $X(m)$. Для этого достаточно проверить, что $\omega(X)(m) = 0$, если $X(m) = 0$. Пусть $(U, x_1, \dots, x_d)$ — система координат в окрестности точки m . Тогда $X = \sum a_i (\partial/\partial x_i)$ на U , где $a_i(m) = 0$. Пусть теперь φ — гладкая функция, равная 1 в окрестности $V \subset U$ точки m и равная нулю в некоторой окрестности множества $M - U$ (см. разд. 1.10). Векторное поле X_i , имеющее на U вид $\varphi (\partial/\partial x_i)$ и равное нулю вне U , будет гладким векторным полем на M . Функция $\tilde{a}_i$, равная φa_i на U и нулю на $M - U$, будет гладкой функцией на M , и

$$(5) \quad X = \sum \tilde{a}_i X_i + (1 - \varphi^2) X.$$

Следовательно,

$$(6) \quad \omega(X)(m) = \sum \tilde{a}_i(m) \omega(X_i)(m) + ((1 - \varphi^2)(m)) (\omega(X)(m)) = 0.$$

Итак, $\omega(X)(m) = 0$, если $X(m) = 0$, что и требовалось доказать.

Отметим также, что, используя изоморфизм 2.8(5), можно дать аналогичную интерпретацию тензорных полей. Тензорное поле T типа (r, s) можно рассмотреть как отображение

$$(7) \quad T: \underbrace{E^1(M) \times \dots \times E^1(M)}_{r \text{ эл.}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ эл.}} \rightarrow C^\infty(M),$$

которое является $C^\infty(M)$ -полилинейным по отношению к $C^\infty(M)$ -модулям $E^1(M)$, $\mathfrak{X}(M)$.

Отметим простой вид, который приобретает формула (2) из п. 2.10(b), когда $\omega, \varphi \in E^1(M)$ и $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. В этом случае

$$(8) \quad \omega \wedge \varphi(X, Y) = \omega(X) \varphi(Y) - \omega(Y) \varphi(X).$$

2.19. Определение. Если $f \in C^\infty(M)$, то дифференциал df — это гладкое отображение пространства $T(M)$ в $\mathbb{R}$, являющееся линейным на каждом касательном пространстве. Поэтому этот дифференциал можно рассматривать как 1-форму $df: M \rightarrow \Lambda_1^*(M)$. Эта 1-форма df называется *внешней производной* 0-формы f . Этот оператор внешнего дифференцирования d имеет важное продолжение на $E^*(M)$, определяемое в следующей теореме.

2.20. Теорема. (Внешнее дифференцирование.) *Существует единственное антидифференцирование $d: E^*(M) \rightarrow E^*(M)$ степени $+1$, такое, что*

$$(1) \quad d^2 = 0;$$

(2) *для любой функции $f \in C^\infty(M) = E^0(M)$ df является ее дифференциалом.*

Доказательство. Существование. Пусть $p \in M$. Обозначим через $E^*(p)$ множество всех гладких форм, определенных на открытых подмножествах многообразия M , содержащих точку p ,

а через $E^k(p)$ — соответствующее множество гладких форм ранга k . Фиксируем систему координат $(U, x_1, \dots, x_d)$ в окрестности точки p . Если $\omega \in E^*(p)$, то

$$(3) \quad \omega|_{(\text{обл. опр. } \omega) \cap U} = \sum a_\Phi dx_\Phi,$$

где $a_\Phi \in C^\infty$ (область определения $\omega \cap U$), Φ пробегает все подмножества из $\{1, \dots, d\}$, а под dx_Φ понимается либо $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, когда $\Phi = \{i_1 < \dots < i_r\}$, либо постоянная функция, равная 1, когда $\Phi = \emptyset$. Определим $d\omega$ в точке p , полагая

$$(4) \quad d\omega_p = \sum da_\Phi|_p \wedge dx_\Phi|_p \in \Lambda(M_p^*).$$

Нам надо показать, что определение $d\omega_p$ не зависит от выбора системы координат. Но сначала отметим следующие свойства:

- (a) $\omega \in E^r(p) \Rightarrow d\omega_p \in \Lambda_{r+1}(M_p^*)$;
- (b) $d\omega_p$ зависит только от ростка формы ω в точке p ;
- (c) $d(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)|_p = a_1(d\omega_1)|_p + a_2(d\omega_2)|_p$ ($a_i \in \mathbb{R}$; $\omega_i \in E^*(p)$), где область определения $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ — это (область определения ω_1) $\cap$ (область определения ω_2);
- (d) $d(\omega_1 \wedge \omega_2)|_p = d\omega_1|_p \wedge \omega_2|_p + (-1)^r \omega_1|_p \wedge d\omega_2|_p$
($\omega_1 \in E^r(p)$; $\omega_2 \in E^*(p)$).

Принимая во внимание свойства (b) и (c), достаточно проверить (d) для $\omega_1 = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ и $\omega_2 = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$, заданных в некоторой окрестности точки p . Действительно, в случае когда $r = s = 0$, свойство (d) — это просто $d(f \cdot g)|_p = df_p \cdot g(p) + f(p) \cdot dg_p$; аналогично обстоит дело в случае, когда только одно из r, s равно нулю. Допустим теперь, что $r > 0, s > 0$. Если $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} \neq \emptyset$, то обе части будут нулевыми. Поэтому предположим, что это пересечение пусто; тогда

$$(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}) = \varepsilon f \cdot g dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_{r+s}},$$

где $l_1 < \dots < l_{r+s}$, а ε — знак произведенной перестановки. Итак, получаем

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2)|_p &= d(\varepsilon f \cdot g dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_{r+s}})|_p = \\ &= \varepsilon(df_p \cdot g(p) + f(p)dg_p) \wedge dx_{l_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{l_{r+s}}|_p = \\ &= (df_p \wedge dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_r}|_p) \wedge (g(p) dx_{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{j_s}|_p) + \\ &\quad + (-1)^r (f(p) dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_r}|_p) \wedge \\ &\quad \wedge (dg_p \wedge dx_{j_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{j_s}|_p) = \\ &= d\omega_1|_p \wedge \omega_2|_p + (-1)^r \omega_1|_p \wedge d\omega_2|_p. \end{aligned}$$

(е) Если f — гладкая функция в окрестности точки p , то $d(df)|_p = 0$. Действительно, на (область определения f) $\cap U$ имеем $df = \sum (\partial f / \partial x_i) dx_i$, так что

$$d(df)|_p = \sum d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)|_p \wedge dx_i|_p = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_p dx_j|_p \wedge dx_i|_p.$$

Но $(\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i)(p) = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(p)$, тогда как $dx_j|_p \wedge dx_i|_p = -dx_i|_p \wedge dx_j|_p$. Поэтому $d(df)|_p = 0$.

Итак, мы утверждаем, что определение d в точке p не зависит от выбранной системы координат. Предположим, что d' определено на множестве $E^*(p)$ относительно другой системы координат, и пусть $\omega \in E^*(p)$. Тогда ω на (область определения ω) $\cap U$ можно представить в виде (3), а поскольку для d' должны выполняться утверждения (а)—(е), то

$$\begin{aligned} (5) \quad d'(\omega)|_p &= d'(\sum a_\Phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r})|_p \text{ [в силу (b)]} = \\ &= \sum d'(a_\Phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r})|_p \text{ [в силу (c)]} = \\ &= \sum d'(a_\Phi)|_p \wedge dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_r}|_p + \\ &\quad + \sum (-1)^{k-1} a_\Phi|_p dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge d'(dx_{i_k})|_p \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx_{i_r}|_p \text{ [в силу (d)]} = \\ &= \sum d(a_\Phi)|_p \wedge dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_r}|_p \text{ [в силу (c)]} = \\ &= d\omega_p. \end{aligned}$$

Итак, если у нас имеется форма $\omega \in E^*(M)$, мы определяем ее дифференциал как форму, которая, если рассматривать ее как сечение расслоения $\Lambda^*(M) \rightarrow M$, отображает точку p в $d\omega_p$. Можно утверждать, что $d^2 = 0$, так как если $\omega \in E^*(M)$, $p \in M$, то $d\omega$ имеет вид $\sum da_\Phi \wedge dx_\Phi$ в некоторой координатной окрестности точки p , и поэтому, согласно свойствам (е) и (d),

$$d(d\omega)|_p = \sum d(da_\Phi \wedge dx_\Phi)|_p = 0.$$

Это означает, что d — антидифференцирование $E^*(M)$ степени $+1$, удовлетворяющее (1) и (2).

Единственность. Пусть d' — другое антидифференцирование $E^*(M)$ степени $+1$, удовлетворяющее (1) и (2). Сначала покажем, что если $\omega \in E^*(M)$ и ω обращается в нуль в некоторой окрестности W точки p , то $d'\omega|_p = 0$. Возьмем гладкую функцию φ , равную нулю в некоторой окрестности точки p и единице в некоторой окрестности множества $M - W$. Тогда $\varphi\omega = \omega$ и

$$d'(\omega)|_p = d'(\varphi\omega)|_p = d'(\varphi)|_p \wedge \omega_p + \varphi(p) d'\omega|_p = 0.$$

d' определен только на элементах $E^*(M)$, т. е. на глобально определенных формах на многообразии M . Мы хотим определить d' на $E^*(p)$ для каждой $p \in M$. Если $\omega \in E^*(p)$, мы можем продолжить ω до формы на M с тем же ростком в точке p , что и у ω . А именно, возьмем гладкую функцию φ , равную единице в некоторой окрестности точки p , носитель которой лежит в области определения формы ω . Тогда $\varphi\omega$ лежит в $E^*(M)$ (доопределяем ее нулем вне области определения ω) и совпадает с ω в некоторой окрестности точки p . Таким образом, можно положить

$$d'(\omega)|_p = d'(\varphi\omega)|_p,$$

и, согласно сделанным выше замечаниям, это определение не зависит от выбора продолжения. Итак, дифференциал $d'(\omega)|_p$ определен на всех формах из $E^*(p)$, и очевидно, что он обладает свойствами (а)—(е). (В (d) мы продолжаем $\omega_1 \wedge \omega_2$ до формы на M , используя $\varphi\omega_1 \wedge \varphi\omega_2$ с подходящей функцией φ , а в (е) учитываем, что $d'(df)|_p = d'(\varphi df)|_p = d'(d(\varphi f))|_p = 0$, поскольку $d\varphi(p) = 0$ и для d' выполнены условия (1) и (2).) Теперь из соотношения (5) следует, что для любой формы $\omega \in E^*(p)$, в частности для любой формы $\omega \in E^*(M)$, имеет место равенство $d'(\omega)|_p = d(\omega)|_p$. Это и доказывает единственность.

Заметим, что из проведенного доказательства вытекает равенство $d\omega|_U = d(\omega|_U)$, где U — открытое множество в M .

2.21. Внутреннее умножение на векторные поля. Пусть X — гладкое векторное поле на многообразии M , и пусть ω — форма на M , $\omega \in E^*(M)$. Внутренним произведением формы ω на поле X называется форма $i(X)\omega$, значение которой в точке m является результатом внутреннего умножения ω_m на X_m (см. 2.11 (2)), т. е.

$$(1) \quad (i(X)\omega)|_m = i(X_m)(\omega_m).$$

Гладкость $i(X)\omega$ легко следует из 2.16 (2), а из 2.12 следует, что $i(X): E^*(M) \rightarrow E^*(M)$ — это антидифференцирование степени -1 .

2.22. Действие отображений. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение, и пусть $m \in M$. Имеется дифференциал $d\omega: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$ и сопряженный к нему оператор $\psi^*: N_{\psi(m)}^* \rightarrow M_m^*$, а также индуцированный гомоморфизм алгебр $\psi^*: \Lambda(N_{\psi(m)}^*) \rightarrow \Lambda(M_m^*)$. Если ω — форма на N , то ее можно перенести на M , полагая

$$(1) \quad \psi^*(\omega)|_m = \psi^*(\omega|_{\psi(m)}).$$

Это одно из самых замечательных свойств дифференциальных форм. При гладком отображении их можно поднять с образа

этого отображения на его область определения. Векторные поля в этой ситуации ведут себя совсем не так хорошо.

2.23. Предложение. Пусть $\psi: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Тогда

(а) $\psi^*: E^*(N) \rightarrow E^*(M)$ есть гомоморфизм алгебр.

(б) ψ^* коммутирует с d , т. е. $d(\psi^*(\omega)) = \psi^*(d\omega)$ ($\omega \in E^*(N)$).

(с) $\psi^*(\omega)(X_1, \dots, X_k)(m) = \omega_{\psi(m)}(d\psi(X_1(m)), \dots, d\psi(X_k(m)))$, где $\omega \in E^k(N)$, а $X_1, \dots, X_k$ — векторные поля на M .

Доказательство. Утверждение (с) очевидным образом вытекает из 2.13 (3), а в силу 2.13 (2) и определения 2.22 (1) ψ^* — гомоморфизм алгебр. Прежде чем проверять, что $\psi^*(\omega)$ действительно будет гладкой формой (где $\omega \in E^*(N)$), рассмотрим следующий частный случай утверждения (б): если $f \in C^\infty(N)$, то $\psi^*(f) = f \circ \psi \in C^\infty(M)$ и из 1.23 (d) следует, что

$$(1) \quad \psi^*(df) = d(f \circ \psi) = d(\psi^*(f)).$$

Пусть теперь $\omega \in E^*(N)$ и $m \in M$. Выберем систему координат $(U, x_1, \dots, x_d)$ в окрестности точки $\psi(m)$ и окрестность V точки m , такую, что $\psi(V) \subset U$. Тогда можно выбрать такие гладкие функции a_Φ на U , что

$$(2) \quad \omega|_U = \sum a_\Phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Следовательно,

$$(3) \quad \psi^*(\omega)|_V = \sum a_\Phi \circ \psi d(x_{i_1} \circ \psi) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ \psi)$$

является гладкой формой на V . Тем самым $\psi^*(\omega) \in E^*(M)$, и утверждение (а) доказано. Чтобы завершить доказательство утверждения (б), воспользуемся формулой (3):

$$\begin{aligned} (4) \quad d(\psi^*(\omega))|_m &= d\left(\sum a_\Phi \circ \psi d(x_{i_1} \circ \psi) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ \psi)\right)|_m = \\ &= \sum (d(a_\Phi \circ \psi) \wedge d(x_{i_1} \circ \psi) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ \psi))|_m = \\ &= \psi^*\left(\sum da_\Phi \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}\right)|_m = \\ &= \psi^*(d\omega)|_m. \end{aligned}$$

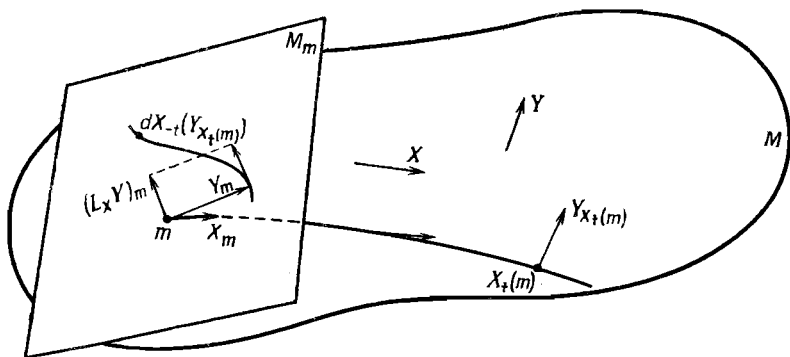
Итак, (б) доказано, и доказательство теоремы закончено.

Производная Ли

2.24. Определение. Тензорные поля и дифференциальные формы можно дифференцировать вдоль векторного поля. Соответствующий оператор называется *производной Ли* и определяется следующим образом. Пусть X — гладкое векторное поле на много-

образии M . Вспомним (см. разд. 1.48), что локальную однопараметрическую группу преобразований, ассоциированную с X , мы обозначали через X_t . Пусть Y — другое гладкое векторное поле на M . Мы определим производную поля Y вдоль X в точке $m \in M$. Проследим интегральную кривую поля X , проходящую через точку m , до точки $X_t(m)$ и возьмем вектор поля Y в этой точке. Затем мы перенесем вектор $Y_{X_t(m)}$ назад в пространство M_m при помощи дифференциала dX_{-t} диффеоморфизма X_{-t} . Найдем разность векторов $dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ и Y_m в касательном пространстве M_m , разделим ее на t и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$. Другими словами, мы рассматриваем гладкую функцию $t \mapsto dX_{-t}(Y_{X_t(m)})$ со значениями в M_m и берем ее производную в точке $t = 0$. В результате мы получаем вектор из пространства M_m , который и называется *производной Ли поля Y вдоль X в точке m* и который обозначается через $(L_X Y)_m$. Запишем наше определение

$$(1) \quad (L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(m)}) - Y_m}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(m)})).$$



Аналогично определяется *производная Ли дифференциальной формы ω вдоль векторного поля X* с той лишь разницей, что мы рассматриваем значение ω в точке $X_t(m)$, а затем сносим его при помощи X_t^* назад в $\Lambda(M_m^*)$, где рассматриваем разность с $\omega(m)$, делим на t и переходим к пределу при $t \rightarrow 0$. Запишем наше определение:

$$(2) \quad (L_X \omega)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t^*(\omega_{X_t(m)}) - \omega_m}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_t^*(\omega_{X_t(m)})).$$

Гладкость производных $L_X \omega$ и $L_X Y$ устанавливается в предложении 2.25. Понятие производной Ли вдоль векторного поля очевидным образом можно распространить на произвольные

тензорные поля. Для тензорного поля T типа (r, s) определим $(L_X T)_m$ как производную при $t = 0$ $(M_m)_{r,s}$ -значной функции, значение которой в t равно

$$dX_{-t}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \otimes X_t^*(v_1^* \otimes \dots \otimes v_s^*),$$

если

$$T|_{X_t(m)} = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_s^*.$$

2.25. Предложение. Пусть X — гладкое векторное поле на M . Тогда

(а) $L_X f = X(f)$ для любой $f \in C^\infty(M)$.

(b) $L_X Y = [X, Y]$ для произвольного гладкого векторного поля Y на многообразии M .

(с) L_X отображает $E^*(M)$ в $E^*(M)$ и является дифференцированием, коммутирующим с оператором d .

(d) На $E^*(M)$ $L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$.

(е) Пусть $\omega \in E^p(M)$, и пусть $Y_0, \dots, Y_p$ — набор гладких векторных полей на M . Тогда

$$\begin{aligned} L_{Y_0}(\omega(Y_1, \dots, Y_p)) &= (L_{Y_0}\omega)(Y_1, \dots, Y_p) + \\ &+ \sum_{i=1}^p \omega(Y_1, \dots, Y_{i-1}, L_{Y_0}Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_p). \end{aligned}$$

(f) При тех же предположениях, что и в п. (е),

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0, \dots, Y_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i Y_i \omega(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_p) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_p). \end{aligned}$$

Доказательство. Мы оставляем утверждение (а) в качестве упражнения. Чтобы получить (b), достаточно показать, что $L_X Y(f) = [X, Y]f$ для любой $f \in C^\infty(M)$. Пусть $m \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad (L_X Y)(f) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t} Y_{X_t(m)} - Y_m}{t} \right) (f) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(dX_{-t}(Y_{X_t(m)}))(f)] = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [Y_{X_t(m)}(f \circ X_{-t})]. \end{aligned}$$

Определим вещественнозначную функцию H в окрестности точки $(0, 0)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, полагая

$$(2) \quad H(t, u) = j(X_{-t}(Y_u(X_t(m)))).$$

Согласно утверждению (а),

$$(3) \quad Y_{X_t(m)}(f \circ X_{-t}) = \frac{\partial}{\partial r_2} \Big|_{(t, 0)} H(t, u)$$

и (1) переписывается в виде

$$(4) \quad (L_X Y)_m(f) = \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_2} \Big|_{(0, 0)}.$$

Для вычисления этой производной положим

$$(5) \quad K(t, u, s) = f(X_s(Y_u(X_t(m)))).$$

Тогда $H(t, u) = K(t, u, -t)$. Используя цепное правило, получаем

$$(6) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r_1 \partial r_2} \Big|_{(0, 0)} = \frac{\partial^2 K}{\partial r_1 \partial r_2} \Big|_{(0, 0, 0)} - \frac{\partial^2 K}{\partial r_3 \partial r_2} \Big|_{(0, 0, 0)}.$$

Далее, $K(t, u, 0) = f(Y_u(X_t(m)))$. Следовательно,

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial r_2} \Big|_{(t, 0, 0)} &= Y_{X_t(m)}(f), \\ \frac{\partial^2 K}{\partial r_1 \partial r_2} \Big|_{(0, 0, 0)} &= X_m(Yf). \end{aligned}$$

Кроме того, $K(0, u, s) = f(X_s(Y_u(m)))$. Таким образом,

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial r_3} \Big|_{(0, u, 0)} &= Xf(Y_u(m)), \\ -\frac{\partial^2 K}{\partial r_2 \partial r_3} \Big|_{(0, 0, 0)} &= Y_m(Xf). \end{aligned}$$

Утверждение (b) следует из (4), (6), (7) и (8). Из него вытекает, что $L_X Y$ — гладкое векторное поле.

Чтобы доказать (с), рассмотрим L_X как отображение $E^*(M)$ в пространство форм, априори не гладких, и заметим, что свойство дифференцирования легко проверить для L_X , добавляя и вычитая подходящие члены до того, как мы перейдем к пределу, в определении 2.24 (2). Затем проверим, что L_X коммутирует с оператором d , когда они рассматриваются на функциях, т. е.

$$(9) \quad (L_X(df))_m = d(L_X f)_m \quad (f \in C^\infty(M); m \in M).$$

Поскольку обе части равенства (9) — элементы пространства M_m^* , остается проверить, что они принимают одинаковые значения на произвольном векторе Y_m из M_m . Для правой части имеем

$$(10) \quad d(L_X f)_m(Y_m) = Y_m(L_X f) = Y_m\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ X_t)\right),$$

где $f \circ X_t$ можно рассматривать как гладкую функцию на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой окрестности W точки m из M (1.48 (d)). Для левой части (9) получаем

$$\begin{aligned} (11) \quad (L_X(df))_m(Y_m) &= \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X_t^* (df_{X_t(m)})) \right\} (Y_m) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X_t^* (df_{X_t(m)}(Y_m))) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (df(dY_t(Y_m))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y_m(f \circ X_t)). \end{aligned}$$

Пусть теперь векторное поле Y — продолжение Y_m до векторного поля на W . Согласно упр. 24 (с) из гл. 1, d/dt и Y имеют канонические продолжения на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$, где они удовлетворяют тождеству $[d/dt, Y] \equiv 0$. Этот факт вместе с (10) и (11) влечет за собой (9). Наконец, чтобы убедиться в том, что $L_X \omega$ действительно является гладкой формой, и проверить, что L_X коммутирует с d для любой формы ω из $E^*(M)$, просто запишем произвольную форму ω в локальных координатах, как это было сделано в 2.16 (2), и произведем соответствующие вычисления, используя уравнение (9), п. (а) и тот факт, что L_X — дифференцирование.

Для того чтобы доказать утверждение (d), заметим, что как L_X , так и $i(X) \circ d + d \circ i(X)$ являются дифференцированиями на множестве $E^*(M)$, коммутируют с оператором d и, кроме того, одинаково действуют на функциях. После этого результат (d) получается простым вычислением в локальных координатах.

Мы оставляем доказательство утверждения (е) в качестве упражнения. Доказательство несложно — надо лишь упорно разворачивать определения. Проверка доказываемого равенства снова сводится к вычислениям в локальных координатах. Попробуйте для начала провести его для $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ в некоторой координатной окрестности.

И наконец, утверждение (f) выводится из (е) с помощью п. (d) и индукции по p . При $p = 1$ (е) выглядит так:

$$(12) \quad L_{Y_0}(\omega(Y_1)) = (L_{Y_0}\omega)(Y_1) + \omega[Y_0, Y_1].$$

Применяя (а) и (d) к (12), получаем

$$\begin{aligned} Y_0\omega(Y_1) &= ((i(Y_0) \circ d + d \circ i(Y_0)) \omega)(Y_1) + \omega[Y_0, Y_1] = \\ &= d\omega(Y_0, Y_1) + Y_1(\omega(Y_0)) + \omega[Y_0, Y_1], \end{aligned}$$

что и доказывает (f) в случае $p = 1$. Предположим, что утверждение (f) верно в случае $p - 1$. Тогда для p оно снова получается из (е) с помощью (d) и предположения индукции.

Дифференциальные идеалы

Мы хотим переформулировать теорему Фробениуса на языке дифференциальных форм и затем описать весьма полезный метод Э. Картана нахождения отображений путем отыскания их графиков.

2.26. Определение. Пусть $\mathcal{D}$ — гладкое p -мерное распределение на многообразии M . Говорят, что q -форма ω *аннулирует* распределение $\mathcal{D}$, если для каждой точки $m \in M$

$$(1) \quad \omega_m(v_1, \dots, v_q) = 0 \text{ для любых } v_1, \dots, v_q \in \mathcal{D}(m).$$

Говорят, что форма $\omega \in E^*(M)$ *аннулирует* распределение $\mathcal{D}$, если любая однородная часть формы ω аннулирует $\mathcal{D}$. Положим

$$(2) \quad \mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{\omega \in E^*(M): \omega \text{ аннулирует } \mathcal{D}\}.$$

2.27. Определение. Набор 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_n$ на многообразии M называется *независимым*, если для каждой точки $m \in M$ эти формы составляют независимое множество в пространстве M_m^* .

2.28. Предложение. Пусть $\mathcal{D}$ — гладкое p -мерное распределение на многообразии M . Тогда

(а) $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ — идеал в $E^*(M)$.

(б) $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ локально порождается $d - p$ независимыми 1-формами. (Это означает, что для каждой точки $m \in M$ можно найти такую ее окрестность U и множество независимых 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$ на U , что

(i) если $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$, то ограничение $\omega|_U$ принадлежит идеалу в $E^*(U)$, порожденному формами $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$;

(ii) если $\omega \in E^*(M)$ и существует такое покрытие многообразия M описанными выше множествами U , что для каждого U из этого покрытия ограничение $\omega|_U$ принадлежит идеалу, порожденному формами $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$, то $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$.)

(с) Если $\mathcal{I} \subset E^*(M)$ — идеал, локально порожденный $d - p$ независимыми 1-формами, то на многообразии M существует единственное гладкое распределение $\mathcal{D}$ размерности p , для которого $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из определения множества $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ и определения умножения в $E^*(M)$.

Пусть $m \in M$. Поскольку $\mathcal{D}$ — гладкое p -мерное распределение, то найдутся гладкие векторные поля $X_{d-p+1}, \dots, X_d$, порождающие $\mathcal{D}$ в каждой точке окрестности точки m . Этот набор может быть дополнен до набора $X_1, \dots, X_d$ гладких векторных полей, образующих базис пространства M_n для каждой точки n из окрестности U точки m . Пусть $\omega_1, \dots, \omega_d$ — набор сопряженных 1-форм, т. е.

$$\omega_i(X_j)(n) = \delta_{ij} \quad (\text{символ Кронекера})$$

для каждой точки n из U . Формы $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$ будут искомыми 1-формами на U . Действительно, это независимые гладкие 1-формы на U . Если $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$, то $\omega|_U = \sum a_\Phi \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_r}$, где индекс Φ пробегает непустые подмножества $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, d\}$, а множитель a_Φ тождественно равен нулю при $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{1, \dots, d-p\} = \emptyset$. Таким образом, ограничение $\omega|_U$ принадлежит идеалу в $E^*(U)$, порожденному $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$. Обратно, если ω — такая форма, что для каждой области U из некоторого покрытия пространства M форма $\omega|_U$ принадлежит идеалу из $E^*(U)$, порожденному формами $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$, то очевидно, что $\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Это и доказывает (b).

Докажем утверждение (c). Пусть $m \in M$, и пусть независимые 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$ порождают $\mathcal{I}$ в некоторой окрестности U точки m . Определим $\mathcal{D}(m)$ как подпространство в M_m , аннулятор которого есть подпространство в M_m^* , натянутое на набор форм $\{\omega_i(m): i = 1, \dots, d-p\}$. Тогда $\mathcal{D}$ — гладкое p -мерное распределение на M и $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Единственность распределения $\mathcal{D}$ вытекает из того факта, что если $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_1$, то и $\mathcal{I}(\mathcal{D}) \neq \mathcal{I}(\mathcal{D}_1)$.

2.29. Определение. Идеал $\mathcal{I} \subset E^*(M)$ называется *дифференциальным идеалом*, если он замкнут относительно оператора внешнего дифференцирования, т. е.

$$(1) \quad d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}.$$

2.30. Предложение. Гладкое распределение $\mathcal{D}$ на многообразии M будет инволютивным тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ является дифференциальным идеалом.

Доказательство. Пусть ω есть q -форма из $\mathcal{I}(\mathcal{D})$, и пусть $X_0, \dots, X_q$ — гладкие векторные поля, принадлежащие $\mathcal{D}$. Тогда из утверждения 2.25 (f) и инволютивности распределения $\mathcal{D}$ следует, что $d\omega(X_0, \dots, X_q) \equiv 0$. Поэтому $d\omega \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$ и $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ является дифференциальным идеалом. Обратно, предположим, что $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ — дифференциальный идеал. Пусть Y_0 и Y_1 — векторные поля, принадлежащие $\mathcal{D}$, и пусть $m \in M$. Согласно 2.28 (b), существуют независимые 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$, порождающие $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ в некоторой окрестности U точки m . Продолжим эти формы на многообразие M , умножая их на гладкую функцию, с носителем, лежащим в U , которая равна единице в окрестности m . Для продолженных форм мы сохраним те же обозначения $\omega_1, \dots, \omega_{d-p}$. Согласно утверждению 2.25 (f),

$$(1) \quad \omega_i[Y_0, Y_1] = -d\omega_i(Y_0, Y_1) + Y_0\omega_i(Y_1) - Y_1\omega_i(Y_0),$$

где $i = 1, \dots, d-p$. Правая часть (1) будет тождественным нулем на M , поскольку $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ — дифференциальный идеал и

$\omega_i \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Итак, $\omega_i([Y_0, Y_1])(m) = 0$ для $i = 1, \dots, d - p$. Но $\mathcal{D}(m) \subset M_m$ — подпространство, аннулятором которого служит подпространство из M_m^* , натянутое на набор $\{\omega_i(m) : i = 1, \dots, d - p\}$. Поэтому $[Y_0, Y_1](m) \in \mathcal{D}(m)$ и $\mathcal{D}$ инволютивно.

2.31. Определение. Подмногообразие (N, ψ) многообразия M называется *интегральным многообразием идеала* $\mathcal{I} \subset E^*(M)$, если $\psi^*(\omega) \equiv 0$ для каждой формы $\omega \in \mathcal{I}$. Связное интегральное многообразие идеала $\mathcal{I}$ называется *максимальным*, если его образ не является собственным подмножеством образа никакого другого связного интегрального многообразия этого идеала.

Мы непосредственно получаем следующую формулировку теоремы Фробениуса 1.64 в терминах дифференциальных идеалов.

2.32. Теорема. Пусть $\mathcal{I} \subset E^*(M)$ — дифференциальный идеал, локально порожденный $d - p$ независимыми 1-формами. Пусть $t \in M$. Тогда существует единственное максимальное связное интегральное многообразие идеала $\mathcal{I}$, проходящее через t , и это интегральное многообразие имеет размерность p .

2.33. Теперь мы рассмотрим один технический прием, который в некоторых ситуациях позволяет построить отображение, отыскивая его график как интегральное многообразие некоторого дифференциального идеала. Этот прием имеет важные применения в теории групп Ли, рассматриваемой в гл. 3, а также в таких областях, как изометрические вложения в римановой геометрии, см., например, [2, § 10.8].

Рассмотрим гладкое отображение $f: N^c \rightarrow M^d$ и некоторый набор форм $\{\omega_i\}$ на многообразии M . Через π_1 и π_2 обозначим естественные проекции из $N \times M$ на N и M соответственно. Для каждого i определим форму μ_i на $N \times M$, полагая

$$(1) \quad \mu_i = \pi_1^* f^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i).$$

Обозначим через $\mathcal{I}$ идеал в $E^*(N \times M)$, порожденный формами μ_i .

Графиком отображения f называется подмногообразие (N, g) произведения $N \times M$, где

$$(2) \quad g(n) = (n, f(n)).$$

Мы утверждаем, что этот график является интегральным многообразием идеала $\mathcal{I}$. Для этого достаточно показать, что $g^*(\mu_i) = 0$ для каждого i . Действительно, $\pi_1 \circ g = \text{id}$, $\pi_2 \circ g = f$, а следовательно,

$$g^*(\mu_i) = (\pi_1 \circ g)^* f^*(\omega_i) - (\pi_2 \circ g)^*(\omega_i) = f^*(\omega_i) - f^*(\omega_i) = 0.$$

Таким образом, задав отображение $f: N \rightarrow M$ и набор форм на M , мы замечаем, что график отображения f будет интегральным многообразием некоторого идеала форм на $N \times M$. Пусть теперь задано многообразие M^d ; предположим, что на M существует базис $\omega_1, \dots, \omega_d$ 1-форм, т. е. $\{\omega_i(m)\}$ — базис пространства M_m^* для каждой точки $m \in M$. (Вообще говоря, такого базиса может и не существовать, но он должен существовать в некоторых интересных случаях, и тогда наш прием оказывается весьма полезным.) Предположим также, что имеются многообразие N^c и набор 1-форм $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ на N . Мы хотим найти отображение $f: N \rightarrow M$, такое, что

$$(3) \quad f^*(\omega_i) = \alpha_i$$

для $i = 1, \dots, d$. Если такое отображение существует, то как мы заметили, его график будет интегральным многообразием некоторого конкретного идеала форм. Поэтому мы попробуем найти этот график по такому идеалу. Определим формы μ_i на $N \times M$, полагая

$$(4) \quad \mu_i = \pi_1^*(\alpha_i) - \pi_2^*(\omega_i),$$

и обозначим через $\mathcal{I}$ идеал в $E^*(N, M)$, который они порождают. Если окажется, что $\mathcal{I}$ — дифференциальный идеал, то мы сможем определить искомое отображение f (по крайней мере локально) по интегральному многообразию идеала $\mathcal{I}$. Таким образом, мы найдем f , отыскивая график f в виде интегрального многообразия подходящего дифференциального идеала. Итак, допустим, что $\mathcal{I}$ — дифференциальный идеал, и пусть $(n_0, m_0) \in N \times M$. Поскольку $\mathcal{I}$ локально (а в действительности глобально) порождается d независимыми 1-формами, теорема Фробениуса гарантирует существование максимального связного интегрального многообразия I идеала $\mathcal{I}$ размерности c , проходящего через (n_0, m_0) . Пусть $q \in I$. Утверждается, что $d\pi_1|_{I_q}$ является инъективным. Действительно, допустим, что для $v \in I_q$ выполнено $d\pi_1(v) = 0$. Поскольку $\mu_i(v) = 0$, из (4) получаем, что $\omega_i(d\pi_2(v)) = 0$ для $i = 1, \dots, d$, а это означает, что $d\pi_2(v) = 0$, поскольку ω_i образуют базис 1-форм на M . Однако если $d\pi_1(v) = 0$ и $d\pi_2(v) = 0$, то $v = 0$. Поэтому ограничение $d\pi_1|_{I_q}$ инъективно. Таким образом, $\pi_1|_I: I \rightarrow N$ локально является диффеоморфизмом. Следовательно, существуют окрестность V точки (n_0, m_0) в I и окрестность U точки n_0 , такие, что $\pi_1|_V: V \rightarrow U$ является диффеоморфизмом. Определим отображение $f: U \rightarrow M$, полагая

$$(5) \quad f = \pi_2 \circ (\pi_1|_V)^{-1}.$$

Тогда $f(n_0) = m_0$, график отображения f — открытое подмногообразие I и, кроме того,

$$(6) \quad f^*(\omega_i) = \alpha_i|_U.$$

Действительно, рассмотрим $v \in U_n$ для некоторой точки $n \in U$. Тогда, согласно (4),

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_i(d(\pi_1|V)^{-1}(v)) = \\ &= \alpha_i(v) - \omega_i(d\pi_2 \circ d(\pi_1|V)^{-1}(v)) = \alpha_i(v) - f^*(\omega_i)(v), \end{aligned}$$

что и доказывает (6). Итак, локально мы получили желаемое отображение. Это значит, что для заданной точки $n_0 \in N$ и для произвольно выбранной точки $m_0 \in M$ мы в предположении, что идеал $\mathcal{I}$, порожденный формами вида (4), является дифференциальным идеалом, нашли открытую окрестность U точки n_0 и гладкое отображение $f: U \rightarrow M$, такие, что $f(n_0) = m_0$ и что $f^*(\omega_i) = \alpha_i|U$. Кроме того, такое отображение единственно. Точнее, пусть $m_0 \in M$ и U — связная открытая окрестность точки n_0 в N . Если существует гладкое отображение $f: U \rightarrow M$, такое, что $f(n_0) = m_0$ и $f^*(\omega_i) = \alpha_i|U$ для $i = 1, \dots, d$, то такое отображение на U единственно. Действительно, пусть $\tilde{f}$ — другое такое отображение. Обозначим через $(U, \tilde{g})$ и (U, g) графики отображений $\tilde{f}$ и f соответственно. Тогда

$$(7) \quad \tilde{g}(n) = (n, \tilde{f}(n)) \quad \text{и} \quad g(n) = (n, f(n))$$

для $n \in U$. Согласно замечаниям, сделанным в начале раздела «Дифференциальные идеалы», как (U, g) , так и $(U, \tilde{g})$ являются интегральными многообразиями идеала $\mathcal{I}$, проходящими через (n_0, m_0) . Значит, подмножество в U , на котором g и $\tilde{g}$ совпадают, непусто, поскольку оно содержит n_0 , замкнуто в силу непрерывности и, кроме того, открыто. Действительно, пусть $\tilde{g}(n) = g(n)$. Тогда из единственности интегрального многообразия следует, что существуют достаточно малые окрестности W и $\tilde{W}$ точки n , такие, что

$$(8) \quad g(W) = \tilde{g}(\tilde{W}).$$

Принимая во внимание (7), получаем, что $W = \tilde{W}$ и что

$$(9) \quad g|W = \tilde{g}|W.$$

Поскольку U связно, $g = \tilde{g}$ на U , откуда следует, что $f = \tilde{f}$ на U . Единственность доказана.

В некоторых случаях оказывается, что ограничение $\pi_1|I$ будет накрытием пространства N , а если при этом N односвязно, то можно заключить, что существует единственное гладкое отображение $f: N \rightarrow M$, такое, что $f(n_0) = m_0$ и что выполнено (3). В гл. 3 мы продемонстрируем несколько конкретных применений этого метода для доказательства существования и единственности некоторых отображений. Этот прием впервые был приме-

нен Э. Картаном для нахождения локально изометрических вложений римановых многообразий в евклидово пространство.

Соберем полученные результаты.

2.34. Теорема. Пусть N^c и M^d — гладкие многообразия, а π_1 и π_2 — канонические проекции из $N \times M$ на N и M соответственно. Допустим, что на M существует базис $\{\omega_i: i = 1, \dots, d\}$ 1-форм.

(а) Если $f: N \rightarrow M$ — гладкое отображение, то его график является интегральным многообразием идеала форм на $N \times M$, порожденного семейством

$$(1) \quad \{\pi_1^* f^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i): i = 1, \dots, d\}.$$

(b) Если $\{\alpha_i: i = 1, \dots, d\}$ — набор 1-форм на N и идеал форм на $N \times M$, порожденный формами

$$(2) \quad \{\pi_1^*(\alpha_i) - \pi_2^*(\omega_i): i = 1, \dots, d\},$$

является дифференциальным идеалом, то для произвольной пары точек $n_0 \in N$ и $m_0 \in M$ существуют окрестность U точки n_0 и гладкое отображение $f: U \rightarrow M$, такие, что $f(n_0) = m_0$ и

$$(3) \quad f^*(\omega_i) = \alpha_i|_U \quad (i = 1, \dots, d).$$

Кроме того, если U — некоторое связное открытое множество, содержащее n_0 , для которого существует гладкое отображение $f: U \rightarrow M$, такое, что $f(n_0) = m_0$ и выполняется равенство (3), то такое отображение f на U единственно.

Упражнения

1. Приведите доказательство свойств 2.2 (а)—(е).

2. (а) Покажите, что однородные тензоры, вообще говоря, не являются разложимыми.

(b) Покажите, что если $\dim V \leq 3$, то каждый однородный элемент алгебры $\Lambda(V)$ разложим.

(с) Приведите пример неразложимого однородного элемента из алгебры $\Lambda(V)$ для $\dim V > 3$.

(d) Пусть α — дифференциальная форма. Верно ли, что $\alpha \wedge \alpha \equiv 0$?

3. Докажите свойства 2.6 (а)—(с).

4. Установите формулы (2), (3) и (4) из разд. 2.10.

5. Докажите, что $L_X f = Xf$ для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и гладкого векторного поля X на M .

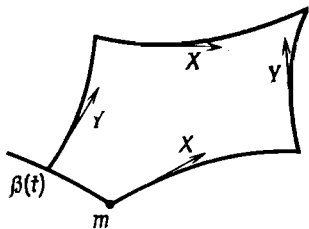
6. Пусть X и Y — гладкие векторные поля на M , а X_t и Y_t — соответствующие локальные однопараметрические группы диффеоморфизмов. Пусть $m \in M$, и пусть

$$\beta(t) = Y_{-Y_t^{-1}X_{-Y_t^{-1}}Y_{Y_t^{-1}}X_{Y_t^{-1}}(m),$$

где $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, а ε достаточно мало. Докажите, что

$$(1) \quad [X, Y]_m f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\beta(t)) - f(\beta(0))}{t}.$$

Если бы $\beta(t)$ была гладкой кривой при $t = 0$, то правая часть (1) была бы просто производной функции f вдоль касательного вектора к β в точке m . Однако из-за присутствия квадратного корня $\sqrt{t}$ β , вообще говоря, не будет гладкой при $t = 0$. Поэтому существование предела в (1) — это уже



часть задачи, и необходимо показать, что кривая β , даже не будучи гладкой при $t = 0$, определяет касательный вектор в пространстве M_m и что этот вектор будет в точности равен $[X, Y]_m$.

7. Докажите 2.25 (е).

8. Пусть M — связное многообразие, и пусть $\pi: M \times N \rightarrow N$ — естественная проекция. Докажите, что p -форма α на $M \times N$ будет равна $\pi^*(\alpha)$ для некоторой p -формы α на N тогда и только тогда, когда $i(X)\omega = 0$ и $L_X\omega = 0$ для каждого векторного поля X на $M \times N$, такого, что $d\pi(X(m, n)) = 0$ в каждой точке $(m, n) \in M \times N$.

9. Докажите, что элементы $v_1, \dots, v_r$ векторного пространства V будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge \dots \wedge v_r \neq 0$.

10. Покажите, что линейно независимые наборы $\{v_1, \dots, v_r\}$ и $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ будут базисами одного r -мерного подпространства векторного пространства V тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge \dots \wedge v_r = c\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$, где $c \neq 0$, и в этом случае $c = \det A$, где $A = (a_{ij})$ и $v_i = \sum a_{ij}\omega_j$.

11. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал форм на M , локально порожденный r независимыми 1-формами, скажем формами $\omega_1, \dots, \omega_r$ на U . Утверждение, что $\mathcal{I}$ — дифференциальный идеал, эквивалентно каждому из следующих:

(а) $d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j$ для некоторых 1-форм ω_{ij} ;

(б) если $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$, то $d\omega = \alpha \wedge \omega$ для некоторой 1-формы α .

12. Пусть V есть n -мерное векторное пространство, а l — линейное преобразование на V . Поскольку $\Lambda_n(V)$ одномерно, линейное преобразование, которое l индуцирует на $\Lambda_n(V)$, будет просто умножением на число. Это число мы назовем *определителем преобразования l* . Пусть A — матрица размера $n \times n$, $v_1, \dots, v_n$ — базис пространства V , а l — линейное преобразование пространства V , такое, что его матрица в данном базисе совпадает с A . Тогда назовем *определителем матрицы A* определитель

преобразования l . Покажите, что определитель A не зависит от выбранного базиса $v_1, \dots, v_n$. Используя это определение, выведите известные свойства определителя. Например, получите разложение

$$\det A = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)},$$

где $A = (a_{ij})$, $\operatorname{sgn} \pi$ — знак перестановки π , а π пробегает все перестановки на n символах. Докажите также, что определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей.

13. Пусть V есть n -мерное вещественное пространство с заданным скалярным произведением. Продолжим скалярное произведение с V на всю алгебру $\Lambda(V)$, полагая скалярное произведение однородных элементов различных рангов равным нулю и

$$(1) \quad \langle w_1 \wedge \dots \wedge w_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p \rangle = \det \langle w_i, v_j \rangle,$$

а затем продолжая его на все $\Lambda_p(V)$ по линейности. Покажите, что если $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в V , то соответствующий базис 2.6 (1) алгебры $\Lambda(V)$ будет ее ортонормированным базисом.

Поскольку $\Lambda_n(V)$ одномерна, то $\Lambda_n(V) - \{0\}$ имеет две связанные компоненты. *Ориентация на V* — это выбор одной компоненты из $\Lambda_n(V) - \{0\}$. Если V — ориентированное пространство с заданным скалярным умножением, то существует линейное преобразование¹⁾

$$(2) \quad *: \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V),$$

которое корректно определяется требованием, чтобы для *любого* ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ в V (в частности, для любого переупорядочения заданного базиса)

$$(3) \quad \begin{aligned} * (1) &= \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad * (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \pm 1, \\ * (e_1 \wedge \dots \wedge e_p) &= \pm e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_n, \end{aligned}$$

здесь берется знак «+», если $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ лежит в связанной компоненте из $\Lambda_n(V) - \{0\}$, соответствующей выбранной ориентации, и знак «−» в противном случае. Заметим, что

$$(4) \quad *: \Lambda_p(V) \rightarrow \Lambda_{n-p}(V).$$

Докажите, что на алгебре $\Lambda_p(V)$

$$(5) \quad ** = (-1)^{p(n-p)}.$$

Покажите, что скалярное произведение произвольных $v, w \in \Lambda_p(V)$ можно представить в виде

$$(6) \quad \langle v, w \rangle = * \langle w \wedge * v \rangle = * (v \wedge * w).$$

¹⁾ Называемое иногда *оператором Ходжа*. — Прим. перев.

14. Пусть V — вещественное евклидово пространство, как и в упр. 13. Рассмотрим преобразование $\gamma: \Lambda_{p+1}(V) \rightarrow \Lambda_p(V)$, являющееся сопряженным к левому внешнему умножению на $\xi \in V$, т. е.

$$\langle \gamma(v), \omega \rangle = \langle v, \xi \wedge \omega \rangle$$

для $v \in \Lambda_{p+1}(V)$ и $\omega \in \Lambda_p(V)$. Докажите, что

$$\gamma(v) = (-1)^{np} * (\xi \wedge (*v)).$$

15. Пусть $\xi \in V$. Докажите, что последовательность

$$\Lambda_p(V) \xrightarrow{\xi \wedge} \Lambda_{p+1}(V) \xrightarrow{\xi \wedge} \Lambda_{p+2}(V)$$

левых внешних умножений на ξ точна, т. е. образ первого отображения совпадает с ядром второго.

16. **Лемма Картана.** Пусть $p \leq d$ и $\omega_1, \dots, \omega_p$ — линейно независимые 1-формы на M^d . Пусть $\theta_1, \dots, \theta_p$ — такие 1-формы на M , что

$$\sum_{i=1}^p \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Докажите, что существуют гладкие функции A_{ij} на M , такие, что $A_{ij} = A_{ji}$ и

$$\theta_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} \omega_j \quad (i = 1, \dots, p).$$

Группы Ли

Без сомнения, группы Ли образуют наиболее важный специальный класс дифференцируемых многообразий. Группы Ли — это дифференцируемые многообразия, которые в то же время являются группами, причем групповые операции гладкие. Хорошо известными примерами групп Ли служат, в частности, полная линейная группа, унитарная группа, ортогональная группа и специальная линейная группа.

В этой главе мы заложим основы для изучения групп Ли. В теории Ли центральной темой является связь между группой Ли и ее алгеброй Ли, состоящей из левоинвариантных векторных полей. Мы изучим соответствие между подгруппами и подалгебрами и между гомоморфизмами групп Ли и их алгебр Ли. Мы изучим свойства экспоненциального отображения, которое обобщает на случай произвольных групп Ли показательную функцию матриц и осуществляет ключевую связь между группой Ли и ее алгеброй Ли. Мы исследуем присоединенное представление группы Ли, докажем теорему о замкнутой подгруппе и рассмотрим основные свойства и примеры однородных многообразий. Попутно мы установим многие свойства классических линейных групп.

Группы Ли и их алгебры Ли

3.1. Определение. *Группа Ли* G — это дифференцируемое многообразие, снабженное такой групповой структурой, что отображение $G \times G \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$, является гладким (т. е. принадлежит классу C^∞).

На протяжении этой главы буквами G и H мы будем обозначать группы Ли, а единичный элемент всегда будет обозначаться буквой e .

3.2. Замечания

(а) Пусть G — группа Ли. Отображение $\tau \mapsto \tau^{-1}$ является гладким, так как представляется в виде композиции $\tau \mapsto (e, \tau) \mapsto \tau^{-1}$ гладких отображений. Точно так же гладким будет и отображение $G \times G \rightarrow G$: $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$, разлагающееся в композицию $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau^{-1}) \mapsto \sigma\tau$ гладких отображений.

(б) Связная компонента единицы в группе Ли сама является группой Ли; все связные компоненты некоторой группы Ли диффеоморфны.

(с) Рассматриваемые нами группы Ли всегда будут удовлетворять второй аксиоме счетности, так как мы включили ее в определение дифференцируемого многообразия. В частности, у них не более чем счетное число связных компонент. Следует, однако, отметить, что если не включать в определение групп Ли требование, чтобы выполнялась вторая аксиома счетности, то связные группы Ли (а следовательно, и группы с не более чем счетным числом связных компонент) по-прежнему будут ей удовлетворять. Доказательство этого мы оставим читателям в качестве упражнения. Следует воспользоваться тем, что связная группа Ли является объединением всех степеней произвольной окрестности единицы (см. разд. 3.18).

3.3. Примеры групп Ли

(а) Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — группа Ли относительно сложения векторов.

(б) $\mathbb{C}^*$ — отличные от нуля комплексные числа — образуют группу Ли относительно умножения.

(с) Единичная окружность $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ есть группа Ли с умножением, индуцированным умножением в $\mathbb{C}^*$.

(д) Декартово произведение $G \times H$ двух групп Ли само является группой Ли с гладкой структурой прямого произведения многообразий и групповой структурой прямого произведения групп, т. е. $(\sigma_1, \tau_1)(\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2)$.

(е) n -мерный тор T^n , $n > 0$, — это группа Ли, представляющая собой произведение группы Ли S^1 на себя n раз.

(ф) Многообразие $GL(n; \mathbb{R})$ всех невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$ — группа Ли относительно умножения матриц.

(г) Множество всех невырожденных верхнетреугольных вещественных матриц (у которых все элементы ниже диагонали нулевые) является группой Ли относительно умножения матриц.

(и) Обозначим через $\mathbb{R}^*$ множество ненулевых вещественных чисел, и пусть K — произведение многообразий $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Групповая структура

$$(s, t)(s_1, t_1) = (ss_1, st_1 + t)$$

на K превращает его в группу Ли. Это группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}$; элемент $(s, t) \in K$ отождествляется с преобразованием $x \mapsto sx + t$, причем умножение в K совпадает с композицией преобразований.

(и) Пусть K — произведение многообразий $GL(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Определим групповую структуру на K , полагая $(A, v)(A_1, v_1) = (AA_1, Av_1 + v)$. Тогда K становится группой Ли, группой аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$; элемент (A, v) отождествляется с аффинным преобразованием $x \mapsto Ax + v$ в $\mathbb{R}^n$,

причем умножение в K совпадает с композицией преобразований.

3.4. Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ — это вещественное векторное пространство $\mathfrak{g}$ с билинейной операцией $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (называемой *скобками Ли*), причем для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$ выполнены равенства

- (а) $[x, y] = -[y, x]$ (*антикоммутативность*);
- (б) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (*тождество Якоби*).

Это понятие важно потому, что с каждой группой Ли тесно связана некая конечномерная алгебра Ли, и в свойствах этой алгебры Ли отражаются свойства самой группы Ли. Например, мы увидим, что связная односвязная группа Ли с точностью до изоморфизма определяется своей алгеброй Ли. Изучение таких групп Ли в значительной мере сводится к изучению их алгебр Ли.

3.5. Примеры алгебр Ли

(а) Векторное пространство всех гладких векторных полей на многообразии M образует алгебру Ли относительно операции коммутирования (скобок Ли).

(б) Любое векторное пространство становится алгеброй Ли, если все скобки Ли положить равными нулю. Такая алгебра Ли называется *абелевой*.

(с) Векторное пространство $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ всех вещественных матриц размера $n \times n$ образует алгебру Ли, если положить

$$[A, B] = AB - BA.$$

(d) Двумерное векторное пространство с базисом x, y становится алгеброй Ли, если положить

$$[x, x] = 0, \quad [y, y] = 0, \quad [x, y] = y$$

и продолжить эту операцию по линейности.

(е) $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением $X \times Y$ в качестве билинейной операции является алгеброй Ли.

Доказательство того, что во всех этих примерах действительно получаются алгебры Ли, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

3.6. Определения. Пусть $\sigma \in G$. Определим *левый сдвиг* l_σ и *правый сдвиг* r_σ как следующие диффеоморфизмы группы Ли G :

$$(1) \quad l_\sigma(\tau) = \sigma\tau, \quad r_\sigma(\tau) = \tau\sigma$$

для всех $\tau \in G$. Если V — подмножество в G , то будем обозначать $r_\sigma(V)$ и $l_\sigma(V)$ через $V\sigma$ и σV соответственно. Векторное поле X на G (априори не предполагаемое гладким) называется *левоинва-*

риантным, если $X \circ l_\sigma$ связано с самим собой для каждого $\sigma \in G$, т. е.

$$(2) \quad dl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma.$$

Множество всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G будет обозначаться соответствующей малой готической буквой $\mathfrak{g}$.

3.7. Предложение. Пусть G — группа Ли и $\mathfrak{g}$ — множество левоинвариантных векторных полей на G .

(а) $\mathfrak{g}$ — векторное пространство (над полем $\mathbb{R}$), и отображение $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow G_e$, определяемое равенством $\alpha(X) = X(e)$, есть изоморфизм между $\mathfrak{g}$ и касательным пространством G_e к многообразию G в единице. Следовательно, $\dim \mathfrak{g} = \dim G_e = \dim G$.

(б) Любое левоинвариантное векторное поле гладкое.

(с) Скобки Ли двух левоинвариантных векторных полей сами являются левоинвариантным полем.

(д) $\mathfrak{g}$ образует алгебру Ли относительно операции скобок Ли на векторных полях.

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{g}$ — векторное пространство и α линейно; оно инъективно, так как если $\alpha(X) = \alpha(Y)$, то для всех $\sigma \in G$

$$(1) \quad X(\sigma) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = Y(\sigma)$$

и $X = Y$. Кроме того, α сюръективно; действительно, если $x \in G_e$, то полагаем $X(\sigma) = dl_\sigma(x)$ для всех $\sigma \in G$. Тогда $\alpha(X) = x$ и X левоинвариантно, так как

$$X(\tau\sigma) = dl_{\tau\sigma}(x) = dl_\tau dl_\sigma(x) = dl_\tau(X(\sigma))$$

для любых σ и τ , принадлежащих G . Пункт (а) доказан.

Для доказательства п. (б) предположим, что $X \in \mathfrak{g}$, а $f \in C^\infty(G)$. Нужно только показать, что $Xf \in C^\infty(G)$. Далее,

$$(2) \quad Xf(\sigma) = X_e f = dl_\sigma(X_e) f = X_e(f \circ l_\sigma).$$

Остается показать, что $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$ — бесконечно дифференцируемая функция на G . Для этого разложим ее в композицию подходящих гладких отображений. Пусть $\varphi: G \times G \rightarrow G$ обозначает групповое умножение, $\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau$. Введем i_e^1, i_σ^1 как отображения из G в $G \times G$, определяемые формулами

$$(3) \quad i_e^1(\tau) = (\tau, e), \quad i_\sigma^1(\tau) = (\sigma, \tau).$$

Пусть Y — гладкое векторное поле на G , такое, что $Y(e) = X(e)$. Тогда $\bar{\Gamma}(0, Y)$ будет гладким векторным полем на $G \times G$ и $\bar{\Gamma}(0,$

$Y)(f \circ \varphi) \circ i_e^1$ — гладкая функция на G . Используя упр. 24 (п. (d)) из гл. 1, получаем

$$\begin{aligned} [(0, Y)(f \circ \varphi)] \circ i_e^1(\sigma) &= (0, Y)_{(\sigma, e)}(f \circ \varphi) = \\ &= 0_\sigma(f \circ \varphi \circ i_e^1) + Y_e(f \circ \varphi \circ i_\sigma^2) = \\ &= X_e(f \circ \varphi \circ i_\sigma^2) = X_e(f \circ l_\sigma). \end{aligned}$$

Итак, $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$ — гладкая функция на G , что доказывает п. (b).

Так как левоинвариантные поля являются гладкими в силу п. (b), определены их скобки Ли. Далее, если $X \circ l_\sigma$ связано с собой, и $Y \circ l_\sigma$ связано с собой, то $[X, Y]$ тоже l_σ -связано с собой, см. разд. 1.55. Поэтому скобки Ли двух левоинвариантных векторных полей — снова левоинвариантное векторное поле. Пункт (d) теперь непосредственно следует из разд. 1.45.

3.8. Определение. Мы определим *алгебру Ли группы Ли G* как алгебру Ли $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на G . Другим способом мы могли бы определить алгебру Ли группы Ли G как касательное пространство G_e к ней в единице со структурой алгебры Ли, задаваемой условием, чтобы изоморфизм векторных пространств 3.7 (а) $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow G_e$ был изоморфизмом алгебр Ли. Время от времени нам будет удобно рассматривать алгебру Ли именно с такой точки зрения. В частности, в разд. 3.10 и 3.37 мы увидим, что алгебры Ли классических групп особенно хорошо интерпретируются в терминах их касательных пространств в единице.

3.9. Замечания о векторных пространствах как многообразиях. В п. 1.5 (b) мы видели, что каждое конечномерное вещественное векторное пространство V естественным образом может рассматриваться как дифференцируемое многообразие. Пусть $\{e_i\}$ — базис в V и $\{r_i\}$ — сопряженный базис. Пусть $p \in V$. Существует естественное отождествление касательного пространства V_p к V в точке p с самим V :

$$(1) \quad \sum a_i \frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_p \leftrightarrow \sum a_i e_i.$$

Легко видеть, что это отождествление не зависит от выбора базиса. Мы часто будем пользоваться таким отождествлением, описывая касательные векторы к векторному пространству как элементы самого этого пространства. В частности, для гладкой кривой $\sigma(t)$ в V

$$(2) \quad \dot{\sigma}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0}.$$

3.10. Примеры групп Ли и их алгебр Ли

(а) Вещественная прямая $\mathbb{R}$ — группа Ли относительно сложения. Левоинвариантные векторные поля суть просто постоянные векторные поля $\{\lambda (d/dr): \lambda \in \mathbb{R}\}$. Скобки Ли любых двух таких полей нулевые.

(б) *Полная линейная группа.* Множество $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ всех вещественных матриц размера $n \times n$ является вещественным векторным пространством размерности n^2 . Матрицы складываются и умножаются на скаляры покомпонентно. Как уже отмечалось, $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ превращается в алгебру Ли, если положить $[A, B] = AB - BA$.

Полная линейная группа $GL(n; \mathbb{R})$ наследует структуру многообразия с $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ как открытое подмножество последнего, на котором не обращается в нуль детерминант, и является группой Ли относительно матричного умножения. Пусть x_{ij} — глобальная координатная функция на $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, значение которой на каждой матрице есть ее элемент с индексами (i, j) . Тогда если $\sigma, \tau \in GL(n; \mathbb{R})$, то $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$ рационально выражается через $\{x_{kl}(\sigma)\}$ и $\{x_{kl}(\tau)\}$ со знаменателем, отличным от нуля, что доказывает гладкость отображения $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли $GL(n; \mathbb{R})$. Пусть $\alpha: \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})_e \rightarrow \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ — каноническое отождествление касательного пространства к $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ в единичной матрице с самим пространством $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$. Таким образом,

$$(1) \quad \alpha(v)_{ij} = v(x_{ij}),$$

где $v \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})_e$. Так как $GL(n; \mathbb{R})_e = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})_e$, получаем естественное отображение $\beta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, такое, что

$$(2) \quad \beta(X) = \alpha(X(e)).$$

Утверждается, что β есть *изоморфизм алгебр Ли*, и это позволит нам считать $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ алгеброй Ли группы Ли $GL(n; \mathbb{R})$. Очевидно, что β — изоморфизм векторных пространств. Нужно лишь показать, что

$$(3) \quad \beta([X, Y]) = [\beta(X), \beta(Y)]$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Заметим, что

$$(4) \quad (x_{ij} \circ l_\sigma)(\tau) = x_{ij}(\sigma\tau) = \sum_k x_{ik}(\sigma) x_{kj}(\tau).$$

Так как Y левоинвариантно,

$$(5) \quad \begin{aligned} (Y(x_{ij}))(\sigma) &= dl_\sigma(Y_e)(x_{ij}) = Y_e(x_{ij} \circ l_\sigma) = \sum_k x_{ik}(\sigma) Y_e(x_{kj}) = \\ &= \sum_k x_{ik}(\sigma) \alpha(Y_e)_{kj} = \sum_k x_{ik}(\sigma) \beta(Y)_{kj}. \end{aligned}$$

Используя (5), вычислим теперь (i, j) -ю компоненту $\beta([X, Y])$:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \beta([X, Y])_{ij} &= [X, Y]_e(x_{ij}) = X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij})) = \\
 &= \sum_k \{X_e(x_{ik}) \beta(Y)_{kj} - Y_e(x_{ik}) \beta(X)_{kj}\} = \\
 &= \sum_k \{\beta(X)_{ik} \beta(Y)_{kj} - \beta(Y)_{ik} \beta(X)_{kj}\} = \\
 &= [\beta(X), \beta(Y)]_{ij}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, β является изоморфизмом алгебр Ли.

(с) Пусть V есть n -мерное вещественное векторное пространство. Пусть $\text{End}(V)$ обозначает множество всех его линейных преобразований (множество его эндоморфизмов), и пусть $\text{Aut}(V) \subset \text{End}(V)$ обозначает подмножество невырожденных преобразований (автоморфизмов). $\text{End}(V)$ — вещественное векторное пространство размерности n^2 , которое становится алгеброй Ли, если положить

$$(7) \quad [l_1, l_2] = l_1 \circ l_2 - l_2 \circ l_1.$$

Выбор базиса в V определяет диффеоморфизм $\text{End}(V)$ с $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, отображающий $\text{Aut}(V)$ на $GL(n; \mathbb{R})$. Следовательно, $\text{Aut}(V)$ наследует структуру многообразия как открытое подмножество в $\text{End}(V)$ и является группой Ли относительно композиции преобразований. При естественном отождествлении $\text{End}(V)$ с $\text{End}(V)_e = \text{Aut}(V)_e$ (где e обозначает тождественное преобразование на V) в $\text{End}(V)$ возникает структура алгебры Ли, унаследованная от алгебры Ли группы Ли $\text{Aut}(V)$. Индуцированная таким образом структура алгебры Ли в точности совпадает с описанной формулой (7).

(d) Пусть $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ — множество всех комплексных матриц размера $n \times n$, а $GL(n; \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ — подмножество невырожденных матриц. Его называют *комплексной полной линейной группой*; множество $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ есть $2n^2$ -мерное вещественное векторное пространство, базис которого состоит из матриц δ_{ij} и $\sqrt{-1}\delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$), где у матрицы δ_{ij} все элементы нули, кроме (i, j) -го, равного единице; оно становится алгеброй Ли, если положить $[A, B] = AB - BA$. Группа $GL(n; \mathbb{C})$ наследует структуру многообразия как открытое подмножество в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ и является группой Ли относительно матричного умножения. Рассуждениями, аналогичными примеру (b), можно установить, что естественное отождествление алгебры Ли группы $GL(n; \mathbb{C})$ с $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ является изоморфизмом алгебр Ли. Таким образом, можно считать $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ алгеброй Ли группы Ли $GL(n; \mathbb{C})$.

(е) Точно таким же образом, по аналогии с примером (с), если V — комплексное n -мерное векторное пространство, $\text{End}(V)$ обозначает множество комплексно-линейных преобразований пространства V , а $\text{Aut}(V) \subset \text{End}(V)$ — подмножество невырожден-

ных преобразований, то $\text{Aut}(V)$ есть $2n^2$ -мерная группа Ли с алгеброй Ли $\text{End}(V)$.

3.11. Определение. Дифференциальная форма ω на G называется *левоинвариантной*, если

$$(1) \quad l_{\sigma}^* \omega = \omega$$

для любого $\sigma \in G$. Как и в случае векторных полей, нет нужды предполагать гладкость левоинвариантных форм, ибо она следует из левоинвариантности. Обозначим векторное пространство левоинвариантных p -форм на G через $E_{l \text{ inv}}^p(G)$ и положим

$$(2) \quad E_{l \text{ inv}}^*(G) = \sum_{p=0}^{\dim G} E_{l \text{ inv}}^p(G).$$

Левоинвариантные 1-формы известны также как *формы Маурера — Картанга*.

Следующее предложение — аналог для левоинвариантных форм предложения 3.7. Все доказательства получаются непосредственно, и мы оставляем их читателю в качестве упражнения.

3.12. Предложение

(а) *Левоинвариантные формы гладки.*

(б) $E_{l \text{ inv}}^*(G)$ образует подалгебру алгебры $E^*(G)$ всех гладких форм на G , и отображение $\omega \mapsto \omega(e)$ задает изоморфизм алгебр $E_{l \text{ inv}}^*(G) \rightarrow \Lambda(G_e^*)$. В частности, оно определяет естественный изоморфизм между $E_{l \text{ inv}}^1(G)$ и G_e^* , а следовательно, и $\mathfrak{g}^*$. (Таким образом, можно рассматривать $E_{l \text{ inv}}^1(G)$ как сопряженное пространство к алгебре Ли группы Ли G .)

(с) Значение $\omega(X)$ левоинвариантной 1-формы ω на левоинвариантном векторном поле X есть постоянная функция, и эта постоянная в точности равна значению ω на X , если рассматривать ω как элемент сопряженного пространства к $\mathfrak{g}$, см. п. (б). (Мы будем рассматривать $\omega(X)$ или как постоянную функцию на G , или как соответствующее вещественное число в зависимости от контекста.)

(d) Из п. 2.25 (f) следует, что для $\omega \in E_{l \text{ inv}}^1(G)$ и $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$(1) \quad d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

(е) Пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, а $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — сопряженный базис в $E_{l \text{ inv}}^1(G)$. Тогда существуют константы c_{ijk} , такие, что

$$(2) \quad [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{-d-1} c_{ijk} X_k.$$

(c_{ijk} называются *структурными константами* группы Ли G относительно базиса $\{X_i\}$ в $\mathfrak{g}$.) Они удовлетворяют условиям

$$(3) \quad \begin{aligned} c_{ijk} + c_{jki} &= 0, \\ \sum_r (c_{ijr}c_{rks} + c_{kir}c_{rjs} + c_{jkr}c_{ris}) &= 0. \end{aligned}$$

Внешние производные форм ω_i даются уравнениями Маурера—Картана

$$(4) \quad d\omega_i = \sum_{j < k} c_{jki} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Гомоморфизмы

3.13. Определения. Отображение $\varphi : G \rightarrow H$ — *гомоморфизм (групп Ли)*, если φ гладко и в то же время является групповым гомоморфизмом абстрактных групп. Если, кроме того, φ — диффеоморфизм, мы называем φ *изоморфизмом групп Ли*. Изоморфизм группы Ли на себя называется ее *автоморфизмом*. Гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow H$ называется *представлением группы Ли G* , если $H = \text{Aut}(V)$ для некоторого векторного пространства V или если $H = GL(n; \mathbb{C})$ либо $H = GL(n; \mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли; тогда отображение $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ называется *гомоморфизмом (алгебр Ли)*, если оно линейно и сохраняет скобки Ли ($\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$). Если, кроме того, ψ — взаимно однозначное отображение «на», ψ называется *изоморфизмом*. *Автоморфизмом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется изоморфизм $\mathfrak{g}$ на себя. Гомоморфизм $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ называется *представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$* , если $\mathfrak{h} = \text{End}(V)$ для некоторого векторного пространства V или если $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ либо $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$.

Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Так как под действием φ единица группы G переходит в единицу группы H , дифференциал $d\varphi$ есть линейное отображение G_e в H_e . С помощью естественного отождествления касательных пространств в единице с алгебрами Ли линейное отображение $d\varphi : G_e \rightarrow H_e$ индуцирует линейное отображение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, которое мы также будем обозначать через $d\varphi$. Таким образом,

$$(1) \quad d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h},$$

где $d\varphi(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$ — единственное левоинвариантное векторное поле на H , такое, что

$$(2) \quad d\varphi(X)(e) = d\varphi(X(e)).$$

3.14. Теорема. Пусть G и H — группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, и пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Тогда

- (а) для любого $X \in \mathfrak{g}$ элементы X и $d\varphi(X)$ φ -связаны;
- (б) $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ — гомоморфизм алгебр Ли.

Доказательство. Пусть $\tilde{X} = d\varphi(X)$. Тогда X и $\tilde{X}$ φ -связаны. Действительно, $l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi = \varphi \circ l_\sigma$, так как отображение φ гомоморфно; отсюда

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{X}(\varphi(\sigma)) &= dl_{\varphi(\sigma)}(\tilde{X}(e)) = dl_{\varphi(\sigma)}d\varphi(X(e)) = \\ &= d(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)X(e) = d(\varphi \circ l_\sigma)X(e) = d\varphi(X(\sigma)). \end{aligned}$$

Пункт (а) тем самым доказан. Пусть теперь $X, Y \in \mathfrak{g}$. Для доказательства (б) нужно проверить, что

$$(2) \quad [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}].$$

Согласно разд. 1.55, векторное поле $[X, Y]$ φ -связано с левоинвариантным векторным полем $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$. В частности,

$$(3) \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}](e) = d\varphi([X, Y](e)).$$

Но по определению 3.13 (2) $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ — единственное левоинвариантное векторное поле на H со значением $d\varphi([X, Y](e))$ в единице. Значит, (2) выполняется, и теорема доказана.

3.15. Действие гомоморфизмов на левоинвариантные формы. Пусть $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Тогда φ^* отображает левоинвариантные формы на H в левоинвариантные формы на G , ибо для любой левоинвариантной формы ω на H

$$(1) \quad l_\sigma^* \varphi^*(\omega) = (\varphi \circ l_\sigma)^* \omega = (l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* l_{\varphi(\sigma)}^*(\omega) = \varphi^*(\omega).$$

Кроме того, отображение $\varphi^*: E_{l \text{ inv}}^1(H) \rightarrow E_{l \text{ inv}}^1(G)$ как отображение сопряженного пространства к $\mathfrak{h}$ в сопряженное пространство к $\mathfrak{g}$ есть в точности сопряженное к отображению $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, т. е.

$$(2) \quad (\varphi^*(\omega))(X) = \omega(d\varphi(X)) \quad (\omega \in E_{l \text{ inv}}^1(H); X \in \mathfrak{g}).$$

Вспомним, что для базиса $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ в $E_{l \text{ inv}}^1(H)$ определены структурные константы $\{c_{ijk}\}$ (см. 3.12 (4)), такие, что

$$(3) \quad d\omega_i = \sum_{j < k} c_{jki} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Так как d и φ^* коммутируют, отсюда следует, что

$$(4) \quad d(\varphi^* \omega_i) = \sum_{j < k} c_{jki} \varphi^* \omega_j \wedge \varphi^* \omega_k.$$

Пусть теперь π_1 и π_2 — канонические проекции группы Ли $G \times H$ на G и H соответственно. Тогда идеал $\mathcal{I}$ в алгебре форм на $G \times H$, порожденный набором независимых 1-форм

$$(5) \quad \{\pi_1^* \varphi^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i) : i = 1, \dots, d\},$$

будет дифференциальным идеалом: используя (4), получаем для каждого i

$$\begin{aligned}
 (6) \quad d(\pi_1^* \varphi^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i)) &= \\
 &= \sum_{j < k} c_{jki} (\pi_1^* \varphi^*(\omega_k) \wedge \pi_1^* \varphi^*(\omega_j) - \pi_2^*(\omega_k) \wedge \pi_2^*(\omega_j)) = \\
 &= \sum_{j < k} c_{jki} ((\pi_1^* \varphi^*(\omega_k) - \pi_2^*(\omega_k)) \wedge \pi_1^* \varphi^*(\omega_j) + \\
 &\quad + \pi_2^*(\omega_k) \wedge (\pi_1^* \varphi^*(\omega_j) - \pi_2^*(\omega_j))),
 \end{aligned}$$

а эта форма лежит в идеале $\mathcal{I}$. Кроме того, заметим, что 1-формы (5), порождающие дифференциальный идеал $\mathcal{I}$, сами являются левоинвариантными формами на $G \times H$. Этот результат получается непосредственно, если применить $l_{(\sigma, \xi)}^*$ к формам (5), где $(\sigma, \xi) \in G \times H$, и воспользоваться тем, что $\pi_1 \circ l_{(\sigma, \xi)} = l_\sigma \circ \pi_1$ и $\pi_2 \circ l_{(\sigma, \xi)} = l_\xi \circ \pi_2$. Отметим также, что базис $\{\omega_i\}$ в пространстве $E_{l \text{ inv}}^1(H)$ есть базис 1-форм на H в смысле 2.33.

Чтобы получить описанную выше конструкцию дифференциального идеала на $G \times H$, достаточно отправляться от гомоморфизма алгебр Ли, а не самих групп Ли. Пусть G и H — группы Ли и $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ — гомоморфизм их алгебр Ли. Сопряженное отображение $\psi^*: E_{l \text{ inv}}^1(H) \rightarrow E_{l \text{ inv}}^1(G)$ к ψ задается формулой

$$(7) \quad (\psi^*(\omega))(X) = \omega(\psi X) \quad (\omega \in E_{l \text{ inv}}^1(H); X \in \mathfrak{g}).$$

Пусть $\{\omega_i\}$ образует базис в $E_{l \text{ inv}}^1(H)$. Мы утверждаем, что идеал $\mathcal{I}$ в алгебре форм на $G \times H$, порожденный набором независимых 1-форм

$$(8) \quad \{\pi_1^*(\psi^*(\omega_i)) - \pi_2^*(\omega_i): i = 1, \dots, d\},$$

является дифференциальным идеалом. Это вытекает из вычисления, подобного (6), если заметить, что

$$(9) \quad d(\psi^*\omega_i) = \sum_{j < k} c_{jki} \psi^*\omega_k \wedge \psi^*\omega_j.$$

Для доказательства (9) достаточно проверить, что обе части дают одинаковые значения на произвольной паре X, Y левоинвариантных векторных полей на G :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad d(\psi^*\omega_i)(X, Y) &= -\psi^*\omega_i[X, Y] = -\omega_i[\psi X, \psi Y] = \\
 &= d\omega_i(\psi X, \psi Y) = \sum_{j < k} c_{jki} \omega_k \wedge \omega_j(\psi X, \psi Y) = \\
 &= \sum_{j < k} c_{jki} \psi^*\omega_k \wedge \psi^*\omega_j(X, Y).
 \end{aligned}$$

Здесь первое и третье равенства следуют из 3.12 (1). Наконец, заметим, что и в этом случае формы (8) левоинвариантны на $G \times H$.

Эти идеалы в алгебре форм на $G \times H$ мы будем использовать для доказательства существования и единственности различных гомоморфизмов.

3.16. Теорема. Пусть G связна, а φ и ψ — гомоморфизмы $G \rightarrow H$, индуцирующие одинаковые гомоморфизмы $d\varphi$ и $d\psi$ алгебр Ли $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Тогда $\varphi = \psi$.

Доказательство. Так как $d\varphi = d\psi$, то

$$(1) \quad \varphi^* = \psi^*: E_{l \text{ inv}}^1(H) \rightarrow E_{l \text{ inv}}^1(G).$$

Таким образом, имеются гладкие отображения связного многообразия G в многообразие H , совпадающие в точке $e \in G$ и одинаково действующие на базисные 1-формы на H . Так как идеал в алгебре форм на $G \times H$, порожденный 1-формами 3.15 (5), дифференциальный, из результатов п. 2.34 (b) следует, что $\varphi = \psi$.

Подгруппы Ли

3.17. Определения. Пара (H, φ) называется *подгруппой Ли* группы Ли G , если

- (a) H — группа Ли,
- (b) (H, φ) является подмногообразием в G ,
- (c) $\varphi: H \rightarrow G$ — групповой гомоморфизм.

Пара (H, φ) называется *замкнутой подгруппой* в G , если к тому же $\varphi(H)$ — замкнутое подмножество в G .

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй*, если $[X, Y]$ для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$ тоже лежит в $\mathfrak{h}$. Ясно, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является алгеброй Ли относительно скобок Ли, индуцированных из $\mathfrak{g}$.

Пусть (H, φ) — подгруппа Ли в G , а $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ — соответствующие алгебры Ли. Тогда $d\varphi$ задает изоморфизм $\mathfrak{h}$ с подалгеброй $d\varphi(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{g}$.

В различных теоремах утверждается существование единственных подгрупп, удовлетворяющих определенным условиям; так же как и в случае подмногообразий (уместно вспомнить разд. 1.33), нужно объяснить, что имеется в виду под единственностью в свете нашего определения подгруппы. Две подгруппы (H, φ) и (H_1, φ_1) группы Ли G будем считать эквивалентными, если существует изоморфизм групп Ли $\alpha: H \rightarrow H_1$, такой, что $\varphi_1 \circ \alpha = \varphi$. Это отношение эквивалентности на множестве подгрупп Ли группы Ли G , и единственность для подгрупп Ли означает единственность с точностью до такой эквивалентности. Как и в случае подмногообразий (см. разд. 1.33), в каждом классе эквивалентности содержится единственный представитель вида (A, i) , где A —

подмножество в G , являющееся абстрактной подгруппой группы G и обладающее структурой многообразия (не обязательно с индуцированной топологией), превращающей A в группу Ли, причем образ включения $i: A \rightarrow G$ является подмногообразием и, следовательно, подгруппой Ли группы Ли G . Когда нам захочется рассматривать подгруппу Ли именно в таком виде (т. е. как настоящее подмножество группы G), мы будем опускать всякое упоминание об отображении и просто говорить о подгруппе Ли A группы Ли G , а отображение включения будет подразумеваться. Мы также будем отождествлять алгебру Ли $\mathfrak{a}$ группы Ли A с ее образом $di(\mathfrak{a})$ и говорить о ней просто как о подалгебре алгебры Ли группы Ли G . В частности, будут отождествляться i -связанные левоинвариантные поля X на A и $di(X)$ на G .

Сейчас мы перейдем к доказательству одной из основных теорем в теории групп Ли — теоремы о взаимно однозначном соответствии между связными подгруппами Ли группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли. Но прежде нам понадобится следующее предложение.

3.18. Предложение. Пусть G — связная группа Ли, а U — некоторая окрестность единицы. Тогда

$$(1) \quad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

где U^n состоит из произведений по n элементов из U . (Говорят, что U порождает G .)

Доказательство. Пусть V — открытое подмножество в U , такое, что $V^{-1} = V$ (где $V^{-1} = \{\sigma^{-1} : \sigma \in V\}$). Подойдет, например, $V = U \cap U^{-1}$. Положим

$$(2) \quad H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Тогда H — абстрактная подгруппа группы G , являющаяся ее открытым подмножеством, так как вместе с любым $\sigma \in H$ в H входит и σV . Таким образом, все смежные классы группы G по H открыты в G . Но H является дополнением в G к объединению всех смежных классов по H , отличных от H , следовательно, H — замкнутое подмножество в G . Так как G связна и подгруппа H непуста, она должна совпадать со всей группой G . Вместе с формулой (2) это и доказывает (1).

3.19. Теорема. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\tilde{\mathfrak{h}}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Существует единственная связная подгруппа Ли (H, φ) группы Ли G , такая, что $d\varphi(\tilde{\mathfrak{h}}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

Доказательство. Зададим распределение $\mathcal{D}$ на группе Ли G , полагая

$$(1) \quad \mathcal{D}(\sigma) = \{X(\sigma) : X \in \tilde{\mathfrak{h}}\}$$

для каждого $\sigma \in G$. Пусть $\dim \tilde{\mathfrak{h}} = d$. Тогда $\mathcal{D}$ есть d -мерное распределение. Оно гладкое, так как глобально порождается базисом $X_1, \dots, X_d$ подалгебры $\tilde{\mathfrak{h}}$. Кроме того, $\mathcal{D}$ инволютивно, так как для любых векторных полей X и Y , лежащих в $\mathcal{D}$, существуют гладкие функции $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ на G , такие, что $X = \sum a_i X_i$, $Y = \sum b_i X_i$; поэтому

$$(2) \quad [X, Y] = \sum_{i,j=1}^d (a_i b_j [X_i, X_j] + a_i X_i (b_j) X_j - b_j X_j (a_i) X_i)$$

тоже лежит в $\mathcal{D}$, ибо $\tilde{\mathfrak{h}}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$.

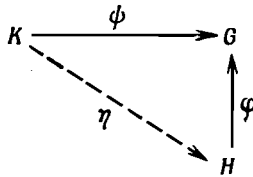
Пусть (H, φ) — максимальное связное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через e (см. теорему 1.64). Пусть $\sigma \in \varphi(H)$. Распределение $\mathcal{D}$ инвариантно относительно левых сдвигов, поэтому $(H, l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)$ также будет его интегральным многообразием, проходящим через единицу. В силу максимальности $(l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)(H) \subset \varphi(H)$. Поэтому если $\sigma \in \varphi(H)$ и $\tau \in \varphi(H)$, то и $\sigma^{-1}\tau \in \varphi(H)$. Таким образом, $\varphi(H)$ — абстрактная подгруппа группы G . На H индуцируется групповая структура так, чтобы отображение φ стало гомоморфизмом (абстрактных групп). Осталось только проверить, что H — группа Ли, т. е. что отображение $\alpha : H \times H \rightarrow H$, где $\alpha(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$, гладкое. Отображение $\beta : H \times H \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \varphi(\sigma)\varphi(\tau)^{-1}$, гладкое, причем имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\beta} & G \\ & \searrow \alpha & \uparrow \varphi \\ & & H \end{array}$$

Так как (H, φ) — интегральное многообразие инволютивного распределения на G , из теоремы 1.62 вытекает, что α — гладкое отображение. Итак, (H, φ) — подгруппа Ли группы Ли G ; если $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы Ли H , то очевидно, что $d\varphi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

Для доказательства единственности предположим, что (K, ψ) — другая связная подгруппа Ли в G со свойством $d\psi(\mathfrak{k}) = \tilde{\mathfrak{h}}$. Тогда (K, ψ) также является интегральным многообразием распределения $\mathcal{D}$, проходящим через e . В силу максимальности

(H, φ) получаем, что $\psi(K) \subset \varphi(H)$ и однозначно определено отображение η , такое, что $\varphi \circ \eta = \psi$:



Отображение η гладко (см. теорему 1.62) и, следовательно, является инъективным гомоморфизмом групп Ли. Кроме того, оно нигде не вырождено, в частности оно является диффеоморфизмом на некоторой окрестности единицы, откуда следует по предложению 3.18, что оно сюръективно. Итак, η — изоморфизм групп Ли и подгруппы (K, ψ) и (H, φ) эквивалентны. Единственность доказана.

Следствие (а). *Существует взаимно однозначное соответствие между связными подгруппами Ли группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли.*

Следствие (б). *Пусть (H, φ) — подгруппа Ли в G . Тогда для всякой связной компоненты $\tilde{H}$ группы H пара $(\tilde{H}, \varphi|_{\tilde{H}})$ является максимальным интегральным многообразием инволютивного распределения на группе Ли G , задаваемого подалгеброй $d\varphi(b) \subset g$.*

Можно следующим образом переформулировать часть доказательства теоремы 3.19 в терминах дифференциальных идеалов на G (ср. упр. 6):

Следствие (с). *Предположим, что набор независимых левоинвариантных 1-форм $\{\omega_1, \dots, \omega_{c-d}\}$ на группе Ли G^c порождает дифференциальный идеал $\mathcal{I}$. Тогда проходящее через $e \in G$ максимальное связное интегральное многообразие I^d , соответствующее идеалу $\mathcal{I}$, — подгруппа Ли в G .*

Стоит сравнить следующую теорему с положением, которое существует для подмногообразий (см. разд. 1.33).

3.20. Теорема. *Если абстрактная подгруппа A группы Ли G обладает структурой многообразия (т. е. локально евклидовой топологией со второй аксиомой счетности вместе с дифференцируемой структурой), такой, что пара (A, i) , где i — отображение включения, является подмногообразием в G , то такая структура многообразия на ней единственна, и с этой структурой A оказы-*

вается группой Ли, а (A, i) , тем самым, — подгруппой Ли группы Ли G .

Доказательство. Покажем сначала, что с такой структурой многообразия группа A является группой Ли. Пусть $\mathcal{D}$ — распределение на группе Ли G , образованное левыми сдвигами касательного пространства к A в единице. Утверждается, что (A, i) есть интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, проходящее через единицу $e \in G$.

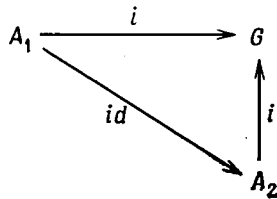
Оговоримся, что этот факт не очевиден и его доказательство потребует определенной аккуратности. Проблема состоит в том, что левый сдвиг на $\sigma \in A$ гладкой кривой $\gamma(t)$, лежащей в A , лежит в A и является гладкой кривой в G , но $\sigma \gamma(t)$ может не быть гладкой в A . Поэтому может случиться, что в $\mathcal{D}(\sigma)$ есть элементы, не являющиеся касательными векторами к A . Нам нужно показать, что на самом деле этого не происходит. Пусть $\dim A = k$. Если для некоего $\sigma \in A$ касательное пространство A_σ не содержит $\mathcal{D}(\sigma)$, то можно найти $k+1$ кривых, гладких в G , лежащих в A и имеющих в точке σ независимые касательные векторы. Сделаем сдвиг из σ в e ; получим гладкие в G кривые $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{k+1}(t)$, целиком лежащие в A , проходящие через единицу при $t=0$ и имеющие в ней независимые касательные векторы. Обратите внимание, что это еще не противоречие. Например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ существуют две гладкие кривые с независимыми касательными векторами в начале координат, обе лежащие в одномерном подмногообразии «восьмерке» (см. разд. 1.31). Рассмотрим теперь отображение

$$(5) \quad (t_1, \dots, t_{k+1}) \mapsto \gamma_1(t_1) \dots \gamma_{k+1}(t_{k+1}).$$

В начале координат пространства $\mathbb{R}^{k+1}$ это отображение невырожденно, следовательно, оно отображает диффеоморфно некоторую окрестность начала координат в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ в G , и образ этой окрестности лежит в A , так как A — подгруппа, а каждая кривая γ_i лежит в A . Отображение (5) продолжается до диффеоморфизма окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$ на некоторую окрестность единицы $U \subset G$, где $n = \dim G$. Взяв композицию обратного к этому диффеоморфизма с включением $i: A \rightarrow G$, получим гладкое погружение открытого подмногообразия $U \cap A$ многообразия A в $\mathbb{R}^n$, образ которого содержит открытое множество из $\mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n$. А это уже противоречит тому факту, что многообразие A имеет размерность k и удовлетворяет второй аксиоме счетности. (См. упр. 6 гл. 1.) Итак, $A_\sigma = \mathcal{D}(\sigma)$ при всех $\sigma \in A$, и, следовательно, (A, i) — интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$.

Отсюда следует, что для всех $\sigma \in G$ пара $(A, l_\sigma \circ i)$ является интегральным многообразием распределения $\mathcal{D}$, проходящим через

точку σ . По предложению 1.59 распределение $\mathcal{D}$ инволютивно; рассуждениями, подобными тем, которые приводят к диаграмме (3) в доказательстве теоремы 3.19, получаем, что отображение $A \times A \rightarrow A$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$, гладкое. Этим доказано, что A — группа Ли. Предположим теперь, что на группе A можно ввести две структуры многообразия, при которых пара (A, i) будет подмногообразием. Будем обозначать A с этими структурами соответственно через A_1 и A_2 . Тогда обе пары (A_1, i) и (A_2, i) являются интегральными многообразиями инволютивных распределений на G . Теорема 1.62, примененная к коммутативной диаграмме



устанавливает диффеоморфность отображения $id: A_1 \rightarrow A_2$. Таким образом, на A можно ввести лишь одну структуру многообразия с указанным свойством.

Следовательно, если некоторое подмножество группы Ли можно сделать подгруппой Ли относительно включения, то это можно сделать одним и только одним способом — групповая структура, топология и дифференцируемая структура определяются однозначно. Поэтому утверждение, что некое подмножество A группы Ли G является подгруппой Ли в G , не содержит двусмысленности. Оно означает, что A — абстрактная подгруппа группы G и имеет структуру многообразия (и, значит, единственную), превращающую A в группу Ли, а пару (A, i) — в подгруппу Ли группы Ли G .

Теперь мы с состоянием точно описать, в какой ситуации топология подгруппы Ли $A \subset G$ совпадает с индуцированной топологией.

3.21. Теорема. Пусть (H^d, φ) — подгруппа Ли группы Ли G^e . Отображение φ является вложением (т. е. гомеоморфизмом H на $\varphi(H)$ в индуцированной топологии) тогда и только тогда, когда (H, φ) — замкнутая подгруппа в G (т. е. образ $\varphi(H)$ замкнут в G).

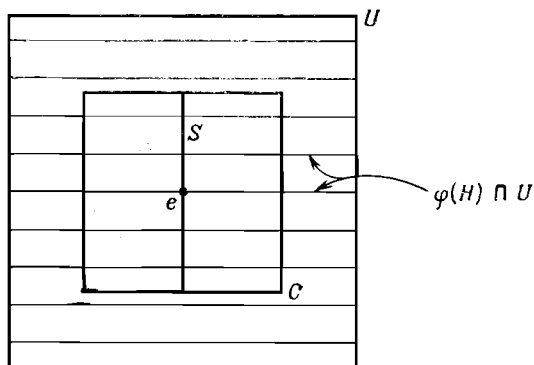
Доказательство. Предположим, что $\varphi(H)$ замкнут в G . Достаточно показать, что найдется непустое открытое множество $V \subset H$, которое $\varphi|_V$ гомеоморфно отображает в $\varphi(H)$, когда $\varphi(H)$ рассматривается в индуцированной топологии. Так как φ перестановочно с левыми сдвигами ($\varphi \circ l_\sigma = l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi$), отсюда будет следовать, что φ — вложение всей подгруппы H . Согласно теореме 1.60 и следствию (b) теоремы 3.19, существует кубическая

система координат (U, τ) с началом в точке $e \in G$, такая, что $\varphi(H) \cap U$ состоит из объединения не более чем счетного множества срезов вида

$$(1) \quad \tau_i = \text{const} \text{ для всех } i \in \{d+1, \dots, c\},$$

включающего в себя по крайней мере срез через e . Пусть C — замкнутое подмножество в U , содержащее единицу, образом которого при отображении τ является куб. Пусть S — срез множества C , задаваемый уравнениями

$$(2) \quad \tau_1 = 0, \dots, \tau_d = 0.$$



Тогда $\tau(\varphi(H) \cap S)$ — непустое замкнутое не более чем счетное подмножество в $\mathbb{R}^{c-d}$. Всякое такое подмножество должно иметь изолированную точку. В противном случае такое множество с индуцированной метрикой было бы полным метрическим пространством, представимым в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, что невозможно по теореме Бэра о категории [27]. Итак, в наборе срезов $\varphi(H) \cap U$ имеется изолированный, обозначим его S_0 ; прообраз $\varphi^{-1}(S_0)$ этого среза есть открытое подмножество H , на котором φ является вложением в $\varphi(H)$.

Обратно, предположим, что φ — вложение. Пусть последовательность точек $\{\sigma_i\}$ в $\varphi(H)$ сходится к точке $\sigma \in G$. Так как φ — вложение, существует кубическая система координат (U, τ) с началом в единице $e \in G$, такая, что $\varphi(H) \cap U$ состоит из единственного среза, обозначим его S . Выберем кубические относительно τ окрестности единицы $V \subset W \subset U$, такие, что $V^{-1}V \subset \overline{W} \subset U$. Так как $\sigma_i \rightarrow \sigma$, то $\sigma_n \in \sigma V$ для достаточно большого N при всех $n \geq N$. Поэтому $\sigma_N^{-1}\sigma_n \in \overline{W}$ при $n \geq N$. С другой стороны, $\sigma_N^{-1}\sigma_n \in \varphi(H)$. Поэтому $\sigma_N^{-1}\sigma_n \in S \cap \overline{W}$, и эта последова-

тельность сходится к элементу $\sigma_N^{-1}\sigma$, который, таким образом, также лежит в $S \cap \overline{W}$. Значит, $\sigma_N^{-1}\sigma \in \varphi(H)$. Следовательно, $\sigma \in \varphi(H)$, и образ $\varphi(H)$ замкнут.

Накрытия

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятиями гомотопии, фундаментальной группы, односвязности и накрывающего пространства. Три основных факта о накрывающих пространствах, которые нам понадобятся в дальнейшем, сформулированы в теореме 3.23. Доказательства намечены в упр. 7 в конце этой главы. Детали доказательств и дополнительные факты о накрывающих пространствах можно найти, например, в [27] или [28].

3.22. Определение. Прежде чем формулировать теорему 3.23, напомним несколько определений и введем некоторые обозначения. Фундаментальную группу топологического пространства X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ будем обозначать через $\pi_1(X, x_0)$. Будем обозначать через $\pi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y , переводящее отмеченную точку $x_0 \in X$ в отмеченную точку $y_0 \in Y$, а соответствующий индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп будем обозначать через $\pi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

В определении односвязности будем предполагать связность пространства. То есть *односвязным* пространством X будем называть связное топологическое пространство с тривиальной фундаментальной группой.

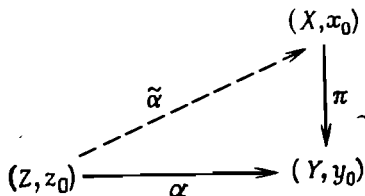
Непрерывное сюръективное отображение топологических пространств $\pi: X \rightarrow Y$ называется *накрытием*, если X связно, локально линейно связно (каждая окрестность произвольной точки содержит линейно связную окрестность этой точки) и каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность V , прообраз $\pi^{-1}(V)$ которой распадается в несвязное объединение открытых подмножеств X , причем каждое из них гомеоморфно отображается на V с помощью π . Подобные окрестности V в пространстве Y называются *хорошо накрытыми*. Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ — накрытие; Y называется *базой* накрытия, а X — *накрывающим пространством*.

Топологическое пространство Y называется *полулокально односвязным*, если каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность U , такую, что любая петля, начинающаяся в y и лежащая в U , гомотопна нулю в классе петель, начинающихся в y и лежащих в Y .

3.23. Теорема

(а) Пусть $\pi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — накрытие. Пусть Z — линейно связное и локально линейно связное топологическое простран-

ство, а $\alpha: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — непрерывное отображение, такое, что $\alpha_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_*(\pi_1(X, x_0))$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $\tilde{\alpha}: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ со свойством $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$:



(б) Линейно связное локально линейно связное и полулокально односвязное топологическое пространство X обладает односвязным накрывающим пространством.

(с) Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ — накрытие; если Y односвязно, то π есть гомеоморфизм.

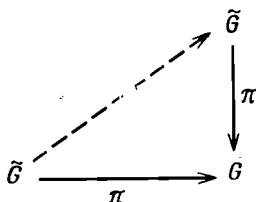
3.24. Односвязная накрывающая группа. Пусть $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ — накрытие дифференцируемого многообразия M . В таком случае $\tilde{M}$ автоматически является локально евклидовым хаусдорфовым пространством, удовлетворяющим второй аксиоме счетности (ср. упр. 8), и на нем существует единственная дифференцируемая структура, при которой накрывающее отображение π гладко и невырожденно. Эта дифференцируемая структура получится, если просто потребовать, чтобы все локальные гомеоморфизмы, получаемые из отображения π над хорошо накрытыми множествами были диффеоморфизмами.

Пусть теперь G — связная группа Ли. По утверждению (б) из 3.23 у группы G имеется накрытие $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$, где $\tilde{G}$ — односвязное пространство. Как было отмечено, $\tilde{G}$ обладает единственной дифференцируемой структурой, при которой отображение π гладко и невырожденно. Сейчас мы покажем, что на $\tilde{G}$ можно индуцировать групповую структуру, превращающую $\tilde{G}$ в группу Ли, а накрытие π — в гомоморфизм групп Ли. Рассмотрим отображение $\alpha: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$, такое, что $\alpha(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = \pi(\tilde{\sigma}) \pi(\tilde{\tau})^{-1}$. Выберем точку $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Так как $\tilde{G} \times \tilde{G}$ односвязно, из утверждения 3.23 (а) вытекает существование единственного отображения $\tilde{\alpha}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, такого, что $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ и $\tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$. Для $\tilde{\sigma} \in \tilde{G}$ и $\tilde{\tau} \in \tilde{G}$ положим

$$(1) \quad \tilde{\tau}^{-1} = \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{\tau}), \quad \tilde{\sigma}\tilde{\tau} = \tilde{\alpha}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}^{-1}).$$

Применяя относящуюся к единственности часть утверждения 3.23(а), легко убедиться, что $\tilde{\sigma}\tilde{e} = \tilde{e}\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$, так как отображения

$\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}\tilde{e}$, $\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{e}\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}$ пространства $\tilde{G}$ в себя все переводят $\tilde{e}$ в $\tilde{e}$ и делают диаграмму



коммутативной. Таким образом, раз $\tilde{G}$ односвязно, из утверждения о единственности в 3.23(а) следует, что эти отображения совпадают. Подобным же образом получается, что $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\sigma} = \tilde{e}$ и $(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}(\tilde{\tau}\tilde{\gamma})$ для любых $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, \tilde{\gamma} \in \tilde{G}$. Итак, формулы (1) превращают $\tilde{G}$ в абстрактную группу, а так как отображение $\tilde{\alpha}$ гладко, $\tilde{G}$ оказывается группой Ли. Из формул (1) получаем также, что $\pi(\tilde{\tau}^{-1}) = \pi(\tilde{\tau})^{-1}$ и $\pi(\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = \pi(\tilde{\sigma})\pi(\tilde{\tau})$; следовательно, $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ есть гомоморфизм групп Ли. Итак, мы доказали следующее утверждение.

3.25. Теорема. *Каждая связная группа Ли обладает односвязным накрывающим пространством, которое само является группой Ли, причем накрывающее отображение — гомоморфизм групп Ли.*

3.26. Предложение. *Пусть G и H — связные группы Ли, а $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Отображение φ является накрытием тогда и только тогда, когда $d\varphi: G_e \rightarrow H_e$ — изоморфизм.*

Доказательство. Сначала предположим, что φ — накрытие. Тогда $d\varphi|_{G_e}$ должно быть инъективным. В противном случае, так как φ — гомоморфизм, в каждой точке из G ядро отображения $d\varphi$ было бы нетривиальным, и эти ядра образовали бы инволютивное распределение на G , интегральные многообразия которого схлопывались бы в точки под действием φ . Тогда отображение φ не могло бы быть локально взаимно однозначным, в противоречие с тем, что φ — накрытие. Дифференциал $d\varphi|_{G_e}$ также должен быть сюръективным, иначе пара (G, φ) была бы собственным подмногообразием в H , что снова противоречит локальной гомеоморфности накрывающего отображения. Таким образом, $d\varphi: G_e \rightarrow H_e$ — изоморфизм.

Обратно, предположим, что $d\varphi: G_e \rightarrow H_e$ — изоморфизм. Тогда φ всюду является локальным диффеоморфизмом. По предложению 3.18 φ отображает группу G на H , так как φ — гомоморфизм и $\varphi(G)$ содержит некоторую окрестность единицы связной группы

Ли H . Группа Ли G , безусловно, линейно связна и локально линейно связна, и для доказательства того, что отображение φ есть накрытие, осталось установить существование хорошо накрытой окрестности у каждой точки группы H . Положим

$$(1) \quad D = \text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(e).$$

Тогда, так как φ — локальный диффеоморфизм, D является дискретной нормальной подгруппой группы G , где «дискретность» означает, что для каждой точки $\sigma \in D$ существует открытое подмножество $V \subset G$, пересекающееся с D только по точке σ , $V \cap D = \{\sigma\}$. Так как отображение $G \times G \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma^{-1}\tau$, непрерывно (на самом деле гладко), существует окрестность единицы $V \subset G$, такая, что

$$(2) \quad (V^{-1}V) \cap D = \{e\}.$$

Утверждается, что $\varphi(V)$ — искомая окрестность единицы e в H , хорошо накрытая отображением φ . Во-первых, $\varphi|V$ инъективно, поскольку если $\sigma, \tau \in V$ и $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$, то $\varphi(\sigma^{-1}\tau) = e$ и по (2) $\sigma^{-1}\tau = e$, т. е. $\sigma = \tau$. Кроме того, $d\varphi$ есть изоморфизм в каждой точке группы G . Таким образом, $\varphi|V$ диффеоморфно отображает V на открытую окрестность единицы $\varphi(V)$ в H . Теперь утверждается, что

$$(3) \quad \varphi^{-1}(\varphi(V)) = \bigcup_{\theta \in D} V\theta.$$

Включение $\supset$ очевидно. Для доказательства обратного включения предположим, что $\varphi(\sigma) \in \varphi(V)$. Тогда найдется элемент $\tau \in V$, такой, что $\varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$. Следовательно, $\tau^{-1}\sigma \in D$ и $\sigma \in V\tau^{-1}\sigma$, что доказывает (3). Наконец, $V\theta_1 \cap V\theta_2 = \emptyset$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, ибо если $\sigma \in V\theta_1 \cap V\theta_2$, то $\sigma = \tau\theta_1 = \eta\theta_2$ для некоторых $\tau, \eta \in V$. Тогда $\tau^{-1}\eta \in D$ и $\tau^{-1}\eta \in V^{-1}V$; таким образом, в силу равенства (2) $\tau = \eta$, что влечет за собой $\theta_1 = \theta_2$. Итак, $\varphi(V)$ является хорошо накрытой окрестностью единицы $e \in H$. Отсюда следует, что $\varphi(\sigma V)$ — открытая окрестность точки $\varphi(\sigma)$ в H , хорошо накрытая несвязным объединением открытых множеств $\sigma V\theta$, где $\theta \in D$. Тем самым доказано, что отображение φ является накрытием.

Односвязные группы Ли

3.27. Теорема. Пусть G и H — группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно и G односвязна. Пусть $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ — гомоморфизм алгебр Ли. Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $\varphi: G \rightarrow H$, такой, что $d\varphi = \psi$.

Доказательство. Единственность такого гомоморфизма следует из теоремы 3.16.

Пусть $\{\omega_i\}$ — базис левоинвариантных 1-форм на H , и пусть ψ^* — сопряженное отображение к ψ (см. 3.15 (7)). Согласно разд. 3.15, 1-формы

$$(1) \quad \pi_1^*(\psi^*\omega_i) = \pi_2^*(\omega_i)$$

на $G \times H$ (где π_1 и π_2 — канонические проекции $G \times H$ на G и H соответственно) являются левоинвариантными, а порождаемый ими идеал $\mathcal{I}$ — дифференциальным идеалом. По следствию (с) теоремы 3.19 максимальное связное интегральное многообразие I идеала $\mathcal{I}$, проходящее через $(e, e) \in G \times H$, является подгруппой Ли в прямом произведении $G \times H$, размерность которой равна размерности G . Из разд. 2.33 мы знаем, что $\pi_1|I: I \rightarrow G$ — невырожденное отображение и, таким образом, по предложению 3.26 — накрывающий гомоморфизм. Группа Ли G предполагалась односвязной, из чего по утверждению 3.23 (с) и теореме об обратной функции следует, что $\pi_1|I: I \rightarrow G$ — изоморфизм. Определим отображение $\varphi: G \rightarrow H$, полагая

$$(2) \quad \varphi = \pi_2 \circ (\pi_1|I)^{-1}.$$

Тогда φ будет гомоморфизмом групп Ли, и, согласно (6) из разд. 2.33,

$$\varphi^*(\omega_i) = \psi^*\omega_i.$$

Таким образом, $d\varphi = \psi$, и теорема доказана.

Следствие. Если алгебры Ли односвязных групп Ли G и H изоморфны, то сами группы G и H изоморфны.

Существует принадлежащая Адо теорема [12, с. 223] (которую мы не будем доказывать), утверждающая, что каждая алгебра Ли имеет точное (инъективное) представление в алгебру $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ для некоторого n . Как следствие, для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует группа Ли (и, в частности, односвязная группа Ли) с данной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Учитывая все это, получаем такую теорему:

3.28. Теорема. Существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма алгебр Ли и классами изоморфизма односвязных групп Ли.

Экспоненциальное отображение

3.29. Определение. Гомоморфизм $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли G .

3.30. Определение. Пусть G — группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда отображение

$$(1) \quad \lambda \frac{d}{d\lambda} \mapsto \lambda X$$

— гомоморфизм алгебры Ли группы Ли $\mathbb{R}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Так как вещественная прямая односвязна, по утверждению 3.27 существует единственная однопараметрическая подгруппа

$$(2) \quad \exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G,$$

такая, что

$$(3) \quad d \exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X.$$

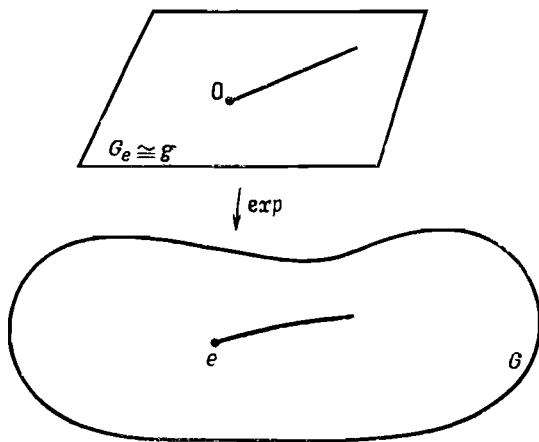
Другими словами, $t \mapsto \exp_X(t)$ есть единственная однопараметрическая подгруппа в G с касательным вектором $X(e)$ в нуле. Определим *экспоненциальное отображение*

$$(4) \quad \exp: \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

полагая

$$(5) \quad \exp(X) = \exp_X(1).$$

Происхождение такой терминологии станет ясным из формулы 3.35 (13), где будет показано, что для полной линейной группы экспоненциальное отображение задается показательной функцией на матрицах.



3.31. Теорема. Пусть X принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Тогда

- (a) $\exp(tX) = \exp_X(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- (b) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X)$ для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
- (c) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- (d) отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ гладкое, и $d \exp: \mathfrak{g}_0 \rightarrow G_e$ — тождественное отображение (при обычных отождествлениях), так что $\exp$ задает диффеоморфизм окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестность единицы в G ;

(е) $l_\sigma \circ \exp_X$ — единственная интегральная кривая векторного поля X , проходящая при $t = 0$ через точку $\sigma \in G$; отсюда, в частности, следует, что все левоинвариантные векторные поля полны;

(f) однопараметрическая группа диффеоморфизмов X_t , порожденная левоинвариантным векторным полем X , задается формулой

$$X_t = r_{\exp_X(t)}.$$

Доказательство. По теореме 3.14 векторные поля d/dr и $d \exp_X (d/dr)$, т. е. X , являются $\exp_X$ -связанными. Тогда $\exp_X$ — интегральная кривая векторного поля X , и это единственная интегральная кривая поля X , для которой $\exp_X(0) = e$. Так как X левоинвариантно, $l_\sigma \circ \exp_X$ также единственная интегральная кривая поля X , проходящая через точку σ при $t = 0$. Тем самым п. (е) доказан; (f) непосредственно следует из (е). Определим теперь отображения φ и ψ прямой $\mathbb{R}$ в группу G , полагая

$$(1) \quad \psi(t) = \exp_{sX}(t) \text{ и } \varphi(t) = \exp_X(st),$$

где $s \in \mathbb{R}$. Мы отмечали, что ψ — единственная интегральная кривая векторного поля sX , такая, что $\psi(0) = e$. Далее,

$$d\varphi \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) = d \exp_X \left(s \frac{d}{dr} \Big|_{st} \right) = sX|_{\exp_X(st)}.$$

Поэтому φ также интегральная кривая поля sX , такая, что $\varphi(0) = e$. Пользуясь единственностью интегральных кривых, см п. 1.48 (с), получаем $\varphi = \psi$. Итак,

$$(2) \quad \exp_{sX}(t) = \exp_X(st) \quad (s, t \in \mathbb{R}; X \in \mathfrak{g}).$$

Полагая $t = 1$ и заменяя s на t , получаем п. (а). Пункты (b) и (с) непосредственно следуют из (а), так как $\exp_X$ является гомоморфизмом прямой $\mathbb{R}$ в группу G . Для доказательства п. (d) следующим образом определим на прямом произведении $G \times \mathfrak{g}$ векторное поле V :

$$V(\sigma, X) = (X(\sigma), 0) \in G_\sigma \oplus \mathfrak{g}_X.$$

Векторное поле V гладкое, и в соответствии с п. (е) его интегральная кривая, проходящая через точку (σ, X) , есть

$$t \mapsto (\sigma \exp tX, X),$$

или, иначе говоря, локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем V , задается формулой

$$V_t(\sigma, X) = (\sigma \exp tX, X).$$

В частности, V — полное поле, следовательно, преобразование V_1 определено и гладко на $G \times \mathfrak{g}$. Пусть теперь $\pi: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G$ — проекция на G . Тогда

$$\exp X = \pi \circ V_1(e, X).$$

Итак, $\exp$ мы представили в виде композиции гладких отображений, следовательно, само отображение $\exp$ гладкое. Тот факт, что дифференциал $d \exp: \mathfrak{g}_0 \rightarrow G_e$ является тождественным отображением, получается непосредственно, так как tX — кривая в $\mathfrak{g}$ с касательным вектором X при $t = 0$, а $\exp tX$ — кривая в G с касательным вектором $X(e)$ при $t = 0$ (по п. (а)).

3.32. Теорема. Пусть $\varphi: H \rightarrow G$ — гомоморфизм. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{h}$. Тогда $t \mapsto \varphi(\exp tX)$ есть гладкая кривая в G с касательным вектором $d\varphi(X(e))$ при $t = 0$. Эта кривая является однопараметрической подгруппой в G , так как φ — гомоморфизм. Но $t \mapsto \exp t(d\varphi(X))$ — единственная однопараметрическая подгруппа в G с касательным вектором $(d\varphi(X))(e)$ при $t = 0$. Поэтому

$$(2) \quad \varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi(X)),$$

откуда

$$(3) \quad \varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)).$$

3.33. Предложение. Пусть (H, φ) — подгруппа Ли группы Ли G , и пусть $X \in \mathfrak{g}$. Если $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$, то $\exp tX \in \varphi(H)$ для любого t . Обратно, если для всех t из некоторого открытого интервала $\exp tX \in \varphi(H)$, то $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$.

Доказательство. Если $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$, то по теореме 3.32 $\exp tX \in \varphi(H)$ для любого t . С другой стороны, если $\exp tX \in \varphi(H)$ для всех t из некоторого интервала I , то отображение $t \mapsto \exp tX$, $t \in I$, может быть представлено в виде композиции $\varphi \circ \alpha$, согласно теореме 1.62, где α — гладкое отображение I в H . Пусть $t_0 \in I$, и пусть X — левинвариантное векторное поле на группе Ли H , определяемое вектором $\alpha(t_0)$. Тогда $d\varphi(X) = X$.

3.34. Теорема. Пусть A — абстрактная подгруппа группы Ли G , и пусть $\mathfrak{a}$ — подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть U — окрестность нуля в $\mathfrak{g}$, диффеоморфно отображающаяся при экспоненциальном отображении на окрестность единицы V в G . Предположим, что

$$(1) \quad \exp(U \cap \mathfrak{a}) = A \cap V.$$

Тогда A с индуцированной топологией является подгруппой Ли в G , подпространство $\mathfrak{a}$ — подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{a}$ является алгеброй Ли группы Ли A .

Доказательство. Необходимо лишь показать, что в индуцированной топологии подгруппа A имеет дифференцируемую структуру, такую, что пара (A, i) является подмногообразием в G , где i — отображение включения. Тогда, согласно теореме 3.20, с этой (и ни с какой другой) структурой многообразия группа A будет подгруппой Ли группы Ли G , и из предложения 3.33 следует, что алгеброй Ли группы Ли A будет $\mathfrak{a}$. Положим

$$\varphi = \exp | U \cap \mathfrak{a}: U \cap \mathfrak{a} \rightarrow A \cap V.$$

Требуемая дифференцируемая структура на A задается максимальным семейством гладко перекрывающихся систем координат, содержащим набор

$$\{(A \cap \sigma V, \varphi^{-1} \circ l_{\sigma^{-1}}): \sigma \in A\}.$$

3.35. Пример. Убедимся, что экспоненциальное отображение

$$(1) \quad \exp: \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$$

для комплексной полной линейной группы задается показательной функцией на матрицах. В группе $GL(n; \mathbb{C})$ единичную матрицу будем обозначать I вместо e . Пусть для $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$

$$(2) \quad e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^j}{j!} + \dots$$

Чтобы убедиться в осмысленности этой формулы, т. е. в том, что правая часть (2) сходится, заметим, что на самом деле она сходится равномерно по A в любой ограниченной области $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$. Возьмем ограниченную область Ω в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$; существует $\mu > 0$, такое, что $|x_{ik}(A)| \leq \mu$ для всех матричных компонент $x_{ik}(A)$ любой матрицы A из области Ω . Отсюда легко вывести по индукции, что $|x_{ik}(A^j)| \leq n^{j-1} \mu^j$. Таким образом, каждый из рядов

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_{ik}(A^j)}{j!} \quad (1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n)$$

по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по A в Ω . Отсюда следует, что правая часть (2) сходится равномерно по A в области Ω .

Пусть теперь $S_j(A)$ есть j -я частичная сумма ряда (2), т. е.

$$(4) \quad S_j(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^j}{j!},$$

и пусть $B \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$. Так как $C \mapsto BC$ — непрерывное отображение $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ в себя, получаем

$$(5) \quad B(\lim_{j \rightarrow \infty} S_j(A)) = \lim_{j \rightarrow \infty} (BS_j(A)).$$

В частности, если $B \in GL(n; \mathbb{C})$, то $B(\lim_{j \rightarrow \infty} S_j(A)) B^{-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} BS_j(A) B^{-1}$, откуда вытекает, что

$$(6) \quad Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}.$$

Существует $B \in GL(n; \mathbb{C})$, такая, что матрица BAB^{-1} верхнетреугольная, т. е. все ее элементы под диагональю нулевые. (Пусть l — линейное преобразование $\mathbb{C}^n$ с матрицей A в каноническом базисе и v_1 — его собственный вектор; определим по индукции v_{i+1} как собственный вектор преобразования $\pi_i \circ l|_{W_i}$, где W_i — произвольное подпространство, дополнительное к подпространству V_i , натянутому на векторы $v_1, \dots, v_i$, а π_i — проекция $\mathbb{C}^n = W_i \oplus V_i$ на W_i . В качестве B можно взять матрицу, обратную к матрице, составленной из столбцов $v_1, \dots, v_n$.) Если на диагонали у матрицы BAB^{-1} стоят $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то матрица $e^{BAB^{-1}}$ тоже будет верхнетреугольной с диагональными элементами $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. В частности, $\det e^{BAB^{-1}} \neq 0$, и из (6) следует, что

$$(7) \quad e^A \in GL(n; \mathbb{C}) \text{ для всех } A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}).$$

Так как след матрицы равен сумме, а определитель — произведению собственных значений, нами также доказано, что

$$(8) \quad \det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Теперь докажем, что

$$(9) \quad e^{A+B} = e^A e^B, \text{ если } AB = BA.$$

По определению $e^{A+B} = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j(A+B)$. Из того что умножение матриц задает непрерывное отображение $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, следует, что $e^A e^B = \lim_{j \rightarrow \infty} S_j(A) S_j(B)$. Для доказательства (9) достаточно проверить, что

$$(10) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \{S_j(A) S_j(B) - S_j(A+B)\} = 0.$$

Далее,

$$(11) \quad S_j(A) S_j(B) - S_j(A+B) = \sum \frac{B^l A^k}{l! k!},$$

где суммирование проводится по всем целым l и k , таким, что $1 \leq l \leq j$, $1 \leq k \leq j$ и $j+1 \leq l+k \leq 2j$. Если $\mu > 0$ — верхняя грань абсолютных значений всех элементов из A и B ,

то каждый элемент правой части (11) по абсолютной величине ограничен числом

$$(12) \quad \sum \frac{n^{l+k-l} \mu^{l+k}}{l! k!} \leq \frac{(n\mu)^{2j} j^2}{[j/2]!},$$

где $[j/2]$ — целая часть $j/2$. Правая часть (12) стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$, что доказывает (10) и тем самым (9).

Рассмотрим отображение $t \mapsto e^{tA}$ прямой $\mathbb{K}$ в группу Ли $GL(n; \mathbb{C})$. Оно гладкое, так как вещественная и мнимая части каждого элемента из e^{tA} являются степенными рядами по t с бесконечным радиусом сходимости. Касательным вектором к нему в нуле служит A (достаточно почленно продифференцировать степенной ряд), и в силу формулы (9) это отображение является гомоморфизмом. Таким образом, $t \mapsto e^{tA}$ — единственная однопараметрическая подгруппа в $GL(n; \mathbb{C})$ с касательным вектором A в нуле. Итак, для группы $GL(n; \mathbb{C})$ экспоненциальное отображение (1) задается показательной функцией на матрицах:

$$(13) \quad \exp(A) = e^A \quad (A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})).$$

Если $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, то $e^A \in GL(n; \mathbb{R})$, и $A \mapsto e^A$ — экспоненциальное отображение для вещественной полной линейной группы. Подобным образом экспоненциальное отображение

$$(14) \quad \exp: \text{End}(V) \rightarrow \text{Aut}(V),$$

где V — вещественное или комплексное векторное пространство, задается показательной функцией на эндоморфизмах. Если $l \in \text{End}(V)$, то

$$(15) \quad \exp(l) = 1 + l + \frac{l^2}{2!} + \dots + \frac{l^j}{j!} + \dots,$$

где l^j означает «композицию l с собой j раз», а 1 — тождественное преобразование.

3.36. Замечания. Если задано представление $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ и $X \in \mathfrak{g}$, то из формулы (15) разд. 3.35 и теоремы 3.32 следует, что

$$(1) \quad \varphi(\exp X) = 1 + d\varphi(X) + \frac{(d\varphi(X))^2}{2!} + \dots,$$

а из теоремы 3.32 и замечания 3.9 (2) вытекает, что

$$(2) \quad d\varphi(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\exp tX) - 1}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\exp tX).$$

3.37. Подгруппы в $GL(n; \mathbb{C})$. Сейчас мы получим некоторые классические подгруппы Ли в $GL(n; \mathbb{C})$, применяя экспоненциальное отображение к подалгебрам из $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, пользуясь разд. 3.35 и теоремой 3.34. Один пример уже есть, а именно $GL(n; \mathbb{R})$ — замкнутая подгруппа в $GL(n; \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \subset$

$\subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$. Тогда транспонированной к матрице A будет матрица A^t , такая, что $(A^t)_{ij} = A_{ji}$; комплексно-сопряженной к A является матрица $\bar{A}$, элемент которой с индексами i, j , $(\bar{A})_{ij}$, равен комплексно-сопряженному $\bar{A}_{ij}$ к элементу A_{ij} . Разумеется, $n \geq 1$ — целое число.

(a) Унитарная группа

$$U(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}): A^{-1} = \bar{A}^t\}.$$

(b) Специальная линейная группа

$$SL(n; \mathbb{C}) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}): \det A = 1\}.$$

(c) Комплексная ортогональная группа

$$O(n; \mathbb{C}) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}): A^{-1} = A^t\}.$$

Каждая из перечисленных групп — абстрактная подгруппа и замкнутое подмножество в $GL(n; \mathbb{C})$. С помощью теоремы 3.34 мы покажем, что они являются подгруппами Ли. Их алгебрами Ли будут

(a') косоэрмитовы матрицы: $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}): \bar{A} + A^t = 0\}$,

(b') бесследовые матрицы: $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}): \operatorname{tr} A = 0\}$,

(c') кососимметричные матрицы: $\mathfrak{o}(n; \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}): A + A^t = 0\}$.

Каждый из этих примеров — подалгебра в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$. Чтобы применить теорему 3.34, возьмем в качестве U окрестность нуля в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, диффеоморфную при экспоненциальном отображении некоторой окрестности единицы $V \subset GL(n; \mathbb{C})$. Можно дополнительно предполагать, что если $A \in U$, то $\bar{A}$, A^t и $-A$ также принадлежат U и $|\operatorname{tr} A| < 2\pi$. Действительно, пусть W — окрестность нуля в $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, достаточно малая для того, чтобы экспоненциальное отображение было на ней диффеоморфизмом и чтобы выполнялось указанное ограничение на след; положим $U = W \cap \bar{W} \cap W^t \cap (-W)$. Предположим также, что $\exp(U \cap \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})) = GL(n; \mathbb{R}) \cap V$.

Если $A \in U \cap \mathfrak{u}(n)$, то $(\bar{e^A})^t = e^{\bar{A}^t} = e^{-A}$, откуда $(\bar{e^A})^t e^A = e^{-A} e^A = e^0 = I$ и, следовательно, $e^A \in U(n) \cap V$. Обратно, предположим, что $A \in U$ и $e^A \in U(n) \cap V$. Тогда $e^{-A} = (e^A)^{-1} = (\bar{e^A})^t = e^{\bar{A}^t}$, откуда следует, что $\bar{A}^t = -A$, так как $-A$ и $\bar{A}^t$ лежат в U и экспоненциальное отображение инъективно на U . Итак, $A \in U \cap \mathfrak{u}(n)$. Следовательно, по теореме 3.34 $U(n)$ — замкнутая подгруппа Ли в $GL(n; \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{u}(n)$. Сходным рассуждением показывается, что $O(n; \mathbb{C})$ — замкнутая подгруппа Ли в $GL(n; \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{o}(n; \mathbb{C})$.

Если $A \in \mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$, то по формуле (8) разд. 3.35 $\det e^A = 1$; следовательно, $e^A \in SL(n; \mathbb{C})$. Обратно, если $\det e^A = 1$, то в соответствии с (8) из разд. 3.35 $\operatorname{tr} A = (2\pi i)j$ для некоторого целого j . Если к тому же $A \in U$, то $\operatorname{tr} A = 0$. Таким образом, из теоремы 3.34 следует, что $SL(n; \mathbb{C})$ — замкнутая подгруппа Ли в $GL(n; \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$.

Из рассуждений, приведенных выше, и теоремы 3.34 непосредственно вытекает, что *специальная унитарная группа* $SU(n)$, которая по определению есть $U(n) \cap SL(n; \mathbb{C})$, является замкнутой подгруппой Ли в $GL(n; \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(n)$ — подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, состоящей из бесследовых косэрмитовых матриц; *вещественная специальная линейная группа* $SL(n; \mathbb{R})$, которая по определению есть $SL(n; \mathbb{C}) \cap GL(n; \mathbb{R})$, является замкнутой подгруппой Ли в $GL(n; \mathbb{R})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ вещественных бесследовых матриц; *ортогональная группа* $O(n)$, которая по определению есть $U(n) \cap GL(n; \mathbb{R})$, является замкнутой подгруппой Ли в $GL(n; \mathbb{R})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{o}(n)$ вещественных кососимметричных матриц; *специальная ортогональная группа* $SO(n)$, которая по определению есть $O(n) \cap SL(n; \mathbb{R})$, является замкнутой подгруппой Ли в $GL(n; \mathbb{R})$ также с алгеброй Ли $\mathfrak{o}(n)$ вещественных кососимметричных матриц.

В каждом из этих примеров получается замкнутая подгруппа в $GL(n; \mathbb{R})$ или $GL(n; \mathbb{C})$, и в каждом случае ее лиева топология является индуцированной топологией либо по теореме 3.34, либо по теореме 3.21.

Унитарная группа компактна, так как она не только замкнута, но и ограничена в $GL(n; \mathbb{C})$, ибо из равенства $A^t \bar{A} = I$ следует, что $\sum_j |A_{ij}|^2 = 1$ для всех i , откуда $|A_{ij}|^2 \leq 1$. Поэтому группы $SU(n)$, $O(n)$ и $SO(n)$ также являются компактными.

Размерности этих групп Ли легко вычислить с помощью их алгебр Ли. Группа $U(n)$ имеет размерность n^2 ; $SL(n; \mathbb{C})$ — размерность $2n^2 - 2$; $O(n; \mathbb{C})$ — размерность $n(n - 1)$; $SU(n)$ — размерность $n^2 - 1$; $SL(n; \mathbb{R})$ имеет размерность $n^2 - 1$; группы $O(n)$ и $SO(n)$ обе имеют размерность $n(n - 1)/2$.

Непрерывные гомоморфизмы

3.38. Теорема. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow G$ — непрерывный гомоморфизм вещественной прямой $\mathbb{R}$ в группу Ли G . Тогда отображение φ гладкое.

Доказательство. Достаточно доказать гладкость φ в окрестности нуля и тогда его гладкость во всех точках получается с помощью композиций с различными левыми сдвигами. Пусть V — окрестность единицы в G , диффеоморфная окрестности

нуля $U \subset \mathfrak{g}$ при экспоненциальном отображении. Можно предполагать, что окрестность U звездная, т. е. для любого $X \in U$ элемент tX также принадлежит U , $0 \leq t \leq 1$; положим

$$U' = \{X/2: X \in U\}.$$

Выберем достаточно малое $t_0 > 0$ так, чтобы $\varphi(t) \in \exp(U')$ при $|t| \leq t_0$. Пусть n — натуральное число. Существуют однозначно определенные элементы X и Y из U' , такие, что $\exp X = \varphi(t_0/n)$ и $\exp Y = \varphi(t_0)$. Утверждается, что $nX = Y$. Так как

$$\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y),$$

а на U' экспонента инъективна, нужно лишь показать, что $nX \in U'$. Известно, что $X \in U'$. Пусть $1 \leq j \leq n$, и предположим, что $jX \in U'$. Мы докажем, что $(j+1)X \in U'$. Но $(j+1)X \in U$ и $\exp((j+1)X) = \varphi((j+1)t_0/n)$, а последний элемент принадлежит $\exp(U')$ по выбору t_0 . Так как $\exp$ инъективно на U , отсюда следует, что $(j+1)X \in U'$. Таким образом, $nX \in U'$ и $nX = Y$, как и утверждалось. Пусть теперь m — целое число и $0 < |m| \leq n$. Если m положительно, то $\varphi(mt_0/n) = \varphi(t_0/n)^m = \exp(Y/n)^m = \exp(mY/n)$. Если m отрицательно, то $\varphi(mt_0/n) = \varphi((-m)t_0/n)^{-1} = \exp((-mY)/n)^{-1} = \exp(mY/n)$ точно так же. По непрерывности $\varphi(t) = \exp(tY/t_0)$ при $|t| \leq t_0$. Таким образом, отображение φ гладкое.

3.39. Теорема. Пусть $\varphi: H \rightarrow G$ — непрерывный гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение φ гладкое.

Доказательство. Пусть H имеет размерность d и $X_1, \dots, X_d$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$. Отображение $\alpha: \mathbb{R}^d \rightarrow H$, определяемое формулой

$$(1) \quad \alpha(t_1, \dots, t_d) = (\exp t_1 X_1) \dots (\exp t_d X_d),$$

гладкое и невырожденное в $0 \in \mathbb{R}^d$ по теореме 3.31 (d), поэтому существует окрестность нуля $V \subset \mathbb{R}^d$, диффеоморфная окрестности единицы $U \subset H$ при отображении α . Далее, отображение $t \mapsto \varphi(\exp tX_t)$ является непрерывным гомоморфизмом $\mathbb{R} \rightarrow G$ и по теореме 3.38 гладко. Поэтому отображение $\varphi \circ \alpha$ гладкое, а значит, гладко и отображение $\varphi|_U$, которое можно выразить как $(\varphi \circ \alpha) \circ \alpha^{-1}|_U$. Так как $\varphi|_{\sigma U} = l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi \circ l_{\sigma^{-1}}|_{\sigma U}$, отображение φ гладко на всей группе H .

3.40. Определение. Топологическая группа G — это абстрактная группа, снабженная такой топологией, что отображение $G \times G \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$, непрерывно.

3.41. Следствие к теореме 3.39. Локально евклидова топологическая группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности,

может иметь не более одной дифференцируемой структуры, превращающей ее в группу Ли.

Доказательство. Тождественное отображение дает диффеоморфизм любых двух таких дифференцируемых структур.

Вопрос о том, всякая ли связная локально евклидова топологическая группа обладает дифференцируемой структурой, превращающей ее в группу Ли, был одной из наиболее выдающихся проблем в теории групп Ли. Эта проблема поставлена Гильбертом в знаменитом обращении к Международному математическому конгрессу в 1900 г. и утвердительно разрешена Глисоном вместе с Монтгомери и Циппенем в 1952 г., см. [20].

Мы имели дело исключительно с гладкой структурой на группах Ли. Можно показать [23], что в гладкой структуре на группе Ли содержится аналитическая структура, т. е. набор систем координат, перекрывающихся аналитическим образом (композиции $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ координатных отображений локально представляются сходящимися рядами). В этом контексте аналог теоремы 3.39 утверждал бы аналитичность всякого непрерывного гомоморфизма групп Ли, откуда следует, что в гладкой структуре на группе Ли содержится единственная аналитическая структура.

Замкнутые подгруппы

3.42. Теорема. Пусть G — группа Ли и A — замкнутая абстрактная подгруппа в G . Тогда A обладает единственной структурой многообразия, превращающей A в подгруппу Ли группы Ли G .

Согласно теореме 3.21, топология в этой структуре многообразия на A должна быть индуцированной топологией.

Доказательство. Единственность была доказана в 3.20. Пусть

$$(1) \quad \alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \exp tX \in A \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Идея заключается в том, чтобы показать, что α — подпространство в $\mathfrak{g}$, и применить теорему 3.34. Из определения (1) ясно, что если $X \in \alpha$, то и $tX \in \alpha$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $X, Y \in \alpha$. Предположим, что

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp \frac{t}{n} X \exp \frac{t}{n} Y \right)^n = \exp(t(X + Y)).$$

Так как подгруппа A замкнута, левая часть (2) принадлежит A . Таким образом, из формулы (2) следует, что $(X + Y) \in \alpha$. Предположив временно справедливость (2), мы показали, что α — подпространство в $\mathfrak{g}$; используем это для завершения дока-

зательства теоремы. Мы вернемся к доказательству формулы (2) в отдельной лемме.

Утверждение теоремы будет вытекать из теоремы 3.34, если мы докажем существование окрестности нуля $U \subset \mathfrak{g}$, диффеоморфной окрестности единицы $V \subset G$ при экспоненциальном отображении, такой, что

$$(3) \quad \exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A.$$

Предположим противное, т. е. что такой окрестности U не существует. Тогда найдется окрестность нуля W в $\mathfrak{a}$, последовательность $\{\sigma_k\} \subset A$, такие, что $\sigma_k \rightarrow e$ в G и

$$(4) \quad \sigma_k \notin \exp(W).$$

Пусть $\mathfrak{b}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{a}$. Из утверждения 3.31 (d) следует гладкость и невырожденность в точке $(0, 0)$ отображения $\alpha: \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \rightarrow G$, определяемого формулой $\alpha(X, Y) = \exp X \cdot \exp Y$. Тогда в $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ найдутся соответственно окрестности нуля W_a и W_b , $W_a \subset W$, такие, что $\alpha|_{W_a \times W_b}$ является диффеоморфизмом $W_a \times W_b$ на окрестность единицы $\tilde{V}$ в G . Если удастся выбрать W_b достаточно малой, чтобы

$$(5) \quad A \cap \exp(W_b \setminus \{0\}) = \emptyset,$$

то получим противоречие следующим образом. Если k достаточно велико, то $\sigma_k \in \tilde{V}$ и, следовательно, $\sigma_k = \exp X_k \exp Y_k$, где $X_k \in W_a$, $Y_k \in W_b$ и $Y_k \neq 0$ по формуле (4). Но σ_k принадлежит A , так же как и $\exp X_k$; поэтому $\exp Y_k \in A$ в противоречие с (5).

Наконец, покажем возможность выбора окрестности W_b , удовлетворяющей условию (5). Снова рассуждаем от противного. Предположим, что существует последовательность $\{Y_i\} \subset W_b$, такая, что $Y_i \neq 0$, $Y_i \rightarrow 0$ и $\exp Y_i \in A$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{Y_j\}$ и последовательность $\{t_j\}$ положительных вещественных чисел, сходящихся к 0, такие, что последовательность $\{Y_j/t_j\}$ сходится в W_b к некоторому $Y \neq 0$ (возьмите такую норму на $\mathfrak{b}$, чтобы единичная сфера попала в W_b ; тогда в качестве t_j можно взять норму Y_j). Пусть $n_j(t)$ для $t > 0$ обозначает целую часть t/t_j . Тогда

$$\frac{t}{t_j} - 1 < n_j(t) \leq \frac{t}{t_j}$$

и $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j n_j(t) = t$. Поэтому

$$\exp tY = \exp \left(\lim_{j \rightarrow \infty} n_j(t) Y_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\exp Y_j)^{n_j(t)},$$

что принадлежит A . Так как $\exp(-tY) = (\exp tY)^{-1}$, то $\exp tY \in A$ для всех вещественных t , откуда следует, что $Y \in \mathfrak{a}$. Это противоречит тому, что Y — ненулевой элемент из W_b .

Для завершения доказательства мы нуждаемся в следующей лемме, из которой с очевидностью вытекает формула (2).

Лемма. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то для достаточно малого t

$$(6) \quad \exp tX \exp tY = \exp (t(X + Y) + O(t^2)),$$

где $O(t^2)$ обозначает гладкую $\mathfrak{g}$ -значную функцию t , такую, что $(1/t^2) O(t^2)$ ограничена при $t \rightarrow 0$.

Доказательство. Для достаточно малого t существует гладкая кривая $Z(t) \in \mathfrak{g}$, такая, что

$$(7) \quad \exp tX \exp tY = \exp Z(t).$$

Так как при $t = 0$ касательным вектором к кривой

$$t \mapsto \exp tX \exp tY$$

будет $X(e) + Y(e)$ (см. упр. 11), то к кривой $Z(t)$ при $t = 0$ касательным вектором будет $X + Y$, и тейлоровское разложение для $Z(t)$ около $t = 0$ с интегральным остаточным членом имеет вид

$$(8) \quad Z(t) = t(X + Y) + O(t^2),$$

где $O(t^2)$ — гладкая $\mathfrak{g}$ -значная функция t , такая, что $(1/t^2) O(t^2)$ ограничена при $t \rightarrow 0$. Из равенств (7) и (8) получаем (6).

3.43. Теорема. Пусть $\psi: G \rightarrow K$ — гомоморфизм групп Ли. Если $A = \text{Ker } \psi$ и $\mathfrak{a} = \text{Ker } d\psi$, то A является замкнутой подгруппой Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{a}$.

Доказательство. Ядро A — замкнутая абстрактная подгруппа в G и по теореме 3.42 — подгруппа Ли. Если $X \in \mathfrak{g}$, то по предложению 3.33 (с $H = A$ и отображением включения в качестве φ) X принадлежит алгебре Ли группы Ли A тогда и только тогда, когда $\exp tX \in A$ для всех $t \in \mathbb{R}$, а это выполняется в точности тогда, когда $\psi(\exp tX) = e$ для всех $t \in \mathbb{R}$. По теореме 3.32 последнее условие равносильно равенству $\exp t d\psi(X) = e$ для всех $t \in \mathbb{R}$, которое выполняется тогда и только тогда, когда $d\psi(X) = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{a}$.

Присоединенное представление

3.44. Определения. Пусть M — многообразие, а G — группа Ли. Гладкое отображение $\mu: G \times M \rightarrow M$, такое, что

$$(1) \quad \mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m)), \quad \mu(e, m) = m$$

для всех $\sigma, \tau \in G$ и $m \in M$, называется *левым действием группы Ли G на многообразии M* . Если $\mu: G \times M \rightarrow M$ — левое действие G на M , то отображение $m \mapsto \mu(\sigma, m)$ является диффеоморфизмом

на M , который мы будем обозначать через μ_σ . Аналогично, гладкое отображение $\mu: M \times G \rightarrow M$, такое, что

$$(2) \quad \mu(t, \sigma\tau) = \mu(\mu(t, \sigma), \tau), \quad \mu(t, e) = t$$

для всех $\sigma, \tau \in G$ и $t \in M$, называется *правым действием* G на M .

3.45. Теорема. Пусть $\mu: G \times M \rightarrow M$ — левое действие группы Ли G на многообразии M . Предположим, что $m_0 \in M$ — неподвижная точка, т. е. $\mu_\sigma(m_0) = m_0$ для всех $\sigma \in G$. Тогда отображение

$$(1) \quad \psi: G \rightarrow \text{Aut}(M_{m_0}),$$

определяемое формулой

$$(2) \quad \psi(\sigma) = d\mu_\sigma|_{M_{m_0}},$$

является представлением группы Ли G .

Доказательство. Отображение ψ есть гомоморфизм, ибо

$$(3) \quad \psi(\sigma\tau) = d\mu_{\sigma\tau}|_{M_{m_0}} = d(\mu_\sigma \circ \mu_\tau)|_{M_{m_0}} = \psi(\sigma) \circ \psi(\tau).$$

Остается доказать гладкость ψ . Для этого достаточно доказать гладкость композиции ψ с произвольной координатной функцией на $\text{Aut}(M_{m_0})$. Зададим систему координат на $\text{Aut}(M_{m_0})$, выбирая базис в M_{m_0} и отождествляя затем элементы из $\text{Aut}(M_{m_0})$ с невырожденными матрицами, пользуясь этим базисом. Матрица, соответствующая элементу $\text{Aut}(M_{m_0})$, получается, если применить его к векторам выбранного в M_{m_0} базиса, а затем применить ковекторы сопряженного базиса. Поэтому достаточно доказать, что для $v_0 \in M_{m_0}$ и $\alpha \in M_{m_0}^*$ функция

$$(4) \quad \sigma \mapsto \alpha(d\mu_\sigma(v_0))$$

на G будет гладкой. Для этого достаточно доказать, что

$$(5) \quad \sigma \mapsto d\mu_\sigma(v_0)$$

— гладкое отображение $G \rightarrow M_{m_0}$, или, что эквивалентно, гладкое отображение $G \rightarrow T(M)$. Но отображение (5) в точности является композицией гладких отображений

$$G \rightarrow T(G) \times T(M) \rightarrow T(G \times M) \rightarrow T(M),$$

где первое переводит σ в $((\sigma, 0), (m_0, v_0))$, второе является каноническим диффеоморфизмом $T(G) \times T(M)$ на $T(G \times M)$, а третье есть $d\mu$. Тем самым установлена гладкость ψ .

3.46. Присоединенное представление. Группа Ли G действует на себе слева внутренними автоморфизмами:

$$(1) \quad a: G \times G \rightarrow G, \quad a(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1} = a_\sigma(\tau).$$

Единичный элемент — неподвижная точка этого действия. Таким образом, по теореме 3.45 отображение

$$(2) \quad \sigma \mapsto d\alpha_\sigma | G_e \cong \mathfrak{g}$$

является представлением G в группе $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Оно называется *присоединенным представлением* и обозначается через

$$(3) \quad \text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Пусть дифференциал присоединенного представления обозначается через ad :

$$(4) \quad d(\text{Ad}) = \text{ad};$$

будем обозначать $\text{Ad}(\sigma)$ через Ad_σ , а $\text{ad}(X)$ через ad_X . Таким образом, по теореме 3.32 получаем коммутативную диаграмму

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Применяя также теорему 3.32 к автоморфизму a_σ группы G , получаем коммутативную диаграмму

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a_\sigma} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_\sigma} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Иными словами,

$$(7) \quad \exp t \text{Ad}_\sigma(X) = \sigma(\exp tX) \sigma^{-1}.$$

В частном случае, когда $G = \text{Aut}(V)$, эти диаграммы приобретают вид

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \text{Aut}(V) & \xrightarrow{\Lambda \text{d}} & \text{Aut}(\text{End } V) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \text{End}(V) & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\text{End } V) \\ \text{Aut}(V) & \xrightarrow{a_B} & \text{Aut}(V) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \text{End}(V) & \xrightarrow{\text{Ad}_B} & \text{End}(V) \end{array}$$

где $B \in \text{Aut}(V)$. Если к тому же $C \in \text{End}(V)$, то

$$(9) \quad \text{Ad}_B(C) = B \circ C \circ B^{-1},$$

ибо по замечанию 3.36 (2) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}_B(C) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a_B(\exp tC)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (B \circ e^{tC} \circ B^{-1}) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tB \circ C \circ B^{-1}} = B \circ C \circ B^{-1},\end{aligned}$$

пользуясь формулами (15) и (6) разд. 3.35. Точно так же в случае $G = GL(n; \mathbb{R})$ (или $GL(n; \mathbb{C})$), $B \in GL(n; \mathbb{R})$ и $C \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ получаем

$$(10) \quad \operatorname{Ad}_B(C) = BCB^{-1}.$$

3.47. Предложение. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$(1) \quad \operatorname{ad}_X Y = [X, Y].$$

Доказательство. По формуле (2) разд. 3.36

$$\begin{aligned}(2) \quad \operatorname{ad}_X Y &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Ad}(\exp tX) \right) Y = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Ad}_{\exp tX}(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(a_{\exp tX})(Y).\end{aligned}$$

Таким образом, если, как обычно, X_t обозначает однопараметрическую группу диффеоморфизмов, порожденную векторным полем X , то

$$\begin{aligned}(3) \quad \operatorname{ad}_X Y(e) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(d(l_{\exp tX})(Y(e))) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(r_{\exp(-tX)})(Y|_{\exp tX}) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(X_{-t})(Y_{X_t}(e)) = (L_X Y)(e) = [X, Y](e).\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из утверждения 2.25 (b). Так как и $\operatorname{ad}_X Y$ и $[X, Y]$ левоинвариантны, формула (1) является непосредственным следствием (3).

3.48. Теорема. Пусть $A \subset G$ — связная подгруппа Ли связной группы Ли G . Тогда A является нормальной подгруппой в G , если и только если алгебра Ли $\mathfrak{a}$ группы Ли A является идеалом в $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть $Y \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $\sigma = \exp X$. Тогда

$$\begin{aligned}(1) \quad \sigma(\exp Y)\sigma^{-1} &= \exp \operatorname{Ad}_\sigma(Y) \quad (\text{по (7) разд. 3.46}) = \\ &= \exp((\exp \operatorname{ad}_X)(Y)) \quad (\text{по (5) разд. 3.46}) = \\ &= \exp\left(Y + [X, Y] + \frac{(\operatorname{ad} X)^2}{2!}(Y) + \dots\right)\end{aligned}$$

(в силу (15) разд. 3.35 и предложения 3.47).

В предположении, что $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, ряд в последней строке формулы (1) сходится к элементу из $\mathfrak{a}$, так что

$$(2) \quad \sigma(\exp Y) \sigma^{-1} \in A.$$

Далее, по утверждениям 3.18 и 3.31 (d) подгруппа A порождается элементами вида $\exp Y$, а G — элементами вида $\exp X$. Совместно с (2) это доказывает, что A — нормальная подгруппа в G .

Обратно, предположим, что подгруппа A нормальная. Пусть s и t — вещественные числа, $Y \in \mathfrak{a}$ и $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $\sigma = \exp tX$. Тогда, согласно (1),

$$(3) \quad \sigma(\exp sY) \sigma^{-1} = \exp \operatorname{Ad}_\sigma(sY) = \exp s \{(\exp \operatorname{ad}_{tX})(Y)\}.$$

Так как A нормальна, $\sigma(\exp sY) \sigma^{-1} \in A$, и из формулы (3) и предложения 3.33 вытекает, что $(\exp \operatorname{ad}_{tX})(Y) \in \mathfrak{a}$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Но

$$(4) \quad \begin{aligned} (\exp \operatorname{ad}_{tX})(Y) &= (\exp t(\operatorname{ad}_X))(Y) = \\ &= Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2!}[X, [X, Y]] + \dots \end{aligned}$$

— гладкая кривая в $\mathfrak{a}$ с касательным вектором $[X, Y]$ при $t = 0$. Тем самым $[X, Y] \in \mathfrak{a}$, и $\mathfrak{a}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$.

3.49. Определения

(а) Центр $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g}: [X, Y] = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{g}\}$.

(б) Центр $G = \{\sigma \in G: \sigma\tau = \tau\sigma \text{ для всех } \tau \in G\}$.

3.50. Теорема. Пусть G — связная группа Ли. Тогда ее центр является ядром присоединенного представления.

Доказательство. Пусть σ принадлежит центру G , и пусть $X \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$(1) \quad \exp tX = \sigma(\exp tX) \sigma^{-1} = \exp t \operatorname{Ad}_\sigma(X)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $X = \operatorname{Ad}_\sigma(X)$; значит, $\sigma \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Ad})$. Обратно, пусть $\sigma \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Ad})$. Тогда по-прежнему выполняется (1), и σ коммутирует со всеми элементами некоторой окрестности единицы в G . Так как G связна, σ коммутирует со всеми элементами из G . Таким образом, элемент σ лежит в центре группы Ли.

Следствие (а). Пусть G — связная группа Ли. Тогда ее центр является замкнутой подгруппой Ли в G , а его алгебра Ли — это центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Это следствие непосредственно вытекает из теорем 3.50 и 3.43.

Следствие (б). Связная группа Ли G абелева тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева.

3.51. Предложение. Пусть X, Y принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Тогда

$$[X, Y] = 0 \Rightarrow \exp(X + Y) = \exp X \exp Y.$$

Доказательство. Подпространство $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, натянутое на X и Y , является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, и соответствующая связная подгруппа Ли $A \subset G$ абелева. Пусть

$$\alpha(t) = \exp tX \exp tY.$$

Отображение $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A$ гладкое и является гомоморфизмом, так как A абелева. Касательный вектор к этому отображению при $t = 0$ есть $X(e) + Y(e)$ (см. упр. 11), поэтому

$$\exp tX \exp tY = \exp t(X + Y)$$

для всех t .

3.52. Замечание. Напомним, что в разд. 3.27 была сформулирована теорема Адо, утверждающая, что каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает точным представлением в некоторую $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, откуда следует существование группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если у $\mathfrak{g}$ нулевой центр, то такое точное представление можно получить из присоединенного. Просто определяем $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ по формуле $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ и проверяем, что это гомоморфизм алгебр Ли. Если у $\mathfrak{g}$ нулевой центр, гомоморфизм ad инъективен, и мы получаем точное представление $\mathfrak{g}$ в $\text{End}(\mathfrak{g})$. Вместе с теоремой 3.19 это дает простое доказательство того, что каждая алгебра Ли с нулевым центром является алгеброй Ли некоторой группы Ли.

Автоморфизмы и дифференцирования билинейных операций и форм

3.53. Определения. Пусть V — конечномерное вещественное или комплексное векторное пространство. *Билинейная операция* на V — это линейное отображение $\psi: V \otimes V \rightarrow V$, где тензорное произведение берется над $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$), если V — вещественное (соотв. комплексное) векторное пространство. Будем использовать обозначение

$$\psi(v \otimes w) = \{v, w\}.$$

(а) Положим

$$A_\psi(V) = \{\alpha \in \text{Aut}(V): \alpha\{v, w\} = \{\alpha(v), \alpha(w)\} \text{ для всех } v, w \in V\}.$$

Элементы $A_\psi(V)$ — это автоморфизмы пространства V , сохраняющие билинейную операцию ψ .

(б) Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_\psi = \{l \in \text{End}(V): l\{v, w\} = \{l(v), w\} + \\ + \{v, l(w)\} \text{ для всех } v, w \in V\}. \end{aligned}$$

Элементы $\mathfrak{d}_\psi$ называются *дифференцированиями билинейной операции ψ* .

3.54. Теорема. $A_\psi(V)$ — замкнутая подгруппа Ли в $\text{Aut}(V)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{d}_\psi$.

Доказательство. Легко проверить, что $\mathfrak{d}_\psi$ — подалгебра в $\text{End}(V)$, а $A_\psi(V)$ — замкнутая абстрактная подгруппа в $\text{Aut}(V)$. Согласно теореме 3.42, $A_\psi(V)$ является замкнутой подгруппой Ли группы Ли $\text{Aut}(V)$. Пусть $\mathfrak{a}$ обозначает алгебру Ли, соответствующую $A_\psi(V)$. Нужно лишь показать, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_\psi$.

Если $l \in \mathfrak{a}$, то $\exp tl \in A_\psi(V)$, поэтому

$$(1) \quad (\exp tl) \{v, w\} = \{(\exp tl)(v), (\exp tl)(w)\}.$$

Обе части формулы (1) — гладкие кривые в V . Беря их производные при $t = 0$, получаем

$$(2) \quad l \{v, w\} = \{l(v), w\} + \{v, l(w)\},$$

а это доказывает, что $l \in \mathfrak{d}_\psi$. (Заметим, что производной (или касательным вектором) кривой $\varphi(t) \otimes \psi(t)$ в $V \otimes V$ при $t = 0$ будет $\dot{\varphi}(0) \otimes \psi(0) + \varphi(0) \otimes \dot{\psi}(0)$.)

Обратно, предположим, что $l \in \mathfrak{d}_\psi$. Для доказательства того, что $l \in \mathfrak{a}$, нужно лишь доказать, что $\exp tl \in A_\psi(V)$ при всех t . Пусть $l \otimes 1$ обозначает следующий эндоморфизм пространства $V \otimes V$:

$$(l \otimes 1)(v \otimes w) = l(v) \otimes w.$$

Тот факт, что $l \in \mathfrak{d}_\psi$, означает, что

$$(3) \quad l \{v, w\} = \{l(v), w\} + \{v, l(w)\}$$

для всех v и w из V ; это можно выразить формулой

$$(4) \quad l \circ \psi = \psi \circ (l \otimes 1 + 1 \otimes l).$$

Отсюда следует, что

$$(5) \quad l^n \circ \psi = \psi \circ (l \otimes 1 + 1 \otimes l)^n,$$

так что

$$(6) \quad e^{tl} \circ \psi = \psi \circ e^{t(l \otimes 1 + 1 \otimes l)}.$$

Далее, $(l \otimes 1) \circ (1 \otimes l) = (1 \otimes l) \circ (l \otimes 1)$, поэтому к правой части формулы (6) можно применить тождество (9) разд. 3.35. Тогда равенство (6) превращается в

$$(7) \quad e^{tl} \circ \psi = \psi \circ e^{t(l \otimes 1)} \circ e^{t(1 \otimes l)} = \psi \circ (e^{tl} \otimes 1) \circ (1 \otimes e^{tl}) = \psi \circ e^{tl} \otimes e^{tl}$$

(мы пользуемся тем, что $e^{t(l \otimes 1)} = e^{tl} \otimes 1$). Таким образом,

$$(\exp tl) \{v, w\} = \{(\exp tl)(v), (\exp tl)(w)\}$$

для всех v и w из V , откуда $\exp tl \in A_\psi(V)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Значит, $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_\psi$, и теорема доказана.

3.55. Определения. Пусть снова V — конечномерное векторное пространство над полем F , где F — либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. *Билинейная форма* B на V — это линейное отображение $B: V \otimes V \rightarrow F$. Будем использовать обозначение $B(v \otimes w) = (v, w)$.

(a) Пусть

$$A_B(V) = \{\alpha \in \text{Aut}(V): (v, w) = (\alpha(v), \alpha(w)) \text{ для всех } v, w \in V\}.$$

Элементы $A_B(V)$ — это автоморфизмы пространства V , *сохраняющие билинейную форму B* .

(b) Пусть

$$\mathfrak{d}_B = \{l \in \text{End}(V): (l(v), w) + (v, l(w)) = 0 \text{ для всех } v, w \in V\}.$$

Элементы из $\mathfrak{d}_B$ называются *дифференцированиями билинейной формы B* .

3.56. Теорема $A_B(V)$ — замкнутая подгруппа Ли в $\text{Aut}(V)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{d}_B$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 3.54, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

3.57. Применения теорем 3.54 и 3.56

(a) Пусть V — вещественное векторное пространство со скалярным произведением B . Согласно теореме 3.56, автоморфизмы пространства V , сохраняющие скалярное произведение, образуют замкнутую подгруппу Ли $A_B(V) \subset \text{Aut}(V)$, алгеброй Ли которой является подалгебра $\mathfrak{d}_B \subset \text{End}(V)$ дифференцирований скалярного произведения B . Выберем в пространстве V ортонормированный базис. Рассмотрим теперь изоморфизм между группами Ли $\text{Aut}(V)$ и $GL(n; \mathbb{R})$ и соответствующий изоморфизм между алгебрами Ли $\text{End}(V)$ и $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, которые определяются сопоставлением каждому линейному преобразованию пространства V его матрицы в выбранном базисе. Легко видеть, что при этих изоморфизмах $A_B(V)$ отображается на ортогональную группу $O(n) \subset GL(n; \mathbb{R})$, а $\mathfrak{d}_B$ отображается на множество $\mathfrak{o}(n)$ кососимметричных матриц из $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$. Это дает еще одно доказательство того, что ортогональная группа $O(n)$ является замкнутой подгруппой Ли в $GL(n; \mathbb{R})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{o}(n)$.

(b) В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется билинейная операция — скобки Ли $[\ , \]$. Автоморфизмы пространства $\mathfrak{g}$, которые сохраняют скобки Ли, — это в точности автоморфизмы $\mathfrak{g}$ как алгебры Ли. Будем обозначать их $A(\mathfrak{g})$. Согласно теореме 3.54, $A(\mathfrak{g})$ является замкнутой подгруппой Ли в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ с алгеброй Ли, состоящей из дифференцирований скобок Ли $[\ , \]$, которую мы будем обозначать $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

Предположим, что G — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $A(G)$ — группа всех автоморфизмов G как группы Ли. Отображение

$$(1) \quad \psi: A(G) \rightarrow A(\mathfrak{g}), \quad \psi(\alpha) = d\alpha,$$

является гомоморфизмом, инъективно по теореме 3.16 и сюръективно по теореме 3.27. Тогда с помощью ψ на $A(G)$ индуцируется структура многообразия, превращающая $A(G)$ в группу Ли с алгеброй Ли, изоморфной $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

Однородные многообразия

3.58. Теорема. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G , и пусть G/H — множество левых смежных классов по подгруппе H , $G/H = \{\sigma H: \sigma \in G\}$. Пусть $\pi: G \rightarrow G/H$ обозначает естественную проекцию $\pi(\sigma) = \sigma H$. Тогда на G/H имеется единственная структура многообразия, такая, что

(a) π — гладкое отображение;

(b) существуют локальные гладкие сечения проекции π , т. е. для $\sigma H \in G/H$ найдется окрестность $W \ni \sigma H$ и гладкое отображение $\tau: W \rightarrow G$, такие, что $\pi \circ \tau = \text{id}$.

Доказательство. Существование. Введем топологию на G/H , требуя, чтобы $U \subset G/H$ было открыто тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыто в G . В такой топологии π будет открытым отображением, ибо если W открыто в G , то

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h \in H} Wh,$$

откуда следует, что $\pi(W)$ открыто в G/H . Кроме того, пространство G/H будет хаусдорфовым. Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что множество $R \subset G \times G$, состоящее из всех пар (σ, τ) , для которых существует элемент $h \in H$, такой, что $\sigma = \tau h$, является замкнутым множеством, так как $R = \alpha^{-1}(H)$, где α — непрерывное отображение $G \times G \rightarrow G$, $\alpha(\sigma, \tau) = \tau^{-1}\sigma$. Теперь если σH и τH — различные точки из G/H , то (σ, τ) не принадлежит R , поэтому найдутся открытые окрестности V и W точек σ и τ , такие, что $(V \times W) \cap R = \emptyset$. Таким образом, $\pi(V)$ и $\pi(W)$ — непересекающиеся открытые окрестности точек σH и τH , что и доказывает хаусдорфовость G/H . Счетная база топологии на G проектируется с помощью π в счетную базу топологии на G/H ; таким образом, G/H удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Согласно теореме 3.42, замкнутая подгруппа H является подгруппой Ли в G . Предположим, что группа Ли G имеет размерность d , а ее подгруппа H — размерность $d - k$. Чтобы доказать локальную евклидовость и получить покрытие G/H гладко перекрывающимися системами координат, сначала докажем, что на G

существует кубическая система координат (U, φ) с началом в точке e , такая, что различные срезы вида

$$(1) \quad x_i = \text{const} \text{ для всех } i \in \{1, \dots, k\}$$

$(x_1, \dots, x_d$ — координатные функции) лежат в различных смежных классах по H . Пусть $\mathcal{D}$ — распределение на группе Ли G , определяемое алгеброй Ли подгруппы Ли H . Тогда по теореме 1.60 на G существует кубическая система координат (V, φ) с началом в точке $e \in G$ и координатными функциями $x_1, \dots, x_d$, такая, что интегральные многообразия распределения $\mathcal{D}$ в V являются срезами вида (1). Так как H — замкнутая подгруппа и, следовательно, как подгруппа Ли имеет индуцированную топологию, можно выбрать окрестность V достаточно малой, чтобы

$$(2) \quad V \cap H = \text{срез } S_0, \text{ проходящий через } e.$$

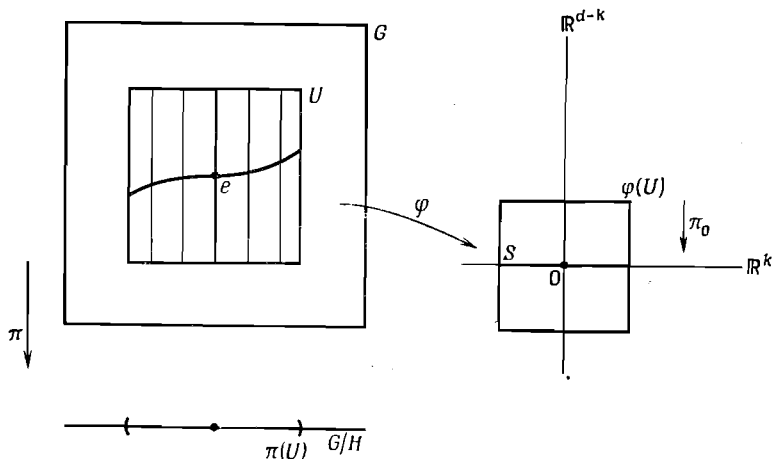
Выберем окрестности U и V_1 точки e , кубические в системе координат (V, φ) и такие, что

$$(3) \quad V_1 V_1 \subset V \text{ и } U^{-1}U \subset V_1.$$

Предположим теперь, что точки σ и τ окрестности U лежат в одном смежном классе по подгруппе H , $\sigma \in \tau H$. Тогда

$$(4) \quad \tau^{-1}\sigma \in V_1 \cap H = V_1 \cap S_0.$$

Поэтому $\sigma \in \tau(V_1 \cap S_0)$. Но $\tau(V_1 \cap S_0)$ — интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$, лежащее в V по выбору V_1 и связное. Поэтому $\tau(V_1 \cap S_0)$ принадлежит единственному срезу окрестности V . Итак, точки σ и τ лежат в одном и том же срезе. Обратно, легко видеть, что каждый срез лежит в единственном смежном классе. Итак, (U, φ) — искомая система координат.



Пусть S — срез $\varphi(U)$, на котором обращаются в нуль $x_{k+1}, \dots, x_d$. Пусть $\tilde{\varphi}^{-1}$ обозначает отображение, определяемое следующим образом:

$$(5) \quad \tilde{\varphi}^{-1} = \pi \circ \varphi^{-1} | S: S \rightarrow \pi(U).$$

По выбору системы координат (U, φ) отображение $\tilde{\varphi}^{-1}$ будет тогда взаимно однозначным; оно является непрерывным и открытым; тем самым оно является гомеоморфизмом. Пусть $\tilde{\varphi}$ — обратное к нему отображение,

$$(6) \quad \tilde{\varphi}: \pi(U) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^k.$$

Тогда $(\pi(U), \tilde{\varphi})$ — система координат в окрестности единичного смежного класса из G/H . С помощью левых сдвигов можно получить системы координат в окрестностях других точек из G/H . В самом деле, пусть I_σ — гомеоморфизм G/H , индуцированный левым сдвигом I_σ группы G на $\sigma \in G$, т. е.

$$(7) \quad I_\sigma(\tau H) = \sigma \tau H.$$

Для каждого $\sigma H \in G/H$ определим отображение $\tilde{\varphi}_{\sigma H}$, полагая

$$(8) \quad \tilde{\varphi}_{\sigma H} = \tilde{\varphi} \circ I_{\sigma^{-1}} | I_\sigma(\pi(U)).$$

Тогда $(I_\sigma(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma H})$ — система координат в окрестности точки σH . Заметим, что $\tilde{\varphi}_H$ совпадает с отображением $\tilde{\varphi}$. Теперь утверждается, что, взяв максимальный набор, порожденный системами координат

$$(9) \quad \{(I_\sigma(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma H}): \sigma \in G\},$$

мы получим дифференцируемую структуру на G/H . Нужно лишь проверить дифференцируемость на пересечениях. Итак, пусть $(I_{\sigma_1}(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H})$ и $(I_{\sigma_2}(\pi(U)), \tilde{\varphi}_{\sigma_2 H})$ — две системы координат, и пусть

$$(10) \quad V = \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}(I_{\sigma_1}(\pi(U))) \cap I_{\sigma_2}(\pi(U)).$$

Мы должны проверить, что $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}^{-1} | V$ гладко на V . Пусть $t \in V$. Так как $I_{\sigma_2^{-1}} \circ I_{\sigma_1} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(t) \in \pi(U)$, найдется элемент $g \in H$, такой, что $\sigma_2^{-1} \sigma_1 \varphi^{-1}(t) g \in U$. Следовательно, точка t обладает в V окрестностью W , такой, что $\sigma_2^{-1} \sigma_1 \varphi^{-1}(W) g \subset U$. Достаточно доказать гладкость $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}^{-1} | W$. Но $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}^{-1} | W$ можно выразить в виде следующей композиции гладких отображений:

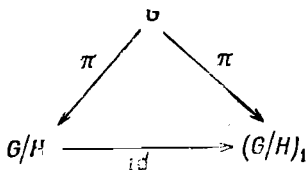
$$(11) \quad \tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}^{-1} | W = \pi_0 \circ \varphi \circ r_g \circ I_{\sigma_2^{-1} \sigma_1} \circ \varphi^{-1} | W,$$

где π_0 — каноническая проекция $\varphi(U)$ на S . Таким образом, $\tilde{\varphi}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma_1 H}^{-1} | W$ — гладкое отображение.

При этой дифференцируемой структуре на G/H проекция $\pi: G \rightarrow G/H$ является гладким отображением; в самом деле, ограничение π на открытое множество вида $I_\sigma(U)$ есть не что

иное, как композиция $\tilde{\varphi}_{\sigma H}^{-1} \circ \pi_0 \circ \varphi \circ l_{\sigma^{-1}} | l_{\sigma}(U)$. Таким образом, выполняется п. (а) нашей теоремы: что касается п. (b), то $l_{\sigma} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{\sigma H}$ — гладкое локальное сечение проекции π в окрестности $l_{\sigma}(\pi(U))$ точки σH .

Единственность. Пусть $(G/H)_1$ обозначает пространство G/H с другой дифференцируемой структурой, удовлетворяющей условиям (а) и (b).



Тогда тождественное отображение $G/H \rightarrow (G/H)_1$ и обратное к нему гладки, так как локально выражаются в виде композиции гладких локальных сечений в G с проекцией π . Таким образом, id — диффеоморфизм, что доказывает единственность.

3.59. Определение. Многообразия вида G/H , где G — группа Ли, а H — замкнутая подгруппа в G , с (единственной) гладкой структурой, удовлетворяющей условиям (а) и (b) теоремы 3.58, называются *однородными многообразиями*.

3.60. Замечание. Заметим, что функция f на G/H гладка тогда и только тогда, когда гладка функция $f \circ \pi$ на G , ибо если $f \in C^\infty$, то, разумеется, $f \circ \pi \in C^\infty$. Обратно, если $f \circ \pi \in C^\infty$, то функция f , локально представляющаяся композицией гладкого сечения $G/H \rightarrow G$ с функцией $f \circ \pi$, тоже класса C^∞ .

3.61. Определения. Пусть

$$(1) \quad \eta: G \times M \rightarrow M$$

— левое действие группы Ли G на многообразии M (ср. 3.44); пусть, как обычно,

$$(2) \quad \eta_\sigma(m) = \eta(\sigma, m).$$

Действие η называется *эффективным*, если e — единственный элемент из G , для которого η_e есть тождественное преобразование на M . Действие называется *транзитивным*, если для любых $n, m \in M$ найдется некий элемент $\sigma \in G$, такой, что $\eta_\sigma(m) = n$. Пусть $m_0 \in M$, и пусть

$$(3) \quad H = \{\sigma \in G: \eta_\sigma(m_0) = m_0\}.$$

H — замкнутая подгруппа в G , называемая *группой изотропии в точке m_0* . Действие η , ограниченное на H , дает левое действие

H на M с неподвижной точкой m_0 , и по теореме 3.45 получаем представление

$$(4) \quad \alpha: H \rightarrow \text{Aut}(M_{m_0}), \quad \text{где } \alpha(\sigma) = d\eta_\sigma|_{M_{m_0}}.$$

Группа линейных преобразований $\alpha(H)$ пространства M_{m_0} называется *линейной группой изотропии в точке m_0* .

3.62. Теорема. Пусть $\eta: G \times M \rightarrow M$ — левое транзитивное действие группы Ли G на многообразии M . Пусть $m_0 \in M$ и H — группа изотропии в точке m_0 . Определим отображение

$$(1) \quad \tilde{\beta}: G/H \rightarrow M$$

формулой $\tilde{\beta}(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0)$. Тогда $\tilde{\beta}$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Для начала заметим, что $\tilde{\beta}$ корректно определено, так как $\eta_{\sigma h}(m_0) = \eta_\sigma(\eta_h(m_0)) = \eta_\sigma(m_0)$ для всех $h \in H$. Отображение $\tilde{\beta}$ сюръективно, так как группа G действует транзитивно, и инъективно, так как если $\tilde{\beta}(\sigma H) = \tilde{\beta}(\tau H)$, то $\eta_{\tau^{-1}\sigma}(m_0) = m_0$, что влечет за собой $\tau^{-1}\sigma \in H$, или, иными словами, $\sigma H = \tau H$. Учитывая упр. 6 из гл. 1, достаточно показать гладкость $\tilde{\beta}$ и невырожденность $d\tilde{\beta}$ во всех точках.

Согласно замечанию 3.60, отображение $\tilde{\beta}$ гладко тогда и только тогда, когда $\tilde{\beta} \circ \pi$ гладко, где π — естественная проекция G на G/H . Но

$$(2) \quad \tilde{\beta} \circ \pi = \eta \circ i_{m_0},$$

где i_{m_0} — гладкое отображение G в $G \times M$, задаваемое формулой

$$(3) \quad i_{m_0}(\sigma) = (\sigma, m_0).$$

Таким образом, $\tilde{\beta}$ — гладкое отображение.

Пусть теперь $\beta = \tilde{\beta} \circ \pi$. Так как ядро отображения $d\pi|_{G_\sigma}$ есть $(\sigma H)_\sigma \subset G_\sigma$, для доказательства невырожденности $d\tilde{\beta}|_{(G/H)_{\sigma H}}$ достаточно доказать, что ядро $d\beta|_{G_\sigma}$ также совпадает с $(\sigma H)_\sigma$. Для каждого $\sigma \in G$

$$(4) \quad \beta = \eta_\sigma \circ \beta \circ l_{\sigma^{-1}};$$

поэтому достаточно доказать, что $\text{Ker}(d\beta|_{G_e}) = H_e$. Разумеется, $H_e \subset \text{Ker}(d\beta|_{G_e})$. Пусть $x \in \text{Ker}(d\beta|_{G_e})$. Чтобы показать, что $x \in H_e$, нужно лишь доказать, что $\exp tX \in H$ для всех $t \in \mathbb{R}$, где X — левоинвариантное векторное поле на G , определяемое вектором x . Для этого достаточно доказать, что касательный вектор к кривой $t \mapsto \beta(\exp tX)$ в многообразии M тождественно равен нулю, ибо тогда $\beta(\exp tX) \equiv m_0$, откуда следует, что $\exp tX \in H$ для всех t . Касательный вектор к этой кривой в точке t равен

$$\begin{aligned} d\beta(X_{\exp tX}) &= d(\eta_{\exp tX} \circ \beta \circ l_{\exp(-tX)})(X_{\exp tX}) = \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\beta(X(e)) = d\eta_{\exp tX} \circ d\beta(x) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $d\tilde{\sigma}$ всюду невырожденно, и теорема доказана.

3.63. Замечания. Если H — замкнутая подгруппа группы Ли G , то на однородном многообразии G/H определено естественное левое действие этой группы Ли, а именно

$$(1) \quad \tilde{l}: G \times G/H \rightarrow G/H, \quad \tilde{l}(\sigma, \tau H) = \sigma \tau H.$$

Легко проверить, что отображение $\tilde{l}$ гладкое и в самом деле задает левое действие G на G/H . Кроме того, очевидно, что действие $\tilde{l}$ транзитивно. Для любого $\sigma \in G$ отображение $\tilde{l}_\sigma$ (обозначения см. в 3.61 (2)) является диффеоморфизмом G/H ; для любых данных точек γH и τH многообразия G/H существует диффеоморфизм $\tilde{l}_{\tau\gamma^{-1}}$, переводящий γH в τH . Именно потому, что многообразия вида G/H обладают транзитивной группой диффеоморфизмов, они и названы «*однородными многообразиями*». Обратно, теорема 3.62 показывает, что многообразие M , обладающее транзитивной группой диффеоморфизмов в смысле 3.61 (1), диффеоморфно некоторому однородному многообразию G/H .

Из теоремы 3.62 получаем другую характеристику структуры многообразия на G/H , а именно *многообразие G/H имеет единственную структуру групповой структуры, в которой естественное отображение (1) гладко.*

3.64. Теорема. Пусть G — группа Ли и H — замкнутая нормальная подгруппа в G . Тогда однородное многообразие G/H с естественной групповой структурой является группой Ли.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что отображение $G/H \times G/H \rightarrow G/H$,

$$(1) \quad (\sigma H, \tau H) \mapsto \sigma \tau^{-1} H,$$

гладко. Пусть $\alpha_\sigma: W_\sigma \rightarrow G$ и $\alpha_\tau: W_\tau \rightarrow G$ — гладкие локальные сечения проекции $\pi: G \rightarrow G/H$ в окрестностях W_σ и W_τ точек σH и τH соответственно. Тогда локально отображение (1) может быть представлено в виде следующей композиции гладких отображений:

$$(2) \quad \pi \circ \varphi \circ (\alpha_\sigma \times \alpha_\tau),$$

где $\varphi: G \times G \rightarrow G$ есть отображение $\varphi(\sigma, \tau) = \sigma \tau^{-1}$.

3.65. Примеры однородных многообразий

(а) Пусть $\{e_i: i = 1, \dots, n\}$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$, где в n -ке чисел e_i на i -м месте стоит единица, а на остальных — нули. Каждая матрица $\sigma \in GL(n; \mathbb{R})$ однозначно определяет линейное преобразование на $\mathbb{R}^n$, которое мы также будем обозначать σ , по формуле

$$(1) \quad \sigma(e_j) = \sum_i \sigma_{ij} e_i.$$

Другими словами, если рассматривать n -ки чисел, принадлежащие $\mathbb{R}^n$, как $n \times 1$ -матрицы, то σ естественным образом действует на $\mathbb{R}^n$ с помощью матричного умножения. Отображение $(\sigma, v) \mapsto \sigma(v)$ задает левое действие $GL(n; \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$:

$$(2) \quad GL(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\{, \}$ обозначает стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$, по отношению к которому базис $\{e_j\}$ является ортонормированным. Тогда для $\sigma \in GL(n; \mathbb{R})$

$$(3) \quad \langle \sigma(v), w \rangle = \langle v, \sigma^t(w) \rangle.$$

Если $\sigma \in O(n)$, то $\sigma^t \sigma = I$, и из (3) следует, что

$$(4) \quad \langle \sigma(v), \sigma(v) \rangle = \langle v, \sigma^t \sigma(v) \rangle = \langle v, v \rangle;$$

таким образом, отображение σ сохраняет длины векторов. Поэтому действие (2), ограниченное на $O(n) \times S^{n-1}$, пропускается через S^{n-1} , единичную сферу пространства $\mathbb{R}^n$.

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} O(n) \times S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \text{---} & \uparrow i \\ & & S^{n-1} \end{array}$$

Согласно утверждению 1.32, отображение, дополняющее диаграмму (5) до коммутативной, гладко, и мы получаем естественное гладкое левое действие

$$(6) \quad O(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

ортogonalной группы $O(n)$ на единичной сфере S^{n-1} . Утверждается, что действие (6) транзитивно. Для всякого вектора $v_1 \in S^{n-1}$ пусть $\{v_1, \dots, v_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, содержащий v_1 в качестве первого элемента. Пусть

$$(7) \quad v_i = \sum_j \sigma_{ji} e_j.$$

Тогда матрица σ , элементы которой определяются равенством (7), ортогональна, и

$$(8) \quad \sigma(e_1) = v_1.$$

Отсюда следует, что для любых двух элементов v и $w \in S^{n-1}$ существует ортогональная матрица σ , такая, что $\sigma(v) = w$. Таким образом, действие (6) транзитивно.

Множество матриц в $O(n)$ вида

$$(9) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \tilde{\sigma} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

образует замкнутую подгруппу в $O(n)$. Матрицы $\tilde{\sigma}$, участвующие в определении этой подгруппы, — это в точности матрицы из $O(n-1)$. Поэтому $O(n-1)$ естественно содержится в $O(n)$ как замкнутая подгруппа. Мы утверждаем, что $O(n-1)$ в точности есть группа изотропии действия (6) в точке $e_n \in S^{n-1}$. Ясно, что элементы из $O(n-1)$ оставляют e_n неподвижной. С другой стороны, предположим, что $\sigma \in O(n)$ и что $\sigma(e_n) = e_n$. Известно, что

$$\sigma(e_n) = \sum_i \sigma_{in} e_i,$$

откуда $\sigma_{in} = 0$ при $i < n$ и $\sigma_{nn} = 1$. Так как матрица σ ортогональна, то $\sigma\sigma^t = I$, что влечет за собой $\sum_i \sigma_{ni}^2 = 1$. Так как $\sigma_{nn} = 1$, то должно быть $\sigma_{ni} = 0$ при $i < n$. Таким образом, $\sigma \in O(n-1)$. Из теоремы 3.62 следует, что отображение

$$(10) \quad O(n)/O(n-1) \rightarrow S^{n-1}, \quad \sigma O(n-1) \mapsto \sigma(e_n)$$

является диффеоморфизмом. Итак, сфера S^{n-1} естественным образом диффеоморфна однородному многообразию $O(n)/O(n-1)$.

Сходными рассуждениями можно показать, что существует диффеоморфизм сферы S^{n-1} на однородное многообразие $SO(n)/SO(n-1)$.

(b) Пусть $\{e_i: i = 1, \dots, n\}$ — канонический комплексный базис пространства $\mathbb{C}^n$, где в n -ке комплексных чисел e_i на i -м месте стоит единица, а на остальных — нули. Так же как и в примере (a), каждая матрица $\sigma \in GL(n; \mathbb{C})$ однозначно определяет линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, которое тоже будет обозначаться σ , по формуле

$$(11) \quad \sigma(e_j) = \sum_i \sigma_{ij} e_i.$$

Если рассматривать n -ки комплексных чисел из $\mathbb{C}^n$ как $n \times 1$ -матрицы, то действие σ совпадает с матричным умножением. Отображение $(\sigma, v) \mapsto \sigma(v)$ задает левое действие вещественной $2n^2$ -мерной группы Ли $GL(n; \mathbb{C})$ на вещественном $2n$ -мерном многообразии $\mathbb{C}^n$

$$(12) \quad GL(n; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$,

$$(13) \quad \left\langle \sum_i a_i e_i, \sum_i b_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i.$$

Тогда для $\sigma \in GL(n; \mathbb{C})$

$$(14) \quad \langle \sigma(v), w \rangle = \langle v, \bar{\sigma}^t(w) \rangle.$$

Если σ — элемент унитарной группы $U(n)$, то $\bar{\sigma}^t \sigma = I$, и из формулы (14) следует, что σ сохраняет длины векторов в $\mathbb{C}^n$. Пусть X обозначает единичную сферу в $\mathbb{C}^n$; тогда действие (12), ограниченное на $U(n) \times X$, пропускается через X и по 1.32 дает гладкое левое действие

$$(15) \quad U(n) \times X \rightarrow X$$

унитарной группы $U(n)$ на единичной сфере $X \subset \mathbb{C}^n$. Рассуждения, подобные проведенным в примере (а), показывают, что действие (15) транзитивно и в точке $e_n \in X$ его группа изотропии есть просто $U(n-1)$, рассматриваемая как замкнутая подгруппа в $U(n)$ путем отождествления $\bar{\sigma} \in U(n-1)$ и

$$(16) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \bar{\sigma} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из $U(n)$. Таким образом, по теореме 3.62 многообразие X диффеоморфно однородному многообразию $U(n)/U(n-1)$. Но с помощью канонической системы координат на $\mathbb{C}^n$ (задаваемой сопряженным базисом к вещественному базису $e_1, \dots, e_n, \sqrt{-1}e_1, \dots, \sqrt{-1}e_n$ векторного пространства $\mathbb{C}^n$) устанавливается, что X диффеоморфно сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Итак, сфера S^{2n-1} диффеоморфна однородному многообразию $U(n)/U(n-1)$.

Сходными рассуждениями можно показать, что сфера S^{2n-1} также диффеоморфна однородному многообразию $SU(n)/SU(n-1)$. В частности, так как $SU(1)$ состоит только из единичной матрицы размера 1×1 , сфера S^3 диффеоморфна $SU(2)$. Таким образом, на S^3 можно задать структуру группы Ли. Можно показать, что S^1 и S^3 — единственные сферы, обладающие структурой групп Ли [25].

(с) Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ — это множество классов эквивалентности точек из $\mathbb{R}^n - \{0\}$, где точка $(a_1, \dots, a_n)$ эквивалентна точке $(b_1, \dots, b_n)$, если найдется ненулевое вещественное число c , такое, что $ca_i = b_i$ для всех $i =$

$= 1, \dots, n$. Если $\mathbb{R}P^{n-1}$ снабжается сильнейшей топологией, в которой естественная проекция

$$(17) \quad \pi: (\mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$$

непрерывна, то ограничение π на сферу S^{n-1} является двулистным накрытием пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, и легко доказать существование единственной дифференцируемой структуры на $\mathbb{R}P^{n-1}$, такой, что накрывающее отображение — локальный диффеоморфизм. Рассуждениями, сходными с проведенными в примере (а), можно показать, что $\mathbb{R}P^{n-1}$ диффеоморфно однородному пространству $SO(n)/O(n-1)$, где мы рассматриваем $O(n-1)$ как замкнутую подгруппу в $SO(n)$, отождествляя матрицу $\tilde{\sigma} \in O(n-1)$ со следующим элементом $\sigma \in SO(n)$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \tilde{\sigma} \\ & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & \det \tilde{\sigma} \end{pmatrix}$$

(d) Как множество *комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^{n-1}$ состоит из классов эквивалентности точек $\mathbb{C}^n - \{0\}$, где точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ эквивалентна точке $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, если найдется ненулевое комплексное число γ , такое, что $\gamma \alpha_i = \beta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Мы превратим $\mathbb{C}P^{n-1}$ в вещественное $2(n-1)$ -мерное многообразие следующим образом. Действие специальной унитарной группы на единичной сфере в $\mathbb{C}^n$ сохраняет описанные выше классы эквивалентности, и каждый элемент из $\mathbb{C}P^{n-1}$ имеет представителей единичной длины; таким образом, имеется естественное транзитивное действие группы $SU(n)$ на *множестве* $\mathbb{C}P^{n-1}$:

$$(18) \quad SU(n) \times \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}.$$

Подгруппа в $SU(n)$, оставляющая на месте отмеченную точку из $\mathbb{C}P^{n-1}$, заданную представителем $e_n \in \mathbb{C}^n$, совпадает просто с $U(n-1)$, которую мы рассматриваем как замкнутую подгруппу в $SU(n)$, отождествляя матрицы $\tilde{\sigma} \in U(n-1)$ и

$$\sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \tilde{\sigma} \\ & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & 1/\det \tilde{\sigma} \end{pmatrix}$$

из $SU(n)$. Следовательно, отображение

$$(19) \quad \sigma U(n-1) \mapsto \{\sigma(e_n)\},$$

где $\{\sigma(e_n)\}$ обозначает точку $\mathbb{C}P^{n-1}$, заданную представителем $\sigma(e_n)$, является корректно определенным взаимно однозначным

отображением $SU(n)/U(n-1)$ на $\mathbb{CP}^{n-1}$. Структура вещественного $2(n-1)$ -мерного многообразия на $\mathbb{CP}^{n-1}$ задается требованием, чтобы отображение (19) было диффеоморфизмом.

(е) Пусть V — вещественное d -мерное векторное пространство, и пусть $S_p(V)$ — множество всех p -реперов в V . То есть

$$(20) \quad S_p(V) = \{\tilde{w} = (w_1, \dots, w_p): \text{векторы } w_1, \dots, w_p \in V \\ \text{линейно независимы}\}.$$

Если выбрать в пространстве V базис $v_1, \dots, v_d$, то группа $GL(d; \mathbb{R})$ будет действовать на V с помощью умножения матриц. Определим действие

$$(21) \quad \eta: GL(d; \mathbb{R}) \times S_p(V) \rightarrow S_p(V), \\ \eta(\sigma, (w_1, \dots, w_p)) = (\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_p)).$$

Заметим, что для любых $\tilde{v}, \tilde{w} \in S_p(V)$ существует матрица $\sigma \in GL(d; \mathbb{R})$, такая, что $\eta(\sigma, \tilde{v}) = \tilde{w}$. Пусть теперь $\tilde{s}$ — элемент из $S_p(V)$, определяемый первыми p векторами базиса $v_1, \dots, v_d$, т. е. $\tilde{s} = (v_1, \dots, v_p)$. Пусть H — подмножество в $GL(d; \mathbb{R})$, оставляющее $\tilde{s}$ неподвижным. Тогда

$$(22) \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in GL(d; \mathbb{R}) \right\},$$

где I — единичная матрица размера $p \times p$, и H является замкнутой подгруппой в $GL(d; \mathbb{R})$. Следовательно, отображение $\sigma H \mapsto \eta(\sigma, \tilde{s})$ — это взаимно однозначное отображение однородного многообразия $GL(d; \mathbb{R})/H$ на множество $S_p(V)$. Структура dp -мерного многообразия на $S_p(V)$ задается требованием, чтобы это отображение было диффеоморфизмом. Легко проверяется, что эта структура многообразия не зависит от выбора базиса в пространстве V . Многообразие $S_p(V)$ называется *многообразием Штифеля* p -реперов в V .

(ф) Пусть снова V — вещественное d -мерное векторное пространство, и пусть $G_k(V)$ — множество всех k -мерных подпространств (k -плоскостей) пространства V . Если выбрать в V ортонормированный базис $v_1, \dots, v_d$, то ортогональная группа $O(d)$ естественно действует на V с помощью умножения матриц, а так как невырожденные линейные преобразования переводят k -мерные плоскости в k -мерные плоскости, получаем отображение

$$(23) \quad \eta: O(d) \times G_k(V) \rightarrow G_k(V).$$

Заметим, что для любых k -плоскостей P и Q найдется элемент $\sigma \in O(d)$, такой, что $\eta(\sigma, P) = Q$. Пусть теперь P_0 есть k -мерная плоскость, натянутая на первые k векторов базиса $v_1, \dots$

..., v_d , и пусть H — подмножество в $O(d)$, оставляющее P_0 неподвижной. Тогда

$$(24) \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \in O(d) : \sigma \in O(k), \tau \in O(d-k) \right\},$$

поэтому H — замкнутая подгруппа в $O(d)$, которую можно отождествить с $O(k) \times O(d-k)$. Следовательно, отображение $\sigma(O(k) \times O(d-k)) \mapsto \eta(\sigma, P_0)$ является взаимно однозначным отображением однородного многообразия $O(d)/(O(k) \times O(d-k))$ на множество $G_k(V)$. Мы превращаем $G_k(V)$ в $(d-k) \cdot k$ -мерное многообразие, требуя, чтобы это отображение было диффеоморфизмом. Можно проверить, что эта структура многообразия на $G_k(V)$ не зависит от выбора базиса в пространстве V . Многообразие $G_k(V)$ известно как *многообразие Грассмана* k -мерных плоскостей в V .

3.66. Предложение. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G . Если пространства H и G/H связны, то и G связна.

Доказательство. Предположим, что

$$(1) \quad G = U \cup V,$$

где U и V — непустые открытые подмножества в G . Тогда

$$(2) \quad G/H = \pi(U) \cup \pi(V),$$

где $\pi(U)$ и $\pi(V)$ — непустые открытые подмножества в G/H . Так как пространство G/H связно, то в нем найдется точка σH , такая, что

$$(3) \quad \sigma H \in \pi(U) \cap \pi(V).$$

Далее, из формулы (1) следует, что

$$(4) \quad \sigma H = (\sigma H \cap U) \cup (\sigma H \cap V),$$

где $\sigma H \cap U$ и $\sigma H \cap V$ являются открытыми подмножествами в σH (так как топология на H индуцированная). Согласно (3), $\sigma H \cap U$ и $\sigma H \cap V$ оба непусты, таким образом, получаем

$$(5) \quad (\sigma H \cap U) \cap (\sigma H \cap V) \neq \emptyset,$$

ибо σH гомеоморфно H и тем самым связно. Отсюда следует, что

$$(6) \quad U \cap V \neq \emptyset,$$

и этим доказана связность группы Ли G .

3.67. Теорема. Каждая из групп Ли $SO(n)$, $SU(n)$ и $U(n)$ связна при $n \geq 1$, а группа Ли $O(n)$ имеет две связные компоненты ($n \geq 1$).

Доказательство. Группы $SO(1)$ и $SU(1)$ связны, так как обе они состоят лишь из единичной матрицы размера 1×1 , а $U(1)$ связна, так как

$$U(1) = \{(\lambda): \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}.$$

Связность $SO(n)$, $SU(n)$ и $U(n)$ следует теперь из теоремы 3.66, если использовать индукцию по n и данное в разд. 3.65 представление сфер в виде однородных многообразий.

Так как каждая матрица из $O(n)$ имеет определитель ± 1 , ортогональная группа представляется в виде следующего объединения двух непересекающихся непустых связных подмножеств:

$$O(n) = SO(n) \cup \sigma SO(n), \quad \text{где } \sigma = \begin{bmatrix} -1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, группа $O(n)$ имеет две связные компоненты.

3.68. Теорема. *Группа Ли $GL(n; \mathbb{R})$ имеет две связные компоненты.*

Доказательство. Пусть $GL(n; \mathbb{R})^+$ — подмножество в $GL(n; \mathbb{R})$, состоящее из матриц с положительным определителем, а $GL(n; \mathbb{R})^-$ — подмножество, состоящее из матриц с отрицательным определителем. Подмножества $GL(n; \mathbb{R})^+$ и $GL(n; \mathbb{R})^-$ являются непересекающимися гомеоморфными между собой открытыми подмножествами в $GL(n; \mathbb{R})$, поэтому достаточно доказать связность $GL(n; \mathbb{R})^+$. Для этого покажем, что всякий элемент $GL(n; \mathbb{R})^+$ можно соединить с единичной матрицей непрерывной кривой.

Сначала докажем существование *полярного разложения* для всякого элемента $GL(n; \mathbb{R})$, т. е. покажем, что каждая матрица $\sigma \in GL(n; \mathbb{R})$ может быть представлена в виде

$$(1) \quad \sigma = PR,$$

где P — положительно определенная симметричная матрица и $R \in O(n)$. (Напомним, что у симметричной матрицы все собственные значения вещественны и что симметричная матрица *положительно определена*, если все ее собственные значения строго больше нуля.) Так как $(\sigma\sigma^t)^t = \sigma\sigma^t$, матрица $\sigma\sigma^t$ симметрична. Пусть a — собственное значение $\sigma\sigma^t$ с собственным вектором $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, согласно 3.65 (3),

$$a \langle v, v \rangle = \langle \sigma\sigma^t(v), v \rangle = \langle \sigma^t(v), \sigma^t(v) \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $a \geq 0$, и, так как матрица $\sigma\sigma^t$ невырождена, должно быть $a > 0$. Итак, $\sigma\sigma^t$ — положительно определенная симметричная матрица. Так как $\sigma\sigma^t$ симметрична, существует ортогональная матрица $\beta \in O(n)$, такая, что матрица

$$(2) \quad \beta\sigma\sigma^t\beta^t$$

диагональна (ср. упр. 22 (а)). Так как все собственные значения матрицы $\sigma\sigma^t$ положительны, из матрицы (2) можно извлечь квадратный корень

$$(3) \quad (\beta\sigma\sigma^t\beta^t)^{1/2},$$

т. е. (3) — диагональная матрица, и каждый ее диагональный элемент является арифметическим квадратным корнем из соответствующего элемента матрицы (2). Пусть

$$(4) \quad P = \beta^t (\beta\sigma\sigma^t\beta^t)^{1/2} \beta,$$

и пусть

$$(5) \quad R = P^{-1}\sigma.$$

P — положительно определенная симметричная матрица, и R ортогональна, так как из равенства (4) вытекает, что $P^2 = \sigma\sigma^t$ и, следовательно,

$$(6) \quad \begin{aligned} RR^t &= P^{-1} \sigma\sigma^t (P^{-1})^t = P^{-1} \sigma\sigma^t (P^t)^{-1} = \\ &= P^{-1} \sigma\sigma^t P^{-1} = P^{-1} P P P^{-1} = I. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma = PR$, как утверждалось формулой (1).

Если матрица σ лежит в $GL(n; \mathbb{R})^+$, то она обладает полярным разложением (1), причем теперь матрица R должна иметь положительный определитель, а следовательно, $R \in SO(n)$. Положим

$$(7) \quad P_t = tI + (1-t)P$$

при $t \in [0, 1]$. Тогда для любого t матрица P_t положительно определена, поэтому путь $t \mapsto P_t R$ является непрерывной кривой в $GL(n; \mathbb{R})^+$, соединяющей матрицы σ и R . Так как группа Ли $SO(n)$ связна и тем самым линейно связна, матрицу R можно соединить непрерывной кривой с единичной матрицей I . Таким образом, множество $GL(n; \mathbb{R})^+$ линейно связно, что завершает доказательство того, что $GL(n; \mathbb{R})$ имеет две компоненты связности.

Упражнения

1. Докажите, что связная группа Ли автоматически удовлетворяет второй аксиоме счетности, т. е. предположение о наличии счетной базы в определении связной группы Ли излишне.

2. Покажите, что примеры из разд. 3.3 являются группами Ли.
3. Покажите, что примеры из разд. 3.5 являются алгебрами Ли.
4. Дайте доказательство предложения 3.12.
5. Докажите необходимость предположения о связности в теореме 3.16.

6. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал в алгебре форм на G^c , порожденный набором $\{\omega_1, \dots, \omega_{c-d}\}$ независимых левоинвариантных 1-форм. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ есть d -мерное подпространство в алгебре Ли группы Ли G , аннулируемое формами ω_i ($i = 1, \dots, c - d$). Докажите, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ — дифференциальный идеал.

7. В этом упражнении мы намечаем доказательство теоремы 3.23.

(а) Пусть $\pi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — накрытие, и пусть $\alpha: (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — непрерывное отображение, причем Z линейно связно и локально линейно связно, и $\alpha_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_*(\pi_1(X, x_0))$. Докажите, что существует единственное непрерывное отображение $\tilde{\alpha}: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$, такое, что $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

(Набросок доказательства: Сначала докажем п. (а) для случая, когда Z — единичный квадрат, $Z = [0, 1] \times [0, 1]$, $z_0 = (0, 0)$. Тут условие на фундаментальные группы удовлетворяется тривиально, и доказательство получается разбиением квадрата на отдельные квадратики, достаточно мелкие, чтобы при отображении α они попадали в хорошо накрытые подмножества пространства Y . В качестве частного приложения отсюда вытекает, что всякий путь в Y однозначно поднимается в X , как только выбраны отмеченные точки.

В общем случае определим подъем $\tilde{\alpha}$ отображения α следующим образом. Пусть $z \in Z$, и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow Z$ — путь, соединяющий z_0 с z , т. е. $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$. Тогда $\alpha \circ \gamma$ однозначно покрывается путем $\tilde{\gamma}$ в X , таким, что $\tilde{\gamma}(0) = x_0$. Положим $\tilde{\alpha}(z) = \tilde{\gamma}(1)$. Теперь нужно использовать условие на фундаментальные группы и уже установленную однозначность подъема отображений квадрата, чтобы показать корректность определения $\tilde{\alpha}$, т. е. независимость от выбора пути γ , соединяющего z_0 и z . Наконец, нужно использовать локальную линейную связность Z для доказательства непрерывности отображения $\tilde{\alpha}$.)

(б) Линейно связное, локально линейно связное и полулокально односвязное топологическое пространство X обладает односвязным накрывающим пространством.

(Набросок доказательства: Пусть $x_0 \in X$ — отмеченная точка. Определим отношение эквивалентности на множестве всех путей в X с начальной точкой x_0 (параметр пробегает $[0, 1]$). Два таких пути γ_1 и γ_2 назовем эквивалентными, если $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ и петля $\gamma_2^{-1}\gamma_1$ в точке x_0 , получаемая прохождением пути γ_1 , а затем γ_2 в обратном направлении, стягивается к точке x_0 .

Как множество односвязное накрывающее пространство $\tilde{X}$ пространства X состоит из классов эквивалентности путей $\{\gamma\}$. Проекция $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ определяется как $\pi(\{\gamma\}) = \gamma(1)$. Пусть $\{\gamma\} \in \tilde{X}$, и пусть U — открытая окрестность $\gamma(1)$ в X . Пусть $U(\{\gamma\})$ состоит из всех элементов $\{\tau\} \in \tilde{X}$, содержащих в качестве представителя путь τ , идущий сначала вдоль γ , а затем содержащийся в окрестности U точки $\gamma(1)$. Докажите, что набор таких множеств $U(\{\gamma\})$ образует базу топологии на $\tilde{X}$, в которой $\tilde{X}$ односвязно, и отображение $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ становится накрытием.)

(с) Всякое накрытие односвязного пространства является гомеоморфизмом. (Это непосредственно следует из п. (а).)

8. Докажите, что если $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ — накрытие дифференцируемого многообразия M , то пространство $\tilde{M}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. (Достаточно доказать, что группа $\pi_1(M, m)$ не более чем счетна. Это следует из того наблюдения, что M можно покрыть не более чем счетным числом открытых множеств, каждое из которых гомеоморфно открытому шару в евклидовом пространстве.)

9. Пусть G и H — группы Ли и G связна. Докажите, что гладкое отображение $\varphi: G \rightarrow H$, переводящее единицу G в единицу H , является гомоморфизмом, если обратный образ φ^* переводит левоинвариантные формы на H в левоинвариантные формы на G . Покажите, что предположение о связности группы G необходимо. (Указание: Можно построить дифференциальный идеал на $G \times H$, как в 3.15 (5), для которого максимальное связное интегральное многообразие I , проходящее через (e, e) , является подгруппой Ли в $G \times H$. Пропустите график отображения φ через подмногообразие I и покажите, что естественный накрывающий гомоморфизм $I \rightarrow G$ взаимно однозначен.)

10. Докажите, что матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ не равна e^A ни для какой $A \in \mathfrak{gl}(2; \mathbb{R})$.

11. Пусть $\sigma(t)$ и $\beta(t)$ — гладкие кривые на группе Ли G , такие, что $\sigma(0) = \beta(0) = e$, и пусть $\alpha(t) = \sigma(t)\beta(t)$. Докажите, что

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\sigma}(0) + \dot{\beta}(0).$$

(Указание: Рассмотрите групповое умножение $\eta: G \times G \rightarrow G$, т. е. $\eta(\gamma, \tau) = \gamma\tau$. Пусть $v, w \in G_e$; покажите, что

$$d\eta(v, w) = d\eta((v, 0) + (0, w)) = v + w.)$$

12. Пусть G — связная группа Ли, и пусть $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм с дискретным ядром. Докажите, что это ядро содержится в центре G . Используйте этот факт для доказательства того, что фундаментальная группа группы Ли абелева.

13. Докажите, что пример 3.5 (d) — это единственная, с точностью до изоморфизма, двумерная неабелева алгебра Ли. Выведите отсюда, что пример 3.3 (h) является, с точностью до изоморфизма, единственной односвязной двумерной неабелевой группой Ли.

14. Покажите, что существуют матрицы $A, B \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$, такие, что $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

15. Докажите сюръективность экспоненциального отображения для группы Ли $GL(n; \mathbb{C})$. (Схема доказательства: сначала, используя жорданову нормальную форму, сведите задачу к доказательству того, что каждая жорданова клетка (матрица с одной и той же константой λ на диагонали, единицами над каждым диагональным элементом и нулями на остальных местах) в $GL(j; \mathbb{C})$ является экспонентой некоторого элемента из $\mathfrak{gl}(j; \mathbb{C})$. Пусть A — жорданова клетка. Запишем A в виде $(\lambda I) \cdot N$, где на диагонали у N стоят единицы. Докажите, что $\lambda I = e^{A_1}$ и $N = e^{A_2}$, где $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Для нахождения A_2 заметим, что, так как достаточно большие степени разности $I - N$ обращаются в нуль, матрица N имеет логарифм, а именно

$$\ln N = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(I - N)^k}{k}.$$

Используйте формальные степенные ряды для доказательства того, что $e^{\ln N} = N$.)

16. Пусть G — группа Ли. Векторное поле Y на G *правоинвариантно*, если оно r_σ -связано с собой для всех $\sigma \in G$. Докажите, что множество правоинвариантных векторных полей на G образует алгебру Ли относительно скобок Ли, естественно изоморфную как векторное пространство касательному пространству G_e . Пусть $\varphi: G \rightarrow G$ — диффеоморфизм, определяемый формулой $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$. Докажите, что если X — левоинвариантное векторное поле на G , то $d\varphi(X)$ — правоинвариантное векторное поле, равное в единице $-X(e)$. Докажите, что отображение $X \mapsto d\varphi(X)$ задает изоморфизм между алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей на G и алгеброй Ли правоинвариантных векторных полей на G .

17. Найдите пример группы Ли G с подгруппой Ли A , которая была бы незамкнута в G .

18. Пусть G есть n -мерная абелева связная группа Ли. Докажите, что G изоморфна $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$ для некоторого k , где T^k —

это k -мерный тор. Сначала докажите, что с точностью до изоморфизма $\mathbb{R}^n$ является единственной односвязной n -мерной абелевой группой Ли. Далее, покажите, что если D — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$, то либо $D = \{0\}$, либо существует целое k , $1 \leq k \leq n$, и k линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_k$ в $\mathbb{R}^n$, порождающих D . Для доказательства этого предположим, что $D \neq \{0\}$, и пусть k — наименьшее целое, такое, что D содержится в k -мерном подпространстве $V \subset \mathbb{R}^n$. Найдите в V базис $w_1, \dots, w_k$, такой, что $w_i \in D$. Пусть

$$A_i = \left\{ \sum_{j=1}^i r_j w_j : 0 \leq r_j \leq 1, r_i > 0 \right\}$$

для $i = 1, \dots, k$. Выберите в качестве v_i элемент из $A_i \cap D$ с наименьшим возможным коэффициентом r_i . Тогда $\{v_1, \dots, v_k\}$ будет линейно независимым набором, порождающим D .

19. Докажите теорему 3.56.

20. Докажите, что группа автоморфизмов связной группы Ли сама является группой Ли. (Схема доказательства: пусть $\tilde{G}$ — односвязная накрывающая группа группы Ли G , и пусть π — накрывающий гомоморфизм. Пусть $D = \text{Ker } \pi$. Из п. 3.57 (b) известно, что группа $A(\tilde{G})$ автоморфизмов $\tilde{G}$ является группой Ли. Покажите, что группа автоморфизмов G естественно изоморфна (замкнутой) подгруппе в $A(\tilde{G})$, состоящей из всех автоморфизмов $\tilde{G}$, переводящих D в себя.)

21. Докажите, что $U(n)$ диффеоморфна $S^1 \times SU(n)$.

22. (a) «Верхнетреугольными» рассуждениями вроде тех, которые следуют за формулой 3.35 (6), но использующими теперь единичные собственные векторы и ортогональные дополнения, покажите, что для любой эрмитовой матрицы A (A комплексная и $\bar{A} = A^t$) существует унитарная матрица B , такая, что BAB^{-1} диагональна. Сходными рассуждениями покажите, что для вещественной симметричной матрицы A ($A^t = A$) существует вещественная ортогональная матрица B , такая, что BAB^{-1} диагональна.

(b) Пользуясь п. (a) и формулой 3.46 (7), докажите, что экспоненциальное отображение взаимно однозначно отображает эрмитовы матрицы на множество положительно определенных эрмитовых матриц (у которых все собственные значения положительны). Выведите также, что экспоненциальное отображение взаимно однозначно отображает вещественные симметричные матрицы на множество положительно определенных симметричных матриц.

23. Используйте п. (b) упр. 22 для доказательства единственности полярного разложения 3.68(1). (*Указание:* если $\sigma = PR = P_1R_1$, докажите сначала, что $P^2 = P_1^2$, а затем примените к P и P_1 п. (b) упр. 22.)

24. Докажите, что любая матрица $\sigma \in GL(n; \mathbb{C})$ может быть единственным образом записана в виде произведения $\sigma = PR$, где P — положительно определенная эрмитова матрица, а R — унитарная матрица.

25. Докажите, что группа $GL(n; \mathbb{C})$ связана.

26. Дополните необходимыми деталями пп. 3.65 (b) и (c).

Интегрирование на многообразиях

В этой главе будет рассматриваться интегрирование p -форм по дифференцируемым сингулярным p -цепям в многообразиях размерности n и интегрирование n -форм по регулярным областям в ориентированных многообразиях размерности n . Для каждой из этих ситуаций будет доказан вариант теоремы Стокса. Эта теорема обобщает основную теорему математического анализа и, без сомнения, является центральным результатом всего изложения. Помимо этого мы рассмотрим интегрирование на римановых многообразиях и группах Ли. Наконец, мы введем группы когомологий де Рама и докажем лемму Пуанкаре, утверждающую, что когомологии де Рама евклидова пространства тривиальны. Эта лемма — ключ к теореме де Рама, формулировка которой приводится в конце этой главы, а доказательство отложено до следующей гл. 5.

Ориентация

4.1. Определения. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n . Понятие ориентации на V было введено в упр. 13 гл. 2. Напомним, что внешняя степень $\Lambda_n(V)$ — это одномерное пространство; следовательно, $\Lambda_n(V) - \{0\}$ состоит из двух связных компонент. *Ориентация* на V — это выбор связной компоненты в $\Lambda_n(V) - \{0\}$.

Пусть теперь M — связное гладкое многообразие размерности n . Назовем M *ориентируемым*, если возможно выбрать согласованную систему ориентаций на M_m^* для каждой точки $m \in M$. Более точно, пусть O обозначает нулевое сечение расслоения $\Lambda_n^*(M)$, т. е.

$$O = \bigcup_{m \in M} \{0 \in \Lambda_n^*(M_m)\}.$$

Поскольку каждый слой $\Lambda_n^*(M_m) - \{0\}$ состоит из двух связных компонент, то и $\Lambda_n^*(M) - O$ имеет, самое большее, две связные компоненты. Мы говорим, что M *ориентируемо*, если $\Lambda_n^*(M) - O$ имеет ровно две связные компоненты, и в этом случае *ориентация на M* — это выбор одной из этих компонент. Несвязное многообразие M называется ориентируемым, если ори-

ентируема каждая его связная компонента; ориентация многообразия — это выбор ориентации на каждой компоненте. Пусть M ориентированно и $v_1, \dots, v_n$ — базис в M_m , сопряженный базис обозначим через $\delta_1, \dots, \delta_n$. Говорят, что (упорядоченный) базис $v_1, \dots, v_n$ *ориентирован*, если $\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_n$ принадлежит ориентации.

Пусть M и N — ориентируемые многообразия размерности n и $\psi: M \rightarrow N$ — дифференцируемое отображение. Скажем, что ψ *сохраняет ориентацию*, если индуцированное отображение $\psi^*: \Lambda_n^*(N) \rightarrow \Lambda_n^*(M)$ отображает связную компоненту из $\Lambda_n^*(N) — O$, определяющую ориентацию N , в связную компоненту из $\Lambda_n^*(M) — O$, определяющую ориентацию многообразия M . Иными словами, ψ сохраняет ориентацию, если при $d\psi$ ориентированный базис касательного пространства к M переходит в ориентированный базис касательного пространства к N .

4.2. Предложение. Пусть M — гладкое многообразие размерности n ; следующие условия эквивалентны:

(а) M ориентируемо;

(б) существует набор $\Phi = \{(V, \psi)\}$ систем координат на M , такой, что

$$(1) \quad M = \bigcup_{(V, \psi) \in \Phi} V \text{ и } \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) > 0 \text{ на } U \cap V,$$

если $(U, x_1, \dots, x_n)$ и $(V, y_1, \dots, y_n)$ принадлежат Φ ;

(с) на M существует не обращающаяся в нуль n -форма.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что M связно. Докажем импликации (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (с) $\Rightarrow$ (а). Пусть выполнено (а), т. е. M ориентируемо; выберем одну из ориентаций, иными словами, фиксируем компоненту, скажем, Λ в $\Lambda_n^*(M) — O$. Отметим, что $\Lambda \cap \Lambda_n(M_m^*)$ для каждой точки $m \in M$ в точности совпадает с одной из двух компонент в $\Lambda_n(M_m^*) — \{0\}$. Пусть теперь семейство Φ состоит из таких систем координат $(V, y_1, \dots, y_n)$ на M , что значения отображения $V \rightarrow \Lambda_n^*(M)$, задаваемого формулой

$$(2) \quad m \mapsto (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)(m),$$

лежат в Λ . Для любых двух систем координат $(U, x_1, \dots, x_n)$ и $(V, y_1, \dots, y_n)$ на M при $m \in U \cap V$

$$(3) \quad (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(m) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Big|_m \right) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)(m).$$

Если обе системы координат взяты из Φ , то

$$\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Big|_m \right) > 0$$

для каждой точки $m \in U \cap V$. Этим доказано, что условие (b) следует из (a).

Пусть выполнено (b). Выберем разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное покрытию M координатными окрестностями из Φ , т. е. φ_i подчинено $(V_i, x_1^i, \dots, x_n^i)$. Тогда определим n -форму на M формулой

$$(4) \quad \omega = \sum_i \varphi_i dx_1^i \wedge \dots \wedge dx_n^i,$$

причем $\varphi_i dx_1^i \wedge \dots \wedge dx_n^i$ продолжается нулем вне V_i . Форма ω нигде не обращается в нуль, потому что $\omega(m)$ в любой точке m — конечная сумма с положительными коэффициентами элементов одной компоненты из $\Lambda_n(M_m^*) - \{0\}$. Поэтому условие (c) следует из (b).

Наконец, пусть ω — не обращающаяся в нуль n -форма на M . Положим

$$\Lambda^+ = \bigcup_{m \in M} \{a\omega(m): a \in \mathbb{R}, a > 0\},$$

$$\Lambda^- = \bigcup_{m \in M} \{a\omega(m): a \in \mathbb{R}, a < 0\}.$$

Тогда $\Lambda_n^*(M) - O$ представляет собой объединение непересекающихся открытых подмножеств Λ^+ и Λ^- , поэтому $\Lambda_n^*(M) - O$ несвязно и M ориентируемо.

4.3. Примеры

(a) Каждая группа Ли ориентируема, поскольку для базиса $\omega_1, \dots, \omega_n$ левоинвариантных 1-форм на ней n -форма $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ нигде не обращается в нуль.

(b) *Стандартная ориентация* на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ задается d -формой $dr_1 \wedge \dots \wedge dr_d$.

(c) Пусть X — многообразие размерности d и существует погружение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$. *Нормальное векторное поле* вдоль (X, f) — это гладкое отображение $N: X \rightarrow T(\mathbb{R}^{d+1})$, такое, что при любом $p \in X$ вектор $N(p)$ лежит в $(\mathbb{R}^{d+1})_{f(p)}$ и ортогонален подпространству $df(X_p) \subset (\mathbb{R}^{d+1})_{f(p)}$. В этом случае многообразие X ориентируемо тогда и только тогда, когда существует не обращающаяся в нуль нормальное векторное поле вдоль (X, f) . (См. упр. 1.)

(d) Следствие предыдущего примера: сфера S^n ориентируема при каждом $n \geq 1$.

(e) Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо, если и только если n нечетно. (См. упр. 2.)

Интегрирование на многообразиях

4.4. Интегрирование в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории интегрирования в $\mathbb{R}^n$. Нас устраивает интеграл по Риману, поскольку мы будем интегрировать непрерывные (преимущественно гладкие) функции по хорошим (например, полиэдральным) подмножествам из $\mathbb{R}^n$. Необходимо напомнить теорему о замене переменных, различные варианты и доказательства которой имеются в [6], [18] или [29]. Нам достаточно следующего варианта этой теоремы. Пусть φ — диффеоморфизм ограниченного открытого подмножества D в $\mathbb{R}^n$ на ограниченное открытое множество $\varphi(D)$. Обозначим через $J\varphi$ определитель матрицы Якоби отображения φ :

$$J\varphi = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_j} \right).$$

Пусть f — ограниченная непрерывная функция на $\varphi(D)$ и A — хорошее подмножество в D . (В большинстве приложений A можно считать полиэдральным. Вообще говоря, для интеграла Римана хорошим считается измеримое по Жордану множество.) Тогда

$$(1) \quad \int_{\varphi(A)} f = \int_A f \circ \varphi |J\varphi|.$$

4.5. Интегрирование n -форм в $\mathbb{R}^n$. Как обычно, $r_1, \dots, r_n$ обозначает стандартную систему координат в $\mathbb{R}^n$. Стандартная ориентация определяется n -формой $dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$. Пусть теперь ω — некоторая n -форма на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. На D имеется однозначно определенная функция f , такая, что $\omega = f dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$. Для $A \subset D$ положим

$$(1) \quad \int_A \omega = \int_A f,$$

если правая часть существует. Мы можем переписать формулу замены переменных в терминах дифференциальных форм. Пусть φ , D и A такие же, как в разд. 4.4, и ω обозначает n -форму на $\varphi(D)$. Тогда

$$(2) \quad \int_{\varphi(A)} \omega = \pm \int_A \varphi^*(\omega),$$

где знак «+» соответствует сохраняющему ориентацию отображению φ , а знак «—» отвечает φ , изменяющему ориентацию.

4.6. Интегрирование по цепям. Вначале мы рассмотрим случай интегрирования p -форм по дифференцируемым сингулярным p -цепям в n -многообразии.

При каждом $p \geq 1$ положим

$$(1) \quad \Delta^p = \left\{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p: \sum_{i=1}^p a_i \leq 1 \text{ и все } a_i \geq 0 \right\}.$$

Δ^p называется *стандартным p -симплексом в $\mathbb{R}^p$* . При $p = 0$ пусть Δ^0 будет одноточечным пространством $\{0\}$; Δ^0 называется *стандартным 0-симплексом*. *Дифференцируемым сингулярным p -симплексом σ в многообразии M* называется отображение $\sigma: \Delta^p \rightarrow M$, которое можно продолжить до дифференцируемого отображения (класса C^∞) окрестности симплекса Δ^p в $\mathbb{R}^p$ в многообразии M . В этой главе мы будем называть σ просто p -симплексом в M . (Позднее, в гл. 5 нам встретятся непрерывные сингулярные симплексы, и, чтобы различать эти понятия, мы будем снова употреблять термин «дифференцируемый».) Отображение одноточечного пространства $\{0\}$ в M — это 0-симплекс. Конечная линейная комбинация $c = \sum a_i \sigma_i$ p -симплексов σ_i в M , где числа a_i принадлежат $\mathbb{R}$, называется *p -цепью в M* (с вещественными коэффициентами).

Для каждого $p \geq 0$ следующим образом определим набор отображений $k_i^p: \Delta^p \rightarrow \Delta^{p+1}$ при $0 \leq i \leq p+1$:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{для } p = 0 & k_0^0(0) = 1 \text{ и } k_1^0(0) = 0, \\ \text{для } p \geq 1 & \begin{cases} k_0^p(a_1, \dots, a_p) = \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_p\right) \text{ и} \\ k_i^p(a_1, \dots, a_p) = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_p) \\ \hspace{15em} (1 \leq i \leq p+1). \end{cases} \end{cases}$$

Назовем $(p-1)$ -симплекс

$$(3) \quad \sigma^i = \sigma \circ k_i^{p-1},$$

i -й *гранью* p -симплекса σ ($p \geq 1$) в M , $0 \leq i \leq p$, а $(p-1)$ -цепь

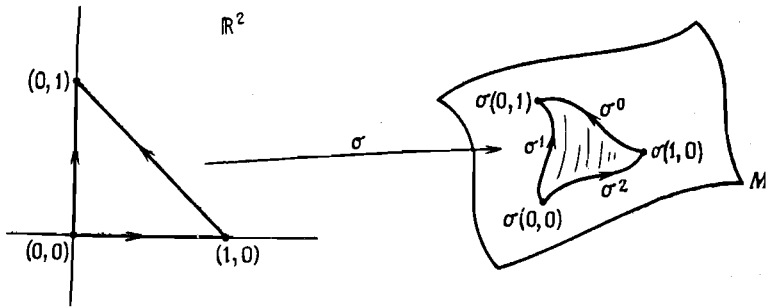
$$(4) \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^i$$

— *границей* σ . Продолжим операторы перехода к границам по линейности на цепи. Обратите внимание на использование верх-

них индексов для обозначения граней. Так, граница p -цепи

$$\sum_{j=1}^k a_j \sigma_j \text{ есть}$$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^k (-1)^i a_j \sigma_j^i.$$



Мы утверждаем, что

$$(5) \quad k_i^{p+1} \circ k_j^p = k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p \quad (p \geq 0; i \leq j).$$

Для $p = 0$ проверим все три возможных случая отдельно. При $p \geq 1$ заметим, что обе части равенства (5) задают следующие отображения:

$$(6) \quad \begin{aligned} &\text{для } 1 \leq i < j \quad (a_1, \dots, a_p) \mapsto \\ &\quad \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_{j-1}, 0, a_j, \dots, a_p), \\ &\text{для } 1 \leq i = j \quad (a_1, \dots, a_p) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, 0, a_i, \dots, a_p), \\ &\text{для } 0 = i < j \quad (a_1, \dots, a_p) \mapsto \\ &\quad \mapsto \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_{j-1}, 0, a_j, \dots, a_p \right), \\ &\text{для } 0 = i = j \quad (a_1, \dots, a_p) \mapsto \left(0, 1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_p \right). \end{aligned}$$

Из соотношений (5), (3) и (4) вытекает, что

$$(7) \quad \partial \circ \partial = 0,$$

т. е. граница границы цепи всегда равна нулю.

Пусть σ обозначает p -симплекс в M , а ω есть p -форма, определенная на некоторой окрестности образа этого симплекса. В большинстве приложений речь идет о гладких формах, но для того

чтобы дать следующее определение, достаточно предполагать лишь *непрерывность* ω . Прежде всего, если $p = 0$, то 0-симплекс состоит из единственной точки в M , а 0-форма есть просто функция. В этом случае мы определим интеграл функции ω по 0-симплексу как ее значение в точке σ ($0 \in M$):

$$(8) \quad \int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma(0)).$$

При $p \geq 1$, поскольку σ гладко продолжается на окрестность симплекса Δ^p в $\mathbb{R}^p$, можно рассмотреть индуцированную форму $\sigma^*(\omega)$ на окрестности симплекса Δ^p . В этом случае мы определим интеграл p -формы ω по p -симплексу σ формулой

$$(9) \quad \int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^p} \sigma^*(\omega).$$

Распространим операцию интегрирования на цепи по линейности, т. е. для $c = \sum a_i \sigma_i$ положим

$$(10) \quad \int_c \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Возможно, важнейшей теоремой теории интегрирования на многообразиях является теорема Стокса — обобщение основной теоремы математического анализа. В нашем случае основная теорема утверждает, что для гладкой функции F на вещественной прямой и одномерного симплекса на этой прямой

$$(11) \quad \int_{\partial\sigma} F = \int_{\sigma} dF.$$

Мы сформулируем два варианта теоремы Стокса, первый — в терминах форм и цепей.

4.7. Теорема Стокса I. Пусть заданы p -цепь ($p \geq 1$) в гладком многообразии M и гладкая $(p-1)$ -форма ω , определенная в окрестности образа цепи c . Тогда

$$(1) \quad \int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда p -цепь c состоит из единственного p -симплекса σ . Мы должны показать, что

$$(2) \quad \int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Непосредственно из определений вытекает, что равенство (2) равносильно равенствам

$$(3) \quad \int_{\Delta^p} d(\sigma^*(\omega)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (\sigma^i)^*(\omega) = \\ = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (k_i^{p-1})^* \circ \sigma^*(\omega).$$

Заметим, что случай $p = 1$ непосредственно сводится к основной теореме математического анализа:

$$(4) \quad \omega(\sigma(1)) - \omega(\sigma(0)) = \int_{\Delta^1} \frac{d}{dr} (\omega \circ \sigma) dr.$$

Предположим поэтому, что $p \geq 2$. Тогда $(p-1)$ -форму $\sigma^*(\omega)$ можно представить так:

$$(5) \quad \sigma^*(\omega) = \sum_{j=1}^p a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_j} \wedge \dots \wedge dr_p,$$

где «крышка» означает, что соответствующий член должен быть опущен, а коэффициенты a_j являются гладкими функциями в окрестности симплекса Δ^p в $\mathbb{R}^p$. В силу линейности интеграла можно ограничиться рассмотрением частного случая, когда $\sigma^*(\omega)$ сводится к $a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_j} \wedge \dots \wedge dr_p$. Тогда левая часть равенства (3) принимает вид

$$(6) \quad (-1)^{i-1} \int_{\Delta^p} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p.$$

Для вычисления правой части (3) заметим, что при $1 \leq i \leq p$

$$(7) \quad (k_i^{p-1})^*(r_j) = \begin{cases} r_j & (1 \leq j \leq i-1), \\ 0 & (j=i), \\ r_{j-1} & (i+1 \leq j \leq p) \end{cases}$$

и

$$(8) \quad (k_0^{p-1})^*(r_j) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i & (j=1), \\ r_{j-1} & (1 < j \leq p). \end{cases}$$

Применяя последние выражения к правой части (3), получаем

$$(9) \quad \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (k_i^{p-1})^*(a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dr_j} \wedge \dots \wedge dr_p) =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{p-1}} a_j \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_1, \dots, r_{p-1} \right) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1} + \\
&\quad + (-1)^j \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 0, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1}.
\end{aligned}$$

Мы собираемся воспользоваться формулой замены переменных для преобразования правой части в (9). Определим диффеоморфизм φ_j пространства $\mathbb{R}^{p-1}$ формулой

$$(10) \quad \varphi_j(r_1, \dots, r_{p-1}) = \begin{cases} (r_1, \dots, r_{p-1}) & (j=1), \\ \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_2, \dots, r_{p-1} \right) & (j=2), \\ \left(r_2, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1} \right) & (3 \leq j \leq p). \end{cases}$$

Тогда $\varphi_j(\Delta^{p-1}) = \Delta^{p-1}$ и $|J\varphi_j| = 1$, поэтому по формуле 4.4 (1) первое слагаемое правой части (9) совпадает с

$$(11) \quad (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{p-1}} a_j \left(r_1, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1} \right) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1}.$$

В силу формул (3), (6), (9) и (11) легко видеть, что доказательство свелось к проверке равенства

$$\begin{aligned}
(12) \quad &\int_{\Delta^p} \frac{\partial a_j}{\partial r_j} dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p = \\
&= \int_{\Delta^{p-1}} a_j \left(r_1, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1} \right) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1} - \\
&\quad - \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 0, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1}.
\end{aligned}$$

Но это не что иное, как вычисление интеграла от $\partial a_j / \partial r_j$ по Δ^p с использованием основной теоремы математического анализа.

4.8. Интегрирование по ориентированному многообразию.

Здесь M обозначает ориентированное многообразие размерности n .

Подмножество D в M называется *регулярной областью*, если для каждой точки $m \in M$ выполняется одно из условий:

(а) точка m обладает открытой окрестностью, содержащейся в $M - D$,

(б) точка m обладает открытой окрестностью, содержащейся в D ,

(с) существует система координат (U, φ) с началом в m , такая, что $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap H^n$, где H^n — полупространство в $\mathbb{R}^n$, определенное условием $r_n \geq 0$.

Точки из множества D , удовлетворяющие (б), называются его *внутренними* точками и составляют его внутренность $\text{Int}(D)$. Точки, удовлетворяющие условию (с), называются *граничными* точками множества D и составляют его границу ∂D . Ограничения систем координат типа (с) на ∂D задают на ∂D структуру гладкого многообразия, превращая его в гладкое подмногообразие в M размерности $n - 1$.

Пусть $m \in \partial D$ и $v \in M_m$. Назовем v *вектором внешней нормали* к D , если каждая гладкая кривая $\alpha(t)$ в M с $\dot{\alpha}(0) = v$ для достаточно малых t не пересекается с D . Ориентация на M индуцирует ориентацию на ∂D следующим образом. Пусть v — вектор внешней нормали к ∂D в точке m , а $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ — базис касательного пространства $(\partial D)_m$. Будем считать, что базис $v_1, \dots, v_{n-1}$ ориентирован в $(\partial D)_m$, если и только если $v, v_1, \dots, v_{n-1}$ — ориентированный базис в M_m . Нетрудно проверить, что это определение не зависит от выбора внешней нормали и что оно задает ориентацию на ∂D в смысле разд. 4.1.

Итак, пусть заданы регулярная область D в M и n -форма $(n = \dim M)$ ω с компактным носителем. Отметим, что D может совпадать с M . Как и в разд. 4.6, достаточно требовать лишь *непрерывности* формы ω . Мы хотим определить интеграл от ω по D ; для этого мы используем разбиение единицы, чтобы свести носитель формы ω к n -симплексам в M и затем интегрировать, используя формулу 4.6 (9).

Симплекс σ размерности n в M назовем *регулярным*, если он продолжается до диффеоморфизма окрестности симплекса Δ^n . Говоря о регулярных n -симплексах, мы всегда будем подразумевать, что такое продолжение уже задано. *Регулярный n -симплекс ориентирован*, если он сохраняет ориентацию. (Мы всегда рассматриваем стандартную ориентацию на $\mathbb{R}^n$.)

Для данной регулярной области D мы будем рассматривать лишь те ориентированные регулярные n -симплексы, которые удовлетворяют одному из условий

(а) $\sigma(\Delta^n) \subset \text{Int}(D)$.

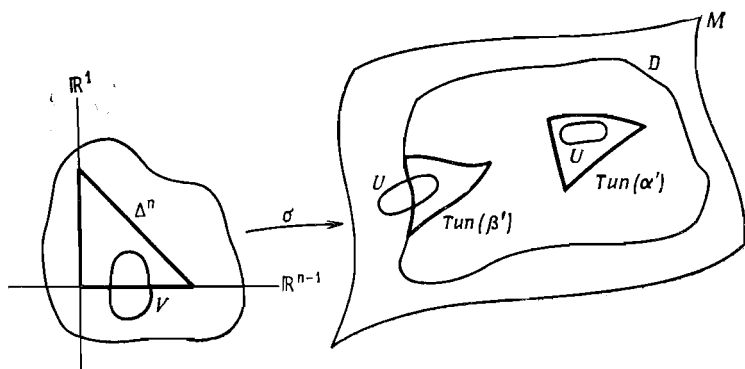
(б) $\sigma(\Delta^n) \subset D$ и $\sigma(\Delta^n) \cap \partial D = \sigma^n(\Delta^{n-1})$;

т. е. в точности n -я грань симплекса σ лежит в границе D .

Выберем покрытие области D открытыми множествами U двух следующих типов:

(α') U лежит во внутренности ориентированного регулярного n -симплекса σ типа (α),

(β') U совпадает с образом $\sigma(V)$ открытого множества $V \subset \subset \mathbb{R}^n$ для ориентированного регулярного n -симплекса σ типа (β), причем V является окрестностью некоторой точки в n -й грани симплекса Δ^n и пересекается с границей этого симплекса только по этой грани, а образ $\sigma(V)$ содержится в $\sigma(\Delta^n) \cup (M - D)$.



Так как пересечение $\text{supp } \omega \cap D$ компактно, у него имеется конечное покрытие открытыми множествами $U_1, \dots, U_h$ типа (α') или (β'). Обозначим соответствующие ориентированные регулярные n -симплексы через $\sigma_1, \dots, \sigma_h$. Пусть $U = M - (\text{supp } \omega \cap D)$ и $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_h$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $U, U_1, \dots, U_h$ многообразия M . Определим интеграл формы ω по D формулой

$$(1) \quad \int_D \omega = \sum_{i=1}^h \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega.$$

Надо проверить, что определение (1) не зависит от покрытия и разбиения единицы. Пусть $V, V_1, \dots, V_l$ и $\psi, \psi_1, \dots, \psi_l$ — другое покрытие и соответствующее разбиение единицы, отвечающие ориентированным регулярным n -симплексам τ_j . На множестве $\text{supp } \omega \cap D$ сумма $\sum_{j=1}^l \psi_j$ равна 1, поскольку ψ на нем равно нулю.

Поэтому

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \sum_{j=1}^l \psi_j \varphi_i \omega = \sum_{i,j} \int_{\sigma_i} \psi_j \varphi_i \omega.$$

Аналогично

$$(3) \quad \sum_{j=1}^l \int_{\tau_j} \psi_j \omega = \sum_{i,j} \int_{\tau_j} \psi_j \varphi_i \omega.$$

Теперь, поскольку $\sigma_i^{-1} \circ \tau_j$ является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на своей открытой (возможно, пустой) области определения и поскольку

$$(\text{supp } \psi_j \varphi_i \omega) \cap \sigma_i(\Delta^n) = (\text{supp } \psi_j \varphi_i \omega) \cap \tau_j(\Delta^n),$$

из формулы замены переменных 4.5 (2) следует

$$(4) \quad \int_{\sigma_i} \psi_j \varphi_i \omega = \int_{\Delta^n} \sigma_i^* (\psi_j \varphi_i \omega) = \int_{\Delta^n} (\sigma_i^{-1} \circ \tau_j)^* [\sigma_i^* (\psi_j \varphi_i \omega)] = \\ = \int_{\Delta^n} \tau_j^* (\psi_j \varphi_i \omega) = \int_{\tau_j} \psi_j \varphi_i \omega.$$

Используя (2), (3) и (4), получаем, что $\int_D \omega$ корректно определен и не зависит от выбора покрытия и разбиения единицы.

Отметим, что для диффеоморфизма γ многообразия M на себя

$$(5) \quad \int_{\gamma(D)} \omega = \pm \int_D \gamma^*(\omega),$$

где принято то же соглашение о знаках, что и в 4.5 (2).

Теперь у нас имеется все необходимое для формулировки и доказательства второго варианта теоремы Стокса.

4.9. Теорема Стокса II. Пусть D — регулярная область в ориентированном n -мерном многообразии M и ω — гладкая $(n-1)$ -форма с компактным носителем. Тогда

$$(1) \quad \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Доказательство. Выберем $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, как в 4.8 (1), для $(\text{supp } \omega) \cap D$. Поскольку $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$ в окрестности множества $(\text{supp } \omega) \cap D$, то в этой окрестности $d(\sum \varphi_i) = 0$. Поэтому на окрестности $(\text{supp } \omega) \cap D$ мы имеем

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k d(\varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^k d\varphi_i \wedge \omega + \sum_{i=1}^k \varphi_i d\omega = d\omega.$$

Для n -симплекса σ_i типа 4.8 (α) получаем

$$(3) \quad \int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = 0 = \int_{\partial D} \varphi_i \omega,$$

поскольку $\text{supp } \varphi_i \omega \subset \text{Int } \sigma_i (\Delta^n) \subset \text{Int } D$. С другой стороны, предположим, что σ_i — симплекс типа 4.8 (β). В этом случае $\varphi_i \omega$ равно нулю на границе σ_i , за исключением, быть может, внутренних точек n -й грани σ_i' . Тогда σ_i' есть сохраняющий (если n четно) или обращающий (если n нечетно) ориентацию регулярный $(n-1)$ -симплекс в ∂D . Отсюда следует, что

$$(4) \quad \int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = (-1)^n \int_{\sigma_i^n} \varphi_i \omega = (-1)^n (-1)^n \int_{\partial D} \varphi_i \omega = \int_{\partial D} \varphi_i \omega.$$

Из первого варианта теоремы Стокса и формул (2), (3), (4) вытекает, что

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_D d\omega &= \sum_i \int_D d(\varphi_i \omega) = \sum_i \int_{\sigma_i} d(\varphi_i \omega) = \\ &= \sum_i \int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = \sum_i \int_{\partial D} \varphi_i \omega = \int_{\partial D} \omega. \end{aligned}$$

Следствие. Пусть ω — гладкая $(n-1)$ -форма на компактном ориентированном n -мерном многообразии M . Тогда

$$\int_M d\omega = 0.$$

4.10. Интегрирование на римановом многообразии. Пусть M — риманово многообразие размерности n . Это означает, что M — гладкое многообразие и для каждой точки $m \in M$ в касательном пространстве M_m задано скалярное произведение, такое, что для гладких векторных полей X и Y на M отображение $m \mapsto \langle X, Y \rangle_m$ является гладкой на M функцией. Вопрос существования римановой метрики на гладком многообразии рассматривается в упр. 23 гл. 1.

Для данной точки $m \in M$ можно выбрать ее окрестность U и набор гладких векторных полей $e_1, \dots, e_n$ на U , ортонормированный в том смысле, что в каждой точке соответствующие векторы образуют ортонормированный базис касательного пространства. Это можно сделать методом ортогонализации по Граму—Шмидту, отправляясь от произвольной системы координат $(U, x_1, \dots, x_n)$ и применяя процедуру ортогонализации к полям $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ согласованно во всех точках. Такой ортонормированный набор полей называется *локальным ортонормированным реперным полем*.

Поскольку скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ невырожденно, оно индуцирует (см. разд. 2.7) естественный изоморфизм между M_m и M_m^* , а именно v переходит в φ_v , где

$$(1) \quad \varphi_v(\omega) = \langle v, \omega \rangle_m.$$

С помощью этого изоморфизма M_m^* наделяется скалярным произведением. Заметим, что сопряженный базис к ортонормированному базису в M_m образует ортонормированный базис в M_m^* .

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — локальное ортонормированное реперное поле на U и $\omega_1, \dots, \omega_n$ — сопряженные 1-формы, т. е.

$$(2) \quad \omega_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Формы $\omega_1, \dots, \omega_n$ образуют *локальное ортонормированное кореперное поле на U* . Два ортонормированных кореперных поля $\omega_1, \dots, \omega_n$ и $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ на U и U' соответственно связаны на $U \cap U'$ равенством

$$(3) \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \det(A) \omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_n.$$

Здесь A — ортогональная матрица, составленная из гладких функций на $U \cap U'$. Поэтому

$$(4) \quad \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \pm \omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_n.$$

Предположим, что M ориентированно. Локальное кореперное поле на U называется *ориентированным*, если $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$ принадлежит ориентации в каждой точке из U . Выберем ориентированное локальное ортонормированное кореперное поле в окрестности каждой точки многообразия M ; все они оказываются согласованными на пересечениях и поэтому задают нигде не обращающуюся в нуль n -форму на M . Эта форма называется *формой объема* ориентированного риманова многообразия M . Интеграл этой формы по M называется *объемом* многообразия M .

В упр. 13 гл. 2 был введен оператор $*$ на $\Lambda(V)$ для ориентированного пространства V со скалярным произведением. Поэтому для каждой точки m риманова многообразия M имеется оператор $*$, определенный на $\Lambda(M_m^*)$. Легко видеть, что $*$ переводит гладкие формы в гладкие, поэтому определен линейный оператор

$$(5) \quad *: E^p(M) \rightarrow E^{n-p}(M),$$

который, согласно упр. 13 гл. 2, удовлетворяет тождеству

$$(6) \quad ** = (-1)^{p(n-p)}.$$

Нам уже известно (см. разд. 4.8), как интегрировать n -формы на ориентированном n -мерном многообразии. В случае ориентированного риманова многообразия мы определим интеграл по M от непрерывной функции f с компактным носителем с помощью интеграла от (непрерывной) n -формы $*f = f\omega$. Иными словами,

$$(7) \quad \int_M f = \int_M *f = \int_M f\omega.$$

В действительности можно определить $\int_M f$, не используя ориентации. Если M — (не обязательно ориентированное) риманово многообразие, то определим интеграл от непрерывной функции с компактным носителем следующим образом. Выберем покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M множествами $U_\alpha = \sigma_\alpha(\text{Int } \Delta^n)$ для регулярных n -симплексов σ_α , и пусть $\omega_1^\alpha, \dots, \omega_n^\alpha$ — локальное ортонормированное кореперное поле в окрестности множества $\sigma_\alpha(\Delta^n)$. Тогда существуют гладкие функции h_α в окрестностях симплекса Δ^n , такие, что

$$\sigma_\alpha^*(\omega_1^\alpha \wedge \dots \wedge \omega_n^\alpha) = h_\alpha dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n.$$

Обозначим разбиение единицы, подчиненное $\{U_\alpha\}$, через $\{\varphi_\alpha\}$, и для непрерывной функции f с компактным носителем на M положим

$$(8) \quad \int_M f = \sum_\alpha \int_{\Delta^n} (\varphi_\alpha f) \circ \sigma_\alpha |h_\alpha| dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n.$$

Используя рассуждения из разд. 4.8, нетрудно показать, что это определение не зависит от покрытия и от выбора разбиения единицы. В случае ориентированного риманова многообразия определения (7) и (8) совпадают.

В классических работах градиентом функции f на $\mathbb{R}^n$ называется векторное поле $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial r_i} \right) \frac{\partial}{\partial r_i}$, а дивергенцией вектор-

ного поля $V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial r_i}$ называется функция $\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial r_i}$. Мы

распространим эти понятия на римановы многообразия. Напомним, что метрика задает канонический изоморфизм $M_m \cong M_m^*$. Нам удобно использовать для этого изоморфизма «волну» над буквой, т. е. если $v \in M_m$, то $\tilde{v}$ — это соответствующий сопряженный элемент из M_m^* , а если $\omega \in M_m^*$, то $\tilde{\omega}$ — соответствующий вектор из M_m . *Градиентом* функции f на M называется векторное поле

$$(9) \quad \text{grad } f = \tilde{df}.$$

Если V — векторное поле на ориентированном римановом многообразии, то его *дивергенция* определяется формулой

$$(10) \quad \text{div } V = * d * \tilde{V}.$$

Заметим, что в этом определении оператор $*$ используется дважды, поэтому дивергенция не зависит от ориентации.

Теорема Стокса для римановых многообразий известна под названием *теоремы о дивергенции*: если V — гладкое векторное поле с компактным носителем на римановом многообразии M , D — регулярная область в M и $\vec{n}$ — векторное поле внешних нормалей на ∂D , такое, что $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_m = 1$ при всех $m \in \partial D$, то

$$(11) \quad \int_D \operatorname{div} V = \int_{\partial D} \langle V, \vec{n} \rangle.$$

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения (некоторый дополнительный материал по этому поводу имеется в упр. 4).

4.11. Интегрирование на группах Ли. Пусть G — группа Ли размерности n . В п. 4.3 (а) было показано, что G ориентируема. Фиксируем раз и навсегда некоторую ориентацию на G .

Рассмотрим левоинвариантные n -формы на G . Поскольку такая форма определяется своим значением в какой-либо одной точке и так как $\Lambda_n(V)$ для n -мерного векторного пространства V одномерно, то пространство левоинвариантных n -форм одномерно. Выберем ненулевую левоинвариантную n -форму ω , согласованную с ориентацией на G .

Мы уже определили в разд. 4.8 интеграл от n -форм с компактными носителями. Определим теперь интеграл по G от непрерывной функции с компактным носителем, положив

$$(1) \quad \int_G f = \int_G f \omega.$$

Интеграл (1), безусловно, зависит от левоинвариантной n -формы ω , согласованной с ориентацией. Такая форма однозначно определена с точностью до постоянного положительного множителя, поэтому в случае компактной группы Ли можно фиксировать выбор формы условием

$$(2) \quad \int_G \omega = 1.$$

Рассмотрим диффеоморфизм l_σ левого сдвига на элемент $\sigma \in G$. Поскольку $l_\sigma^*(\omega) = \omega$, l_σ сохраняет ориентацию, и, согласно 4.8 (5), получаем

$$(3) \quad \int_G f = \int_G f \omega = \int_G l_\sigma^*(f \omega) = \int_G (f \circ l_\sigma) \omega = \int_G f \circ l_\sigma.$$

Это соотношение объясняет, почему интеграл (1) называется *левоинвариантным*: значения интеграла от f и от сдвига $f \circ l_\sigma$

совпадают. Естественно спросить, когда интеграл (1) правоинвариантен, т. е. когда

$$(4) \quad \int_G f = \int_G f \circ r_\sigma$$

для каждого $\sigma \in G$? Форма $r_\sigma^*(\omega)$ по-прежнему левоинвариантна, так как

$$l_\tau^* r_\sigma^*(\omega) = r_\sigma^* l_\tau^*(\omega) = r_\sigma^*(\omega).$$

Следовательно, $r_\sigma^*(\omega)$ отличается от ω постоянным множителем. Таким образом, на G имеется нигде не обращающаяся в нуль вещественная функция $\tilde{\lambda}$, такая, что

$$(5) \quad r_\sigma^*(\omega) = \tilde{\lambda}(\sigma)\omega.$$

Легко проверить ее гладкость. Положим

$$(6) \quad \lambda(\sigma) = |\tilde{\lambda}(\sigma)|.$$

Заметим, что

$$(7) \quad \lambda(\sigma\tau) = \lambda(\sigma)\lambda(\tau),$$

т. е. λ является гомоморфизмом групп Ли из G в мультипликативную группу положительных чисел. Функция λ называется *модулярной функцией* в силу формулы 4.8 (5) для каждого $\sigma \in G$

$$\int_G f\omega = \int_G (f \circ r_\sigma) \lambda(\sigma)\omega.$$

Это показывает, что интеграл (1) правоинвариантен тогда и только тогда, когда $\lambda \equiv 1$ на G . Группа Ли, для которой $\lambda \equiv 1$, называется *унимодулярной*. Отметим, что *каждая компактная группа Ли G унимодулярна*, поскольку для каждого $\sigma \in G$

$$1 = \int_G \omega = \lambda(\sigma) \int_G \omega = \lambda(\sigma).$$

Следовательно, интеграл по компактной группе Ли одновременно право- и левоинвариантен.

4.12. Приложения разд. 4.11. Типичное применение интеграла по компактной группе Ли состоит в следующем.

Рассмотрим представление $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(V)$ группы Ли G в группе автоморфизмов вещественного или комплексного векторного пространства V , наделенного скалярным произведением. Представление α называется *унитарным* (V комплексное) или *ортогональным* (V вещественное), если для всех v и w из V и всех $\tau \in G$

$$(1) \quad \langle \alpha(\tau)v, \alpha(\tau)w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Пусть G — компактная группа и V — комплексное (соответственно вещественное) пространство. Тогда на V имеется скалярное произведение, относительно которого α унитарно (ортгонално). Доказательство в обоих случаях аналогичны. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение на V . Очевидно, что спаривание, определенное следующей формулой, есть скалярное произведение:

$$(2) \quad \langle v, w \rangle = \int_G \{ \alpha(\sigma) v, \alpha(\sigma) w \}.$$

Подчеркнем, что здесь и в следующей формуле подынтегральное выражение рассматривается как функция переменной $\sigma \in G$. Используя правую инвариантность интеграла по G , получаем

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\tau) v, \alpha(\tau) w \rangle &= \int_G \{ \alpha(\sigma) \alpha(\tau) v, \alpha(\sigma) \alpha(\tau) w \} = \\ &= \int_G \{ \alpha(\sigma\tau) v, \alpha(\sigma\tau) w \} = \int_G \{ \alpha(\sigma) v, \alpha(\sigma) w \} = \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость свойства (1).

Когомологии де Рама

4.13. Определение. p -форма α (для любого $p \geq 0$) на многообразии M называется *замкнутой*, если $d\alpha = 0$, и *точной*, если существует $(p-1)$ -форма β , такая, что $\alpha = d\beta$. Поскольку $dd = 0$, то каждая точная форма замкнута. Факторпространство вещественного векторного пространства замкнутых p -форм по подпространству точных p -форм называется p -й *группой когомологий де Рама* многообразия M :

$$(1) \quad H_{\text{de R}}^p(M) = \{\text{замкнутые } p\text{-формы}\} / \{\text{точные } p\text{-формы}\}.$$

4.14. Пример. Рассмотрим случай единичной окружности S^1 . Поскольку при $p > 1$ на окружности не существует ненулевых p -форм, то все группы $H_{\text{de R}}^p(S^1)$ равны нулю, кроме, быть может, $p = 0, 1$. Точных 0-форм не существует по смыслу понятия точности, а замкнутая 0-форма на связном многообразии — это не что иное, как постоянная функция, поэтому

$$(1) \quad H_{\text{de R}}^0(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

«Угловой параметр» в полярной системе координат корректно определенной функцией на окружности не является, поскольку он задан с точностью до целочисленных кратных 2π , однако его дифференциал $d\theta$ задает на S^1 не обращающуюся в нуль 1-форму. В действительности $d\theta$ совпадает с формой объема на S^1 относительно индуцированной из $\mathbb{R}^2$ римановой метрики. Форма $d\theta$

не точна, поскольку ее интеграл по S^1 равен 2π , а не нулю. Любая 1-форма на S^1 замкнута. Мы утверждаем, что для произвольной 1-формы α существует константа c , такая, что форма $\alpha - c d\theta$ точна. Для $\alpha = f(\theta) d\theta$ положим

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \alpha$$

и

$$g(\theta) = \int_0^\theta (f(\theta) - c) d\theta.$$

Поскольку $g(\theta + 2\pi n) = g(\theta)$ при любом целом n , то g — корректно определенная гладкая функция на S^1 и $dg = (f(\theta) - c) d\theta = \alpha - c d\theta$. Поэтому каждая 1-форма на S^1 отличается от некоторого вещественного кратного формы $d\theta$ на точную форму. Следовательно,

$$(2) \quad H_{\text{de R}}^1(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

4.15. Поведение при отображениях. Пусть $f: M \rightarrow N$ — отображение класса C^∞ . Гомоморфизм алгебр $f^*: E^*(N) \rightarrow E^*(M)$ коммутирует с d (см. разд. 2.23) и потому переводит замкнутые формы в замкнутые, а точные в точные. Следовательно, при каждом целом $p \geq 0$ имеется гомоморфизм

$$(1) \quad f^*: H_{\text{de R}}^p(N) \rightarrow H_{\text{de R}}^p(M).$$

Кроме того, для гладкого отображения $g: N \rightarrow X$

$$(2) \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Очевидно, что тождественное отображение $\text{id}: M \rightarrow M$ индуцирует тождественное отображение когомологий де Рама:

$$(3) \quad (\text{id})^* = \text{id}.$$

Как следствие двух последних равенств получаем, что диффеоморфизм многообразий индуцирует изоморфизм когомологий де Рама. Поэтому когомологии де Рама — гладкий инвариант для гладких многообразий. В гл. 5 мы покажем, что они являются даже топологическим инвариантом, т. е. зависят лишь от структуры топологического пространства на M и не зависят от дифференцируемой структуры на нем. При доказательстве этого факта основную роль будет играть формулируемая ниже теорема де Рама. Предварительно нам необходимо определить группы вещественных дифференцируемых сингулярных гомологий многообразия M .

4.16. Вещественные дифференцируемые сингулярные гомологии. При каждом целом $p \geq 0$ обозначим вещественное векторное пространство, порожденное дифференцируемыми сингулярными

p -симплексами в M , через ${}_{\infty}S_p(M, \mathbb{R})$. То есть элементы из ${}_{\infty}S_p(M, \mathbb{R})$ — это в точности дифференцируемые сингулярные p -цепи с вещественными коэффициентами. При $p < 0$ положим ${}_{\infty}S_p(M, \mathbb{R})$ равным нулевому пространству. Граничный оператор ∂ при каждом p индуцирует линейное преобразование

$$(1) \quad \partial_p: {}_{\infty}S_p(M, \mathbb{R}) \rightarrow {}_{\infty}S_{p-1}(M, \mathbb{R}).$$

В силу формулы 4.6 (7) $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, т. е. образ ∂_{p+1} лежит в ядре ∂_p . Тогда p -я группа дифференцируемых сингулярных гомологий с вещественными коэффициентами ${}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})$ определяется формулой

$$(2) \quad {}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R}) = \text{Ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$$

и является, кроме того, векторным пространством над $\mathbb{R}$. Элементы из $\text{Ker } \partial_p$ называются *дифференцируемыми p -циклами*, а элементы из $\text{Im } \partial_{p+1}$ — *дифференцируемыми p -границами*.

4.17. Теорема де Рама. Определим линейное отображение из $H_{\text{de R}}^p(M)$ в сопряженное пространство ${}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})^*$ к группе вещественных дифференцируемых сингулярных гомологий

$$(1) \quad H_{\text{de R}}^p(M) \rightarrow {}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})^*$$

следующим образом. Пусть α — замкнутая p -форма и $\{\alpha\}$ — ее класс когомологий де Рама, и пусть z — некоторый p -цикл из класса $\{z\}$ вещественных дифференцируемых сингулярных гомологий. Тогда (1) задается формулой

$$(2) \quad \{\alpha\}(\{z\}) = \int_z \alpha.$$

Независимость от выбора представителей в формуле (2) следует из теоремы Стокса I.

Теорема де Рама утверждает, что (1) является изоморфизмом. Доказательство будет дано в разд. 5.36 и 5.37. Вещественные числа, определяемые интегрированием некоторой формы по циклам, называются *периодами* этой дифференциальной формы. Теорема Стокса I утверждает, что периоды точной формы равны нулю. Инъективность изоморфизма (1) доказывает обратное утверждение, т. е. если у замкнутой формы нулевые периоды, то она точна. Сюръективность (1) утверждает, что если каждому циклу z сопоставить вещественное число $\text{per}(z)$ так, чтобы

$$(3) \quad \text{per}(az_1 + z_2) = a \text{per}(z_1) + \text{per}(z_2), \quad \text{per}(\text{границы}) = 0,$$

то найдется замкнутая форма α на M , такая, что для всех циклов z

$$(4) \quad \int_z \alpha = \text{per}(z).$$

Ключевым моментом при доказательстве теоремы де Рама (см. разд. 5.28) является

4.18. Лемма Пуанкаре. Пусть U — открытый единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{K}^n$ и $E^k(U)$, как обычно, — пространство дифференциальных k -форм на U . Для каждого $k \geq 1$ имеется линейное преобразование $h_k: E^k(U) \rightarrow E^{k-1}(U)$, такое, что

$$(1) \quad h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = \text{id}.$$

Доказательство. Начнем с формулы 2.25 (d), связывающей производную Ли, внешнее дифференцирование и внутреннее умножение:

$$(2) \quad L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X).$$

Применим (2) к векторному полю

$$(3) \quad X = \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial}{\partial r_i}$$

на U . Определим оператор α_k на $E^k(U)$, положив

$$(4) \quad \alpha_k(f dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k})(p) = \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tp) dt \right) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k}(p)$$

и продолжив его по линейности на все $E^k(U)$. Покажем, что для X вида (3) на $E^k(U)$

$$(5) \quad \alpha_k \circ L_X = \text{id}.$$

Для этого используем перестановочность L_X и d :

$$\begin{aligned} (6) \quad \alpha_k \circ L_X(f dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k})(p) &= \\ &= \alpha_k \left\{ \left(kf + \sum r_i \frac{\partial f}{\partial r_i} \right) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k} \right\}(p) = \\ &= \left(\int_0^1 t^{k-1} \left(kf(tp) + \sum r_i(tp) \frac{\partial f}{\partial r_i} \Big|_{tp} \right) dt \right) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k}(p) = \\ &= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(tp)) dt \right) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k}(p) = \\ &= f(p) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_k}(p). \end{aligned}$$

Из (5) и (2) получаем

$$(7) \quad \text{id} = \alpha_k \circ i(X) \circ d + \alpha_k \circ d \circ i(X)$$

на $E^k(U)$. Кроме того,

$$(8) \quad \alpha_k \circ d = d \circ \alpha_{k-1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \alpha_k \circ d(f dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_{k-1}})(p) &= \\
 &= \alpha_k \left(\sum \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i \wedge dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_{k-1}} \right)(p) = \\
 &= \left(\int_0^1 t^{k-1} \sum \frac{\partial f}{\partial r_i} \Big|_{tp} dt \right) dr_i \wedge dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_{k-1}}(p) = \\
 &= d \left(\int_0^1 t^{k-2} f(tp) dt \right) dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_{k-1}}(p) = \\
 &= d \circ \alpha_{k-1}(f dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_{k-1}})(p).
 \end{aligned}$$

Теперь из (8) и (7) получаем

$$(9) \quad \text{id} = \alpha_k \circ i(X) \circ d + d \circ \alpha_{k-1} \circ i(X)$$

на $E^k(U)$. Определим теперь искомые h_k , положив

$$(10) \quad h_k = \alpha_{k-1} \circ i \left(\sum r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \right).$$

Следствие (а). Если ω есть k -форма, $k \geq 1$, на открытом единичном шаре в $\mathbb{R}^n$ и $d\omega = 0$, то существует $(k-1)$ -форма β (а именно, $h_k(\omega)$) с $d\beta = \omega$.

Следствие (б). Группы когомологий де Рама открытого единичного шара в $\mathbb{R}^n$ тривиальны при $p \geq 1$.

4.19. Замечание. Пусть f_1 и f_2 — гладкие отображения из M в N . Для всех k имеем индуцированные отображения

$$(1) \quad f_i^*: E^k(N) \rightarrow E^k(M).$$

Если мы зададимся целью показать, что f_1^* и f_2^* индуцируют одинаковые гомоморфизмы когомологий де Рама, нам достаточно предъявить семейство линейных преобразований

$$(2) \quad h_k: E^k(N) \rightarrow E^{k-1}(M),$$

таких, что

$$(3) \quad h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = f_1^* - f_2^*.$$

Отсюда будет следовать, что если α — замкнутая форма, то замкнутые формы $f_1^*(\alpha)$ и $f_2^*(\alpha)$ отличаются на точную форму и, следовательно, лежат в одном классе когомологий. Такое семейство преобразований $\{h_k\}$ называется *оператором гомотопии* для f_1 и f_2 ¹⁾. В доказательстве леммы Пуанкаре мы предъявили

¹⁾ В литературе по гомологической алгебре принят термин *цепная гомотопия*. — Прим. перев.

оператор гомотопии для тождественного отображения единичного шара U и постоянного отображения этого шара в себя.

Упражнения

1. Докажите утверждение 4.3 (с), что многообразие X размерности d , для которого существует погружение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, ориентируемо в том и только том случае, когда существует гладкое нигде не обращающееся в нуль нормальное векторное поле вдоль (X, f) .

2. Докажите, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо тогда и только тогда, когда n нечетно. (Указание: Антиподальное отображение сферы S^n сохраняет ориентацию лишь в случае нечетного n .)

3. Восстановите детали доказательства существования локального ортонормированного реперного поля на римановом многообразии.

4. Докажите теорему о дивергенции 4.10 (11). Сначала предположите, что M ориентированно, и используйте теорему Стокса вместе с тождеством

$$(1) \quad \int_{\partial D} * \tilde{V} = \int_D \langle V, \vec{n} \rangle.$$

Простейший способ проверки (1) — выбрать ортонормированное локальное ориентированное реперное поле $e_1, \dots, e_n$ в окрестности точки $m \in \partial D$ так, чтобы в точках из ∂D вектор e_1 был единичным вектором внешней нормали, а $e_2, \dots, e_n$ образовывали ориентированный базис касательного пространства к ∂D . Затем выразить $* \tilde{V}$ и $\langle V, \vec{n} \rangle$ в терминах этих реперных полей и сопряженных к ним кореперных полей $\omega_1, \dots, \omega_n$. Наконец, докажите эту теорему для регулярных областей D в необязательно ориентируемом римановом многообразии M .

5. Пусть M — ориентированное риманово многообразие, f и g — гладкие функции на M , а D — регулярная область в M . Лапласиан Δg определяется формулой

$$(1) \quad \Delta g = - * d * dg.$$

(Подробнее о лапласиане см. гл. 6. Отметим, что из нашего выбора знака для лапласиана следует, что $\Delta g = - \sum_{i=1}^n \partial^2 g / \partial r_i^2$ для любой гладкой функции g на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с его стандартной римановой структурой, для которого $\{\partial / \partial r_i\}$ — ортонормированный базис в касательном пространстве.) Для векторного

поля единичных внешних нормалей $\vec{n}$ вдоль ∂D обозначим $\vec{n}(g)$ через $\partial g / \partial n$. Докажите тождества Грина

$$\text{I: } \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_D \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle - \int_D f \Delta g,$$

$$\text{II: } \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_D (g \Delta f - f \Delta g).$$

6. Пусть ω — форма объема на ориентированном римановом многообразии M размерности n , а $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$ — векторные поля на M . Докажите, что

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \cdot \omega(Y_1, \dots, Y_n) = \det \{ \langle X_i, Y_j \rangle \}.$$

Докажите также, что

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \omega = \tilde{X}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{X}_n,$$

где $\tilde{X}_i$ обозначает 1-форму, сопряженную в смысле римановой метрики к X_i .

7. Докажите дифференцируемость функции $\tilde{\lambda}$ из формулы 4.11 (5).

8. Пусть G — компактная (ориентированная) группа Ли и $\alpha(\sigma) = \sigma^{-1}$ при $\sigma \in G$. Докажите, что для любой непрерывной на G функции f

$$\int_G f = \int_G f \circ \alpha.$$

9. Докажите, что бинвариантная метрика (т. е. метрика, для которой dl_σ и dr_σ , $\sigma \in G$, сохраняют скалярное произведение на группе Ли G) существует в том и только том случае, когда замыкание подмножества $\text{Ad}(G)$ в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ компактно.

10. (а) Докажите, что $H_{\text{de R}}^p(\mathbb{R}^n) = 0$ при $p \geq 1$ и $n \geq 1$.

(б) Докажите, что $H_{\text{de R}}^0(M) \cong \mathbb{R}$ для любого связного многообразия M .

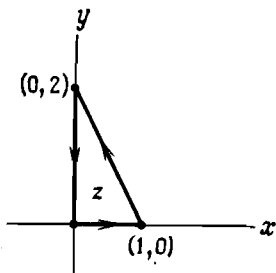
11. Вычислите кохомологии де Рама открытой кольцевой области

$$1 < (r_1^2 + r_2^2)^{1/2} < 2$$

в $\mathbb{R}^2$.

12. Докажите, что внешнее произведение замкнутых форм замкнуто, а если одна из форм, кроме того, точна, то это произведение является точной формой.

13. Рассмотрим 1-форму $\alpha = (x^2 + 7y) dx + (-x + y \sin y^2) dy$ на $\mathbb{R}^2$. Вычислите интеграл от α по следующему 1-циклу z :



14. Пусть $\alpha = (2x + y \cos xy) dx + (x \cos xy) dy$ — форма на $\mathbb{R}^2$. Проверьте, что α замкнута. Покажите, что α точная, найдя функцию $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с $df = \alpha$. Чему равняется интеграл от α по циклу, изображенному в упр. 13?

15. Пусть

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Докажите, что на $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ форма α замкнута. Вычислите интеграл от α по единичной окружности. Почему форма α не является точной? Покажите, что форма $i^*(\alpha)$ не точна, здесь $i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает каноническое вложение.

16. (а) Докажите, что любая замкнутая 1-форма на S^2 точна.

(б) Пусть

$$\sigma = \frac{r_1 dr_2 \wedge dr_3 - r_2 dr_1 \wedge dr_3 + r_3 dr_1 \wedge dr_2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{3/2}}$$

в $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Докажите, что σ замкнута.

(с) Вычислите $\int_{S^2} \sigma$. Почему не точна форма σ ?

(д) Пусть

$$\alpha = \frac{r_1 dr_1 + r_2 dr_2 + \dots + r_n dr_n}{(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)^{n/2}}$$

в $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Найдите $*\alpha$ и покажите, что $*\alpha$ замкнута.

(е) Вычислите $\int_{S^{n-1}} *\alpha$. Точна ли форма $*\alpha$?

17. Используя когомологии де Рама, докажите, что тор T^2 и сфера S^2 не диффеоморфны.

18. (а) Докажите, что каждая замкнутая 1-форма на открытом множестве

$$1 < \left(\sum_{i=1}^3 r_i^2 \right)^{1/2} < 2$$

в $\mathbb{R}^3$ точна.

(b) Найдите 2-форму на этом открытом множестве, которая была бы замкнута, но не точна.

(с) Докажите, что множество из п. (а) не диффеоморфно открытому единичному шару в $\mathbb{R}^3$.

19. Пусть f и g обозначают гладкие отображения $M \rightarrow N$, которые гладко гомотопны, т. е. существует гладкое отображение $F: M \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow N$ при некотором $\varepsilon > 0$, такое, что $F(m, 0) = f(m)$ и $F(m, 1) = g(m)$ для каждого $m \in M$. Докажите, что индуцированные гомоморфизмы f^* и $g^*: H_{\text{de R}}^p(N) \rightarrow H_{\text{de R}}^p(M)$ совпадают при всех целых p . (Указание: Проверьте, что два включения $i_0(m) = (m, 0)$ и $i_1(m) = (m, 1)$ многообразия M в $M \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ индуцируют одинаковые отображения в когомологиях де Рама. Для этого необходимо найти подходящие операторы гомотопии, см. по этому поводу эскиз доказательства леммы Пуанкаре 4.18.)

20. (а) Пусть $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — погружение и M^n наделено индуцированной римановой структурой, т. е. для $m \in M$ и $u, v \in M_m$

$$\langle u, v \rangle_m = \langle df(u), df(v) \rangle_{f(m)}.$$

Предположим, что M ориентированно и $\vec{n}$ — единичное нормальное векторное поле вдоль $f(M^n)$ (это означает, что $\vec{n}, df(v_1), \dots, df(v_n)$ образуют ориентированный ортонормированный базис касательного пространства к евклидову пространству в точке $f(m)$, если $v_1, \dots, v_n$ — ориентированный ортонормированный базис в M_m). Покажите, что форма объема на M задается формулой

$$\omega = f^*(i(\vec{n})(dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{n+1})).$$

(b) Пусть заданы открытое множество D в плоскости xy и гладкое отображение $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Отображение φ определяет вложенную поверхность в $\mathbb{R}^3$. Наделим D и $\mathbb{R}^3$ стандартными ориентациями. Используя п. (а), докажите, что индуцированная на D форма объема задается формулой

$$\omega = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} \right) dx \wedge dy.$$

Пучки, когомологии и теорема де Рама

Главной целью этой главы является доказательство теоремы де Рама, одна из возможных формулировок которой приводилась в 4.17. В наиболее общей форме теорема утверждает, что гомоморфизм кольца когомологий де Рама в кольцо гладких сингулярных когомологий, индуцированный интегрированием форм по гладким цепям, является изоморфизмом. В доказательстве когомологии де Рама и гладкие сингулярные когомологии рассматриваются как частные случаи когомологий с коэффициентами в пучках, и при этом для доказательства существования естественного изоморфизма между когомологиями де Рама и гладкими сингулярными когомологиями используется единственность общей конструкции теории когомологий с коэффициентами в пучках. При таком подходе в качестве бесплатного приложения получаются теоремы существования канонических изоморфизмов между когомологиями Чеха, Александера—Спеньера, де Рама и сингулярными когомологиями. Отсюда следует, что когомологии де Рама — топологические инварианты гладкого многообразия.

Никаких предварительных знаний о пучках и когомологиях у читателя не предполагается. Все сведения будут приведены в форме, необходимой для приложений. Изложение начинается с введения в теорию пучков и когомологий; наш подход основан главным образом на изложении Картана в [4]. На более абстрактном уровне с теорией пучков можно ознакомиться по книгам Картана [4], Годамана [7] и Бредона [3]. Пучки служат мощным инструментом в работе с комплексными многообразиями. По поводу их использования в теории римановых поверхностей см. [8].

Пусть M — гладкое многообразие; по определению оно удовлетворяет второй аксиоме счетности и потому *паракомпактно*. Необходимо отметить, что все факты из теории пучков, излагаемые в этой главе, опираются только на то, что M — паракомпактное хаусдорфово топологическое пространство. Лишь при обсуждении когомологий де Рама (разд. 5.28) и дифференцируемых сингулярных когомологий (разд. 5.31) и при разборе нескольких примеров мы рассматриваем дифференцируемую структуру на M ; кроме того, при построении в разд. 5.31 сингулярных когомологий нам потребуется локально евклидова структура. Во всех остальных случаях M можно считать паракомпактным хаусдорфовым топологическим пространством.

Всюду в этой главе K обозначает фиксированную область главных идеалов. Мы будем работать с пучками K -модулей над M . Отметим два важнейших случая, о которых полезно помнить:

(i) K — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, а K -модули — просто абелевы группы,

(ii) K — кольцо вещественных чисел $\mathbb{R}$, а K -модули — вещественные векторные пространства.

Тот факт, что K является областью главных идеалов, впервые используется в разд. 5.13; в начале главы K можно считать произвольным кольцом.

Пучки и предпучки

5.1. Определения. Пучок $\mathcal{P}$ K -модулей над M — это топологическое пространство $\mathcal{P}$ вместе с отображением $\pi: \mathcal{P} \rightarrow M$, таким, что

(a) π — локальный гомеоморфизм $\mathcal{P}$ на M ;

(b) $\pi^{-1}(m)$ является K -модулем для каждого $m \in M$;

(c) модульные операции непрерывны в топологии пространства $\mathcal{P}$. Поясним последнее свойство. Пусть $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}$ обозначает подпространство в $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, состоящее из всех пар (s_1, s_2) , таких, что $\pi(s_1) = \pi(s_2)$. Свойство (c) утверждает непрерывность отображения $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, переводящего (s_1, s_2) в $s_1 + s_2$, и каждого из отображений пространства $\mathcal{P}$ в себя, переводящего s в ks , где $k \in K$. Легко убедиться, что тогда отображения $s \mapsto (-s)$ и $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$ тоже будут непрерывными. Аналогичным образом определяются пучки K -алгебр с тем дополнительным требованием в п. (c), что отображение $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, переводящее (s_1, s_2) в $s_1 \cdot s_2$, непрерывно.

Отображение π называется *проекцией*; K -модуль $\mathcal{P}_m = \pi^{-1}(m)$ называется *слоем над точкой $m \in M$* . Пусть $U \subset M$ — открытое множество. Непрерывное отображение $f: U \rightarrow \mathcal{P}$, такое, что $\pi \circ f = \text{id}$, называется *сечением $\mathcal{P}$ над U* . Нулевое сечение — это сечение, которое каждому $m \in U$ сопоставляет нулевой элемент из $\mathcal{P}_m$. Множество сечений пучка $\mathcal{P}$ над U обозначается через $\Gamma(\mathcal{P}, U)$. Введем на $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ структуру K -модуля. Пусть f и g принадлежат $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ и $k \in K$. Определим сечения $f + g$ и kf формулами

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad (kf)(m) = k(f(m)) \quad (m \in U).$$

Множество $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ с этими операциями является K -модулем.

Модуль сечений пучка $\mathcal{P}$ над M (*глобальных сечений*) будет обозначаться просто через $\Gamma(\mathcal{P})$. Отметим, что сечения являются открытыми отображениями, поскольку π — локальный гомеоморфизм; кроме того, если сечения совпадают в точке $m \in M$, то они совпадают и в некоторой окрестности этой точки.

5.2. Примеры. Наиболее простой пример пучка над M — это так называемый *постоянный пучок* $\mathcal{G} = M \times G$, где G обозначает K -модуль с дискретной топологией и пространство $\mathcal{G}$ наделено топологией прямого произведения. Проекция π переводит (m, g) в m .

Менее тривиальным будет следующий пример. Пусть $\tilde{F}_m$ обозначает множество ростков гладких функций в точке $m \in M$ (как в разд. 1.13), и пусть

$$(1) \quad \mathcal{E}^\infty(M) = \bigcup_{m \in M} \tilde{F}_m.$$

Всюду, где это не приведет к недоразумению, мы будем использовать обозначение $\mathcal{E}^\infty$ вместо $\mathcal{E}^\infty(M)$. Очевидным образом определим проекцию $\pi: \mathcal{E}^\infty \rightarrow M$ так, чтобы $f \in \tilde{F}_{\pi(f)}$. Каждому открытому подмножеству $U \subset M$ и каждой гладкой функции f на U поставим в соответствие множество

$$\bigcup_{m \in U} f_m \subset \mathcal{E}^\infty,$$

где f_m — росток функции f в точке m . Семейство этих множеств образует базу топологии на $\mathcal{E}^\infty$, превращающей $\mathcal{E}^\infty$ в пучок вещественных векторных пространств (на самом деле в пучок алгебр, поскольку каждое множество $\tilde{F}_m$ имеет структуру алгебры). Пучок $\mathcal{E}^\infty(M)$ называется *пучком ростков гладких функций на M* . Аналогично, для каждого целого $p \geq 0$ можно определить пучки $\mathcal{E}^p(M)$ ростков функций класса C^p на M .

5.3. Замечание. Необходимо предупредить, что пучки, вообще говоря, не являются хаусдорфовыми пространствами. Простым примером служит пучок $\mathcal{E}^0(\mathbb{R})$ ростков непрерывных функций на вещественной прямой. Пусть $g(t) \equiv 0$, $f(t) = 0$ для $t \leq 0$ и $f(t) = t$ для $t > 0$. Тогда ростки функций f и g в нуле не совпадают, однако при отрицательных t эти функции имеют одинаковые ростки. Отсюда следует, что окрестности в $\mathcal{E}^0(\mathbb{R})$ ростков функций f и g в нуле обязательно пересекаются.

5.4. Определения. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ — пучки над M с проекциями π и π' соответственно. Непрерывное отображение $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, такое, что $\pi' \circ \varphi = \pi$, называется *морфизмом пучков*. Заметим, что морфизм пучков обязательно является локальным гомеоморфизмом и переводит слой в слой. Морфизм пучков, который на каждом слое является гомоморфизмом K -модулей, называется *гомоморфизмом пучков*. Обратимый гомоморфизм пучков, обратный к которому также является гомоморфизмом пучков, называется *изоморфизмом пучков*.

Открытое подмножество $\mathcal{R}$ пучка $\mathcal{P}$ называется его *подпучком*, если для каждой точки $m \in M$ подмножество $\mathcal{R}_m = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_m$

является подмодулем в $\mathcal{P}_m$. Ясно, что $\mathcal{R}$ с очевидными топологией и проекцией является пучком.

Пусть $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — гомоморфизм пучков. Его *ядром* Кег φ называется прообраз нулевых элементов слоев пучка $\mathcal{T}$; он является подпучком в $\mathcal{P}$. *Образ* гомоморфизма φ , $\text{Im } \varphi$, — это подпучок $\varphi(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}$. В случае когда φ инъективно, мы часто будем отождествлять пучки $\mathcal{P}$ и $\varphi(\mathcal{P})$ и говорить о подпучке $\mathcal{P}$ пучка $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{R}$ — подпучок в $\mathcal{P}$. Для каждого $m \in M$ обозначим через $\mathcal{T}_m$ фактормодуль $\mathcal{P}_m/\mathcal{R}_m$ и положим

$$(1) \quad \mathcal{T} = \bigcup_{m \in M} \mathcal{T}_m.$$

Пусть $\tau: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — отображение, которое на слоях совпадает с естественной проекцией $\mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{T}_m$. Наделим $\mathcal{T}$ фактортопологией (т. е. множество $U \subset \mathcal{T}$ открыто тогда и только тогда, когда $\tau^{-1}(U)$ открыто в $\mathcal{P}$). С этой топологией и естественной проекцией, отображающей каждый элемент из $\mathcal{T}_m$ в m , $\mathcal{T}$ превращается в пучок над M , а отображение $\tau: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — в гомоморфизм пучков. Детали предоставляются читателю в качестве упражнения. Пучок $\mathcal{T}$ называется *факторпучком* $\mathcal{P}$ по модулю $\mathcal{R}$.

Легко проверить, что если $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — гомоморфизм пучков, то естественное отображение $\mathcal{P}/\text{Кег } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$, задаваемое формулой $(s + (\text{Кег } \varphi | \mathcal{P}_m)) \mapsto \varphi(s)$ для $s \in \mathcal{P}_m$, будет изоморфизмом пучков.

Последовательность пучков и гомоморфизмов

$$(2) \quad \dots \rightarrow \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_{i+1} \rightarrow \mathcal{P}_{i+2} \rightarrow \dots$$

называется *точной*, если образ каждого гомоморфизма совпадает с ядром последующего. Точные последовательности K -модулей определяются аналогично. Заметим, что (2) точна в том и только том случае, когда для любого $m \in M$ индуцированная последовательность гомоморфизмов слоев над m

$$(3) \quad \dots \rightarrow (\mathcal{P}_i)_m \rightarrow (\mathcal{P}_{i+1})_m \rightarrow (\mathcal{P}_{i+2})_m \rightarrow \dots$$

точна. В случае когда $\mathcal{R}$ — подпучок в $\mathcal{P}$, а $\mathcal{T}$ — факторпучок $\mathcal{P}/\mathcal{R}$, последовательность естественных гомоморфизмов

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

точна (здесь 0 обозначает постоянный пучок над M , слой которого над каждой точкой является тривиальным одноэлементным K -модулем). Точные последовательности вида (4) из 5 членов с нулевыми пучками на концах называются *короткими точными последовательностями*. Аналогичным образом определяются короткие точные последовательности K -модулей.

5.5. Предпучки. *Предпучок* $P = \{S_U; \rho_{U,V}\}$ K -модулей над M состоит из K -модулей S_U для каждого открытого подмно-

жества $U \subset M$ и гомоморфизмов $\rho_{U,V}: S_V \rightarrow S_U$ для каждого вложения $U \subset V$ открытых множеств в M , причем $\rho_{U,U} = \text{id}$ и, если $U \subset V \subset W$, следующая диаграмма коммутативна:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} S_W & \xrightarrow{\rho_{V,W}} & S_V \\ & \searrow \rho_{U,W} & \swarrow \rho_{U,V} \\ & S_U & \end{array}$$

Приведем типичный пример предпучка. Каждому открытому множеству U в M поставим в соответствие алгебру $C^\infty(U)$ гладких функций на U . Пусть $\rho_{U,V}$ — гомоморфизмы, переводящие гладкие функции на V в их ограничения на U . Семейство $\{C^\infty(U); \rho_{U,V}\}$ является предпучком вещественных векторных пространств над M (на самом деле предпучком алгебр). Подобным же образом можно ставить в соответствие множеству U векторные пространства p -форм на U при фиксированном p , а в качестве $\rho_{U,V}$ опять брать отображения ограничения.

Пусть $P = \{S_U; \rho_{U,V}\}$ и $P' = \{S'_U; \rho'_{U,V}\}$ — предпучки на M . Под гомоморфизмом предпучка P в P' мы будем понимать набор $\{\varphi_U\}$ гомоморфизмов $\varphi_U: S_U \rightarrow S'_U$, такой, что

$$(2) \quad \rho'_{U,V} \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \rho_{U,V},$$

если $U \subset V$. Изоморфизм предпучков определяется как такой гомоморфизм предпучков $\{\varphi_U\}$, в котором все отображения φ_U являются изоморфизмами K -модулей.

5.6. Связь между пучками и предпучками. Каждый пучок $\mathcal{P}$ каноническим образом определяет предпучок $\{\Gamma(\mathcal{P}, U); \rho_{U,V}\}$. А именно, мы ставим в соответствие каждому открытому множеству U в M K -модуль $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ сечений пучка $\mathcal{P}$ над U , а каждому включению открытых множеств $U \subset V$ — гомоморфизм ограничения

$$(1) \quad \rho_{U,V}: \Gamma(\mathcal{P}, V) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}, U),$$

отображающий сечение пучка $\mathcal{P}$ над V в его ограничение на U . Обозначим через α полученное отображение пучков в предпучки. Назовем $\alpha(\mathcal{P})$ предпучком сечений пучка $\mathcal{P}$.

Покажем, что, обратно, каждый предпучок каноническим образом задает пучок, который мы назовем его ассоциированным пучком. На практике много пучков возникает именно таким образом из предпучков. Наилучший пример, о котором следует

помнить при разборе следующей конструкции, — это предпучок $\{C^\infty(U); \rho_{U,V}\}$, ассоциированным пучком которого будет пучок ростков гладких функций на M .

Пусть $P = \{S_U; \rho_{U,V}\}$ — предпучок K -модулей на M . Выберем точку $m \in M$ и обозначим через S_m^* дизъюнктное объединение модулей S_U по всем U , содержащим m . Будем считать элемент $f \in S_U$ эквивалентным элементу $g \in S_V$, если и только если существует окрестность $W \subset U \cap V$ точки m , такая, что $\rho_{W,U} f = \rho_{W,V} g$; можно проверить, что это действительно отношение эквивалентности на S_m^* . Множество $\mathcal{P}_m$ классов эквивалентности элементов из S_m^* будет слоем над m ассоциированного пучка. Для $m \in U$ обозначим через $\rho_{m,U}: S_U \rightarrow \mathcal{P}_m$ естественную проекцию, которая переводит элемент из S_U в его класс эквивалентности. Пусть $f \in S_U$ и $g \in S_V$ — представители соответственно классов s_1 и s_2 в $\mathcal{P}_m$; существует окрестность W точки m , такая, что $W \subset U \cap V$. Определим в $\mathcal{P}_m$ сложение и умножение на элементы из K , положив

$$(3) \quad s_1 + s_2 = \rho_{m,W}(\rho_{W,U} f + \rho_{W,V} g),$$

$$(4) \quad ks_1 = \rho_{m,U}(kf).$$

Легко проверить корректность этих определений, задающих на $\mathcal{P}_m$ структуру K -модуля, при которой отображения $\rho_{m,U}$ будут гомоморфизмами. Модуль $\mathcal{P}_m$ называют *прямым пределом* модулей S_U по U , содержащим m . Наконец, положим

$$(5) \quad \mathcal{P} = \bigcup_{m \in M} \mathcal{P}_m,$$

и пусть $\pi: \mathcal{P} \rightarrow M$ — очевидная проекция, переводящая $\mathcal{P}_m$ в m . Введем в $\mathcal{P}$ топологию, выбрав в качестве базы семейство

$$(6) \quad O_f = \{\rho_p, uf: p \in U\}$$

подмножеств из $\mathcal{P}$ для различных открытых множеств U из M и $f \in S_U$. Оно действительно образует базу топологии на $\mathcal{P}$, поскольку для $s \in O_f \cap O_g$ (т. е. $s = \rho_p, uf = \rho_p, vg$) существует окрестность $W \subset U \cap V$ точки p , для которой $\rho_{W,U} f = \rho_{W,V} g$; отсюда следует, что $s \in O_{\rho_W, uf} \subset O_f \cap O_g$.

Мы утверждаем, что $\mathcal{P}$ — пучок над M с проекцией π . Поскольку на каждом O_f отображение π является гомеоморфизмом, то π — локальный гомеоморфизм. Каждый слой $\mathcal{P}_m$ наделен структурой K -модуля. Осталось лишь проверить непрерывность операций. Сначала рассмотрим умножения на $k \in K$. Пусть $s \in \mathcal{P}$, и пусть O — открытая окрестность элемента ks . Положим $s = \rho_p, uf$. Тогда O_{kf} также открытая окрестность ks . Пусть V — окрестность точки p , содержащаяся в $\pi(O_{kf} \cap O)$; тогда $O_{\rho_V, uf}$ — открытая окрестность s , которая при умножении на k отобра-

жается в открытую окрестность $O_{\rho_{V,U}kf} \subset O$ точки ks . Наконец, покажем, что отображение $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, переводящее (s_1, s_2) в $s_1 - s_2$, непрерывно. Обозначим через O_f открытую окрестность точки $s_1 - s_2$, скажем $s_1 - s_2 = \rho_{p,uf}$, и положим $s_1 = \rho_{p,v}g$ и $s_2 = \rho_{p,wh}$. Тогда существует открытая окрестность Q точки p с $Q \subset U \cap V \cap W$, такая, что

$$(7) \quad \rho_{Q,uf} = \rho_{Q,v}g - \rho_{Q,wh}.$$

Следовательно, открытая окрестность

$$(8) \quad O_{\rho_{Q,v}g} \times O_{\rho_{Q,wh}} \cap \mathcal{P} \circ \mathcal{P}$$

точки (s_1, s_2) отображается в O_f . Таким образом, проверено, что операции непрерывны, и, следовательно, $\mathcal{P}$ — пучок над M с проекцией π . Пучок $\mathcal{P}$ называется *ассоциированным* с предпучком P . Мы обозначим полученное отображение предпучков в пучки символом β . Тогда $\mathcal{P} = \beta(P)$.

Ясно, что каждый гомоморфизм пучков в $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ определяет гомоморфизм предпучков сечений $\alpha(\mathcal{P}) \rightarrow \alpha(\mathcal{T})$, отображающий элементы из $\Gamma(\mathcal{P}, U)$ в их композицию с φ . Обратно, гомоморфизм предпучков $\{\varphi_U\}: P \rightarrow P'$ каноническим образом индуцирует гомоморфизм ассоциированных пучков $\beta(P)$ и $\beta(P')$ так, что

$$(9) \quad \rho'_{p,U} \circ \varphi_U = \varphi \circ \rho_{p,U}$$

для каждого открытого множества U в M и каждой точки $p \in U$. Кроме того, при переходе от $\mathcal{P}$ к $\alpha(\mathcal{P})$ (соответственно от P к $\beta(P)$) композиции гомоморфизмов отвечает композиция соответствующих гомоморфизмов.

Предположим теперь, что мы для данного пучка $\mathcal{P}$ образовали предпучок его сечений $\alpha(\mathcal{P})$ и построили ассоциированный с ним пучок $\beta(\alpha(\mathcal{P}))$, т. е. пучок ростков сечений пучка $\mathcal{P}$. Тогда пучки $\mathcal{P}$ и $\beta(\alpha(\mathcal{P}))$ канонически изоморфны. Действительно, пусть ξ , $\xi \in \beta(\alpha(\mathcal{P}))$, — росток в точке p некоторого сечения f пучка $\mathcal{P}$ над открытым множеством U , содержащим p ; иными словами, $\xi = \rho_{p,U}f$ для $f \in \Gamma(\mathcal{P}, U)$. Тогда $\xi \mapsto f(p)$ задает корректно определенный изоморфизм пучков $\beta(\alpha(\mathcal{P})) \rightarrow \mathcal{P}$. Детали мы оставляем в качестве упражнения.

Однако предпучки P и $\alpha(\beta(P))$, как правило, различны. Например, рассмотрим $P = \{S_U; \rho_{U,V}\}$, где S_U — область главных идеалов K для каждого U и все гомоморфизмы $\rho_{U,V}$ для $U \subsetneq V$ нулевые. Тогда каждому открытому множеству U из M в предпучке $\alpha(\beta(P))$ соответствует нулевой K -модуль. Следующее определение предлагает очевидные необходимые условия для того, чтобы P был изоморфен $\alpha(\beta(P))$; в разд. 5.8 будет показано, что эти условия также и достаточные.

5.7. Определение. Предпучок $\{S_U; \rho_{U,V}\}$ над M называется *полным*, если для открытого множества U , представленного в виде объединения $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ открытых множеств в M , выполняются следующие условия:

(C₁) если для f и g из S_U равенство $\rho_{U_{\alpha},U}f = \rho_{U_{\alpha},U}g$ справедливо при всех α , то $f = g$;

(C₂) для семейства $\{f_{\alpha}\}$ элементов $f_{\alpha} \in S_{U_{\alpha}}$ по всем α , такого, что $\rho_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}, U_{\alpha}} f_{\alpha} = \rho_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}, U_{\beta}} f_{\beta}$ при всех α и β , существует элемент $f \in S_U$, такой, что $f_{\alpha} = \rho_{U_{\alpha}, U} f$ для любого α .

5.8. Предложение. Если P — полный предпучок, то предпучки α (β (P))) и P канонически изоморфны.

Доказательство. Пусть $P = \{S_U; \rho_{U,V}\}$. Определим гомоморфизм предпучков из P в α (β (P))) следующим образом. Для каждого открытого множества $U \subset M$ построим отображение

$$(1) \quad S_U \rightarrow \Gamma(\beta(P), U),$$

$$(2) \quad p \mapsto \rho_p, U f,$$

сопоставляя элементу f из S_U сечение пучка $\beta(P)$ над U . Докажем, что это на самом деле изоморфизм пучков. Для этого надо показать, что каждый из гомоморфизмов вида (1) является изоморфизмом. Инъективность следует из 5.7 (C₁): а именно, если элемент f из S_U отображается в нулевое сечение, то существует покрытие $\{U_{\alpha}\}$ множества U , такое, что $\rho_{U_{\alpha}, U} f = \rho_{U_{\alpha}, U} 0$. Поэтому в силу (C₁) $f = 0 \in S_U$. Чтобы доказать сюръективность, рассмотрим сечение c пучка $\beta(P)$ над U . Тогда для каждого $p \in U$ существует окрестность U_p и элемент $f_p \in S_{U_p}$, такие, что

$$(3) \quad \rho_{q, U_p} f_p = c(q)$$

для любого $q \in U_p$. Из (3) и 5.7 (C₁) следует, что для любых p и q из U

$$(4) \quad \rho_{U_p \cap U_q, U_p} f_p = \rho_{U_p \cap U_q, U_q} f_q.$$

Таким образом, согласно 5.7 (C₂), существует $f \in S_U$, такой, что

$$(5) \quad f_p = \rho_{U_p, U} f$$

для каждого $p \in U$. Теперь из (5), (3) и (2) следует, что f переходит в c при гомоморфизме (1).

5.9. Тензорные произведения. Вначале сделаем несколько предварительных замечаний. Определение тензорного произведения $S \otimes T$ K -модулей S и T аналогично определению 2.1

тензорного произведения $\mathbb{K}$ -модулей. Если $f: S \rightarrow S'$ и $h: T \rightarrow T'$ — гомоморфизмы K -модулей, то их тензорное произведение $f \otimes h$ определяется как единственный гомоморфизм из $S \otimes T$ в $S' \otimes T'$, соответствующий в силу свойства универсальности отображений 2.2 (а) билинейному отображению из $S \times T$ в $S' \otimes T'$

$$(1) \quad (s, t) \mapsto f(s) \otimes h(t).$$

Отметим, что для K -модуля S имеет место канонический изоморфизм

$$(2) \quad S \otimes K \cong S.$$

Действительно, пусть $f: S \otimes K \rightarrow S$ — гомоморфизм, определенный билинейным отображением $(s, k) \mapsto ks$ из $S \times K$ в S . Очевидно, что f сюръективен, и, кроме того, он инъективен в силу равенства $\sum_i (s_i \otimes k_i) = (\sum_i k_i s_i) \otimes 1$. Действительно, если $f(\sum_i (s_i \otimes k_i)) = 0$, то $\sum_i k_i s_i = 0$, а из этого равенства вытекает $\sum_i (s_i \otimes k_i) = 0$.

Пусть теперь $P = \{S_U; \rho_U, \nu\}$ и $P' = \{S'_U; \rho'_U, \nu\}$ — предпучки над M . Их тензорное произведение — это предпучок

$$(3) \quad P \otimes P' = \{S_U \otimes S'_U; \rho_U, \nu \otimes \rho'_U, \nu\}.$$

Если $\{\varphi_U\}: P \rightarrow Q$ и $\{\varphi'_U\}: P' \rightarrow Q'$ — гомоморфизмы предпучков (5.5 (2)), то их тензорное произведение $\{\varphi_U\} \otimes \{\varphi'_U\}$ есть по определению гомоморфизм $\{\varphi_U \otimes \varphi'_U\}$ из $P \otimes P'$ в $Q \otimes Q'$.

Если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ — пучки над M , определим их тензорное произведение $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ как пучок, ассоциированный с тензорным произведением предпучков сечений пучков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$. Иными словами,

$$(4) \quad \mathcal{P} \otimes \mathcal{T} = \beta(\alpha(\mathcal{P}) \otimes \alpha(\mathcal{T})).$$

Далее, для гомоморфизмов пучков $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ и $\gamma: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{T}'$ и соответствующих гомоморфизмов $\{\varphi_U\}: \alpha(\mathcal{P}) \rightarrow \alpha(\mathcal{T})$ и $\{\gamma_U\}: \alpha(\mathcal{P}') \rightarrow \alpha(\mathcal{T}')$ предпучков сечений определим тензорное произведение $\varphi \otimes \gamma$ как гомоморфизм $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}'$, ассоциированный с гомоморфизмом предпучков

$$(5) \quad \{\varphi_U\} \otimes \{\gamma_U\}: \alpha(\mathcal{P}) \otimes \alpha(\mathcal{P}') \rightarrow \alpha(\mathcal{T}) \otimes \alpha(\mathcal{T}').$$

Читатель должен самостоятельно доказать существование канонического изоморфизма

$$(6) \quad (\mathcal{P} \otimes \mathcal{T})_m \cong \mathcal{P}_m \otimes \mathcal{T}_m.$$

В частности, если $\mathcal{K}$ — постоянный пучок $M \times K$, то ввиду (2) имеется изоморфизм

$$(7) \quad \mathcal{P} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{P}.$$

Если, как и раньше, φ и γ обозначают гомоморфизмы пучков, то читателю следует проверить, что

$$(8) \quad (\varphi \otimes \gamma) | (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}')_m = \varphi | \mathcal{P}_m \otimes \gamma | \mathcal{P}'_m.$$

Возникает естественный вопрос: почему мы не определяли тензорное произведение прямо формулами (6) и (8)? Такой путь возможен, но это вовсе не уменьшило бы для нас объем работы, поскольку пришлось бы определять топологию на $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ и проверять свойства 5.1 (а) и (с). Помимо этого, надо было бы доказывать, что $\varphi \otimes \gamma$ непрерывно. В нашем варианте определения пучка $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ и гомоморфизма пучков $\varphi \otimes \gamma$ посредством предпучков доказательства того, что $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ — пучок и $\varphi \otimes \gamma$ — гомоморфизм пучков, уже проведены при исследовании отображений α и β в разд. 5.6.

5.10. Тонкие пучки. Пучок $\mathcal{P}$ над M называется *тонким*, если для каждого локально конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства M и каждого i существует эндоморфизм l_i пучка $\mathcal{P}$, такой, что

$$a) \quad \text{supp } (l_i) \subset U_i,$$

$$b) \quad \sum_i l_i = \text{id}.$$

Здесь под $\text{supp } (l_i)$ (носителем l_i) мы понимаем замыкание множества точек m из M , для которых $l_i | \mathcal{P}_m$ не равны нулю. Мы будем называть $\{l_i\}$ *разбиением единицы для $\mathcal{P}$, подчиненным покрытию $\{U_i\}$ пространства M* .

Примером тонкого пучка служит пучок $\mathcal{C}^\infty(M)$ ростков гладких функций на M . Если $\{U_i\}$ — локально конечное открытое покрытие M , то пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию (теорема 1.11). Определим эндоморфизмы l_i предпучка $\{C^\infty(U); \rho_{U,V}\}$, положив

$$(1) \quad \tilde{l}_i(f) = (\varphi_i | U) \cdot f, \quad f \in C^\infty(U).$$

Ассоциированные эндоморфизмы l_i пучка $\mathcal{C}^\infty(M)$ образуют разбиение единицы для $\mathcal{P}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$.

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ — пучки над M , причем $\mathcal{P}$ — тонкий пучок. Тогда $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ является тонким пучком. В самом деле, если $\{l_i\}$ — разбиение единицы для $\mathcal{P}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, то $\{l_i \otimes \text{id}\}$ образует разбиение единицы для $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$.

5.11. Гомоморфизм пучков $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ определяет гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T})$ модулей глобальных сечений (сечение пучка $\mathcal{P}$ сопоставляется с отображением φ). Оставляем читателю в качестве

упражнения проверку того, что короткая точная последовательность

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

дает точную последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}') \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'').$$

Однако последнее отображение, вообще говоря, сюръективным не является, что видно из следующего примера.

Пусть $\mathcal{P}_{p_1 p_2}$ — пучок «небоскреба» над связным пространством M , слою которого — нулевые K -модули всюду, кроме двух различных точек p_1 и p_2 , слой над которыми равен K . (Топология на $\mathcal{P}_{p_1 p_2}$ однозначно определена требованием, чтобы $\mathcal{P}_{p_1 p_2}$ был пучком.) Пусть $\mathcal{K}$, как обычно, обозначает постоянный пучок со слоем K . Имеется очевидный гомоморфизм $\mathcal{K}$ на $\mathcal{P}_{p_1 p_2}$, тождественный на слоях над точками p_1 и p_2 и нулевой на прочих слоях. Ассоциированное отображение $\Gamma(\mathcal{K}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}_{p_1 p_2})$ не может быть сюръективным, поскольку $\Gamma(\mathcal{K}) \cong K$ и $\Gamma(\mathcal{P}_{p_1 p_2}) \cong \cong K \oplus K$.

Точность последовательности (1) есть чисто локальное свойство, в то время как точность (2) — уже глобальное свойство. Мы увидим вскоре, что некоторые модули когомологий с коэффициентами в пучках позволяют продолжить последовательность (2) и тем самым дают меру отклонения гомоморфизма $\Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'')$ от сюръективности.

5.12. Теорема. Пусть $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — сюръективный гомоморфизм пучков с ядром $\mathcal{R}$. Предположим, что $\mathcal{R}$ — тонкий пучок. Тогда гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T})$ сюръективен.

Доказательство. Пусть t — глобальное сечение пучка $\mathcal{T}$. Мы должны построить такое сечение s пучка $\mathcal{P}$, что $\varphi \circ s = t$. По свойству 5.1 (а) для пучков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ и в силу непрерывности φ и t существует покрытие $\{U_i\}$ пространства M открытыми множествами и сечение s_i пучка $\mathcal{P}$ над U_i для каждого i , такие, что

$$(1) \quad \varphi \circ s_i = t|_{U_i}.$$

Поскольку M паракомпактно, мы можем предполагать, что покрытие $\{U_i\}$ локально конечно. Разности

$$(2) \quad s_{ij} = s_i - s_j$$

является сечением ядра $\mathcal{R}$ над $U_i \cap U_j$, и на пересечении $U_i \cap U_j \cap U_k$ разности удовлетворяют условию

$$(3) \quad s_{ij} - s_{jk} = s_{ik}.$$

Пусть теперь $\{I_i\}$ — разбиение единицы для $\mathcal{R}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Рассмотрим сечение $l_j \circ s_{ij}$ пучка $\mathcal{R}$ над

$U_i \cap U_j$. Поскольку носитель l_j лежит в U_j , мы можем продолжить сечение $l_j \circ s_{ij}$ до непрерывного сечения пучка $\mathcal{R}$ над U_i , положив его равным нулю в точках из $U_i - U_j$. Положим

$$(4) \quad s'_i = \sum_j l_j \circ s_{ij}.$$

Тогда s'_i — сечение пучка $\mathcal{R}$ над U_i , и в силу (3) и (4) на $U_i \cap U_j$

$$(5) \quad s'_i - s'_j = \sum_k l_k \circ s_{ik} - \sum_k l_k \circ s_{jk} = \sum_k l_k \circ s_{ij} = s_{ij}.$$

Поэтому

$$(6) \quad s_i - s'_i = s_j - s'_j$$

на $U_i \cap U_j$. Если мы положим $s(m) = (s_i - s'_i)(m)$ для $m \in U_i$, то s будет корректно определенным глобальным сечением пучка $\mathcal{P}$ со свойством $\varphi \circ s = t$.

5.13. Определения. K -модуль X называется модулем *без кручения*, если из равенства $kx = 0$, $x \in X$, $k \in K$, следует, что либо k , либо x равен нулю. Пучок K -модулей будем называть пучком K -модулей *без кручения*, если каждый его слой является K -модулем без кручения.

Нам понадобится следующая основная лемма, связывающая тензорные произведения и точные последовательности. Это первое из двух используемых в этой главе фундаментальных алгебраических утверждений, принимаемых без доказательства. (Второе такое утверждение — формула Кюннета из разд. 5.42.) Доказательства этих результатов довольно длинные и не представляют интереса с точки зрения основных целей этой главы. Заинтересованный читатель найдет доказательство леммы 5.14 в книге Спеньера [28, с. 286].

5.14. Лемма. Пусть

$$(1) \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

— точная последовательность K -модулей и B — некоторый K -модуль. Индуцированная последовательность

$$(2) \quad A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$$

(ее гомоморфизмы являются тензорным произведением гомоморфизмов последовательности (1) и тождественного отображения модуля B) точна, но гомоморфизм $A' \otimes B \rightarrow A \otimes B$ не обязательно является инъективным. Однако если A'' или B — модуль без кручения, то последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$$

точна.

(Отметим, что требование, чтобы K было областью главных идеалов, впервые в этой главе используется в (3).)

5.15. Теорема. Пусть

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

— точная последовательность пучков над M и $\mathcal{T}$ — также пучок над M . Если один из пучков $\mathcal{T}$ или $\mathcal{P}''$ без кручения, то последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P}' \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}'' \otimes \mathcal{T} \rightarrow 0$$

точна. Если, кроме того, $\mathcal{T}$ или $\mathcal{P}'$ — тонкий пучок, то точна последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}' \otimes \mathcal{T}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}'' \otimes \mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

Доказательство. Точность последовательности (2) следует из леммы 5.14. Если $\mathcal{P}'$ или $\mathcal{T}$ — тонкий пучок, то $\mathcal{P}' \otimes \mathcal{T}$ тонок (см. разд. 5.10); это вместе с 5.11 (2) и теоремой 5.12 доказывает точность последовательности (3).

Коцепные комплексы

5.16. Определения. Коцепной комплекс C^* состоит из последовательности K -модулей и гомоморфизмов

$$(1) \quad \dots \rightarrow C^{q-1} \rightarrow C^q \rightarrow C^{q+1} \rightarrow \dots,$$

определенных для целых чисел q , таких, что образ каждого гомоморфизма *лежит* в ядре последующего. Гомоморфизм $C^q \rightarrow C^{q+1}$ (обычно мы будем обозначать его d^q или просто d , если размерность не играет роли) называется q -м кограничным оператором. Ядро $Z^q(C^*)$ оператора d^q называется *модулем коциклов размерности q* (или q -коциклов) комплекса C^* , а образ $B^q(C^*)$ оператора d^{q-1} называется его *модулем кограниц размерности q* (или q -кограниц). Модуль когомологий размерности q $H^q(C^*)$ — это фактормодуль

$$(2) \quad H^q(C^*) = Z^q(C^*)/B^q(C^*).$$

Пусть C^* и D^* — коцепные комплексы. Коцепное отображение $C^* \rightarrow D^*$ состоит из семейства гомоморфизмов $C^q \rightarrow D^q$, таких, что диаграммы

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} C^{q+1} & \rightarrow & D^{q+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_q & \rightarrow & D^q \end{array}$$

коммутативны при всех q . Это означает, что коцепное отображение переводит модуль q -коциклов комплекса C^* в модуль q -коциклов комплекса D^* , а модуль q -кограниц комплекса C^* — в мо-

дуль q -кограниц комплекса D^* . Следовательно, имеется индуцированный гомоморфизм модулей когомологий

$$(4) \quad H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*).$$

Композиция $C^* \rightarrow E^*$ коцепных отображений $C^* \rightarrow D^*$ и $D^* \rightarrow E^*$ индуцирует в когомологиях гомоморфизм $H^q(C^*) \rightarrow H^q(E^*)$, совпадающий с композицией соответствующих индуцированных гомоморфизмов $H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$ и $H^q(D^*) \rightarrow H^q(E^*)$.

Последовательность коцепных отображений

$$(5) \quad 0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$$

называется *короткой точной последовательностью*, если при любом q последовательность

$$(6) \quad 0 \rightarrow C^q \rightarrow D^q \rightarrow E^q \rightarrow 0$$

является короткой точной последовательностью K -модулей. Гомоморфизм между короткими точными последовательностями $0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow \bar{C}^* \rightarrow \bar{D}^* \rightarrow \bar{E}^* \rightarrow 0$ коцепных комплексов состоит из коцепных отображений $C^* \rightarrow \bar{C}^*$, $D^* \rightarrow \bar{D}^*$ и $E^* \rightarrow \bar{E}^*$, таких, что коммутативна следующая диаграмма:

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C^* & \rightarrow & D^* & \rightarrow & E^* \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \bar{C}^* & \rightarrow & \bar{D}^* & \rightarrow & \bar{E}^* \rightarrow 0 \end{array}$$

5.17. Предложение. Для короткой точной последовательности 5.16 (5) коцепных отображений при любом q существуют гомоморфизмы

$$(1) \quad H^q(E^*) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(C^*),$$

такие, что последовательность

$$(2) \quad \begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(E^*) \xrightarrow{\partial} H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*) \rightarrow \\ \rightarrow H^q(E^*) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(C^*) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

точна. При этом гомоморфизм ∂ обладает свойством естественности, т. е. для гомоморфизма 5.16 (7) коротких точных последовательностей коцепных комплексов диаграмма

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} H^q(E^*) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(C^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\bar{E}^*) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(\bar{C}^*) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Чтобы определить ∂ , мы рассмотрим коммутативную диаграмму (4), в которой для удобства упоминания некоторые стрелки поименованы. Пусть σ — коцикл в E^q . Поскольку α сюръективно, существует такой элемент $\tilde{\sigma} \in D^q$, что $\alpha(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Квадрат I коммутативен и, так как σ — коцикл, $d(\tilde{\sigma})$ переходит в нуль при отображении в E^{q+1} . Значит, в силу точности горизонтальных последовательностей $d(\tilde{\sigma})$ лежит в образе гомоморфизма β ; тогда существует $\sigma' \in C^{q+1}$, такой, что $\beta(\sigma') = d(\tilde{\sigma})$. Коммутативность квадрата II, инъективность гомоморфизма γ и свойство $d \circ d = 0$ влекут за собой равенство $d\sigma' = 0$, т. е. σ' — коцикл. Элемент σ' определен не единственным образом, он зависит от выбора элемента $\tilde{\sigma} \in D^q$, удовлетворяющего условию $\alpha(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Однако, поиск в квадрате III показывает, что σ' определяется элементом σ с точностью до

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \rightarrow & C^{q+2} & \xrightarrow{\gamma} & D^{q+2} & \rightarrow & E^{q+2} \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & \text{II} & d\uparrow & & \uparrow & \\
 (4) \quad 0 & \rightarrow & C^{q+1} & \xrightarrow{\beta} & D^{q+1} & \rightarrow & E^{q+1} \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & \text{III} & d\uparrow & \text{I} & \uparrow & \\
 0 & \rightarrow & C^q & \rightarrow & D^q & \xrightarrow{\alpha} & E^q \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot &
 \end{array}$$

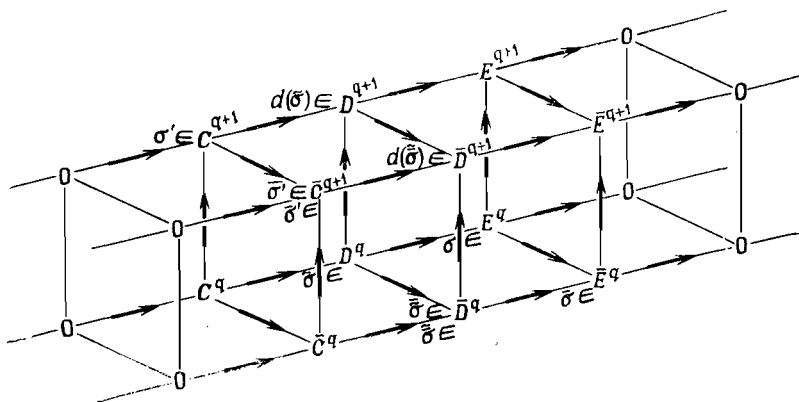
кограницы. Мы получили корректно определенное отображение

$$(5) \quad Z^q(E^*) \rightarrow H^{q+1}(C^*).$$

Нетрудно убедиться, что это гомоморфизм. Легко видеть также, что $B^q(E^*)$ является ядром этого гомоморфизма, так что (5) индуцирует гомоморфизм $Z^q(E^*)/B^q(E^*) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(C^*)$, т. е. гомоморфизм (1).

Проверка точности последовательности (2) сводится к проверке точности в трех ее членах — в $H^q(C^*)$, в $H^q(D^*)$ и в $H^q(E^*)$ и на каждом из этих этапов в нее входит проверка двух включений. Эти шесть шагов осуществляются простым поиском на диаграмме (4). Мы оставляем их читателю в качестве упражнения.

Для доказательства коммутативности диаграммы (3) мы должны детально проследить путь некоторых элементов по следующей коммутативной решетке:



Отправляясь от коцикла $\sigma \in E^q$, мы переходим к его прообразу $\tilde{\sigma} \in D^q$, который отображается в $d(\tilde{\sigma}) \in D^{q+1}$. Мы уже знаем, что $d(\tilde{\sigma})$ является образом некоторого элемента $\sigma' \in C^{q+1}$, который в свою очередь отображается в коцикл $\bar{\sigma}' \in \bar{C}^{q+1}$. Когомологический класс коцикла σ в $H^q(E^*)$ при композиции $H^q(E^*) \xrightarrow{d} H^{q+1}(C^*) \rightarrow H^{q+1}(\bar{C}^*)$ переходит в когомологический класс коцикла $\bar{\sigma}'$ в $H^{q+1}(\bar{C}^*)$. С другой стороны, мы можем сначала отобразить σ в $\tilde{\sigma} \in \bar{E}^q$, далее выбрать прообраз $\tilde{\tilde{\sigma}} \in \bar{D}^q$, отобразить его в $d(\tilde{\tilde{\sigma}}) \in \bar{D}^{q+1}$ и, наконец, перейти к $\bar{\tilde{\sigma}}' \in \bar{C}^{q+1}$. Коцикл $\bar{\tilde{\sigma}}'$ лежит в когомологическом классе в $H^{q+1}(\bar{C}^*)$, являющемся образом при композиции $H^q(E^*) \rightarrow H^q(\bar{E}^*) \xrightarrow{d} H^{q+1}(\bar{C}^*)$ когомологического класса, содержащего коцикл σ . Чтобы проверить коммутативность диаграммы (3), достаточно убедиться, что $\bar{\tilde{\sigma}}' - \bar{\sigma}'$ является кограницей. Элемент $\tilde{\sigma} \in D^q$ отображается в $\tilde{\tilde{\sigma}} \in \bar{D}^q$, а элементы $\tilde{\tilde{\sigma}}$ и $\tilde{\tilde{\sigma}}$ из $\bar{D}^q$ переходят в $\bar{\tilde{\sigma}} \in \bar{E}^q$; поэтому существует $\gamma \in \bar{C}^q$, который отображается в $\bar{\tilde{\sigma}} - \tilde{\sigma}$. Нетрудно проверить, что $d\gamma = \bar{\tilde{\sigma}}' - \bar{\sigma}'$, что и завершает доказательство теоремы 5.17.

Подобного рода доказательства, носящие название «метода диаграммного поиска», по сути стандартны, хотя порой и утомительны. В дальнейшем рассуждения методом диаграммного поиска мы будем оставлять читателю в качестве упражнения.

Аксиоматическая теория пучков

5.18. Определение. Теория когомологий ¹⁾ $\mathcal{H}$ для M с коэффициентами в пучках K -модулей над M — это

(I) K -модуль $H^q(M, \mathcal{P})$ для каждого пучка $\mathcal{P}$ и целого числа q ;

(II) гомоморфизм $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{P}')$ для каждого q и каждого гомоморфизма пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$;

(III) гомоморфизм $H^q(M, \mathcal{P}'') \rightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{P}')$ для каждой короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

и каждого q , которые обладают следующими свойствами:

(а) $H^q(M, \mathcal{P}) = 0$ для $q < 0$ и существует такой изоморфизм $H^0(M, \mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{P})$, что для каждого гомоморфизма $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{P}) & \cong & \Gamma(\mathcal{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(M, \mathcal{P}') & \cong & \Gamma(\mathcal{P}') \end{array}$$

коммутативна;

(b) $H^q(M, \mathcal{P}) = 0$ для всех $q > 0$, если $\mathcal{P}$ — тонкий пучок;

(с) если последовательность пучков $0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$ точна, то точна последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^q(M, \mathcal{P}') \rightarrow H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{P}'') \rightarrow \\ \rightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{P}') \rightarrow \dots; \end{aligned}$$

(d) тождественный гомоморфизм $\text{id}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ индуцирует тождественный гомоморфизм $\text{id}: H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{P})$;

(е) если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{P}'' \end{array}$$

коммутативна, то при каждом q коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, \mathcal{P}) & \xrightarrow{\quad} & H^q(M, \mathcal{P}') \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H^q(M, \mathcal{P}'') \end{array}$$

¹⁾ Не следует отождествлять термин *теория когомологий* для M с часто встречающимся в алгебраической топологии термином *теория когомологий* — Прим. перев.

(f) для каждого гомоморфизма коротких точных последовательностей пучков

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{P}' & \rightarrow & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P}'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{T}' & \rightarrow & \mathcal{T} & \rightarrow & \mathcal{T}'' \rightarrow 0 \end{array}$$

коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, \mathcal{P}'') & \rightarrow & H^{q+1}(M, \mathcal{P}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(M, \mathcal{T}'') & \rightarrow & H^{q+1}(M, \mathcal{T}') \end{array}$$

Модуль $H^q(M, \mathcal{P})$ называется *модулем когомологий размерности q* (короче, q -м *модулем когомологий*) *пространства M с коэффициентами в пучке $\mathcal{P}$* относительно теории когомологий $\mathcal{H}$.

5.19. Определение. Точная последовательность пучков

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots$$

называется *резольвентой* пучка $\mathcal{A}$. Резольвента называется *тонкой* (соответственно *без кручения*), если каждый из пучков $\mathcal{C}_i$ является тонким (без кручения).

Каждой резольвенте (1) пучка $\mathcal{A}$ и каждому пучку $\mathcal{C}$ мы сопоставим коцепной комплекс

$$(2) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \dots,$$

обозначаемый через $\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})$. Коцепями размерности $q \geq 0$ являются элементы из $\Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P})$, модули коцепей отрицательной размерности по определению нулевые. Обратите внимание, что модуль $\Gamma(\mathcal{A} \otimes \mathcal{P})$ не входит в коцепной комплекс (2). Гомоморфизмы этого комплекса индуцированы тензорным произведением гомоморфизмов резольвенты (1) и тождественного отображения $\text{id}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. В силу точности последовательности (1) в

$$(3) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{P} \rightarrow \dots$$

композиция двух последовательных отображений нулевая, т. е. (2) — действительно коцепной комплекс.

Произвольный гомоморфизм пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, тензорно умноженный на тождественное отображение пучка $\mathcal{C}_i$, индуцирует гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{C}_i \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_i \otimes \mathcal{P}')$. Последнее отображение коммутирует с кограничным оператором соответствующего коцепного комплекса, следовательно, определено коцепное отображение

$$(4) \quad \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}').$$

5.20. Существование теорий когомологий. В этом разделе мы покажем, что каждой тонкой резольвенте без кручения постоянного пучка $\mathcal{K} = M \times K$

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots$$

отвечает теория когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей над M . Существование таких резольвент будет доказано позже в разделах, где обсуждаются классические теории когомологий (см., в частности, 5.26 (7) и (11)). Пока же мы будем предполагать резольвенту (1) заданной. Соответствующая теория когомологий определяется так:

(I) каждому пучку $\mathcal{P}$ и целому числу q мы сопоставим q -модуль когомологий коцепного комплекса $\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})$, т. е. положим

$$H^q(M, \mathcal{P}) = H^q(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}));$$

(II) каждому гомоморфизму пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ и целому числу q мы сопоставим гомоморфизм $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{P}')$, индуцированный (см. 5.16 (4)) коцепным отображением $\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}')$ из 5.19 (4);

(III) каждая короткая точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

индуцирует короткую точную последовательность коцепных отображений

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}') \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}'') \rightarrow 0$$

(поскольку пучки $\mathcal{C}_i$ тонкие и без кручения, мы можем воспользоваться теоремой 5.15). Следовательно, по предложению 5.17 имеется гомоморфизм $H^q(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}')) \rightarrow H^{q+1}(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}'))$, который мы принимаем за необходимое нам отображение $H^q(M, \mathcal{P}'') \rightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{P}')$, отвечающее короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$$

и целому числу q .

Аксиома 5.18 (d), очевидно, выполнена. Замечание, приведенное после 5.16 (4), доказывает свойство 5.18 (e). Аксиомы (c) и (f) выполнены в силу предложения 5.17.

Пусть $\mathcal{Z}_q$ обозначает ядро $\mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_{q+1}$. Из точности (1) вытекает, что последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{Z}_q \rightarrow \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{Z}_{q+1} \rightarrow 0$$

точна; подпучок $\mathcal{Z}_q$, как и $\mathcal{C}_q$, является пучком без кручения. Из теоремы 5.15 следует, что для произвольного пучка $\mathcal{P}$ последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{Z}_q \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}_{q+1} \otimes \mathcal{P} \rightarrow 0$$

точна; наконец, из (3) и 5.11 (2) мы получаем точную последовательность

$$(4) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{Z}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Z}_{q+1} \otimes \mathcal{P}).$$

В частности, $\Gamma(\mathcal{L}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P})$ инъективно. Значит, поскольку гомоморфизм

$$(5) \quad \Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_{q+1} \otimes \mathcal{P})$$

разлагается в композицию

$$(6) \quad \Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{L}_{q+1} \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_{q+1} \otimes \mathcal{P}),$$

из точности последовательности (4) вытекает, что ядро (5) совпадает с подмодулем $\Gamma(\mathcal{L}_q \otimes \mathcal{P})$ модуля $\Gamma(\mathcal{C}_q \otimes \mathcal{P})$. Следовательно, для $q \geq 0$

$$(7) \quad H^q(M, \mathcal{P}) = H^q(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})) = \Gamma(\mathcal{L}_q \otimes \mathcal{P}) / \text{Im}(\Gamma(\mathcal{C}_{q-1} \otimes \mathcal{P})).$$

В случае тонкого пучка $\mathcal{P}$ по теореме 5.15 точна вся последовательность

$$(8) \quad 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{L}_{q-1} \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}_{q-1} \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{L}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow 0;$$

в силу последних двух формул (7) и (8) $H^q(M, \mathcal{P}) = 0$ при $q > 0$. Таким образом, аксиома (б) выполнена.

Наконец, очевидно, что $H^q(M, \mathcal{P}) = 0$ при $q < 0$, и при $q = 0$ изоморфизм

$$(9) \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{C}_0$$

индуцирует для произвольного пучка $\mathcal{P}$ изоморфизм

$$(10) \quad \mathcal{P} \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{P},$$

а следовательно, изоморфизм

$$\Gamma(\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{P}) = H^0(M, \mathcal{P}),$$

такой, что для каждого гомоморфизма $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{P}) \cong H^0(M, \mathcal{P}) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\mathcal{P}') \cong H^0(M, \mathcal{P}') & & \end{array}$$

Таким образом, аксиома (а) выполнена.

5.21. Определение. Пусть $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ — две теории когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей над M . Гомоморфизм теории $\mathcal{H}$ в теорию $\tilde{\mathcal{H}}$ — это набор гомоморфизмов

$$(1) \quad H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \tilde{H}^q(M, \mathcal{P})$$

для каждого пучка $\mathcal{P}$ и целых чисел q , таких, что выполняются следующие условия:

(а) при $q = 0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{P}) & \cong & \Gamma(\mathcal{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^0(M, \mathcal{P}) & \cong & \Gamma(\mathcal{P}) \end{array}$$

коммутативна;

(б) для каждого гомоморфизма $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ и любого целого числа q диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, \mathcal{P}) & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{T}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^q(M, \mathcal{P}) & \rightarrow & \tilde{H}^q(M, \mathcal{T}) \end{array}$$

коммутативна;

(с) для каждой короткой точной последовательности пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^q(M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}^{q+1}(M, \mathcal{R}) \end{array}$$

коммутативна при любом q .

Изоморфизм $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ — это гомоморфизм этих теорий, для которого все отображения $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \tilde{H}^q(M, \mathcal{P})$ — изоморфизмы. *Тожественный гомоморфизм теории $\mathcal{H}$ на себя* — это гомоморфизм $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, в котором гомоморфизмы $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \tilde{H}^q(M, \mathcal{P})$ тождественны при всех q .

Покажем, что между любыми двумя теориями для M имеется единственный гомоморфизм. Введем сначала некоторые понятия.

5.22. Пучок ростков разрывных сечений пучка $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{P}$ — пучок над M . Его *разрывное сечение* над открытым множеством $U \subset M$ — это произвольное, не обязательно непрерывное отображение $f: U \rightarrow \mathcal{P}$, такое, что $\pi \circ f = \text{id}$. Сопоставление каждому открытому множеству $U \subset M$ модуля всех разрывных сечений пучка $\mathcal{P}$ над U задает предпучок; его ассоциированный пучок $\mathcal{P}_0$ и называется *пучком ростков разрывных сечений*. Он всегда является тонким. Действительно, пусть $\{U_i\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства M . Выберем теперь вписанное покрытие (измельчение) $\{\bar{V}_i\}$, такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ при каждом i (это возможно в силу упр. 3 гл. 1). По поводу выбора подобного покрытия для произвольного паракомпактного хаусдорфова про-

странства см. [13, гл. 5, задача V (a)]. Поставим в соответствие каждой точке M содержащее ее множество V_i , и для любого i определим функцию φ_i на M так, чтобы в точках, которым сопоставлено множество V_i , она принимала значение 1, а в остальных точках — значение нуль. Очевидно, что $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$, $\sum \varphi_i \equiv 1$. Определим для каждого φ_i эндоморфизм $\tilde{l}_i$ предпучка разрывных сечений пучка $\mathcal{P}$, положив

$$(1) \quad \tilde{l}_i(s)(m) = \varphi_i(m) s(m)$$

для каждого разрывного сечения s пучка $\mathcal{P}$ над открытым множеством $U \subset M$ и каждого $m \in U$. Этот эндоморфизм индуцирует эндоморфизм l_i пучка $\mathcal{P}_0$. Легко видеть, что $\{l_i\}$ образует разбиение единицы на $\mathcal{P}_0$, подчиненное локально конечному открытию $\{U_i\}$ пространства M . Поэтому пучок $\mathcal{P}_0$ тонкий.

Имеется естественное вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}_0$: каждый элемент слоя $\mathcal{P}_m$ можно описать как значение в точке m (непрерывного) сечения s пучка $\mathcal{P}$, определенного в некоторой окрестности точки m , и этому значению $s(m)$ мы поставим в соответствие росток отображения s в точке m в $\mathcal{P}_0$. Пусть $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_0/\mathcal{P}$. Таким образом, для любого пучка $\mathcal{P}$ мы построили короткую точную последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0,$$

в которой средний пучок тонкий.

5.23. Теорема. Пусть $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ — теории когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей над M . Существует единственный гомоморфизм $\mathcal{H}$ в $\tilde{\mathcal{H}}$.

Доказательство. Сначала докажем единственность. Предположим, что имеется гомоморфизм из $\mathcal{H}$ в $\tilde{\mathcal{H}}$ и задан пучок $\mathcal{P}$. Из аксиом 5.18 и 5.21, примененных к точной последовательности 5.22 (2) (в которой, как мы помним, средний пучок тонкий), получаем коммутативную диаграмму

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} \Gamma(\mathcal{P}_0) & \rightarrow & \Gamma(\tilde{\mathcal{P}}) & \rightarrow & H^1(M, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\ \Gamma(\mathcal{P}_0) & \rightarrow & \Gamma(\tilde{\mathcal{P}}) & \rightarrow & \tilde{H}^1(M, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \end{array}$$

и для каждого $q \geq 2$ коммутативную диаграмму

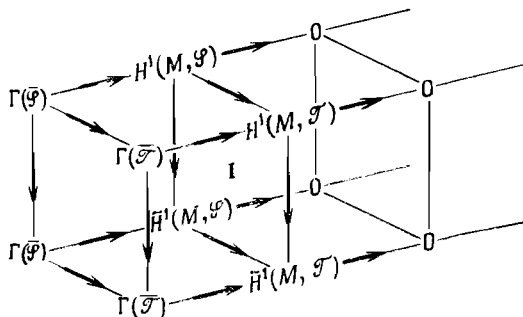
$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & H^{q-1}(M, \tilde{\mathcal{P}}) & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \tilde{H}^{q-1}(M, \tilde{\mathcal{P}}) & \rightarrow & \tilde{H}^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow 0 \end{array}$$

В диаграммах (1) и (2) горизонтальные последовательности точны. Единственность гомоморфизмов 5.21 (1) получается для $q = 0$

из 5.21 (а), для $q = 1$ из диаграммы (1), а для всех $q > 1$ из диаграммы (2) по индукции.

Займемся теперь существованием гомоморфизма теории $\mathcal{H}$ в теорию $\tilde{\mathcal{H}}$. Определим требуемые гомоморфизмы для $q = 0$ с помощью 5.21 (а), и очевидно, что при $q = 0$ условие 5.21 (b) выполнено. При $q = 1$ воспользуемся диаграммой (1) и по индукции определим нужные гомоморфизмы при $q > 1$ с помощью диаграммы (2). Чтобы доказать, что это действительно гомоморфизм теорий, осталось показать, что 5.21 (b) выполняется для $q > 0$ и 5.21 (с) выполняется для всех q .

Для $q = 1$ условие 5.21 (b) вытекает из следующей решетки, составленной из двух экземпляров диаграммы (1):



Здесь коммутативность правой грани I выводится из априорной коммутативности остальных граней. Условие 5.21 (b) для $q > 1$ следует по индукции из рассмотрения аналогичной диаграммы, построенной с помощью (2).

Для доказательства свойства 5.21 (с) рассмотрим короткую точную последовательность

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0.$$

Пусть $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{P}_0$ — пучки ростков разрывных сечений пучков $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ соответственно. Композиция $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_0$ является вложением $\mathcal{R}$ в $\mathcal{P}_0$. Обозначим через $\mathcal{G}$ факторпучок $\mathcal{P}_0/\mathcal{R}$. Как и в разд. 5.22, положим $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0/\mathcal{R}$. Имеются однозначно определенные гомоморфизмы $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$ и $\bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{G}$, такие, что следующая диаграмма с точными строками коммутативна:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{T} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{P}_0 & \rightarrow & \mathcal{G} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{R}_0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{R}} \rightarrow 0 \end{array}$$

Из аксиом 5.18, примененных к этой диаграмме, следует, что имеют место коммутативные диаграммы

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{P}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{T}) & \rightarrow & H^1(M, \mathcal{R}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \dots & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{P}_0) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{G}) & \rightarrow & H^1(M, \mathcal{R}) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{id} \\ \dots & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{R}_0) & \rightarrow & \Gamma(\overline{\mathcal{R}}) & \rightarrow & H^1(M, \mathcal{R}) \rightarrow 0 \end{array}$$

и (при $q \geq 1$)

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{P}) & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{T}) & \rightarrow & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) \rightarrow \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \text{id} & & \\ 0 & \rightarrow & H^q(M, \overline{\mathcal{R}}) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Гомоморфизм $H^0(M, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{R})$ в силу (6) совпадает с композицией

$$(8) \quad H^0(M, \mathcal{T}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\mathcal{T}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{G})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{P}_0) \xleftarrow{\cong} \Gamma(\overline{\mathcal{R}})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{R}_0) \xrightarrow{\cong} H^1(M, \mathcal{R}).$$

Из (7) получаем, что $H^q(M, \mathcal{T}) \rightarrow H^{q+1}(M, \mathcal{R})$ при $q \geq 1$ совпадает с композицией

$$(9) \quad H^q(M, \mathcal{T}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{G}) \xleftarrow{\cong} H^q(M, \overline{\mathcal{R}}) \xrightarrow{\cong} H^{q+1}(M, \mathcal{R}).$$

В свою очередь из (8) и соответствующей последовательности для теории $\tilde{\mathcal{H}}$ получаем диаграмму

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} H^0(M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(\mathcal{T}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{G})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{P}_0) & \xleftarrow{\cong} & \Gamma(\overline{\mathcal{R}})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{R}_0) \xrightarrow{\cong} H^1(M, \mathcal{R}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\ \tilde{H}^0(M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(\mathcal{T}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{G})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{P}_0) & \xleftarrow{\cong} & \Gamma(\overline{\mathcal{R}})/\text{Im } \Gamma(\mathcal{R}_0) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^1(M, \mathcal{R}) \end{array}$$

в которой первый и последний квадраты коммутативны по определению гомоморфизмов $H^0(M, \mathcal{T}) \rightarrow \tilde{H}^0(M, \mathcal{T})$ и $H^1(M, \mathcal{R}) \rightarrow \tilde{H}^1(M, \mathcal{R})$, а средние квадраты коммутативны из очевидных соображений. Это доказывает свойство 5.21 (с) при $q = 0$. Последовательность (9) и ее аналог для теории $\tilde{\mathcal{H}}$ могут быть включены в диаграмму

$$(11) \quad \begin{array}{ccccccc} H^q(M, \mathcal{T}) & \rightarrow & H^q(M, \mathcal{G}) & \xleftarrow{\cong} & H^q(M, \overline{\mathcal{R}}) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^q(M, \mathcal{T}) & \rightarrow & \tilde{H}^q(M, \mathcal{G}) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}^q(M, \overline{\mathcal{R}}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}^{q+1}(M, \mathcal{R}) \end{array}$$

Здесь последний квадрат коммутативен по определению гомоморфизма $H^{q+1}(M, \mathcal{R}) \rightarrow \tilde{H}^{q+1}(M, \mathcal{R})$, а первые два квадрата коммутативны в силу 5.21 (b). Это завершает доказательство свойства 5.21 (c) при $q \geq 1$, и тем самым теорема 5.23 полностью доказана.

Следствие. *Гомоморфизм между теориями когомологий $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ обязательно является изоморфизмом. Две теории когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей над M изоморфны и соответствующий изоморфизм однозначно определен.*

Доказательство. Пусть задан гомоморфизм теорий $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$. По теореме 5.23 существует гомоморфизм $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$. Композиция $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$ в силу единственности совпадает с тождественным отображением пучка $\mathcal{H}$ и аналогичное утверждение верно для $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$. Отсюда следует, что $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ и $\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}$ — изоморфизмы.

5.24. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{H} & \rightarrow & \mathcal{C}_0 & \rightarrow & \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H} & \rightarrow & \tilde{\mathcal{C}}_0 & \rightarrow & \tilde{\mathcal{C}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_2 \rightarrow \dots \end{array}$$

горизонтальными строками которой являются тонкие резольвенты без кручения постоянного пучка $\mathcal{H}$. Мы уже видели в разд. 5.20, что каждая такая резольвента определяет теорию когомологий. Обозначим теории, отвечающие верхней и нижней резольвентам этой диаграммы, через $\mathcal{H}$ и $\tilde{\mathcal{H}}$ соответственно. Мы утверждаем, что гомоморфизм резольвент из диаграммы (1) индуцирует гомоморфизм теорий $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$, который в силу следствия теоремы 5.23 должен быть изоморфизмом. Действительно, для каждого пучка $\mathcal{P}$ мы имеем коцепное отображение $\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P})$ и, значит, при каждом целом q гомоморфизм $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \tilde{H}^q(M, \mathcal{P})$. Читателю остается несложное упражнение по проверке аксиом гомоморфизма теорий когомологий 5.21 (a), (b), (c). В разд. 5.36 эта процедура построения гомоморфизма теорий когомологий будет использована для доказательства изоморфности когомологий де Рама и дифференцируемой сингулярной теории когомологий.

5.25. Теорема. *Пусть $\mathcal{H}$ — теория когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей. Рассмотрим тонкую резольвенту пучка $\mathcal{P}$*

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots$$

Тогда имеется канонический изоморфизм

$$(2) \quad H^q(M, \mathcal{P}) \cong H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*)) \text{ при всех } q.$$

Доказательство. В силу точности резольвенты (1) последовательность $0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_0) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_1)$ точна и $H^0(M, \mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{P}) \cong H^0(\Gamma(\mathcal{E}^*))$. Пусть $\mathcal{K}_q$ обозначает ядро $\mathcal{E}_q \rightarrow \mathcal{E}_{q+1}$ при $q \geq 1$. В силу точности последовательности (1) точна как последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}_q \rightarrow \mathcal{E}_q \rightarrow \mathcal{K}_{q+1} \rightarrow 0$$

при $q \geq 1$, так и последовательность

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{K}_1 \rightarrow 0.$$

Длинная точная последовательность когомологий, определяемая последовательностью (4), вместе с тем фактом, что $\mathcal{E}_0$ — тонкий пучок, дает изоморфизмы ($q > 1$)

$$(5) \quad H^q(M, \mathcal{P}) \cong H^{q-1}(M, \mathcal{K}_1),$$

$$(6) \quad H^1(M, \mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{K}_1)/\text{Im } \Gamma(\mathcal{E}_0) \cong H^1(\Gamma(\mathcal{E}^*)).$$

Аналогичные рассуждения, примененные к (3) (пучки $\mathcal{E}_i$ тонкие), приводят к изоморфизмам при $q > 1$

$$(7) \quad H^q(M, \mathcal{P}) \cong H^{q-1}(M, \mathcal{K}_1) \cong H^{q-2}(M, \mathcal{K}_2) \cong \dots \\ \dots \cong H^1(M, \mathcal{K}_{q-1}) \cong \Gamma(\mathcal{K}_q)/\text{Im } \Gamma(\mathcal{E}_{q-1}) \cong H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*)).$$

На этом наше знакомство с аксиоматической теорией когомологий с коэффициентами в пучках прерывается вплоть до разд. 5.42, где будут рассмотрены мультипликативные структуры. Сейчас мы собираемся рассмотреть четыре теории когомологий для дифференцируемого многообразия: теории Александра—Спеньера, де Рама, Чеха и сингулярную теорию. В силу следствия к теореме 5.23 эти теории будут изоморфны, причем соответствующий изоморфизм единствен. Помимо этого мы изложим классический подход к построению этих теорий, и будет показано, что классические варианты соответствуют когомологиям с коэффициентами в постоянных пучках.

Классические теории когомологий

Когомологии Александра—Спеньера

5.26. Для наших построений достаточно предполагать M паракомпактным и хаусдорфовым. Пусть $U \subset M$ открыто и K — область главных идеалов. Через U^{p+1} мы обозначаем $(p+1)$ -кратное произведение на себя пространства U . Отображения $U^{p+1} \rightarrow K$

относительно поточечного сложения образуют K -модуль $A^p(U, K)$. При каждом $p \geq 0$ определим гомоморфизм

$$(1) \quad d: A^p(U, K) \rightarrow A^{p+1}(U, K)$$

формулой

$$(2) \quad df(m_0, \dots, m_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f(m_0, \dots, \widehat{m}_i, \dots, m_{p+1})$$

для каждого $f \in A^p(U, K)$ и $(m_0, \dots, m_{p+1}) \in U^{p+2}$, где значок $\widehat{}$ означает, что соответствующий член опущен. Легко проверить, что $d \circ d = 0$; таким образом, для любого $U \subset M$ имеется коцепный комплекс

$$(3) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow A^0(U, K) \xrightarrow{d} A^1(U, K) \xrightarrow{d} A^2(U, K) \xrightarrow{d} \dots,$$

который мы будем обозначать $A^*(U, K)$ (модули коцепей размерностей $q < 0$ полагаются нулевыми). Если $V \subset U$, то $V^{p+1} \subset U^{p+1}$ и имеется соответствующий гомоморфизм ограничения

$$(4) \quad \rho_{V, U}: A^p(U, K) \rightarrow A^p(V, K).$$

Семейство

$$(5) \quad \{A^p(U, K); \rho_{U, V}\}$$

образует предпучок K -модулей на M , называемый *предпучком Александера—Спеньера p -коцепей*. Заметим, что $\{A^p(U, K); \rho_{U, V}\}$ удовлетворяет условию 5.7 (C₂), но при $p \geq 1$ 5.7 (C₁) не выполняется. Соответствующий пучок ростков обозначим через $\mathcal{A}^p(M, K)$. Гомоморфизмы d определяют гомоморфизмы предпучков $\{A^p(U, K); \rho_{U, V}\} \rightarrow \{A^{p+1}(U, K); \rho_{U, V}\}$ при $p \geq 0$ и индуцируют гомоморфизмы пучков, которые мы обозначим также через d :

$$(6) \quad d: \mathcal{A}^p(M, K) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(M, K) \quad (p \geq 0).$$

Эти гомоморфизмы вместе с естественным вложением постоянного пучка $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}^0(M, K)$ (каждый элемент $k \in \mathcal{H}_m$ переводится в росток в точке m постоянной функции, равной k) задают последовательность

$$(7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{A}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2(M, K) \xrightarrow{d} \dots$$

Мы утверждаем, что это тонкая резольвента без кручения для постоянного пучка $\mathcal{H}$. Элементами $\mathcal{A}^p(M, K)$ служат классы эквивалентности функций со значениями в области целостности K ; поэтому $\mathcal{A}^p(M, K)$ — пучок без кручения. Покажем, что $\mathcal{A}^p(M, K)$ — тонкий пучок. Пусть $\{U_i\}$ — локально конечное открытое покрытие пространства M ; выберем (как в 5.22) подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, такое, что φ_i принимают лишь

значения 0 или 1. Для каждого i определим эндоморфизм $\bar{l}_i$ модуля $A^p(U, K)$ формулой

$$(8) \quad \bar{l}_i(f)(m_0, \dots, m_p) = \tau_i(m_0)f(m_0, \dots, m_p).$$

Эндоморфизмы $\bar{l}_i$ коммутируют с морфизмами ограничений, поэтому определены эндоморфизмы предпучков $\{A^p(U, K); \rho_U, v\}$. Пусть $l_i: \mathcal{A}^p(M, K) \rightarrow \mathcal{A}^p(M, K)$ — эндоморфизмы пучков, ассоциированные с $\bar{l}_i$. Ясно, что $\text{supp } l_i \subset U_i$ и $\sum l_i \equiv 1$. Следовательно, пучки $\mathcal{A}^p(M, K)$ тонкие. Точность последовательности (7) непосредственно выводится из точности на уровне предпучков. А именно, если $U \subset M$ открыто, то последовательность

$$(9) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow A^0(U, K) \xrightarrow{d} A^1(U, K) \xrightarrow{d} A^2(U, K) \xrightarrow{d} \dots$$

точна. Отображение K в $A^0(U, K)$ устроено так:

$$k \rightarrow f, \quad f \equiv k.$$

Точность (9) очевидна в членах K и $A^0(U, K)$. Пусть теперь $f \in A^p(U, K)$, $p \geq 1$, и $df = 0$. Определим $g \in A^{p-1}(U, K)$ формулой

$$(10) \quad g(m_0, \dots, m_{p-1}) = f(m, m_0, \dots, m_{p-1})$$

для некоторого фиксированного $m \in U$; тогда $f = dg$. Это рассуждение вместе с равенством $d \circ d = 0$ завершает доказательство точности последовательности (7).

Приведенное построение тонкой резольвенты без кручения завершает доказательство из разд. 5.20 существования теории когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей. А именно, положив

$$(11) \quad H^q(M, \mathcal{P}) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(M, K) \otimes \mathcal{P})),$$

получим теорию когомологий; любая теория когомологий для M с коэффициентами в пучках K -модулей в силу следствия к 5.23 будет изоморфна данной, причем соответствующий изоморфизм определен однозначно.

Сейчас мы определим модули когомологий Александра—Спенсера с коэффициентами в K -модуле G в их классическом варианте и покажем, что они канонически изоморфны модулям когомологий $H^q(M, \mathcal{G})$ с коэффициентами в постоянном пучке $\mathcal{G} = M \times G$. Обозначим через $A^p(U, G)$ K -модуль функций $U^{p+1} \rightarrow G$ и повторим описанную выше конструкцию с очевидными заменами K на G и $\mathcal{K}$ на $\mathcal{G}$. Пусть

$$(12) \quad A_G^p(M, G) = \{f \in A^p(M, G): \rho_{m, M}(f) = 0, m \in M\}.$$

Напомним, что $\rho_{m, M}$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу $A^p(M, G)$ его класс эквивалентности в слое над m

ассоциированного пучка $\mathcal{A}^p(M, G)$. Неформально говоря, подмодуль $A_0^p(M, G) \subset A^p(M, G)$ является мерой того, в какой степени предпучок $\{A^p(U, G); \rho_{U, V}\}$ не удовлетворяет 5.7 (C₁). Образ ограничения гомоморфизма (1) на $A_0^p(M, G)$ лежит в $A_0^{p+1}(M, G)$; поэтому мы имеем гомоморфизм фактормодулей

$$(13) \quad A^p(M, G)/A_0^p(M, G) \rightarrow A^{p+1}(M, G)/A_0^{p+1}(M, G).$$

Последовательность модулей и гомоморфизмов, задаваемая (13) при $p \geq 0$, образует коцепной комплекс $A^*(M, G)/A_0^*(M, G)$. Как обычно, модули коцепей отрицательных размерностей полагаются нулевыми. Модуль классических когомологий Александера—Спеньера с коэффициентами в G по определению есть

$$(14) \quad H_{A-S}^q(M; G) = H^q(A^*(M, G)/A_0^*(M, G)).$$

Если заменить K в (7) на модуль G и $\mathcal{K}$ на $\mathcal{G}$, мы получим тонкую резольвенту для $\mathcal{G}$. Поэтому из 5.25 следует существование канонических изоморфизмов

$$(15) \quad H^q(M, \mathcal{G}) \cong H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(M, G))).$$

Существование канонических изоморфизмов

$$(16) \quad H_{A-S}^q(M; G) \cong H^q(M, \mathcal{G})$$

вытекает из (14) и (15) и того факта, что естественное отображение

$$(17) \quad A^*(M, G)/A_0^*(M, G) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^*(M, G))$$

является изоморфизмом. Это в свою очередь следует из такого предложения:

5.27. Предложение. Пусть $\{S_U; \rho_{U, V}\}$ — предпучок над M , удовлетворяющий 5.7 (C₂), а $\mathcal{P}$ — ассоциированный с ним пучок. Положим

$$(1) \quad (S_M)_0 = \{s \in S_M: \rho_{m, M}(s) = 0, m \in M\}.$$

Тогда последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow (S_M)_0 \rightarrow S_M \xrightarrow{\gamma} \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow 0$$

точна.

Доказательство. Поскольку γ переводит $s \in S_M$ в глобальное сечение $m \mapsto \rho_{m, M}(s)$ пучка $\mathcal{P}$, точность последовательности (2) в среднем члене очевидна из определения $(S_M)_0$. Осталось доказать, что γ сюръективно. Пусть $t \in \Gamma(\mathcal{P})$. Имеются локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ для M и элементы $s_\alpha \in S_{U_\alpha}$, такие, что

$$(3) \quad \gamma(s_\alpha) = t|U_\alpha.$$

Обозначим через $\{V_\alpha\}$ измельчение $\{U_\alpha\}$, такое, что $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Пусть I_m — конечное множество индексов α , для которых $m \in \bar{V}_\alpha$. Выберем окрестность W_m точки m , такую, что

$$(a) \quad W_m \cap \bar{V}_\beta = \emptyset, \quad \text{если } \beta \notin I_m,$$

$$(b) \quad W_m \subset \bigcap_{\alpha \in I_m} U_\alpha,$$

$$(c) \quad \rho_{W_m, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{W_m, U_{\alpha'}}(s_{\alpha'}), \quad \alpha, \alpha' \in I_m.$$

Пусть $s_m \in S_{W_m}$ обозначает общий образ элементов из п. (c). Для всех точек n и m из M

$$(4) \quad \rho_{W_m \cap W_n, W_m}(s_m) = \rho_{W_m \cap W_n, W_n}(s_n).$$

Действительно, выберем $p \in W_m \cap W_n$. Условие (a) влечет за собой $I_p \subset I_m \cap I_n$. Пусть $\alpha \in I_p$. В силу (c)

$$(5) \quad s_m = \rho_{W_m, U_\alpha}(s_\alpha) \quad \text{и} \quad s_n = \rho_{W_n, U_\alpha}(s_\alpha),$$

так что

$$(6) \quad \rho_{W_m \cap W_n, W_m}(s_m) = \rho_{W_m \cap W_n, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{W_m \cap W_n, W_n}(s_n),$$

т. е. (4) доказано. Из (4) и свойства 5.7 (C₂) вытекает существование такого элемента $s \in S_M$, что

$$(7) \quad \rho_{W_m, M}(s) = s_m,$$

и в силу (7), (5), (3) $\gamma(s) = t$.

Когомологии де Рама

5.28. В этом разделе в качестве K мы фиксируем поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $U \subset M$ открыто. Множество дифференциальных p -форм на U образует вещественное векторное пространство, которое мы обозначим через $E^p(U)$. Эти вещественные векторные пространства вместе с очевидными гомоморфизмами ограничения $\rho_{U,V}$ образуют предпучок

$$(1) \quad \{E^p(U); \rho_{U,V}\},$$

который удовлетворяет 5.7 (C₁) и 5.7 (C₂) и потому является полным. Оператор внешнего дифференцирования d задает гомоморфизм предпучков

$$(2) \quad \{E^p(U); \rho_{U,V}\} \xrightarrow{d} \{E^{p+1}(U); \rho_{U,V}\} \quad (p \geq 0).$$

Мы будем обозначать ассоциированный пучок ростков дифференциальных p -форм через $\mathcal{E}^p(M)$ и использовать обозначение d и для индуцированных гомоморфизмов пучков. Постоянный пучок $\mathcal{R} = M \times \mathbb{R}$, очевидно, вкладывается в $\mathcal{E}^0(M)$ ($a \in \mathcal{R}_m$ пере-

ходит в росток в точке m постоянной функции, равной a). Возникает последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Мы утверждаем, что (3) есть тонкая резольвента без кручения постоянного пучка $\mathcal{R}$. Разбиение единицы для $\mathcal{E}^p(M)$ строится в точности так же, как в разд. 5.10 для $\mathcal{E}^\infty(M) = \mathcal{E}^0(M)$. Таким образом, $\mathcal{E}^p(M)$ — тонкие пучки. Поскольку $\mathcal{E}^p(M)$ — пучки векторных пространств над $\mathbb{R}$, то они без кручения. Очевидно, что последовательность (3) точна в членах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{E}^0(M)$. Внешнее дифференцирование форм удовлетворяет тождеству $d \circ d = 0$; оно сохраняется и для гомоморфизмов пучков в (3); поэтому образ каждого гомоморфизма содержится в ядре следующего. Проверка точности теперь состоит в применении следствия леммы Пуанкаре 4.18. Отвлечемся на время от основного изложения. Сначала остановимся на лемме Пуанкаре.

5.29. Замечание. Семейство операторов h_k из доказательства леммы Пуанкаре 4.18 являет собой пример *оператора гомотопии*. Это очень полезная конструкция в теории когомологий коцепных комплексов, и у нас еще будет случай использовать такие операторы. Вообще говоря, они естественно возникают в следующей ситуации. Имеются два коцепных отображения f и g между коцепными комплексами C^* и D^* , и мы хотим показать, что оба отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы в когомологиях. Для этого достаточно найти оператор гомотопии для f и g , т. е. гомоморфизмы $h_k: C^k \rightarrow D^{k-1}$, такие, что

$$h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = f_k - g_k$$

на C^k (здесь d обозначает кограничный оператор и в C^* , и в D^*). Действительно, если $\sigma \in C^k$ — коцикл, то $f_k(\sigma) = g_k(\sigma)$ с точностью до кограницы, так что $f_k(\sigma)$ и $g_k(\sigma)$ лежат в одном классе когомологий. В лемме Пуанкаре мы строили оператор гомотопии (при $k \geq 1$) между тождественным и нулевым отображением комплекса

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow E^0(U) \xrightarrow{d} E^1(U) \xrightarrow{d} E^2(U) \xrightarrow{d} \dots$$

(здесь U — открытый единичный шар в евклидовом пространстве). Следовательно, все группы когомологий равны нулю при $k \geq 1$.

5.30. Вернемся к резольвенте 5.28 (3). В силу разд. 5.20 она порождает теорию когомологий для M с коэффициентами в пучках вещественных векторных пространств:

$$(1) \quad H^q(M, \mathcal{F}) = H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes \mathcal{F})),$$

где $q \geq 0$ и $\mathcal{T}$ — пучок вещественных векторных пространств над M . По следствию к теореме 5.23 эта теория изоморфна теории из п. 5.26 (11), причем соответствующий изоморфизм определен однозначно.

Если мы выберем в качестве $\mathcal{T}$ постоянный пучок $\mathcal{R}$, то

$$(2) \quad H^q(M, \mathcal{R}) = H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes \mathcal{R})) \cong H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M))).$$

Рассмотрим теперь коцепной комплекс $\Gamma(\mathcal{E}^*(M))$:

$$(3) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^0(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^1(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^2(M)) \rightarrow \dots$$

и коцепной комплекс $E^*(M)$:

$$(4) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow E^0(M) \xrightarrow{d} E^1(M) \xrightarrow{d} E^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Поскольку предпучки $\{E^p(U); \rho_{U,V}\}$ полны, из предложения 5.8 следует (в данном частном случае это можно также проверить непосредственно), что естественные гомоморфизмы

$$(5) \quad E^p(M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^p(M))$$

являются изоморфизмами. Они коммутируют с кограничным оператором соответствующих комплексов (3) и (4) и, значит, индуцируют коцепное отображение $E^*(M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^*(M))$, которое является изоморфизмом коцепных комплексов. Поэтому

$$(6) \quad H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M))) \cong H^q(E^*(M)).$$

Легко видеть, что $H^q(E^*(M))$ совпадает с классической q -й группой когомологий де Рама $H_{\text{de R}}^q(M)$ для M , введенной в разд. 4.13 (факторпространство замкнутых q -форм по точным). Поэтому из (2) и (6) мы получаем канонические изоморфизмы

$$(7) \quad H^q(M, \mathcal{R}) \cong H_{\text{de R}}^q(M).$$

Сингулярные когомологии

5.31. Здесь снова K — произвольное кольцо главных идеалов. Пусть $U \subset M$ открыто. В разд. 4.6 были определены дифференцируемые сингулярные симплексы в многообразиях. Здесь нам понадобятся непрерывные сингулярные симплексы. Напомним основные определения. Для каждого целого $p \geq 1$ положим

$$(1) \quad \Delta^p = \left\{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p: \sum_{i=1}^p a_i \leq 1 \text{ и все } a_i \geq 0 \right\}.$$

Δ^p называется стандартным p -симплексом в $\mathbb{R}^p$. При $p = 0$ Δ^0 совпадает с одноточечным пространством $\{0\}$ и называется стандартным 0-симплексом. Сингулярный (непрерывный) p -симплекс σ в U — это непрерывное отображение $\sigma: \Delta^p \rightarrow U$. При $p \geq 1$ определим дифференцируемый сингулярный p -симплекс в U

как сингулярный p -симплекс σ , являющийся ограничением некоторого гладкого отображения окрестности симплекса Δ^p в $\mathbb{K}^p$ в U .

Обозначим через $S_p(U)$ свободную абелеву группу, порожденную сингулярными p -симплексами в U ; ее элементы называются *сингулярными p -цепями с целыми коэффициентами*. Граница сингулярного p -симплекса σ — это сингулярная $(p-1)$ -цепь

$$(2) \quad \partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^i,$$

где σ^i обозначает i -ю грань симплекса σ (см. 4.6 (3)). Оператор перехода к границе продолжается до гомоморфизма $\partial: S_p(U) \rightarrow S_{p-1}(U)$ для $p \geq 1$ и удовлетворяет (см. 4.6 (7)) условию

$$(3) \quad \partial \circ \partial = 0.$$

Пусть $S^p(U, K)$ обозначает K -модуль, элементами которого являются функции, определенные на сингулярных p -симплексах и принимающие значения в K . Такая функция f называется *сингулярной p -коцепью* в U . Сложение и умножение на скаляры в модуле $S^p(U, K)$ определяются формулами

$$(4) \quad \begin{aligned} (kf)(\sigma) &= k(f(\sigma)), \\ (f+g)(\sigma) &= f(\sigma) + g(\sigma). \end{aligned}$$

Каждая коцепь из $S^p(U, K)$ однозначно продолжается до гомоморфизма группы $S_p(U)$ в K , т. е. $S^p(U, K)$ изоморфен модулю гомоморфизмов $\text{Hom}_K(S_p(U), K)$. Мы иногда будем для удобства рассматривать элементы из $S^p(U, K)$ как такие гомоморфизмы. Для $V \subset U$ имеется гомоморфизм ограничения

$$(5) \quad \rho_V: S^p(U, K) \rightarrow S^p(V, K),$$

сопоставляющий каждой функции $f \in S^p(U, K)$ ее ограничение на сингулярные p -симплексы, лежащие в V . Семейство

$$(6) \quad \{S^p(U, K); \rho_{U,V}\}$$

образует предпучок над M , называемый *предпучком сингулярных p -коцепей*. Заметим, что при $p \geq 1$ этот предпучок удовлетворяет условию 5.7 (C₂), но не 5.7 (C₁) и что предпучок $\{S^0(U, K); \rho_{U,V}\}$, который естественно отождествляется с предпучком $\{A^0(U, K); \rho_{U,V}\}$ из разд. 5.26, полон.

При $p \geq 1$ обозначим через $S_\infty^p(U, K)$ K -модуль функций, определенных на дифференцируемых сингулярных p -симплексах в U и принимающих значения в K . Каждая такая функция называется *дифференцируемой сингулярной p -коцепью* в U . Очевидные гомоморфизмы ограничений (см. (5)) определяют предпучок $\{S_\infty^p(U, K); \rho_{U,V}\}$ дифференцируемых сингулярных p -коцепей над M . Поскольку все рассуждения для непрерывного и диффе-

ренцируемого случая дословно совпадают, мы преимущественно будем исследовать непрерывный случай, имея в виду, что аналогичные рассуждения применимы к предпучкам $S_\infty^p(U, K)$ при $p \geq 1$. Все содержательные различия будут оговариваться.

Кограничный гомоморфизм

$$(7) \quad d: S^p(U, K) \rightarrow S^{p+1}(U, K)$$

определяется равенством

$$(8) \quad df(\sigma) = f(\partial\sigma)$$

для $f \in S^p(U, K)$ и сингулярного $(p+1)$ -симплекса в U . Соотношение (3) влечет за собой

$$(9) \quad d \circ d = 0.$$

Поскольку d коммутирует с гомоморфизмами ограничения, он индуцирует гомоморфизмы предпучков, которые обозначаются также через d :

$$(10) \quad \{S^p(U, K); \rho_{U, V}\} \rightarrow \{S^{p+1}(U, K); \rho_{U, V}\}.$$

Таким образом, построен коцепной комплекс с нулевыми коцепями в отрицательных размерностях

$$(11) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow S^0(U, K) \xrightarrow{d} S^1(U, K) \xrightarrow{d} \dots,$$

который будет обозначаться $S^*(U, K)$.

Обозначим ассоциированный пучок ростков сингулярных p -коцепей через $\mathcal{S}^p(M, K)$ (соответственно через $\mathcal{S}_\infty^p(M, K)$ в дифференцируемом случае) и сохраним обозначение d для индуцированного гомоморфизма пучков

$$(12) \quad \mathcal{S}^p(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{p+1}(M, K).$$

Отметим, что $\mathcal{S}^0(M, K)$ является пучком ростков функций на M со значениями в K . Постоянный пучок $\mathcal{K}$ каноническим образом вкладывается в $\mathcal{S}^0(M, K)$, а именно $k \in \mathcal{K}_m$ сопоставляется росток в точке m постоянной функции на M , равной k . Имеется последовательность

$$(13) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \dots,$$

а также соответствующая последовательность пучков $\mathcal{S}_\infty^p(M, K)$, $p \geq 1$. В обоих случаях последовательность (13) — тонкая ре-

зольвента без кручения постоянного пучка $\mathcal{H}$. Действительно, отсутствие кручения у пучков $\mathcal{P}^p(M, K)$ и $(\mathcal{P}^\infty(M, K))$ при $p \geq 1$ вытекает из их определения через ростки функций со значениями в области целостности. Для доказательства того, что пучки $\mathcal{P}^p(M, K)$ (и $\mathcal{P}^\infty(M, K)$ при $p \geq 1$) тонкие, зададим локально конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ для M и выберем, как и в разд. 5.22, разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное этому покрытию, где φ_i принимают лишь значения 0 и 1. Для каждого i определим эндоморфизм $\tilde{l}_i$ модуля $S^p(U, K)$ формулой

$$(14) \quad \tilde{l}_i(f)(\sigma) = \varphi_i(\sigma(0))f(\sigma),$$

где 0 обозначает начало координат в $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$). Эндоморфизмы $\tilde{l}_i$ коммутируют с ограничениями и потому определяют эндоморфизмы предпучков $\{S^p(U, K); \rho_{U, V}\}$. Пусть $l_i: \mathcal{P}^p(M, K) \rightarrow \mathcal{P}^p(M, K)$ — эндоморфизм пучков, ассоциированный с $\tilde{l}_i$; легко видеть, что $\text{supp } l_i \subset U_i$ и $\sum l_i \equiv 1$. Поэтому пучки $\mathcal{P}^p(M, K)$ ($\mathcal{P}^\infty(M, K)$ при $p \geq 1$) тонкие. Точность последовательности (13) в членах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}^0(M, K)$ очевидна; осталось проверить точность в членах $\mathcal{P}^p(M, K)$, $p \geq 1$. Поскольку $d \circ d = 0$, осталось доказать, что образ каждого гомоморфизма содержит ядро следующего. Для этого покажем, что для достаточно маленьких открытых множеств U всякая p -коцепь f , удовлетворяющая $df = 0$ ($p \geq 1$), удовлетворяет равенству $f = dg$, где g — сингулярная $(p-1)$ -коцепь на U . Используем локальную евклидовость многообразия M , т. е. проведем рассуждения для единичного открытого шара U в $\mathbb{R}^{\dim M}$. Чтобы доказать существование g , построим оператор гомотопии (см. 5.29)

$$(15) \quad h_p: S^p(U, K) \rightarrow S^{p-1}(U, K) \quad (p \geq 1)$$

со свойством

$$(16) \quad d \circ h_p + h_{p+1} \circ d = \text{id}.$$

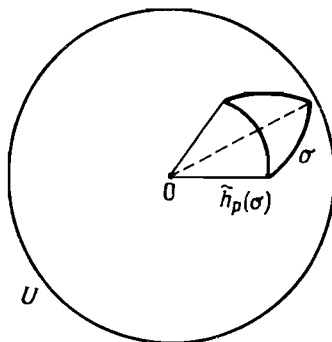
Пусть $f \in S^p(U, K)$, где U — открытый единичный шар, и σ — сингулярный $(p-1)$ -симплекс в U . Определим h_p равенством

$$(17) \quad h_p(f)(\sigma) = f(\tilde{h}_p(\sigma)),$$

где $\tilde{h}_p(\sigma)$ — сингулярный p -симплекс в U , отображающий начало Δ^p в центр шара U . Этот симплекс определяется для $(a_1, \dots, a_p) \neq 0$ формулой

$$(18) \quad \tilde{h}_p(\sigma)(a_1, \dots, a_p) = \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \cdot \sigma \left(a_2 \left| \sum_{i=1}^p a_i, \dots, a_p \right| \sum_{i=1}^p a_i \right).$$

Геометрически $\tilde{h}_p(\sigma)$ представляет собой конус в U с вершиной в центре и основанием σ .



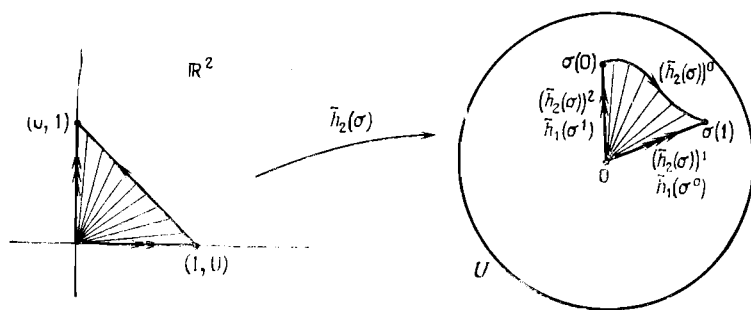
$\tilde{h}_p$ продолжается до гомоморфизма $S_{p-1}(U) \rightarrow S_p(U)$. Из формулы (18) и определения 4.6 (4) следует, что

$$(19) \quad \text{id} = \partial \circ \tilde{h}_{p+1} + \tilde{h}_p \circ \partial$$

на $S_p(U)$ при $p \geq 1$. В случае $p = 1$ формула (19) превращается в

$$(20) \quad \sigma = (\tilde{h}_2(\sigma))^2 - (\tilde{h}_2(\sigma))^1 + (\tilde{h}_2(\sigma))^0 + \tilde{h}_1(\sigma^0) - \tilde{h}_1(\sigma^1).$$

Геометрически ситуация отображена на следующем рисунке:



Равенство (16) следует из (19) и (17) с использованием определения (8) кограничного оператора d . Однако здесь имеется одно различие между дифференцируемым и непрерывным случаями. Если σ — дифференцируемый сингулярный $(p-1)$ -симплекс и $p \geq 2$, то определение (18) дает непрерывный, но, вообще говоря, не дифференцируемый p -симплекс $\tilde{h}_p(\sigma)$, поскольку в начальной вершине симплекса может нарушаться гладкость. Например, если σ — дифференцируемый сингулярный 1-симплекс в U , то для продолжения $\tilde{h}_2(\sigma)$ до гладкого отображения в окрестности

начала координат в $\mathbb{R}^2$ необходимо, по крайней мере, чтобы образ σ содержался в двумерной плоскости, проходящей через центр шара U . Разумеется, это условие может не выполняться. Для того чтобы провести рассуждения в дифференцируемом случае, нам понадобится понятие *сглаживающей* функции. Пусть φ обозначает вещественнозначную гладкую функцию на прямой, определенную формулой 1.10 (3). Значения функции $\varphi(t)$ лежат на отрезке $[0, 1]$, причем $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 1$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$. Если теперь $p \geq 2$ и σ — дифференцируемый $(p-1)$ -симплекс, мы определим $\tilde{h}_p(\sigma)$ формулой

$$(21) \quad \tilde{h}_p(\sigma)(a_1, \dots, a_p) = \varphi\left(\sum_{i=1}^p a_i\right) \cdot \sigma\left(a_2 \Big/ \sum_{i=1}^p a_i, \dots, a_p \Big/ \sum_{i=1}^p a_i\right),$$

где, как и в (18), предполагается, что начальная вершина симплекса Δ^p переходит в центр шара U . Продолжим σ гладко на все $\mathbb{R}^{p-1}$ так, чтобы σ и все его производные были ограничены.

Примем соглашение, что $\tilde{h}_p(\sigma)$ отображает любую точку с $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ в центр шара U ; тогда $\tilde{h}_p(\sigma)$ определено на всем $\mathbb{R}^p$ и принадлежит на нем классу C^∞ . Единственными точками, где может возникнуть нарушение гладкости, будут точки с $\sum_{i=1}^p a_i = 0$. Заметим, однако, что как сама функция $\varphi(t)$, так и все ее производные стремятся к нулю быстрее любого многочлена от t ; поэтому в силу ограниченности σ и его производных в $\mathbb{R}^{p-1}$ получаем, что $\tilde{h}_p(\sigma)$ имеет непрерывные производные любого порядка в $\mathbb{R}^p$, обращаясь в нуль, если $\sum_{i=1}^p a_i = 0$. Этим рассуждением мы заканчиваем доказательство того, что (13) — тонкая резольвента без кручения постоянного пучка $\mathcal{X}$ как для непрерывного, так и для дифференцируемого случая.

Следуя разд. 5.20, положим при любом целом q для пучка $\mathcal{P}$ K -модулей над M

$$(22) \quad \begin{aligned} H^q(M, \mathcal{P}) &= H^q(\Gamma(\mathcal{P}^*(M, K) \otimes \mathcal{P})), \\ H_\infty^q(M, \mathcal{P}) &= H^q(\Gamma(\mathcal{P}_\infty^*(M, K) \otimes \mathcal{P})). \end{aligned}$$

Следствие теоремы 5.23 гарантирует нам, что так определенные теории изоморфны друг другу, причем соответствующий изоморфизм определен однозначно, и, более того, изоморфны теориям 5.26 (11), 5.30 (1).

5.32. Пусть G — некоторый K -модуль. Обозначим через $S^p(U, G)$ K -модуль функций, сопоставляющих каждому сингулярному p -симплексу в U элемент из G . Заменим в конструкции

5.31 (4) — (13) модуль K на G , а постоянный пучок $\mathcal{K}$ — на постоянный пучок $\mathcal{G}$.

Классические сингулярные группы когомологий M с коэффициентами в K -модуле G определяются (в непрерывном и дифференцируемом случаях) формулами

$$(1) \quad \begin{aligned} H_{\Delta}^q(M; G) &= H^q(S^*(M, G)), \\ H_{\Delta}^q(M; G) &= H^q(S_{\infty}^*(M, G)). \end{aligned}$$

Мы намереваемся показать, что классические группы когомологий (на самом деле K -модули) канонически изоморфны модулям когомологий $H^q(M, \mathcal{G})$. Из предложения 5.27 следует, что

$$(2) \quad 0 \rightarrow S_0^*(M, G) \rightarrow S^*(M, G) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}^*(M, G)) \rightarrow 0$$

— короткая точная последовательность коцепных комплексов (аналогичная последовательность имеется в дифференцируемом случае). Чуть позже мы покажем, что

$$(3) \quad H^q(S_0^*(M, G)) = 0 \quad (q \geq 0)$$

в непрерывном и дифференцируемом случаях. Поэтому из длинной точной последовательности 5.17 (2) получаем канонические изоморфизмы

$$(4) \quad \begin{aligned} H^q(S^*(M, G)) &\cong H^q(\Gamma(\mathcal{P}^*(M, G))), \\ H^q(S_{\infty}^*(M, G)) &\cong H^q(\Gamma(\mathcal{P}_{\infty}^*(M, G))). \end{aligned}$$

Наконец, из (1) и (4) и из теоремы 5.25 (примененной к тонкой резольвенте пучка $\mathcal{G}$, полученной из 5.31 (13) заменой K на G и $\mathcal{K}$ на $\mathcal{G}$) имеем канонические изоморфизмы

$$(5) \quad H_{\Delta}^q(M; G) \cong H^q(M, \mathcal{G}) \cong H_{\Delta}^q(M; G).$$

Осталось доказать формулу (3). Доказательство проведем для непрерывной сингулярной теории (дифференцируемый случай разбирается аналогично). Очевидно, формула (3) верна при $q < 0$, поскольку модули в коцепном комплексе $S_0^*(M, G)$ в этом случае нулевые. Модуль $S_0^0(M, G)$ тоже нулевой, поскольку предпучок $\{S^0(U, G); \rho_U, \nu\}$ полон. Поэтому $H^0(S_0^*(M, G)) = 0$. Пусть $q \geq 1$ и $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ — произвольное открытое покрытие для M . Обозначим через $S_{\mathfrak{U}}^*(M, G)$ коцепной комплекс, состоящий из модулей $S_{\mathfrak{U}}^p(M, G)$ коцепей со значениями в G , определенных на сингулярных симплексах, образ каждого из которых целиком лежит в каком-либо элементе покрытия. Любой элемент из $S^p(M, G)$ определяет элемент $S_{\mathfrak{U}}^p(M, G)$, а именно

надо взять ограничение на « $\mathcal{U}$ -малые» симплексы. Соответствующие гомоморфизмы ограничения $j_{\mathcal{U}} : S_{\mathcal{U}}^p(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^p(M, G)$ порождают сюръективные коцепные отображения

$$(6) \quad j_{\mathcal{U}} : S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G).$$

Ядра гомоморфизмов $j_{\mathcal{U}}$ образуют коцепной комплекс $K_{\mathcal{U}}^*$ так, что последовательность

$$(7) \quad 0 \rightarrow K_{\mathcal{U}}^* \rightarrow S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G) \rightarrow 0$$

точна. Основным в доказательстве (3) является тот факт, что $j_{\mathcal{U}}$ индуцирует изоморфизм в когомологиях. Действительно, если это так, то из длинной точной когомологической последовательности для (7) вытекает, что

$$(8) \quad H^q(K_{\mathcal{U}}^*) = 0 \quad \text{для всех } q.$$

Поэтому для коцикла $f \in S_0^q(M, G)$, $q \geq 1$, по определению $S_0^q(M, G)$ существует такое достаточно мелкое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства M , что $f \in K_{\mathcal{U}}^q$. Из (8) следует, что существует $g \in K_{\mathcal{U}}^{q-1} \subset S_0^{q-1}(M, G)$, для которого $dg = f$. Этим доказано равенство (3).

Осталось показать, что коцепное отображение $j_{\mathcal{U}}$ индуцирует изоморфизм в когомологиях. Мы будем рассматривать фиксированное покрытие $\mathcal{U}$ и потому можем у $j_{\mathcal{U}}$ опустить индекс $\mathcal{U}$. Мы построим коцепное отображение

$$(9) \quad k : S_{\mathcal{U}}^*(M, G) \rightarrow S^*(M, G),$$

такое, что

$$(10) \quad j \circ k = \text{id}$$

и существует оператор гомотопии $h_p : S^p(M, G) \rightarrow S^{p-1}(M, G)$ при всех p со свойством

$$(11) \quad h_{p+1} \circ d + d \circ h_p = \text{id} - k_p \circ j_p.$$

Формула (10) влечет за собой сюръективность, а формула (11) — инъективность j в когомологиях. Для определения h и k нам необходимы некоторые предварительные конструкции. Изложим вначале основную идею. Пусть функция f из $S_{\mathcal{U}}^p(M, G)$ определена лишь на $\mathcal{U}$ -малых сингулярных p -симплексах. Мы хотим, чтобы функция $k(f)$ была определена на всех сингулярных p -симплексах. Это будет сделано с помощью операции «подразделения», превращающей большие p -симплексы в цепи из меньших. Прodelав подразделение достаточное число раз, мы придем к $\mathcal{U}$ -малым

p -симплексам и положим значение f на большом симплексе равным значению f на подразделении этого симплекса. Симплексы, изначально $\mathbb{U}$ -малые, подразделяться вообще не будут. Единственная техническая трудность состоит в том, что число необходимых подразделений зависит от исходного симплекса.

Пусть $q \geq 1$. Линейный p -симплекс в Δ^q — это сингулярный p -симплекс вида

$$(12) \quad (a_1, \dots, a_p) \mapsto \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i\right) v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$

(при $p = 0$ $0 \mapsto v_0$), однозначно определяющийся упорядоченной последовательностью точек $v_0, \dots, v_p$ в Δ^q . Будем обозначать его $(v_0, \dots, v_p)$. Тожественное отображение Δ^q на себя задает линейный q -симплекс в Δ^q , который мы будем обозначать просто Δ^q . Свободная абелева группа, порожденная линейными p -симплексами в Δ^q , будет обозначаться через $L_p(\Delta^q)$. *Барицентром* линейного p -симплекса $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ в Δ^q называется точка

$$(13) \quad b_\sigma = \frac{1}{p+1} v_0 + \dots + \frac{1}{p+1} v_p.$$

Для данного линейного p -симплекса $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ в Δ^q и точки $v \in \Delta^q$ определим их *джойн* $v\sigma$ как линейный $(p+1)$ -симплекс $(v, v_0, \dots, v_p)$ в Δ^q . Операция взятия джойна продолжается по линейности на все $L_p(\Delta^q)$. Прямой выкладкой можно убедиться, что при $p \geq 1$

$$(14) \quad \partial(v\sigma) = \sigma - v(\partial\sigma).$$

Определим гомоморфизм подразделения $\text{Sd}: L_p(\Delta^q) \rightarrow L_p(\Delta^q)$, полагая $\text{Sd} = \text{id}$ при $p = 0$ и

$$(15) \quad \text{Sd}(\sigma) = b_\sigma \text{Sd}(\partial\sigma)$$

для линейного p -симплекса σ в Δ^q и продолжим его по линейности на $L_p(\Delta^q)$. Определим, кроме того, гомоморфизмы $R: L_p(\Delta^q) \rightarrow L_{p+1}(\Delta^q)$, полагая $R = 0$ при $p = 0$ и

$$(16) \quad R(\sigma) = b_\sigma(\sigma - \text{Sd}(\sigma) - R(\partial\sigma))$$

для линейного p -симплекса σ в Δ^q при $p \geq 1$; продолжим его также по линейности на $L_p(\Delta^q)$. Из определений (13)–(16) по индукции выводим

$$(17) \quad \begin{aligned} \partial \circ \text{Sd} &= \text{Sd} \circ \partial, \\ \partial \circ R + R \circ \partial &= \text{id} - \text{Sd} \end{aligned}$$

на $L_p(\Delta^q)$ при $p \geq 1$. Семейство модулей $L_p(\Delta^q)$ и гомоморфизмов $\partial: L_p(\Delta^q) \rightarrow L_{p-1}(\Delta^q)$ образует *цепной комплекс*, в котором

гомоморфизмы имеют противоположное направление по сравнению с коцепным комплексом. Первое равенство в (17) утверждает, что подразделение Sd является цепным отображением этого цепного комплекса на себя. Второе равенство в (17) показывает, что R есть оператор гомотопии между цепными отображениями id и Sd ; поэтому Sd индуцирует тождественное отображение групп *гомологий* $Ker \partial_p / Im \partial_{p+1}$ этого цепного комплекса.)

Определим гомоморфизмы $Sd: S_p(U) \rightarrow S_p(U)$ и $R: S_p(U) \rightarrow S_{p+1}(U)$ при $p \geq 0$ равенствами

$$(18) \quad \begin{aligned} Sd(\sigma) &= \sigma \circ Sd(\Delta^p), \\ R(\sigma) &= \sigma \circ R(\Delta^p), \end{aligned}$$

где σ — сингулярный p -симплекс в U ; продолжим Sd и R по линейности на все $S_p(U)$. Нетрудно видеть, что формулы (17) имеют место и для $S_p(U)$ при $p \geq 1$.

Пусть теперь $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ — линейный p -симплекс в Δ^q . Диаметр линейного симплекса из $Sd(\sigma)$ (наибольшее расстояние между его вершинами) не превосходит диаметр σ , умноженный на $p/(p+1)$, поскольку из любой пары вершин симплекса из $Sd(\sigma)$ хотя бы одна имеет вид $[1/(k+1)](v_{i_0} + \dots + v_{i_k})$ при $1 \leq k \leq p$ и тогда расстояние от нее до другой вершины меньше или равно расстоянию до некоторой вершины v_j , т. е.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k+1} (v_{i_0} + \dots + v_{i_k}) - v_j \right| &= \\ &= \frac{1}{k+1} \left| \sum_{l=0}^k (v_{i_l} - v_j) \right| \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma \leq \frac{p}{p+1} \text{diam } \sigma. \end{aligned}$$

Теперь у нас есть все необходимое для определения отображений h_p и k_p . Пусть σ — сингулярный p -симплекс в M . Открытое покрытие $\sigma^{-1}(U)$ симплекса Δ^p имеет число Лебега δ [26, с. 122]. Если s достаточно велико, диаметр каждого симплекса в $(Sd)^s(\Delta^p)$ меньше δ . Здесь $(Sd)^s$ обозначает s -кратную итерацию Sd . Поэтому каждый сингулярный p -симплекс цепи $(Sd)^s(\sigma)$ лежит в элементе покрытия U . Пусть теперь $s(\sigma)$ — наименьшее среди положительных $s \geq 0$, таких, что каждый симплекс из $(Sd)^s(\sigma)$ лежит в каком-либо элементе покрытия U . Определим гомоморфизм $k_p: S^p_U(M, G) \rightarrow S^p(M, G)$, полагая $k_p = id$ при $p \leq 0$ и

$$(19) \quad \begin{aligned} k_p(f)(\sigma) &= f\left((Sd)^{s(\sigma)}(\sigma) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^p (-1)^j R\left(\sum_{s(\sigma') \leq i \leq s(\sigma)-1} (Sd)^i(\sigma')\right)\right) \end{aligned}$$

при $p \geq 1$. В формуле (19) выражение $(Sd)^i$, где i отрицательно, означает нулевой гомоморфизм и $(Sd)^0 = \text{id}$. Формула

$$(20) \quad h_p(f)(\sigma) = f\left(R\left(\sum_{0 \leq i \leq s(\sigma)-1} (Sd)^i(\sigma)\right)\right)$$

при $p \geq 2$ и формула $h_p = 0$ при $p \leq 1$ задают гомоморфизмы $h_p: S^p(M, G) \rightarrow S^{p-1}(M, G)$. Справедливость (10) теперь очевидна; (11) проверяется прямым вычислением. Наконец, из (11) следует, что

$$(21) \quad d \circ k_p \circ j_p = k_{p+1} \circ j_{p+1} \circ d.$$

Однако j — коцепное отображение, следовательно, $d \circ k_p \circ j_p = k_{p+1} \circ d \circ j_p$. В силу сюръективности j имеем $d \circ k_p = k_{p+1} \circ d$, т. е. семейство $\{k_p\}$ задает коцепное отображение. Это завершает доказательство того, что j индуцирует изоморфизм в когомологиях.

Когомологии Чеха

5.33. В теориях Александра—Спеньера и де Рама и сингулярной теории мы получали когомологии с коэффициентами в пучках, строя тонкие резольвенты без кручения, а затем доказывали изоморфизм между соответствующими классическими теориями и когомологиями с коэффициентами в пучках. В отличие от этого теория когомологий Чеха возникает из прямой конструкции, не требующей резольвент, однако позволяющей проверить аксиомы 5.18. Обращаем внимание читателя, что в этом разделе M достаточно считать паракомпактным хаусдорфовым пространством.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства M и $\mathcal{P}$ — пучок K -модулей над M . Семейство $(U_0, \dots, U_q)$ элементов покрытия, такое, что $U_0 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset$, называется q -симплексом. Носитель $|\sigma|$ этого симплекса по определению есть

$$(1) \quad |\sigma| = U_0 \cap \dots \cap U_q.$$

Грань σ^i q -симплекса $\sigma = (U_0, \dots, U_q)$ — это по определению $(q-1)$ -симплекс $(U_0, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_q)$. Обозначим через $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ при $q \geq 0$ K -модуль, состоящий из функций, сопоставляющих каждому q -симплексу σ элемент из $\Gamma(\mathcal{P}, |\sigma|)$. Как обычно, $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = 0$ при $q < 0$. Элементы из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ называются q -цепями. Кограничный гомоморфизм

$$(2) \quad d: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$$

определяется формулой

$$(3) \quad df(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \rho_{|\sigma|, |\sigma^i|} f(\sigma^i).$$

Таким образом, определен коцепный комплекс $C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$, модули когомологий $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ которого называются *модулями когомологий Чеха* пары $(M, \mathfrak{U})$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{P}$. Гомоморфизм $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ индуцирует коцепное отображение $C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}')$ и, стало быть, гомоморфизм

$$(4) \quad \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}')$$

для каждого q .

Коцепь f принадлежит $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ в том и только том случае, если она сопоставляет каждому открытому множеству $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ сечение пучка $\mathcal{P}$ над U_α ; коцепь f является 0-коциклом, т. е. $df = 0$, если и только если

$$(5) \quad 0 = df(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}) = \rho_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}, U_{\alpha_1}} f(U_{\alpha_1}) - \rho_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}, U_{\alpha_0}} f(U_{\alpha_0})$$

для каждого 1-симплекса $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1})$. Следовательно, 0-коцикл f определяет глобальное сечение пучка $\mathcal{P}$ над M и наоборот. Поэтому

$$(6) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{P}).$$

Если покрытие $\mathfrak{B}$ является измельчением $\mathfrak{U}$, то имеется отображение $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{U}$, такое, что $V \subseteq \mu(V)$ для каждого $V \in \mathfrak{B}$ (отображение измельчения). Для q -симплекса $\sigma = (V_0, \dots, V_q)$ покрытия $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mu(\sigma)$ q -симплекс $(\mu(V_0), \dots, \mu(V_q))$ покрытия $\mathfrak{U}$. Положим для $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ и q -симплекса σ покрытия $\mathfrak{B}$

$$(7) \quad \mu_q(f)(\sigma) = \rho_{|\sigma|, |\mu(\sigma)|} f(\mu(\sigma)),$$

т. е. μ индуцирует коцепное отображение $\mu: C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^*(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$. Отсюда получаем гомоморфизмы

$$(8) \quad \mu_q^*: \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$$

в когомологиях. Если μ и τ — отображения измельчения $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{U}$, то $\mu_q^* = \tau_q^*$ при всех q . Это совпадение доказывается стандартным путем — построением оператора гомотопии. Для $(q-1)$ -симплекса $\sigma = (V_0, \dots, V_{q-1})$ покрытия $\mathfrak{B}$ положим

$$(9) \quad \tilde{\sigma}_j = (\mu(V_0), \dots, \mu(V_j), \tau(V_j), \dots, \tau(V_{q-1})).$$

Определим гомоморфизмы $h_q: C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^{q-1}(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$ формулой

$$(10) \quad h_q(f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \rho_{|\sigma|, |\tilde{\sigma}_j|} f(\tilde{\sigma}_j).$$

Непосредственно проверяется равенство

$$(11) \quad h_{q+1} \circ d + d \circ h_q = \tau_q - \mu_q,$$

откуда и следует, что $\mu_q^* = \tau_q^*$ при каждом q . Тот факт, что $\mathfrak{B}$ вписано в $\mathfrak{U}$, мы будем обозначать так: $\mathfrak{B} < \mathfrak{U}$; мы установили

в этом случае канонический гомоморфизм $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$. Покрытия пространства M образуют направленное множество относительно $<$. Если $\mathfrak{S} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, то композиция гомоморфизмов $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{P})$ и $\check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{S}, \mathcal{P})$ совпадает с гомоморфизмом $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{S}, \mathcal{P})$, отвечающим композиции отображений измельчения $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{U}$. Таким образом, семейство модулей когомологий $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ с указанными отображениями также составляет направленное множество. Рассмотрим прямой предел этой системы

$$(12) \quad \check{H}^q(M, \mathcal{P}) = \varinjlim \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}).$$

(Конструкция аналогична построению модуля $\mathcal{P}_m$ из модулей S_U в разд. 5.6.) Модуль $\check{H}^q(M, \mathcal{P})$ называется q -м модулем когомологий Чеха для M с коэффициентами в пучке K -модулей $\mathcal{P}$. Классические когомологии Чеха $\check{H}^q(M, G)$ с коэффициентами в K -модуле G есть по определению $\check{H}^q(M, \mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ — постоянный пучок $M \times G$.

Покажем теперь, что когомологии Чеха образуют теорию когомологий в смысле разд. 5.18. Очевидно, что $\check{H}^q(M, \mathcal{P}) = 0$ при $q < 0$, и из (6) вытекает, что $\check{H}^0(M, \mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{P})$; следовательно, 5.18 (а) выполнено. Гомоморфизмы (4), индуцированные отображением пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, коммутируют с отображениями (8) и потому индуцируют гомоморфизмы

$$(13) \quad \check{H}^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^q(M, \mathcal{P}').$$

Легко видеть, что для этих гомоморфизмов выполняются 5.18 (d) и 5.18 (е).

Рассмотрим теперь тонкий пучок $\mathcal{P}$ и целое $q > 0$. Поскольку в каждое покрытие M можно вписать локально конечное, для доказательства того, что $\check{H}^q(M, \mathcal{P}) = 0$, достаточно показать, что $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = 0$ для каждого локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U}$. Пусть $\{I_\alpha\}$ — разбиение единицы для $\mathcal{P}$, подчиненное локально конечному открытому покрытию $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$. Определим гомоморфизмы $h_p: C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ для каждого $p \geq 1$. Пусть $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ и $\sigma = (U_0, \dots, U_{p-1})$ — некоторый $(p-1)$ -симплекс покрытия $\mathfrak{U}$. Тогда носитель $I_\alpha \circ (f(U_\alpha, U_0, \dots, U_{p-1}))$ лежит в $U_\alpha \cap U_0 \cap \dots \cap U_{p-1}$, поэтому можно продолжить $I_\alpha \circ (f(U_\alpha, U_0, \dots, U_{p-1}))$ до непрерывного сечения пучка $\mathcal{P}$ над $U_0 \cap \dots \cap U_{p-1}$, полагая его равным нулю вне

$U_\alpha \cap U_0 \cap \dots \cap U_{p-1}$. Для этого сечения мы будем использовать то же обозначение. Положим теперь

$$(14) \quad h_p(f)(\sigma) = \sum_{\alpha} l_{\alpha} \circ (f(U_{\alpha}, U_0, \dots, U_{p-1})).$$

Тогда

$$(15) \quad d \circ h_p + h_{p+1} \circ d = \text{id}, \quad p \geq 1.$$

Поэтому, если f является q -коциклом ($q > 0$), то существует $(q-1)$ -коцепь g , а именно $g = h_q(f)$, такая, что $dg = f$; следовательно, $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = 0$. Аксиома 5.18 (b), таким образом, выполняется.

Короткая точная последовательность $0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$ индуцирует точную последовательность

$$(16) \quad 0 \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'').$$

Пусть $\bar{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$ — образ $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ в $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$. Тогда короткая точная последовательность

$$(17) \quad 0 \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow 0$$

индуцирует короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$(18) \quad 0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow 0.$$

Отображение измельчения $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}$ индуцирует гомоморфизм коротких точных последовательностей

$$(19) \quad \begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow 0 \\ \downarrow \mu^* \quad \downarrow \mu^* \quad \downarrow \mu^* \\ 0 \rightarrow C^*(\mathfrak{B}, \mathcal{P}') \rightarrow C^*(\mathfrak{B}, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{C}^*(\mathfrak{B}, \mathcal{P}'') \rightarrow 0 \end{array}$$

и в силу 5.17 индуцирует коммутативную диаграмму соответствующих когомологических последовательностей

$$(20) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow \bar{H}^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \rightarrow \\ \downarrow \mu_{q-1}^* \quad \downarrow \mu_q^* \quad \downarrow \mu_q^* \\ \dots \rightarrow \bar{H}^{q-1}(\mathfrak{B}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{P}) \rightarrow \\ \rightarrow \bar{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \dots \\ \downarrow \mu_q^* \quad \downarrow \mu_{q+1}^* \\ \rightarrow \bar{H}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(\mathfrak{B}, \mathcal{P}') \rightarrow \dots \end{array}$$

Переходя к прямому пределу, получим длинную точную последовательность

$$(21) \quad \dots \rightarrow \bar{H}^{q-1}(M, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(M, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{H}^q(M, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(M, \mathcal{P}') \rightarrow \dots$$

Докажем теперь, что коцепное отображение $\bar{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$ после перехода к прямому пределу индуцирует изоморфизмы

$$(22) \quad \bar{H}^q(M, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\cong} \check{H}^q(M, \mathcal{P}'').$$

Эти изоморфизмы вместе с (21) дают длинную точную последовательность

$$(23) \quad \dots \rightarrow \check{H}^{q-1}(M, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(M, \mathcal{P}') \rightarrow \check{H}^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow \bar{H}^q(M, \mathcal{P}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(M, \mathcal{P}') \rightarrow \dots,$$

что и доказывает справедливость аксиомы 5.18 (с). Фактормодули

$$(24) \quad \bar{C}^q(\mathcal{U}) = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'') / \bar{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$$

вместе с индуцированными кограничными гомоморфизмами образуют коцепной комплекс $\bar{C}^*(\mathcal{U})$, такой, что последовательность

$$(25) \quad 0 \rightarrow \bar{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}') \rightarrow \bar{C}^*(\mathcal{U}) \rightarrow 0$$

точна. Если нам удастся показать, что предел модулей $H^q(\bar{C}^*(\mathcal{U}))$ равен нулю при всех q , то существование изоморфизмов (22) будет получаться из длинной точной последовательности, отвечающей (25), с помощью перехода к пределу. В свою очередь тривиальность прямого предела будет доказана, если при любом $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P}'')$, где $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие M , имеются измельчение $\mathfrak{B}$ покрытия $\mathcal{U}$ и отображение измельчения $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}$, такие, что $\mu_q(f) \in \bar{C}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{P}'')$. Выберем сначала измельчение $\mathfrak{D} = \{O_\alpha\}$ покрытия $\mathcal{U}$, такое, что $\bar{O}_\alpha \subset U_\alpha$ при всех α . Для каждой точки $p \in M$ выберем окрестность V_p так, чтобы

- (a) $V_p \subset O_\alpha$ при некотором α ;
- (b) если $V_p \cap O_\alpha \neq \emptyset$, то $V_p \subset U_\alpha$;
- (c) V_p лежит в пересечении всех U_α , содержащих p ;
- (d) если σ есть q -симплекс покрытия $\mathcal{U}$ и $p \in |\sigma|$ (т. е. $V_p \subset |\sigma|$), то $\rho_{V_p, |\sigma|} f(\sigma)$ совпадает с образом сечения $\mathcal{P}$ над V_p .

Условие (d) выполняется, поскольку лишь конечное число q -симплексов покрытия $\mathcal{U}$ содержит p . Примем теперь за $\mathfrak{B}$ покрытие $\{V_p\}$ и при каждом p выберем $O_p \in \mathfrak{D}$ и $U_p \in \mathcal{U}$ так, чтобы $V_p \subset O_p \subset U_p$. Покрытие $\mathfrak{B}$ вписано в $\mathcal{U}$, и пусть $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{U}$ — соответствующее отображение измельчения. Пусть теперь

$\sigma = (V_{p_0}, \dots, V_{p_q})$ есть q -симплекс покрытия $\mathfrak{B}$. Тогда $V_{p_0} \cap \dots \cap O_{p_i} \neq \emptyset$ при $0 \leq i \leq q$; следовательно, по свойству (b) $V_{p_0} \subset U_{p_i}$. Таким образом, $V_{p_0} \subset U_{p_0} \cap \dots \cap U_{p_q} = |\mu(\sigma)|$ и $\mu_q(f)(\sigma) = \rho_{|\sigma|} \cdot |\mu(\sigma)|f(U_{p_0}, \dots, U_{p_q}) =$

$$= \rho_{|\sigma|} \cdot \nu_{p_0} \circ \rho_{V_{p_0}} \cdot |\mu(\sigma)|f(U_{p_0}, \dots, U_{p_q}).$$

Значит, в силу (d) $\mu_q(f) \in \bar{C}^q(\mathfrak{B}, \mathcal{S}'')$.

Наконец, справедливость аксиомы 5.18(f) легко следует из конструкции последовательности (23) с использованием 5.17 (3).

Тем самым когомологии Чеха удовлетворяют аксиомам разд. 5.18 для теории когомологий с коэффициентами в пучках.

Теорема де Рама

5.34. Соглашение. В силу следствия теоремы 5.23 любые две теории когомологий с коэффициентами в пучках для M единственным образом изоморфны; впредь мы будем их отождествлять посредством соответствующего единственного изоморфизма и употреблять обозначение $H^p(M, \mathcal{S})$ для однозначно определенного p -го модуля когомологий с коэффициентами в пучке $\mathcal{S}$. При таком соглашении

$$(1) \quad H^p(M, \mathcal{S}) = \check{H}^p(M, \mathcal{S})$$

и для данной тонкой резольвенты без кручения

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots$$

мы имеем

$$(3) \quad H^p(M, \mathcal{S}) = H^p(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{S})).$$

5.35. В предыдущих разделах были построены изоморфизмы

$$(1) \quad H_{A-S}^p(M; G) \cong H_{\Delta}^p(M; G) \cong H_{\Delta}^p(M; G) \cong \check{H}^p(M; G)$$

между классическими когомологиями Александера—Спеньера, сингулярными и гладкими сингулярными когомологиями и когомологиями Чеха для гладкого многообразия M . Здесь G — модуль над областью главных идеалов K . Было показано, что эти модули когомологий изоморфны модулю $H^p(M, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ — постоянный пучок. В случае когда K совпадает с полем вещественных чисел, мы могли бы добавить группу когомологий де Рама к описанным выше изоморфизмам. В частности, мы имеем канонические изоморфизмы

$$(2) \quad H_{\text{de R}}^p(M) \cong H^p(M, \mathcal{R}) \cong H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R}).$$

С помощью разд. 5.24 мы собираемся показать, что гомоморфизм теории де Рама в гладкую сингулярную теорию, построенный с помощью интегрирования форм по гладким цепям, порождает канонические изоморфизмы (2).

Мы определяем гомоморфизмы

$$(3) \quad k_p: E^p(M) \rightarrow S_\infty^p(M, \mathbb{R}),$$

полагая при каждом $p \geq 0$

$$(4) \quad k_p \omega(\sigma) = \int_\sigma \omega$$

для каждой дифференцируемой p -формы ω на M и дифференцируемого сингулярного p -симплекса σ в M . По теореме Стокса 4.7 гомоморфизмы k_p индуцируют коцепное отображение

$$(5) \quad k: E^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M, \mathbb{R}).$$

Пусть

$$(6) \quad k_p^*: H_{\text{de R}}^p(M) \rightarrow H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R})$$

— индуцированный гомоморфизм модулей когомологий (вещественных векторных пространств); он называется *гомоморфизмом де Рама*.

5.36. Теорема де Рама. Гомоморфизм де Рама k_p^* совпадает с каноническим изоморфизмом 5.35 (2) при каждом p .

Доказательство. Гомоморфизмы 5.35 (3) могут быть определены для каждого открытого подмножества $U \subset M$ и индуцируют гомоморфизмы предпучков

$$\{E^p(U); \rho_U, \nu\} \xrightarrow{k_p} \{S_\infty^p(U, \mathbb{R}); \rho_U, \nu\},$$

которые в силу теоремы Стокса коммутируют с кограницными гомоморфизмами 5.28 (2) и 5.31 (10). Поэтому имеет место коммутативная диаграмма ассоциированных пучков

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) & \rightarrow & \mathcal{E}^1(M) & \rightarrow & \mathcal{E}^2(M) & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow \text{id} & \downarrow k_0 & & \downarrow k_1 & & \downarrow k_2 \\ 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_\infty^0(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{P}_\infty^1(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{P}_\infty^2(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму коцепных комплексов с точными (см. 5.30 (5) и 5.32 (2)) строками

$$(2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow E^*(M) & \xrightarrow{i_1} & \Gamma(\mathcal{E}^*(M)) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow k & & \downarrow i_3 & \\ 0 \rightarrow S_{\infty, 0}^*(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & S_\infty^*(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_2} & \Gamma(\mathcal{P}_\infty^*(M, \mathbb{R})) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Коцепное отображение i_1 индуцирует изоморфизмы $H_{\text{de R}}^p(M) \cong \cong H^p(M, \mathcal{R})$; мы доказали в 5.32 (4), что i_2 индуцирует изо-

морфизмы $H_{\Delta}^p(M, \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathcal{R})$. Тот факт, что отображение i_3 индуцирует изоморфизм в когомологиях, вытекает из следствия теоремы 5.23, примененного к гомоморфизму теорий когомологий с коэффициентами в пучках, индуцированному гомоморфизмом (1) тонких резольвент без кручения для $\mathcal{R}$. Из единственности изоморфизма между указанными теориями следует, что i_3 индуцирует тождественный изоморфизм $H^p(M, \mathcal{R})$. Значит, k_p^* — канонический изоморфизм 5.35 (2) при каждом p .

5.37. Ранее, в разд. 4.17, мы встретились с теоремой де Рама в несколько иной формулировке, использующей сингулярные гомологии. Покажем, что естественный изоморфизм

$$(1) \quad H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow {}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})^*$$

в композиции с k_p^* дает изоморфизм 4.17 (1). (По поводу определений см. 4.16.) Отображение (1) определяется так. Если f — представитель класса когомологий в $H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R})$, то его можно рассматривать как линейный функционал на векторном пространстве ${}_{\infty}S_p(M; \mathbb{R})$ дифференцируемых сингулярных p -цепей с вещественными коэффициентами на M . В частности, f — линейный функционал на подпространстве p -циклов, который обращается в нуль на всех p -границах из ${}_{\infty}S_p(M; \mathbb{R})$, поскольку $df = 0$; значит, f определяет линейный функционал на ${}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})$. Поскольку любая кограница обращается в нуль на p -циклах, то каждый когомологический класс из $H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R})$ корректно определяет элемент из ${}_{\infty}H_p(M; \mathbb{R})^*$. Это соответствие и есть гомоморфизм (1). Читателю предлагается проверить, что (1) в действительности является изоморфизмом. Очевидно, что композиция (1) и k_p^* дает гомоморфизм 4.17 (1), который тем самым является изоморфизмом.

5.38. Замечание. Сингулярные когомологии $H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R})$ — топологические инварианты, т. е. гомеоморфные пространства имеют изоморфные группы сингулярных когомологий с вещественными коэффициентами (см. упр. 19). Следствием этого факта и изоморфизмов 5.35 (1) и 5.35 (2) является топологическая инвариантность групп когомологий де Рама дифференцируемого многообразия.

Мультипликативная структура

Если $\mathcal{P}$ — пучок K -алгебр над M , мы можем ввести структуру ассоциативной алгебры над K в прямой сумме модулей когомологий $\sum_p H^p(M, \mathcal{P})$. Нам потребуются некоторые предварительные построения.

5.39. Определения. Пусть C^* и $'C^*$ — коцепные комплексы. При каждом r рассмотрим модуль

$$(1) \quad \sum_{p+q=r} C_p \otimes 'C_q$$

и введем кограничный гомоморфизм формулой

$$(2) \quad \sum_{p+q=r} (d_p \otimes (\text{id})_q + (-1)^p (\text{id})_p \otimes 'd_q).$$

Полученный комплекс называется *тензорным произведением* $C^* \otimes 'C^*$ комплексов C^* и $'C^*$. Если $\sigma \in Z^p(C^*)$ и $\tau \in Z^q('C^*)$, то $\sigma \otimes \tau \in Z^{p+q}(C^* \otimes 'C^*)$, тогда как, если $\sigma \in B^p(C^*)$ и $\tau \in Z^q('C^*)$ (или же, наоборот, $\sigma \in Z^p(C^*)$, $\tau \in B^q('C^*)$), то $\sigma \otimes \tau \in B^{p+q}(C^* \otimes 'C^*)$. Этим корректно определяются гомоморфизмы

$$(3) \quad H^p(C^*) \otimes H^q('C^*) \rightarrow H^{p+q}(C^* \otimes 'C^*).$$

5.40. Лемма. Пусть K — область главных идеалов. Тогда тензорное произведение двух K -модулей без кручения является K -модулем без кручения.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0 \in K$ и K/λ обозначает K -модуль, образованный элементами $\{k/\lambda: k \in K\}$ с операциями

$$(1) \quad \begin{aligned} k_1/\lambda + k_2/\lambda &= (k_1 + k_2)/\lambda, \\ k(k_1/\lambda) &= kk_1/\lambda. \end{aligned}$$

Для K -модуля A можно задать последовательность гомоморфизмов

$$(2) \quad A \rightarrow (K/\lambda) \otimes A \rightarrow K \otimes A \rightarrow A.$$

Первый гомоморфизм задается соответствием $a \mapsto (\lambda/\lambda) \otimes a$, второй — соответствием $\sum (k_i/\lambda) \otimes a_i \mapsto \sum k_i \otimes a_i$ и третий — соответствием $\sum k_i \otimes a_i \mapsto \sum k_i a_i$. Очевидно, что второй гомоморфизм — изоморфизм, а третий в силу 5.9 (2) также изоморфизм. Композиция (2) переводит $a \in A$ в $\lambda a \in A$. По определению A — модуль без кручения в том и только том случае, когда композиция (2) при каждом $\lambda \neq 0 \in K$ имеет нулевое ядро. Поэтому A — модуль без кручения, если и только если последовательность

$$(3) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow (K/\lambda) \otimes A$$

точна при всех $\lambda \neq 0 \in K$. Пусть теперь A и B — некоторые K -модули без кручения и $\lambda \neq 0 \in K$. Тогда (3) точна, и из разд. 5.14 вытекает, что

$$(4) \quad 0 \rightarrow A \otimes B \rightarrow (K/\lambda) \otimes A \otimes B$$

также точна, а следовательно, $A \otimes B$ — модуль без кручения.

5.41. Определение. Прямая сумма пучков $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}$ и прямая сумма $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}' \oplus \mathcal{T}'$ гомоморфизмов пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ и $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ определяются дословным повторением 5.9 (3) — (8) с заменой знака $\otimes$ на знак $\oplus$ (при этом 5.9 (7) пропускается). Отметим, что прямая сумма тонких пучков является тонким пучком.

5.42. Мультипликативная структура. Рассмотрим резольвенту

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Тензорным произведением резольвенты (1) на себя называется последовательность

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0 \rightarrow (\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_1) \oplus (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_0) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \sum_{p+q=r} \mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_q \rightarrow \dots,$$

в которой гомоморфизм $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0$ совпадает с композицией $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0$, а гомоморфизм с областью определения $\sum_{p+q=r} \mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_q$ задается формулой

$$(3) \quad \sum_{p+q=r} (d_p \otimes (\text{id})_q + (-1)^p (\text{id} \otimes d_q)).$$

В случае когда (1) является тонкой резольвентой без кручения для $\mathcal{K}$, мы утверждаем, что (2) также тонкая резольвента без кручения для $\mathcal{K}$. Действительно, поскольку тензорные произведения и прямые суммы тонких пучков сами являются тонкими, то составляющие последовательность (2) пучки тонкие. Прямая сумма модулей без кручения также не имеет кручения. Вместе с леммой 5.40 это доказывает, что пучки в (2) без кручения. Нетрудно убедиться в точности (2) в начальных двух членах. Для того чтобы проверить точность в остальных членах, применим формулу Кюннета к коцепным комплексам, возникающим при ограничении на слои над каждой точкой $m \in M$ последовательности

$$(4) \quad \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0 \rightarrow (\mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_1) \oplus (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_0) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \sum_{p+q=r} \mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_q \rightarrow \dots$$

Формула Кюннета выражает когомологии тензорного произведения коцепных комплексов через когомологии сомножителей. Для ее доказательства необходим развитый алгебраический аппарат, изложение которого не входит в наши цели, поэтому мы ограничимся ссылкой на книгу Спеньера [28, гл. 5, § 4, теорема 2], где приводится ее полное доказательство.

Пусть $\mathcal{P}$ — пучок над M . Резольвента (2) задает (см. 5.19 (2)) коцепной комплекс, обозначаемый через $\Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P})$. Если $\mathcal{P}$ — пучок алгебр над M , то естественный гомоморфизм $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, определенный с помощью умножения в слоях, индуцирует гомоморфизмы

$$(5) \quad \Gamma(\mathcal{E}_p \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{E}_q \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_q \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \\ \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_q \otimes \mathcal{P}),$$

которые в свою очередь индуцируют коцепное отображение

$$(6) \quad \Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}).$$

Согласно 5.39 (3), имеет место корректно определенный гомоморфизм

$$(7) \quad H^p(M, \mathcal{P}) \otimes H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^{p+q}(\Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P})).$$

В случае когда $\mathcal{P}$ — пучок алгебр над M , отображения (6) и (7) задают гомоморфизм

$$(8) \quad H^p(M, \mathcal{P}) \otimes H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^{p+q}(M, \mathcal{P}).$$

С помощью этого гомоморфизма мы определим мультипликативную структуру в теории когомологий. Сначала необходимо убедиться, что умножение (8) не зависит от выбора резольвенты (1). Рассмотрим другую тонкую резольвенту без кручения

$$(9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2 \rightarrow \dots$$

Беря тензорное произведение резольвент (1) и (9) (это делается аналогично тому, как образовывалось тензорное произведение (1) на себя, см. (2) и (3)), мы приходим к тонкой резольвенте без кручения

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}_0 \otimes \tilde{\mathcal{E}}_0 \rightarrow (\mathcal{E}_0 \otimes \tilde{\mathcal{E}}_1) \oplus (\mathcal{E}_1 \otimes \tilde{\mathcal{E}}_0) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \sum_{p+q=r} \mathcal{E}_p \otimes \tilde{\mathcal{E}}_q \rightarrow \dots$$

Гомоморфизм резольвенты (1) в резольвенту (10) (в смысле разд. 5.24) порождается гомоморфизмами

$$\mathcal{E}_p \cong \mathcal{E}_p \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}_p \otimes \tilde{\mathcal{E}}_0 \rightarrow \sum_{r+s=p} \mathcal{E}_r \otimes \tilde{\mathcal{E}}_s,$$

где последняя стрелка обозначает включение. Так построенный гомоморфизм резольвент задает коцепное отображение $\Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^* \otimes \tilde{\mathcal{E}}^* \otimes \mathcal{P})$, которое в силу разд. 5.24 и следствия теоремы 5.23 индуцирует тождественный гомоморфизм $H^q(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{P})$. Применение описанных конструкций к резольвентам (1) и (10) и тензорным перемножением получив-

шихся цепных комплексов, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 (11) & \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{P}) \\
 & \uparrow & & \uparrow \\
 & \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) & \longrightarrow & \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P})
 \end{array}$$

которая в свою очередь приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{p+q}(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 (12) & H^p(M, \mathcal{P}) \otimes H^q(M, \mathcal{P}) & \rightarrow & H^{p+q}(\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P})) & \rightarrow H^{p+q}(M, \mathcal{P}) \\
 & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\
 & & H^{p+q}(\Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P}) \otimes \Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^* \otimes \mathcal{P})) & &
 \end{array}$$

Из диаграммы (12) следует независимость умножения (8) от выбора резольвенты (1).

Ассоциативность введенного умножения вытекает из ассоциативности тензорного умножения и явной конструкции гомоморфизма (8). Таким образом, на $\sum_p H^p(M, \mathcal{P})$ определена структура ассоциативной K -алгебры.

Отображения $\mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_q \rightarrow \mathcal{C}_q \otimes \mathcal{C}_p$, $c_p \otimes c_q \mapsto (-1)^{pq} c_q \otimes c_p$, индуцируют изоморфизм в смысле 5.24 резольвенты (2) на себя. По следствию теоремы 5.23 соответствующий гомоморфизм в когомологиях должен быть тождественным. Однако индуцированный гомоморфизм $H^{p+q}(M, \mathcal{P}) \rightarrow H^{p+q}(M, \mathcal{P})$ переводит $u \cdot v$ в $(-1)^{pq} v \cdot u$ при $u \in H^p(M, \mathcal{P})$, $v \in H^q(M, \mathcal{P})$. Следовательно, умножение в $\sum_p H^p(M, \mathcal{P})$ удовлетворяет закону антикоммутативности

$$(13) \quad u \cdot v = (-1)^{pq} v \cdot u \quad (u \in H^p(M, \mathcal{P}); \quad v \in H^q(M, \mathcal{P})).$$

5.43. Алгебра когомологий де Рама. Внешнее умножение $\wedge$ дифференциальных форм $\sigma \otimes \alpha \mapsto \sigma \wedge \alpha$ индуцирует коцепное отображение

$$(1) \quad E^*(M) \otimes E^*(M) \xrightarrow{\wedge} E^*(M),$$

которое вместе с естественными гомоморфизмами 5.39 (3)

$$(2) \quad H_{\text{de R}}^p(M) \otimes H_{\text{de R}}^q(M) \rightarrow H^{p+q}(E^*(M) \otimes E^*(M))$$

дает гомоморфизмы

$$(3) \quad H_{\text{de } \mathbb{R}}^p(M) \otimes H_{\text{de } \mathbb{R}}^q(M) \rightarrow H_{\text{de } \mathbb{R}}^{p+q}(M).$$

Эти гомоморфизмы превращают прямую сумму $\sum_p H_{\text{de } \mathbb{R}}^p(M)$ в ассоциативную алгебру над $\mathbb{R}$. Полученное умножение и есть классическая мультипликативная структура в когомологиях де Рама. Кроме того, $\sum_p H_{\text{de } \mathbb{R}}^p(M)$ наследует мультипликативную структуру из структуры алгебры 5.42 (8) в когомологиях (с коэффициентами в пучках) ввиду изоморфизма

$$\sum_p H_{\text{de } \mathbb{R}}^p(M) \cong \sum_p H^p(M, \mathcal{R}).$$

Мы покажем, что эти две структуры алгебры в $\sum_p H_{\text{de } \mathbb{R}}^p(M)$ на самом деле совпадают. Для каждого открытого множества $U \subset M$ внешнее умножение индуцирует гомоморфизмы

$$(4) \quad E^p(U) \otimes E^q(U) \rightarrow E^{p+q}(U),$$

коммутирующие с отображениями ограничения и потому порождающие гомоморфизмы предпучков

$$(5) \quad \{E^p(U); \rho_U, \nu\} \otimes \{E^q(U); \rho_U, \nu\} \rightarrow \{E^{p+q}(U); \rho_U, \nu\}.$$

Эти последние в свою очередь дают гомоморфизмы пучков

$$(6) \quad \mathcal{E}^p(M) \otimes \mathcal{E}^q(M) \rightarrow \mathcal{E}^{p+q}(M).$$

Отображения (6) индуцируют гомоморфизм (в смысле разд. 5.24) тензорного произведения резольвенты 5.28 (3) на себя в себя

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \otimes \mathcal{E}^0(M) \rightarrow (\mathcal{E}^0(M) \otimes \mathcal{E}^1(M)) \oplus (\mathcal{E}^1(M) \otimes \mathcal{E}^0(M)) \rightarrow \dots \\ \downarrow \text{id} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Возникает коцепное отображение $\Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes \mathcal{E}^*(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^*(M))$, которое в силу следствия теоремы 5.23 и разд 5.24 индуцирует тождественное отображение $H^q(M, \mathcal{R}) \rightarrow H^q(M, \mathcal{R})$. Рассмотрим теперь следующую диаграмму коцепных комплексов:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{E}^*(M)) \otimes \Gamma(\mathcal{E}^*(M)) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes \mathcal{E}^*(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^*(M)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E^*(M) \otimes E^*(M) & \longrightarrow & E^*(M) \end{array}$$

Учитывая 5.39(3), получаем индуцированную диаграмму модулей когомологий

(9)

$$\begin{array}{ccccc}
 H^p(M, \mathcal{R}) \otimes H^q(M, \mathcal{R}) & \rightarrow & H^{p+q}(\Gamma(\mathcal{E}^*(M)) \otimes \Gamma(\mathcal{E}^*(M))) & \rightarrow & H^{p+q}(M, \mathcal{R}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H_{\text{de R}}^p(M) \otimes H_{\text{de R}}^q(M) & \rightarrow & H^{p+q}(E^*(M) \otimes E^*(M)) & \xrightarrow{\quad} & H_{\text{de R}}^{p+q}(M)
 \end{array}$$

Композиция гомоморфизмов верхней строки в (9) задает умножение в смысле 5.42(8), композиция в нижней — классическое умножение (2), вертикальные стрелки — канонические изоморфизмы. Это доказывает, что обе структуры на $\sum_p H_{\text{de R}}^p(M)$

совпадают.

5.44. Алгебра сингулярных когомологий. В этом разделе будет идти речь о непрерывных сингулярных когомологиях, однако с тем же успехом эти же рассуждения могут быть проведены и в гладком случае. Пусть $f \in S^p(M, K)$ и $g \in S^q(M, K)$ — соответственно сингулярные p -коцепь и q -коцепь. Определим *произведение* $f \smile g$, т. е. некоторую $(p+q)$ -коцепь. Для сингулярного $(p+q)$ -симплекса σ в M положим

$$(1) \quad (f \smile g)(\sigma) =$$

$$= f(\sigma \circ k_{p+q}^{p+q-1} \circ k_{p+q-1}^{p+q-2} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) g(\sigma \circ k_0^{p+q-1} \circ \dots \circ k_0^q).$$

Здесь при $q = 0$ первый сомножитель правой части совпадает с $f(\sigma)$, а при $p = 0$ второй сомножитель совпадает с $g(\sigma)$; отображения k_j^i определены в 4.6 (2). Неформально равенство (1) можно пояснить следующим образом: у симплекса σ мы отбрасываем q последних вершин и к полученному p -симплексу применяем f , отбрасываем у σ p начальных вершин, чтобы к полученному q -симплексу применить g , и, наконец, перемножаем соответствующие значения в кольце K . Ассоциативность умножения

$$(2) \quad f \smile (g \smile h) = (f \smile g) \smile h$$

следует из (1) и тождества

$$\begin{aligned}
 (3) \quad k_0^{p+q+r-1} \circ \dots \circ k_0^{q+r} \circ k_{q+r}^{q+r-1} \circ \dots \circ k_{q+1}^q &= \\
 = k_{p+q+r}^{p+q+r-1} \circ \dots \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ k_0^{p+q-1} \circ \dots \circ k_0^q
 \end{aligned}$$

(оно получается многократным применением 4.6 (5)). Билинейное отображение $(f, g) \mapsto f \smile g$ индуцирует гомоморфизм

$$(4) \quad S^p(M, K) \otimes S^q(M, K) \rightarrow S^{p+q}(M, K).$$

Мы утверждаем, что

$$(5) \quad (df) \smile g + (-1)^p f \smile (dg) = d(f \smile g).$$

Для иллюстрации идеи доказательства мы рекомендуем читателю проверить (5) непосредственно в случае 1-коцепей g и f и 3-симплекса σ . В общем случае применим 4.6 (5) к $(p+q+1)$ -симплексу τ ; тогда, учитывая (1) и 5.31 (8), получаем

$$\begin{aligned}
 d(f - g)(\tau) &= \sum_{l=0}^{p+q+1} (-1)^l (f - g)(\tau \circ k_l^{p+q}) = \\
 &= \sum_{l=0}^{p+q+1} (-1)^l f(\tau \circ k_l^{p+q} \circ k_{p+q}^{p+q-1} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) \cdot \\
 &\quad \cdot g(\tau \circ k_l^{p+q} \circ k_0^{p+q-1} \circ \dots \circ k_0^q) = \\
 &= \sum_{l=0}^p (-1)^l f(\tau \circ k_l^{p+q} \circ k_{p+q}^{p+q-1} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^q) + \\
 &+ \sum_{l=p+1}^{p+q+1} (-1)^l f(\tau \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^{q+1} \circ k_{l-p}^p) = \\
 &= \sum_{l=0}^p (-1)^l f(\tau \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ k_{p+q}^{p+q-1} \circ \dots \circ k_{p+2}^{p+1} \circ k_l^p) \cdot \\
 &\quad \cdot g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^q) + \\
 &+ (-1)^p f(\tau \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^j g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^{q+1} \circ k_j^q) = \\
 &= \sum_{l=0}^{p+1} (-1)^l f(\tau \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ k_{p+q}^{p+q-1} \circ \dots \circ k_{p+2}^{p+1} \circ k_l^p) \cdot \\
 &\quad \cdot g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^q) + \\
 &+ (-1)^p f(\tau \circ k_{p+q+1}^{p+q} \circ \dots \circ k_{p+1}^p) \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j g(\tau \circ k_0^{p+q} \circ \dots \circ k_0^{q+1} \circ k_j^q) = \\
 &= (df - g)(\tau) + (-1)^p (f - dg)(\tau).
 \end{aligned}$$

Ясно, что гомоморфизмы (4) определяют коцепное отображение

$$(6) \quad S^*(M, K) \otimes S^*(M, K) \rightarrow S^*(M, K),$$

которое вместе с естественными (см. 5.39 (3)) гомоморфизмами

$$(7) \quad H_{\Delta}^p(M; K) \otimes H_{\Delta}^q(M, K) \rightarrow H^{p+q}(S^*(M, K) \otimes S^*(M, K))$$

индуцирует гомоморфизмы

$$(8) \quad H_{\Delta}^p(M; K) \otimes H_{\Delta}^q(M; K) \rightarrow H_{\Delta}^{p+q}(M; K).$$

Это и есть классическая структура ассоциативной алгебры в $\sum_p H_{\Delta}^p(M; K)$. Существует другое определение умножения в $\sum_p H_{\Delta}^p(M; K)$, использующее мультипликативную структуру в когомологиях с коэффициентами в пучках и изоморфизм

$$\sum_p H_{\Delta}^p(M; K) \cong \sum_p H_{\Delta}^p(M, \mathcal{K}).$$

Доказательство совпадения обеих структур проводится так же, как и для когомологий де Рама в 5.43 (4)—5.43 (9), с заменой $\mathcal{E}^*(M)$ на $\mathcal{P}^*(M, K)$ и $E^*(M)$ на $S^*(M, K)$ и т. д.

Результаты разд. 5.43 и 5.44 позволяют дать более полную формулировку теоремы де Рама 5.36.

5.45. Теорема де Рама. Гомоморфизм де Рама

$$(1) \quad k^*: \sum_p H_{\text{de R}}^p(M) \rightarrow \sum_p H_{\Delta}^p(M, \mathbb{R})$$

является изоморфизмом алгебр.

Носители

5.46. Определение. Семейство носителей на M — это семейство Φ замкнутых подмножеств M со свойствами

- (а) объединение любых двух элементов семейства Φ входит в Φ ;
- (б) замкнутое подмножество элемента семейства Φ само входит в это семейство;
- (с) каждый элемент из Φ обладает открытой окрестностью, замыкание которой принадлежит Φ .

Напомним, что M предполагается паракомпактным и хаусдорфовым пространством и лишь там, где это необходимо, — дифференцируемым многообразием. Пусть Φ — семейство носителей на M и $\mathcal{P}$ — пучок над M . Обозначим через $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{P})$ множество сечений пучка $\mathcal{P}$, носители которых лежат в Φ . Условие (а) гарантирует, что $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{P})$ — подмодуль в $\Gamma(\mathcal{P})$. Из условия (б) следует, что гомоморфизму пучков $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ отвечает гомоморфизм $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{P}')$.

Имеется аналог теоремы 5.12 для случая носителей. Необходимо провести лишь небольшие изменения в доказательстве, чтобы соответствующее сечение пучка $\mathcal{P}$ действительно лежало в $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{P})$; это делается с использованием свойства (с). Детали мы оставляем читателю.

Теория когомологий $\mathcal{H}_{\Phi}$ для M с носителями Φ и коэффициентами в пучках K -модулей над M определяется так же, как и в разд. 5.18, с заменой $\Gamma(\mathcal{P})$ на $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{P})$ в 5.18 (а) и изменением обозначения модуля когомологий на ${}_{\Phi}H^p(M, \mathcal{P})$. Вся эта глава

может быть с небольшими изменениями переписана для случая когомологий с носителями. Отметим коротко основные различия.

Доказательство существования и единственности теории когомологий с носителями (вариант теоремы 5.12) проводится, как в разд. 5.18—5.25, с учетом следующего изменения: для тонкой резольвенты без кручения $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \dots$ модули когомологий определяются равенством

$$(1) \quad \Phi H^q(M, \mathcal{P}) = H^q(\Gamma_\Phi(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})).$$

Пусть $\{S_U; \rho_{U,V}\}$ — предпучок, ассоциированный с $\mathcal{P}$. Обозначим через ΦS_M подмодуль в S_M , совпадающий с прообразом $\Gamma_\Phi(\mathcal{P})$ при гомоморфизме $S_M \rightarrow \Gamma(\mathcal{P})$. Легко видеть, что предложение 5.27 будет справедливо, если заменить условие 5.27 (2) на

$$(2) \quad 0 \rightarrow (S_M)_0 \rightarrow \Phi S_M \rightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{P}) \rightarrow 0.$$

Классические теории с носителями определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi H_{A-S}^q(M; G) &= H^q(\Phi A^*(M, G)/A_0^*(M, G)), \\ \Phi H_{\text{de R}}^q(M) &= H^q(\Phi E^*(M)), \\ (3) \quad \Phi H_\Delta^q(M; G) &= H^q(\Phi S^*(M, G)), \\ \Phi H_{\Delta^\infty}^q(M; G) &= H^q(\Phi S_\infty^*(M, G)). \end{aligned}$$

В случае когомологий Чеха носитель q -коцепи $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ полагается по определению объединением носителей сечений $f(\sigma)$ по всем q -симплексам σ покрытия $\mathcal{U}$. Если определить $\Phi C^q(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ как модуль q -коцепей с носителями в Φ , то все конструкции когомологий Чеха проходят для $\Phi \check{H}^q(M, \mathcal{P})$ практически дословно.

Полученные теории зависят от выбранного семейства носителей. Обычные когомологии отвечают семейству Φ , состоящему из всех замкнутых множеств.

Теоремы об изоморфизмах и конструкция умножения сохраняются. В частности, имеет место теорема де Рама с носителями: гомоморфизм

$$(4) \quad k^*: \sum_p \Phi H_{\text{de R}}^p(M) \cong \sum_p \Phi H_{\Delta^\infty}^p(M; \mathbb{R})$$

является изоморфизмом алгебр.

Упражнения

1. Пусть $\mathcal{P}$ — пучок над M . Докажите, что отображение $m \mapsto 0 \in \mathcal{P}_m$ (нулевое сечение) непрерывно.

2. Докажите, что сечения пучков являются локальными гомоморфизмами и, следовательно, открытыми отображениями.

3. Докажите, что если два сечения пучка совпадают в точке, то они совпадают в некоторой ее окрестности. Выведите отсюда замкнутость множества точек, в которых сечение не обращается в нуль.

4. Любая гладкая функция на M определяет сечение пучка ростков гладких функций $\mathcal{E}^\infty(M)$. Множество точек из M , где некоторая функция не равна нулю, открыто; однако по предыдущему упражнению множество точек из M , где сечение $\mathcal{E}^\infty(M)$ не обращается в нуль, замкнуто. Как совместить эти факты? Рассмотрите примеры.

5. Докажите, что морфизм пучков является локальным гомеоморфизмом и, следовательно, открытым отображением.

6. Докажите, что два морфизма пучков, совпадающие в точке, совпадают в некоторой ее окрестности. Выведите отсюда, что множество точек, где морфизм пучков не равен нулю, замкнуто.

7. Восстановите детали конструкции факторпучков в разд. 5.4.

8. Завершите доказательство, начатое в разд. 5.6, изоморфности $\beta(\alpha(\mathcal{P}))$ и $\mathcal{P}$.

9. Докажите, что существует канонический изоморфизм $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{T})_m \cong \mathcal{P}_m \otimes \mathcal{T}_m$.

10. Покажите, что тензорное произведение двух полных предпучков не обязательно является полным предпучком.

11. Пусть φ — гладкая функция на M . Определим отображение $\mathcal{E}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{E}^\infty(M)$, положив $f_m \rightarrow \varphi(m) \cdot f_m$. Как обычно, f_m обозначает росток в точке m гладкой функции f , определенной в окрестности этой точки. Покажите, что это отображение, вообще говоря, не непрерывно и, значит, не является гомоморфизмом пучков. (*Предостережение.* Именно в этом месте легко ошибиться при построении разбиения единицы — рекомендуем еще раз просмотреть правильную конструкцию для $\mathcal{E}^\infty(M)$ в разд. 5.10.)

12. Произведите необходимые изменения в доказательстве теоремы 5.12 с тем, чтобы доказать сюръективность отображения $\Gamma_\Phi(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{T})$, где Φ — семейство носителей на M и $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ — сюръективный гомоморфизм, ядро которого — тонкий пучок.

13. Восстановите детали доказательства точности последовательности 5.17 (2).

14. Восстановите детали в разд. 5.24.

15. Докажите, что предпучки 5.26 (5) удовлетворяют 5.7(C_2), но при $p \geq 1$ не удовлетворяют 5.7(C_1).

16. Приведите пример точной последовательности модулей

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

и модуля D , таких, чтобы последовательность

$$0 \rightarrow A \otimes D \rightarrow B \otimes D \rightarrow C \otimes D \rightarrow 0$$

не была бы точна.

17. Приведите пример такого тонкого пучка, чтобы некоторый его подпучок был бы не тонким.

18. Докажите, что при тензорном умножении длинной точной последовательности пучков без кручения на пучок $\mathcal{S}$ точность сохраняется.

19. Докажите, что непрерывное отображение $f: M \rightarrow N$ естественным образом индуцирует гомоморфизм

$$f^*: H_{\Delta}^p(N; G) \rightarrow H_{\Delta}^p(M; G)$$

такой, что для $g: N \rightarrow X$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \text{ и } (\text{id})^* = \text{id}.$$

Выведите отсюда, что гомеоморфные пространства обладают изоморфными модулями сингулярных когомологий.

20. Докажите, что 5.37 (1) — изоморфизм. Напомним, что соответствующие векторные пространства, вообще говоря, не являются конечномерными.

21. Докажите, что если σ и τ — замкнутые дифференциальные формы с целочисленными (см. разд. 4.17) периодами, то периоды формы $\sigma \wedge \tau$ также целочисленны.

Теорема Ходжа

На протяжении этой главы, если не оговорено противное, M будет обозначать компактное ориентированное риманово многообразие размерности n . Мы увидим, что обычный лапласиан $(-1) \sum_i \partial^2 / \partial x_i^2$ обобщается до оператора Δ , действующего на дифференциальных формах и называемого оператором Лапласа—Бельтрами. Основной целью этой главы является доказательство теоремы Ходжа о разложении, утверждающей, что уравнение $\Delta \omega = \alpha$ в пространстве гладких p -форм обладает решением ω тогда и только тогда, когда p -форма α ортогональна (относительно подходящего скалярного произведения на $E^p(M)$) пространству гармонических p -форм (для которых $\Delta \varphi = 0$). Из теоремы Ходжа о разложении мы выведем существование единственной гармонической формы в каждом классе когомологий де Рама. В качестве другого простого приложения мы получим теорему о двойственности Пуанкаре для когомологий де Рама и из нее теорему о двойственности Пуанкаре для вещественных сингулярных когомологий. Для доказательства теоремы Ходжа будет дано полное замкнутое в себе изложение локальной теории эллиптических операторов, причем в качестве основного инструмента будут использоваться ряды Фурье. В упражнениях в конце главы обсуждаются собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами и их использование при доказательстве теоремы Петера—Вейля.

Оператор Лапласа—Бельтрами

6.1. Определение. Напомним (см. 4.10(6) и упр. 13 из гл. 2), что существует линейный оператор $*$, который сопоставляет каждой p -форме на M $(n-p)$ -форму и удовлетворяет равенству

$$(1) \quad ** = (-1)^{p(n-p)}.$$

Определим оператор δ из пространства p -форм в пространство $(p-1)$ -форм, полагая

$$(2) \quad \delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *.$$

На 0-формах оператор δ является просто нулевым линейным функционалом. Оператор Лапласа—Бельтрами Δ (коротко лапласиан) определяется равенством

$$(3) \quad \Delta = \delta d + d \delta$$

и является линейным оператором на пространстве $E^p(M)$ для всех p , $0 \leq p \leq n$. Оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что на $E^0(\mathbb{R}^n)$, т. е. на гладких функциях на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, лапласиан есть просто $(-1) \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$. Непосредственно проверяется также, что лапласиан коммутирует с оператором $*$, т. е.

$$(4) \quad * \Delta = \Delta *.$$

Определим скалярное произведение на векторном пространстве p -форм на многообразии M $E^p(M)$, полагая

$$(5) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta \quad \text{для } \alpha, \beta \in E^p(M),$$

и соответствующую норму будем обозначать через $\|\alpha\|$. Из равенства (6) в упр. 13 гл. 2 следует, что билинейная форма (5) на самом деле является симметричной и положительно определенной. Продолжим скалярные произведения (5) для $0 \leq p \leq n$ на прямую сумму $\sum_{p=0}^n E^p(M)$, требуя просто, чтобы различные пространства $E^p(M)$ были ортогональны.

6.2. Предложение. Оператор δ сопряжен к оператору d на пространстве $\sum_{p=0}^n E^p(M)$, т. е.

$$(1) \quad \langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$$

Доказательство. Используя линейность и ортогональность различных $E^p(M)$, сводим доказательство к рассмотрению случая, когда α есть $(p-1)$ -форма, а β есть p -форма. Тогда

$$(2) \quad \begin{aligned} d(\alpha \wedge * \beta) &= d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d(*\beta) = \\ &= d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta\beta. \end{aligned}$$

Интегрируя по M обе части этого равенства и применяя к левой части частный случай формулы Стокса, содержащийся в следствии к утверждению 4.9, получаем

$$(3) \quad 0 = \int_M (d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta\beta) = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$$

Таким образом,

$$(4) \quad \langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle.$$

Следствие. Оператор Δ самосопряжен, т. е.

$$(5) \quad \langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle \quad (\alpha, \beta \in E^p(M); 0 \leq p \leq n).$$

6.3. Предложение. $\Delta\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $\delta\alpha = 0$.

Доказательство. Ясно, что $\Delta\alpha = 0$, если $d\alpha = 0$ и $\delta\alpha = 0$. Далее,

$$(1) \quad \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle (d\delta + \delta d)\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle.$$

Таким образом, если $\Delta\alpha = 0$, то $d\alpha = 0$ и $\delta\alpha = 0$.

Следствие. Гармоническими функциями ($\Delta f = 0$) на компактном связном ориентированном римановом многообразии являются только постоянные функции.

Теорема Ходжа

6.4. Определение. Будем обозначать через Δ^* оператор, сопряженный к лапласиану на пространстве $E^p(M)$. Конечно, этот оператор есть в точности Δ , так как лапласиан самосопряжен на $E^p(M)$, и обычно мы не будем делать никакого различия между Δ и Δ^* . Это различие, однако, будет важно для формы следующего определения.

Мы хотим найти необходимые и достаточные условия существования решения ω уравнения $\Delta\omega = \alpha$. Предположим, что ω — решение уравнения $\Delta\omega = \alpha$. Тогда

$$(1) \quad \langle \Delta\omega, \varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in E^p(M),$$

откуда следует, что

$$(2) \quad \langle \omega, \Delta^*\varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in E^p(M).$$

Формула (2) наводит на мысль рассматривать решение $\Delta\omega = \alpha$ как некоторый линейный функционал на $E^p(M)$, а именно форма ω определяет ограниченный линейный функционал l на $E^p(M)$ по формуле

$$(3) \quad l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle;$$

ввиду (2) этот функционал удовлетворяет соотношению

$$(4) \quad l(\Delta^*\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in E^p(M).$$

Такой взгляд на решение оказывается исключительно полезным, так как он позволяет применить к уравнению $\Delta\omega = \alpha$ всю разнообразную технику функционального анализа. Подобный линейный функционал мы будем называть *слабым решением* уравнения $\Delta\omega = \alpha$.

Таким образом, *слабое решение* уравнения $\Delta\omega = \alpha$ — это ограниченный линейный функционал $l: E^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что

$$(5) \quad l(\Delta^*\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in E^p(M).$$

Позднее мы будем иметь дело со слабыми решениями для общего дифференциального оператора L с частными производными, определенного на открытом подмножестве евклидова пространства, и на месте Δ^* в формуле (5) будет стоять формально сопряженный к L оператор L^* (см. 6.24 (3) и разд. 6.31).

Мы видели, что всякое обычное решение $\omega \in E^p(M)$ уравнения $\Delta\omega = \alpha$ определяет по формуле (3) слабое решение. Оказывается, что основные усилия в этой главе будут затрачены на доказательство некоторой теоремы о регулярности, утверждающей, что верно обратное, т. е. что каждое слабое решение определяет обычное решение. В доказательстве этого обратного утверждения основной шаг — показать, что если функционал l — слабое решение уравнения $\Delta\omega = \alpha$, то он представляется гладкой формой ω в том смысле, что существует форма $\omega \in E^p(M)$, удовлетворяющая равенству (3). Тогда форма ω является обычным решением, потому что

$$(6) \quad \langle \Delta\omega, \beta \rangle = \langle \omega, \Delta^*\beta \rangle = l(\Delta^*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

для всех $\beta \in E^p(M)$, откуда следует, что $\Delta\omega = \alpha$.

6.5. Теорема о регулярности. Пусть $\alpha \in E^p(M)$, и пусть l — слабое решение уравнения $\Delta\omega = \alpha$. Тогда существует форма $\omega \in E^p(M)$, такая, что

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$$

для всех $\beta \in E^p(M)$. Следовательно, $\Delta\omega = \alpha$.

Мы временно примем без доказательства теорему 6.5, а также следующее утверждение.

6.6. Теорема. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность гладких p -форм на M , такая, что $\|\alpha_n\| \leq c$ и $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ для всех n и некоторой константы $c > 0$. Тогда $\{\alpha_n\}$ содержит подпоследовательность, являющуюся последовательностью Коши в $E^p(M)$.

Начиная с разд. 6.15, мы будем развивать технику, необходимую для доказательства теорем 6.5 и 6.6. Мы окончательно займемся доказательствами этих теорем в разд. 6.32 и 6.33 соответственно. А пока мы предположим, что эти две теоремы доказаны и перейдем к теореме Ходжа.

6.7. Определение. Положим

$$(1) \quad H^p = \{\omega \in E^p(M) : \Delta\omega = 0\}.$$

Элементы из H^p называются гармоническими p -формами.

6.8. Теорема Ходжа о разложении. Для любого целого p , $0 \leq p \leq n$, пространство H^p конечномерно и имеются следующие

разложения пространства $E^p(M)$ гладких p -форм на M в ортогональную прямую сумму:

$$(1) \quad E^p(M) = \Delta(E^p) \oplus H^p = \\ = d\delta(E^p) \oplus \delta d(E^p) \oplus H^p = d(E^{p-1}) \oplus \delta(E^{p+1}) \oplus H^p.$$

Следовательно, уравнение $\Delta\omega = \alpha$ имеет решение $\omega \in E^p(M)$ тогда и только тогда, когда p -форма α ортогональна пространству гармонических p -форм.

Доказательство. Если бы пространство H^p не было конечномерным, то оно содержало бы бесконечную ортонормированную последовательность. Но по теореме 6.6 эта ортонормированная последовательность содержала бы подпоследовательность Коши, что невозможно. Таким образом, H^p конечномерно.

Достаточно доказать справедливость разложения, указанного в первой строке формулы (1), так как остальные будут следовать отсюда в силу формулы 6.1 (3) и предложений 6.2 и 6.3.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_l$ — ортонормированный базис в H^p . Тогда произвольную форму $\alpha \in E^p(M)$ можно единственным способом представить в виде

$$(2) \quad \alpha = \beta + \sum_{i=1}^l \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i,$$

где β лежит в $(H^p)^\perp$, подпространстве пространства $E^p(M)$, состоящем из всех элементов, ортогональных к H^p . Тем самым мы получаем разложение в ортогональную прямую сумму

$$(3) \quad E^p(M) = (H^p)^\perp \oplus H^p.$$

Мы докажем эту теорему, показав, что $(H^p)^\perp = \Delta(E^p)$. Пусть H обозначает оператор ортогонального проектирования $E^p(M)$ на H^p , так что $H(\alpha)$ есть гармоническая часть α .

Далее, $\Delta(E^p) \subset (H^p)^\perp$, ибо для $\omega \in E^p$ и $\alpha \in H^p$

$$\langle \Delta\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \Delta\alpha \rangle = 0.$$

Обратно, мы утверждаем, что $(H^p)^\perp \subset \Delta(E^p)$. Для доказательства этого нам сначала потребуется следующее неравенство.

Утверждается, что существует константа $c > 0$, такая, что

$$(4) \quad \|\beta\| \leq c \|\Delta\beta\| \text{ для всех } \beta \in (H^p)^\perp.$$

Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{\beta_j\} \subset (H^p)^\perp$, для которой $\|\beta_j\| = 1$ и $\|\Delta\beta_j\| \rightarrow 0$. По теореме 6.6 некоторая подпоследовательность в $\{\beta_j\}$, которую для удобства мы будем считать самой последовательностью $\{\beta_j\}$, является последовательностью Коши. Тогда для любой формы $\psi \in E^p(M)$

существует $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \psi \rangle$. Определим линейный функционал l на $E^p(M)$, полагая

$$(5) \quad l(\psi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \psi \rangle \text{ для } \psi \in E^p(M).$$

Ясно, что l ограничен, и

$$(6) \quad l(\Delta\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \beta_j, \Delta\varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \Delta\beta_j, \varphi \rangle = 0,$$

поэтому l — слабое решение уравнения $\Delta\beta = 0$. По теореме 6.5 существует форма $\beta \in E^p(M)$, такая, что $l(\psi) = \langle \beta, \psi \rangle$. Следовательно, $\beta_j \rightarrow \beta$. Так как $\|\beta_j\| = 1$ и $\beta_j \in (H^p)^\perp$, то $\|\beta\| = 1$ и $\beta \in (H^p)^\perp$. По теореме 6.5 $\Delta\beta = 0$, поэтому $\beta \in H^p$, что дает противоречие. Таким образом, неравенство (4) доказано.

Используем теперь (4) для доказательства того, что $(H^p)^\perp \subset \Delta(E^p)$. Пусть $\alpha \in (H^p)^\perp$. Определим линейный функционал l на $\Delta(E^p)$, полагая

$$(7) \quad l(\Delta\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle \text{ для всех } \varphi \in E^p(\mathcal{U}).$$

Отображение l определено корректно, ибо если $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$, то $\varphi_1 - \varphi_2 \in H^p$ и $\langle \alpha, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Линейный функционал l на $\Delta(E^p)$ ограничен. Действительно, пусть $\varphi \in E^p(M)$, и пусть $\psi = \varphi - H(\varphi)$. Тогда, пользуясь (4), получаем

$$(8) \quad |l(\Delta\varphi)| = |l(\Delta\psi)| = |\langle \alpha, \psi \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\psi\| \leq \\ \leq c \|\alpha\| \cdot \|\Delta\psi\| = c \|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi\|.$$

По теореме Хана—Банаха [26, с. 228]¹⁾ l продолжается до ограниченного линейного функционала на $E^p(M)$. Таким образом, l — слабое решение уравнения $\Delta\omega = \alpha$. По теореме 6.5 существует форма $\omega \in E^p(M)$, такая, что $\Delta\omega = \alpha$. Следовательно,

$$(9) \quad (H^p)^\perp = \Delta(E^p),$$

и теорема Ходжа о разложении доказана.

6.9. Определение. Определим оператор Грина $G: E^p(M) \rightarrow (H^p)^\perp$, полагая $G(\alpha)$ равным единственному решению уравнения $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ в пространстве $(H^p)^\perp$. Оставляем читателю в качестве упражнения доказательство того, что G — ограниченный самосопряженный линейный оператор, который переводит ограниченные последовательности в последовательности, содержащие подпоследовательности Коши²⁾.

¹⁾ Теорема Хана—Банаха имеется в книге Колмогорова и Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа», гл. 3, § 2, п. 4, с. 134—137. М.: Наука, 1967). — Прим. перев.

²⁾ Такие операторы называются компактными; таким образом, G — самосопряженный компактный оператор. — Прим. перев.

6.10. Предложение. *Оператор G коммутирует с операторами d , δ и Δ . На самом деле G коммутирует с любым линейным оператором, который коммутирует с лапласианом Δ .*

Доказательство. Предположим, что $T\Delta = \Delta T$, где, например, $T: E^p(M) \rightarrow E^q(M)$. Пусть $\pi_{(H^p)^\perp}$ обозначает отображение проектирования $E^p(M)$ на $(H^p)^\perp$. По определению $G = (\Delta | (H^p)^\perp)^{-1} \circ \pi_{(H^p)^\perp}$. Далее, из того факта, что $T\Delta = \Delta T$, вытекает, что $T(H^p) \subset H^q$, а поскольку $(H^p)^\perp = \Delta(E^p)$, то также $T((H^p)^\perp) \subset (H^q)^\perp$. Отсюда следует, что

$$(1) \quad T \circ \pi_{(H^p)^\perp} = \pi_{(H^q)^\perp} \circ T,$$

и на $(H^p)^\perp$

$$(2) \quad T \circ (\Delta | (H^p)^\perp) = (\Delta | (H^q)^\perp) \circ T,$$

а следовательно, на $(H^p)^\perp$

$$(3) \quad T \circ (\Delta | (H^p)^\perp)^{-1} = (\Delta | (H^q)^\perp)^{-1} \circ T.$$

Из (1) и (3) следует, что G коммутирует с T .

6.11. Теорема. *В каждом классе когомологий де Рама на компактном ориентированном римановом многообразии M содержится единственный гармонический представитель.*

Доказательство. Пусть α — произвольная p -форма на M . Из теоремы Ходжа о разложении и из определения оператора Грина G получаем

$$(1) \quad \alpha = d\delta G\alpha + \delta dG\alpha + H\alpha.$$

Так как по предложению 6.10 G коммутирует с d , то

$$(2) \quad \alpha = d\delta G\alpha + \delta Gd\alpha + H\alpha.$$

Таким образом, если p -форма α замкнута, то

$$(3) \quad \alpha = d\delta G\alpha + H\alpha;$$

поэтому $H\alpha$ является гармонической формой, принадлежащей тому же классу когомологий де Рама, что и α . Если две гармонические формы α_1 и α_2 отличаются на точную форму $d\beta$, то

$$0 = d\beta + (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Но $d\beta$ и $\alpha_1 - \alpha_2$ ортогональны, так как

$$\langle d\beta, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle = \langle \beta, \delta\alpha_1 - \delta\alpha_2 \rangle = \langle \beta, 0 \rangle = 0.$$

Значит, $d\beta = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2$. Таким образом, в каждом классе когомологий де Рама есть единственная гармоническая форма.

Следствие. *Группы ¹⁾ когомологий де Рама для компактного ориентируемого гладкого многообразия конечномерны.*

¹⁾ Точнее, векторные пространства. — Прим. перев.

Доказательство. Любое дифференцируемое многообразие можно снабдить римановой метрикой (упр. 23 гл. 1), и наше следствие непосредственно вытекает из теоремы 6.11 и конечномерности (см. разд. 6.8) пространств H^p гармонических форм.

6.12. Пусть M — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности n . Определим билинейную функцию

$$(1) \quad H_{\text{de R}}^p(M) \times H_{\text{de R}}^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

так:

$$(2) \quad (\{\varphi\}, \{\psi\}) \mapsto \int_M \varphi \wedge \psi,$$

где φ и ψ — замкнутые формы, представляющие классы когомологий $\{\varphi\} \in H_{\text{de R}}^p(M)$ и $\{\psi\} \in H_{\text{de R}}^{n-p}(M)$. Заметим, что билинейное отображение (2) определено корректно. Например, если φ_1 — другой представитель класса де Рама $\{\varphi\}$, то $\varphi_1 = \varphi + d\xi$ для некоторой формы ξ , и по частному случаю теоремы Стокса, содержащемуся в следствии утверждения 4.9,

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_M \varphi_1 \wedge \psi &= \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M d\xi \wedge \psi = \\ &= \int_M \varphi \wedge \psi + \int_M d(\xi \wedge \psi) = \int_M \varphi \wedge \psi. \end{aligned}$$

Заметим также, что по определению билинейная функция (2) зависит от ориентации на M .

6.13. Теорема (двойственность Пуанкаре для когомологий де Рама компактного ориентированного n -мерного многообразия M). *Билинейная функция 6.12(2) является невырожденным спариванием и, следовательно, задает изоморфизм между $H_{\text{de R}}^{n-p}(M)$ и сопряженным пространством к $H_{\text{de R}}^p(M)$:*

$$(1) \quad H_{\text{de R}}^{n-p}(M) \cong (H_{\text{de R}}^p(M))^*.$$

Доказательство. Для данного ненулевого класса когомологий $\{\varphi\} \in H_{\text{de R}}^p(M)$ мы должны найти ненулевой класс когомологий $\{\psi\} \in H_{\text{de R}}^{n-p}(M)$, такой, что $(\{\varphi\}, \{\psi\}) \neq 0$. Выберем риманову структуру на M . По теореме 6.11 можно предполагать, что φ — гармонический представитель класса $\{\varphi\}$. Так как класс когомологий $\{\varphi\}$ ненулевой, форма φ не равна тождественно нулю. Так как $*\Delta = \Delta*$, отсюда следует, что форма $*\varphi$ также гармоническая, а значит, замкнутая по предложению 6.3, и поэтому $*\varphi$ представляет класс когомологий $\{*\varphi\} \in H_{\text{de R}}^{n-p}(M)$. Далее,

$$(2) \quad (\{\varphi\}, \{*\varphi\}) = \int_M \varphi \wedge *\varphi = \|\varphi\|^2 \neq 0.$$

Таким образом, спаривание 6.12(2) невырожденно, и изоморфизм (1) вытекает из определения 2.7.

Следствие. Если M — компактное связное ориентируемое дифференцируемое многообразие размерности n , то $H_{\text{де Р}}^n(M) \cong \mathbb{R}$.

6.14. Замечание. Группы непрерывных вещественных сингулярных гомологий $H_p(M; \mathbb{R})$, определяются так же, как и в 4.16, за тем исключением, что допускаются все непрерывные симплексы в M , а не только дифференцируемые. Изоморфизм 5.37(1) справедлив для непрерывного случая точно так же, как в дифференцируемой теории. Комбинируя теорему 6.13 с теоремой де Рама 5.36 и используя канонический изоморфизм 5.32(5) между дифференцируемыми и непрерывными вещественными сингулярными когомологиями для M и изоморфизм 5.37(1) для непрерывных вещественных когомологий и гомологий, получаем двойственность Пуанкаре между вещественными сингулярными когомологиями и вещественными сингулярными гомологиями M :

$$(1) \quad H_{\Delta}^p(M; \mathbb{R}) \cong H_{n-p}(M; \mathbb{R}).$$

Немного математического анализа

Теперь мы начнем развивать технику, необходимую для доказательства теорем 6.5 и 6.6.

6.15. Обозначения. Мы будем использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_i — целые числа. Пусть $|\alpha|$ обозначает обычную евклидову норму мультииндекса α , т. е.

$$(1) \quad |\alpha| = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2},$$

и если все α_i неотрицательны, полагаем

$$(2) \quad [\alpha] = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Если α и η — некоторые n -ки целых чисел, то полагаем

$$(3) \quad \eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}, \text{ где считается } 0^0 = 1.$$

Будем обозначать i -ю каноническую координатную функцию на $\mathbb{R}^n$ через x_i и положим

$$(4) \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Оператор α -й производной D^α определяется для каждой n -ки неотрицательных целых чисел α формулой

$$(5) \quad D^\alpha u = \left(\frac{1}{i} \right)^{[\alpha]} \frac{\partial^{[\alpha]} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $i = \sqrt{-1}$. (Включение множителя i будет удобно для дальнейшего.)

Пусть $\mathcal{P}$ обозначает комплексное векторное пространство, состоящее из всех гладких функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, принимающих значения в m -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$ и периодических с периодом 2π по каждому аргументу. Я бы предложил читателю при первом прочтении этого раздела считать m равным 1, так как случай $m = 1$ содержит все существенные идеи, а вычисления несколько проще. Мы выберем обозначения так, чтобы они были по сути теми же для произвольного m . Сделаем одно предостережение по поводу этих обозначений. Если $\gamma, \beta \in \mathbb{C}^m$, то $\gamma \cdot \beta$ означает эрмитово скалярное произведение $\gamma_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \gamma_m \bar{\beta}_m$. Если m оказывается равным 1, то $\gamma \cdot \beta$ означает $\gamma \bar{\beta}$. Соответствующая норма обозначается через $|\gamma|$.

Если $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$, то $\varphi \cdot \psi$ — комплекснозначная функция, которая является эрмитовым скалярным произведением φ и ψ , т. е.

$$(6) \quad \varphi \cdot \psi = \varphi_1 \bar{\psi}_1 + \dots + \varphi_m \bar{\psi}_m.$$

Мы обозначаем через $|\psi|$ вещественнозначную функцию

$$(7) \quad |\psi| = (\psi \cdot \psi)^{1/2}.$$

Если $\varphi \in \mathcal{P}$ и f — периодическая комплекснозначная гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ (все периоды всегда равны 2π), то φf будет обозначать элемент из $\mathcal{P}$, у которого i -я компонента равна $\varphi_i f$, т. е.

$$(8) \quad \varphi f = (\varphi_1 f, \dots, \varphi_m f).$$

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — открытый куб,

$$(9) \quad Q = \{p \in \mathbb{R}^n: 0 < x_i(p) < 2\pi, i = 1, \dots, n\}.$$

Мы будем вводить различные нормы на пространстве $\mathcal{P}$. Под $\|\psi\|$ будем понимать обычную норму в $L_2(Q)$:

$$(10) \quad \|\psi\| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_Q \psi \cdot \psi \right)^{1/2},$$

и $\langle \psi, \varphi \rangle$ будет обозначать скалярное произведение в L_2 :

$$(11) \quad \langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \psi \cdot \varphi.$$

Норма $\|\psi\|_\infty$ будет обозначать равномерную норму функции ψ :

$$(12) \quad \|\psi\|_\infty = \sup_Q |\psi|.$$

6.16. Некоторые факты о рядах Фурье. Если $\varphi \in \mathcal{P}$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где ξ_i — целые числа, то ξ -й коэффициент Фурье $\varphi_\xi \in \mathbb{C}^m$ определяется формулой

$$(1) \quad \varphi_\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx,$$

где $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

Сначала мы собираемся показать, что ряд Фурье $\sum_{\xi} \varphi_\xi e^{ix \cdot \xi}$ функции φ сходится равномерно к φ . Пусть задано целое число $k > 0$. Интегрируем (1) по частям много раз, дифференцируя φ , интегрируя $e^{-ix \cdot \xi}$ и замечая, что граничные члены каждый раз выпадают из-за периодичности подынтегрального выражения; в результате мы устанавливаем, что найдется константа c'_k , зависящая от функции φ и ее производных порядка не выше $2nk$, такая, что

$$(2) \quad |\varphi_\xi| \leq \frac{c'_k}{(\prod \xi_i)^{2k}} \text{ для всех } \xi \neq 0,$$

где $\prod \xi_i$ обозначает произведение всех ненулевых ξ_i . Отсюда следует, что найдется константа c_k , такая, что

$$(3) \quad |\varphi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1 + |\xi|^2)^k} \text{ для всех } \xi.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости ряда $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{-k}$.

Если положить

$$(4) \quad S_j = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| = j\},$$

то число элементов в S_j не будет превосходить $2n(2j+1)^{n-1}$, и для каждого $\xi \in S_j$ имеем $|\xi|^2 \geq j^2$; поэтому

$$(5) \quad s_j = \sum_{\xi \in S_j} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^k} \frac{2n(2j+1)^{n-1}}{(1 + j^2)^k} \leq c j^{n-1-2k}$$

для $j \geq 1$, где c — константа, зависящая только от n . Следовательно,

$$(6) \quad \sum_{\xi} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^k} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} s_j \leq 1 + c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+2k-n}},$$

и поэтому ряд $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{-k}$ сходится при $1 + 2k - n > 1$, или, иными словами, при

$$(7) \quad k \geq \left[\frac{n}{2} \right] + 1,$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$. Для читателя было бы интересным упражнением вывести это же заключение из интегрального признака сходимости.

Из оценки (3) следует, что если взять $k \geq [n/2] + 1$, то ряд Фурье

$$(8) \quad \sum_{\xi} \varphi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции Φ . Мы утверждаем, что $\Phi = \varphi$. Это, разумеется, вытекает из полноты тригонометрической системы и может быть выведено из теоремы Стоуна—Вейерштрасса [13], [26] следующим образом. Пусть $\psi = \varphi - \Phi$, и пусть $t \in \mathcal{P}$ — тригонометрический многочлен, т. е. t является конечной линейной комбинацией членов вида $a_{\xi} e^{ix \cdot \xi}$ с $a_{\xi} \in \mathbb{C}^m$. Тогда

$$(9) \quad \int_Q \psi \cdot t = 0,$$

так как φ и Φ имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon > 0$; тогда по теореме Стоуна—Вейерштрасса существует тригонометрический многочлен $t \in \mathcal{P}$, такой, что $\|\psi - t\|_{\infty} < \varepsilon$. Итак, используя (9), мы видим, что

$$(10) \quad \left| \int_Q \psi \cdot \psi \right| = \left| \int_Q \psi \cdot (\psi - t) \right| \leq \varepsilon (2\pi)^n \|\psi\|.$$

Следовательно, $\|\psi\| \leq \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ было произвольным, а ψ непрерывна, поэтому $\psi = 0$. Таким образом, ряд Фурье периодической гладкой функции φ сходится к φ равномерно,

$$(11) \quad \varphi(x) = \sum_{\xi} \varphi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}.$$

С помощью интегрирования по частям получаем, что ξ -й коэффициент Фурье функции $D^{\alpha} \varphi$ равен $\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \varphi_{\xi}$. Таким образом,

$$(12) \quad D^{\alpha} \varphi(x) = \sum_{\xi} \xi^{\alpha} \varphi_{\xi} e^{ix \cdot \xi}.$$

Из равенства (11) и ортогональности тригонометрической системы получаем тождество Парсеваля:

$$(13) \quad \int_Q |\varphi|^2 = (2\pi)^n \sum_{\xi} |\varphi_{\xi}|^2.$$

Применяя тождество (13) к $D^{\alpha} \varphi$, получаем, что

$$(14) \quad \|D^{\alpha} \varphi\|^2 = \sum_{\xi} \xi^{2\alpha} |\varphi_{\xi}|^2.$$

Из равенства (14) следует, что для любого заданного неотрицательного целого числа t существует константа $c > 0$, зависящая только от t и n , такая, что

$$(15) \quad c \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\varphi_{\xi}|^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^t \|D^{\alpha}\varphi\|^2 \leq \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |\varphi_{\xi}|^2.$$

6.17. Пространства Соболева H_s . Пусть $\mathcal{P}$ обозначает комплексное векторное пространство, состоящее из всех последовательностей комплексных векторов в $\mathbb{C}^m$, занумерованных n -ками целых чисел $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Таким образом, если $u \in \mathcal{P}$, то $u = (u_{\xi})$, где ξ пробегает все n -ки целых чисел, а $u_{\xi} \in \mathbb{C}^m$ для каждого ξ . Для любого целого s (положительного, отрицательного или нулевого) *пространство Соболева H_s* — это подпространство в $\mathcal{P}$, определяемое так:

$$(1) \quad H_s = \left\{ u \in \mathcal{P} : \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 < \infty \right\}.$$

Из неравенства Шварца следует, что

$$(2) \quad \left| \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{(s+t)/2} u_{\xi} \cdot v_{\xi} \right|^2 \leq \left(\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s |u_{\xi}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |v_{\xi}|^2 \right).$$

Если оба сомножителя в правой части формулы (2) конечны, то отсюда вытекает конечность левой части. Поэтому можно определить на H_s скалярное произведение

$$(3) \quad \langle u, v \rangle_s = \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^s u_{\xi} \cdot v_{\xi}$$

и ассоциированную с ним норму

$$(4) \quad \|u\|_s = \langle u, u \rangle_s^{1/2}.$$

Из равенства (2) также следует, что $\langle u, v \rangle_s$ существует, когда $u \in H_t$ и $v \in H_{t'}$, где $(t + t')/2 = s$.

Пространство H_s гильбертово, так как оно есть просто l_2 -пространство, где пространство с мерой — множество всех целочисленных n -ок, а точечная мера взята с весом $(1 + |\xi|^2)^s$.

Для каждого целого t определим линейное преобразование K^t пространства $\mathcal{P}$, полагая

$$(5) \quad (K^t u)_{\xi} = (1 + |\xi|^2)^t u_{\xi}.$$

Наконец, отождествим пространство $\mathcal{P}$ с подпространством в $\mathcal{P}$, сопоставляя каждому $\varphi \in \mathcal{P}$ последовательность его коэффици-

ентов Фурье $\{\varphi_\xi\}$. Используя формулу 6.16(12), можно распространить оператор производной D^α с подпространства $\mathcal{P}$ на все $\mathcal{P}$, полагая

$$(6) \quad (D^\alpha u)_\xi = \xi^\alpha u_\xi.$$

Неравенство 6.16(3) совместно с 6.16(7) показывает, что чем больше производных имеет функция, тем больше номер s пространства Соболева H_s , в которое попадают ее коэффициенты Фурье. В частности, $\mathcal{P} \subset H_s$ для всех s . К тому же $\mathcal{P}$ плотно в каждом H_s , так как любой элемент u , для которого все u_ξ , кроме конечного числа, обращаются в нуль, лежит в $\mathcal{P}$. Мы будем рассматривать элементы пространств Соболева как формальные ряды Фурье или «обобщенные функции». Основная лемма, принадлежащая Соболеву, утверждает, что при достаточно большом s для всякого $u \in H_s$ определяемый им формальный ряд Фурье в самом деле сходится к некоторой функции, обладающей определенным числом производных, зависящим от s . Эта лемма будет одним из ключевых шагов в доказательстве теоремы о регулярности, так как она позволит нам заключить, что обобщенное решение уравнения с частными производными, принадлежащее пространству Соболева с достаточно большим номером, является обычным решением.

В следующей теореме (разделенной нами на пп. (a)—(j)) собраны некоторые замечательные свойства пространств H_s .

6.18. Теорема

(a) Пусть s — целое неотрицательное число. Существуют константы c и c' , зависящие только от s и n , такие, что

$$(1) \quad c \|\varphi\|_s \leq \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha \varphi\| \leq c' \|\varphi\|_s \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{P}.$$

Более того, в случае $s = 0$ на самом деле выполняется равенство

$$(2) \quad \|\varphi\| = \|\varphi\|_0 \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{P}.$$

(b) Если $t < s$, то $\|u\|_t \leq \|u\|_s$, поэтому $H_t \supset H_s$. Таким образом, объединение пространств H_s по всем целым s является подпространством в $\mathcal{P}$, которое мы обозначим через H_∞ .

(c) $\mathcal{P}$ — плотное подпространство в H_s для всех s .

(d) Преобразование K^t является изометрией из H_s на H_{s-2t} с обратным преобразованием K^{-t} ,

$$(3) \quad \|u\|_s = \|K^t u\|_{s-2t},$$

причем K^t переводит $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Если $\varphi \in \mathcal{P}$ и $t \geq 0$, то

$$(4) \quad K^t \varphi = \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^t \varphi.$$

Кроме того, для любых s и t

$$(5) \quad \langle u, v \rangle_s = \langle u, K^t v \rangle_{s-t} = \langle K^t u, v \rangle_{s-t} \text{ для всех } u, v \in H_s.$$

(е) **Неравенство Шварца.** Если $u \in H_{s+t}$ и $v \in H_{s-t}$, то

$$|\langle u, v \rangle_s| \leq \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t}.$$

(f) Если $u \in H_{s+t}$, то

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{\substack{v \in H_{s-t} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}.$$

(g) **«Неравенство Петра и Павла».** Для данных целых $t' < \leq t < t''$ и любого $\varepsilon > 0$ существует константа $c(\varepsilon) > 0$, такая, что

$$\|u\|_t^2 \leq \varepsilon \|u\|_{t''}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{t'}^2,$$

для всех $u \in H_{t''}$. (Мы назвали это неравенство неравенством Петра и Павла, подразумевая сопоставление с п. (b), хотя мораль и вывернута наизнанку. Мы не грабим здесь Петра, чтобы заплатить Павлу, а платим Павлу ($\|u\|_{t'}$), чтобы ограбить Петра ($\|u\|_{t''}$).)

(h) D^α является ограниченным оператором из $H_{s+[\alpha]}$ в H_s для любого s ; на самом деле

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+[\alpha]} \text{ для всех } u \in H_{s+[\alpha]}.$$

(i) Пусть ω — гладкая комплекснозначная периодическая функция на $\mathbb{R}^n$. Для данного целого s существуют положительные числа c и c' , где c зависит только от s и n , а c' — от s , n и от ω с ее производными, такие, что

$$(6) \quad \|\omega \varphi\|_s \leq c \|\omega\|_\infty \|\varphi\|_s + c' \|\varphi\|_{s-1} \text{ для } \varphi \in \mathcal{P}.$$

В частности, существует константа c'' , зависящая от ω , s и n , такая, что

$$(7) \quad \|\omega \varphi\|_s \leq c'' \|\varphi\|_s.$$

Таким образом, умножение на ω продолжается по непрерывности до ограниченного оператора на H_s .

(j) Пусть ω — гладкая комплекснозначная периодическая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда для данного целого s существует положительная константа c , такая, что

$$(8) \quad |\langle \omega u, v \rangle_s - \langle u, \bar{\omega} v \rangle_s| \leq c (\|u\|_s \|v\|_{s-1} + \|u\|_{s-1} \|v\|_s)$$

для всех $u, v \in H_s$. Когда $s = 0$, имеем

$$(9) \quad \langle \omega 1, v \rangle_0 = \langle u, \bar{\omega} v \rangle_0.$$

Доказательство. Неравенство (1) следует из оценки 6.16(15) и того факта, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ выполняется неравенство

$$(10) \quad \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

Равенство (2) является просто тождеством Парсеваля 6.16(13).

Пункт (b) очевиден. Из выполнения неравенства 6.16(3) для любого целого $k > 0$ следует, что $\{\varphi_\xi\} \in H_s$, если $\varphi \in \mathcal{P}$, и, как мы уже упомянули в замечаниях, непосредственно предшествующих этой теореме, $\mathcal{P}$ плотно в H_s , так как каждый элемент $u \in H_s$, для которого все u_ξ , кроме конечного их числа, обращаются в нуль, принадлежит $\mathcal{P}$.

Тождества (3) и (5) в п. (d) очевидны; корректность определения скалярных произведений следует из замечания, непосредственно следующего за 6.17(4). Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$. По определению $K^t \varphi = ((1 + |\xi|^2)^t \varphi_\xi)$. Из 6.16(3) и (7) и из неравенства

$$(11) \quad \xi^{2\alpha} \leq (1 + |\xi|^2)^\alpha$$

следует, что ряд

$$(12) \quad \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t \varphi_\xi e^{ix \cdot \xi}$$

и все его формальные производные

$$(13) \quad \sum_{\xi} D^\alpha (1 + |\xi|^2)^t \varphi_\xi e^{ix \cdot \xi} = \sum_{\xi} \xi^\alpha (1 + |\xi|^2)^t \varphi_\xi e^{ix \cdot \xi}$$

равномерно сходятся. Таким образом, ряд (12) сходится к гладкой периодической функции и, значит, представляет собой элемент $\mathcal{P}$. Отсюда вытекает, что K^t отображает $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$. Для доказательства формулы (4) нужно просто заметить, что ξ -й коэффициент Фурье правой части равняется $(1 + |\xi|^2)^t \varphi_\xi$.

Неравенство Шварца (e) есть не что иное, как неравенство 6.17(2). Из п. (e) следует, что

$$\|u\|_{s+t} \geq \sup_{\substack{v \in H_{s-t} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle u, v \rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}.$$

Для доказательства равенства в п. (f) положим $v = K^t u$. Тогда по п. (d)

$$\|u\|_{s+t} = \frac{\langle u, u \rangle_{s+t}}{\|u\|_{s+t}} = \frac{\langle u, v \rangle_s}{\|v\|_{s-t}}.$$

Для доказательства неравенства Петра и Павла (g) заметим сначала, что для любого положительного числа y

$$(14) \quad 1 \leq y^{t''-t} + \left(\frac{1}{y} \right)^{t-t'},$$

так как или y , или $1/y$ больше или равно 1. Если в формуле (14) положить

$$y = e^{1/(t''-t)} (1 + |\xi|^2),$$

то получим

$$(1 + |\xi|^2)^t \leq e(1 + |\xi|^2)^{t''} + e^{(t'-t)/(t''-t)} (1 + |\xi|^2)^{t'},$$

откуда следует неравенство Петра и Павла с константой

$$c(\varepsilon) = e^{(t'-t)/(t''-t)}.$$

Неравенство в п. (h) вытекает из неравенства (11).

В п. (i) неравенство (7) немедленно следует из п. (b) и неравенства (6). Чтобы доказать (6), рассмотрим сначала случай $s \geq 0$. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$. Применяя (1), получаем

$$\begin{aligned} \|\omega\varphi\|_s &\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha(\omega\varphi)\| \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|\omega D^\alpha\varphi\| + \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^s \|D^\alpha(\omega\varphi) - \omega D^\alpha\varphi\| \leq \\ &\leq c\|\omega\|_\infty \|\varphi\|_s + \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^{s-1} \|D^\alpha\varphi\| \leq \\ &\leq c\|\omega\|_\infty \|\varphi\|_s + c' \|\varphi\|_{s-1}. \end{aligned}$$

При доказательстве третьего неравенства в этой цепочке мы использовали тот факт, что $D^\alpha(\omega\varphi) - \omega D^\alpha\varphi$ содержит лишь производные φ порядка не выше $[\alpha] - 1$. Для случая $s < 0$ имеем (15)

$$\begin{aligned} \|\omega\varphi\|_s^2 &= \langle \omega\varphi, \omega\varphi \rangle_s = \langle \omega K^{-s} K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_0 = \\ &= \langle K^{-s} \omega K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_0 + \langle (\omega K^{-s} - K^{-s} \omega) K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_0 \leq \\ &\leq |\langle K^{-s} \omega K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_0| + \left| \left\langle \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} a_\alpha D^\alpha K^s \varphi, K^s \omega\varphi \right\rangle_0 \right|, \end{aligned}$$

где a_α — комбинации производных ω . Теперь, пользуясь случаем $s \geq 0$ п. (i), получаем

$$\begin{aligned} (16) \quad |\langle K^{-s} \omega K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_0| &= |\langle \omega K^s \varphi, K^s \omega\varphi \rangle_{-s}| \leq \\ &\leq \|\omega K^s \varphi\|_{-s} \|K^s \omega\varphi\|_{-s} \leq \\ &\leq (c\|\omega\|_\infty \|K^s \varphi\|_{-s} + k' \|K^s \varphi\|_{-s-1}) (\|K^s \omega\varphi\|_{-s}) = \\ &= (c\|\omega\|_\infty \|\varphi\|_s + k' \|\varphi\|_{s-1}) \|\omega\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Что касается последнего члена в формуле (15), то

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \left| \left\langle \sum_{|\alpha|=0}^{-2s-1} a_\alpha D^\alpha K^s \varphi, K^s \omega \varphi \right\rangle_0 \right| &\leq \text{const} \sum_{|\alpha|=0}^{-2s-1} |\langle D^\alpha K^s \varphi, K^s \omega \varphi \rangle_0| \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{|\alpha|=0}^{-2s-1} \|D^\alpha K^s \varphi\|_s \|K^s \omega \varphi\|_{-s} \leq \\
 &\leq \text{const} \sum_{|\alpha|=0}^{-2s-1} \|K^s \varphi\|_{s+|\alpha|} \|K^s \omega \varphi\|_{-s} \leq \\
 &\leq \text{const} \|K^s \varphi\|_{s-1} \|K^s \omega \varphi\|_{-s} \leq \\
 &\leq \text{const} \|\varphi\|_{s-1} \|\omega \varphi\|_s.
 \end{aligned}$$

Итак, для случая $s < 0$ неравенство (6) следует из (15), (16) и (17).

Формулы (8) и (9) в п. (j) достаточно доказать для элементов подпространства $\mathcal{P}$, плотного в H_s . Заметим, что (9) непосредственно следует из того факта (см. (2)), что L_2 -норма совпадает на $\mathcal{P}$ с соболевской нормой $\|\cdot\|_0$. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$. Рассмотрим неравенство (8) в случае, когда s отрицательно. Используя п. (d) и равенство (9), получаем

$$\begin{aligned}
 \langle \omega \varphi, \psi \rangle_s &= \langle \omega K^{-s} K^s \varphi, K^s \psi \rangle_0 = \\
 &= \langle K^{-s} K^s \varphi, \bar{\omega} K^s \psi \rangle_0 = \langle K^s \varphi, K^{-s} \bar{\omega} K^s \psi \rangle_0 = \\
 &= \langle \varphi, \bar{\omega} \psi \rangle_s + \langle K^s \varphi, (K^{-s} \bar{\omega} - \bar{\omega} K^{-s}) K^s \psi \rangle_0.
 \end{aligned}$$

Аналогично формуле (17) отсюда можно вывести, что

$$|\langle \omega \varphi, \psi \rangle_s - \langle \varphi, \bar{\omega} \psi \rangle_s| \leq \text{const} \|\varphi\|_s \|\psi\|_{s-1}.$$

По симметрии также получаем *

$$|\langle \omega \varphi, \psi \rangle_s - \langle \varphi, \bar{\omega} \psi \rangle_s| \leq \text{const} \|\psi\|_s \|\varphi\|_{s-1}.$$

Итак, для отрицательных s неравенство (8) доказано. Для положительных s доказательство аналогично. Теорема 6.18 полностью доказана.

6.19. Разностные отношения. Если $\varphi \in \mathcal{P}$, то ξ -й коэффициент Фурье функции $\varphi(x+h)$ — сдвига φ на элемент $h \in \mathbb{R}^n$ — равен $e^{ih \cdot \xi} u_\xi$. Таким образом, если $u \in \mathcal{P}$ и $h \in \mathbb{R}^n$, мы определяем сдвиг u на h как элемент

$$(1) \quad T_h(u) = \{e^{ih \cdot \xi} u_\xi\} \in \mathcal{P}.$$

Разностное отношение для u , задаваемое ненулевым h , — это элемент

$$(2) \quad u^h = \frac{T_h(u) - u}{|h|} = \left\{ \left(\frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right) u_\xi \right\} \in \mathcal{P}.$$

Поэтому если $\varphi \in \mathcal{P}$, то $T_h(\varphi)(x) = \varphi(x+h)$ и

$$\varphi^h(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Заметим, что если $u \in H_s$, то

$$(3) \quad \|T_h(u)\|_s = \|u\|_s,$$

т. е. T_h является изометрией пространства H_s . Значит, в частности, если $u \in H_s$, то u^h также принадлежит H_s для всех h . Из соотношения

$$\begin{aligned} (4) \quad \left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 &= \left| \frac{(\cos h \cdot \xi) - 1}{|h|} \right|^2 + \left| \frac{\sin h \cdot \xi}{|h|} \right|^2 = \\ &= \frac{2(1 - \cos h \cdot \xi)}{|h|^2} = \frac{4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} h \cdot \xi \right)}{|h|^2} \leq \\ &\leq \frac{(h \cdot \xi)^2}{|h|^2} \leq 1 + |\xi|^2 \end{aligned}$$

следует, что для $u \in H_{s+1}$ все разностные отношения u^h равномерно ограничены в s -норме. В самом деле,

$$(5) \quad \|u^h\|_s \leq \|u\|_{s+1}.$$

Нам понадобится следующее обращение этого факта.

6.20. Лемма. Пусть $u \in H_s$, и предположим, что существует константа k , такая, что $\|u^h\|_s \leq k$ для всех ненулевых $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда $u \in H_{s+1}$.

Доказательство. Для каждого положительного целого N полагаем u_N равным элементу из H_s , получаемому обрезанием u на N , т. е.

$$(1) \quad (u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi, & \text{если } |\xi|^2 < N, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нужно лишь показать, что $\|u_N\|_{s+1}$ равномерно ограничены. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, и пусть $h = te_i$. Тогда

$$(2) \quad \left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 = \left| \frac{e^{it\xi_i} - 1}{t} \right|^2 \rightarrow |\xi_i|^2 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Так как индексов ξ с $|\xi| < N$ конечное число и по предположению леммы

$$\sum_{|\xi| \leq N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \left| \frac{e^{ih \cdot \xi} - 1}{|h|} \right|^2 \leq k^2,$$

из формулы (2) следует, что

$$\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 |\xi_i|^2 \leq k^2.$$

Таким образом, $\|u_N\|_{s+1} = \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{s+1} |u_\xi|^2 \leq nk^2 + \|u\|_s^2$, поэтому $\|u_N\|_{s+1}$ равномерно ограничены и, следовательно, $u \in H_{s+1}$.

6.21. Свяжем с каждым элементом $u \in H_{-\infty}$ ряд $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$. В дальнейшем будет чрезвычайно важно знать, когда этот ряд сходится и (если он сходится) какую гладкость имеет его предел. Ответ дает следующая лемма, принадлежащая Соболеву.

6.22. Лемма Соболева. Если $t \geq [n/2] + 1$ и $u \in H_t$, то ряд $\sum_{\xi} u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ равномерно сходится. Таким образом, каждый элемент $u \in H_t$ при $t \geq [n/2] + 1$ соответствует непрерывной функции.

Доказательство. Достаточно показать, что ряд сходится абсолютно, $\sum |u_\xi| < \infty$. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{|\xi| < N} |u_\xi| &= \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t/2} (1 + |\xi|^2)^{t/2} |u_\xi| \leq \\ &\leq \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^t |u_\xi|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \|u\|_t. \end{aligned}$$

Наш результат, таким образом, получается из оценки 6.16 (7).

Следствие (а). Если $u \in H_t$, где $t \geq [n/2] + 1 + m$, то для $[\alpha] \leq m$ ряд $D^\alpha u = \sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ равномерно сходится. Таким образом, каждый элемент $u \in H_t$ при t из данного диапазона соответствует функции $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ класса C^m .

Доказательство. Из утверждения 6.18 (h) вытекает, что для $u \in H_t$, $t \geq [n/2] + 1 + m$ и $[\alpha] \leq m$ производная $D^\alpha u$ лежит в $H_{t-[\alpha]}$, где $t - [\alpha] \geq [n/2] + 1$. Таким образом, из леммы Соболева следует, что $\sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ равномерно сходится. Но этот ряд является α -й «формальной» производной ряда $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$. Значит, $\sum u_\xi e^{ix \cdot \xi}$ принадлежит классу C^m .

Следствие (б). Из доказательства леммы 6.22 вытекает, что если $t \geq [n/2] + 1$, то существует константа $c > 0$, такая, что для $\varphi \in \mathcal{P}$

$$(1) \quad \|\varphi\|_\infty \leq c \|\varphi\|_t.$$

Применяя неравенство (1) к $D^\alpha \varphi$ и пользуясь 6.18 (h), получаем

$$(2) \quad \|D^\alpha \varphi\|_\infty \leq c \|\varphi\|_{t+[\alpha]}.$$

6.23. Лемма Релиха. Пусть $\{u^i\}$ — последовательность элементов из H_t с $\|u^i\|_t \leq 1$. Если $s < t$, то существует подпоследовательность последовательности $\{u^i\}$, сходящаяся в H_s .

Доказательство. По предположению

$$(1) \quad \sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^t |u_{\xi}^i|^2 \leq 1.$$

Для любого фиксированного ξ элементы последовательности $\{|(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi}^i|\}$ ограничены единицей, поэтому для любого ξ последовательность $\{(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi}^i\}$ имеет сходящуюся в $\mathbb{C}^m$ подпоследовательность. Обычным диагональным процессом можно выбрать подпоследовательность $\{u^{j_i}\}$, такую, что последовательность $\{(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi}^{j_i}\}$ сходится в $\mathbb{C}^m$ для каждого фиксированного ξ . Мы утверждаем, что если $s < t$, то $\{u^{j_i}\}$ — последовательность Коши, а значит, сходится в H_s . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Имеем

$$(2) \quad \|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 = \sum_{|\xi| < N} (1 + |\xi|^2)^{s-t} (1 + |\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2 + \\ + \sum_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^{s-t} (1 + |\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2.$$

В формуле (2) вторая сумма ограничена числом

$$N^{2(s-t)} \sum_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^t (|u_{\xi}^{j_i}|^2 + 2|u_{\xi}^{j_i}| |u_{\xi}^{j_k}| + |u_{\xi}^{j_k}|^2),$$

которое не превосходит $4N^{2(s-t)}$ ввиду неравенства (1). Так как $s - t < 0$, можно сделать $4N^{2(s-t)}$ меньше $\varepsilon/2$, выбрав достаточно большое N , скажем $N = N_0$. Тогда первая сумма в формуле (2) ограничена числом

$$(3) \quad \sum_{|\xi| < N_0} (1 + |\xi|^2)^t |u_{\xi}^{j_i} - u_{\xi}^{j_k}|^2,$$

и так как в этой сумме имеется только конечное число членов и последовательности $(1 + |\xi|^2)^{t/2} u_{\xi}^{j_i}$ сходятся для каждого фиксированного ξ , то найдется константа $J > 0$, такая, что для j_i и j_k , больших J , величина (3) меньше чем $\varepsilon/2$. Таким образом, для $j_i, j_k > J$ имеем $\|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 < \varepsilon$, и доказательство завершено.

6.24. Определение. (Линейный) дифференциальный оператор L порядка l на $\mathbb{C}^m$ -значных гладких функциях в $\mathbb{R}^n$ представляет собой матрицу (L_{ij}) размера $m \times m$, у которой

$$(1) \quad L_{ij} = \sum_{|\alpha|=0}^l a_{ij}^\alpha D^\alpha,$$

и a_{ij}^α — гладкие комплекснозначные функции на $\mathbb{R}^n$, причем по крайней мере одна функция a_{ij}^α не равна тождественно нулю при некоторых индексах i, j и мультииндексе α , таком, что $|\alpha| = l$. Дифференциальный оператор L называется *периодическим дифференциальным оператором*, или *оператором на пространстве $\mathcal{P}$* , если к тому же все функции a_{ij}^α периодические.

Пусть L — периодический дифференциальный оператор, и пусть φ с компонентами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ принадлежит $\mathcal{P}$. Тогда

$$(2) \quad L\varphi = \left(\sum_j L_{1j}\varphi_j, \dots, \sum_j L_{mj}\varphi_j \right).$$

Интегрированием по частям можно показать, что если определить оператор L^* на $\mathcal{P}$ формулой

$$(3) \quad L_{ij}^* = \sum_{|\alpha|=0}^l D^\alpha \overline{a_{ji}^\alpha},$$

так что i -я компонента функции $L^*\varphi$ равна

$$(4) \quad (L^*\varphi)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha|=0}^l D^\alpha (\overline{a_{ji}^\alpha} \varphi_j),$$

то для $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ получаем

$$(5) \quad \langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle$$

в скалярном произведении пространства L_2 . Оператор L^* называется *формально сопряженным к L* . Слово «формально» используется здесь, чтобы подчеркнуть, что здесь речь идет не о сопряженных операторах в некотором гильбертовом пространстве. Это просто сопряженный оператор относительно скалярного умножения на $\mathcal{P}$, индуцированного из L_2 .

6.25. Предложение. Пусть L — дифференциальный оператор с частными производными на $\mathcal{P}$ порядка l , и пусть s — целое число. Существуют положительные константы c, k и c' , где c зависит только от n, m, l и s, k ограничивает сверху по абсолютной величине коэффициенты при членах старшего порядка в L и c' зависит от n, m, l, s и от всех коэффициентов L и их производных до порядка l , такие, что

$$(1) \quad \|L\varphi\|_s \leq ck \|\varphi\|_{s+l} + c' \|\varphi\|_{s+l-1}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. В частности, существует константа c'' , такая, что

$$(2) \quad \|L\varphi\|_s \leq c'' \|\varphi\|_{s+l}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$; поэтому L продолжается по непрерывности до ограниченного оператора из H_{s+l} в H_s для любого s .

Доказательство. Неравенство (2) является непосредственным следствием (1) и неравенства 6.18 (b). Что касается неравенства (1), то для случая $m = 1$ (в котором элементами $\mathcal{P}$ являются C^1 -значные функции и оператор L — не матрица, а единственный дифференциальный оператор с частными производными $\sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$) оно непосредственно вытекает из 6.18 (h) и (i).

Для произвольного m неравенство (1) выводится из случая $m = 1$ и неравенства $\|L\varphi\|_s \leq \text{const} \sum_{i,j} \|L_{ij}\varphi_j\|_s$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{P}$ и константа зависит только от m .

6.26. Замечание. Если L — оператор на $\mathcal{P}$ порядка l и ω — гладкая комплекснозначная функция на $\mathbb{K}^n$, то оператор $M = \omega L - L\omega$, где $M\varphi = \omega(L\varphi) - L(\omega\varphi)$, имеет порядок не выше $l - 1$. Следовательно, для данного s существует положительная константа, такая, что

$$(1) \quad \|M\varphi\|_s \leq \text{const} \|\varphi\|_{s+l-1}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$.

6.27. Лемма. Если ω — вещественнозначная периодическая гладкая функция и L — дифференциальный оператор порядка l на $\mathcal{P}$, то существует положительная константа, такая, что

$$(1) \quad |\langle L(\omega^2 u), Lu \rangle_s - \|L(\omega u)\|_s^2| \leq \text{const} (\|u\|_{s+l} \|u\|_{s+l-1})$$

для всех $u \in H_{s+l}$.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство.} \quad & |\langle L(\omega^2 u), Lu \rangle_s - \langle L(\omega u), L(\omega u) \rangle_s| \leq \\ & \leq |\langle \omega L(\omega u), Lu \rangle_s - \langle L(\omega u), \omega Lu \rangle_s| + \\ & + |\langle L(\omega u), (\omega L - L\omega) \rangle_s| + |\langle (L\omega - \omega L)(\omega u), Lu \rangle_s|, \end{aligned}$$

и (1) получается применением к первому слагаемому неравенств 6.18 (i), 6.25 (2) и 6.18 (7), а к последним двум слагаемым неравенства Шварца и неравенств 6.26 (1), 6.25 (2) и 6.18 (7).

Эллиптические операторы

6.28. Определение. Пусть L — дифференциальный оператор с частными производными порядка l . Запишем L в виде

$$(1) \quad L = P_l(D) + \dots + P_0(D),$$

где $P_j(D)$ — матрицы размера $m \times m$, элементы которых суть однородные дифференциальные операторы $\sum_{|\alpha|=j} a_{\alpha} D^{\alpha}$ порядка j ,

а a_α — гладкие комплекснозначные функции на $\mathbb{K}^n$. Пусть $P_j(\xi)$ обозначает матрицу, полученную подстановкой ξ^α вместо D^α в $P_j(D)$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — точка $\mathbb{K}^n$. Говорят, что оператор L является *эллиптическим в точке* $x \in \mathbb{R}^n$, если матрица $P_l(\xi)$ невырождена в точке x для любого ненулевого ξ . Оператор L называется *эллиптическим*, если он эллиптический в каждой точке. Заметим, что эллиптичность является условием только на член старшего порядка в L . Заметим также, что оператор L является эллиптическим в точке x тогда и только тогда, когда

$$(2) \quad L(\varphi'u)(x) \neq 0$$

для любой гладкой $\mathbb{C}^m$ -значной функции u , такой, что $u(x) \neq 0$, и любой гладкой вещественнозначной функции φ , такой, что $\varphi(x) = 0$, но $d\varphi(x) \neq 0$, ибо

$$(3) \quad L(\varphi'u)(x) = P_l(D)(\varphi'u)(x) = P_l(d\varphi|_x)(u(x)).$$

Преимущество критерия эллиптичности (2) состоит в том, что, как мы увидим позднее, он обобщается до бескоординатного определения эллиптичности на гладких многообразиях.

Основное аналитическое свойство эллиптических операторов, которое нам понадобится, состоит в следующем.

6.29. Основное неравенство. Пусть L — эллиптический оператор на $\mathcal{P}$ порядка l , и пусть s — целое число. Существует константа $c > 0$, такая, что

$$(1) \quad \|u\|_{s+l} \leq c (\|Lu\|_s + \|u\|_s)$$

для всех $u \in H_{s+l}$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (1) для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. Доказательство состоит из нескольких частей. Сначала рассмотрим случай эллиптического оператора L_0 на $\mathcal{P}$ с постоянными коэффициентами, у которого есть только главный член $P_l(D)$. Если $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, и если $\xi \neq 0$, то $|P_l(\xi)u|^2 > 0$, так как матрица $P_l(\xi)$ невырождена. Из компактности единичной сферы в $\mathbb{K}^n$ следует, что для некоторой константы $c > 0$

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c$$

при всех u и ξ , таких, что $|u| = |\xi| = 1$. Отсюда следует, что

$$(2) \quad |P_l(\xi)u|^2 \geq c |\xi|^{2l} |u|^2$$

для любых u и ξ из $\mathbb{R}^n$. Таким образом, для $\varphi \in \mathcal{P}$ из неравенства (2) и того, что у L_0 постоянные коэффициенты, следует, что

$$(3) \quad \begin{aligned} \|L_0\varphi\|_s^2 &= \sum_{\xi} |P_l(\xi)\varphi_{\xi}|^2 (1 - |\xi|^2)^s \geq \\ &\geq \text{const} \sum_{\xi} |\xi|^{2l} |\varphi_{\xi}|^2 (1 - |\xi|^2)^s. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (\|L_0 \varphi\|_s + \|\varphi\|_s)^2 &\geq \|L_0 \varphi\|_s^2 + \|\varphi\|_s^2 \geq \\
 &\geq \sum_{\xi} |\varphi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^s (1 + \text{const } |\xi|^{2l}) \geq \\
 &\geq \text{const} \sum_{\xi} |\varphi_{\xi}|^2 (1 + |\xi|^2)^{s+l} = \text{const} \|\varphi\|_{s+l}^2.
 \end{aligned}$$

На втором шаге рассмотрим уже эллиптический оператор L на $\mathcal{P}$ порядка l общего вида, и пусть $p \in \mathbb{R}^n$. Мы докажем, что существует такая окрестность U точки p , что неравенство (1) выполняется для всех $\varphi \in \mathcal{P}$ с носителем в U . (Допуская некоторую вольность в терминологии, мы будем говорить, что носитель периодической функции φ лежит в U , если он лежит в объединении U со всеми сдвигами U на период.) Пусть L_0 обозначает однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами порядка l , который задается членом старшего порядка оператора L в точке p . Тогда из неравенства (4) следует, что для всех $\varphi \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \|\varphi\|_{s+l} &\leq \text{const} (\|L_0 \varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \leq \\
 &\leq \text{const} (\|L \varphi\|_s + \|(L_0 - L) \varphi\|_s + \|\varphi\|_s).
 \end{aligned}$$

Пусть k обозначает константу в неравенстве (5). Выберем положительное ε , меньшее чем $1/(2ck)$, где c обозначает константу c из предложения 6.25. На достаточно малой окрестности точки p коэффициенты при старших членах разности $L_0 - L$ по абсолютной величине меньше ε . Пусть $\tilde{L}$ — периодический оператор, совпадающий с $L_0 - L$ на (быть может, меньшей) окрестности U точки p , коэффициенты при старших членах которого всюду по абсолютной величине меньше ε . Тогда из неравенств (5), 6.25 (1) и выбора ε следует, что для элемента $\varphi \in \mathcal{P}$ с носителем в U

$$\begin{aligned}
 \varphi_{s+l} &\leq \text{const} (\|L \varphi\|_s + \|\tilde{L} \varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \leq \\
 &\leq \text{const} \|L \varphi\|_s + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{s+l} + \text{const} \|\varphi\|_{s+l-1} + \text{const} \|\varphi\|_s.
 \end{aligned}$$

Применяя к слагаемому $\|\varphi\|_{s+l-1}$ неравенство Петра и Павла, получаем

$$\|\varphi\|_{s+l} \leq \text{const} \|L \varphi\|_s + \frac{3}{4} \|\varphi\|_{s+l} + \text{const} \|\varphi\|_s,$$

что доказывает (1) для выбранного класса φ .

Пусть T^n — тор, полученный факторизацией $\mathbb{R}^n$ по решетке, состоящей из точек вида $2\pi\xi$, где ξ — целочисленный вектор. Проекция на T^n открытых множеств U , найденных выше для каждой точки $p \in \mathbb{R}^n$, образуют открытое покрытие тора. Пусть $U_1, \dots, U_k$ — его конечное подпокрытие, и пусть $\omega_1, \dots, \omega_k$ — подчин-

ненное этому покрытию разбиение единицы, удовлетворяющее дополнительному условию

$$(6) \quad \sum_{i=1}^k \omega_i^2 = 1.$$

Такое разбиение легко найти — см. доказательства теорем 1.11 и 1.10. Рассмотрим теперь ω_i как периодические гладкие (вещественнозначные) функции на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$. Тогда по условию (6) и неравенствам 6.18 (i), (j)

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{s+l}^2 &= \langle \varphi, \varphi \rangle_{s+l} = \left\langle \sum_i \omega_i^2 \varphi, \bar{\varphi} \right\rangle_{s+l} \leq \\ &\leq \sum_i \langle \omega_i \varphi, \omega_i \varphi \rangle_{s+l} + \text{const} \|\varphi\|_{s+l} \|\varphi\|_{s+l-1}. \end{aligned}$$

Так как теперь носитель $\omega_i \varphi$ лежит в одном из маленьких открытых множеств U , полученных нами выше, и так как функций ω_i лишь конечное число, то найдутся константы, при которых последнюю формулу можно продолжить так (здесь при переходе от первой строки ко второй используется лемма 6.27):

$$\begin{aligned} &\leq \text{const} \sum_i \|L \omega_i \varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_{s+l} \|\varphi\|_{s+l-1} \leq \\ &\leq \text{const} \sum_i \langle L(\omega_i^2 \varphi), L\varphi \rangle_s + \text{const} \|\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_{s+l} \|\varphi\|_{s+l-1} = \\ &= \text{const} \|L\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_{s+l} \|\varphi\|_{s+l-1} \leq \\ &\leq \text{const} \|L\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_s^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{s+l}^2 + \text{const} \|\varphi\|_{s+l-1}^2 \leq \\ &\leq \text{const} \|L\varphi\|_s^2 + \text{const} \|\varphi\|_s^2 + \frac{3}{4} \|\varphi\|_{s+l}^2 + \text{const} \|\varphi\|_s^2 \end{aligned}$$

(по неравенству Петра и Павла).

Отсюда вытекает, что неравенство (1) выполняется для всех $\varphi \in \mathcal{P}$ и, следовательно, для всех $u \in H_{s+l}$.

6.30. Теорема (о регулярности для периодических эллиптических операторов). Пусть L — периодический эллиптический оператор порядка l . Предположим, что $u \in H_{-\infty}$, $v \in H_l$ и

$$(1) \quad Lu = v.$$

Тогда $u \in H_{l+l}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $u \in H_s$ и $v = Lu \in H_{s-l+1}$, то $u \in H_{s+1}$. Пусть $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, и пусть L^h представляет собой оператор, полученный из L заменой каждого коэффициента α на его разностное отношение

$$\frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{|h|}.$$

Тогда для $\varphi \in \mathcal{P}$, и по непрерывности для всех $u \in H_{-\infty}$ получаем, что

$$(2) \quad L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h u) \quad (\text{ср. 6.19}).$$

Из равенства (2) и основного неравенства 6.29 (1) следует, что

$$(3) \quad \|u^h\|_s \leq \text{const} \|L(u^h)\|_{s-1} + \text{const} \|u^h\|_{s-1} \leq \\ \leq \text{const} \|(Lu)^h\|_{s-1} + \text{const} \|L^h(T_h(u))\|_{s-1} + \text{const} \|u^h\|_{s-1}.$$

Так как коэффициенты оператора L — периодические гладкие функции, то их разностные отношения равномерно ограничены, так что

$$(4) \quad \|L^h(T_h u)\|_{s-1} \leq \text{const} \|T_h(u)\|_s,$$

где константа не зависит от h . Из неравенств (3), (4), 6.19 (5) и равенства 6.19 (3) следует, что

$$\|u^h\|_s \leq \text{const} \|Lu\|_{s-1+1} + \text{const} \|u\|_s,$$

где правая часть не зависит от h . Таким образом, согласно лемме 6.20, $u \in H_{s+1}$, и теорема доказана.

Сведение к периодическому случаю

6.31. Замечание. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6.5, нам нужно выработать удобные обозначения и сделать несколько наблюдений.

Через C^∞ будем обозначать множество всех $\mathbb{C}^m$ -значных гладких функций на $\mathbb{R}^n$. Через C_0^∞ будет обозначаться подмножество тех из них, которые имеют компактный носитель, а через $C_0^\infty(V)$ — тех, компактный носитель которых лежит в V . Под L_2 -скалярным произведением на C_0^∞ будем подразумевать

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v,$$

где $u \cdot v$, как и раньше, обозначает эрмитово скалярное произведение $u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_m \bar{v}_m$.

Пусть V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, замыкание $\bar{V}$ которого содержится в некотором кубе со стороной 2π . Тогда с помощью периодического продолжения мы можем (и станем) отождествлять $C_0^\infty(V)$ с подпространством в $\mathcal{P}$. Заметим, что L_2 -скалярное произведение на $C_0^\infty(V)$ согласуется с L_2 -скалярным произведением, индуцированным из $\mathcal{P}$, которое в свою очередь согласовано с соболевским скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Предположим теперь, что L — эллиптический оператор с частными производными порядка l на C^∞ (без всяких предположений о периодичности коэффициентов). На C_0^∞ у L имеется формально сопряженный (по отношению к обычному L_2 -скалярному произве-

дению на C_0^∞) оператор L^* , получаемый интегрированием по частям. Точно так же как и в разд. 6.24, если $L = (L_{ij})$, где $L_{ij} = \sum a_{ij}^\alpha D^\alpha$, то $L^* = (L_{ij}^*)$, где $L_{ij}^* = \sum D^\alpha \overline{a_{ji}^\alpha}$. Оператор L^* также является дифференциальным оператором порядка l .

Пусть теперь $p \in \mathbb{R}^n$. Существуют достаточно малая окрестность V точки p и периодический эллиптический оператор $\tilde{L}$, такой, что $\tilde{L}$ совпадает с L на V . Действительно, пусть L_0 обозначает оператор с постоянными коэффициентами, определяемый оператором L в точке p . Тогда, раз $\tilde{L}$ эллиптический в точке p , найдется некоторое $\varepsilon > 0$, такое, что всякий оператор с коэффициентами, по абсолютной величине отличающимися от коэффициентов L_0 не более чем на ε , тоже является эллиптическим. Поэтому пусть U — окрестность точки p , достаточно малая, чтобы содержаться в некотором кубе Q с ребром 2π , на которой коэффициенты оператора L отличаются от соответствующих коэффициентов оператора L_0 не более чем на ε , и пусть $V \subset \bar{V} \subset U$. Возьмем гладкую функцию φ , $0 \leq \varphi \leq 1$, такую, что φ равна 1 на V и ее носитель лежит в U . Тогда оператор

$$\varphi \cdot L + (1 - \varphi)L_0$$

является эллиптическим на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и, очевидно, может быть периодически продолжен с куба Q до периодического эллиптического оператора $\tilde{L}$, совпадающего с L на V .

Нам понадобится слегка усилить свойство формальной сопряженности для L^* вот каким способом. Пусть $u \in H_s$, и пусть $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Тогда

$$(2) \quad \langle \tilde{L}u, \varphi \rangle_0 = \langle u, L^*\varphi \rangle_0.$$

Действительно, пусть $\psi_j \rightarrow u$ по норме $\|\cdot\|_s$, где $\psi_j \in \mathcal{P}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}\psi_j, \varphi \rangle_0 &= \langle \tilde{L}\psi_j, \varphi \rangle = \langle L\psi_j, \varphi \rangle = \\ &= \langle \psi_j, L^*\varphi \rangle = \langle \psi_j, L^*\varphi \rangle_0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{L}u, \varphi \rangle_0 - \langle u, L^*\varphi \rangle_0| &= |\langle \tilde{L}(u - \psi_j), \varphi \rangle_0 - \langle u - \psi_j, L^*\varphi \rangle_0| \leq \\ &\leq \|\tilde{L}(u - \psi_j)\|_{s-l} \|\varphi\|_{-s+l} + \|u - \psi_j\|_s \|L^*\varphi\|_{-s} \leq \\ &\leq \text{const} \|u - \psi_j\|_s \|\varphi\|_{-s+l} + \|u - \psi_j\|_s \|L^*\varphi\|_{-s}, \end{aligned}$$

что стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$.

Пусть V , как выше, — открытое множество, замыкание которого лежит в некотором кубе со стороной 2π . Пусть u и v принадлежат H_s . Тогда будем говорить, что u и v равны на V , если

$$(3) \quad \langle u - v, \varphi \rangle_0 = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Мы будем говорить, что носитель периодического оператора L лежит в V , если коэффициенты этого оператора

принадлежат $C_0^\infty(V) \subset \mathcal{P}$. Далее, если носитель L лежит в V , а элементы u и v пространства H_s равны на V , то

$$(4) \quad Lu = Lv.$$

В самом деле, согласно 6.18 (f), достаточно доказать, что

$$(5) \quad \langle L(u - v), \varphi \rangle_0 = 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. Но, применяя (2) (с $\tilde{L} = L$), получаем

$$\langle L(u - v), \varphi \rangle_0 = \langle u - v, L^*\varphi \rangle_0,$$

что равно нулю по формуле (3), так как $L^*\varphi \in C_0^\infty(V) \subset \mathcal{P}$.

6.32. Доказательство теоремы 6.5. Мы собираемся переформулировать теорему 6.5 в несколько иных обозначениях, приспособленных к локальным задачам в $\mathbb{R}^n$, к которым теорема будет немедленно сведена. Скалярное произведение 6.1 (5) на $E^p(M)$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle'$. Мы докажем такое утверждение:

(1) Для данной гладкой p -формы f на M и ограниченного линейного функционала $l': E^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, такого, что $l'(\Delta^*\varphi) = \langle f, \varphi \rangle'$ для всех $\varphi \in E^p(M)$, существует гладкая p -форма u на M , такая, что $l'(t) = \langle u, t \rangle'$ для всех $t \in E^p(M)$.

Заметим, что последнее утверждение в теореме 6.5, гласящее, что $\Delta u = f$, является непосредственным следствием (1), ибо, как уже отмечалось в 6.4 (6), $\langle \Delta u, \varphi \rangle' = \langle u, \Delta^*\varphi \rangle' = l'(\Delta^*\varphi) = \langle f, \varphi \rangle'$ для любых $\varphi \in E^p(M)$.

Сейчас мы сведем теорему 6.5 к локальной задаче. Пусть U — координатная область на M с координатным отображением γ , где $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$. В этой системе координат дифференциальные p -формы становятся векторнозначными функциями из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, где $m = \binom{n}{p}$. Примем обозначения разд. 6.31. Таким образом, в системе координат (U, γ) p -формы доставляют элементы C_0^∞ , и обратно, каждый элемент из C_0^∞ , продолженный нулем, дает комплекснозначную p -форму на всем многообразии M . Лапласиан Δ индуцирует на пространстве C^∞ дифференциальный оператор с частными производными L порядка 2. Основной факт, касающийся L , который нам будет нужен, — это эллиптичность. Мы примем этот факт на время без доказательства и обоснуем его в разд. 6.35. Пусть L^* обозначает формально сопряженный к L оператор по отношению к L_2 -скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на C_0^∞ .

Продолжим скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ на комплекснозначных p -формах очевидным образом, чтобы для вещественнозначных p -форм u_1, u_2, v_1, v_2 выполнялось соотношение

$$\langle u_1 + iu_2, v_1 + iv_2 \rangle' = \langle u_1, v_1 \rangle' + \langle u_2, v_2 \rangle' + i(\langle u_2, v_1 \rangle' - \langle u_1, v_2 \rangle').$$

Переносим все в евклидово пространство, получим тогда еще одно скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ на C_0^∞ , индуцированное скалярным произведением комплекснозначных p -форм на M . Из того замечания, что оба скалярных произведения на C_0^∞ — и $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ — задаются интегралами от поточечных скалярных произведений, следует, что найдется матрица A , составленная из гладких функций на $\mathbb{R}^n$, эрмитова и положительно определенная в каждой точке, такая, что

$$(2) \quad \langle \varphi, \psi \rangle' = \langle \varphi, A\psi \rangle$$

для всех $\varphi, \psi \in C_0^\infty$.

Сопряженный оператор к L на C_0^∞ по отношению к $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ есть просто Δ^* , ограниченный на C_0^∞ . Мы утверждаем, что для всех $\varphi \in C_0^\infty$

$$(3) \quad L^* \varphi = A \Delta^* A^{-1} \varphi.$$

В самом деле, для произвольного $\psi \in C_0^\infty$

$$\begin{aligned} \langle L^* \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, L\psi \rangle = \langle A^{-1} \varphi, L\psi \rangle' = \\ &= \langle \Delta^* A^{-1} \varphi, \psi \rangle' = \langle A \Delta^* A^{-1} \varphi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Продолжим линейный функционал $l': E^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ комплексно линейно на комплекснозначные дифференциальные формы и определим на C_0^∞ комплекснозначный линейный функционал l , полагая

$$(4) \quad l(\varphi) = l'(A^{-1} \varphi).$$

Утверждается, что l локально представляется гладкой функцией. Точнее, мы докажем

$$(5) \quad \text{Если } p \in \mathbb{R}^n, \text{ то найдутся окрестность } W_p \text{ точки } p \text{ и элемент } u_p \in \mathcal{P}, \text{ такие, что } l(t) = \langle u_p, t \rangle \text{ для всех } t \in C_0^\infty(W_p).$$

Сначала покажем, что (5) влечет за собой (1). Из утверждения (5) следует, что $u_p|_{W_p \cap W_q} = u_q|_{W_p \cap W_q}$ для любых $p, q \in \mathbb{R}^n$, так как u_p и u_q имеют одинаковые L_2 -скалярные произведения со всеми элементами из $C_0^\infty(W_p \cap W_q)$. Таким образом, все u_p склеиваются вместе и дают элемент $u \in C^\infty$, такой, что $u|_{W_p} = u_p|_{W_p}$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы в $\mathbb{R}^n$, подчиненное покрытию $\{W_p\}$. Тогда если $t \in C_0^\infty$, то $l(t) = \sum_i l(\varphi_i t) = \sum_i \langle u, \varphi_i t \rangle = \langle u, t \rangle$. Если теперь φ — гладкая p -форма на M с носителем в U , то $l'(\varphi) = l(A\varphi) = \langle u, A\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle'$. Тем же рассуждением, что и выше, различные u для разных систем координат на M склеиваются вместе в одну гладкую (обязательно вещественнозначную) p -форму u на M ,

такую, что $l'(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle'$ для всех $\varphi \in E^p(M)$. Итак, мы свели доказательство (1) к доказательству (5), которое теперь и проведем.

Пусть точка $p \in \mathbb{R}^n$ фиксирована, и пусть Q' — некоторый открытый куб, содержащий p , со стороной 2λ . Выберем открытое множество V , такое, что $p \in V \subset \bar{V} \subset Q'$, и пусть

$$(6) \quad \bar{l} = l|C_0^\infty(V).$$

Во-первых, заметим, что $\bar{l}$ — ограниченный линейный функционал на $C_0^\infty(V)$. Действительно, нормы матриц $\|A_k^{-1}\|$ имеют максимум, когда x пробегает $\bar{V}$, в силу компактности $\bar{V}$, и тем самым, пользуясь ограниченностью l' , получаем

$$\begin{aligned} |\bar{l}(\varphi)| &= |l(\varphi)| = |l'(A^{-1}\varphi)| \leq \text{const} \|A^{-1}\varphi\|' = \\ &= \text{const} (\langle A^{-1}\varphi, A^{-1}\varphi \rangle')^{1/2} = \text{const} \langle \varphi, A^{-1}\varphi \rangle^{1/2} \leq \\ &\leq \text{const} (\|\varphi\| \|A^{-1}\varphi\|)^{1/2} \leq \text{const} \|\varphi\| \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Заметим, во-вторых, что из формул (6), (4), (3), (2) и (1) следует равенство

$$(7) \quad \bar{l}(L^*\varphi) = l'(A^{-1}L^*\varphi) = l'(\Delta^*A^{-1}\varphi) = \langle f, A^{-1}\varphi \rangle' = \langle f, \varphi \rangle$$

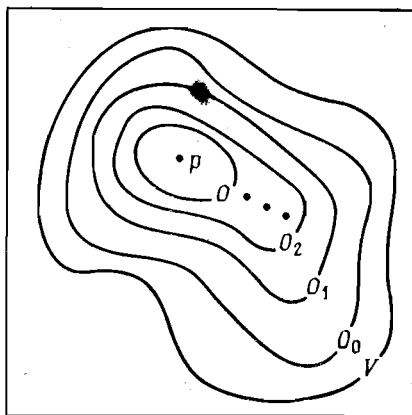
для всех $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Таким образом, $\bar{l}$ — слабое решение уравнения $Lu = f$.

Так как функционал $\bar{l}$ ограничен, он продолжается до ограниченного линейного функционала на H_0 . Следовательно, существует элемент $\tilde{u} \in H_0$, такой, что

$$(8) \quad \bar{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0 \text{ для всех } t \in H_0.$$

Наша задача — показать, что на достаточно малой окрестности точки p элемент $\tilde{u}$ совпадает с некоторым элементом из $\mathcal{P}$.

Выберем окрестность O_0 точки p , $\bar{O}_0 \subset V$, достаточно малую, чтобы существовал периодический эллиптический оператор $\tilde{L}$, совпадающий с L на O_0 (ср. разд. 6.31). Выберем окрестность O



точки p , $\bar{O} \subset O_0$, а затем целую серию окрестностей O_n точки p , таких, что $\bar{O} \subset O_n$ и $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Для каждого целого $n \geq 1$ выберем гладкую функцию ω_n , прини-

мающую значения от нуля до единицы и тождественно равную 1 на O_n , носитель которой лежит в O_{n-1} . Пусть

$$(9) \quad v_1 = \omega_1 \tilde{u} \in H_0.$$

Тогда

$$(10) \quad \tilde{L}v_1 = \tilde{L}\omega_1 \tilde{u} = \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} + M_1 \tilde{u},$$

где

$$(11) \quad M_1 = \tilde{L}\omega_1 - \omega_1 \tilde{L}.$$

Чтобы применить теорему 6.30, нужно сначала определить, в каком пространстве Соболева лежит правая часть (10).

Во-первых, мы утверждаем, что

$$(12) \quad \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} = \omega_1 f,$$

откуда следует, что $\omega_1 \tilde{L}\tilde{u}$ лежит в $C_0^\infty(O_0)$ и принадлежит, таким образом, H_s для любого s . Далее, обе части (12) лежат в одном и том же H_s , и из 6.18 (f) следует, что для доказательства равенства (12) достаточно проверить, что

$$(13) \quad \langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} - \omega_1 f, \varphi \rangle_0 = 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. Вычисляем, пользуясь (7), (8), 6.18 (9) и 6.31 (2):

$$\begin{aligned} \langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u} - \omega_1 f, \varphi \rangle_0 &= \langle \omega_1 \tilde{L}\tilde{u}, \varphi \rangle_0 - \langle \omega_1 f, \varphi \rangle_0 = \\ &= \langle \tilde{L}\tilde{u}, \omega_1 \varphi \rangle_0 - \langle f, \omega_1 \varphi \rangle_0 = \\ &= \langle \tilde{u}, L^* \omega_1 \varphi \rangle_0 - I(L^* \omega_1 \varphi) = \\ &= \tilde{I}(L^* \omega_1 \varphi) - \tilde{I}(L^* \omega_1 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (12) выполняется. Далее, раз L (и, следовательно, $\tilde{L}$) — оператор второго порядка, то M_1 — оператор первого порядка; следовательно, $M_1 \tilde{u} \in H_{-1}$. Итак, правая часть равенства (10) принадлежит H_{-1} . Из теоремы о регулярности 6.30 следует, что $v_1 \in H_1$. Положим теперь

$$(14) \quad v_2 = \omega_2 \tilde{u}.$$

Тогда

$$(15) \quad \tilde{L}v_2 = \omega_2 \tilde{L}\tilde{u} + M_2 \tilde{u} = \omega_2 \tilde{L}\tilde{u} + M_2 v_1,$$

где последнее равенство следует из 6.31 (4), так как носитель $M_2 = \tilde{L}\omega_2 - \omega_2 \tilde{L}$ лежит в O_1 , а $\tilde{u} = v_1$ на O_1 . Теперь, рассуждая как и раньше, мы видим, что правая часть (15) лежит в H_0 . Таким образом, по теореме 6.30 $v_2 \in H_2$. Продолжая в том же духе, мы получим

$$(16) \quad v_n = \omega_n \tilde{u} \in H_n.$$

Наконец, пусть W_p — открытая окрестность точки p , причем $\overline{W_p} \subset O$, и пусть функция ω тождественно равна 1 на W_p и принимает значения от 0 до 1, а ее носитель лежит в O . Тогда $\omega \tilde{u} = \omega \omega_n \tilde{u}$ для любого n , поэтому по формуле (16) $\omega \tilde{u} \in H_n$ для всех n . Согласно следствию к лемме Соболева 6.22, $\omega \tilde{u}$ представляет гладкую функцию $u \in \mathcal{P}$. Если теперь $t \in C_0^\infty(W_p)$, то

$$l(t) = \bar{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0 = \langle \tilde{u}, \omega t \rangle_0 = \langle \omega \tilde{u}, t \rangle_0 = \langle u, t \rangle,$$

и утверждение (5) доказано. С точностью до доказательства того, что оператор L эллиптический, этим завершено доказательство теоремы 6.5.

6.33. Доказательство теоремы 6.6. Достаточно доказать, что, если $m \in M$, найдется некоторая окрестность m , такая, что для любой гладкой функции φ на M с носителем в этой окрестности последовательность $\{\varphi \alpha_n\}$ имеет подпоследовательность Коши. Ибо тогда мы покроем M конечным числом таких окрестностей и возьмем разбиение единицы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, подчиненное этому покрытию. Можно выбрать подпоследовательность α_{n_k} , такую, что $\{\varphi_j \alpha_{n_k}\}$ для любого j будет последовательностью Коши. Тогда и $\{\alpha_{n_k}\}$ — последовательность Коши, так как

$$\|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}\| = \left\| \sum_{j=1}^N \varphi_j (\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}) \right\| \leq \sum_{j=1}^N \|\varphi_j \alpha_{n_k} - \varphi_j \alpha_{n_l}\|.$$

Сведем нашу задачу к задаче в евклидовом пространстве, выбрав систему координат в окрестности точки m , причем m переходит в точку $p \in \mathbb{R}^n$. Сохраним обозначения и конструкции разд. 6.31 и 6.32; в частности, норма на $E^p(M)$ и соответствующая норма, индуцированная на C_0^∞ , будут обозначаться теперь через $\|\cdot\|'$. Пусть φ — вещественнозначная гладкая функция с носителем в O_0 . Достаточно показать, что последовательность $\{\varphi \alpha_n\}$ элементов из $\mathcal{P}$ имеет подпоследовательность Коши $\{\varphi \alpha_{n_k}\}$ в соболевской 0-норме, так как на $C_0^\infty(O_0)$ 0-норма и норма L_2 совпадают, а норма L_2 и норма $\|\cdot\|'$ эквивалентны. Согласно лемме Реллиха 6.23, чтобы доказать, что $\{\varphi \alpha_n\}$ имеет подпоследовательность Коши в соболевской 0-норме, достаточно показать, что эта последовательность ограничена по норме H_1 . Из основного неравенства (6.29) вытекает, что

$$\begin{aligned} (1) \quad \|\varphi \alpha_n\|_1 &\leq \text{const} (\|\tilde{L} \varphi \alpha_n\|_{-1} + \|\varphi \alpha_n\|_{-1}) = \\ &= \text{const} (\|L \varphi \alpha_n\|_{-1} + \|\varphi \alpha_n\|_{-1}) \leq \\ &\leq \text{const} \|\varphi L \alpha_n\|_{-1} + \text{const} \|(L \varphi - \varphi L) \alpha_n\|_{-1} + \\ &\quad + \text{const} \|\varphi \alpha_n\|_{-1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$(2) \quad \|\varphi L\alpha_n\|_{-1} \leq \|\varphi L\alpha_n\|_0 = \|\varphi L\alpha_n\| \leq \\ \leq \text{const} \|\varphi L\alpha_n\|' \leq \text{const} \|L\alpha_n\|' \leq \text{const} \|\Delta\alpha_n\|'.$$

Пусть τ — гладкая функция, принимающая значения от 0 до 1, равная 1 на O_0 и носитель которой лежит в V . Тогда

$$(L\varphi - \varphi L)\alpha_n = (L\varphi - \varphi L)(\tau\alpha_n),$$

поэтому

$$(3) \quad \|(L\varphi - \varphi L)\alpha_n\|_{-1} = \|(L\varphi - \varphi L)(\tau\alpha_n)\|_{-1} \leq \\ \leq \text{const} \|\tau\alpha_n\|_0 = \text{const} \|\tau\alpha_n\| \leq \text{const} \|\tau\alpha_n\|' \leq \text{const} \|\alpha_n\|'.$$

Наконец,

$$(4) \quad \|\varphi\alpha_n\|_{-1} \leq \|\varphi\alpha_n\|_0 = \|\varphi\alpha_n\| \leq \text{const} \|\varphi\alpha_n\|' \leq \text{const} \|\alpha_n\|'.$$

Поэтому из (1)—(4) получаем

$$(5) \quad \|\varphi\alpha_n\|_1 \leq \text{const} (\|\Delta\alpha_n\|' + \|\alpha_n\|').$$

Но по предположению $\|\Delta\alpha_n\|'$ и $\|\alpha_n\|'$ были ограничены. Таким образом, последовательность $\{\varphi\alpha_n\}$ ограничена в H_1 , и доказательство теоремы 6.6 завершено (в предположении эллиптичности оператора L).

Эллиптичность оператора Лапласа—Бельтрами

6.34. Замечание. Мы воспользуемся следующим наблюдением. Пусть U , V и W — конечномерные евклидовы векторные пространства, и предположим, что последовательность

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$$

точна. Пусть $A^*: V \rightarrow U$ и $B^*: W \rightarrow V$ — сопряженные операторы к A и B соответственно. Тогда $B^*B + AA^*$ будет изоморфизмом пространства V . Действительно, пусть v — ненулевой элемент V . Нужно лишь показать, что $(B^*B + AA^*)v \neq 0$. Далее,

$$\langle (B^*B + AA^*)v, v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle + \langle A^*v, A^*v \rangle.$$

Если $Bv \neq 0$, то $(B^*B + AA^*)v \neq 0$. Если же $Bv = 0$, то v принадлежит образу A в силу точности последовательности. Но на образе A гомоморфизм A^* инъективен. Значит, $A^*v \neq 0$, откуда вытекает $(B^*B + AA^*)v \neq 0$.

Применим это к частному случаю, в котором пространства U , V и W суть $\Lambda_{p-1}(M_m^*)$, $\Lambda_p(M_m^*)$ и $\Lambda_{p+1}(M_m^*)$ соответственно со скалярным произведением

$$\langle \omega, \tau \rangle = *(\omega \wedge * \tau),$$

а гомоморфизмы A и B оба совпадают с левым внешним умножением на элемент $\xi \in M_m^*$:

$$(1) \quad \Lambda_{p-1}(M_m^*) \xrightarrow{\xi} \Lambda_p(M_m^*) \xrightarrow{\xi} \Lambda_{p+1}(M_m^*).$$

Согласно упр. 15 из гл. 2, последовательность (1) точна, а согласно упр. 14 из той же главы, сопряженным к $\xi: \Lambda_p(M_m^*) \rightarrow \Lambda_{p+1}(M_m^*)$ будет

$$(2) \quad (-1)^{np} * \xi *: \Lambda_{p+1}(M_m^*) \rightarrow \Lambda_p(M_m^*).$$

Таким образом, из сделанных выше замечаний следует, что

$$(3) \quad (-1)^{np} * \xi * \xi + (-1)^{n(p-1)} \xi * \xi *$$

есть автоморфизм пространства $\Lambda_p(M_m^*)$.

6.35. Лапласиан — эллиптический оператор. Чтобы завершить доказательства теорем 6.5 и 6.6, нам нужно показать, что оператор L из разд. 6.32, индуцированный оператором Лапласа—Бельтрами с помощью локальной системы координат, является эллиптическим. Согласно 6.28 (2), это все равно, что показать, что для любой точки $m \in M$

$$(1) \quad \Delta(\varphi^2 \alpha)(m) \neq 0$$

для любой гладкой формы α , такой, что $\alpha(m) \neq 0$, и любой гладкой функции φ на M , такой, что $\varphi(m) = 0$, но $d\varphi(m) \neq 0$. Пусть α есть p -форма, и пусть $0 \neq d\varphi = \xi \in M_m^*$. Напомним, что

$$\Delta = (-1)^{n(p+1)+1} d * d * + (-1)^{np+1} * d * d.$$

Вычислим левую часть формулы (1), на каждом шаге имея в виду, что $\varphi(m) = 0$. Итак,

$$\begin{aligned} d * d * (\varphi^2 \alpha)(m) &= (d * d(\varphi^2) * \alpha)(m) = (2d * \varphi(d\varphi) * \alpha)(m) = \\ &= (2(d\varphi) * (d\varphi) * \alpha)(m) = 2\xi * \xi * (\alpha(m)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$* d * d(\varphi^2 \alpha)(m) = 2 * \xi * \xi(\alpha(m)).$$

Таким образом,

$$\Delta(\varphi^2 \alpha)(m) = -2[(-1)^{np} * \xi * \xi + (-1)^{n(p-1)} \xi * \xi *](\alpha(m)),$$

что отлично от нуля, согласно 6.34 (3). Следовательно, оператор Δ эллиптический, и доказательство теоремы Ходжа наконец завершено.

6.36. Замечание. Мы видим, что для каждого $\xi \in M_m^*$ существует корректно определенное линейное преобразование $\sigma_\Delta(\xi)$ пространства $\Lambda_p(M_m^*)$, задаваемое формулой

$$(1) \quad \sigma_\Delta(\xi)(v) = \Delta(\varphi^2 \alpha)(m),$$

где $v \in \Lambda_p(M_m^*)$, α — произвольная p -форма, такая, что $\alpha(m) = v$, φ — произвольная гладкая функция, такая, что $\varphi(m) = 0$, а $d\varphi(m) = \xi$. Это линейное преобразование $\sigma_\Delta(\xi)$ известно как *символ оператора Δ* . Эллиптичность всех операторов L на $\mathbb{R}^n$, получаемых из Δ с помощью локальных координат, эквивалентна тому, что символ $\sigma_\Delta(\xi)$ является изоморфизмом в каждой точке m для любого ненулевого $\xi \in M_m^*$. Вычисления, проведенные нами в разд. 6.35, содержат доказательство того факта, что символ оператора ¹⁾ внешней производной d , $\sigma_d(\xi): \Lambda(M_m^*) \rightarrow \Lambda(M_m^*)$, совпадает просто с левым внешним умножением на ξ , тогда как символ сопряженного оператора δ к оператору d совпадает с сопряженным к левому внешнему умножению на ξ . В общей теории дифференциальных операторов с частными производными на векторных расслоениях над M эллиптичность определяется, как выше, через понятие символа.

Упражнения

1. Докажите, что $*\Delta = \Delta*$.
2. (а) Докажите, что оператор Грина G является ограниченным линейным оператором.
(б) Докажите, что оператор G самосопряжен на $(H^p)^\perp$.
(с) Докажите, что оператор G переводит ограниченные последовательности в последовательности, содержащие подпоследовательности Коши.
3. Пользуясь интегральным признаком, докажите, что ряд $\sum_{\xi} (1 + |\xi|^2)^{-k}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ пробегает все n -ки целых чисел, сходится при $k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. (Указание: Примените индукцию по n и вычислите соответствующие интегралы в сферических координатах.)
4. Докажите подробно неравенство 6.16 (15).
5. Обоснуйте существование матрицы A из формулы 6.32 (2) со сформулированными свойствами.
6. Выведите явные формулы для d , $*$, δ и Δ в евклидовом пространстве. В частности, покажите, что если

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

то

$$\Delta\alpha = (-1) \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_I}{\partial x_i^2} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

¹⁾ Для дифференциального оператора порядка k символ определяется формулой, аналогичной (1), в которую функция φ входит в степени k . — Прим. перев.

7. Пусть φ принадлежит пространству $\mathcal{P}$ гладких периодических функций на плоскости. Докажите, что

$$\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\| \leq \frac{1}{2} \|\Delta \varphi\|.$$

8. Лемма Реллиха 6.23 утверждает, что естественное вложение $i: H_t \rightarrow H_s$ при $s < t$ является *компактным оператором*, т. е. переводит ограниченные последовательности в последовательности, содержащие сходящиеся подпоследовательности. Вот аналогичный пример такого явления. Пусть C обозначает банахово пространство периодических непрерывных функций на вещественной прямой с периодом, скажем 2π , и равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$. Пусть C^1 — подмножество в C , состоящее из функций с непрерывной первой производной. В качестве нормы на C^1 возьмем

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \left\| \frac{df}{dx} \right\|_\infty.$$

Воспользуйтесь теоремой Арцела—Асколи [27, с. 126]¹⁾, для доказательства того, что естественное вложение $i: C^1 \rightarrow C$ является компактным оператором.

9. Рассмотрим несколько эллиптических уравнений вида $Lu = f$ на вещественной прямой. В каждом случае функция f будет гладкой и периодической с периодом 1, и нас будут интересовать решения, также являющиеся периодическими с периодом 1. Ограничение периодическими функциями по сути превращает это в задачу на *компактном* многообразии (единичной окружности). Пусть $u' = du/dx$ и т. п.

(а) $u' = f$. Это простейший пример эллиптического оператора, который демонстрирует все существенные составляющие теории. Укажите формально сопряженный оператор к этому дифференциальному оператору. Покажите, что решение u (периодическое) существует тогда и только тогда, когда f ортогональна ядру сопряженного оператора.

(б) $u' - u = f$. Каково ядро (в классе периодических функций) в этом случае? Каковы необходимые и достаточные условия на f для существования периодического решения?

(с) $u'' = f$. Покажите, что этот оператор формально самосопряжен. Покажите, что периодическое решение существует тогда и только тогда, когда f ортогональна ядру оператора; используя равенство

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt = \int_0^x f(s) \left(\int_s^x dt \right) ds,$$

¹⁾ См. по этому поводу книгу Колмогорова и Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа», гл. 2, § 7, п. 4, с. 109—111 (М.: Наука, 1967). — Прим. перев.

покажите, что единственное решение, ортогональное ядру этого оператора, будет

$$u(x) = \int_0^x t(x-1)f(t)dt + \int_x^1 x(t-1)f(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t(t-1)f(t)dt.$$

Это явно демонстрирует оператор Грина для нашего случая.

(d) $u'' + 4\pi^2 u = f$. Покажите, что этот оператор формально самосопряжен. Каково его ядро? Выведите явную формулу для решения u и покажите, что функция u будет периодической тогда и только тогда, когда f ортогональна этому ядру.

10. В теореме 6.11 мы пользовались тем, что оператор Грина перестановочен с d , доказывая, что всякая замкнутая форма на компактном ориентированном римановом многообразии отличается от некоторой гармонической на точную форму. Дайте доказательство этого результата, исходя непосредственно из теоремы Ходжа о разложении, не привлекая оператор Грина.

11. Периодическая обобщенная функция l — это линейный функционал на пространстве $\mathcal{P}$, для которого существуют некоторое целое число $k \geq 0$ и положительная константа c , такие, что

$$(1) \quad |l(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. Докажите, что для периодической обобщенной функции l найдется элемент $u \in H_{-\infty}$, такой, что

$$(2) \quad l(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle_0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$. Покажите, что, обратно, всякий элемент из $H_{-\infty}$ задает некоторую периодическую обобщенную функцию по формуле (2).

12. Пусть α и β — некоторые n -формы на компактном ориентированном многообразии M^n , такие, что $\int_M \alpha = \int_M \beta$. Докажите, что α и β отличаются на точную форму.

13. Покажите, что теорему 6.6 нельзя усилить до утверждения о существовании подпоследовательности, которая сходится в $E^p(M)$.

14. Стоит заметить, что по ходу доказательства теоремы 6.5 мы доказали следующую теорему о регулярности. Пусть L — эллиптический оператор на пространстве C^∞ ($\mathbb{C}^m$ -значных гладких функций на $\mathbb{R}^n$). Предположим, что u и существует достаточно производных, чтобы Lu имело смысл, и пусть $Lu = f$, где $f \in C^\infty$. Тогда $u \in C^\infty$.

На самом деле мы доказали даже больше — всякое слабое решение l гладко. Точнее, пусть l — линейный функционал на C_0^∞ , который ограничен на каждом пространстве $C_0^\infty(V)$, если $\bar{V}$ компактно, и удовлетворяет условию $l(L^*\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in C_0^\infty$. Тогда решение l гладко в том смысле, что найдется функция $u \in C^\infty$, которая представляет функционал l , т. е. $l(t) = \langle u, t \rangle$ для всех $t \in C_0^\infty$. Такой представитель u слабого решения l будет настоящим решением, $Lu = f$.

15. Заметьте, что оператор Коши—Римана $(\partial/\partial x) + i(\partial/\partial y)$ является эллиптическим. Из общей теории эллиптических операторов выведите, что всякая голоморфная функция принадлежит классу C^∞ . Докажите, что всякая голоморфная функция является комплекснозначной гармоничной функцией на плоскости, и используйте первое тождество Грина (упр. 5 гл. 4) для доказательства того, что голоморфная функция с компактным носителем есть тождественный нуль.

16. **Собственные значения лапласиана.** Это расширенное упражнение, в котором выводятся основные свойства собственных функций и собственных значений оператора Лапласа. Доказательства в более сложных случаях намечены, а иногда и приведены почти полностью.

Рассмотрим оператор Лапласа—Бельтрами Δ , действующий на пространстве p -форм $E^p(M)$ для некоторого фиксированного p . Вещественное число λ , для которого найдется соответствующая не равная тождественно нулю p -форма u , такая, что $\Delta u = \lambda u$, называется *собственным значением* оператора Δ . Если λ — собственное значение, то любая p -форма u , такая, что $\Delta u = \lambda u$, называется *собственной функцией*, отвечающей собственному значению λ . Собственные функции, отвечающие фиксированному λ , образуют подпространство в $E^p(M)$, называемое *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ .

(а) Докажите, что собственные значения оператора Δ неотрицательны.

(б) Докажите, что собственные подпространства оператора Δ конечномерны.

(с) Докажите, что у собственных значений нет конечной предельной точки.

(д) Докажите, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

(е) *Существование.* Чтобы предыдущие утверждения были содержательными, необходимо доказать, что у Δ существуют собственные значения. Прежде всего нуль является собственным значением тогда и только тогда, когда на M существуют ненулевые гармонические p -формы, и соответствующее собственное подпространство тогда есть в точности пространство H^p гармонических

форм. Покажем теперь, что у лапласиана Δ имеется положительное собственное значение — на самом деле целая последовательность таких значений, стремящаяся к бесконечности. Будем рассматривать ограничение оператора Δ на $(H^p)^\perp$. Тогда $\Delta: (H^p)^\perp \rightarrow (H^p)^\perp$, и у нас есть еще оператор Грина $G: (H^p)^\perp \rightarrow (H^p)^\perp$ и $\Delta G\alpha = \alpha$, $G\Delta\alpha = \alpha$ для всех $\alpha \in (H^p)^\perp$. Заметим, что собственные значения оператора $G|_{(H^p)^\perp}$ являются обратными к собственным значениям оператора $\Delta|_{(H^p)^\perp}$. Пусть

$$\eta = \sup_{\|\varphi\|=1, \varphi \in (H^p)^\perp} \|G\varphi\|.$$

Тогда $\eta > 0$ и $\|G\varphi\| \leq \eta \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in (H^p)^\perp$. Докажем, что $1/\eta$ — собственное значение лапласиана Δ . Пусть $\{\varphi_j\} \subset (H^p)^\perp$ — «максимизирующая» последовательность для η , т. е. $\|\varphi_j\| = 1$ и $\|G\varphi_j\| \rightarrow \eta$. Во-первых, мы утверждаем, что $\|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j\| \rightarrow 0$, ибо

$$\begin{aligned} \|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j\|^2 &= \|G^2\varphi_j\|^2 - 2\eta^2 \langle G^2\varphi_j, \varphi_j \rangle + \eta^4 \leq \\ &\leq \eta^2 \|G\varphi_j\|^2 - 2\eta^2 \|G\varphi_j\| + \eta^4 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Во-вторых, $\|G\varphi_j - \eta\varphi_j\| \rightarrow 0$. Действительно, если положить $\psi_j = G\varphi_j - \eta\varphi_j$, то получим

$$\begin{aligned} 0 &\leftarrow \langle \psi_j, G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j \rangle = \langle \psi_j, G\psi_j + \eta\psi_j \rangle = \\ &= \langle \psi_j, G\psi_j \rangle + \eta \|\psi_j\|^2 \geq \eta \|\psi_j\|^2, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $\langle \psi_j, G\psi_j \rangle \geq 0$. (Почему?) Теперь у $\{\varphi_j\}$ найдется подпоследовательность (которую мы обозначаем тоже через $\{\varphi_j\}$), такая, что $\{G\varphi_j\}$ — последовательность Коши. Определим линейный функционал l на $E^p(M)$ по формуле

$$l(\beta) = \lim_{j \rightarrow \infty} \eta \langle G\varphi_j, \beta \rangle \text{ для } \beta \in E^p(M).$$

Докажите, что l — ненулевое слабое решение уравнения

$$(\Delta - (1/\eta))u = 0.$$

Отсюда и из того, что оператор $\Delta - 1/\eta$ эллиптический, выведите, что $\lambda = 1/\eta$ является собственным значением Δ .

(f) *Существование других собственных значений.* Предположим, что у оператора $\Delta|_{(H^p)^\perp}$ имеются собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ и соответствующие собственные функции $u_1, \dots, u_n$ (ортонормированные). Пусть R_n — подпространство $(H^p)^\perp$, натянутое на $\{u_1, \dots, u_n\}$. Заметим, что операторы G и Δ переводят $(H^p \oplus R_n)^\perp$ в себя; определим тогда

$$\eta_{n+1} = \sup_{\|\varphi\|=1, \varphi \in (H^p \oplus R_n)^\perp} \|G\varphi\|$$

и, действуя в духе п. (е), докажем, что $\lambda_{n+1} = 1/\eta_{n+1}$ — собственное значение Δ . Очевидно, что $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$.

(г) *Полнота в L_2* . Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения Δ на пространстве $E^p(M)$, где каждое собственное значение входит столько раз, какова размерность принадлежащего ему собственного подпространства, и пусть $\{u_i\}$ — соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. Пусть $\alpha \in E^p(M)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i \right\| = 0.$$

Для доказательства положим k равным размерности пространства H^p . Тогда существует форма $\beta \in (H^p)^\perp$, такая, что $G\beta = \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, u_i \rangle u_i$. Отсюда следует, что

$$\left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i \right\| = \left\| G \left(\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i \right) \right\|$$

для $n \geq k$. Но по определению λ_{n+1}

$$\begin{aligned} \left\| G \left(\beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i \right) \right\| &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left\| \beta - \sum_{i=k+1}^n \langle \beta, u_i \rangle u_i \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\beta\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(h) *Равномерная полнота*. Равномерная норма определяется на пространстве $E^p(M)$ формулой

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{m \in M} (*(\alpha \wedge * \alpha)(m))^{1/2}.$$

Из компактности многообразия M и неравенства Соболева 6.22 (1) можно заключить, что существуют достаточно большое целое число k и константа $c > 0$, такие, что

$$\|\alpha\|_\infty \leq c \|(1 + \Delta)^k \alpha\|$$

для любой формы $\alpha \in E^p(M)$. Пусть $\alpha \in E^p(M)$, и пусть $P_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, u_i \rangle u_i$ в обозначениях п. (г). Операторы Δ и P_n коммутируют, $\Delta P_n = P_n \Delta$, поэтому

$$\begin{aligned} \|\alpha - P_n(\alpha)\|_\infty &\leq c \|(1 + \Delta)^k [\alpha - P_n(\alpha)]\| = \\ &= \|\varphi - P_n \varphi\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\varphi = (1 + \Delta)^k \alpha$.

17. Определим оператор $\Delta^2: E^p(M) \rightarrow E^p(M)$ формулой $\Delta^2(\alpha) = \Delta(\Delta\alpha)$. Обсудите разрешимость уравнения $\Delta^2\alpha = \beta$.
18. Рассмотрим оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

действующий на пространстве $C^2(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что без потери общности можно предполагать $a_{ij} = a_{ji}$, и докажите, что оператор L будет эллиптическим в точке x тогда и только тогда, когда матрица $(a_{ij}(x))$ будет (положительно либо отрицательно) определенной. В частности, покажите, что волновое уравнение

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

не является эллиптическим, и приведите пример, когда

$$\square u = f \in C^\infty,$$

но $u \notin C^\infty$.

19. Рассмотрим $\Delta: E^p(M) \rightarrow E^p(M)$. Докажите, что если λ — наименьшее собственное значение Δ и $c > -\lambda$, то уравнение $(\Delta + c)\alpha = \beta$ разрешимо для любой формы $\beta \in E^p(M)$.

20. Теорема Петера—Вейля. Кольцо представлений компактной группы Ли G — это кольцо, порожденное над $\mathbb{C}$ всеми непрерывными функциями f на G , такими, что существует непрерывный гомоморфизм $\rho: G \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$ для некоторого n и $f = \rho_{ij}$ для некоторых индексов i и j . Теорема Петера—Вейля утверждает, что кольцо представлений плотно в пространстве всех непрерывных комплекснозначных функций на G в равномерной норме. То есть, если дана комплекснозначная непрерывная функция g на группе Ли G и задано $\varepsilon > 0$, то существует функция f в кольце представлений, такая, что $|f(\sigma) - g(\sigma)| < \varepsilon$ для всех $\sigma \in G$. Наметим доказательство этой теоремы, которое базируется на равномерной полноте собственных функций лапласиана. На группе Ли G можно выбрать такую риманову структуру, что все диффеоморфизмы l_σ (левые сдвиги на σ) будут изометриями, т. е. $\langle v, w_\tau \rangle = \langle dl_\sigma v, dl_\sigma w \rangle_{\sigma\tau}$ для всех $\tau \in G$ и всех $v, w \in G_\tau$. Так как гладкие функции плотны в пространстве непрерывных функций в равномерной норме и, согласно упр. 16 (h), прямая сумма собственных подпространств лапласиана плотна в пространстве гладких функций в равномерной норме, достаточно показать, что каждая собственная функция оператора Лапласа $\Delta: C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$ принадлежит кольцу представлений.

Группа G действует на гладких функциях на G по формуле

$$\sigma(f) = f \circ l_\sigma, \quad \sigma \in G.$$

Докажите, что, так как l_σ — изометрии, это действие перестановочно с лапласианом,

$$\Delta(f \circ l_\sigma) = (\Delta f) \circ l_\sigma \quad (\sigma \in G).$$

Пусть V_λ — (конечномерное) собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ оператора $\Delta: C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$. Докажите, что действие G переводит V_λ в себя. Пусть тогда $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — базис пространства V_λ , и пусть

$$\sigma(\varphi_i) = \sum_j g_{ji}(\sigma) \varphi_j.$$

Тогда сопоставление $\sigma \mapsto \{g_{ij}(\sigma)\}$ является гомоморфизмом $G \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$. Докажите, что этот гомоморфизм непрерывен. Заметьте затем, что

$$\varphi_i(\sigma) = \varphi_i \circ l_\sigma(e) = \sum_j g_{ji}(\sigma) \varphi_j(e),$$

поэтому функция φ_i принадлежит кольцу представлений.

21. Читатель, знакомый с теорией векторных расслоений, должен заметить, что результаты, полученные в этой главе для оператора Лапласа—Бельтрами, справедливы для произвольных эллиптических операторов на векторных расслоениях. Наметим формулировку этих результатов в такой ситуации.

Пусть E и F — (вещественные или комплексные) векторные расслоения над компактным ориентируемым многообразием M . Пусть $C^\infty(E)$ и $C^\infty(F)$ обозначают векторные пространства гладких сечений E и F соответственно. (*Линейный*) дифференциальный оператор L порядка l , действующий из E в F , — это линейное отображение из $C^\infty(E)$ в $C^\infty(F)$, которое дает обычный дифференциальный оператор с частными производными порядка l , будучи выражено в терминах локальных тривиализаций расслоений E и F . Оператор L называется *эллиптическим*, если он эллиптический локально (в каждой тривиализации). Эквивалентным образом эллиптичность L может быть определена с помощью символа, как в разд. 6.36. Заметим, что для эллиптичности оператора L необходимо, чтобы размерности слоя в E и F были одинаковы. Выберем в слоях E_m и F_m скалярные произведения, гладко меняющиеся с точкой $m \in M$, и выберем на M риманову структуру и ориентацию, по отношению к которым можно будет интегрировать по M гладкие функции. Интегрируя по M послойные скалярные произведения, получим скалярные произведения в пространствах сечений $C^\infty(E)$ и $C^\infty(F)$. Пусть $L: C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ — дифференциальный оператор. Докажите, что L обладает формально сопряженным $L^*: C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(E)$. Предположим, что L — эллиптический оператор.

(а) Докажите, что пространства $\text{Ker } L$ и $\text{Ker } L^*$ конечномерны.

(b) Докажите, что пространства $C^\infty(E)$ и $C^\infty(F)$ разлагаются в следующие ортогональные прямые суммы:

$$C^\infty(F) = L(C^\infty(E)) \oplus \text{Ker } L^*,$$

$$C^\infty(E) = L^*(C^\infty(F)) \oplus \text{Ker } L.$$

22. Пусть φ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, — периодические гладкие функции на плоскости, совпадающие с $\ln \ln(1/(r + 1/k))$ при $0 \leq r \leq 1/2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Покажите, что не существует константы $c > 0$, такой, что

$$\|\varphi_k\|_\infty \leq c \|\varphi_k\|_1 \text{ для всех } k.$$

Это показывает в случае $n = 2$, что ограничение $t \geq [n/2] + 1$ в следствии (b) леммы Соболева 6.22 существенно.

23. Пусть L — (линейный) эллиптический оператор в пространстве гладких функций на компактном ориентируемом римановом многообразии M . Пусть γ — диффеоморфизм M , сохраняющий форму объема на M . Будем говорить, что гладкая функция f на M *инвариантна* относительно γ , если $f \circ \gamma = f$, и будем говорить, что оператор L *инвариантен* относительно γ , если $Lu \circ \gamma = L(u \circ \gamma)$ для всех гладких функций u на M . Предположим, что L и f инвариантны относительно диффеоморфизма γ и функция f ортогональна ядру оператора L^* . Докажите, что уравнение $Lu = f$ обладает инвариантным решением u .

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Bers L., John F., Schechter M. Partial Differential Equations. — New York: John Wiley & Sons, 1964.
- [2] Bishop R. L., Crittenden R. J. Geometry of Manifolds. — New York: Academic Press, 1964. [Имеется перевод: Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.]
- [3] Bredon G. E. Sheaf Theory. — New York: McGraw-Hill, 1967. [Готовится перевод в изд-ве «Наука».]
- [4] Cartan H. Séminaire 1950/1951. — Paris: Ecole Normale Supérieure, 1955.
- [5] Chevalley C. Theory of Lie Groups I. Princeton N. J.: Princeton University Press, 1946. [Имеется перевод: Шевалле К. Теория групп Ли, т. I. — М.: ИЛ, 1948.]
- [6] Fleming W. H. Functions of Several Variables. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965. (2nd ed. Undergraduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1977.)
- [7] Godement R. Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux. — Paris: Hermann, 1958. [Имеется перевод: Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.]
- [8] Gunning R. C. Lectures on Riemann Surfaces. — Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966.
- [9] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. — New York: Academic Press, 1978. [Имеется перевод первого издания: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.]
- [10] Hodge W. V. D. The Theory and Applications of Harmonic Integrals. 2nd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [11] Hurewicz W. Lectures on Ordinary Differential Equations. — New York and Cambridge, Mass.: John Wiley & Sons and MIT Press, 1958.
- [12] Jacobson N. Lie Algebras. — New York: John Wiley & Sons, 1962 (Reprinted by Dover, 1979). [Имеется перевод: Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.]
- [13] Kelley J. L. General Topology. — Princeton, N. J.: Van Nostrand Company, 1955. (Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, New York: Springer-Verlag, 1975.) [Имеется перевод: Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.]
- [14] Kervaire M. A. Manifold which does not admit any differential structure. — Comment. Math. Helv., v. 35, 1961, p. 1—14.
- [15] Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry, 2 vols. — New York: John Wiley & Sons, 1963 and 1969. [Имеется перевод: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. I, II. — М.: Наука, 1981.]
- [16] Kohn J. J. Introduccion a la teoria de integrales harmonicas. — Lecture notes issued by the Centro de Investigacion del IPN, Mexico, 1963.
- [17] Lang S. Introduction to Differentiable Manifolds. — New York: John Wiley & Sons, 1962. [Имеется перевод: Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.]
- [18] Loomis L. H., Sternberg S. Advanced Calculus. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.

- [19] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. — *Ann. of Math.*, v. 64, 1956, p. 399—405. [Имеется перевод: Милнор Дж. О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. — *Математика*, 1959, т. I, № 3, с. 35—42.]
- [20] Montgomery D., Zippin L. *Topological Transformation Groups*. — New York: Interscience, 1955. (Reproduction by Krieger, Melbourne, Florida, 1974.)
- [21] Newns N., Walker A. Tangent planes to a differentiable manifold. — *J. London Math. Soc.*, v. 31, 1956, p. 400—407.
- [22] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. — *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, v. 13, 1959, p. 115—162.
- [23] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
- [24] de Rham G. *Variétés Différentiables*. — Paris: Hermann, 1960 (3rd Ed., 1973). [Имеется перевод первого издания: де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.]
- [25] Samelson H. Über die Sphären die als Gruppenräume auftreten. — *Comment Math. Helv.*, v. 13, 1940, p. 144—155.
- [26] Simmons G. F. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. — New York: McGraw-Hill, 1963.
- [27] Singer I. M., Thorpe J. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. — Glenview, Ill.: Scott, Foresman and Company, 1967. (Undergraduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1976.)
- [28] Spanier E. H. *Algebraic Topology*. — New York: McGraw-Hill, 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.]
- [29] Spivak M. *Calculus on Manifolds*. — New York: W. A. Benjamin, 1965. [Имеется перевод: Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1968.]
- [30] Sternberg S. *Lectures on Differential Geometry*. — Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964. [Имеется перевод: Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.]
- [31] Woll J. W., Jr. *Functions of Several Variables*. — New York: Harcourt, Brace & World, 1966.

ПРИЛОЖЕНИЕ К БИБЛИОГРАФИИ

Ни первоначальный список литературы, ни это приложение к нему, сделанное для шпрингеровского издания, не претендуют на полноту. Я стремился лишь снабдить читателя несколькими основными ссылками и указать книги для дополнительного чтения, а также работы, содержащие иное изложение вопроса. Весьма пространная библиография по дифференцируемым многообразиям и их роли в разных аспектах современного анализа и геометрии находится в т. II упомянутого выше курса Кобаяси и Номидзу, и т. 5 книги Спивака, см. ниже.

В качестве исчерпывающего, но неторопливого и очень хорошо написанного изложения дифференциальной и римановой геометрии, я рекомендую монографию Spivak M. *Differential Geometry*, 5 vols. — Boston, Mass.: Publish or Perish, Inc., 1970—1975.

Как прекрасное введение в теорию многообразий и геометрическое изложение многих центральных тем дифференциальной топологии см. Guillemin V., Pollack A. *Differential Topology*. — Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974.

Краткое введение в теорию многообразий и великолепное изложение основ римановой геометрии дается в книге do Carmo M. *Geometria Riemanniana*. — Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

Очень свежее изложение теории гладких многообразий, снабженных метрикой произвольной сигнатуры (псевдоримановых многообразий) с применениями к теории относительности, содержится в работе O'Neill B. *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1983.

Читатель, желающий ознакомиться с теорией характеристических классов, должен обратиться к блестящему ее изложению в книге

Milnor J., Stasheff J. *Characteristic Classes*. — *Annals of Mathematics Studies*, no. 76. Princeton N. J.: Princeton University Press, 1974. [Имеется перевод: Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979.]

Следующие три работы являются дополнительными источниками более или менее замкнутого изложения основ теории эллиптических операторов. Книги Гриффитса и Харриса и Уэллса развивают теорию Ходжа для компактных комплексных многообразий. У Ленга имеется приложение по эллиптическим уравнениям с частными производными, включающие теоремы о регулярности для тора и евклидова пространства.

Griffiths P., Harris J. *Principles of Algebraic Geometry*. — New York: John Wiley & Sons, 1978. [Имеется перевод: Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.]

Lang S. $SL_2(R)$. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975. [Имеется перевод: Ленг С. $SL_2(R)$. — М.: Мир, 1977.]

Wells R. O., Jr. *Differential Geometry on Complex Manifolds*. — Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973. (*Graduate Texts in Mathematics*, vol. 65, New York: Springer-Verlag, 1979.) [Имеется перевод: Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1976.]

За приложением теории эллиптических операторов к замечательным и далеко идущим связям анализа и топологии обращайтесь к

Palais R. S. *Seminar on the Atiyah—Singer Index Theorem*. — *Annals of Mathematics Studies*, no. 57. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1965. [Имеется перевод: Пале Р. Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.]

Систематическое изложение общей теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и необходимой для этого линейной эллиптической теории можно найти в

Gilbarg D., Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. — Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

По поводу весьма недавних и поразительных приложений анализа к геометрическим проблемам см.

Aubin T. *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge — Ampère Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 252. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1982.

Yau S.-T., ed. *Seminar on Differential Geometry*. — *Annals of Mathematics Studies*, no. 102. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1982.

Группы Ли необходимы для теории расслоений и связностей. По поводу недавних весьма значительных приложений этих теорий к изучению калибровочных полей в физике стоит обратиться к следующим двум источникам:

Drechsler W., Mayer M. E., *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories*. — *Lecture Notes in Physics*, no. 67. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1977.

Bleecker D. *Gauge Theory and Variational Principles*. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\emptyset$	10	$(a(m), b(m))$	51
$\mapsto$	10	$X_t, \mathcal{D}_t$	51
$g \circ f$	10	$\mathcal{D}, X \in \mathcal{D}$	56
id	10	$\langle \cdot, \cdot \rangle_m$	68
$\mathbb{R}^d, r_i = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$	11	$V \otimes W, v \otimes w$	69
$\mathbb{C}^n$	12	$\text{Hom}(V, W)$	70
$\text{supp } \varphi$	12	$V_{r,s}, T(V)$	70
$\overline{A}$	12	$C(V), I(V), I_k(V)$	71
$[\alpha]$	12, 254	$\Lambda(V), \Lambda_k(V)$	71
$\alpha!$	12	$v \wedge w$	71
$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha}$	12	$\text{sgn } \pi$	72
C^k	12	$A_r(V)$	72
C^∞	13	$M_{r,s}(V)$	74
$(U, \varphi), (U, x_1, \dots, x_d)$	13	$e(u), i(u)$	76
$(M, \mathcal{F})$	14	$T_{r,s}(M)$	78
M^d	14	$\Lambda_k^*(M), \Lambda^*(M)$	78
S^d	15	$E_k^*(M), E^*(M)$	79
$GL(n; \mathbb{R})$	15	$\omega(X_1, \dots, X_k)$	80
$C^\infty(U), C^\infty(M, N)$	16	$\mathfrak{X}(M)$	80
$\tilde{F}_m, F_m, F_m^k$	21	$d\omega$	81
$\mathbf{f}, \mathbf{f}(m)$	21	$i(X)\omega$	84
M_m	22	$\psi^*(\omega)$	84
$\{\mathbf{f} - \mathbf{f}(m)\}$	22	$L_X Y$	86
$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big _m(f), \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big _m$	24	$L_X \omega$	86
$d\psi, d\psi_m, \psi^*$	26	$\mathcal{I}(\mathcal{D})$	90
M_m^*	26	$\langle \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p \rangle$	97
$\dot{\sigma}(t)$	28	$* : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$	97, 173, 246
$T(M), T^*(M)$	29	T^n	100
${}^k M_m$	30	g	101, 102
$d^k f, M_m^k$	31	$\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$	101
$(x - x(m))^\alpha$	31	$l_\sigma, r_\sigma V$	101
$d^k \varphi, \delta^k \varphi$	33	$V\sigma, \sigma V (\sigma \in G, V \subset G)$	101
(M, ψ)	33	G_e	102
$i: A \rightarrow M$	39	$x_{ij}(\sigma) (\sigma - \text{матрица})$	104
$O(d)$	47	$\text{End}(V), \text{Aut}(V)$	105
$X_m, X_m(f), X(f)$	48	$\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}), GL(n; \mathbb{C})$	105
$[X, Y]$	49	$E_{l \text{ inv}}^p, E_{l \text{ inv}}^*$	106
		$\pi_1(X, x_0)$	117

- $\exp x$, $\exp$ 122
 e^A 125
 A^t , $\bar{A}$, A^{-1} 128
 $U(n)$, $u(n)$ 128
 $SL(n; \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$ 128
 $O(n; \mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n; \mathbb{C})$ 128
 $SU(n)$, $\mathfrak{su}(n)$ 129
 $SL(n; \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ 129
 $O(n)$, $\mathfrak{o}(n)$, $SO(n)$ 129
 Ad 135
 ad 135
 G/H 141
 $\mathbb{R}P^n$ 149
 $\mathbb{C}P^n$ 150
 $S_p(V)$ 151
 $G_k(V)$ 152
 J_φ 163
 Δ^p 164
 k_i^p , σ^i , $\partial\sigma$ 164
 $\int_\omega$ 166
 $\int_\sigma$ 169
 $\bar{D}$
 $\text{grad } f$, $\text{div } V$ 174
 $H_{\text{deR}}^p(M)$ 177
 ${}_\infty S_p(M, \mathbb{R})$, ${}_\infty H_p(M; \mathbb{R})$ 179
 Δg 182, 246
 K , $\mathbb{Z}$ 187
 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_m$ 187
 $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}$ 187
 $\Gamma(\mathcal{P}, U)$, $\Gamma(\mathcal{P})$ 187
 $\mathcal{C}^\infty(M)$, $\mathcal{C}^p(M)$ 188
 $P = \{S_U; \rho_{UV}\}$ 190
 $\alpha(\mathcal{C})$ 190
 $\beta(P)$ 192
 $\mathcal{P} \otimes \mathcal{T}$ 194
 C^* 198
 $dq: C^q \rightarrow C^{q+1}$ 198
 $Z^q(C^*)$, $B^q(C^*)$, $H^q(C^*)$ 198
 $C^* \rightarrow D^*$ 198
 ∂ 199
 $\mathcal{H}$, $H^q(M, \mathcal{P})$ 202
 $\Gamma(\mathcal{C}^* \otimes \mathcal{P})$ 203
 $\mathcal{P}_0$ 206
 U^{p+1} , $A^p(U, K)$ 212
 $d: A^p(U, K) \rightarrow A^{p+1}(U, K)$ 212
 $A^*(U, K)$, $\mathcal{A}^p(M, K)$ 212
 $A^*(M, K)$ 212
 $A^p(U, G)$, $A_0^p(U, G)$ 213
 $H_{A-S}^q(M; G)$ 214
 $\mathcal{E}^p(M)$ 215
 $\mathcal{E}^*(M)$ 216
 $E^*(M)$ 217
 $S_p(U)$, $S^p(U, K)$, $S_\infty^p(U, K)$ 218
 $d: S^p(U, K) \rightarrow S^{p+1}(U, K)$ 219
 $S^*(U, K)$, $\mathcal{E}^p(M, K)$, $\mathcal{P}^p(M, K)$ 219
 $S^p(U, G)$ 222
 $H_\Delta^q(M; G)$, $H_{\Delta\infty}^q(M; G)$ 223
 $\text{Su}^*(M, G)$ 223
 $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ 227
 $d: C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ 227
 $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$ 228
 $\check{H}^q(M, \mathcal{C})$, $\check{H}^q(M; G)$ 229
 $C^* \otimes' C^*$ 235
 $\mathcal{P} \oplus \mathcal{T}$ 236
 $f \sim g$ 240
 H^p 249
 $(H^p)^\perp$ 250
 $H_p(M; \mathbb{R})$ 254
 $\eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}$ 254
 D^α 254
 $\mathcal{P}$ 255
 $\varphi \cdot \psi$ 255
 $|\psi|$, $\|\psi\|$ 255
 $\langle \psi, \varphi \rangle$ 255, 272
 $\|\psi\|_\infty$ 255
 φ_ξ ($\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$) 256
 H_s , $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$, $\|\cdot\|_s$ 258
 K^i 258
 $H_{-\infty}$ 259
 T_h 263
 u^h 263
 $L = \{L_{ij}\}$, L^* 267
 C^∞ , C_0^∞ 272
 $C_0^\infty(V)$ 272

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебры *Ли* 49, 101
 — — абелевы 101
 — — групп *Ли* 103
 — — матричные 101, 104—105
 Антидифференцирование 77
- База накрывающего пространства 117
 Бесследовые матрицы 128
- Векторные поля 47
 — — вдоль отображения 53
 — —, интегральные кривые 49
 — —, локальное гладкое продолжение 53—54
 — — на кривой 47
 — — полные 53
 — — ϕ -связанные 55
- Вещественная специальная линейная группа 129
 Вещественное проективное пространство 149
 — —, ориентация 182 (упр. 2)
- Вложение 33
 Внешнее произведение 71, 75—76
 Внешняя алгебра 71
 — —, двойственность 75
 — —, дифференцирование 77
 — —, скалярное произведение 97 (упр. 13)
- Внешняя производная 81
 Внутреннее умножение на векторы 76
 — — на векторные поля 84
 Волновое уравнение 287 (упр. 18)
 Вполне интегрируемое распределение 56
- Вторая аксиома счетности 14, 16
- Гармоническая форма 249
 — функция 248
 Гладкость (класс C^∞) 13
 Гомологии гладкие сингулярные с коэффициентами в $\mathbb{R}$ 179, 234
 — непрерывные сингулярные с коэффициентами в $\mathbb{R}$ 254
- Гомоморфизм алгебр *Ли* 107
 — групп *Ли* 107
 — предпучков 190
 — пучков 188
 — теорий когомологий с коэффициентами в пучке 205
- Гомотопия 181, 216, 220, 226, 230
 Градиент 174
 Граница гладкой сингулярной цепи 179
 — p -симплекса 164
 График отображения 92
 — — как интегральное многообразие 93
- Группа аффинных преобразований 100
 — изотропии 144
 Группы *Ли* абелевы 137, 157 (упр. 18)
 — —, группа автоморфизмов 157 (упр. 20)
 — —, двусторонне инвариантная метрика 183
 — —, действие на многообразиях 133—134, 144
 — —, единичный элемент 99
 — —, компонента единицы 99
 — —, накрывающие пространства 119
 — —, непрерывные гомоморфизмы 129
 — —, односвязная накрывающая 118—119
 — —, ориентация 162
 — —, присоединенное представление 135
 — —, связанные с каждой алгеброй *Ли* 121, 138
 — —, связность 152—153
 — —, связь между подгруппами и подалгебрами 111, 124
 — —, структурные константы 107
 — —, унитарные 176
 — —, фундаментальная группа 157 (упр. 12)
 — —, экспоненциальное отображение 122
- Двойственность Пуанкаре 253
 Действие группы *Ли* на многообразии

- 133, 144
 Дивергенция векторного поля 174
 Дiffeоморфизм 33
 Дифференциал высшего порядка 30—33
 — координатных функций 27
 — отображения 26
 — функции 27
 Дифференциальные формы 79
 — —, внешняя производная 81
 — —, внутреннее умножение на векторное поле 84
 — —, действие отображения 84
 — — замкнутые 177
 — —, производная Ли 86—87
 — — точные 177
 Дифференциальный идеал 91
 — — интегрального многообразия 91—92
 — оператор с периодическими коэффициентами 267
 — — — —, носитель 273
 Дифференцирование алгебры функций 21
 — градуированной алгебры 77
 Дифференцируемая структура 13
 — — класса C^k 13
 — — класса C^∞ 13
 — — класса C^0 14
 Дифференцируемое многообразие 13.
См также Многообразия
 Дифференцируемость 14
 Дифференцируемые сингулярные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ 179, 234
- Евклидово пространство 11
 — —, интегрирование 162—163
 — — как группа Ли 100
 — — как многообразие 14
 — —, когомологии де Рама 181, 183 (упр. 10)
 — —, стандартная ориентация 162
- Знак перестановки 72
- Измельчение покрытия 17
 Изоморфизм алгебр Ли 107
 — групп Ли 107
 — предпучков 190
 — пучков 188
 Инвариантные дифференциальные операторы 289 (упр. 23)
 Инволютивные распределения 56, 91
 Интегральная кривая 49
- Интегральное многообразие 56, 91
 — — максимальное 63, 91
 Интегрирование 162—164, 168—169, 172, 175
 Инъективное отображение 10
- Касательное расслоение 29—30
 — пространство 22
 Касательный вектор 21, 25—26, 28
 — — высшего порядка 30—33
 Класс C^k 13
 — C^∞ 13, 16
 Когомологии, аксиоматическая теория 202
 — Александера—Спеньера 211, 243
 — гладкие сингулярные 217, 233—234, 240—243, 254
 — де Рама 177, 181, 183 (упр. 10, 11), 184 (упр. 16, 17), 185 (упр. 18, 19) 215, 232—234, 238—243, 245 (упр. 21), 252—254
 — —, мультипликативная структура 238
 — —, носитель 243
 — — сингулярные 217, 233, 240—243, 245 (упр. 19)
 — Чеха 227, 243
 Коммутативная диаграмма 11
 Комплексная ортогональная группа 128
 Комплексная полная линейная группа 105
 — — — —, подгруппы 128—129
 — — — —, полярное разложение 159 (упр. 24)
 — — — —, связность 159 (упр. 25)
 — — — —, экспоненциальное отображение 125, 157 (упр. 14, 15), 158 (упр. 22)
 Комплексно-аналитическая структура 14
 Комплексное n -мерное пространство 12, 15
 — многообразие 14
 — проективное пространство 150
 Композиция отображений 10
 Компонента отображения 11
 Координатное отображение 13
 Координатные функции 11, 13
 Кореперное поле 173
 Кососимметричные матрицы 128—129
 Кососимметричные полилинейные отображения 71
 Косоэрмитовы матрицы 128—129
 Коценные отображения 198
 Коценные комплексы 198
 — —, когомологии 198

- —, кограницы 198
- —, кограничный оператор 198
- —, кощиклы 198
- Кривая 28
 - гладкая 47
 - интегральная 49
 - кусочно-гладкая 47
- Куб в евклидовом пространстве 12
- Кубическая система координат 13

- Лапласиан 182 (упр. 5), 246, 281
 - (упр. 6). См. также оператор *Лапласа—Бельтрами*
- Левое умножение 76
- Левинвариантные векторные поля 101
 - — —, полнота 123
 - формы 106—107, 108—109
- Левый сдвиг 101
- Лемма *Картана* 98 (упр. 16)
 - *Пуанкаре* 180
 - *Реллиха* 266
 - *Соболева* 265, 289 (упр. 22)
- Линейная группа изотропии 145
- Линейный дифференциальный оператор 267
- Локальная однопараметрическая группа, порожденная векторным полем 53
- Локально евклидово пространство 13
 - конечное покрытие 17

- Максимальное интегральное многообразие 63, 91
- Матрица *Якоби* 27
- Матрицы 15, 100, 101, 104—105, 127—129, 146—154, 159 (упр. 25)
 - , положительно-определенные 153
 - , полярное разложение 153, 159 (упр. 23, 24)
 - , экспоненциальное отображение 125, 156 (упр. 10), 157 (упр. 14, 15), 158 (упр. 22)
- Многообразие *Грассмана* 152
 - *Штифеля* 151
- Многообразия 214
 - , метризуемость 16
 - , нормальность 16
 - однородные 144
 - , ориентируемость 161
 - , паракомпактность 17
 - римановы 68 (упр. 23), 172—175
- K*-модули 187
 - без кручения 197, 235
- Модулярная функция 176
- Морфизм пучков 188
- Мультииндексные обозначения 12, 254

- Накрывающие пространства 117, 119, 155 (упр. 7)
 - —, база 117
- Начало координат 13
- Невырожденное отображение 23
 - спаривание 73
- Независимое множество функций 35
- Непрерывные сингулярные гомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ 254
- Неравенство *Петра* и *Павла* 260
 - *Шварца* 260
- Норма L_2 255, 272
 - *Соболева* 258
- Носитель гомоморфизма пучков 195
 - функции 12

- Обмотка тора 68 (упр. 21)
- Объем 173
- Однопараметрическая группа, порожденная векторным полем 53
 - подгруппа 121
- Однородные многообразия 144, 146
- Односвязная группа *Ли* 118, 119
- Односвязное пространство 118
- Окрестность 12
- Оператор *Грина* 251
 - *Коши—Римана* 284 (упр. 15)
 - *Лапласа—Бельтрами* 182 (упр. 5), 246, 281 (упр. 6)
 - — —, символ 281
 - — —, собственные значения 284 (упр. 16)
 - — —, эллиптичность 280
- *Ходжа* («звездочка») 97 (упр. 13), 246
- Определитель 96 (упр. 12)
- Ориентация 160
- Ортогональная группа 47, 129, 140, 146—153
- Основная теорема анализа 166
- Основное неравенство 269
- Открытое покрытие 17
- Отображения, пропускающие через подмногообразие 37—38, 62

- Паракомпактность 17
- p , q -перетасовка 76
- Периодические функции 255
 - , нормы 255
 - обобщенные 283 (упр. 11)
- Периоды формы 179, 245 (упр. 21)
- Погружение 33
- Подгруппа *Ли* 110
 - — замкнутая 110, 131, 157 (упр. 17)
 - — нормальная 136
 - — однопараметрическая 121
- Подмногообразие 33

—, гладкие функции 42
 —, единственность 39
 — как срез 40—41
 — как подмножество 39
 Подпокрытие 17
 Подпучок 188
 Покрытие 17
 — локально конечное 17
 — открытое 17
 Поле комплексных чисел 12
 Полная линейная группа 15, 100, 104—105
 — —, компоненты 153
 — —, подгруппы 127—129
 — —, полярное разложение 153, 159 (упр. 24)
 — —, экспоненциальное отображение 125, 156 (упр. 10)
 Полный предпучок 193
 Полулокально односвязное пространство 117
 Полярное разложение 153, 159 (упр. 23, 24)
 Постоянный пучок 188
 Правинвариантные векторные поля 157 (упр. 16)
 Правый сдвиг 101
 Предпучок 189
 —, ассоциированный пучок 190, 192
 — полный 193
 Представления групп Li 107
 — ортогональные и унитарные 176—177
 Присоединенное представление 133
 Продолжение векторных полей 53—54
 Производная 11
 — внешняя 81
 — Li дифференциальных форм 86
 — векторных полей 85
 — частная 12
 Пространства *Соболева* 258
 Прямая сумма пучков K -модулей 236
 Прямое произведение групп Li 100
 — многообразий 16, 68 (упр. 24)
 — множеств 10
 — отображений 10
 Прямой предел K -модулей 191
 Пучок 187
 —, ассоциированный предпучок 190, 192
 — без кручения 172, 198
 — K -модулей 187
 — постоянный 188
 — ростков гладких функций 188
 — разрывных функций 206
 — тонкий 195
 Пучок-небоскреж 196
 Пятая проблема *Гильберта* 131

Разбиение единицы для пучков 195
 — на многообразиях 17
 —, подчиненное покрытию 17
 —, существование 19
 Разностные отношения 263
 Распределение 56
 —, аннулирующие формы 90
 —, аннулирующий идеал 90
 — инволютивное (вполне интегрируемое) 56, 91
 —, интегральное многообразие 56, 63, 92
 Расслоение внешних алгебр 78
 — k -х внешних степеней 78
 Регулярная область 169
 Резольвента 203
 — без кручения 203
 Реперное поле 172
 Риманова структура 68 (упр. 23)
 Римановы многообразия 68 (упр. 23) 246
 —, интегрирование 173
 —, объем 173
 —, форма объема 173, 183 (упр. 6), 185 (упр. 20)
 Росток функции 21
 Ряд *Фурье* 256

Свойство универсальности внешней алгебры 72—73
 — тензорного произведения 70
 Семейство носителей 242
 Сечение пучка 187
 Символ дифференциального оператора 281
 — *Кронекера* 12
 Симплекс 164, 217
 — гладкий сингулярный 164
 —, граница 164
 —, грань 164
 — непрерывный сингулярный 217
 — ориентируемый 169
 — регулярный 169
 — стандартный 164
 Сингулярные когомологии 217, 233, 245 (упр. 19)
 —, мультипликативная структура 238
 —, носители 243
 Система координат 13
 — кубическая 13
 Скобки Li 49, 95 (упр. 6), 101
 — как производная Li 87
 Слабое решение 248
 Спаривание 73
 Специальная линейная группа 128—129
 — ортогональная группа 129, 152

- унитарная группа 129, 152
- Срез 40
- Структура многообразия 6
- Сфера 7, 33
- как однородное многообразие 148—149
- , когомологии *де Рама* 178, 184 (упр. 16, 17)
- , ориентация 162
- Сюръективное отображение 10

- Тензорная алгебра** 70
- Тензорное произведение**
 - векторных пространств 69
 - коцепных комплексов 235
 - K -модулей 193
 - предпучков 193
 - пучков 193
 - резольвент 236
- Тензорное расслоение типа r, s** 78
- Тензорные поля** 79
- Тензоры** 70
 - однородные 71
 - разложимые 71
 - типа r, s 70
- Теорема Адо** 121
 - об обратной функции 35
 - о дивергенции 175, 182 (упр. 4)
 - о неявной функции 43
 - — — классическая 43
 - о регулярности 249, 271, 274, 283 (упр. 14)
 - *де Рама* 179, 232, 242, 243
 - *Стокса* 166, 171, 175
 - *Фробениуса* 57, 63, 92
 - классическая 60—61
 - *Ходжа* 249
- Теоретико-множественные обозначения** 9—10
- Теория когомологий с коэффициентами в пучке** 202
- , аксиомы 202—203
- , единственность 207
- , мультипликативная структура 236
- , носители 242
- , существование 203—204
- Тождественное отображение** 10
- Тождество Якоби** 49, 101
- Тонкая резольвента** 203
- Топологическая группа** 130
- Тор** 67 (упр. 21), 100, 157 (упр. 18)
- Точная последовательность** 189

- Транзитивное действие** 144

- Унитарная группа** 128—129, 152, 158 (упр. 21)

- Факторпучок** 189
- Форма объема** 173, 183 (упр. 6), 185 (упр. 20)
- Формально сопряженный оператор** 267
- Формулы Грина** 182 (упр. 5)
- Формы Маурера—Картана** 106
- Фундаментальная группа** 117
- Функции** 11
- , независимость 35

- Хорошо накрытое множество** 17

- Центр алгебры Ли** 137
- группы Ли 137
- Цепное правило** 225
- Цепной комплекс** 275
- Цепь** 164

- Частные производные** 12

- Шар в евклидовом пространстве** 12

- Эквивалентность подгрупп** 110, 113—115
- подмногообразий 38
- Экспоненциальное отображение** 122, 138
- для полной линейной группы 135 (упр. 22), 125, 156 (упр. 10), 157 (упр. 14, 15), 158 (упр. 22)
- , связь между подгруппами и подалгебрами 124
- Эллиптические операторы** 268
- на векторных расслоениях 288 (упр. 21)
- Эллиптические уравнения** 282 (упр. 9)
- Эффективное действие группы Ли** 144

- Якобиан** 27

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Предисловие к изданию Springer-Verlag	7
Глава 1. Многообразия	8
Предварительные замечания	8
Дифференцируемые многообразия	12
Вторая аксиома счетности	16
Касательные векторы и дифференциалы	20
Подмногообразия, диффеоморфизмы и теорема об обратной функции	33
Теорема о неявной функции	42
Векторные поля	47
Распределения и теорема Фробениуса	56
Упражнения	66
Глава 2. Тензоры и дифференциальные формы	69
Тензорные и внешние алгебры	69
Тензорные поля и дифференциальные формы	78
Производная Ли	85
Дифференциальные идеалы	90
Упражнения	95
Глава 3. Группы Ли	99
Группы Ли и их алгебры Ли	99
Гомоморфизмы	107
Подгруппы Ли	110
Накрытия	117
Односвязные группы Ли	120
Экспоненциальное отображение	121
Непрерывные гомоморфизмы	129
Замкнутые подгруппы	131
Присоединенное представление	133
Автоморфизмы и дифференцирования билинейных операций и форм	138
Однородные многообразия	141
Упражнения	154
Глава 4. Интегрирование на многообразиях	160
Ориентация	160
Интегрирование на многообразиях	163
Когомологии де Рама	177
Упражнения	182

Глава 5. Пучки, когомологии и теорема де Рама	186
Пучки и предпучки	187
Коцепные комплексы	198
Аксиоматическая теория пучков	202
Классические теории когомологий	211
Когомологии Александра—Спеньера	211
Когомологии де Рама	215
Сингулярные когомологии	217
Когомологии Чеха	227
Теорема де Рама	232
Мультипликативная структура	234
Носители	242
Упражнения	243
Глава 6. Теорема Ходжа	246
Оператор Лапласа—Бельтрами	246
Теорема Ходжа	248
Немного математического анализа	254
Эллиптические операторы	268
Сведение к периодическому случаю	272
Эллиптичность оператора Лапласа—Бельтрами	279
Упражнения	281
Библиография	290
Приложение к библиографии	292
Указатель обозначений	294
Предметный указатель	296

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И—110, ГСП, 1—й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Учебное издание

Фрэнк Уорнер

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ И ГРУПП ЛИ

Научный редактор Г. М. Цукерман
Мл. научн. редактор И. В. Герасимова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Художник А. В. Шипов
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 5995

Сдано в набор 29.04.86. Подписано к печати 27.11.86.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага кн.-журн. Печать
высокая. Гарнитура литературная.
Объем 9,50 бум. л. Усл. печ. л. 19. Усл. кр.-отт. 19.
Уч. изд. л. 17,08.
Изд. № 1/4794. Тираж 5700 экз. Зак. 123. Цена 2 р. 30 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» 129820, ГСП, Москва,
11-110, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано с набора Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10, в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126. Ленинград, Социалистическая ул., 14.