В. А. ДОБРОВОЛЬСКИЙ

ОЧЕРКИ РАЗВИТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
КИЕВ — 1974

УДК 517.9(09)

Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Добровольский В. А. Издательское объединение «Вища школа», 1974, стр. 456.

Книга посвящена изучению интересного и сложного пути развития одной из важнейших отраслей математического анализа прошлого и начала настоящего века — аналитической теории дифференциальных уравнений.

Она состоит из двух основных частей, рассматривающих теорию нелинейных и линейных уравнений. Особое внимание в первой части уделено методу мажорантных функций доказательства теоремы существования решений дифференциальных уравнений, классификации особых точек и исследованию уравнений с неподвижными и подвижными особыми точками; во второй — аналитическому выражению интегралов уравнений, их асимптотическому представлению, проблеме обращения решений дифференциальных уравнений, определению дифференциального уравнения по заданным свойствам (проблема Римана), алгорифмическому методу решения основных проблем аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

Рассчитана на широкий круг математиков, преподавателей высшей и средней школы, аспирантов и студентов старших курсов высшей школы по математическим специальностям и всех любителей истории математики.

Ил. 75. Библиогр. 674.

Редакция естественной литературы.
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников.

Д $\frac{20201-072}{M224(04)-74}$ 4—74

© Издательское объединение «Вища школа», 1974

ПРЕДИСЛОВИЕ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений — одна из важнейших отраслей математического анализа прошлого и начала нашего столетия — привлекала внимание многих математиков разных стран и прошла интересный и сложный путь развития. Вскоре после создания ее основ, т. е. более ста лет тому назад, наметились две основные ветви этой теории, связанные с изучением нелинейных и специально линейных уравнений. В соответствии с этим данная работа состоит из двух основных частей, каждая из которых посвящена преимущественно рассмотрению истории одного из указанных направлений.

Автор стремился к возможно более всестороннему и широкому освещению вопроса в рамках данного объема. В книге рассмотрен период от начала XIX века, когда появились отдельные первые зерна рассматриваемой теории, до двадцатых годов нашего века, когда было завершено в основном формирование классической теории и намечались новые аспекты ее развития.

В соответствии со структурой предмета и особенностями его формирования изложение материала в целом следует здесь логически-историческому принципу в отличие от хронологического, который выдержан в пределах отдельных глав или параграфов.

Во введении рассматриваются истоки данной теории и ее зарождение, дается анализ источников, а также приводится краткая характеристика предшествующего периода развития теории дифференциальных уравнений и теории аналитических функций. Книга состоит из шестнадцати глав, каждая из которых подразделена на параграфы в соответствии с изучением того или иного более узкого вопроса.

В заключении рассмотрена связь аналитической теории дифференциальных уравнений с другими науками, дана схема ее общего развития, подведены некоторые его итоги и отмечен ряд важных результатов, полученных в последнее время.

Одна из задач состояла не только в изложении развития данной теории во взаимосвязи ее с другими отраслями науки,

но и в раскрытии на конкретном материале ее роли и значения в общем мощном потоке математических исследований, который мы наблюдаем в последние два столетия, ее идейного влияния на развитие математической науки в целом, ее роли в формировании новых взглядов, новых подходов при изучении предмета.

В библиографии приведена примерно одна треть источников, которыми располагал автор. Подробность рассмотрения той или иной работы обусловливалась не ее объемом, а значением для данной теории или для конкретного рассматриваемого вопроса.

Названия периодических и повторяющихся изданий в списке литературы приведены в сокращенном виде. После указания автора и полного названия статьи дается сокращенное или условное название журнала, город и год его издания, серия (в скобках), том, страницы; для широко известных и часто повторяющихся журналов город издания, как правило, опущен. Полные названия этих журналов и сборников, как и городов изданий, приведены в сцециальном указателе сокращенных названий журналов, периодических и повторяющихся изданий. Ссылки в тексте на источники из списка литературы обозначены в прямых скобках двумя числами (разделенными точкой), из которых первое обозначает номер автора, второе — порядковый номер его работы из данного списка. После этого (в случае конкретных ссылок или приведения цитат) на третьем месте (после запятой) стоят цифры, обозначающие страницы [1].

Примечания к отдельным местам текста указаны порядковыми числами в круглых скобках и помещены в конце книги. Здесь имеются уточнения, разъяснения, дополнения к отдельным местам основного текста, биографические справки об отдельных ученых, хотя в большинстве случаев довольно краткие. Формулы пронумерованы двумя числами в круглых скобках: первое обозначает номер главы, второе — счет формул и обозначений внутри главы.

Автор не стремился вводить однообразную символику, сохраняя в большинстве случаев символы и обозначения оригинала. Это отражает колорит эпохи и манеру того или иного автора. Как правило, в тексте указаны значения всех символов, кроме общеизвестных. Если они имеют тот же смысл и в дальнейшем, то это специально не оговаривается.

Автор надеется, что книга будет полезной студентам и аспирантам-математикам, учителям, преподавателям вузов, инженерам и научным работникам в различных отраслях математики и всем любителям истории математики.

---

[1] Если в списке имеется лишь одна работа данного автора, то второе число (равное единице), не указывается.

В процессе работы автор пользовался фондами публичных библиотек Москвы, Ленинграда, Киева, Харькова, Одессы, Таллина, Берлина, Парижа, Лондона, Вены, Стокгольма, Цюриха, Лиона и др. Особая помощь при написании книги оказана коллективом научной библиотеки механико-математического факультета Московского университета, которому автор выражает большую благодарность. Чрезвычайно ценной, плодотворной была поддержка акад. В. И. Смирнова, чл.-корр. АН УССР Ю. Д. Соколова, профессоров МГУ А. О. Гельфонда и В. В. Немыцкого.

Автор выражает также сердечную благодарность всем ученым-математикам и участникам научных семинаров Москвы, Ленинграда, Киева, Минска и других городов, которые помогали в процессе работы над книгой своими советами, консультациями и рекомендациями.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений в основном исследует интегралы различных классов уравнений и устанавливает их характеристические свойства методами теории аналитических функций. В отличие от локального изучения, характерного для классической теории дифференциальных уравнений XVIII и начала XIX века, она рассматривает поведение решений уравнений во всей комплексной плоскости, начиная с вопросов об их существовании и однозначности, о типе и расположении их особых точек и т.д. В процессе ее развития были установлены такие классы дифференциальных уравнений, интегралы которых обладают свойствами, представляющими особый интерес с точки зрения теории функций.

Естественно поэтому, что аналитическая теория дифференциальных уравнений могла вырасти лишь на основе уже достаточно развитых методов теории функций комплексного переменного и после создания и в известной степени завершения основных методов интегрирования уравнений в классическом анализе XVIII века. Она стала развиваться в период бурного роста математических исследований в начале XIX века.

В это время на континенте Европы начался промышленный переворот. Пришедшая к власти в результате Великой Французской и других революций «буржуазия менее чем за сто лет своего классового господства создала более многочисленные и более грандиозные производительные силы, чем все предшествовавшие поколения вместе взятые» (Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения, т. 4, с. 429). Она создала всемирный рынок, разорвала рамки национальной замкнутости как в области материального, так и в области духовного производства. Произошли коренные изменения и в организации науки и учебных заведений.

Создавались новые научные центры, тесно связанные с запросами практики, перестраивалась и оживлялась работа прежних академий, организовывались высшие учебные заведения нового типа, характерным примером которых явилась Парижская политехническая школа. Вскоре после открытия она стала мощ-

ным рассадником научно-педагогических кадров по физико-математическим наукам. К получению высшего образования были допущены дети из демократических слоев общества. Талантливейшие из них существенно пополнили затем ряды знаменитых математиков. В это же время налаживалась регулярная международная связь ученых и научных учреждений, которая получила выражение в организации научных обществ (1), в создании международных научных и реферативных журналов (2), организации научных съездов и конференций внутри стран, а к концу века — научных конгрессов по отдельным отраслям науки, в том числе и математики (3). Формировалась также довольно широкая прослойка лиц — научных работников, непосредственно заинтересованных в развитии науки.

Готфрид Лейбниц (1646—1716).

В общих курсах истории математики за прошлый век обычно упоминаются работы небольшого числа (порядка двух—трех десятков) самых известных ученых, получивших особо выдающиеся результаты и сделавших открытия первостепенной важности. В действительности же в процессе научного творчества принимали участие многие менее известные ученые, которые иногда существенно дополняли, исправляли, уточняли и в нужных случаях давали методическую разработку открытий великих математиков.

Для истории науки представляет интерес не только изучение вклада отдельных ученых, но и развитие методов, приемов, пути распространения исследований, их преемственность, так называемая внутренняя логика развития предмета, влияние его и взаимосвязь с другими отраслями математики. Великие ученые играют большую роль в истории науки, в том числе и математики. Однако при всей кажущейся внешней свободе их деятельности, особенно в последние полтора — два века, следует отметить, что в действительности она связана с общим потоком исследований в данной области и что эти исследования являются результатом общественно обусловленного процесса. Но эта связь не всегда легко усматривается из-за ее сложности, многоступенчатости, а также взаимодействия со многими факторами идейного и философского порядка. Математические понятия и теории — не просто произвольные творения ума ученого, а отражение реального объективного мира в своеобразной, иногда весьма абстрактной форме.

Эти явления характерны и для истории аналитической теории дифференциальных уравнений, которая развивалась в некоторых своих элементах под влиянием непосредственных за-

просов практики и других наук, а в целом в результате теснейшего взаимодействия со многими другими отраслями, питаясь их результатами, и в общем направлении построения логически обоснованных более строгих, более общих и всеобъемлющих теорий, при углублении анализа их основ. Выработанные в этой дисциплине методы и полученные результаты оказали большое влияние на другие отрасли теории дифференциальных уравнений, были пригодными или полезными для решения ряда практических задач, стали мощным идейным достижением, оформившимся в новую отрасль математического анализа в конце прошлого века. Здесь был выработан качественно новый взгляд на сам предмет исследования интегралов дифференциальных уравнений.

Действительная история данного предмета начинается задолго до того, как он был обособлен в литературе, как был ограничен круг его задач, как он получил название и занял свое место среди других объектов научного исследования.

Многие понятия и методы аналитической теории дифференциальных уравнений сформулированы и получили свое развитие в рамках и разделах классического анализа XVIII, начала XIX века и ощущались сперва как уточнения, усовершенствования существовавших уже тогда понятий и методов. И лишь после достаточного, весьма неравномерного накопления фактов оказалось возможным сформулировать сущность новой теории.

Рассмотрим ее истоки, отметив при этом, что указанные ниже закономерности и движущие силы ее развития более полно усматриваются на развитии всей математики в целом и на протяжении большого исторического отрезка времени.

Одной из основных движущих сил науки, в том числе и математики, является практика общественного производства. Производство материальных благ, стремление к улучшению условий материальной жизни, общественная практика в самом широком смысле слова направляли человеческую мысль на исследование тех или иных явлений природы или технических процессов, на построение тех или иных теорий. Влияние общественной практики является решающим фактором в развитии науки. В этом смысле очень четко высказался великий русский математик П. Л. Чебышев: «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых методов. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы

или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике» [85, 150]. Аналогичная идея о связи науки и техники была выражена почти через сорок лет Ф .Энгельсом в следующих словах письма к В. Боргиусу: «Если, как Вы утверждаете, техника в значительной степени зависит от состояния науки, то в гораздо большей мере наука зависит от *состояния* и *потребностей* техники. Если у общества появляется техническая потребность, то это продвигает науку вперед больше, чем десяток университетов» (Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения, т. 39, с. 174).

Исаак Ньютон (1642—1727).

И еще позже конкретно в отношении математики Ф. Журден писал: «Каждый значительный успех в развитии математики ... возник из потребностей естествознания...» [27, 9].

Однако следует отметить, что в рассматриваемый период непосредственные запросы практики, производства и других наук связаны с возникновением и развитием главным образом лишь отдельных проблем нашей науки. Так, одним из существенных импульсов, который привел Коши к созданию метода «исчисления пределов», а затем и многих полезных его применений и следствий, диктовался непосредственными запросами практики и, в частности, необходимостью упрощения и улучшения вычислительной работы в небесной механике. Сам Коши об этом писал: «Методы, которые геометры используют для вывода по принципам гравитации движения небесных тел, оставляли желать много лучшего. Часто им недоставало надлежащей строгости... К тому же, чтобы определить с помощью этих методов числовые коэффициенты относительно тех или иных пертурбаций (отклонений) в движениях планет, астрономы иногда были обязаны предпринимать вычисления, которые требовали многие годы работы. Один из очень известных членов этой академии М. Плана говорил мне не так давно, как изнуряют подобные вычисления. Я ему ответил, что я убежден, что можно будет их сократить и также немедленно определять числовые коэффициенты соответственно данному неравенству. Действительно, через несколько дней я ему показал формулы, с помощью которых можно решать подобные вопросы... и которые будут полезны при рассмотрении теории Сатурна и Юпитера» [122.13, 41—42] (4).

Отметим также, что математика развивается не только под влиянием общественного производства, но и всех общественных условий в целом. Это сказывается и в постановке проблем, и в методах их решения. Зависимость же от практических потреб-

ностей осуществляется, как правило, не непосредственно, а через цепочку промежуточных звеньев. Так, запросы естествознания и техники ставят новые проблемы, для решения которых старые методы оказываются недостаточными. В связи с этим разрабатываются новые методы, которые вместе с тем продвигают и теорию.

Решение ряда проблем физики и небесной механики, как известно, тесно связано с теорией дифференциальных уравнений. И для решения ряда поставленных таким образом вопросов применялись методы из других отраслей, соответственно видоизмененные, а иногда и создавались новые. Например, работы С. В. Ковалевской (5) по теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки привели к новому направлению в аналитической теории дифференциальных уравнений: к постановке задачи об отыскании такого класса уравнений, интегралы которых есть однозначные функции. Независимо от нее аналогичная задача на чисто теоретической основе ставилась другими учеными — Фуксом, Пуанкаре и др. Весьма важные и интересные результаты, полученные в этом направлении, тесно связаны с развитием общей теории алгебраических функций.

Как на второй замечательный пример, укажем на работы А. М. Ляпунова по механике, в процессе которых он создал ряд новых математических методов и новых направлений: качественную теорию дифференциальных уравнений, асимптотические методы, теорию устойчивости и др. В этой же степени это положение справедливо и относительно работ А. Пуанкаре по небесной механике и других ученых.

Одним из важнейших источников движения науки является внутренняя логика ее развития. В этом смысле она развивается относительно самостоятельно и независимо от непосредственной практики. Так, в 60—80—90-е годы прошлого века после весьма бурного периода развития аналитической теории дифференциальных уравнений Риман, Пуанкаре, Пенлеве и другие ученые подошли в своих глубоких исследованиях к таким задачам, которые не поддавались изучению уже известными приемами и требовали качественно новых методов исследования, возникших из внутренней потребности самой теории. Вышеуказанные стороны процесса развития науки — общественно-производственная практика и внутренняя логика не сводятся одна к другой и не покрываются друг другом, а находятся в определенной весьма тесной связи между собой, в диалектическом единстве.

Одной из ведущих сил развития рассматриваемой нами теории была борьба противоположностей внутри самой теории, которая на разных этапах проявлялась в различных формах. На первых порах это сказывалось в стремлении найти алгорифм или метод решения любого дифференциального уравнения, невозможность этого и привела к созданию теоремы о существовании интеграла дифференциального уравнения. Несколько поз-

же аналогичная проблема в теории линейных уравнений стала источником знаменитой теории Фукса, а также привела к формулировке общей проблемы, о чем шла речь выше, и к получению глубоких результатов в области нелинейных дифференциальных уравнений.

Иоганн Бернулли (1667—1748).

Противоречивость предыдущих постановок вопроса отмечал Фукс в одном из своих выступлений [153.7, 123]: «Когда давалось дифференциальное уравнение, то раньше делали беспланово попытки так его преобразовать, чтобы оно могло быть приведено к известному типу, который научились интегрировать в течение прошлого времени. Если это не удавалось, то дифференциальное уравнение старались привести к так называемым квадратурам, а когда эта попытка была тщетной, то решение находили в форме рядов. Эти беспланово попытки, как сейчас это видно из положения вещей, все же могли вести к цели только в редких случаях... Кроме того, как правило, отсутствовали вспомогательные средства, чтобы узнать всякий раз о возможности или невозможности такого приведения. Но когда приведение к квадратурам удается, то для установления природы решения дифференциального уравнения кое-что удается узнать в редких случаях». Эту мысль автор поясняет на примере дифференциального уравнения, приводящегося к квадратуре и имеющего решением эллиптические функции. Чтобы исследовать природу этих решений, говорит Фукс, «надо было сделать ни чуть не меньше, как создать теорию этих функций».

Что же касается решения дифференциальных уравнений в форме рядов, то и этот метод потерпел неудачу, так как «такие ряды, как правило, представляли функцию не для всей допустимой области».

Уже после сформирования основных положений теории одно из противоречий подметил А. Н. Коркин, рассматривая его как недостаток новой теории. По этому поводу он писал: «В последнее время пытаются применить к дифференциальным уравнениям теорию функций комплексного переменного, которая так само является результатом изучения функций алгебраических и их интегралов. Но при большой общности своих теорем эта теория имеет также существенное несовершенство, а именно, в ней отсутствуют методы вычисления неизвестных функций. Эти же вычисления есть настоящее интегрирование уравнения и окончательная цель его анализа». [31.1, 317]. Наличие указан-

Якоб Бернулли (1654—1705).

ного противоречия в развивающейся новой теории не позволило Коркину (6), оставшемуся в плену прежних представлений, понять и должным образом оценить качественно новое в ее содержании (7). В связи с этим Д. А. Граве (8) резонно считал, «что было бы несправедливо сказать, что изучение свойств функций есть задача менее достойная внимания, чем задача вычисления этих функций». Высоко оценивая результаты новой теории, он в то же время писал, что «теория функций комплексного переменного налагает известные ограничения на рассматриваемые функции и едва ли в этом смысле подходит к задаче нахождения общих интегралов, т. е. к задаче нахождения совокупностей всех возможных решений данного уравнения» [18.1, 463].

Вместе с тем математика является продуктом многовековой деятельности мышления самих математиков. В этом отношении наша теория не была исключением.

Остановимся далее на вопросе накопления фактов по тем дисциплинам, которые послужили основой аналитической теории дифференциальных уравнений.

Видную роль в предыстории теории дифференциальных уравнений и интегрального исчисления в целом сыграли обратные задачи, относящиеся к касательным, т. е. задачи об определении кривых, касательные к которым обладают указанным свойством. Такие задачи были уже предметом занятий Р. Декарта, И. Барроу. Понятием дифференциального уравнения математики стали оперировать еще в период формирования дифференциального и интегрального исчисления. Сам термин «дифференциальное уравнение» был предложен Лейбницем в письме к Ньютону в 1676 г. и вошел в обиход немного раньше. Многие вопросы геометрии, астрономии, физики не могли быть решены непосредственно действиями дифференцирования и интегрирования и требовали составления и решения некоторого уравнения, содержащего аргумент, неизвестную функцию и ее производную или дифференциал. В связи с этим зарождается именно теория решения дифференциальных уравнений.

Ряд дифференциальных уравнений был проинтегрирован Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» (1686). Ему же принадлежит общий метод получения интегралов уравнений в форме степенного ряда. При этом использовалась идея способа неопределенных коэффициентов и последовательных приближений. Он имел четкое представление о том, что

для одного и того же дифференциального уравнения можно получить бесконечное множество решений, но запись общего решения с произвольной постоянной, осознавая ее важность, осуществил Иоганн Бернулли.

Якоб Риккати (1676—1754).

Лейбниц умел решать дифференциальные уравнения с разделенными переменными, а в 1693 г. ему уже были известны способы, при замене переменных, приведения однородных и линейных уравнений (первого порядка) к разделению переменных. В то же время Лейбниц нашел метод неопределенных коэффициентов для интегрирования уравнений с помощью рядов. Вскоре был найден метод интеграции известного уравнения Бернулли, применена идея интегрирующего множителя (И. Бернулли), получены решения для уравнений второго порядка, не содержащих явно одной из переменных (Я. Бернулли предложил замену $y'=p$ для сведения уравнения к первому порядку).

Таким образом, к началу XVIII века были найдены методы интегрирования простейших дифференциальных уравнений первого порядка и заложены основы классификации этих уравнений по способам решения. Однако рассмотрение этих вопросов в то время носило эмпирический, разрозненный характер и нет оснований говорить о какой-то общей теории дифференциальных уравнений к началу XVIII века. Но в то же время росло число задач, ведущих к дифференциальным уравнениям. Последние появлялись в большом количестве и в самых разнообразных формах. От их решения зависели судьбы новых законов и открытий в самых разнообразных областях естествознания и техники. Поэтому почти все крупные математики того времени включились в эту работу. Количество сочинений, посвященных этим вопросам, огромно, и их обзор может быть темой большой монографии. Мы назовем здесь лишь некоторые результаты.

Так, уже в 1724 г. итальянским математиком Я. Риккати (9) было опубликовано подробное исследование уравнения, получившего позже (1769), по предложению Даламбера, название уравнения Риккати. Последним занимались также Г. Лейбниц, Х. Гольдбах, Я. Бернулли, И. Бернулли, Д. Бернулли, Л. Эйлер и многие другие. Ввиду особого интереса, который представляет это уравнение для аналитической теории дифференциальных уравнений, истории его изучения отведен специальный параграф в книге.

С уравнения Риккати начинается методическая разработка теории дифференциальных уравнений. Особенно большой вклад в этом отношении сделал Эйлер. Он обогатил теорию дифферен-

циальных уравнений рядом первоклассных открытий [1]. Так, уже в 1732 г. он предложил метод понижения на единицу порядка некоторых однородных уравнений с помощью подстановки показательной функции. Позже этот прием привел Эйлера к общему методу, который применим для интегрирования линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

В мемуаре 1843 г. он указал, что общим решением уравнения порядка n есть линейная комбинация его n частных решений. Здесь же он впервые ввел термины частного и общего решения для обозначения уже известных понятий. В решении неоднородного линейного уравнения Эйлера опередил Даламбер, предложивший в 1747 г. общий метод приведения решения уравнения высшего порядка к решению системы совместных дифференциальных уравнений первого порядка. Подробную разработку этого вопроса чуть позже дал Эйлер (1750—1752). Он же разработал методы интегрирования некоторых классов линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Несколько позже (1766) Даламбер установил, что общее решение неоднородного уравнения составляется из суммы частного его решения и общего решения однородного, соответственно, с теми же коэффициентами. В это время Лагранж детально разработал известный уже Эйлеру метод вариации произвольных постоянных и применил его к данному типу уравнений.

В применении метода интегрирующего множителя для уравнений первого порядка существенное участие принимали Ник. II Бернулли (1720), А. Клеро (1739 и след.) и Л. Эйлер (с 1732). Большой заслугой Эйлера было установление ряда классов дифференциальных уравнений, обладающих множителем заданного вида. Он же распространил метод интегрирующего множителя на уравнения высших порядков (1770). Этим же вопросом занимался и А. И. Лексель (10) (1771). Одним из важнейших применений теории интегрирующего множителя было открытие уравнения, сопряженного с данным однородным линейным уравнением, и факта взаимной сопряженности этих уравнений (Лагранж, 1766, Эйлер, 1778).

Изучение основных уравнений динамики привело к разработке систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Более подробным их исследованием занимался Даламбер, применив к линейным однородным системам с постоянными коэффициентами метод неопределенных множителей. Он рассматривал также некоторые случаи систем уравнений второго порядка. Эти исследования продолжены А. И. Лекселем.

Важное значение как исток аналитической теории дифференциальных уравнений имела теория особых решений. Впервые такое решение встречается в работе Тейлора «Метод прираще-

[1] Подробнее об этом см. в монографии Н. И. Симонова [64].

ний» (1715), не понявшего, однако, его значения, но назвавшего его «некоторым особым решением задачи».

Несколько позже (1734) Клеро нашел особое решение уравнения, носящего его имя, и установил, что оно не содержится в общем интеграле уравнения. Статья Клеро побудила Даламбера (1748) к отысканию особого решения более общего уравнения, называемого потом именем Лагранжа. Еще ранее ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями рассмотрел Эйлер во втором томе «Механики» (1736). Позже (1756) он установил (как и Клеро), что такое решение уравнения можно получить дифференцированием и что оно не содержится в общем решении. Но тогда он еще не заметил связи особых ний с огибающими. Некоторые методы отыскания особых гралов были предложены Лапласом в 1772 г. и позже.

Леонард Эйлер (1707—1783).

В связи с ними Лагранж обратил внимание на эту акт ную тогда проблему. В большой статье (1774) он впервы подробное и исчерпывающее для того времени освещени проса. Здесь был установлен способ отыскания особого ре либо непосредственно из дифференциального уравнения, из общего интеграла дифференцированием по постояни также изложена геометрическая трактовка вопроса (связь рией огибающих). Позже он расширил полученные резул за счет рассмотрения особых решений уравнений высших п ков и с частными производными. Эти и другие результаты ранжа были включены автором в «Лекции об исчислении ций» (1801). Среди других он развил здесь метод полу дифференциального уравнения, имеющего особым реш данную кривую. При этом был найден большой класс дифференциальных уравнений.

Далее исследованием признаков особых решений зани Пуассон, стремившийся вывести их непосредственно из да уравнения, без его интеграции.

Несколько позже Коши установил, что критерий Ла необходим, но недостаточен для существования особого ния, и надо поэтому дать еще некоторые дополнительные вила (для достаточности), что и было им предложено в (исследования интеграла некоторого вида [1].

Де-Морган (11) отметил в [133.1, 523] важность это

[1] Подробнее об этом см. в [251].

Жан Даламбер (1717—1783).

зультата Коши, который характеризовался как крупнейшее достижение века в теории дифференциальных уравнений.

Задачи астрономии, прежде всего небесной механики, широко содействовали развитию приближенных способов интегрирования дифференциальных уравнений. Разработка этих методов оказала существенное и непосредственное влияние на развитие такого важнейшего отдела аналитической теории дифференциальных уравнений, как теоремы существования и единственности решений. После Ньютона применение приближенных решений дифференциальных уравнений в форме специальных рядов находим у Даламбера, Эйлера, Кондорсе. Весьма простой и широко известный плодотворный метод разработал Эйлер и позже подробно изложил его в первом томе интегрального исчисления [141.2]. Метод Эйлера послужил позже основанием одного из доказательств теоремы существования решения уравнения $y'=f(x, y)$. Ему же принадлежит идея представления решений дифференциальных уравнений в виде определенных интегралов, с помощью которых он искал сумму ряда, представляющего интеграл данного уравнения. В развитие этой мысли Эйлера появился известный метод, примененный Лапласом для решения носящего его имя дифференциального уравнения с частными производными.

Метод разложения в цепную дробь интеграла обыкновенного дифференциального уравнения применил Лагранж в 1776 г. Этот метод представлял возможность определить по характеру дроби, будет ли данная функция рациональной (разложение обрывается) или нет.

В XIX веке существенное развитие приближенные методы решения дифференциальных уравнений получили в работах О. Коши и его сотрудников. Особое внимание уделено вопросам сходимости, оценкам погрешностей и т. д.

Геометрическая теория дифференциальных уравнений получила развитие главным образом в трудах Г. Монжа, исследовавшего весьма широко связь теории дифференциальных уравнений, теории поверхностей и пространственных кривых. Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений связано с работами Коши, Гамильтона, Якоби, Лиувилля, а затем С. Ли, Майера, Коркина, Имшенецкого, Кенигсберга и других.

Большие успехи, достигнутые крупнейшими учеными XVIII века в решении дифференциальных уравнений, создали возмож-

ность для построения общей теории дифференциальных уравнений. Эта задача была выполнена Эйлером в известном трехтомном «Интегральном исчислении». Основная часть его принадлежит теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Здесь впервые дана их четкая классификация по методам решений. Этим завершался один из важнейших этапов в развитии классической теории дифференциальных уравнений.

Пьер Лаплас (1749—1827).

Начало XIX века стало переломным периодом в развитии всей математики. В это время подвергся коренной перестройке весь фундамент математического анализа. «В течение XIX века, начиная с Гаусса и Коши и кончая Вейерштрассом, была завершена работа по строго логическому обоснованию классического анализа» [30, 7]. Как отметил А. Н. Колмогоров, основные понятия получили более точные формулировки при привычных нам теперь ограничительных условиях (О. Коши, К. Гаусс, Б. Больцано). Обостренное отношение к понятию строгости пронизывает все звенья анализа, который из учения об отдельных функциях или специальных классах функций начал перестраиваться в общую теорию функций. При этом большое значение уделяется проблемам арифметического доказательства существования объектов анализа, определяемых с помощью бесконечных процессов. В этих условиях вполне логично было заметить пробел в прежней теории дифференциальных уравнений как совокупности частных приемов решения отдельных классов уравнений. Упоминаемые ранее общие методы не выдерживали критики новой теории. Перед математиками все более остро вставала проблема установления существования решения и определения его характера, исходя из вида уравнения.

Развитие математического анализа в направлении функций действительных переменных, особенно новое определение интеграла, учение о сходимости рядов, некоторые результаты в теории уравнений с частными производными привело к построению общей теории функции комплексного [1] переменного, которая в процессе своего дальнейшего развития оказалась важной питательной средой для аналитической теории дифференциальных уравнений.

Зарождение теории функций комплексного переменного началось из введения в математику мнимых и комплексных объек-

[1] Подробнее об истории теории аналитических функций см. в [5.1], [47.1], [75] и др.

тов. Операция извлечения корня четной степени из отрицательного числа привела к мнимым числам. Хотя природа этих чисел и не была достаточно выяснена, тем не менее они играли весьма полезную роль при решении многих конкретных задач. Это дало повод математикам XVIII века ввести понятие мнимости и в область переменных величин. Лейбниц и И. Бернулли одни из первых пытались проводить операции над комплексными числами аналогично действительным — например разложение подынтегральных функций на элементарные дроби и т. п.

В 1712 г. И. Бернулли ввел в анализ понятие мнимых логарифмов, и в связи с этим разгорелся его знаменитый спор с Лейбницем о природе логарифмов отрицательных величин. Позже полемика по этому же вопросу продолжилась между Даламбером и Эйлером, показавшим в 1749 г. многозначность логарифмов (12). Большое значение для упрочнения мнимых величин в анализе сыграла их полезность при решении дифференциальных уравнений математической физики главным образом в работах Даламбера (1752) и Эйлера (1755).

Важным этапом в развитии теории функций комплексного переменного было установление (в работах Эйлера и Даламбера) факта о том, что пары сопряженных гармонических функций являются соответственно действительной и мнимой частью некоторой аналитической функции от комплексного переменного. В процессе этого получены уравнения, названные потом уравнениями Коши—Римана.

В дальнейшем математики XVIII века рассматривали функции мнимого переменного все же как результат определенных аналитических действий, не имея еще способов их геометрической реализации и действий над ними, что не давало ученым возможности оперировать с этими величинами независимо от их аналитического происхождения. Вместе с тем Эйлер счел возможным рассмотреть во «Введении в анализ бесконечно малых» (1748) комплексную величину как наиболее общее понятие переменной. Так постепенно выяснялись основные факты теории элементарных функций комплексного переменного. Заслуга введения действий дифференцирования и интегрирования над комплексными величинами принадлежит Эйлеру. Его посмертные мемуары по этим вопросам существенно продвигали развитие новой теории аналитических функций. Он же рассмотрел конформное отображение [1] областей сферы на плоскость (1777). Несколько раньше этими вопросами в связи с построением географических карт занимались Ламберт и Лагранж (1772). Через несколько лет (1779) Лагранж дал способ отображения сферических фигур на поверхности вращения.

Вычисление интегралов между мнимыми пределами впервые было введено Лапласом в 1782 г. Потом он пользовался этим

[1] Этот термин впервые встречается в работе Гамбургского геометра Г. Шуберта в 1789 г.

приемом еще в 1809, 1812 гг., не развивая однако его общих оснований. Аналогичный прием применял и Парсеваль в 1799—1804 гг. при выводе своей известной формулы и в других случаях.

Еще в XVIII веке в математику, наряду с известными элементарными функциями, стали вводить различные неэлементарные аналитические функции. Впервые это было осуществлено Эйлером, установившим понятие гамма-функции-[1], зета-функции [2], цилиндрических функций и изучившим их свойства. Эти факты очень важны для аналитической теории дифференциальных уравнений, в недрах которой были получены целые классы новых функций.

Жозеф Лагранж (1736—1813).

Следующий этап истории теории функций комплексного переменного характеризуется введением уточненных определений основных понятий. Особо важным шагом в этом отношении было развитие геометрического представления комплексных чисел точками или векторами на плоскости. Эйлер был весьма близок к такому представлению, однако в систематической форме изображение комплексных чисел и действий над ними встречается впервые в работе датского землемера К. Весселя (1799). Этот же вопрос рассматривали Бюе и Арган (1806). Важное значение для обоснования теории комплексных чисел и их геометрической интерпретации имела работа Гаусса [3] «Теория биквадратичных вычетов» (1831), хотя основными понятиями этой теории он владел значительно раньше (13).

Очень важное значение для построения основ теории аналитических функций комплексного переменного имело выяснение смысла интегрирования на комплексной плоскости. Как мы упоминали, в начале века этим вопросом занимался Лаплас. В его работе «Аналитическая теория вероятностей» (1812) впервые встречается знаменитое преобразование, получившее позже очень важные применения в науке и технике. Установленные им формулы для выражения коэффициентов степенного ряда через интегралы от суммы ряда, взятые по окружности в комплексной плоскости, совпадают с интегральными формулами Коши для коэффициентов степенного ряда. Но по существу он проводил интегрирование комплексных функций по вещественному аргу-

[1] Термин и современное обозначение принадлежит Лежандру — начало XIX века.

[2] Впоследствии зета-функция была подробно изучена Риманом.

[3] Термин «комплексное число» принадлежит Гауссу.

Иоганн Пфафф (1765—1825).

мент. Несколько дальше в этом направлении продвинулся Пуассон, исследовавший в работе 1820 г. возможные источники ошибок при интегрировании по последовательности комплексных значений между вещественными пределами.

Таким образом, были созданы предпосылки для создания общей теории функций комплексного переменного и дальнейшей ее разработки в тесной связи с другими ветвями математического анализа.

Решение этой задачи в большей части было выполнено Коши. Систематизируя накопленные факты, существенно дополняя пробелы методического порядка, он стремился построить цельную и строгую систему анализа на основе теории функций комплексного переменного в работах [122.1—2]. Большой заслугой Коши была четкая постановка вопроса о сходимости рядов и законности разложений функции в степенные ряды. Принципиально новые результаты получил Коши в 1825 г. [122.3], выясняя смысл и свойства определенных интегралов, взятых между мнимыми пределами. Здесь содержалась интегральная теорема Коши (частный случай которой по прямоугольному контуру был известен ему значительно раньше). Еще в мемуаре Коши 1814 г. мы встречаемся с идеями, послужившими началом позднейшей теории вычетов и их приложений. Эта теория (по терминологии автора — исчисление вычетов) была создана им в 1826—1829 гг.

В том же 1826 г. было опубликовано исследование Абеля о биномиальном ряде, где содержатся его знаменитые теоремы и указание на ошибку Коши о том, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций — непрерывна, ряд других его фундаментальных работ по теории эллиптических функций и теории абелевых интегралов, сочинения Якоби по теории эллиптических функций и, наконец, замечательная работа Лобачевского, открывшая неэвклидову геометрию. Значение ее для теории функций комплексного переменного было выяснено позже благодаря трудам Ф. Клейна, А. Пункаре, П. Кёбе и др. Непосредственно теория элементарных функций комплексного переменного была изложена в сочинении Лобачевского в 1834 г.

Таким образом, в конце первой половины прошлого века, благодаря работам Гаусса, Коши, Пуассона и других ученых, теория функций комплексного переменного превращалась из полезного для приложений орудия в новую и самостоятельную область математических исследований. В связи с этим появились и отдельные руководства по этой теории

рии конформных Ка
чень плодотвор-
истных поверхностей. О
йлера—Даламбера с гео
оложил это в основу пос
ое определение аналитич
вно продолжающейся с
ний из элемента, заданн
ия осуществляет конф
ругую.
математической физики
определение аналитичес
рактером точек разрыва
й «принцип Дирихле», с

ом Римана в математи
ых поверхностей, получ
областях анализа и, пр
фференциальных уравне
одной из интереснейши
звала массу работ и г
матиков XIX и XX веко
ой теории функций ком
венное развитие.
ическое) направление ра
переменного во второй
о в основном трудами К
ке к 1842 г. Вейерштра
лжения, но основное вн
ых классов функций — э
елевых. Его общие конце
переменного складывали
ом университете и нашл
го теории лежало понят

Существенную роль играло понятие равномерной сходимости. Полная аналитическая функция строилась как совокупность всех продолжений какого-либо элемента. Затем проводилось исследование функций и их особенностей. К 1876 г. Вейерштрасс получил разложение произвольной целой функции в виде бесконечного произведения. Существенный вклад в развитие этой теории внесли его ученики и последователи Миттаг-Леффлер, Г. Шварц, С. В. Ковалевская, Ш. Эрмит и др. Были заложены основы теории целых, а затем и более общей теории мероморфных функций. Применение теории аналитических функций к теории чисел привело к созданию аналитической теории чисел (Чебышев, Риман), а применение ее к теории дифференциальных уравнений стало источником аналитической теории дифференциальных уравнений (Коши, Брио и Буке, Фукс, Пикар, Пуанкаре, Пенлеве).

В процессе своего развития аналитическая теория дифференциальных уравнений пользовалась результатами и методами дальше развивающейся общей теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) действительного переменного (переплетаясь с последней в некоторых пунктах), теории определителей и теории групп (в области линейных уравнений), теории алгебраических функций и теории ряда специальных функций (для уравнений нелинейных первого и высших порядков).

В свою очередь эта теория оказала мощное влияние на развитие качественной теории дифференциальных уравнений, на решение ряда прикладных вопросов, стала источником новых видов и классов функций, среди которых назовем чрезвычайно важный и интересный класс автоморфных функций. Некоторые ее отделы отпочковались от своей основы и существуют ныне как самостоятельные ветви математического анализа (теоремы существования и единственности, линейная теория, теория специальных функций, теория краевых задач и др.).

Перейдем к характеристике литературы вопроса. Отметим прежде всего, что история математики XIX и начала нынешнего веков освещена в имеющейся литературе наименее обстоятельно по сравнению с другими периодами. Число монографий, где рассматривался бы этот вопрос в целом, находится в пределах первого десятка. В большинстве случаев в этих работах на математику XIX века отводится несколько десятков страниц, а об интересующем нас предмете часто и не упоминается. Естественно, что при этом излагаются самые крупные и яркие факты и лишь в общих чертах говорится об аспектах развития предмета в целом. Такие книги нужны и интересны, но вряд ли они могут удовлетворить интересы лиц, более углубленно занимающихся историей математики, и специалистов-математиков, работающих в той или иной области. Особенно бедна литература по истории анализа XIX века и, в частности, теории дифференциальных

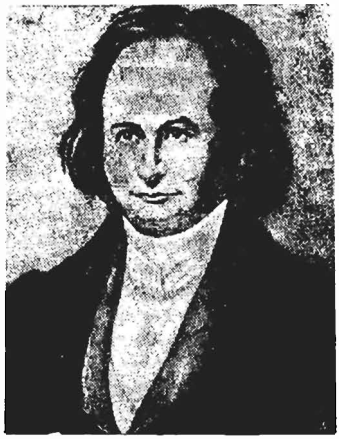
уравнений. Материалы по этому предмету рассеяны в многочисленных обзорных статьях и заметках и при этом весьма неравномерно как в отношении хронологии, так и по-предметно. По истории аналитической теории дифференциальных уравнений имеется лишь несколько заметок главным образом в форме предисловий и замечаний при изложении самого предмета, а также при рассмотрении истории других дисциплин. Отсутствует обзор этой теории и в известной трехтомной монографии «Математика, ее содержание, методы и значение». Автор главы о дифференциальных уравнениях академик И. Г. Петровский писал в связи с этим: «Мы совсем не затрагиваем обширного и важного отдела, в котором рассматриваются вопросы теории дифференциальных уравнений с комплексным аргументом» [48. II, 47].

Нильс Абель (1802—1829).

Историю анализа XIX века исчерпать в одной, даже большой, работе, видимо, невозможно. Детальному изучению подлежит слишком большой и разнообразный материал. Эту важнейшую задачу следует решать, расчленив ее на ряд составляющих. В области теории дифференциальных уравнений существенные шаги в этом направлении предприняты в СССР, где стали углубленно изучать отдельные аспекты ее развития.

Такое изучение принесет несомненную пользу не только историкам науки, но и специалистам-математикам, работающим в данной отрасли, существенно облегчив и ускорив овладение исторической перспективой развития предмета и снабдив их достаточно полными библиографическими сведениями. А решить даже эту последнюю задачу не так легко.

Прошлый век дал гораздо больше печатной продукции по математике, чем все предыдущие. По неполным сведениям, приведенным в указателе Лондонского математического общества, за прошлый век было напечатано сочинений, касающихся математики, порядка ста тысяч. Это в основном журнальная продукция, разбросанная в многочисленных, сейчас довольно трудно доступных, записках академий и научных обществ и специальных журналах, число которых к концу прошлого века достигало несколько сотен (14). Этот огромный материал почти нигде не учитывался и не систематизировался, особенно в первые три четверти века. Поэтому для выявления нужных источников для данной работы надо было провести немалую работу чисто библиографического характера: ознакомиться с разными каталогами и указателями, а иногда проводить и сквозной просмотр тех



Карл Якоби (1804—1851).

журналов и сочинений, которые были «подозреваемы» на содержание нужного материала.

Работа усложнялась еще и тем, что зачастую названия статей не выражают их содержания. Так, в упоминаемом выше Лондонском тематическом указателе каталога значится лишь две статьи Коши по теоремам существования решений дифференциальных уравнений, а на самом деле этот вопрос трактовался Коши еще в десятках статей. Одна из трудностей выявления материала состояла также и в том, что изучаемая нами дисциплина как самостоятельная сформировалась лишь к концу века и получила свое наименование. Но работы, принадлежащие к ней, стали обособляться в указателях (и то не всегда и не полностью) лишь в последние десятилетия. Что же касается прошлого века и начала нынешнего, то о принадлежности данной работы к изучаемой области можно было судить с достоверностью лишь после знакомства с ее содержанием. Существенную помощь при сборе литературы могут оказать реферативные журналы. Первый из них — Бюллетень Ферюссака принес мало пользы. Значительно лучше обстояло дело, начиная с трех последних десятилетий прошлого века, когда стал выходить немецкий ежегодник [184], журнал Дарбу [114] и др.

Довольно большой и полезный материал можно найти в энциклопедии математических наук (немецкое [138] и французское [139] издания), содержащей в числе других и краткие обзоры по интересующему нас предмету и многочисленные литературные указания, хотя далеко неполные.

Как одну из первых обзорных работ по теоремам существования отметим довольно полную в смысле хронологии, но содержащую ряд неточностей исторического порядка статью Ваккаро [267] (1900 г). Несколько позже, в 1913 г., вышла монография Блисса [102], переизданная затем в 1934 г. в Нью-Йорке и посвященная фундаментальной теореме существования. Статья Макса Мюллера [221] в известной степени дополняла работу Пенлеве [228.21], а небольшая книжка [128.2] Эмиля Коттона посвящалась специально методу последовательных приближений. Ряд полезных сведений можно почерпнуть из статьи [6] Бокштейна.

Первая монография, в которой была сформулирована основная идея новой теории, намечен и во многом решен весьма широкий круг ее задач, принадлежала Брио и Буке [112.7]. Она

была написана как научный трактат, но методически четко и ясно, и в последующие десятилетия служила единственным пособием по новой, еще формировавшейся теории. Изложенные в ней идеи послужили источником множества дальнейших работ. Через сорок лет после упоминаемого мемуара Брио и Буке вышло первое издание трактата по анализу Пикара, во втором и третьем томах которого наиболее полно для того времени нашли отражение элементы складывающейся тогда аналитической теории нелинейных уравнений.

Примерно такой же круг вопросов (относительно рассматриваемого предмета) с некоторыми изменениями и дополнениями находим во втором и третьем томах пятитомного трактата Форсайта [147]. Но здесь не отражены фундаментальные идеи Пенлеве, изложенные последним на пять лет раньше в его известных лекциях [228.11], читанных осенью 1895 г. в Стокгольме. Здесь охвачены как классические результаты, но на новой методической основе, исходя из современных автору теоретико-функциональных концепций, так и главным образом новейшие результаты по данному кругу вопросов прежде всего самого автора, а также Пикара, Пуанкаре, Аппеля, Дарбу и других ученых. Созданием и публикацией этого оригинального курса Пенлеве было закреплено рождение новой отрасли математического анализа. Дополнение к этим лекциям Пенлеве поместил в спецкурсе своего ученика Бутру [109.3].

Одна из первых обзорных статей по новой теории в итальянской литературе [145] принадлежала Фиорентини. Она посвящалась теории уравнений первого порядка. Несмотря на ряд неточностей исторического характера, она была весьма содержательной и охватывала предмет, включая результаты Пуанкаре, Пикара и Пенлеве. Из обзорных работ по особым точкам дифференциальных уравнений отметим монографию Дюляка [137.7].

Более обширной является литература исторического и монографического характера, связанная с аналитической линейной теорией дифференциальных уравнений. Здесь прежде всего следует назвать одну из наиболее крупных работ, где рассмотрены почти все основные вопросы изучаемой теории и довольно подробно упомянуты многие значительные ее результаты почти за всю вторую половину прошлого века,— монографию Л. Шлезингера [254.1] в трех книгах. Она охватывает большой фактический материал, хотя далеко не систематично, с точки зрения современного читателя. Более систематично, но весьма конспективно дан обзор основных результатов линейной теории дифференциальных уравнений за сорок лет после 1865 г. в статье Шлезингера [254.10]. Но имеющийся здесь большой список литературы не увязан однозначно с текстом. Шлезингеру же принадлежал и ряд курсов по данной теории. На основе новых резуль-

татов Фукса и его последователей составлен курс Гефтера [171] по введению в теорию линейных уравнений.

Одним из первых последователей и популяризаторов теории Фукса во Франции был Жюль Таннери. Ему же принадлежит, вероятно, первая крупная работа на французском языке [263], где в оригинальной обработке автора и с его дополнениями излагались основные результаты Фукса и других немецких ученых по данному кругу вопросов, полученные до 1875 г.

В русской математической литературе первые книги по новой теории линейных уравнений вышли в 1889 и 1892 гг. и принадлежали известным математикам В. А. Анисимову [2.1—2] и С. Е. Савичу [62]. Они знакомили русских читателей с основами новой теории и содержали ряд дополнений и оригинальных результатов авторов.

К началу 90-х годов создание основ аналитической теории линейных уравнений было в основном завершено. Неудивительно поэтому, что в больших курсах анализа указанной теории были посвящены отдельные главы и параграфы. Мы имеем в виду работы Пикара, Жордана, Форсайта и др.

Одной из первых крупных работ по данным проблемам на итальянском языке был цикл статей Флоридиа [146], публиковавшихся в журнале Батталини в течение 1893—1895 гг.

В Америке одним из первых популяризаторов аналитической теории линейных уравнений был Радельфингер [241].

Весьма многочисленны были курсы и монографии по отдельным разделам изучаемой теории, сформировавшимся в течение нескольких лет бурного развития как самостоятельные дисциплины. В этом направлении следует отметить чрезвычайно энергичную и плодотворную деятельность Ф. Клейна и его ближайшего сотрудника Р. Фрике, проделавших титанический труд, в результате которого опубликованы фундаментальные монографии в форме лекций по теории эллиптических модуль-функций [192.7], по теории автоморфных функций — в 1897 — 1900 гг. Кроме того, Клейну принадлежат известные лекции об икосаэдре [192.4] и решении уравнений пятой степени (1884 г.), о гипергеометрических функциях [192.8] (1893 — 1894), о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка [192.9] (1894), а Фрике — обзорные статьи по эллиптическим [150.3], автоморфным и модуль-функциям [150.2] в немецкой энциклопедии математических наук.

Общий очерк по теории линейных уравнений (комплексная область) принадлежал здесь Хиллу [172.2].

Из обширной литературы по гипергеометрическому ряду, кроме упоминаемого курса Клейна, назовем как одну из первых обзорных работ небольшую книжку Баранецкого [4], вышедшую в Москве еще в 1873 г. Через три года опубликована диссертация М. Тихомандрицкого [76]. Исторические очерки этой теории были предметом диссертации Жеклин [185], статьи Пап-

перитца [229.2] и др. Из более поздних курсов по этому предмету, но различных по характеру, укажем на книги Гурса [163.5] и Кампе-де Фере [189].

Огюстен Коши (1789—1857).

Из книг специального характера, трактующих более узкие вопросы, отметим докторскую диссертацию Синцова [65.3] (1898) о рациональных интегралах линейных уравнений, очерк об интегрировании дифференциальных и разностных линейных уравнений при помощи определенных интегралов Брайцева [8] (1901), монографию о применении теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений Гюнтера [21] (1903 г.), большую работу Лахтина [39.1] об алгебраических уравнениях, решаемых в гипергеометрических функциях (1892—1893 гг.).

Один из первых курсов по расходящимся рядам принадлежал Борелю [105.3]. Исторические очерки по расходящимся и асимптотическим рядам — продукт более позднего времени, об этом писали Пастори [231], Дзюбенко [23], Чириков [86].

Таким образом, при выполнении данной работы автором были использованы выявленные работы по данному предмету, соответственные курсы и монографии, обзорные, библиографические, биографические и в небольшом числе архивные материалы, а также различная историко-математическая литература.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава I. У ИСТОКОВ ТЕОРИИ. ПЕРВЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕМАМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Постановка вопроса у Коши

Проблема существования решений является одной из важнейших в современной теории дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными. При исследовании любого нового класса или вида уравнений в том или ином аспекте рассматривается и вопрос о существовании его решений. Приоритет выдающегося первого автора теорем существования интегралов дифференциальных уравнений закреплен по справедливости в их названии. Пожалуй, почти не найдется сейчас такого курса по анализу или монографии по теории дифференциальных уравнений, где теорема существования и единственности решений не связывалась бы с именем Коши. Но зачастую дело на этом и оканчивается, а в тех случаях, когда приводится историческая справка, в ней допускается ряд неточностей. Так, шведский математик К. М. Линдеберг в диссертации, посвященной историческому очерку особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений [203], при рассмотрении так называемого первого метода Коши доказательства теоремы существования решения уравнения связывал его появление с 1844 г., когда вышли используемые им известные лекции [219] Муаньо (15) по дифференциальному и интегральному исчислению [1]. В действительности же Коши начал излагать этот метод на своих лекциях в Парижской политехнической школе лет на 20 раньше и схему его опубликовал уже в мемуаре [122.8]. Аналогичная неточность допущена японскими авторами Хукугара, Кимура и Матуда в недавно вышедшей их монографии [178, 10], где авторы утверждают, что метод последовательных приближений «был использован впервые Пикаром для доказательства теоремы существования». Однако известно, что впервые применение этого метода для доказательства существования решения дифференциального уравнения определенного вида было опуб-

[1] Эта же дата приводится в работах Итара [181, 60], Пеано [232.4], Ваккаро [267], Валле-Пуссена [268. 2, 75], в известном спецкурсе проф. Г. Е. Шилова [87].

ликсвано Лиувиллем в 1837—1838 гг., т. е. почти на двадцать лет раньше, чем родился Э. Пикар. Аналогичная неточность встречается в большом курсе по истории математики Ф. Кеджори.

Историки математики Бекер и Гофман в книге [96] не расчленяют упоминаемые выше методы доказательства теоремы существования решений уравнений и вовсе не упоминают о таком мощном и важном методе, как метод мажорантных функций, предложенный Коши.

Математики XVIII века как наиболее общий применяли метод отыскания решения дифференциальных уравнений в виде функционального (главным образом степенного) ряда. В большинстве случаев такие ряды сходились в некоторой области и удовлетворяли данному уравнению. Эти результаты приводили к ложной уверенности о существовании решений в виде функций, представимых рядами такого вида в любом случае [1].

С внешней стороны здесь наблюдалось то же явление, что и в теории алгебраических уравнений, когда многие полагали возможным решить в радикалах любое алгебраическое уравнение. Но если в теории алгебраических уравнений к началу XIX века уже был поставлен и решен вопрос о существовании корней в виде основной теоремы алгебры (Даламбер, Гаусс), то в теории дифференциальных уравнений аналогичная проблема тогда еще не решалась.

Впервые она была четко поставлена и решена в различных формах выдающимся французским математиком Коши [16].

В одной из первых работ в этом направлении [122.8] он справедливо отмечал, что «интегрирование при помощи рядов дифференциальных уравнений было обманчивым, так как оно не представляло никакого средства обеспечить, что полученные ряды являются сходящимися и что их суммы являются теми самыми функциями, которые удовлетворяют данным уравнениям». «Надо было поэтому,— продолжает он далее,— ... или найти такое средство, или искать другой метод, с помощью которого можно было бы установить в общем существование тех самых функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям и вычислять неопределенно приближенные величины этих самых функций» (стр. 328). Итак, определив совершенно ясно недостатки предыдущего метода, Коши кратко сформулировал новую проблему.

Рассмотрению ее в разных аспектах он посвятил затем множество работ, публикуемых в течение двух последних десятилетий его жизни.

---

[1] В известной степени этому способствовал факт малого числа известных в то время конкретных видов функций. Все они обладали свойством разлагаться в степенные ряды, сходящиеся для известных значений переменного.

О. Коши в молодости.

Значение постановки и решения этой проблемы Коши трудно переоценить. Желая подчеркнуть важность нового открытия Коши, его сравнивают иногда с доказательством Гаусса основной теоремы алгебры. В этом смысле высказывался Л. Фукс в своей речи 3 августа 1900 г. «Как Гаусс дал в первый раз строгое основание теоремы о том, что каждое алгебраическое уравнение обладает корнем, то так же Коши создал для дифференциальных уравнений надежную основу доказательством, что дифференциальным уравнением всегда дается решение, которое удовлетворяет определенным наперед заданным условиям» [153.17, 424].

Нам кажется такой подход не совсем точным. Вопрос о существовании и числе корней алгебраического уравнения был поставлен раньше. Гаусс дал строгое и блестящее его решение в четырех известных доказательствах. В теории же дифференциальных уравнений, являющихся по своему характеру более сложной математической структурой, чем алгебраические, вопрос о существовании решений и их единственности при определенных условиях был поставлен в общем виде и разрешен несколькими способами Коши. Но дело не только в этом. Подход Коши к решению данной проблемы содержал настолько важные и плодотворные идеи, что на основе их позже развилась новая ветвь анализа — аналитическая теория дифференциальных уравнений, а также под влиянием последней качественная теория. Наконец, весьма важно и то, что методы Коши оказались весьма эффективными с практической точки зрения, давая возможность получать приближенные решения дифференциальных уравнений с учетом допущенных погрешностей. Поэтому его идеи способствовали дальнейшему мощному развитию прикладного анализа, облегчали применение математических методов к потребностям других наук и практики. Что же привело Коши к новой проблеме?

До Коши вопрос о существовании решений определенного вида для уравнений в полных дифференциалах ставился еще Эйлером и был тесно связан с вопросом о существовании соответствующих интегрирующих множителей. Что же касается Коши, то следует отметить, что создание им так называемого первого метода было обусловлено и тесно связано с его работой по перестройке основ анализа в целом. В процессе этого он не только излагал известные результаты на новой основе теории преде-

лов, но многие методы, чувствуя в них пробел, создавал и сам, например достаточный признак сходимости рядов, вывод формулы остаточного члена степенного ряда и т. п. Коши был хорошо знаком с достижениями предшественников, он глубоко изучил работы Даламбера, Эйлера и своих почти непосредственных учителей — Лагранжа и Лапласа. Продумывая курс теории дифференциальных уравнений для слушателей политехнической школы в свете новых принципиальных установок, он был поставлен перед необходимостью создания нового метода, а критически осмысливая работы основоположников анализа, он, очевидно, нашел исходную идею для своего первого метода в результате изучения метода ломаных Эйлера.

Предлагая в первом томе «Интегрального исчисления» общий метод для отыскания приближенных решений данных дифференциальных уравнений при определенных начальных условиях, Эйлер в известной степени был предшественником Коши в его постановке задачи отыскания интегралов уравнений.

Недостатки этого метода Эйлера отмечены уже в трактате Лакруа по дифференциальному и интегральному исчислению, но и сам Эйлер, очевидно, понимал несовершенство данного процесса и предложил его улучшенный вариант [141.2, 381]. Здесь он получает решение уравнения $y'=v$ в каждом частичном интервале с помощью бесконечных рядов (а не полагая в нем $v=\text{const}$) и рассматривает вопрос о погрешностях.

Во втором томе [141.2, гл. XII] найденный метод распространяется на уравнения второго порядка. Хотя Эйлер и не пытался исследовать сходимость своего процесса и не вел речи о существовании решений вообще, поставленный им вопрос имел важное принципиальное значение. Именно его развитие привело Коши к доказательству существования (и единственности) решения уравнения $y'=f(x, y)$ при определенных условиях. К постановке этого вопроса вела также ограниченность видов и типов уравнений, приводящихся к квадратурам, геометрическая трактовка решений, развитие теории особых решений, решение подобной проблемы в области алгебраических уравнений, имевшееся уже доказательство существования определенного интеграла, данное самим Коши, а также ряд общих идей развития анализа, связанных с его арифметизацией и др.

Интересен вопрос, когда же впервые был изложен метод Коши? И когда состоялась его первая публикация? Многие авторы, упоминающие о нем, приводят различные даты от 1820 до 1844 г. Сам Коши пишет, что он изложил этот метод в своих литографированных лекциях по интегральному исчислению в Парижской политехнической школе. Курс этот он читал в период 1820—1830 гг. Следовательно, возможно, что теорему существования интегралов уравнений он нашел уже к 1820 г., как это утверждает Белл [97, 400]. Но изложить ее он мог не ранее 1821 г., ибо этот материал проходили на втором году обучения.

Как известно, «Курс алгебраического анализа» Коши издал впервые в 1821 г. Затем следовал первый том Курса анализа бесконечно малых в 1823 г. Обозначение на титульном листе «том I» свидетельствовало о намерении автора издать и том II. Об этом он говорит в предисловии к первому тому и отмечает: «Методы, которым я следовал, отличны во многих отношениях от тех, которые излагаются в сочинениях того же жанра. Моя главная цель состоит в сочетании строгости, которая была для меня законом в моем курсе анализа [1], с простотой, которая следует из прямого рассмотрения бесконечно малых количеств» [122.2, 9—10]. Однако второй том курса анализа бесконечно малых Коши не был опубликован и мог сохраниться лишь в литографированном виде. Автор упоминает о нем в мемуаре [122.8, 318] под названием «Лекции второго года для королевской политехнической школы» [2]. К сожалению, этот курс отсутствует в европейских публичных библиотеках. Но в предисловии к первому тому автор уже писал: ... «В интегральном исчислении мне кажется необходимо доказать в общем существование интегралов или примитивных функций перед тем, как делать известными их различные свойства. Чтобы достичь этого, надлежит сначала установить понятие интегралов, взятых между данными пределами, или определенных интегралов» [122.2, 10].

Отсюда можно заключить, что аналогичный методический подход автор осуществлял и во втором томе. Поэтому имеют, на наш взгляд, некоторые основания Шлезингер [254.1, 4], Пиаджио [55] и другие, указывающие как первую дату публикации 1823 г. Отметим также, что упоминание о создании первого метода встречалось уже в предисловии к первому тому «Упражнений в математике», изданных в 1826 г. Коши здесь писал, что среди других он дал «метод, с помощью которого можно интегрировать аппроксимативно дифференциальные уравнения любой формы, определяя пределы допущенных ошибок» [122.4, 1]. Таким образом, этим методом он владел уже заведомо к 1826 г. Схема его была опубликована в так называемом мемуаре 1835 г. Некоторые авторы как первую дату публикации приводят именно эту (Белл [97, 604], Вальсон [269, т. 2, 105], Пенлеве [228.21], Айнс [180] и др.). Однако в результате исследований чешского ученого К. Рыхлика [252] и позже автора данной книги установлена сомнительность публикации мемуара Коши «О дифференциальных уравнениях» в 1835 г. (17). Впервые он был опубликован лишь в 1840 г. в первом томе «Упражнений по анализу и математической физике». Ошибка в литературе допущена по вине самого Коши, который утверждал в примечании к указанному мемуару об его издании в Праге в 1835 г., не имея на это достаточных оснований.

---

[1] Имеется в виду курс алгебраического анализа, 1821 г.

[2] В оригинале Leçons de seconde année pour l'Ecole royale Polytechnique.

§ 2. Первый метод Коши

Резюме этого метода было изложено в § 1 рукописи Пражского мемуара 1835 г. Автор доказывает здесь существование функции $y=\pi(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.1}$$

и принимающей значение $y=y_0$ при $x=x_0$. При этом имеется в виду конечность и непрерывность функций $f(x, y)$ и $\frac{df(x, y)}{dy}$ по обоим аргументам в интервале (x_0, x_0+a) (условия α). Для получения новых значений функции в точках, следующих за x_0, автор пользуется формулой

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x, \tag{1.2}$$

имея в виду, что значению аргумента $x+\Delta x$ соответствует значение функции $y+\Delta y$.

Далее трактуется вопрос об оценке погрешности для некоторого y_i, если брать Δx меньше заданного числа δ, и указывается, что предельная функция $y=\pi(x)$ является непрерывной не только по x, но также и по y_0, и при произвольном y_0 дает, таким образом, общий интеграл уравнения (1.1). В заключение § 1 Коши отмечает: «Метод, который я хотел напомнить, находится строго изложенным и воспроизведен более подробно и с числовыми примерами в лекциях, уже названных [1]. Я доказал в тех самых лекциях, как можно распространить этот метод на интегрирование совместных дифференциальных уравнений первого порядка, каково бы ни было число переменных, и как можно получить не только общие и частные интегралы этих уравнений, но еще и их особые интегралы. Известно также, что интегрирование дифференциальных уравнений некоторого порядка может быть всегда приведено к интегрированию совместных дифференциальных уравнений первого порядка» [122.8, 331].

Об этом методе Коши шла речь в 1837 г. в статье Кориолиса [127], уделившего особое внимание рассмотрению пределов ошибок, допускаемых при вычислении величин y. Он предложил здесь несколько иной подход для решения указанного вопроса. В частности, он показывает, что если априори предположить существование y, то известный предел ошибки можно свести к его половине, а также, что для вычислений значений y по Δy можно составить разностные уравнения в другой форме.

Более полно первый метод Коши был изложен во втором томе «Лекций» аббата Муаньо, выпущенных в 1844 г. [219]. Автор известного курса по истории математики Г. Вилейтнер утверж-

[1] Имеются в виду упоминаемые нами выше литографированные лекции в политехнической школе, т. II.

дает, что «Коши впервые поставил теорию дифференциальных уравнений на незыблемую основу, предложив на своих лекциях в Парижской политехнической школе между 1820 и 1830 три метода, устанавливающих существование решений (опубликовано Ф. Муаньо в «Лекциях...»)». [13, 418]. Как видно уже из вышеизложенного, вторая часть фразы неточна. В лекциях для политехнической школы Коши, как сам он об этом сказал, дал только один способ, о котором сейчас идет речь. Лекции же Муаньо по своему содержанию далеко не идентичны, что прямо следует из их подзаголовка, прежним лекциям Коши.

Изложению первого метода Коши посвящены лекции 26—27. Здесь для уравнения (1.1) рассматривается интервал x_0X. Он делится на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Соответственно вычисляются $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$ из системы

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad (1.3)$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Установив непрерывность величины Y по y_0 и рассмотрев зависимость Y от x_0, X, y_0, автор проводит затем разбивку элементов $x_i - x_{i-1}$ и так далее [1] и показывает, что (предел — *В. Д.*) Y не зависит от способа разбивки интервала x_0, X и при неограниченном возрастании числа n и уменьшении каждой из разностей $x_k - x_{k-1}$ будет сходиться к некоторому конечному и определенному пределу, зависящему единственно от формы функции $f(x, y)$, экстремальных значений ее модуля в x_0, X и количества y_0 [219, 395].

Далее он легко доказывает, что эта предельная функция $F(x)$ удовлетворяет уравнение (1.1) и при условиях (α) для $x = x_0$ принимает значение y_0.

В уроке 27 Муаньо уделяет внимание вопросу оценки, интервалу существования и построению общего интеграла уравнения вида (1.1). Если для $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, $\max |f(x, y)| = A$ соблюдаются условия (α), то следует, что общий интеграл $Y = F(x, C)$ существует [2] в интервале $|x - x_0| < l$, где l — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{A}$. Оценка интеграла легко получается из формулы

$$Y = y_0 \pm \Theta A (X - x_0), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Здесь же идет речь о продолжении интеграла к естественной границе области его существования, т. е. до такой точки $x = \bar{x}$, в которой нарушаются условия (α) или $F(x)$ обращается в бесконечность.

---

[1] См.: об этом в [6, 9—12].

[2] Величина произвольной постоянной C предполагается ограниченной в зависимости от интервала существования интеграла.

В следующих уроках обобщаются полученные результаты на уравнения любого порядка от двух переменных, на системы совместных уравнений первого порядка с $n+1$ дифференциалами или с n производными, а также определяются пределы ошибок при применении изложенного метода в случае численного интегрирования (при конечном числе интервалов) уравнений первого порядка. Последние формулы имеют, впрочем, весьма громоздкий вид и практически мало удобны.

Таким образом, этот первый метод Коши состоял в естественном рассмотрении дифференциальных уравнений как предела уравнений в конечных разностях и довольно просто вписывался в его систему дифференциального и интегрального исчисления. Он давал возможность получить разложение интеграла в ряды, сходящиеся при всех значениях переменных, для которых интегралы так же, как и дифференциальные коэффициенты [1], оставались непрерывными. В этом смысле, как отметил Пикар [235.22, 41], «этот метод превосходит все другие методы».

В доказательстве основной теоремы теории дифференциальных уравнений данным методом мы встречаемся впервые с четко поставленной идеей об определении свойства интеграла по характеру самого дифференциального уравнения, чем и было положено основание новому, весьма плодотворному направлению в теории дифференциальных уравнений, которое получило особое развитие через несколько десятилетий после вышеупомянутых работ Коши.

§ 3. Метод последовательных приближений

К началу 30-х годов XIX века Коши стал применять метод последовательных приближений для решения дифференциальных уравнений.

Значительно раньше основная идея этого метода использовалась Ньютоном, потом Фурье при решении уравнений. О его применении шла речь также у Лапласа [200] и Бриссона [113]. Этот метод использовал и Гаусс при определении орбит планет по трем наблюдениям. В средневековой японской математике (1673 г.), как свидетельствует Фуивара [155], подобная идея применялась при решении некоторых кубических уравнений.

Сам Коши специальных публикаций по методу последовательных приближений не оставил, хотя часто использовал его в своих работах по теории дифференциальных уравнений и других. Этому методу уделен один из пунктов 39 лекции вышеупомянутого курса Муаньо. Любопытно отметить, что авторы в то время смотрели на этот метод не столько как на общий метод доказательства существования и единственности при данных условиях решения дифференциального уравнения, сколько как

[1] Этим термином обозначалась правая часть уравнения (1.1).

на один из приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. В этой лекции излагались как раз приближенные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи рядов. В первых двух методах использовались соответственно формула Тейлора и способ неопределенных коэффициентов. А выше названный метод рассматривался как третий на примере интегрирования уравнения вида

$$D_x^2 Y + X_1 D_x Y + X_2 Y = 0.$$

Подстановкой $Y = uz$, где $u = e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}$, оно сводилось к

$$D_x^2 z = Xz. \tag{1.4}$$

При этом даются начальные условия при $x = x_0$, $z = z_0$, $z'_x = z'_0$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} - z'_0 = \int_{x_0}^{x} Xz dx, \quad z = z_0 + z'_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xz dx$$

или

$$z = t + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xz dx.$$

Далее в правой части равенства под знаком интеграла z заменяем его значением и опускаем в записи пределы интегралов. Получаем

$$z = t + \int dx \int X \left(t + \int dx \int Xz dx\right) dx$$

и т. д. Затем доказывается, что n-й член убывает с увеличением n и что полученный ряд для определения z при этом же условии сходится к некоторому пределу, которого он не может превзойти и от которого отличается как угодно мало. Для оценки предполагают, что $X < \xi$, $z < \zeta$, $t < \tau$, тогда $\int X t dx < \xi\tau (x - x_0)$ и следует

$$z < \tau + \tau\xi \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \tau\xi^2 \frac{(x - x_0)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \zeta\xi^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdots 2n}.$$

Условий непрерывности, при которых применим метод, Муаньо здесь не указывает, считая их, возможно, само собой разумеющимися.

Несколько ранее, чем Муаньо, в 1837 г., этот же метод был использован Лиувиллем (18) в работе [205.3] при отыскании решений уравнения вида

$$\frac{d\left(K \frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l) V = 0, \tag{1.5}$$

где функции от x: g, K, l — положительны; V—функция от x и параметра r (r — корень некоторого трансцендентного уравнения $\omega(r)=0$); кроме того, задаются граничные условия

$$\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ при } x = x_0 \text{ и } \frac{dV}{dx} - HV = 0 \text{ при } x = X, \quad (1.6)$$

где h, H — положительные константы, нули или бесконечности. Если $h = \infty$, получим $V = 0$ при $x = x_0$; если $H = \infty$, то имеем $V=0$ при $x = X$.

Как отметил Лиувилль, «Функция V представлялась полезной в теории теплоты и в множестве вопросов математической физики» (стр. 17). Таким образом, непосредственным импульсом для разработки нового, теоретически очень важного метода было, с одной стороны, решение конкретной физической задачи, а с другой — связь с проблемой исследования корней решений такого вида уравнений. В это же время подробным исследованием уравнения

$$L\frac{d^2v}{dx^2} + M\frac{dv}{dx} + Nv = 0, \quad (1.7)$$

где v — неизвестная, а L, M, N — данные функции от x, изменяющегося в известном интервале, занимался Штурм. К уравнениям такого вида приводили многие задачи математической физики (движение тепла, упругих жидкостей и др.), которые рассматривал Фурье и др. К этой работе Штурма привели и интересы алгебры. Он отмечал, что если даже известно решение такого уравнения в конечном виде, в форме ряда или интеграла, то трудно сразу определить его характеристические свойства. В зависимости же от того, насколько они известны, можно получить представление о различных явлениях динамики и физики. Ряд таких свойств неизвестной функции для заданного любого значения ее аргумента можно проще получить, исследуя данные дифференциальные уравнения. Это был совершенно новый подход качественного исследования интегралов дифференциальных уравнений, полезный также при вычислении корней ряда трансцендентных уравнений математической физики, когда были известны отдельные свойства, которыми обладали эти корни. Так Штурм пришел к весьма интересным и полезным заключениям, развитие которых вылилось потом в отдельную ветвь анализа, тесно связанную с изучением вибрации упругих стержней и пластин и с другими прикладными вопросами.

Уравнение (1.7) приводилось к виду

$$\frac{d\left(K\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + Gy = 0, \quad (1.8)$$

где K и G — функции от x и параметра λ, ограниченные в данном интервале, и $K \neq 0$. Общий интеграл этого уравнения должен

Иозеф Луивилль (1809—1882).

был содержать две произвольных постоянных, за которые можно взять y и $\frac{dy}{dx}$, соответствующие частному значению x, т. е. решение следует выбирать так, чтобы y и $\frac{dy}{dx}$ в данной точке a были бы равны некоторой произвольно заданной функции от λ. Особое внимание Штурм уделил вопросам вариации корней y и соотношения $\frac{K\frac{dy}{dx}}{y}$ в зависимости от λ, если x рассматривать как постоянное. Если данное уравнение сравнить с таким, у которого K и $\mathbf{G}$ — постоянные, и которое, следовательно, могло быть решено в элементарных функциях, то получались особенно простые выводы, опираясь на которые, Штурм пришел к звестной (по термину Клейна, развивавшего эти идеи далее) еореме осциляции (колебаний), или перемежаемости корней ешений таких уравнений (19). Вскоре после этого появился еще яд работ Штурма и Лиувилля, так или иначе связанных с данной проблемой.

Вышеуказанная работа Лиувилля находилась в тесной связи исследованиями Штурма, хотя в данном случае Лиувилль рассматривал несколько иную краевую задачу: случай, когда K не ависело от λ, а $\mathbf{G}$ имело вид $\lambda g - l$. В результате дальнейших сследований ему удалось доказать иным путем теорему колеаний и притом для уравнений любого порядка, но в процессе того был утвержден новый метод доказательства существования интеграла дифференциального уравнения.

Лиувилль искал решение уравнения (1.5) в форме ряда

$$V = p_0 + p_1 + \ldots + p_n + \ldots, \tag{1.9}$$

ле величины p определялись так: при $K_0 = K(x_0)$ имеем

$$\begin{cases} p_0 = A\left(1 + hK_0 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{K}\right); \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{i+1} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{K} \int\limits_{x_0}^{x} (l - gr)\, p_i dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

К такому же разложению можно подойти и обычным путем, получив

$$V = p_0 + p_1 + \ldots + p_n + R_n,$$

где $R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{K} \int_{x_0}^{x} (l - gr)\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{K} \int_{x_0}^{x} (l - gr)\, V dx.$

Оценка R_n так же, как и установление сходимости ряда (1.9), очевидна.

Через год Лиувилль применяет этот же метод для отыскания интеграла уравнения

$$\frac{dKdL \ldots dMdNdU}{dx^{\mu}} + rU = 0, \qquad (1.10)$$

где K, Z, ... M, N — положительные и непрерывные функции от x и r — параметр, независимый от этой переменной; U — функция от x и r. Кроме того, даются начальные условия, которые мы не будем выписывать (20). Он придавал большое значение общности применяемого метода, замечая: «... Итак, я прибегну к другим принципам, обладающим двойной выгодой высокой простоты и очень большой общности» [205.4, 563]. При решении вопроса он берет сначала $\mu = 2$, т. е. строит решение для уравнения второго порядка по уже рассмотренному выше принципу, а затем обобщает его на случай уравнения (1.10). Этот же метод использовался и в 1840 г. в мемуаре [205.5]. Таким образом, первые публикации по применению метода последовательных приближений для интегрирования уравнений и использованию его для доказательства существования их решений принадлежат Лиувиллю.

В то же время (доложено в 1835 г., опубликовано в 1836 — 1838 гг.) усовершенствование этого метода и применение его к решению уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y^3$$

при начальных условиях $t = 0$, $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = 0$ предложено в [227] М. В. Остроградским.

Он рассматривал вопрос интегрирования уравнений данного типа при помощи разложения по малому параметру, входящему в них, имея целью найти способ избавления от так называемых вековых членов. Основная идея его заключалась в одновременном разложении периода (или частоты) и самого решения по параметру α[1]. Позже она получила широкое распространение (21).

---

[1] Подробно об этом см. в [28, 1. 65].

В свете вышеизложенного трудно согласиться с утверждением Пьера Сергеску о том, что «математика в целом обязана прежде всего Пикару конструкцией нового метода умозаключений, метода последовательных приближений. Этот важнейший динамический процесс рассуждений находится в оппозиции классическим методам, которые были в большей части статичны, прямые» [258, 49]. О введении этого метода только в 1890 г. утверждал и Пиаджио [55, 12]. Э. Пикар рассматривал свой вклад по данному вопросу как усовершенствование и развитие уже известного метода. Указав, что этот метод дает очень быстро сходящиеся ряды, он отметил также, что эти ряды не всегда сходятся во всей области, где интегралы уравнений непрерывны.

§ 4. Метод пределов Коши

Большое значение для развития ряда отделов анализа имел второй метод Коши доказательства существования и единственности решений дифференциальных уравнений — метод мажорантных функций.

Идея этого метода излагается Коши в ряде его работ по так называемому «исчислению пределов» и теснейшим образом примыкает к теории рядов. Впервые о нем автор доложил Туринской академии 11 октября 1831 г. В этом же году вышел известный мемуар Коши по небесной механике, которым и была открыта серия последующих работ в этом направлении. Интересно отметить, что толчком к созданию «исчисления пределов», с одной стороны, послужила необходимость улучшения техники вычислений, о чем мы ранее упоминали, и с другой — разработка нового метода, состоящего в приведении интегрирования системы дифференциальных уравнений к интегрированию одного так называемого характеристического уравнения в частных производных первого порядка. Идея этого сведения, как отметил Коши [122.8, 33], была подсказана ему исследованиями Гамильтона дифференциальных уравнений динамики. Интегрирование характеристических уравнений велось Коши при помощи рядов и необходимо было рассмотреть правила сходимости этих рядов, оценки остатков рядов и т. д.

Хотя термин Коши «исчисление пределов» оказался малоудобным (смысл его будет ясен из дальнейшего) и поэтому практически в научной литературе не привился, идея его оказалась весьма плодотворной. Она созрела в результате углубленных исследований Коши по теории сходимости рядов. Сперва автор имел целью лишь усовершенствовать эту теорию и установить критерии оценок погрешностей. Об этом он писал в примечании к резюме мемуара о небесной механике [122.13, 41]. «Новое исчисление, которое я назвал исчислением пределов, представляет не только собрание отдельных правил относительно

сходимости рядов, которые дают разложения явных или неявных функций от одной или нескольких переменных, но еще закрепление верхних пределов совершаемых ошибок, когда останавливаются во всяком ряде после члена определенного номера». Коши отмечает два основных недостатка в применявшемся до того методе неопределенных коэффициентов для разложения явных и неявных функций: «1) не было уверенности в том, сходятся ли полученные ряды или нет и, следовательно, нельзя говорить, в каком случае формулы допустимы или должны быть отброшены; 2) не имелось общего доказательства, что полученные разложения... были бы эквивалентны той же функции, то есть имели суммами разлагаемые функции» [там же, стр. 43]. Подходя к ликвидации этого пробела, Коши рассматривает в первой части работы [122.13] условия непрерывности функции, разлагаемой в ряд Маклорена, и намечает оценку остатка ряда как для функции одной, так и для функций нескольких переменных. Он формулирует здесь три теоремы: первую — о разложении в ряд неявной функции одного аргумента, вторую — то же для нескольких неявных функций нескольких переменных. По существу это первые доказательства теорем существования неявных функций.

Коши очень быстро понял применимость развиваемых им методов для решения вопроса о существовании интегралов дифференциальных уравнений и уже здесь, пока без должного развития, сформулировал и третью теорему, которая затем была положена в основу аналитической теории дифференциальных уравнений. Именно здесь Коши говорит о представлении общих интегралов системы дифференциальных уравнений с несколькими функциями и их производными различных порядков, зависимых от одного аргумента, степенными рядами и формулирует условие их сходимости в общем виде.

Более подробной разработкой этого вопроса он занялся лишь через несколько лет, а через год, в 1832 г., обнародовал в Турине мемуар, содержащий основные идеи так называемого «исчисления пределов» [1]. Рассматривая аргумент x в комплексной области и полагая $f(x)$ непрерывной и конечной, он получает здесь известную формулу

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x_0 f(x_0)}{x_0 - x}\, dp,$$

где $x_0 = Xe^{p\sqrt{-1}}$, а $|x| < X$. Широко пользуясь соотношением

$$\frac{x_0}{x_0 - x} = 1 + \frac{x}{x_0} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots$$

[1] Его содержание соответствует второй части работы [122, 13].

и установленной им формулой

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{x_0^n}f(x_0)\,dp = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0), \tag{1.11}$$

а также символом $\wedge$, означающим максимум модуля данной величины, при изменении ее в рассматриваемой области, он получает оценку остатка r_n ряда

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots \tag{1.12}$$

так: пусть $|x| < \xi$, $\max|f(x_0)| = \wedge f(x_0)$. Тогда, исходя из формулы (1.11) для оценки общего члена ряда (1.12), имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{x_0^n}f(x_0)\,dp\right| \leqslant \frac{\xi^n}{X^n}\wedge f(x_0). \tag{1.13}$$

Выражение в правой части неравенства (1.13) можно рассматривать как общий член разложения функции $\frac{X}{X-\xi}\wedge f(x_0)$ по степеням $\frac{\xi}{X}$. Если остановиться на первых n членах ряда (1.12), то остаток его r_n не превзойдет остатка этой геометрической прогрессии, т. е.

$$r_n \leqslant \frac{\xi^n \wedge f(x_0)}{X^{n-1}(X-\xi)}.$$

Собственно в этих положениях и заложена руководящая идея Коши, получившая затем широкое развитие и многочисленные применения как в его собственных работах, так и в работах других ученых. В основе ее лежит сравнение данного ряда со специально построенной геометрической прогрессией. Этим самым давалась мажоранта разложения, что было весьма важно для всех применений степенных рядов. Можно усмотреть прямую связь этой идеи с той, которая использована в его степенном признаке сходимости рядов, где условие сходимости некоторого числового ряда сводится к условию сходимости геометрической прогрессии. В этом же мемуаре Коши формулирует теорему 1: «Функция $f(x)$ разлагается по формуле Маклорена в сходящийся ряд, упорядоченный по возрастающим степеням x, если модуль переменной x, действительной или мнимой, сохраняет величину меньше той, для которой функция (или ее производная первого порядка) перестанет быть конечной и непрерывной» [122. 13, 54]. Теорема 2 трактует тот же вопрос для функции многих переменных. Современному читателю легко заметить некорректность этих формулировок. Однако сам Коши со временем их понял и исправил, овладев позже понятием равномерной сходимости. Но в начальный период деятельности такие формулиров-

ки были у него естественны. Как в этой, так и в других работах Коши полагал, что непрерывная функция необходимо обладает и непрерывной производной и опирался на это положение, специально его не оговаривая, но показывая на примерах [122.18 36]. Он был убежден, что производная может стать разрывной лишь в тех точках, где нарушается непрерывность функции. Это обусловливалось тем, что, говоря о функциях, он имел в виду их аналитические выражения от комплексного переменного, для которых существование производной следовало из правил дифференцирования. При этом в понятии о непрерывной функции он подчеркивал ее ограниченность и однозначность [122.5]. Как отметил Коши [122.18, 41], условие непрерывности производной он в 1831 г. не вводил, а включил его, и то, как мы видим, условно, при перепечатке мемуара в 1841 г.

Так как надо было практически часто вычислять верхние границы (а иногда и нижние) различных функций, Коши разработал своеобразный аппарат, благодаря которому, очевидно, и появился термин «исчисление пределов».

Например $\wedge(a+x_0)=\wedge(a-x_0)=a+X$; $\wedge(ax_0)=aX$; $\wedge(u_0\pm\pm v_0\pm w_0+\ldots)\leqslant\wedge u_0+\wedge v_0+\wedge w_0+\ldots$ и т. д. Аналогично $\wedge'(a-x_0)=\wedge'(a-x_0)=a-X$, $X<a$; $\wedge'(a+x_0)=\wedge'(a-x_0)=$ $=X-a$, $X>a$; $\wedge'(ax_0)=aX$ и т. д., где $\wedge'$ — минимум модуля выражения. Эти понятия и сейчас имеют место в теории пределов. Первая публикация резюме мемуара о небесной механике и исчислению пределов, как сообщил Виванти [139, т. II, Fasc. 1, 17], была осуществлена на итальянском языке в Милане в 1834 г.

Широкое применение выше изложенных идей к теории дифференциальных уравнений было впервые осуществлено во второй и третьей части мемуара [122.8].

Во второй его части рассматривалось интегрирование системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dt}{T}$$

или

$$dx_i=\frac{X_i}{T}\,dt,\ i=1,2,\ldots,n, \tag{1.14}$$

где X_i, T — известные функции; x_i — искомые.

В третьей части, опираясь на мажорантный метод, разрабатываются формулы для оценок рядов, выражающих интегралы рассмотренных дифференциальных уравнений и других. Здесь же формулируются и доказываются общие теоремы о выражении интегралов дифференциальных уравнений степенными рядами.

При этом сначала рассматривается уравнение $dx=\pi(x_i)\,dt$, затем решается аналогичный комплекс вопросов для уравнений

вида $dx=\pi(x, t)dt$. Полученные результаты обобщаются на систему любых дифференциальных уравнений от аргумента t и неизвестных функций $x, y, z, \ldots$ и применяются к системе (1.14). В процессе этого выполнена большая вычислительная работа и масса выкладок. В названных двух мемуарах приведено свыше 400 формул. Здесь автор рассматривал довольно широкий круг вопросов, в том числе связь исчисления пределов с теорией вычетов и т. д. Однако конкретных соотношений и связей радиусов области сходимости интеграла и области сходимости дифференциальных коэффициентов в известной простой форме здесь мы еще не находим.

В конце мемуара Коши сообщал, что он собирается применить только что изложенный метод «к интегрированию дифференциальных уравнений, которые выражают одновременные движения небесных тел, составляющих нашу планетную систему» [122.8, 384].

Первая попытка методической обработки «исчисления пределов» и применения его к отысканию интегралов дифференциальных уравнений выполнена во втором томе курса Муаньо, в лекциях 40, 41.

§ 5. Эволюция идей Коши

В ряде последующих работ Коши уточняет формулировки данных уже теорем по этой тематике, упрощает пути их доказательства, обобщает ранее полученные результаты. Развитию применений метода пределов к интегрированию дифференциальных уравнений он посвящает десятки работ, печатаемых главным образом в докладах Парижской академии наук. В них есть много повторений, редакционных недоработок и неточностей — результат поспешной сдачи статей в печать. Даже в одной статье одна и та же теорема формулируется иногда по-разному. Так, в заметке об интегрировании дифференциальных уравнений движения планет [122.7] при формулировке основной теоремы о представлении функции рядом как одно из условий один раз указывается непрерывность функции или ее производной (стр. 29), а другой раз (через две страницы) — непрерывность функции и ее производной.

Неверность теоремы Коши о непрерывности функции, представленной сходящимся рядом непрерывных функций, отметил Абель еще в 1827 г. Значительно позже, в начале 40-х годов, замечания такого же рода делали Лиувилль и Ламарль [122.18, 41; 122.17, 1339], и Коши принял это к сведению. Относительно разложения функций в ряды в 1844 г. он уже писал: «Во всяком случае, когда речь идет о разложении функций в ряды, рассмотрение производных функций, мне кажется, не должно быть в целом отброшено» [122.17, 1339].

В последующих работах функция, разлагаемая в ряд, пред-

полагалась конечной и непрерывной вместе со своей производной в окрестности некоторой точки. В целом публикации Коши после 1846 г. обработаны несколько лучше, хотя и тогда он еще мало заботился о придании своим мыслям и статьям совершенной формы, будучи всецело поглощен свежими идеями, открытием новых путей и методов. Так и рассматриваемая теория в работах Коши 1837—1857 гг. получила существенное развитие. Применение метода к разложению неявных функций в новой методической разработке дано в 1837 г., для разложений в степенной ряд по малому параметру, содержащемуся в алгебраическом или трансцендентном уравнении,— в 1840 г. Элементарное (по выражению автора) доказательство правила сходимости рядов, представляющих интегралы системы дифференциальных уравнений, и дополнение предыдущих результатов предложено в мемуарах [122.9.—10.] (1840 г.).

Применение метода к представлению общих интегралов одного уравнения или системы уравнений в частных производных было начато уже в конце 1840 г. В то же время трактовалось и разложение интегралов дифференциальных уравнений по малому параметру [122.11.— 12].

В июне 1842 г. Коши доложил Парижской академии наук мемуар «О фундаментальной теореме интегрального исчисления» [270.15]. Здесь автор впервые ставит вопрос о существовании интегралов уравнений в наиболее общей форме, в том числе и для уравнений с частными производными, говорит о теореме, выражающей радиус сходимости ряда, представляющего функцию, и об определении предела ошибки, которая совершается при остановке каждого разложения после некоторого числа членов. Доказательство этой теоремы основано на принципах «исчисления пределов».

Предполагая функцию $u=f(x, y, z, \ldots, t)$ непрерывной и обозначив $\tau=\wedge f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots, t+\Delta t)$ при любых изменениях аргументов величин $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta t$ при неизменных их модулях, Коши получает $\operatorname{mod} f(x, y, z, \ldots, t)<\tau$ и записывает фундаментальное неравенство

$$\operatorname{mod} D_x^l D_y^m \ldots D_t^n f(x, y, z, \ldots, t) \leqslant N \frac{\tau}{|\Delta x|^l |\Delta y|^m \ldots |\Delta t|^n}, \qquad (1.15)$$

где

$$N=(1\cdot 2\ldots l)(1\cdot 2\ldots m)\ldots(1\cdot 2\ldots n).$$

Автор формулирует здесь, впрочем, довольно громоздко, основную теорему метода мажорантных функций и отмечает, что «изложенные принципы применяются к интегрированию уравнений при помощи рядов и для доказательства существования их общих интегралов в любом случае» [122.15, 467].

Вскоре после этого появилось еще несколько почти следующих друг за другом мемуаров Коши, где развивались примене-

ния исчисления пределов к доказательству существования интегралов уравнений с частными производными и систем таких уравнений, а также к разложениям их интегралов по степеням малого параметра, который содержало данное уравнение или их система. Хотя Коши и формулировал теоремы в общем случае, он все же рассматривал, как правило, линейные системы; нелинейную систему он приводил к линейной. Переменные брались из комплексной области.

Следующий этап исследований Коши в данном направлении связан с его новыми результатами в области общей теории функций комплексного переменного, когда он в отличие от предыдущего периода стал уделять гораздо больше внимания геометрической трактовке рассматриваемых вопросов. Он подходит при этом к исследованию интегралов в области изолированных особых точек, исследует природу различного вида контурных интегралов [122.22], трактует о разрывных функциях [122.23] и т. д. Весьма важно было уточнение понятия непрерывной функции, а также введение понятий монодромной, моногенной, а несколько позже и синектической функции. Под монодромной он понимал функцию, непрерывную в некоторой точке и ее окрестности и однозначную; функция называлась моногенной, если она обладала монодромной производной [1]. Понятие моногенной функции оказалось весьма плодотворным (22). После этого, в последние полтора года жизни ученого, появляется новая серия мемуаров, где известные теоремы из рассмотренных нами работ формулируются в новых терминах, даются более краткие и ясные их доказательства, учитываются результаты учеников и коллег, а также высказывается ряд новых идей. Здесь, на основе новых понятий, рассмотрены условия сходимости рядов, представляющих общие интегралы системы дифференциальных уравнений [122.25—26], природа интегралов системы дифференциальных уравнений первого порядка [122.27], вопрос о синектических интегралах дифференциальных уравнений [122.28], о монодромных и моногенных интегралах системы дифференциальных уравнений [122.29] и др. В последних работах уже весьма явно наличны элементы исследования интегралов по определяющим их дифференциальным уравнениям. Таким образом, для рождения новой теории существенную роль сыграли работы Коши. Он при весьма общих предположениях относительно вида рассматриваемых дифференциальных уравнений доказал, что их решениями будут функции аналитические.

§ 6. Метод мажорантных функций Вейерштрасса

К идее мажорирования функций, а также к представлению функций дифференциальными уравнениями, по мотивам чисто

[1] Понятие синектической функции эквивалентно функции конечной, монодромной и моногенной.

теоретического характера и независимо от Коши, но несколько позже во времени, пришел молодой немецкий математик К. Вейерштрасс (23). Рассматривая вопрос об определении функций некоторого вида дифференциальными уравнениями и получив ряд формул, совпадающих с формулами Коши, он не понял, по-видимому, тогда большой принципиальной значимости этого метода и не развил его дальше. Интересно и то, что к своей основной теореме по этому вопросу Вейерштрасс подошел, опираясь, как и Коши, на предшествующую свою работу по теории рядов. Но его статьи по этой тематике были опубликованы значительно позже и не оказали на развитие науки такого мощного влияния, как работы Коши. Однако сам факт зарождения сходных математических идей примерно в одинаковой исторической обстановке у разных мыслителей, весьма отличных по опыту, по манере творчества, довольно интересен и лишний раз подтверждает объективную закономерность развития математики.

Карл Вейерштрасс (1815—1897).

В работе [275.2], датированной 1841 г., Вейерштрасс рассматривает степенной ряд[1] с данными коэффициентами $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n x^n$, где x — комплексная переменная. Пусть $|F(x)| \leqslant g$ и r — положительная величина, меньше радиуса сходимости ряда. Тогда для $|x| \leqslant r$ справедливо неравенство $|A_k| \leqslant gr^{-k}$. Оно обобщается на случай функции нескольких переменных: пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(n)} A_{n_1, n_2, \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ при $n_1, n_2, \ldots, n_k = -\infty, +\infty$. Когда $F \leqslant g$ и $|x_i| \leqslant r_i$, $i = 1, \ldots, k$, то

$$|A_{i_1, i_2, \ldots i_k}| \leqslant g r_1^{-i_1} r_2^{-i_2} \ldots r_k^{-i_k} \qquad (1.16)$$

и на случай бесконечной системы функций $F_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ при условии, что не только каждый из представляющих их рядов, но и их сумма абсолютно и равномерно сходится. Эти результаты используются затем в статье [275.3], датированной 1842 г. Вейерштрасс рассматривает здесь инте-

[1] Запись символа ряда, распространенного и на отрицательные индексы, имеется и в другой статье [275. 1], датированной тем же 1841 г. Этот факт, видимо, не был известен Райфу, упоминающему в своей монографии по истории рядов [243, 181] в соответственном смысле лишь теорему Лорана, опубликованную в 1843 г.

грирование системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} - G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.17)$$

где $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — данные целые рациональные функции от неизвестных функций x_i от аргумента t. Начальные условия при $t=0$ должны быть $x_i = a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Решения ищутся в форме степенных рядов $x_i = B_i(t)$, (1.18), сходящихся для $|t| < r$. Коэффициенты их находятся после подстановки значений x_i из (1.18) в систему (1.17), так что

$$x_i = B_i(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{i\mu} t^{\mu}, \qquad (1.19)$$

где $a_{i0} = a_i$. Остается доказать, что ряды (1.19) обладают кругом сходимости, радиус которого отличен от нуля. В процессе этого доказательства, изложить которое здесь не представляется возможным, ряд (1.19) представляется в виде суммы $x_i = \bar{x}_i + \xi_i$, где ξ_i — остаток, и соответственно преобразуются выражения G_i. Для сходимости ряда вида (1.19) надо оценивать величины $G_\lambda^{\nu-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \nu! a_{\lambda,\nu}$, где $\lambda = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots \infty$.

Соответственно функциям $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Вейерштрасс строит n других $\widetilde{G}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, что каждый коэффициент в $\widetilde{G}_i$ положителен и не меньше, чем абсолютная величина соответственного коэффициента в G_i. Затем берутся положительные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, имеющие такие значения, что $\alpha_i \geqslant |a_i|$. Потом образуется $\widetilde{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из функций $\widetilde{G}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, как $\widetilde{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ образовалась из $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда $|G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)| \leqslant \widetilde{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Отсюда автор заключает: «Итак, когда ряд

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \widetilde{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tau^\nu \qquad (1.20)$$

сходится для определенных положительных величин τ, то это тем более верно в случае ряда

$$a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) t^\nu$$

для каждой величины t, абсолютное значение которой не больше τ» [275.3, 79]. После рассмотрения других вспомогательных вопросов находится условие, которому подчиняется τ для сходимости ряда (1.20).

В заключение Вейерштрасс пишет: «Этим доказано, что ряды $B_1(t), \ldots, B_n(t)$ всегда имеют общую область сходимости, радиус которой не равен нулю, и когда переменная t ограничена этой областью, представляют однозначные и непрерывные функции от t, которые, будучи взяты вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяют предложенным дифференциальным уравнениям и при $t=0$ принимают предписанные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$» [275.3, 80].

Из вышеприведенных положений в следующем пункте решается важный вопрос о границах погрешностей, если остановиться в каждом из рядов $B_i(t)$ на m первых членах. Исходя из предыдущего, оценивается величина $|\varphi_{\lambda,\nu} t^\nu| \leqslant R\left|\frac{t}{r}\right|^\nu$, где $\varphi_{\lambda,\nu}$ — значение коэффициента в любой точке области сходимости рядов $B_i(t)$; R — верхняя граница абсолютных величин функций $B_i(t)$, $|t|<r$; тогда абсолютная величина остатка будет меньше, чем

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} R\left|\frac{t}{r}\right|^\nu = \frac{R\left|\frac{t}{r}\right|^m}{1-\left|\frac{t}{r}\right|}. \qquad (1.21)$$

Увеличивая m, это выражение можно сделать меньше любой заданной величины [1]. При этом отмечается, что так как ряды $B_i(t)$ при рассмотренных условиях и соответствующих значениях аргумента сходятся не только абсолютно, но и равномерно, то они образуют систему однозначных аналитических функций этого аргумента t.

Таким образом, Вейерштрасс был также одним из идейных основоположников рассматриваемой теории.

Нетрудно заметить весьма четкую постановку вопроса, более современную терминологию и характерную ясность и строгость в изложении и доказательствах учителя гимназии из Мюнстера [2]. Отметим требование равномерной сходимости рядов [3], представляющих интегралы дифференциальных уравнений, а также то, что основную теорему Вейерштрасс вывел, опираясь на свойства рядов и не прибегая к интегральному исчислению, т. е. более прямым способом, чем Коши.

---

[1] Аналогичные оценки для многократного ряда имеются в работе Вейерштрасса [275.4, 199].

[2] См. об этом у Пенлеве [228.27, 18].

[3] В этом сказывалось, очевидно, влияние работ Абеля, опубликованных в первых номерах журнала Крелля. Уже в указанных работах Вейерштрасс подходил к принципу аналитического продолжения аналитических функций и к понятию о естественной границе области определения таких функций. Позже этот материал, соответственно дополненный, вошел в его знаменитые лекции.

Глава II. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ПЕРВОГО МЕТОДА КОШИ И МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К УРАВНЕНИЯМ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 1. Исследования Липшица и других ученых по первому методу Коши

Коши проводил свое доказательство существования интеграла уравнения (1.1), имея в виду непрерывность функции $f(x, y)$ вместе с ее частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ по x, y. Аналогичный метод в 1868 г. при несколько менее ограничительных условиях был предложен профессором из Бонна Р. Липшицем (24). О существовании первого метода Коши Липшиц, видимо, не знал, так как в своей первой публикации в Миланском журнале [207.1] и повторенной почти через десять лет в журнале Дарбу [207.2], говоря о теореме существования решений дифференциальных уравнений, он ссылался на Вейерштрасса и Брио и Буке, развивавших метод мажорантных функций. В их работах проблема решалась для аналитических функций комплексной переменной. Автор же ставил себе целью найти ее решение для дифференциальных уравнений, содержащих действительные элементы и когда не представлялось возможным немедленное решение вопроса обобщением на случай комплексной области. «Поэтому следует переместиться,— говорил он — на другую почву для установления условий возможности полного интегрирования» [207.2, 150]. При этом Липшиц утверждал, что ему не известно о какой-либо работе, имеющей точно такую же цель. Этот метод был изложен затем во втором томе учебника Липшица по анализу [207.3] в 1880 г., на который обычно и ссылаются в позднейшей литературе (Пикар [235.5], Валле-Пуссен [268.2, 75] и др.). Некоторые авторы (Белл [97, 411], Айнс [108, 104], Шлезингер [254.4, 264] и др.) появление этого метода связывают с 1876 г., т. е. со второй его публикацией.

Липшиц рассматривает систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x, y^1, y^2, \ldots, y^n), \tag{2.1}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; функции f^α однозначны, непрерывны и ограничены в области G, образованной множеством значений величин x,

$y^1, y^2, \ldots, y^n$. С другой стороны, для двух данных систем величин $x = h$, $y^\alpha = k^\alpha$ и $x = h$, $y^\alpha = l^\alpha$ они должны удовлетворять системе неравенств

$$|f^\alpha(h, k^1, k^2, \ldots, k^n) - f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n)| < c^{\alpha,1}|k^1 - l^1| + \\ + c^{\alpha,2}|k^2 - l^2| + \ldots + c^{\alpha,n}|k^n - l^n|, \qquad (2.2)$$

где $c^{\alpha,k}$ — положительные константы.

Система (2.1) будет, как говорит автор, вполне интегрируема, если определить систему функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих (2.1) и которые для $x = x_0$ принимают значения $y^\alpha = y_0^\alpha$. При этом система величин $x_0, y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n$ должна находится внутри G, на конечном расстоянии от ее границ.

Опираясь на вышеприведенные условия и рассматривая некоторую область H_0, содержащуюся целиком внутри G, автор доказывает существование единственной системы n функций $y_1, y^2, \ldots, y^n$, изменяющихся непрерывным образом внутри области H_0 (когда переменная x принадлежала интервалу $(x_0 - A_0, x_0 + A_0)$, $A_0 < a_0$), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (2.1) и для $x = x_0$ принимающих значения $y^\alpha = y^\alpha{}_0$ (207.2, 151].

В дальнейшем этот метод получил в литературе наименование метода Коши—Липшица. Его разработке и различным модификациям уделяли внимание многие ученые как в конце XIX, так и в начале XX века. Исследования были связаны с дальнейшим прогрессом анализа, новыми понятиями интеграла, развитием теории функций и теории множеств. Видоизмененное доказательство собственно метода Коши было предложено Цейтеном [281] в 1880 г., а через год В. Вольтерра [271.1] предложил доказательство метода Липшица, несколько расширив его условия. Его идея нашла графическую интерпретацию в более поздней работе Пиччиати.

Некоторое обобщение условий Липшица находим в заметке А. Розенблата [250.2], где для доказательства существования единственного интеграла уравнения (1.1) при начальных условиях $x = 0$, $y = y_0$ используется неравенство $|f(x, y^1) - f(x, y^2)| < \frac{k}{x^m}|y^1 - y^2|$, где $k > 0$, $0 < m < 1$, $x > 0$.

Далее проводилось уточнение интервала сходимости решений и их зависимости от начальных данных. Так, рассматривая в 1895 г. систему типа (2.1) при выполнении условий, аналогичных (2.2), и при непрерывности функций по каждой переменной в заданных интервалах, Николетти доказал непрерывность и конечность интегралов по их начальным данным. Полученные результаты он обобщил также для случая системы дифференциальных уравнений с частными производными. Несколько позже,

в 1899 г., аналогичная задача изучалась Эшерихом, но при более ограничительных условиях. Но еще раньше, при условиях менее ограничительных, чем у Николетти (без условий (2.2)), его основные результаты получены Пеано [232.4]. В это же время несколько работ посвятили данному вопросу Пенлеве [228. 13.—15.] и Пикар [235.19.—21.]. Незадолго перед тем Пенлеве (25) было доказано, что аналитическая функция действительного переменного в данном интервале может быть разложена в ряд полиномов, коэффициенты которых линейно зависят от значений функции и ее производных для $t=t_0$.

На заседании академии 5 июня 1899 г. Пикар (26) заявил, что интеграл x уравнения $x'_t = f(x, t)$, где f, f'_x, f''_{x^2} непрерывны по x и t в интервале $(t_0, t_0 + \alpha)$ и при $t = t_0$, $x = x_0$, может быть представлен рядом

$$p_1(x_0, t) + p_2(x_0, t) + \ldots + p_n(x_0, t) + \ldots,$$

сходящимся в интервале $(t_0, t_0 + \alpha)$ и равномерно сходящимся в интервале $(t_0, t_0 + \alpha^1)$, где $\alpha^1 < \alpha$. Полученный результат Пикар распространил и на систему

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где X_i — полиномы.

Он отметил также возможность распространения новых идей с небольшими изменениями и на комплексную область.

Через два дня — на заседании французского математического общества 7 июня — доклад с развитием этой темы сделал Пенлеве. Здесь он подчеркнул, что важным свойством метода Коши есть то, что он дает сходимость в любом интервале α, β, где решение регулярно, и что оно сходится равномерно в любом интервале внутри (α, β). Пенлеве сообщил при этом, что он исходил из указанного предположения при изучении движения материальной системы в наибольшем возможном интервале времени и с минимумом предположений относительно непрерывности [228.15, 151]. Он применил эту теорему к решению различных проблем динамики, а особенно к задаче трех тел.

Сравнивая интервалы сходимости интегралов по трем методам, Пенлеве пришел к выводу, что метод Коши—Липшица не только наиболее прост, но определяет решение в наибольшем интервале непрерывности, т. е. во всем интервале, где оно непрерывно и однозначно определено начальными условиями, что нельзя утверждать о методе последовательных приближений. Этому же вопросу с некоторыми уточнениями было посвящено выступление Пенлеве на заседании Академии 19 июня. Здесь он говорил более подробно о разложении решений в ряд полиномов в интервале их регулярности.

Важным шагом в развитии вопроса была работа Пеано [232.2], где доказывалось, что для системы вида (2.1) при усло-

вии непрерывности функций f_i можно выбрать такую окрестность начальной точки и в ней n функций y_i от x, которые удовлетворяют данным уравнениям и данным начальным условиям. Иначе говоря, здесь доказывается существование по крайней мере одной системы решений. С тех пор рассматриваемая проблема часто подразделялась на два вопроса — о существовании решений дифференциальных уравнений и об их единственности при данных начальных условиях. Доказательство Пеано было изложено при помощи символических формул логики, которые он использовал и раньше в других работах. Несколько раньше, в 1886 г., в заметке [232.1] Пеано опубликовал доказательство аналогичной теоремы для случая уравнения первого порядка другим, более просто изложенным методом.

Вито Вольтерра (1860—1940).

Методическая разработка и изложение результатов Пеано для системы уравнений в привычной тогда для большинства математиков форме была выполнена Ми в 1893 г.[1] [216.2].

В это же время публиковалась серия работ Валле-Пуссена. В заметке [268.1] он предложил более простое доказательство существования системы интегралов при предположениях, подобных тем, что и у Пеано. Существенным шагом вперед была статья монографического характера [268.2], на которую автор был вдохновлен, по его свидетельству, мемуаром Дарбу о разрывных функциях [130.5] и соответствующей заметкой Жордана в третьем томе его трактата по анализу [186.3]. В статье дается распространение понятия интегрируемости в смысле Римана на дифференциальные уравнения с двумя переменными. Тем самым доказывается возможность интегрирования уравнений (1.1) при условии, когда f разрывна по x (но интегрируема) и непрерывна по y. Изучается также частный случай интегрируемости такого уравнения, когда f разрывна (но интегрируема) по y и x. Во второй части полученные результаты обобщаются на системы и дифференциальные уравнения n-го порядка. В заключение автор сравнивает методы доказательства теоремы существования решений у Коши, Пикара, Пеано и свое. Наиболее глубоким, а также применимым практически он считает метод Коши. Свое доказательство он вполне резонно рассматривает как обобщение метода Коши, «и ни по объекту, ни по характеру не имеющему никакой аналогии» с тем же у Пеано [268.2, 81]. В связи с этим

[1] См. о методе Пеано [6, 12—17].

отметим неточность информации Пенлеве [228.27, 12], согласно которой эта работа рассматривается как упрощение и дополнение результатов Пеано. Некоторые точки соприкосновения в данной работе у Валле-Пуссена (часть 1) были с работой Пеано 1886 г. [232.1]. Добавим еще, что метод Валле-Пуссена мог быть использован и для приближенных вычислений. Несколько позже [268.3] он дал доказательство теоремы о непрерывности интеграла уравнения $y'=f(x, y, a)$, когда для $x=x_0$ $y=y_0(a)$, по x и a и о непрерывности его частных производных по x и a до n-го порядка, когда y_0 и $f(x, y, a)$ имеют определенные и непрерывные производные по y и a до этого порядка.

Вопрос о существовании и единственности решений бесконечных систем дифференциальных уравнений трактовался в работах Х. фон Коха, в частности в [193.3].

Дальнейшее развитие на основе рассмотрения последовательностей функций и новейших результатов общей теории функций действительного переменного эта тема получила в работах Арчела, Осгуда, Монтеля, Перрона, Кнезера, Северини, Каратеодори и др.

В этих работах доказывалось разными способами существование решения уравнения (1.1) в предположении только непрерывности правой части. Для доказательства единственности требовалось накладывать на правую часть уравнения как функцию от y некоторые ограничения. Но могла ли сохраняться единственность решений в некоторых точках, если таких ограничений не накладывать? Этот важный вопрос в отрицательном смысле был решен Лаврентьевым [36]. Для построенного им дифференциального уравнения вида (1.1) с непрерывной правой частью ни одна точка области не была точкой единственности. Через каждую из них (являющуюся точкой ветвления) проходит бесконечное множество интегральных кривых. Для случая трехмерного пространства аналогичный вопрос рассмотрен Бокштейном [6].

Изучению вопроса о единственности решений дифференциальных уравнений посвящены работы Аркаиса, Тамаркина, Бомпиани, Перрона, Тонллеи, Нагумо и др. Ограниченность объема работы не позволяет нам даже кратко остановиться на всех этих интересных результатах.

§ 2. Применение метода Коши—Липшица к комплексной области

Этот вопрос явно и подробно впервые изучен Пикаром в 1888 г. [235.7] в связи с уточнением области сходимости интегралов уравнения (1.1). Здесь рассматривалась функция $f(x, y)$, голоморфная по x, y, когда последние изменялись внутри окружностей C и C_1, соответственно имеющих центры x_0 и y_0 и радиусы a и b, для которой $M=\max|f(x, y)|$, когда x, y изменяются

на этих окружностях. Пикар имел в виду расширить найденный ранее Брио и Буке предел радиуса сходимости голоморфного интеграла.

Предполагая $f_y'(x, y)$ голоморфной внутри C и C_1 и $k=\max \operatorname{mod} f_y'(x, y)$, когда x, y изменяются на C и C_1[1], а также внутри их, y_1, y_2 — два значения y внутри C_1, он применяет теорему конечных приращений, обобщенную Дарбу для функций комплексной переменной, откуда следовало $|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant k|y_2-y_1|$.

Из непрерывности $f(x, y)$ внутри C и C_1, вернее внутри окружностей с радиусами $a-\varepsilon$, $b-\eta$, для заданного малого λ можно определить δ так, что для $\Delta x<\delta$, $\Delta y<\delta$ будет

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)|<\lambda,$$

имея в виду, что точки x, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ находятся внутри C и C_1. Пусть $A>0$ такое число, что $A \leqslant a$, $AM \leqslant b$, и в плоскости x построена окружность с центром в x_0 и радиуса A, так что точка x находится внутри ее. Соединяя x_0 с x прямой, Пикар применяет метод Коши, рассматривая уравнение (1.1) как предел уравнения в разностях. Сегмент x_0x делится на n частей, строится система $y_i-y_{i-1}=(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1})$, которая определяет y в функции от x_0, y_0, x_1, ... , x_{n-1}. При этом найденные величины y_1, y_2, ... y_{n-1} содержатся в области определения функции.

Так, для y_1 имеем

$$|y_1-y_0|<M|x_1-x_0|<MA \leqslant b;$$

для y_2 вычисляем

$$|y_2-y_0|<M|x_1-x_0|+M|x_2-x_1|=M|x_2-x_0|<MA \leqslant b$$

и т. д.

Итак, для y имеется вполне определенное выражение и надо доказать, что y стремится к некоторому пределу, когда все интервалы стремятся к нулю, а их число неограниченно возрастает. Разбивая отрезок x_0x другим способом и произведя оценку модуля разности значений функции при первом (y) и втором (y^1) способе разбивки, Пикар приходит к выводу о существовании единого предела y, независимо от способа разбивки отрезка x_0x. Итак, для каждой точки x из окружности с центром x_0 и радиуса A существует определенное значение y. Радиус A, как видно, есть меньшее из количеств a и $\frac{b}{M}$.

Далее устанавливается, что последовательность величин, найденных таким образом для определения y, дает аналитиче-

---

[1] Это не нарушает общности рассмотрения, так как оружности C и C_1 можно было заменить другими с радиусами $a-\varepsilon$ и $b-\eta$, где ε, η — фиксированные, но как угодно малые величины.

скую функцию от x, голоморфную в круге радиуса A. При этом Пикар исходит из положения, что последовательность величин, найденных для y, должна необходимо совпадать с той, которая дается разложением в ряд по Брио и Буке и, следовательно, представит голоморфную функцию внутри круга радиуса $a(1-e^{-\frac{b}{2aM}})$ (2.3).

Идея дальнейшего доказательства состоит в том, что найденные значения y вне окружности (2.3) могут быть представлены как аналитическое продолжение полученного разложения. Для этого автор прежде всего рассматривает окружности C' и C_1' радиусов соответственно a—ε и b—η, где ε и η — фиксированные, как угодно малые величины, и систему переменных x_1, y_1 внутри этих окружностей. Тогда функция $f(x, y)$ будет голоморфной внутри окружностей с центрами x_1 и y_1 и соответственно радиусами ε и η, а уравнение (1.1) определит сходящееся разложение в окружности с центром x_1 и радиусом $\rho=\varepsilon\,(1-e^{-\frac{\eta}{2\varepsilon M}})$ (2.4).

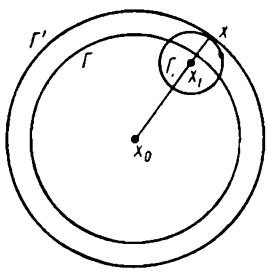


Рис. 1.

Исходя из этого, Пикар рассматривает окружность Γ с центром x_0 и радиусом $(a-\varepsilon)\,[1-e^{-\frac{b-\eta}{2(a-\varepsilon)M}}]$. Внутри Γ разложение интеграла сходящееся и соответствующая величина y будет внутри C_1'. Чтобы рассмотреть продолжение предыдущего разложения вне Γ, берется точка x_1 внутри, но довольно близкая к окружности Γ. Тогда можно получить сходящееся разложение внутри окружности Γ_1 с центром x_1 и радиусом ρ.

Круг Γ_1 выходит за пределы Γ. Беря затем последовательно точки x_1 на том же расстоянии от x_0, мы получим последовательность окружностей Γ, и интеграл будет, очевидно, голоморфным внутри области, ограниченной внешней огибающей этих окружностей, т. е. внутри окружности Γ' (рис. 1).

Чтобы убедиться в этом, нужно сделать заключение относительно Γ' так, как это обосновано для Γ, т. е. надо, чтобы для любой точки кольца внутри Γ, Γ' соответственная величина y была бы внутри окружности C_1'. Иначе говоря, радиус круга Γ' должен быть меньше меньшего из количеств $a-\varepsilon$ и $\frac{b-\eta}{M}$ (2.5). Но это становится очевидным из изложенного раньше, если рассматривать движение от x_0 к точке x круга Γ' по прямолинейному пути и вычислять величины y по предыдущему методу. Найденное так значение y будет удовлетворять условию $|y-y_0|<b-\eta$. Оставив то же ρ, можно перейти от круга Γ' к третьему кругу Γ'' и т. д. до того, пока радиус этих окружностей последо-

вательно станет равным меньшей из величин (2.5). Но так как ε и η — независимые, как угодно малые величины, то приходим к выводу, что интегралы уравнений (1.1), принимающие для $x=x_0$ значение y_0, есть голоморфные функции внутри круга, радиусом которого является меньшая из величин: a и $\frac{b}{M}$ (2.6).

В заключение Пикар отмечает, что в любом случае «этот новый радиус сходимости для ряда Тейлора, представляющего интеграл, будет больше выражения $a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$ данного Брио и Буке» [1]. Вопрос очевиден, если a — меньшая из величин (2.6). Если такой величиной будет $\frac{b}{M}$, то неравенство $a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right)<$ $<\frac{b}{M}$ следует из очевидного: $1-e^{-x}<2x$.

Была указана возможность распространения полученных результатов также на системы дифференциальных уравнений, или на уравнения высших порядков.

Работа Пикара послужила стимулом для доклада [51] П. С. Назимова на заседании секции физико-математических наук Казанского общества естествоиспытателей в следующем 1889 г. Здесь он предложил другое, по его словам, «более строгое» непосредственное доказательство определения области сходимости, основанное на отыскании предела, к которому стремится сумма величин, определяемых формулами

$$a_1=a\left(1-e^{-\frac{b}{2Ma}}\right); \qquad a_2=(a-a_1)\left(1-e^{-\frac{b-Ma_1}{2M(a-a_1)}}\right), \ldots \text{ и т. д.}$$

Оказалось, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=p$, где p — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$. Здесь же Назимов дал обобщение теоремы Пикара на случай системы двух уравнений первого порядка с двумя функциями.

§ 3. Развитие метода последовательных приближений

О применении этого метода специально к линейным уравнениям речь будет далее. Здесь же мы сразу отметим, что общую глубокую теоретическую разработку этого метода и широкое его применение к доказательству существования интегралов различных типов дифференциальных уравнений первым дал Э. Пикар в своих многочисленных работах. Этим и обусловлено часто встречающееся в литературе ошибочное мнение о Пикаре, как чуть ли не единоличном создателе данного метода. Естественно, роль и заслуги Пикара в развитии этого метода не будут умале-

[1] См. об этом в гл. III.

ны, если употреблять исторически сложившееся его название, к тому же весьма удачно выражающее его сущность.

Любопытно отметить, что идею метода последовательных приближений Пикар впервые применил в 1888 г. для отыскания интеграла уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

в сообщении [235.6]. В заключение он указывал, что этот метод, которым может быть достигнута дополнительная польза для изучения общего линейного уравнения, был уже использован [1] Шварцем в частном случае для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0.$$

Через несколько месяцев, в заметке [235.8], Пикар говорит уже, что предложенный им в прошлом году метод, «который на самом деле есть метод последовательных приближений» может быть с успехом применен для уравнений нелинейных.

В январе 1890 г. он выступил с докладом [235.10], где указанный выше способ уже довольно методично применялся для отыскания интеграла уравнения вида

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

(A, B, C — функции от x, y). При этом предполагалось, что интеграл уравнения вместе с его частными производными двух первых порядков оставался непрерывным внутри некоторого замкнутого контура C, и давались условия для границ интеграла вдоль этого контура. Изучение последовательности u_n показывало, что она сходится к определенному пределу, когда контур C удовлетворял данным условиям. В этом случае получался интеграл уравнения, принимающий на контуре заданные значения. Здесь же был рассмотрен и вопрос о единственности интеграла для уравнения $\Delta u = F(u, x, y)$, когда F «хорошо определена и конечная», положительна и монотонно возрастающая с u.

Эта тема была подробно освещена в большой статье Пикара [235.11], (1890 г.) с ней обычно и связывается начало разработки метода Пикара (Пенлеве [228.21, 199; 228,27, 13]); Белл [97, 411] указывает в связи с этим лишь 1893 г. Пятую главу мемуара [235.11] Пикар посвятил применению метода последовательных приближений («метода, который,— говорил автор,— мне удалось сделать употребительным» [235, 11, 149]) к вычислению

---

[1] Метод последовательных приближений до того был применен для интегрирования отдельных видов уравнений в частных производных Сан-Венаном (1870 г.), Комбескурой (1872) и др.

интегралов системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Этот же метод применялся им и к системе уравнений с частными производными.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = f_i(x, y, u_1, \ldots, u_m,)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Эмиль Пикар (1856—1941).

Идея метода раскрывается при рассмотрении уравнения (1.1) в предположении, что функция f действительных переменных определена и непрерывна для x и y из интервалов соответственно x_0-a, x_0+a; y_0-b, y_0+b и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(y_2, x) - f(y_1, x) < k|y_2 - y_1|.$$

Пусть $M = \max|f(x, y)|$ для данных интервалов и $\rho \leqslant a$. Тогда $y_1 = \int_{x_0}^{x} f(y_0, x)\,dx + y_0$ остается внутри избранного интервала, если $M\rho < b$. То же будет и для любого $y_t = \int_{x_0}^{x} f(y_{i-1}, x)\,dx + y_0$.

Далее Пикар доказывает сходимость y_n при $n \to \infty$ к интегралу y уравнения (1.1) и непрерывность y для x из интервала $x_0-\delta$, $x_0+\delta$, где δ — меньшее из чисел a, $\frac{b}{M}$, $\frac{1}{k}$. Здесь же он отмечает, что, очевидно, можно применить тот же метод доказательства, если f есть аналитическая функция комплексных переменных x и y. После этого дается применение метода к более сложным уравнениям.

Подробней вопрос для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка был изложен в серии заметок следующего года. В ответ на одну из них Пеано отметил [232.3, 80], что доказательство существования системы интегралов можно дать и без условий Липшица (это им было уже сделано, см. § 2), а наличия этой гипотезы достаточно для доказательства единственности решений; оно было им выполнено методом от противного в краткой и ясной форме и перешло в учебную литературу. Разработке, дополнению и приложениям метода последовательных приближений к теории дифференци-

Ивар Бендиксон (1861—1935).

альных уравнений, его теоретическому углублению Пикар посвятил в ближайшие годы еще несколько работ.

Дальнейший вклад в развитие этой темы внесли Бендиксон [98.1]. Юль [187], Линделеф. Бендиксон (27) и Линделеф [204.1] показали, что при оценке сходимости интеграла величина $\frac{1}{k}$ (что было у Пикара) может быть опущена. Бендиксон более углубленно изучил вопрос о сходимости процесса, в частности, ее равномерность [98.4], а Линделеф дал доказательство единственности системы интегралов уравнений, удовлетворяющих данным начальным условиям [204.2], и уточнил интервал сходимости интегралов. Вместо второй величины $\frac{b}{M}$ (у Пикара) можно было взять для случая одного уравнения $\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{kb}{M_0}\right)$ [204.1], а для системы уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

он получил выражение $\frac{1}{k_1+k_2+\cdots+k_n}\log\left[1+\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)b}{M_0}\right]$ где k_i — величины из соответствующих условий Липшица, а $M_0 = \max \operatorname{mod} f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ для $|x - x_0| < a$. Таким образом, была уточнена верхняя граница второй возможной величины предела сходимости интегралов. Полученный результат был применен в [204. 2] к доказательству теоремы Пуанкаре для системы уравнений, содержащих параметр,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, \mu, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Несколько позже аналогичные вопросы были изучены в работах Трефтца (в том числе доказательство для систем уравнений в векторной форме) и Джексона (расширение области сходимости решений).

Применение метода для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений изучали Северини, Коттон (публикации 1905 и 1908 гг.) и др. В работах последнего получены весьма глубокие и интересные результаты по усовершенствованию оценок степени приближения, определения верхних границ отбрасываемых остатков рядов, определение достаточных условий того, что приближенное решение отличается от точного на ошиб-

ку, заключенную в данных границах, уточнение ряда предыдущих результатов, новые методы отыскивания ошибок приближений, где в известной степени обобщался метод Пикара и др.

Дальнейшее развитие метода последовательных приближений в теории дифференциальных уравнений связано с именами Линделефа, Боля, Коттона, Ляпунова, Горна, Гарнье и др. Ряд исследований по этому методу соприкасается с тем же для первого метода Коши (работы Николетти, Розенблата, Бендиксона, Северини и др.). В 1922 г. Банах дал разработку метода последовательных приближений на основе новых идей функционального анализа.

Одна из первых больших обзорных статей по этому методу и его применениям к интегрированию дифференциальных уравнений на русском языке принадлежит Н. В. Бугаеву [10.2] (1896 г.). Новым здесь было рассмотрение способа приближений по убывающим степеням переменной, а также исследование вопроса о порядке точности и условий сходимости полученных разложений.

§ 4. Метод последовательных приближений в комплексной области

Хотя Пикар и указывал в 1890 г. на возможность применения его метода к уравнениям с голоморфной правой частью, первую разработку по этому вопросу выполнил Д. М. Синцов (28) из Казани в 1893 г. В статье [65.1] он рассматривает систему уравнений

$$\frac{du_i}{dz} = f_i(z,\ u_1,\ u_2, \ldots u_m),\ i = 1,2, \ldots,\ m, \tag{2.7}$$

где, по терминологии автора, f_i — функции непрерывные, конечные и однозначные в окрестности элемента $(z^\circ,\ u_1^\circ,\ u_2^\circ, \ldots,\ u_m^\circ)$ и в кругах радиусов a, b, где b — наименьший из радиусов областей переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Для данной системы функций, пока переменные находятся в указанных границах, сохраняются условия Липшица, которые мы здесь не выписываем. Автор доказывает, что при этих предположениях и существуют функции $u_1, u_2, \ldots, u_m$ переменного z, непрерывные в окрестности z_0, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (2.7), и при $z = z_0$ равные $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Для доказательства строится система $\frac{du_i}{dz} = f_i(z, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)$, откуда $u_i^1 = u_i^0 + \int\limits_{z_0}^{z} f_i(z, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)\, dz$ и при $z = z_0$, $u_i^1 = u_i^0$.

При этом имеется в виду, что путь интегрирований может быть произвольный, но внутри круга радиуса a. Поэтому его можно взять по прямой от z_0 до z. Указанным образом находятся u_i^n. Да-

лее надо доказать, «что при n, бесконечно возрастающем, $u_1^n, u_2^n, \ldots$ $\ldots, u_m^n$ стремятся к пределам, представляющим интегралы системы (2.7), если только z остается достаточно близко к z_0». Пусть $M = \max |f_i|$ для переменных в данных границах и $\rho \leqslant a$.

Если $|z - z_0| < \rho$, то $|u_i^1 - u_i^0| < \left|\int_{z_0}^{z} M dz\right|$ или $|u_i^1 - u_i^0| < M|z - z_0| < M\rho$. Отсюда, если $M\rho \quad b$, все u_i остаются в данных пределах. Обозначим $\delta \leqslant \rho$, $U_i^n = u_i^n - u_i^{n-1}$ и пусть $|z - z_0| \quad \delta$, тогда $\frac{dU_i^n}{dz} = f_i(z, u_1^{n-1}, u_2^{n-1}, \ldots, u_m^{n-1}) - f_i(z, u_1^{n-2}, u_2^{n-2}, \ldots, u_m^{n-2})$. Но $|U_i^1| < M\delta$; $|U_i^2| \leqslant \int_{z_0}^{z} [f_i(z, u_1^1, u_2^1, \ldots, u_m^1) - f_i(z, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)]\, dz$ или $|U_i^2| \leqslant \int_{z_0}^{z} \sum_{1}^{m} A_k |U_k^1|\, dz$, где A_k — константы из условий Липшица, или $|U_i^2| < M\delta \sum_{1}^{m} A_k |z - z_0|$, т. е. $|U_i^2| < M\delta^2 \sum_{1}^{m} A_k$. Также $|U_i^3| < M\delta^3 \left(\sum_{1}^{m} A_k\right)^2$ и т. д., $|U_i^n| < M\delta^n \left(\sum_{1}^{m} A_k\right)^{n-1}$. Если $\delta \left(\sum_{1}^{m} A_k\right) < 1$, то при $n \to \infty$, $|U_i^n| \to 0$, но

$$u_i^n = u_i^0 + U_i^1 + U_i^2 + \ldots + U_i^n. \qquad (2.8)$$

Сходимость (2.8) к некоторым предельным функциям $u_i(z)$ — конечным, определенным и непрерывным следует в том случае, пока $|z - z_0|$ не превышает наименьшей из трех величин: a, $\frac{b}{M}$, $\frac{1}{\sum_{1}^{m} A_k}$.

С другой стороны, $u_i^n = u_i^0 + \int_{z_0}^{z} f_i(z, u_1^{n-1}, u_2^{n-1}, \ldots, u_m^{n-1})\, dz$ и в пределе для $n \to \infty$ имеем $u_i = u_i^0 + \int_{z_0}^{z} f_i(z, u_1, u_2, \ldots, u_m)\, dz$, откуда следует $\frac{du_i}{dz} = f_i(z, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и при $z = z_0$ имеем $u_i = u_i^0$.

Итак, доказано существование интегралов уравнения (2.7), удовлетворяющих данным начальным условиям для $|z - z_0| < \delta$. Далее отмечается, что «принцип аналитического продолжения позволит нам затем распространить построение величин u_i для дальнейших областей». В заключение работы Синцов доказывает, что полученная система интегралов — единственная (методом от

противного) и делает некоторые замечания относительно важности и практической применимости способа Пикара и полезности изложения его на лекциях.

Этот же вопрос с наброском схемы доказательства и рядом интересных замечаний через год был рассмотрен Пикаром в заметке [235.14] для уравнения (1.1), где f — голоморфная функция по x и y внутри некоторых окружностей C и C_1, радиусов a и b, описанных около нулевых точек. Он отметил, что доказательство того, что разложение интеграла представит внутри некоторого круга голоморфную функцию, упрощается благодаря недавним результатам Линделефа. К этому вопросу Пикар возвращался и в работе [235.16], замечая, что метод мажорантных функций дает область менее обширную. Здесь же шла речь о применении метода последовательных приближений для доказательства существования интеграла уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Другой способ решения того же вопроса дал Бендиксон в 1896 г. Это привело к небольшой полемике о приоритете [235.18].

Вопрос о границах голоморфности интеграла уравнения (1.1) с голоморфной правой частью в области $D: |x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ при $|f| < M$ в D рассматривал Гурса [163.4].

Глава III. РАЗВИТИЕ МЕТОДА МАЖОРАНТНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

§ 1. Работы Брио и Буке по усовершенствованию метода

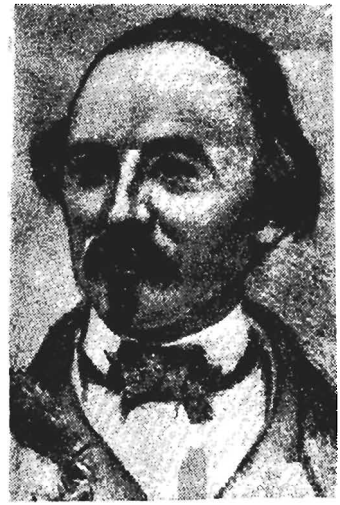
Большой вклад в общее развитие теории, в уточнение и разработку метода (по термину Пуанкаре) мажорантных функций, в расширение объектов исследования аналитической теории и ее приложений внесли ученики Коши — французские математики Брио (29) и Буке (30). Они, по словам Фукса, «опробовали их принципы в теории дифференциальных уравнений первого порядка в работе, опубликованной в 1856 г., которая должна быть рассматриваема как поворотный пункт на пути, по которому следует с тех пор учение о дифференциальных уравнениях» [153.17, 484].

Именно Брио и Буке сформулировали основную задачу аналитической теории дифференциальных уравнений, как было отмечено во введении. Их главный, указанный выше Фуксом, труд, является первой монографией по данной теории. Он определил, в известной степени, развитие теории на ближайшие десятилетия.

Исследования Брио и Буке по данному вопросу теснейшим образом связаны с предыдущими работами Коши и являются их дальнейшим и самостоятельным развитием. В первой части этого труда, где были изложены основные принципы теории функций комплексного переменного, авторы писали, что они постараются развеять «тучи, которые еще затемняют замечательную теорию Коши» [112.6].

В первых заметках по данным вопросам в 1853 г. Брио и Буке уделили внимание исследованию степенных рядов с комплексными переменными и разложениям функций в такие ряды. Именно в [107] было введено понятие круга сходимости и указано, что внутри его каждый ряд обладает единственной производной в каждой точке независимо от направления изменения. А в [112.1] в дополнение к работам Коши были установлены необходимые условия разложимости функции в степенной ряд с радиусом сходимости R: 1) она должна быть конечна и непрерывна во всей области переменного, пока модуль его меньше R; 2) должна быть однозначной внутри круга; 3) иметь единственную производную в каждой точке, какое бы ни было направление дифференцирования.

В заметках ближайших двух лет Брио и Буке изложили основные принципы исследования свойств функций, определенных дифференциальными уравнениями, и их применения к двоякопериодическим функциям. Фундаментальная монография по этому вопросу (в трех частях [112.6.—7.—8]) вышла в 1856 г. Некоторые ее разделы помещались затем в первом (1859) и втором (1875) изданиях их «Теории эллиптических функций».



Шарль Брио (1817—1880).

Эта работа была предпринята, как отметили авторы, по идее Коши. В первой части ее даются разложения функций в степенные ряды и основы теории функций комплексного переменного в основном по Коши, но с существенными дополнениями авторов, рассматривавших принципиальные свойства монодромных и моногенных функций как фундамент новой ветви математического анализа.

Вторая ее часть содержала исследование свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Именно здесь авторы отмечали, что «Случаи, когда можно интегрировать дифференциальное уравнение, в высшей степени редкие и должны рассматриваться как исключения. Но можно рассмотреть дифференциальное уравнение как определяющее функцию и заняться изучением свойств этой функции по данному дифференциальному уравнению» [112.7, 133].

Таким образом, дифференциальные уравнения — отмечали они в другом месте,— можно рассматривать как неисчерпаемый источник новых трансцендентных. Дальнейшее развитие математики полностью подтвердило этот тезис.

Третья часть работы посвящалась применению выше разработанной теории к исследованию и установлению свойств эллиптических функций и к изучению некоторых, представляющих интерес, отдельных видов уравнений. Авторы показали здесь совершенно новый подход к исследованию свойств данных функций, бывших ранее объектом изучения многих известных математиков. При этом были установлены конкретные виды и характер уравнений, монодромные интегралы которых будут функциями двоякопериодическими, или рациональными, или просто периодическими.

Высокую оценку этой работы Брио и Буке дал Коши [122.30], подчеркивая ее важность, полноту и четкость доказательств, не оставляющих желать чего-либо лучшего, получение многих но-

вых и очень интересных результатов, «которые нельзя обойти молчанием». Здесь мы рассмотрим лишь вопрос о доказательстве существования и единственности голоморфных интегралов, перенеся обзор других результатов в соответствующие последующие главы.

Исходя из работ Коши, Брио и Буке формулируют лемму 1:

Пусть $f(x)$ — конечная, непрерывная, монодромная и моногенная функция мнимого (комплексного) аргумента x в круге C с центром x_0, с радиусом r и $M=\max|f(x)|$ в C, тогда из

$$f^{(n)}(x_0) = 1\cdot 2\ldots n\cdot r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n\theta i} f(x_0 + re^{\theta i})\,d\theta$$

получается оценка

$$|f^{(n)}(x_0)| \leqslant 1\cdot 2\ldots n M\cdot r^{-n}. \tag{3.1}$$

В лемме 2 этот результат обобщается на случай функции трех переменных $f(x, y, z)$

$$|D_{xyz}^{n+n_1+n_2} f(x_0, y_0, z_0)| \leqslant 1\cdot 2\ldots n\cdot 1\cdot 2\ldots n_1\cdot 1\cdot 2\ldots n_2\frac{M}{r^n r_1^{n_1} r_2^{n_2}}. \tag{3.2}$$

Затем (лемма 3) авторы составляют функцию, частные производные которой, взятые в точке (x_0, y_0, z_0), имеют величины, равные указанным границам модулей производных функции $f(x, y, z)$, рассматривая

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{r_1}\left(1-\frac{z-z_0}{r_2}\right)\right)}. \tag{3.3}$$

Эта функция может быть разложена в сходящийся ряд, когда $|x-x_0|$, $|y-y_0|$, $|z-z_0|$ будут меньше соответственно r, r_1, r_2; общий член ряда будет иметь вид $M\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n\left(\frac{y-y_0}{r_1}\right)^{n_1}\left(\frac{z-z_0}{r_2}\right)^{n_2}$.

Если взять производную $D_{xyz}^{n+n_1+n_2}$ от функции $\varphi(x, y, z)$ и положить $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, то получим просто

$$[D_{xyz}^{n+n_1+n_2}\varphi(x, y, z)]_0 = 1\cdot 2\ldots n\cdot 1\cdot 2\ldots n_1\cdot 1\cdot 2\ldots n_2\frac{M}{r^n r_1^{n_1} r_2^{n_2}}.$$

Решив эту задачу, авторы переходят к доказательству существования интегралов, следуя тем же принципам Коши, но, как говорят они, одним очень простым способом, рассматривая уравнение

$$\frac{du}{dz} = f(z, u) \tag{3.4}$$

при начальных условиях $z=z_0$, $u=u_0$ и предполагая $f(z, u)$ конечной, непрерывной, монодромной и моногенной в окрестности

z_0, u_0. Для простоты берутся $z_0=u_0=0$ и рассматриваются в качестве областей изменения z и u круги соответственно радиусов ρ и R;

$$M = \max |f(z, u)|.$$

Если уравнение (3.4) допускает интеграл, обладающий ранее указанными свойствами, то последовательным дифференцированием (3.4) получается система

$$\begin{gathered} \frac{du}{dz} = f(z, u); \\ \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{d^3u}{dz^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u} \cdot \frac{du}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{dz^2}. \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdot \end{gathered} \tag{3.5}$$

В правой части этих равенств функция f и ее частные производные для $z=0$, $u=0$ заменяются их модулями. Первое даст $\left|\frac{du}{dz}\right|_0$; подставим эту величину во второе равенство и получим верхнюю границу $\left|\frac{d^2u}{dz^2}\right|_0$ и т. д.

На основе леммы 3 частные производные функции $f(z, u)$ для $z=0$ и $u=0$ по модулю будут меньше, чем соответственные производные функции

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{u}{r}\right)}.$$

Теперь авторы рассматривают дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{v}{r}\right)} \tag{3.6}$$

при начальных условиях $z=0$, $v=0$.

Если это уравнение допускает конечный, непрерывный и монодромный интеграл, то можно получить его производные последовательным дифференцированием первого равенства (3.6) в виде системы, аналогичной (3.5). При подстановке туда $z=0$, $v=0$ функция φ и ее частные производные будут иметь все значения положительные и, следовательно, величины $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right)_0$, ... будут также положительные.

Таким образом, функция v для $z=0$ имеет все производные действительные и положительные. Кроме того, неравенство $\left|\frac{du}{dz}\right| < \left(\frac{dv}{dz}\right)_0$ будет справедливо и для производных более вы-

ского порядка. Отсюда заключается, что если функции u и v существуют, то производные первой при $z=0$ имеют модули соответственно меньше, чем производные второй. Но v существует заведомо, ибо уравнение (3.6) может быть легко проинтегрировано и даст интеграл

$$v - \frac{v^2}{2r} = -M\rho \ln\left(1 - \frac{z}{\rho}\right). \tag{3.7}$$

Здесь определяется неявная функция v, удовлетворяющая данному начальному условию и «остающаяся конечной, непрерывной и монодромной для всех z, меньших или равных по модулю некоторому числу $R>0$, которое можно определить». [112.7, 140]. В самом деле, функция будет удовлетворять указанным условиям до той точки, пока два корня уравнения (3.7) не станут равны между собой. Это имеет место, если производная $1 - \frac{v}{r}$ левой части по отношению к v станет равной нулю, т. е. если $v=r$. Тогда (после подстановки $v=r$ в (3.7)) соответственная величина R для z, действительная и положительная, дается формулой

$$\ln\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = -\frac{r}{2M\rho}.$$

Если обозначить $A = \max|v|$ в круге радиуса R, то, согласно лемме 1, будем иметь $\left(\frac{d^n v}{dz^n}\right)_0 \leqslant 1\cdot 2\ldots n\frac{A}{R^n}$, а тем более $\left|\frac{d^n u}{dz^n}\right| \leqslant 1\cdot 2\ldots n\frac{A}{R^n}$. «Отсюда следует, что ряд

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1\cdot 2} + \ldots, \tag{3.8}$$

упорядоченый по возрастающим степеням z, есть сходящийся для всех величин z, имеющих модули меньше R». А так как общий член ряда имеет модуль меньший, чем $\left(\frac{|z|}{R}\right)^n A$, и при $|z|<R$ ряд модулей — сходящийся, то, следовательно, и рассматриваемый ряд будет тоже сходящимся. Он определит «конечную, непрерывную, монодромную и моногенную функцию в круге радиуса R». Фактически авторы доказали здесь равномерную сходимость ряда (3.8) и получили верный вывод, хотя и не пользуются еще этим понятием. Далее они показывают, что функция u, определяемая рядом (3.8), удовлетворяет данное уравнение (3.4) так. Если в это уравнение подставить вместо u его значение из (3.8) $\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z}{1} + \ldots$ и положить $f(z, u) = f_0 + f_0' \frac{z}{1} + f_0'' \frac{z^2}{1\cdot 2} + \ldots$, где под f', f'' понимаются

полные производные от функции f, вычисленные по формулам

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dz};$$

$$f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u} \cdot \frac{du}{dz} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{dz^2}, \qquad (3.9)$$

то из сравнения правых частей равенств систем (3.5) и (3.9) легко установить $f_0' = \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$, $f_0'' = \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0$, откуда и следует справедливость их утверждения.

Жан Буке (1819—1885).

Разработанный метод авторы распространяют затем на систему совместных дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями от одного аргумент заданных в нормальной форме. Со временем их классическ прием получил всеобщее признание и был включен во мног учебники (Пикара и др.), иногда и без указания авторства. Дл случая m функций получена формула, определяющая радиус сходимости интеграла вида

$$\ln\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = -\frac{r}{(m+1)M\rho}.$$

При этом авторы отметили, что пределы сходимости, пол ченные их методом, более широки, чем те, которые были на дены Коши.

Они рассмотрели также вопрос о том, что существует еди ственный интеграл, монодромный и моногенный, и не существ ет другой функции, удовлетворяющей данному дифференциал ному уравнению при заданных начальных условиях. Итак, пус u — монодромный и моногенный интеграл уравнения (3.4) предполагается существование еще второго интеграла в форм $u+v$ при $v=0$ для $z=z_0$. Тогда $\frac{d(u+v)}{dz} = f(u+v, z)$, откуда

$$\frac{dv}{dz} = f(u+v, z) - f(u, z). \qquad (3.1$$

Так как выражение справа (3.10) равно нулю для $v=0$, оно содержит множителем степень v, так что

$$\frac{dv}{dz} = v^m \varphi(z). \qquad (3.1$$

Интегрируя это уравнение вдоль некоторой данной кривой, получим

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{v_0^{m-1}}-\frac{1}{v^{m-1}}\right)=\int_{z_0}^{z}\varphi(z)\,dz.$$

Но это равенство невозможно, отмечают авторы, так как, с одной стороны, определенный интеграл имеет конечную величину, а с другой — v_0 равно нулю. Если $m=1$, получим

$$v=v_0e^{\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz}$$

Так как $v_0=0$, функция v есть тождественный нуль, а следовательно, «данное дифференциальное уравнение не допускает иного интеграла, принимающего величину u_0 для $z=z_0$, чем интеграл монодромный и моногенный».

Далее Брио и Буке уточняют, что при восстановлении функции u они имели в виду ее однозначность. Но если, выходя из точки z_0 и следуя вдоль какого-то направления, достигается такая точка $z=z_1$ и $u=u_1$, для которой дифференциальный коэффициент $f(u, z)$ становится бесконечным, или принимает форму $\frac{0}{0}$, или перестает быть монодромным и моногенным, функция u может быть испытана около этой точки различными способами, о которых говорится далее.

Отметим здесь, что из доказательства Брио и Буке следовало, что путь движения от z_0 к z подразумевался конечным, иначе об интеграле $\int_{z_0}^{z}\varphi(z)dz$ нельзя было бы сделать так просто указанные заключения.

Авторы разобрали также случай, когда дифференциальный коэффициент в отличие от предыдущего, есть неявная алгебраическая функция переменных z и u.

Полагая $U=\frac{du}{dz}$, они для уравнения

$$F(z, u, U)=0 \qquad (3.12)$$

получали функцию u, для которой при $z=z_0$ будет $u=u_0$, $U=U_0$. При этом оказалось, что функция-интеграл u остается конечной, непрерывной и монодромной до тех пор, пока дифференциальный коэффициент $U=\frac{du}{dz}$ будет простым корнем уравнения (3.12). Если же величина U в некоторой точке z_0 станет кратным корнем порядка n, то функция-интеграл u перестает в общем быть монодромной и получает n различных значений, когда переменная z вращается около точки z_0.

§ 2. Развитие идей Коши, Брио и Буке в работах Мерэ

Младшим современником Брио и Буке был ученик Лиувилля талантливый французский математик Мерэ (31). Уже в 1855 г. заметка двадцатилетнего юноши [217.1] о двоякопериодических монодромных и моногенных функциях была представлена Коши Парижской академии. Аналогичный вопрос незадолго перед тем изучался Лиувиллем для более частного случая, а также Брио и Буке в [112.4].

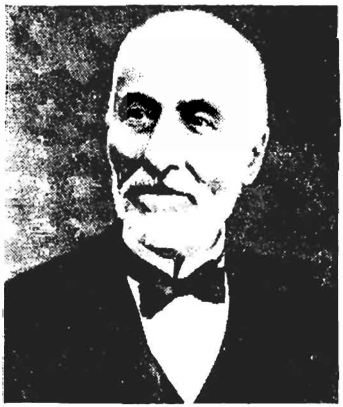
Через некоторое время (в 1868 г.) Мерэ выступил на конгрессе научных обществ в Париже с подробной программой построения теории функций на принципах, отличных от общепринятых в то время.

Он считал необходимым положить в основу изучения функций не общий характер непрерывности, а их «разложения в сходящиеся степенные ряды и произведения степеней приращений независимых переменных» [214.2, 134]. Таким образом, уже здесь Мерэ высказал те же идеи, которые в то время интенсивно разрабатывал Вейерштрасс. Отмечая этот факт, Осгуд [226, 77] связывал его с выходом монографии Мерэ [214.3] в 1872 г.

В то же время Мерэ стал вводить новую, несколько своеобразную терминологию. Он подчеркивал полезность построения всей системы исчисления бесконечно малых (теории функций) на новых основах. Это упростило и сделало бы более строгими как отмечал автор, доказательства многих теорем, в том числе и теорем существования интегралов дифференциальных уравнений. Он подчеркивал отличие своей точки зрения от точки зрения Лагранжа, считавшего «очевидной возможность общего разложения в ряды любой непрерывной функции — вещь, которая давно не допускается» [см. 137].

Эти новые воззрения, проникнутые единым принципом, были положены Мерэ в основу его курса анализа [214.3]. Он исходил из понятия голотропной (аналитической) функции. Понятие круга сходимости было обобщено здесь на случай многих переменных. Доказательство теорем существования дано по методу Брио и Буке, но в более общей форме, а также для случая систем уравнений, содержащих параметры. После Коши здесь впервые обращалось внимание на существование интегралов для уравнений с частными производными, хотя, как отметил сам автор, вопрос этот еще не исчерпан у него с должной полнотой и точностью (он рассматривал весьма частный вид систем таких уравнений и при том весьма схематично). Теория неявных функций получила у него оригинальную и довольно полную разработку.

Весьма важным было дополнение теории обыкновенных дифференциальных уравнений изучением свойств интегралов, рассматриваемых как голотропные функции произвольных постоян-



Шарль Мерэ (1835—1911).

ных. В дальнейшем эта идея нашла развитие в работах Пикара, Николетти, Мальмквиста, Адамара. Линделефа, Пенлеве и др.

Критика положительно оценила новый труд Мерэ с тем, однако, замечанием, что это сочинение никак не может быть допущено как учебник, на что претендовал, видимо, автор. Лоран [201.2] писал, что употребленные здесь методы чрезвычайно тонкие и деликатные, доказательства — строгие и элегантные, а сочинение в целом — блестящий мемуар по теории функций, содержащий много нового материала. К этой работе Мерэ примыкало сочинение Рикье [247], где в развитие идей Мерэ излагались основы теории функций от n комплексных переменных. Третий (последний) раздел его посвящался применению развитых принципов к системам дифференциальных уравнений.

Второе, значительно расширенное, издание курса Мерэ вышло в 1894 г. (первая часть) — «Основные принципы» [214.5]. Затем последовали еще три части (1895—1898) с развитием теории и обширными ее приложениями. Еще до выхода этого труда, в 1891 г. Рикье писал: «Уже несколько лет назад некоторые геометры пытались основывать общую теорию функций на свойствах целых рядов. Мы должны сослаться в первую очередь на Вейерштрасса и Мерэ, которые, не зная работ друг друга, встречались на одном и том же пути» [247, 59]. Там же Рикье отметил, что Вейерштрасс не опубликовал никакого общего сочинения по теории функций и ограничился развитием идей в своих лекциях, которые оставались поэтому малоизвестными. Когда же был изложен сжато, но полно метод Мерэ (в 1872 г.), «он показался нам и на много,— пишет Рикье,— выше обычных методов». Как Вейерштрасс, так и Мерэ изложение своих идей начали с университетских лекций: один — в Берлине в 60-е гг., другой — в Дижоне с 1869 г. Правда, понятие мажорантных функций Мерэ воспринял от Брио и Буке и к новым своим идеям пришел через школу Коши в результате пересмотра основ анализа, а также под влиянием нужд преподавания. Путь Вейерштрасса субъективно был несколько более прямым и цельным, а идеи отличались большей глубиной и точностью, что проявилось в его четких и осторожных формулировках.

Как известно, идеи и взгляды Вейерштрасса получили гораздо большую известность и популярность среди математиков и в литературе. Достаточно сказать, что при изложении данного вопроса в больших курсах и даже в специальных иссле-

дованиях, например [226, 5], имя Мерэ иногда лишь упоминается, тогда как описанию работ Вейерштрасса отводится много места. Это объясняется, очевидно, и тем, что Вейерштрасс создал не только идеи, но и мощную школу, воспитал много талантливых учеников, которые продолжали, развивали далее и популяризовали его идеи.

§ 3. Уточнение теоремы единственности (Жордан, Фукс)

Из анализа метода мажорантных функций для построения голоморфного интеграла в области начальных данных легко усмотреть и единственность этого интеграла в силу единого способа определения коэффициентов ряда, представляющего интеграл. Но можно предположить существование других, не голоморфных, интегралов в окрестности z_0 и, значит, не представляемых степенным рядом. Но это возможно только в том случае, когда точка z_0 особая и лежит на границе области.

У Брио и Буке этот вопрос не был еще четко сформулирован, но по существу они его поставили и решили, имея в виду путь конечной длины, следуя по которому переменная точка z может попасть в z_0.

Первое усовершенствование доказательства Брио и Буке, но в порядке их идей, было предложено Жорданом (32) [186.3, 94].

Для системы уравнений $\frac{dy}{dx}=f(x, y, z); \frac{dz}{dx}=\varphi(x, y, z)$ с голоморфными интегралами y, z, удовлетворяющими данным начальным условиям, допускалось существование другой системы интегралов $y+\eta$, $z+\xi$, удовлетворяющих тем же начальным условиям. Установив непрерывность функций η и ξ, автор вводит обозначение $u=\max\{|\eta|+|\xi|\}$ в некоторой области начальных данных и при движении x вдоль некоторой дуги, так что u есть функция длины дуги s, положительная и неубывающая, причем $u=0$ при $s=0$. С другой стороны, показывается, что $u \leqslant v$, где v удовлетворяет уравнению $dv=2\alpha v ds$ и $v=0$ при $s=0$ (α — некоторая константа). Тогда $v=Ce^{2\alpha s}$, но $C=0$, откуда $v=0$, следовательно, и $u=0$, и функции η, ξ остаются тождественными нулями до тех пор, пока они непрерывны и их модули меньше некоторой величины. Это доказательство во втором издании курса Жордана (т. III, стр. 100) было заменено новым, более простым, но при предположении движения к точке x_0 по «исправимой» линии, когда длина дуги s может быть сделана меньше некоторой конечной величины.

Важным шагом в исследовании данного вопроса была статья Фукса [153.13], опубликованная в марте 1886 г. Здесь автор отмечал, что непосредственным толчком к его занятиям теорией дифференциальных уравнений была монография Брио и Буке [112.7]. После тщательного анализа этой работы в свете новых результатов теории функций комплексного переменного, полу-

ченных за последующие три десятилетия, и опираясь на свой двадцатилетний опыт глубоких исследований в новой теории, Фукс (33) пришел к выводу, что доказательство теоремы единственности, данное Брио и Буке, является неполным и требует существенного усовершенствования и уточнения.

Рассматривая вопрос о единственности решения уравнения

$$\frac{dy}{dz} = f(z, y) \tag{3.13}$$

и формулируя его в общей форме, Брио и Буке вместе с тем предполагали конечным путь движения переменной точки z к совпадению ее с точкой z_0, характеризующей начальные условия. Это вело к ограничению класса особых точек z_0. Но в таком случае не всегда можно было делать разложения, предпринятые Брио и Буке. Это было допустимо тогда, когда интегралы исследуемых уравнений, приведенных к указанному далее виду [3.14], подчинялись некоторым условиям. Таким образом, более точные результаты можно было получить на пути углубленного изучения природы особых точек.

В статье [153.13] Фукс прежде всего отметил, что Брио и Буке упустили случай рассмотреть поведение интеграла в окрестности $z=0$, когда уравнение (3.13) может быть представлено в форме

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z^k} F(z, y). \tag{3.14}$$

Решение этого вопроса могло бы помочь найти пути преодоления тех трудностей, которые встретились им при трактовке особых точек для $f(z, y)$. В связи с этим Фукс и занялся более подробным исследованием особенностей интеграла уравнения (3.14) при $z=0$. Здесь он ввел новое понятие точки неопределенности, под которой понимал особую точку, где функция «не получает определенного значения» и которая в то же время может быть точкой разветвления или нет. Прямого эквивалента в современных понятиях этому определению Фукса нет, так как последнее весьма широко. Но он ввел его именно для охвата особых точек как однозначных (терминология Вейерштрасса), так и многозначных функций. Кроме того, он здесь же разъяснил, что существуют функции с точками неопределенности, с так называемым неопределенным разветвлением, которые во всей окрестности точки a не могут быть представлены степенным рядом по $z-a$. Эти явления могут иметь место в интегралах нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому нужно, как правило, отказываться от употребления обычных вспомогательных средств, когда природа особенностей исследуется через разложение в окрестности особой точки. Нужно гораздо чаще, как советует Фукс, прибегать к помощи других вспомогательных

средств, чтобы изучить в целом множество значений, которые могут принять функции в окрестности особой точки.

При исследовании уравнения (3.14), где F — функция, определенная во всей области значений x, y и k — целое положительное число, Фукс устанавливает, что при $z=0$ y как интеграл этого уравнения может иметь значение p, при котором $F(x, y)$ не имеет особенностей.

Тогда в окрестности точки $z=0$, $y=p$, $\frac{1}{F(z, y)} = \alpha_0 + \alpha_1 (y - p) + \beta_1 z + \ldots$ и по уравнению

$$\frac{dz}{dy} = z^k [\alpha_0 + \alpha_1 (y - p) + \beta_1 z + \ldots] \tag{3.15}$$

нельзя заключать, что z как функция от y не могла бы достичь для $y=p$ значения $z=0$. Такое заключение связано с предположением, что y вдоль некоторого пути конечной длины переходит от y_0 к p, когда одновременно z, непрерывно меняясь от достаточно близкого к нулю значения $z=z_0$, переходит в $z=0$. Но если $z=0$ — точка неопределенности, то эти предположения не выполняются. В этом случае y, исходя из y_0, может принимать любое значение p, в то время как z остается как угодно близко к $z=0$. Но тогда нельзя для установления связи между z и y разлагать $F(x, y)$ в окрестности $z=0$ и $y=p$, как это предполагает построение уравнения (3.15) и соответственно у Брио и Буке уравнения (3.11).

Таким образом, для решения вопроса в случае, когда $z=0$ есть точка неопределенности интеграла уравнения (3.14), при $k>1$ можно ввести функцию $t=e^{\frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{z^{k-1}}}$, обладающую в $z=0$ точкой неопределенности, и затем исследовать интеграл y как функцию от t. Тогда уравнение (3.14) перейдет в $\frac{dy}{dt} t = F(z, y)$.

После этого Фукс показывает, что для различных значений t в окрестности $z=0$ могут существовать также различные значения y. Он получает формулы, согласующиеся с уже известными результатами у Пикара и Пуанкаре при исследовании аналогичного уравнения с другой точки зрения.

Возвращаясь затем к доказательству Брио и Буке единственности интеграла (см. § 1 настоящей главы), Фукс рассматривает уравнение

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{v^m \psi(z, u, v)}, \tag{3.16}$$

тождественное с уравнением (3.11), считая z функцией от v. Оно совпадает с (3.14) при $y=z$, $z=v$, $k=m$. Так как $y=u$ — голоморфный интеграл уравнения (3.4) или, что то же, уравнения (3.13), то $\psi(z, u, v)$ — «хорошо определенная» функция от z и v.

Но из предыдущего теперь известно, что $v=0$ может быть точкой неопределенности интеграла уравнения (3.16), а, значит, можно получить бесконечно много функций z от v, которые для $v=0$ принимают любое значение, в том числе и $z=z_0$, и удовлетворяют уравнению (3.16). Но тогда получается также как угодно много функций v от z, которые для $z=z_0$ равны нулю и удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.10), т. е. существует бесконечно много функций $y=u+v$, принимающих для $z=z_0$ значение y_0 и удовлетворяющих уравнению (3.13) или (3.4). Это положение имеет силу и в случае $m=1$, когда точка $v=0$ может быть точкой неопределенности интеграла уравнения (3.16).

Из рассмотренного Фукс приходит к важному заключению о том, что теорема о единственности интеграла $y=u$ уравнения (3.13) или (3.4), удовлетворяющего данным начальным условиям (z_0, y_0), верна только тогда, когда для этой функции u интегралы уравнения (3.16) не обладают точкой неопределенности $v=0$.

Выше названную работу Фукса не следует, однако, понимать как доказательство неверности теоремы Брио и Буке по существу. Для случая, когда точка z стремится к z_0 вдоль некоторого конечного пути L, их доказательство остается в силе. Теорема будет также справедлива и в случае бесконечного пути, но удовлетворяющего некоторым условиям, как это будет показано далее. Замечания Фукса связаны с тем случаем, когда путь не удовлетворяет таким условиям [1]. Статья его сыграла весьма положительную роль в уточнении этого вопроса.

Среди других работ по данной проблеме отметим опубликованную в Праге в 1889 г. статью Лерха [202], где было предложено новое доказательство теоремы единственности Брио и Буке и при том для системы (двух) дифференциальных уравнений. Однако рассмотренное выше исследование Фукса оставлено Лерхом без внимания, возможно, оно ему не было известно.

§ 4. Теорема единственности в трактовке Пикара и Пенлеве

После критики Фукса изложение теоремы единственности Брио и Буке потребовало либо дополнительных оговорок в духе исследования Фукса, что методически казалось мало приемлемым, либо изменения идеи доказательства таким образом, чтобы в одном приеме охватить все возможные случаи единственности и не оставить повода к противоречию, т. е. подтвердить истинность теоремы и в случае бесконечного пути.

Некоторые математики пошли по второму пути. Первым решил эту задачу Пикар. Еще в процессе чтения курса анализа на факультете наук в Париже он предложил некоторое усовершен-

[1] См. об этом в [16.3, 27].

ствование метода доказательства теоремы единственности Брио и Буке, но в духе их идей, для случая системы m уравнений с m функциями [232.4], рассматривая более подробно два уравнения с двумя функциями.

Затем, вероятно, под влиянием работы Фукса, Пикар существенно изменил идею доказательства теоремы единственности, впервые опубликовав его во втором томе «Трактата по анализу» (первое издание, 1893, стр. 314). Он рассматривал уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.17}$$

при условии, что функция f — голоморфна в окрестности точки x_0, y_0 и существует единственный голоморфный в окрестности x_0 интеграл, принимающий при $x=x_0$ значение y_0.

Пикар прежде всего уточняет здесь понятие стремления переменной точки y к данной точке y_0. Около точек x_0, y_0 описываются окружности C и C_1 как угодно малого радиуса и предполагается, что x следует вдоль дуги кривой L, остающейся внутри C, и совпадает с точкой x_0, а соответственные величины y остаются при этом внутри C_1 и при стремлении x к x_0 стремятся к y_0. Распространяя это положение на интеграл, принимающий данное значение для $x=x_0$, можно установить, что голоморфный интеграл есть единственный, обладающий предыдущим свойством. Пикар отмечает, что здесь он не предполагает каких-либо ограничивающих условий относительно пути. В процессе доказательства автор опирался на основную теорему существования интегралов уравнений с частными производными.

Это непрямое доказательство Пикара могло быть полезным для приложений, и существенным его элементом являлось указание на способ движения переменной точки x к x_0. В случае бесконечного пути здесь уже не мог пройти контрпример Фукса в связи с неограниченным уменьшением радиусов окружностей C и C_1.

С иной точки зрения к решению вопроса подошел Пенлеве в лекциях [228.11]. Рассматривая уравнение (3.17) с начальными данными $x=a$, $y=b$, когда функция f голоморфна для x и y внутри соответственно окружностей C и Γ, радиусов r и ρ с центрами a и b и $M=\max|f|$ в этой области, он устанавливает существование удовлетворяющего данным начальным условиям единственного голоморфного интеграла $y(x)$ в окружности с центром a и радиусом $\lambda=r\left(1-e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$. Затем ставится вопрос (стр. 19—20), не существует ли других, не голоморфных интегралов, принимающих в точке a значение b? И дается отрицательный ответ. При этом Пенлеве уточняет, что если x стремится к точке a вдоль некоторой кривой L, то эта кривая может иметь точку a асимптотической, и тогда длина ее может возрастать неопределенно при таком стремлении x к a. Единственное усло-

вие, которому подчиняется L, такое: для любого как угодно малого ε существует вдоль L такая точка x, что для любой точки, следующей за ней, кривая L остается внутри круга с центром a и радиусом ε.

Итак, пусть x стремится вдоль L и допустим, что интеграл уравнения (3.17) $y=\varphi(x)$ стремится к b. На кривой L найдется тогда точка x_0, расстояние которой от точки a будет меньше, чем $\frac{\lambda}{2}$. Тогда соответствующая величина $y=y_0$ будет внутри окружности Γ_1 с центром в точке b и радиусом $\frac{\rho}{2}$, и интеграл $y=\varphi(x)$, голоморфный внутри круга с центром x_0 и радиусом $\frac{\lambda}{2}$, будет голоморфным и в точке a и совпадет с интегралом Коши[1]. Несколько иначе решался аналогичный вопрос для уравнения второго порядка [228.11, 397].

Автор пятитомной монографии по теории дифференциальных уравнений английский математик Форсайт (34) при рассмотрении данного вопроса отмечал (1900 г.), что актуальное его решение возможно лишь после изучения влияния особых точек уравнения на интеграл в их окрестности [147, II, 47]. Он указывал на трудности построения общего доказательства теоремы единственности и вместе с тем считал вышеприведенное доказательство Пикара неполным, так как оно основывалось на соответствующей теореме существования для дифференциальных уравнений с частными производными. Не удовлетворяло Форсайта и доказательство Пенлеве, «фактически допускающее, что какая-нибудь ветвь возможного нерегулярного решения регулярна внутри круга половины радиуса, вне которого, как известно, существует регулярное решение: допущение, требующее подтверждения, прежде чем предложение может быть рассмотрено как доказанное». В связи с этим Форсайт трактовал теорему единственности [147, II, 81] в форме резюме мемуара Фукса [153.13].

Пенлеве не разделял скептицизма Форсайта и в ответ на его критику в том же году опубликовал статью [228.20] с уточнением и обобщением на систему прежнего доказательства.

Он рассматривал систему n дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.18}$$

правые части которых — аналитические функции комплексных переменных x, $y_1, \ldots, y_n$, голоморфные для $x=a$, $y_i=b_i$, например, в области $|x-a|<R$, $|y_i-b_i|<R$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Согласно теореме Коши существует решение $y_i(x)$ системы (3.18), голоморфное для $x=a$ и удовлетворяющее начальным условиям $y_i(a)=b_i$. Любое решение, голоморфное для $x=a$, со-

[1] Современное изложение см. в [16.3, 25—26].

ответствующее тем же начальным условиям, очевидно, совпадает с решением Коши.

Затем автор ставит вопрос, а не может ли существовать других аналитических решений $y_i(x)$ системы (3.18), голоморфных в некоторой области Δ, прилегающей к точке a, но не в точке a, и таких, что при стремлении x к a изнутри Δ функции y_i стремятся соответственно к b_i?

Относительно области Δ не делается никаких предположений. Она может быть, например, заключена между двумя спиралями, по отношению к которым точка a является асимптотической и дуга которой неограниченно возрастает, когда точка кривой стремится к a.

Вопрос можно поставить еще и так: существует ли примыкающий к точке a такой путь l, что решение $y_i(x)$ системы (3.18) было бы голоморфным вдоль l, кроме точки a, и чтобы $y_i(x)$ стремились соответственно к b_i, когда x стремится к a вдоль l. Меняя в случае надобности направление l, всегда можно допустить, что в каждой точке l обладает непрерывной касательной. Пусть s — дуга l, считающаяся положительной при выходе x из x_1, в направлении к a. При этом s будет возрастать и стремиться к пределу σ, когда x стремится к a, σ может быть равна $+\infty$.

Далее уточняется понятие «x стремится к a вдоль l» в более строгих терминах, но в том же смысле, как и в предыдущем доказательстве при движении по кривой L; формулируется теорема о том, что не существует решения $y_i(x)$ системы (3.18), голоморфного вдоль направления l (примыкающего к точке a), кроме точки a, и такого, что $y_i(x)$ стремится к b_i, когда x стремится к a вдоль l, и приводится ее доказательство. Полученный результат применялся также для случая действительного переменного.

Этот же вопрос привлекал затем внимание и других ученых. Так, в статье Юнга [279] (1902 г.) выражалось некоторое сомнение в строгости доказательств Пикара и Пенлеве. Юнг стремился уточнить некоторые неясные вопросы и предложил свой вариант второго доказательства Пенлеве. Особое внимание он уделял строгой формулировке понятия «приближение», введя новый термин «кривых приближения». В целом статья носит обзорный характер. В ней ставилась также цель популяризовать в английской литературе новые результаты по данной теме, обращая особое внимание на теорему единственности. На эту интересную статью в скором времени откликнулся Пикар. В небольшой заметке [235.20] он несколько подробнее изложил свою прежнюю идею доказательства теоремы единственности и уточнил некоторые другие вопросы, касающиеся теоремы существования решений дифференциальных уравнений.

§ 5. Развитие метода мажорантных функций в работах Линделефа, Ляпунова, Пуанкаре и других ученых

В конце прошлого века существенное дополнение и развитие получила как общая схема доказательства теоремы существования интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными переменными, так и отдельные ее звенья, например уточнение области сходимости и т. п.

Так, в 1896 г. Линделефом (35) предложено названное им элементарное доказательство данной теоремы в статье [204.3]. Идея этого доказательства подробно излагается на примере уравнения (3.17), где $f(x, y)$ — функция, аналитическая по x, y, голоморфная для $x=0$, $y=0$ и представимая рядом

$$f(x, y) = \sum_{m,n} A_{m,n} x^m y^n \tag{3.19}$$

для x, y, ограниченных по модулю некоторыми числами. Требуется доказать существование голоморфного для достаточно малых $|x|$ интеграла уравнения (3.17), равного нулю при $x=0$. Иначе говоря, надо показать, что коэффициенты c_i ряда

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{3.20}$$

можно так определить, что y будет интегралом уравнения (3.17).

Подставляя значение y из (3.20) в уравнение (3.17), получаем, с одной стороны, $\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots$, а учтя (3.19), с другой $-f(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots + \varphi_n x^n + \ldots$, где φ_i — полиномы от c и от коэффициентов A, причем φ_0 — константа, не зависимая от c, а φ_1 зависит от c_1, φ_2—от c_1 и c_2 и т. д.

Поэтому $c_1 = \varphi_0$, ... и

$$c_n = \varphi_{n-1}(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}). \tag{3.21}$$

Так можно найти коэффициенты c_i ряда (3.20), формально удовлетворяющего уравнению (3.17). Следующий этап — доказательство сходимости ряда (3.20) уже отличается от предложенных ранее. При этом рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \bar{f}(x, y) = \sum_{m,n} |A_{mn}| x^m y^n . \tag{3.22}$$

Пусть ряд справа (3.22) сходится для $|x|<\rho$, $|y|<r$ и $|\bar{f}(x, y)|<M$ для таких x, y. Тогда этому уравнению будет удовлетворять ряд

$$Y = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots, \tag{3.23}$$

где $nC_n = \bar{\varphi}_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1})$ (3.24), при условии

$$f(x, Y) = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 x + \ldots + \bar{\varphi}_n x^n + \ldots$$

Очевидно, что $\bar{\varphi}$ — такие же функции по отношению к $|A|$ и C, как φ по отношению к A и c. В частности, по отношению к C это полиномы с положительными коэффициентами, не меньшими, чем модули соответственных коэффициентов для φ. Сравнивая (3.24) и (3.21), мы видим, что для сходимости ряда (3.20) достаточно обеспечить сходимость (3.23).

Эрнест Линделеф (1870—1946).

Пусть $Y_\mu = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu$ будет сумма первых μ членов разложения некоторой функции $F(x)$. Тогда из тождественности $\frac{dY}{dx}$ и $\bar{f}(x, Y)$ можно записать

$$\frac{dY_\mu}{dx} = [f(x, Y)]_{\mu-1} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 x + \ldots + \bar{\varphi}_{\mu-1} x^{\mu-1}.$$

Но $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{\mu-1}$ не зависят от $C_\mu, C_{\mu+1}, \ldots$ Тогда получится $[\bar{f}(x, Y)]_{\mu-1} = [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1}$ и, следовательно,

$$\frac{dY_\mu}{dx} = [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1} \qquad (3.25$$

— фундаментальное тождество, из которого автор получает доказательство сходимости ряда, определяющего Y. Придавая μ значения 1, 2, ..., получаем

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= [f(x, 0)]_0 = |A_{00}|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dY_\mu}{dx} &= [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1}, \end{aligned} \qquad (3.26$$

но, по предположению, $|A_{00}| < M$, и тогда из первого уравнения (3.26) при действительных положительных x получается $Y_1 < Mx$. Если рассматривать $0 \leqslant x \leqslant h$, где h — меньшее из двух величин ρ и $\frac{r}{M}$, то получится $Y_1 < r$, $x \leqslant \rho$ и, следовательно, $\bar{f}(x, Y_1) < M$.

Но так как x и Y_1 — величины положительные, все члены разложения $\bar{f}(x, Y_1)$ будут положительны, так что получится

$$[\bar{f}(x, Y_1)]_1 \leqslant \bar{f}(x, Y_1) < M.$$

Применив эти соображения для $Y_1, \ldots$ и предположив, что $Y_{\mu-1} < r$, получим также $[f(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1} \leqslant \bar{f}(x, Y_{\mu-1}) < M$ и, следовательно, из (3.26) $\frac{dY_\mu}{dx} < M$ или $Y_\mu < Mx \leqslant r$.

Итак, полиномы $Y_1, Y_2, \ldots Y_\mu$ (с положительными коэффициентами) все меньше r, когда $0 \leqslant x \leqslant h$. Отсюда заключаем, переходя к пределу, что он будет таким же и для ряда Y. Этот ряд, имея конечную сумму для $x=h$, следовательно, будет сходящимся для $|x| < h$. Таким образом, уравнение (3.17) допускает интеграл, переходящий в 0 для $x=0$ и голоморфный в круге с центром в точке нуль и радиусом, которым служит меньшее из двух чисел ρ и $\frac{r}{M}$.

Полученный результат Линделеф распространяет на систему дифференциальных уравнений и доказывает более общую теорему о существовании системы интегралов для уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где f_i — аналитические функции переменных x, $y_1, \ldots y_n$ и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, разложимые в степенные ряды вида

$$f_i = \sum_{\varrho,\mu,\nu} A^{(i)}_{\varrho\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_m} x\, y_1^{\mu_1} \ldots y_n^{\mu_n} \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_m^{\nu_m}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и сходящиеся для достаточно малых модулей аргументов. Эти интегралы удовлетворяют нулевым начальным условиям и представляются степенными рядами по x, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, сходящимися до тех пор, пока модули этих величин остаются меньше некоторых пределов.

В этой оригинальной работе Линделеф по-новому построил мажорирующую функцию и нашел сочетание метода пределов с идеями первого метода Коши, что дало ему возможность получить область существования интеграла, совпадающую с областями, найденными другими методами. Развитые здесь идеи были затем применены Линделефом для (по его же термину) элементарного доказательства теоремы о существовании неявных функций.

Новые оценки интервала сходимости интегралов дифференциальных уравнений, применяя метод мажорантных функций, получил Ляпунов.

В заметке [93.4], оставшейся неопубликованной, А. М. Ляпунов (36) дал, по существу, новое, очень оригинальное доказательство теоремы существования интеграла системы уравнений, заданных в нормальной форме, методом мажорант.

В теореме 1 рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.27}$$

где f_i — независимые явно от t функции, принимающие значение нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, и синектические, пока $|x_i| \leqslant k$; $\max |f_i| = M$ при $|x_i| \leqslant k$. Также заданы при $t = 0$ значения $x = a_i$; причем $\max_i |a_i| = a$. Тогда функции x_i представимы степенными рядами по $t, a_1, \ldots, a_n$, обрящающимися в нуль при $a_i = 0$ и абсолютно сходящимися для

$$a \leqslant \frac{k}{n}\varepsilon, \qquad |t| < \frac{k}{Mn} \ln \frac{1}{\varepsilon e^{1+\varepsilon}},$$

где довольно малое положительное $\varepsilon < \lambda$, а λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda e^{1+\lambda} = 1. \tag{3.28}$$

(По вычислениям автора $\lambda = 0{,}27846\ldots$). Сходимость ряда

$$x_i = a_i + t \sum_i B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} t^{\alpha}$$

следует из сходимости ряда, представляющего интеграл вспомогательного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = M\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{X}{k}\right)^n} - 1\right) \tag{3.29}$$

и обращающегося в a при $t=0$. А абсолютная сходимость разложения (3.29) следует из такой же для интеграла уравнения

$$\frac{dX}{dt} = M\left(\frac{1}{1 - n\frac{X}{k}} - 1\right).$$

Заменами $X = \frac{k}{n}x$, $t = \frac{k}{Mn}\tau$, $a = \frac{k}{n}\alpha$ получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-x},$$

интеграл которого, определяемый условиями $x = \alpha$ при $\tau = 0$, удовлетворяет уравнению

$$xe^{-x} = \alpha e^{-\alpha} e^{\tau}. \tag{3.30}$$

Интеграл x будет оставаться синектической функцией α и τ, пока

$$|\alpha e^{-\alpha} e^{\tau}| < \frac{1}{e} \tag{3.31}$$

($|x| < 1$) и для этого должно быть $|\alpha e^{-\alpha}| < \frac{1}{e}$, т. е. $|\alpha| < \lambda$,

где λ определяется из (3.28). Предполагая $\varepsilon < \lambda$ и беря $|\alpha| \leqslant \varepsilon$, из

$$|\tau| < \ln \frac{1}{\varepsilon e^{1+\varepsilon}} \tag{3.32}$$

получаем $e^{|\tau|} < \frac{1}{\varepsilon e^{1+\varepsilon}}$ и $|e^{\tau}| < \frac{1}{\varepsilon e^{\varepsilon+1}} \leqslant \frac{1}{e\,|\alpha e^{-\alpha}|}$, т. е. удовлетворение условия (3.31), откуда и следует справедливость теоремы. Верхний предел X для x_i при данном t из рассматриваемого интервала можно найти из уравнения

$$Xe^{-\frac{n}{k}X} = ae^{-\frac{n}{k}a+M\frac{n}{k}|t|}.$$

В теореме 2 рассматривается аналогичный круг вопросов для системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

где f_i обращаются в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ для любого t и синектические, пока $|t| < T$, $|x_i| \leqslant k$, $\max|f_i| = M$ при $\max|x_i| = k$. Тогда ряды для интегралов x_i по целым положительным степеням t, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, обращающиеся в нули при $a_i = 0$ для любого t, будут сходиться абсолютно, пока

$$a \leqslant \frac{k}{n}\varepsilon, \quad |t| < T\{1 - (\varepsilon e^{1+\varepsilon})^{\frac{k}{nMT}}\}.$$

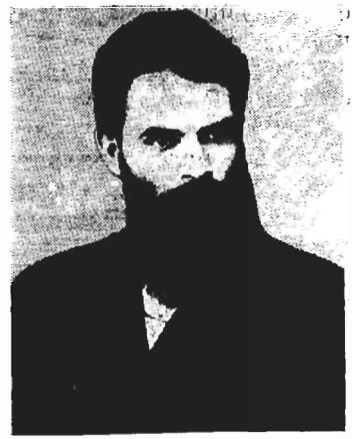
В этой же заметке имеется и третья очень важная теорема, содержащая более общее по сравнению с теоремой 1 выражение для оценки модуля t в случае сходимости рядов x_i. Исходя из предложений теоремы 1 и рассмотрев некоторые вспомогательные соотношения, Ляпунов установил, что эти ряды будут абсолютно сходиться, пока $a \leqslant k\varepsilon$, $|f(x)| < \mu$ и $|t| < \frac{k}{Mn} \ln \frac{\mu}{\varphi(\varepsilon)}$ ($\varphi(\varepsilon) = \max|f(x)|$ для $|x| \leqslant \varepsilon$).

При этом он показывает, что $\varphi(\varepsilon) < \mu$, и аналогично (3.32) берет $|\tau| < \frac{1}{n} \ln \frac{\mu}{\varphi(\varepsilon)}$ и получает $|f(\alpha)|\,|e^{n\tau}| < \mu$.

Доказательство теоремы о существовании интегралов, представляемых степенными рядами и удовлетворяющих данным начальным условиям для уравнений высших порядков, в весьма общей форме давалось Кенигсбергером (37) в книге [195.2].

Существенное внимание методу мажорантных функций доказательства существования интегралов придавал Пуанкаре (38). Основы этого метода и его приложения были изложены в известном сочинении о проблеме трех тел [237.17], получившем премию Оскара II, и в трактате о новых методах небесной механики [237.20].

Именно Пуанкаре принадлежит термин мажорантные функции. Он же ввел символ $\ll$ для обозначения мажорирующего ряда $\psi(x, y)$ по отношению к мажорируемому $\varphi(x, y)$, т. е. запись $\varphi(x, y) \ll \psi(x, y)$ означала, по автору, что каждый коэффициент степенного ряда ψ действительный и положительный, больше абсолютной величины соответствующего коэффициента ряда φ [237.20, 48].



А. М. Ляпунов (1857—1918).

Существенным вкладом Пуанкаре в рассматриваемую теорию было доказательство существования интегралов системы дифференциальных уравнений, содержащих параметры, и представление интегралов степенными рядами как по малому параметру, так и по начальным условиям. Основным методом доказательства был метод мажорантных функций. Автор сначала рассмотрел систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, t, \mu); \quad \frac{dy}{dt} = \psi(x, y, t, \mu), \tag{3.33}$$

где φ и ψ — степенные ряды по x, y, зависящим от переменной t и произвольного параметра μ. Интегралы системы (3.33) можно представить в виде степенных рядов

$$f(t, \mu) \text{ и } f_1(t, \mu). \tag{3.34}$$

Если же рассмотреть другую систему

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y, t, \mu); \qquad \frac{dy}{dt} = \psi_1(x, y, t, \mu) \tag{3.35}$$

той же формы, что и (3.33), при условии $\varphi \ll \varphi_1$, $\psi \ll \psi_1$ (по всем аргументам) и если ряды

$$\bar{f}(t, \mu), \quad \bar{f}_1(t, \mu) \tag{3.36}$$

— степенные по t и μ и обращающиеся в нуль при $t=0$ и формально удовлетворяющие системе (3.35), то следует, что $f \ll \bar{f}$, $f_1 \ll \bar{f}_1$ (по аргументам t, μ).

Далее предполагается, что φ и ψ из (3.33) разложены по степеням x, y, μ для любого значения t из интервала $0, t_1 (t_1 > 0)$. Тогда будут существовать степенные ряды по μ

$$f(t, \mu) \text{ и } f_1(t, \mu) \tag{3.37}$$

с коэффициентами, зависящими от t и, возможно, не разлагающимися в ряд по t и формально удовлетворяющие уравнениям (3.33). В процессе дальнейших выкладок, которые мы опустим, он строит мажорирующие ряды для (3.37) при условии $0<t<t_1$ и дает правило определения коэффициентов этих рядов.

Далее рассматривается построение и существование интегралов для системы трех уравнений, правые части которых содержат три неизвестные функции и параметр (не содержат аргумента t). Полученные результаты позволяли раскладывать решение дифференциального уравнения по степеням малого параметра, но лишь для таких значений независимой переменной t, модули которых были довольно малы. Это то, что было известно Коши. Но в дальнейшем Пуанкаре получает более общий результат.

Рассматривая систему (3.33), он предполагает, что решения этих уравнений $x=\theta(t, \mu)$, $y=\omega(t, \mu)$ удовлетворяют нулевым начальным условиям, а также то, что для любой величины t из интервала $(0, t_0)$ обе функции φ и ψ могут быть разложены по степеням μ, x—$\theta(t, 0)$, y—$\omega(t, 0)$ (коэффициенты этих разложений будут некоторыми функциями от t).

Иначе говоря, частные решения $\mu=0$, $x=\theta(t, 0)$, $y=\omega(t, 0)$ не проходят ни через какую особую точку. В этом случае, как утверждает Пуанкаре, $\theta(t, \mu)$, $\omega(t, \mu)$ могут быть разложены в степенной ряд по μ (именно μ, а не t и μ) для любой величины t из интервала $(0, t_0)$ при достаточно малом $|\mu|$.

При доказательстве этого строилась система аналогично (3.35) с конкретным видом мажорант φ_1 и ψ_1. В результате ее исследования Пуанкаре пришел к заключению о сходимости степенных рядов по μ для всех (рассматриваемых — *В. Д.*) значений t при достаточно малых $|\mu|$, выражающих интегралы вспомогательных и, следовательно, исходных уравнений. Автор заметил потом, что полученные результаты могут быть применены и для случая нескольких параметров. Он рассмотрел также их применение к проблеме трех тел.

Вопросу об уточнении области сходимости интеграла при способе мажорантных функций была посвящена заметка Штекеля [259.1]. Он несколько изменил систему основных неравенств, используя для уравнения первого порядка неравенство, аналогичное (3.2), где вместо величины M входит надлежащим образом подобранная величина G, и получает: $\rho_1=a(1-e^{-\frac{b}{2Ga}})>\rho$.

Новый вид мажоранты был предложен Фейером в [143]. Она выбиралась общей для всех функций f_i системы уравнений $\frac{dy_1}{dx}=f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, благодаря чему, по методу исчисления пределов, требовалось интегрировать вспомогательную систему, переходящую в одно уравнение. Таким образом, вопрос существования

голоморфных решений данной системы сводился к отысканию интеграла этого одного уравнения простой квадратурой. В отдельных случаях эта мажоранта доставляла радиус сходимости больший, чем общеизвестный.

Различные стороны метода мажорант привлекали внимание ученых и в последующие годы. Так, в 1915 г. Пере возвратился к обсуждению вопроса о соотношении областей сходимости интегралов при мажорантном методе и методе последовательных приближений.

Существенное значение для уточнения области сходимости в случае исчисления пределов имели работы [218.4.— 5 и др.] Миттаг-Лефлера (39) и др. Если вместо ряда Тейлора подставить введенные им ряды полиномов, эти ряды представят систему решений уравнений во всей их звезде голоморфности (относительно аргумента).

§ 6. Применение метода мажорантных функций к доказательству существования интегралов уравнений в полных дифференциалах и с частными производными. Теорема С. В. Ковалевской

Первые работы в этом направлении, как отмечалось раньше, принадлежали Коши, рассмотревшим этот вопрос для линейной системы n уравнений с частными производными первого порядка, содержащих n неизвестных функций и взятых в нормальной форме.

Во второй половине прошлого века вопрос этот стал решаться в основном с 70-х годов. Именно в это время (1872) появились публикации Буке и Мерэ относительно существования интегралов уравнений в полных дифференциалах, потом известный мемуар А. Майера [213.1], содержащий новый метод интегрирования, затем теорема Ковалевской (1874) и Дарбу (1875) о существовании решений уравнений с частными производными. В последующие десятилетия указанная тема нашла широкое развитие в многочисленных трудах, обзор которых выходит за пределы наших задач.

В статье [106] Буке отмечает, что он давно установил применимость развитого им с Брио метода мажорантных функций с некоторыми изменениями к доказательству существования синектических интегралов системы уравнений в полных дифференциалах. Он рассматривает сначала уравнение

$$du = f_1(z_1, z_2, u)\, dz_1 + f_2(z_1, z_2, u)\, dz_2, \tag{3.38}$$

которое эквивалентно системе

$$\frac{du}{dz_1} = f_1(z_1, z_2, u) = p_1; \quad \frac{du}{dz_2} = f_2(z_1, z_2, u) = p_2 \tag{3.39}$$

С. В. Ковалевская (1850—1891).

при соблюдении условий

$$\frac{dp_1}{dz_2} + \frac{dp_1}{du} p_2 = \frac{dp_2}{dz_1} + \frac{dp_2}{du} p_1 . \quad (3.40)$$

Полученный результат обобщается затем на случай уравнения $du = p_1 dz_1 + p_2 dz_2 + \ldots + p_n dz_n$, а также для системы таких уравнений.

Независимо от Буке и несколько в более общей форме, но таким же методом, аналогичный вопрос был решен Мерэ [214.3, 143]. Он же рассмотрел и случай, когда уравнения содержат параметр. Курс Мерэ с соответственной публикацией вышел несколько раньше, чем упоминаемая выше статья Буке. Как позже выяснилось, авторы встречались в Париже в 1868 г., где произошел обмен мнений, в том числе и о данной теореме.

Вне сомнений, что к своим результатам по этому вопросу они могли подойти независимо друг от друга, хотя приоритет в разработке метода остается за Брио и Буке. В этом смысле Мерэ был их учеником. Возможно, было принято соглашение не выступать с независимыми публикациями на эту тему. Но так как Мерэ в соответственном месте своего курса ничем не обмолвился о решении того же вопроса другим автором, то Буке обнародовал упомянутый выше результат. В связи с этим он писал, что объявляет предложение, которое «было сообщено различным лицам и, в частности, месье Мерэ. Публикация «Краткого курса анализа» показала мне, что автор забыл нашу беседу по этому вопросу» [106, 265]. Это замечание вызвало бурный протест Мерэ, которому он посвятил часть предисловия в новом издании «Лекций по анализу» [214.5]. Пространно изложив историю вопроса, Мерэ утверждал, что Буке не мог без его помощи открыть эту теорему. Столь сильная и, можно сказать, болезненная реакция объяснялась еще и тем, что при упоминании данной теоремы другие авторы связывали ее только с именем Буке. Не останавливаясь далее на этом споре, отметим все же, что Мерэ явно выразил свои претензии лишь через 22 года после первых публикаций.

Рассматриваемый вопрос был позже предметом работ Адамара, Гульдберга и др. Гульдберг рассматривал условия интегрируемости уравнения второго порядка, а также случаи так называемого неполностью интегрируемого уравнения.

Существенным шагом в развитии применения метода мажорантных функций к доказательству существования интегралов уравнений в частных производных была диссертация С. В. Ко-

валевской [29.1]. Здесь нашел применение и дальнейшее развитие метод Вейерштрасса, а также были уточнены и обобщены соответственные результаты Коши, остававшиеся к тому же неизвестными Ковалевской в то время. Строгость и простота доказательства теоремы Ковалевской, ясность изложения сделали ее работу, по характеристике Пикара [235.22, 36], классической; еще раньше ее результат высоко оценил Пуанкаре [237.17, 26].

В первом параграфе работы рассматривается система однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных относительно частных производных от n неизвестных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, по независимым переменным: $x, x_1, x_2, \ldots x_r$ при n известных функциях $G_{k,l}^{(i)}$

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \sum_{k,l} G_{k,l}^{(i)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}; \quad i, l = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{3.41}$$

и доказываются теоремы о том, что 1) если φ_{i0} есть n произвольно взятых степенных ряда, обладающих общей, хотя бы и ограниченной, областью сходимости, и в нулевой точке обращающихся в нуль, то имеется n определенных степенных ряда от $x, x_1, x_2, \ldots, x_r$, которые при $x=0$ переходят соответственно в $\varphi_{i0}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ и при подстановке их вместо φ_i в уравнения (3.41) формально им удовлетворяют; 2) все эти n рядов сходятся безусловно (абсолютно — *В. Д.*) в некоторой области и представляют решения уравнений (3.41). Доказательство строится по уже известной схеме. В уравнения (3.41) вместо $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ подставляются ряды вида

$$\varphi_i = \varphi_{i0}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_{i\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\frac{x^\nu}{\nu!} \tag{3.42}$$

и в обеих частях каждого уравнения получаются разложения по степеням x. После некоторых преобразований находятся ряды, формально удовлетворяющие заданным дифференциальным уравнениям, а сходимость их доказывается методом мажорантных функций. При этом рассматривается вспомогательная система

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \sum_{k,l} \widetilde{G}_{k,l}^{(i)}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\frac{\partial \psi_l}{\partial x_k}$$

и тогда $\varphi_i \ll \psi_i$, причем за мажоранту, следуя Вейерштрассу, берется величина $\dfrac{G}{1 - \dfrac{\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n}{g}}$, где G и g выбраны надлежащим образом. Такого типа мажоранта использовалась потом Пуанкаре и другими. Легко распространив полученный результат на

линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \sum_{k,l} G^{(l)}_{k,l}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} +$$

$$+ G^{(l)}_{00}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \begin{pmatrix} i, l = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

С. В. Ковалевская перешла к рассмотрению (§ 2) более общего случая нелинейного уравнения, содержащего функцию φ от $r+1$ переменных $x, x_1, x_2, \ldots, x_r$ и ее производные вида

$$G\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_r, \varphi, \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r}\varphi}{\partial x^{\alpha} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}}, \ldots\right) = 0, \qquad (3.43)$$

где G — целая рациональная функция по всем своим аргументам и $\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_r \leqslant n$. Задача состояла в определении самым общим образом функционального элемента (в смысле Вейерштрасса) $\varphi(x, x_1, \ldots, x_r | a, a_1, \ldots a_r)$, т. е. степенного ряда относительно разностей $x-a$, $x_1-a_1, \ldots, x_r-a_r$, сходящегося внутри некоторой окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ и удовлетворяющего данному уравнению (3.43). При решении ее сначала рассматривается так называемый нормальный случай, когда по крайней мере одна из производных, пусть $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$, действительно войдет в G, а затем показывается (§ 3), что, если дифференциальное уравнение не имеет нормальной формы, ему можно всегда придать такую с помощью линейного преобразования независимых переменных, и рассмотреть задачу уже относительно новой независимой переменной. Здесь же Ковалевской установлено очень важное условие, при котором дифференциальное уравнение в частных производных всегда имеет интеграл и которое прошло мимо внимания как Коши, так и занимавшегося тем же вопросом одновременно с Ковалевской Дарбу, что было отмечено в письме Вейерштрасса Эрмиту (см. [57.2, 5]). Именно она заметила, что если в дифференциальное уравнение n-го порядка входит производная $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$, когда $m<n$, но $m>0$, и, кроме того, в остальных производных уравнения (3.43) $\alpha<m$, то можно построить степенной ряд, формально удовлетворяющий данному уравнению. Но для его сходимости коэффициенты должны подчиняться таким ограничениям, что этот ряд, вообще говоря, не будет сходиться ни в какой точке $(x, x_1, \ldots x_r)$, как бы близко ни взять ее к точке $(a, a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Этот факт был показан на примере уравнения $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ [1].

[1] См. о нем подробнее в [91, 442].

Полученные результаты были обобщены также (§ 4) на случай системы m алгебраических дифференциальных уравнений с частными производными от m неизвестных функций по $r+1$ переменному. Указанная работа С. В. Ковалевской получила широкую известность, и ее метод решения задачи, обладающий большой общностью и простотой, стал классическим и перешел в учебную литературу.

Почти одновременно с диссертацией Ковалевской опубликованы заметки Дарбу [130.4], где рассматривался тот же предмет, но с меньшей основательностью и полнотой. Здесь давалось применение, при соответствующей модификации, метода Брио и Буке к уравнениям с частными производными вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F(p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n, t), \tag{3.44}$$

для которых искался интеграл $f(q_1, \ldots q_n)$, непрерывный и конечный в области начальных данных в форме ряда, производные которого по q_i есть p_i ($\frac{\partial V_i}{\partial q_i} = p_i$). При рассмотрении вопроса для систем уравнений с частными производными некоторого порядка имелось в виду их приведение к таким, которые содержали частные производные первого порядка от искомых функций. При второй из указанных публикаций Дженочи [130.4] напомнил о приоритете Коши в данном вопросе, а также о том, что Коши владел понятием равномерной сходимости рядов и установил некоторые теоремы в данной области на заседании академии 14 марта 1853 г. (C. R. 1853, 36, 456—458).

Дальнейшее развитие и новую форму изложения нашел этот вопрос в многочисленных работах Кенигсбергера, Пуанкаре, Мерэ, Рикье, Ми, Горна, Соважа, Тресса, Делассю и др.

В докторской диссертации Пуанкаре [237.2] исследование Ковалевской было дополнено, в частности, подробным изучением уравнения

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = \lambda z,$$

где аналитические функции X_i могли быть представлены в форме $X_i = \lambda_i x_i - Y_i$ [237.17, 28]; Y_i — ряды с членами не ниже второй степени по отношению к $x_1, x_2, .., x_n$. Автор доказал, что при определенных условиях [1] относительно λ_i это уравнение допускает голоморфный интеграл, разложимый по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обобщение полученного результата на уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} + X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

дано в [237.17, 28]. Ряд интересных следствий из этой теоремы развиты в работах других математиков.

[1] См. об этом в гл. V, § 2.

В большом цикле работ Кенигсбергера в 1891—1892 гг. изучались вопросы приводимости и неприводимости уравнений с частными производными и в зависимости от этого характер интегралов, условия их существования, уточнение области их сходимости и другие в тесной связи с новейшими результатами в алгебре и теории функций.

Вопросы существования решений систем полных линейных дифференциальных уравнений с частными производными и условия их регулярности были главным предметом исследования Горна в 1890—1891 гг. Автор обобщил здесь исследования Фукса о поведении интеграла линейного дифференциального уравнения в окрестности особой точки на уравнения с многими переменными.

Доказательство существования интегралов для бесконечной системы уравнений и некоторые дополнения теоремы Ковалевской рассмотрены в диссертации Ми [216.1].

Теорема Пуанкаре о разложимости интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений по степеням малого параметра распространялась Кенигсбергером на решения систем дифференциальных уравнений с частными производными в [195.4], а дополнение работы Кенигсбергера [195.3] в смысле уточнения условий интегрируемости для систем первого порядка представил Штекель [259.2].

Существенный шаг вперед в решении данного круга проблем связан прежде всего с работами Мерэ и Рикье.

Как упоминалось ранее, в работе Ковалевской изучались системы, содержащие столько же уравнений, сколько было неизвестных функций и притом разрешимых относительно старших производных каждой из функций по одной и той же переменной.

В работах Мерэ и Рикье теорема существования интегралов трактовалась для линейных систем первого порядка более общего вида, когда уравнение содержало g функций от n переменных и число уравнений отличалось от числа функций.

Первая работа Мерэ в этом направлении [214.4] опубликована в 1880 г. Углубленно изучая этот интересный мемуар, Рикье заметил некоторые неточности в доказательстве сходимости, и после их исправления и дополнений была опубликована общая работа [215]. Несколько позже Рикье, изучив вопрос существования интегралов для так называемой гармонической системы и систем более общего вида, получил решение задачи для весьма широкого класса уравнений, существенно обобщив результаты Ковалевской.

Почти одновременно с Рикье тем же вопросом заинтересовался Делассю (40). В одной из первых работ в этом направлении [132] он стремился, по его словам, изложить результаты Рикье более естественно и просто и с несколько иной точки зрения, частично их дополняя. В серии следующих работ ему удалось также получить весьма общие результаты, изложенные

проще, чем у Рикье, усложнявшего свои работы малопринятой терминологией. В некоторых из упоминаемых и других статьях Рикье вел энергичную полемику с Делассю, отстаивая свой приоритет в решении этой проблемы и отмечая слабости метода замены переменной Делассю, который не всегда мог быть применим.

Как отметил Э. Пикар [235.22, 39], долгое время у математиков не было единого мнения о понятии общего интеграла уравнения с частными производными, когда имели место две основные точки зрения — Ампера и Коши. Не была выяснена и возможность их равнозначности. Этот вопрос разрешен Гурса (41), автором многочисленных исследований по теории уравнений с частными производными. Он показал, что интеграл, будучи общим в смысле Ампера, может не быть таковым в смысле Коши.

Глава IV. РАЗВИТИЕ УЧЕНИЯ ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ И ИХ КЛАССИФИКАЦИИ

§ 1. Постановка вопроса. Понятие особых точек и их исследование у Коши

Теоремы существования и единственности определяли интеграл дифференциального уравнения в круге некоторого радиуса, представляя тем самым элемент аналитической функции, который мог быть продолжен далее определенным способом. Полученная таким образом аналитическая функция будет удовлетворять тому же уравнению, что и исходный элемент. Поведение этой функции-интеграла, ее характер и область существования определяются ее особыми точками. Более того, может быть поставлен вопрос о рассмотрении любой аналитической функции как функции множества ее особых точек. При этом, как отметил В. В. Голубев [16.5, 157], центр тяжести изучения аналитических функций переносится из области голоморфности на множество особых точек. Поведением на особом множестве некоторых вспомогательных функций-параметров определяется характер и поведение аналитической функции во всей области ее существования. Отсюда можно понять то большое внимание, которое уделяли многие математики изучению поведения интегралов уравнений в области особых точек. Изучение характера и расположения особых точек интегралов по виду определяющего их дифференциального уравнения является основной и важнейшей задачей аналитической теории дифференциальных уравнений. В постановке и развитии этого вопроса сыграло существенную роль само учение об особых точках функций и его эволюция. А его важной и неотъемлемой частью был и вопрос о классификации особых точек, которая развивалась в зависимости от постановки задач, от уровня накопленных знаний, от методики исследования.

Уже вскоре после установления основных операций математического анализа особые точки функций стали понимать как такие, для которых функция не существовала или в которых нарушалась непрерывность функции или ее производной. Такое представление сохранялось до начала XIX века.

Рассматривая этот вопрос в Курсе анализа, ч. 1, Коши отмечал, что если по данному определению функции в частном слу-

чае (т. е. для данного значения аргумента) нельзя прямо получить значений рассматриваемой функции, то «отыскивают ее предел или те пределы, к которым стремится эта функция, между тем как переменные неопределенно приближаются к данным частным значениям. ... Значения функции, определенные таким образом, называются особенными. Таковы, например, те значения функции, которые соответствуют бесконечным значениям переменной, а также те, которые соответствуют разрыву непрерывности функции. Разыскание особенных значений функций принадлежит к числу самых важных и самых утонченных вопросов анализа» [122.1 (русск. пер.), 43]. Затем Коши довольно подробно изучал различные формы неопределенных выражений и способы их вычисления как для функции одного, так и нескольких переменных. Более подробного рассмотрения поведения функции в окрестности особых точек он здесь не производил. Несколько позже, в 1823 г., в резюме уроков по дифференциальному и интегральному исчислению [122.2] Коши уже различал (по современной терминологии) полюсы и критические точки; о последних речь идет при рассмотрении примеров функций $x^{1/2}$, $x^{2/3}$ в связи с исследованием выражений на максимум и минимум.

В это же время он довольно подробно изучил свойства особой точки, в которой функция обращалась в бесконечность.

Так, в «Мемуаре по теории определенных интегралов», представленном Институту в 1814 г. и после некоторых дополнений опубликованному в 1825 г. и уже содержащему его интегральную теорему в простейшем частном случае интегрирования по прямоугольному контуру, и в известном мемуаре об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами [122.3], где изучалась та же теорема в более общем виде, Коши указывал, что величина интеграла не зависит от пути интегрирования, соединяющего те же две точки, если подынтегральная функция будет конечной и непрерывной в прямоугольнике, содержащем область интегрирования [1]. В том же случае, когда контур, образованный двумя кривыми, соединяющими две данные точки области, содержал такую точку, где функция обращалась в бесконечность, то величины интегралов, взятых вдоль обеих кривых, будут отличаться на $\pm 2\pi i f$, где f — величина, через год получившая название вычета подынтегральной функции относительно точки a. Коши уделил здесь много внимания подробному рассмотрению аналогичных случаев.

Отметим, что идеей будущей интегральной теоремы Коши еще раньше четко владел Гаусс, о чем он писал Бесселю в письме 1811 г. (опубликовано в 1880 г.). Но эта идея не получила у него должного развития и долго оставалась неизвестной широкому кругу математиков.

---

[1] Подразумевается вместе с тем и непрерывность ее производной, о чем была речь раньше.

Дальнейшее углубленное изучение Коши свойств функций в точках, где они обращаются в бесконечность, и в том числе разных порядков, связано с созданием теории вычетов в 1826—1830 гг.

В мемуаре 1831 г. [122.13, 53] Коши проявил понимание особого характера поведения функций в окрестности, как мы теперь говорим, существенно особой точки. Приводя примеры, он обособил функции, обладающие такой точкой, в отдельную группу, и отметил, что функции типа $e^{\frac{1}{x}}$ становятся разрывными для $x=0$, «никогда не будут разложимы в сходящиеся ряды, упорядоченные по возрастающим степеням x». Как известно, существенным шагом вперед в этом отношении были теоремы Вейерштрасса (1841) и Лорана (1843) [201.1] о разложении непрерывных и дифференцируемых в круговом кольце функций в ряд по положительным и отрицательным степеням аргумента.

Таким образом, уже к началу 30-х годов XIX века Коши различал основные типы особых точек однозначных функций, понимал характер их влияния на поведение функции, но они не получили у него еще специального названия (в терминологии он отличал точки бесконечности функции и точки разрыва) и не были объектом специального изучения. Однако в ряде работ последующих лет Коши неоднократно возвращался к изучению поведения интегралов, когда подынтегральная функция была бесконечной или разрывной в некоторых точках области. Так, в мемуаре [122.14, 109] (1841) несколько подробнее сказано о поведении функции в окрестности существенно особой и критической точки, а в заметке [122.19] обобщено упоминаемую выше теорему на более общий случай, когда интеграл брался по замкнутому криволинейному контуру. В других статьях обобщена теорема вычетов.

В письме Кориолису в январе 1837 г. [122.5] Коши подчеркивал, что функция, не принимающая бесконечных значений, в общем может быть непрерывной, пока она не стала многозначной. Таким образом, корень уравнения не перестает быть в общем непрерывной функцией от параметра, входящего в уравнение, пока оно не получит равных корней. Те значения параметра, при которых уравнение имеет общие корни с его производной, Коши называет главными. «В таком случае,— говорит он,— любой корень будет разложим в ряд по возрастающим степеням параметра, пока его модуль будет оставаться меньше всех модулей главных величин». Здесь же ставится вопрос о разложении корней уравнений некоторой степени по возрастающим или убывающим степеням, а также и по дробным.

Более подробно эти мысли Коши были развиты через несколько месяцев в письме [122.6]. Если мы не ошибаемся, в литературе нашего века об этих результатах Коши не упоминалось. А именно здесь можно усмотреть основу дальнейших ис-

следований в области критических точек как самого Коши, так и его учеников и последователей. Изложив доказательства выше упомянутых и других теорем о разложении корней по параметру, Коши развивает здесь новое геометрическое построение для выражения зависимости t и z, связанных уравнением $\pi(z)+t\omega(z)=0$, где функции $\pi(z)$ и $\omega(z)$ — многочлены; причем степень первой выше второй, $z=x+iy$.

Рассматривая также уравнения $\pi(z)=0$ и $\omega(z)=0$, Коши установил, что если они имеют равные корни, то раскладываются по возрастающим и дробным степеням t и $\frac{1}{t}$ в зависимости от изменения $|t|$. В процессе дальнейшего анализа он применял и такой прием, как сечение, выходящее в форме луча из узловой точки и разделяющее две ветви кривой, сходящиеся в этой точке. При этом он заметил, что кривые в узловых точках встречаются под равными углами и вычислил также приращение функции при переходе от одной ветви на другую в окрестности такой точки. Несколько позже (1844) Коши изучил аналогичный вопрос и для случая более общего уравнения $f(t, z)=0$, т. е. когда параметр входит в уравнение нелинейно.

Упоминая об этих работах, Брилль и Нетер [110, 188] упрекали Коши за недостаточную, по их выражению, общность изложения, так как он использовал ряд Маклорена, а не Тейлора. Нам подобный упрек представляется несущественным. Основное значение этих работ Коши состоит не столько в окончательной и методической разработке вопроса, сколько в постановке его, в подготовке фундамента для более детальных и полных исследований, в предвосхищении некоторых более поздних результатов и прежде всего в работах Пюизё (42); вполне вероятно, они могли быть толчком и для теоремы Лорана.

Особенно много интересных статей, трактовавших данные вопросы, было опубликовано Коши в 1846 г. Из них мы отметим весьма важный мемуар [122.21], где была изложена глубокая идея перехода под знаком интеграла к многозначным функциям.

Автор здесь отметил, что нет препятствий для рассмотрения такого интеграла, под знаком которого функция содержит корни алгебраического или трансцендентного уравнения. Если при этом подвижная точка, описав кривую, возвратится к первоначальному положению, то корень данного уравнения окажется замененным другим корнем того же уравнения. В этом случае величина интеграла вдоль замкнутого пути не будет зависеть от выбора точки входа. При последовательных обходах по тому же пути под знаком интеграла будут получаться, как говорит Коши (стр. 690), новые функции (т. е. значения других корней) и вместе с тем различные значения интеграла. И этот интеграл, вообще говоря, будет также функцией от переменной x, которая для одного и того же x в разные моменты может иметь различные

значения в конечном или бесконечном количестве. Но «это не будет мешать интегралу после одного единственного обхода подвижной точки приобрести определенную величину, которая будет для простоты зависимой от положения подвижной точки и не зависимой, при некоторых условиях, от формы кривой».

Далее Коши отметил, что эта теорема позволит без труда узнать природу функции, обратной той, которая представляет данные определенные интегралы или по существу интеграл уравнения $dt=f(x)dx$. В том случае, когда эти функции будут периодические, можно вычислить указатели (модули) их периодичности или, как в случае однозначной функции $f(x)$, через вычеты, или через интегралы вдоль линий, пересекающихся между точками разрыва (т. е. точками разветвления) и указанные в [122.20]. Дальнейшее развитие эта работа Коши получила в мемуарах [122.24]. Здесь автор рассмотрел точки C_1, C_2, ..., для которых функция обращается в бесконечность или имеет кратные корни. Из них проводятся прямые C_1D_1, C_2D_2, ..., сравниваемые автором с помехами, перед которыми останавливается подвижная точка. Она их не может пересечь, не нарушив непрерывности функций. Эти линии он называет линиями остановки, а их начала — соответственно точками остановки (points d'arret). Это понятие может быть рассмотрено как некий прообраз дальнейшего понятия разреза. В предыдущей из рассмотренных работ Коши отмечал важность развиваемых им идей для изучения эллиптических и абелевых функций и был прав, так как эти и другие работы данного цикла открывали путь к изучению фундаментальных свойств функций обращения от интегралов алгебраических функций.

§ 2. Изучение особых точек в работах Пюизё и Римана

Существенное дополнение теория однозначных функций, в частности особенности поведения функции в области особых точек, получила в исследованиях по теории многозначных функций. Пюизё изучал свойства и поведение алгебраических функций абелевых интегралов во всей плоскости комплексной переменной. При этом он открыл весьма плодотворные принципы, на основе которых была выяснена природа критических точек. Он уделил много внимания разработке общего метода отыскания периодов эллиптических интегралов, рассматриваемых как интегралы от многозначных функций комплексного переменного, взятые по контуру в комплексной области, чем занимался потом и Риман.

Следуя методам Коши, Пюизё прокладывал новые пути в области изучения алгебраических функций, получившие дальнейшее развитие в работах Эрмита, Вейерштрасса и других математиков.

Метод Римана был построен на совершенно иных и весьма своеобразных геометрических представлениях, о сущности которых упоминалось во введении.

Рассмотрим работы этих ученых с интересующей нас точки зрения.

Виктор Пюизё (1820—1883).

Основные результаты В. Пюизё изложены в двух статьях [240.1; 240.2] 1850—1851 г. г.), изданных также отдельной книгой в немецком переводе в 1861 г. Еще в мемуаре [122.21] Коши довольно подробно изучил свойства интегралов, содержащих многозначные функции и установил изменения их величины, если точка разрыва функции находилась внутри области, ограниченной замкнутой кривой, по которой брался интеграл. Однако внутренний механизм таких изменений и прежде всего изменений самих функций им не был разобран. На этот пробел обратил внимание Пюизё, рассматривая u как неявную функцию от z, заданную алгебраическим уравнением

$$f(u, z)=0. \tag{4.1}$$

Он прежде всего четко разграничивал те точки функции, для которых она обращалась в бесконечность (полюсы), и те, где уравнение (4.1) имело кратные корни.

В первой части работы Пюизё подробно исследовал поведение функции и интеграла от нее в случае отсутствия особых точек и вывел очень простым способом интегральную теорему Коши, расширив при этом применение метода сведения интеграла по некоторому контуру l к интегралу по окружности C, лежащей внутри контура. В результате он пришел к следующему заключению: если замкнутая кривая $CLMC$ (рис. 2) такова, что ее можно преобразовать в одну точку C, не переходя через такие точки, для которых функция u становится бесконечной или равной другому корню уравнения (4.1), то интеграл $\int u_1 dz$, взятый вдоль всей этой линии, будет равен нулю [240.1, 374]. После этого для представления функции $u=\varphi(z)$ строится ряд Тейлора

$$\varphi(\gamma)=\varphi(c)+\frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma-c)+\frac{\varphi''(c)}{1\cdot 2}(\gamma-c)^2+\ldots,$$

где $\varphi(c)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(z)}{z-c}\,dz$, сходящийся внутри круга с центром c и радиусом не больше, как расстояние от c до ближайшей особой точки. Этим самым центр круга сходимости был перемещен из начала координат комплексной плоскости в переменную

точку. Не останавливаясь на способе выражения коэффициентов ряда через исходное уравнение и способе аналитического продолжения функции, приведем основные результаты более интересной второй части, где рассматривались разложения в окрестности точек, соответствующих кратным корням уравнения (4.1). Пусть в точке $z=a$ имеем $u_1=u_2=\ldots u_p=b$, тогда при $z=a$, $u=b$ функция $f(u, z)$ и ее первые $p-1$ производные обратятся в нуль и $\frac{\partial^p f(u, z)}{\partial u^p} \neq 0$ при $u=b$, $z=a$. После подстановки $u=b+\beta$, $z=a+\alpha$ уравнение (4.1) примет форму

$$A\beta^p + \sum B\beta^q\alpha^r = 0. \qquad (4.2)$$

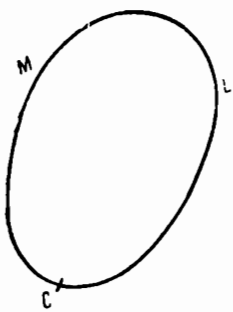


Рис. 2.

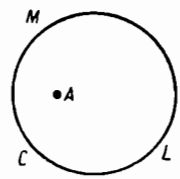


Рис. 3.

Около точки a описывается окружность бесконечно малого радиуса α. Тогда среди корней уравнения (4.1) можно искать p таких, которые внутри этой окружности будут принимать бесконечно малые значения β. Пюизё начинает исследование с общего случая, пока $\frac{\partial f(u, z)}{\partial z} \neq 0$ для $z=a$, $u=b$. При этом в уравнении (4.2) один член будет иметь вид $B\alpha$ и ясно, что члены $A\beta^p$ и $B\alpha$ будут низшего порядка, чем все остальные. Тогда p искомых значений β приблизительно определятся уравнением $A\beta^p + B\alpha = 0$ или $\beta^p = h\alpha$, где $h = -\frac{B}{A}$. Отсюда при $\alpha = \rho e^{ri}$, где ρ — расстояние Az, получаем $\beta_k = (h\rho)^{\frac{1}{p}} \cdot e^{\frac{\tau+2(k-1)\pi}{p}}$. После каждого обхода подвижной точки z вдоль контура $CLMC$ (рис. 3) β_1 перейдет в β_2 и т. д. и после p-го обхода β_p перейдет в β_1, так что конец предыдущей величины совпадает с началом последующей. Уточнив некоторые положения, автор приходит к выводу, что, «если производная $\frac{\partial f(u, z)}{\partial z}$ не переходит в нуль для $z=a$, $u=b$, функции $u_1, u_2, \ldots, u_p$, которые становятся равными b в точке A, могут быть упорядочены вдоль круга таким способом, что при движении z вдоль бесконечно малого круга, описанного около

точки A, конечная величина каждой из них будет равна начальной величине последующей», т. е. «эти функции образуют около точки A циркулирующую (циклическую — *В. Д.*) систему, составленную из p членов» [240.1, 389]. Далее уточняется, что после движения точки z вдоль того же контура в прямом отсчете k раз после корня u_l получим корень u_{l+k} и т. д. Определение этих подстановок Коши считал в работе Пюизё особенно важным.

Разбирая случай, когда производная $\frac{\partial f(u, z)}{\partial z}$ в точке $z=a$, $u=b$ обращается в нуль, Пюизё применяет для доказательства сходимости построенного им ряда в окрестности критической точки хорошо известную идею параллелограмма Ньютона без ссылки на предшественников (Ньютон, де Гуа, Стирлинг, Крамер и др.), развивавших эту идею. Это привело к тому, что некоторые авторы метод многоугольника Ньютона [1] позже стали называть методом Пюизё (Брио, Брио и Буке [112, 10] и др.) [2].

Итак, в результате довольно остроумного исследования Пюизё установил, что различные функции $u_1, u_2, \ldots u_n$, удовлетворяющие уравнению (4.1), могут быть всегда разделены на некоторое число циркулирующих систем относительно точки A. При движении по кругу переменной точки z около A различные значения u внутри системы в определенном порядке могут переходить одно в другое, не выходя из одной системы в другую. Далее автор разрабатывает представление функций $u_1, u_2, \ldots, u_p$ в виде сходящихся рядов по дробным степеням $z-a$ (когда точка z остается внутри круга, описанного около точки A, с радиусом, равным наименьшей из величин AA', AA'', ...) в форме

$$u_k = j_k (z-a)^{\frac{1}{p}} + a_k (z-a)^{\frac{2}{p}} + b_k (z-a)^{\frac{3}{p}} + c_k (z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots \quad (4.3)$$

при условии $\frac{\partial f(u, z)}{\partial z} \neq 0$ для $u=b$, $z=a$; если $\frac{\partial f(u, z)}{\partial z} = 0$ при тех же z, u и бесконечно малая β по отношению к α имеет порядок $\mu = \frac{r}{s}$, то из разложения

$$\beta_k = j_k \alpha^{\frac{r}{s}} + a_k \alpha^{\frac{r+1}{s}} + b_k \alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots$$

следует

$$u_k = j_k (z-a)^{\frac{r}{s}} + a_k (z-a)^{\frac{r+1}{s}} + b_k (z-a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots \quad (4.4)$$

Далее автор рассматривает построение так называемых элементарных кривых (рис. 4) *CDNPDC*, обладающих тем свойством, что функции одинаково изменяются, если подвижная точка про-

---

[1] Значение и роль многоугольника Ньютона в развитии математики основательно разобраны в статье Н.Г. Чеботарева [84].

[2] См. об этом в разделе «Ньютон или Пюизё?» Заметки Д. А. Граве [18.3].

ходит путь $CDNPD$ или по бесконечно малой кривой $DNPD$, где в точке C — простой корень, а в точке A — кратный корень уравнения (4.1). При обходе по элементарной кривой для простого корня его значение не меняется. Изменение функции вдоль любой содержащей A замкнутой кривой может быть заменено ее изменением при движении по элементарной кривой (рис. 5), и

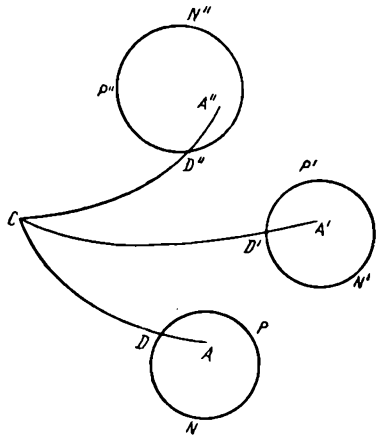


Рис. 4.

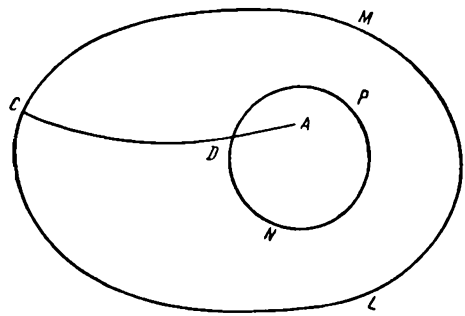


Рис. 5.

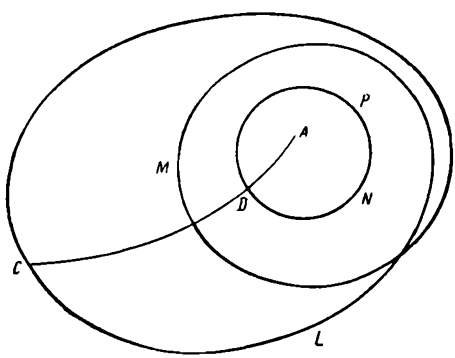


Рис. 6.

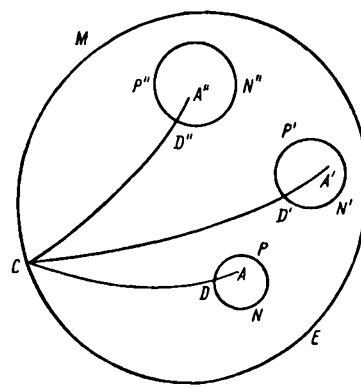


Рис. 7.

перестановка величин u происходит при этом так же, как и для элементарной кривой. В этом же духе трактуются с учетом направления движения и более сложные случаи (рис. 6, 7) и делается вывод, что движение по любому пути может быть приведено к последовательности движений по элементарным кривым. Число таких движений называется характеристикой кривой. Зная характеристику пробегаемой подвижной точкой z замкнутой кривой, можно найти значения каждой из m функций u_1, $u_2, \ldots, u_m$ от z, определенных уравнением $f(u, z)=0$, относитель-

по получающихся из уравнения $f(u, c)=0$ их начальных значений $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в точке C. Нетрудно в понятии характеристических кривых усмотреть некоторый пробраз разрезов, введенных позже Риманом.

Полученные результаты Пюизё затем легко обобщает на случай любой целой функции, когда уравнение имеет вид $Nv^m+Pv^{m-1}+\ldots+Sv+T=0$, где $N, P, \ldots, S, T$ — полиномы по z. Оно приводится к предыдущему подстановкой $v=\frac{u}{N(z)}$. Разложение v в ряд следует по целым или дробным возрастающим положительным степеням $z-a$ (с конечным числом слагаемых с отрицательными степенями).

Третья часть работы посвящалась исследованию интегралов от алгебраических функций. Пюизё прежде всего ввел понятие элементарных интегралов, т. е. $\int u_1 dz$, вычисляемых по кривой $CLMC$ в случае рис. 3. Он подробно разобрал их интересные свойства, многие из которых перешли потом в учебники. Усовершенствовав общую теорию криволинейных интегралов алгебраических функций и их разложений на элементарные интегралы, Пюизё посвятил следующую часть мемуара определению числа разных значений, приобретаемых этими интегралами, а также вычислению их модулей периодичности. При этом было установлено число линейно независимых периодов в зависимости от степени уравнения и числа особых точек.

В работе [240.2] Пюизё обобщил некоторые предыдущие результаты относительно периодов интегралов, опираясь на очень важную, строго доказанную, как отметил Коши, теорему о том, что непрерывная алгебраическая функция, везде однозначная, есть необходимо функция рациональная. Здесь под однозначной понималась монодромная функция. Исходя из этой теоремы и ранее изложенных принципов, Пюизё решает вопрос о неприводимости данного уравнения с двумя переменными.

Рассмотренные сочинения Пюизё, как и работы Коши, были основой исследования поведения интегралов дифференциальных уравнений в области критических точек.

Творчество Римана (43) оставило глубокий след в математике и определило пути развития ряда ее отраслей на многие десятилетия. Не входя в подробное рассмотрение его основных идей [1], мы коснемся их лишь с точки зрения влияния на развитие учения об особых точках. Его докторская диссертация [246.1] (1851 г.) легла в основу нового физико-геометрического направления в теории функций комплексного переменного. Здесь он по-новому подошел к обоснованию самого понятия аналитической функции, предложил новое обоснование теории конформных отображений и уделил много внимания геометрической теории многозначных функций.

---

[1] См. об этом в работах [192. 11; 47, 1; 5] и др.

Сразу же после рассмотрения достаточных и необходимых условий того, чтобы $w=u+vi$ была функцией $z=x+yi$, и изучения конформного отображения Риман переходит к построению многолистной комплексной поверхности. Такую точку σ, при обходе которой подвижная точка после каждого полного оборота попадает на новый лист, а после m обходов оказывается снова на начальном листе, автор называет точкой ветвления $(m-1)$-го порядка. Итак, над точкой σ будут соединены между собой m листов поверхности T. Если имеется n листов, то остальные $n-m$ листов разбиваются на системы из m_1, m_2, ... листов, причем листы каждой системы соединены между собой в точках ветвления (m_1-1)-го (m_2-1)-го порядка, совпадающих с точкой σ. Поверхность T будет определена, если задана ее граница как по положению, так и по направлению и задано положение точек ветвления. Исследование связности поверхности производится при помощи проведения на ней разрезов, соединяющих некоторые точки границы без самопересечений, хотя конечная точка разреза может быть и на границе. После доказательства теорем о разрезах вводится понятие «порядка связности» поверхности $n-m$ (где n — число разрезов некоторой системы, а m — число полученных после разрезывания односвязных частей поверхности) и изучаются его свойства. Каждый разрез уменьшает или увеличивает на единицу число граничных кривых. Это число для n-связной поверхности или равно n, или на четное число меньше n.

Общие вопросы концепции Римана несколько подробнее были изложены в вводной части его статьи по теории абелевых функций [246.2]. Здесь он отметил, что функция переменной величины $x+yi$, заданная в некоторой части плоскости x, y может быть непрерывно продолжена только одним способом. В зависимости от природы функции и независимо от направления продолжения для одних и тех же значений z она может принимать одни и те же значения или нет. В первом случае функция называется однозначной (в этом случае функция w не может иметь разрыва вдоль некоторой линии), во втором — многозначной. Чтобы установить ее поведение в этом случае, «нужно прежде всего направить внимание на некоторые точки плоскости z, при обходе которых функция принимает новые значения. Например, для функции $\log(z-a)$ такой точкой будет точка a» (там же).

Различные продолжения одной и той же функции в плоскости автор называет ветвями этой функции, а точку, при обходе которой происходит замена ветви,— точкой ветвления. Там, где нет точек ветвления, функция монодромная. Она может быть представлена рядом по целым степеням (положительным или отрицательным) приращений переменных, а при наличии ветвления функции в данной точке такое разложение невозможно. При этом делается важное замечание о том, что «не представляется

целесообразным свойства функции, не зависящие от способа ее представления, связывать с тем или иным видом формулы, посредством которой она может быть задана» (там же, русск. перевод, стр. 90).

Итак, на многолистной поверхности многозначная функция в любой ее точке имеет только одно определенное значение «и поэтому может быть рассматриваема как вполне определенная функция точки на этой поверхности» (там же). Отметим еще, что бесконечно удаленная точка плоскости в построениях Римана вводилась наравне со всякой другой (образ ее получался при помощи конформного отображения плоскости на сферу).

Укажем еще на одну особенность концепции Римана, состоящую в том, что он устранял из рассмотрения существенно особые точки и оставлял лишь полюсы, по его терминологии точки, где порядок бесконечности функции оставался конечным. И это естественно, так как, по замечанию В. Л. Гончарова, «введение существенных особенностей опорочило бы основной принцип римановых поверхностей» [17, 12].

Указав, что многосвязная поверхность с помощью системы разрезов может быть превращена в односвязную, Риман отмечает полезность этой операции при исследовании интегралов от алгебраических функций. Эти интегралы меняются скачкообразно при переходе через какой-нибудь разрез. Числовые значения этих скачков зависят от стольких независимых переменных величин, каково число разрезов. Эти принципы нашли широкое применение в исследовании по теории абелевых функций [246.2]. Среди других важных результатов, здесь была получена формула, выражающая род p замкнутой римановой поверхности T по известному числу листов и кратности точек ветвления, определение модулей периодичности интегралов, исследование уравнений данного класса и др.

Многолистные поверхности, построенные Риманом, имели более глубокое значение, чем просто геометрическая интерпретация многозначных функций. Их особенности и свойства вместе с особыми точками и разрезами характеризовали в его исследованиях свойства и характер определенных аналитических функций комплексного переменного.

Теория преобразования многолистных поверхностей в однолистные представляла одну из возможностей униформизации многозначных функций. Она была применена Риманом для построения довольно простой весьма совершенной теории абелевых функций. Позже эти идеи получили широкое развитие в работах других математиков и применение в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Нетрудно установить некоторое сходство предметов занятий Римана и Пюизё, воспитанников разных школ, применявших совершенно различные методы, работавших над основными своими произведениями практически одновременно и независимо

друг от друга и получивших вместе с тем в отдельных пунктах весьма идентичные результаты, хотя постановка проблемы в целом у Римана более общая и глубокая. Кроме того, она сочеталась с работами, непосредственно относящимися к аналитической теории дифференциальных уравнений, о чем речь будет во II части. Но эти обстоятельства, естественно, не снижают роли и значения работ Пюизё, по выражению Пикара, «сделавших эпоху» [235.23, 3].

§ 3. Классификация особых точек и функций в работах Вейерштрасса и Фукса

Классификация особых точек однозначных функций комплексного переменного и названия их были предложены Вейерштрассом [1] в 1876 г. [275.6].

«Для каждой функции,— говорил он,— существуют необходимо особые точки, которые являются точками границы области непрерывности функции, не принадлежа самой области» [2]. Это следовало непосредственно из определения области непрерывности. Если ряд, представляющий данную функцию, сходился во всей плоскости, то она обладала единственной особой точкой $z=\infty$. Любая окрестность особой точки содержит бесконечно много точек, принадлежащих области непрерывности $f(z)$. Следовательно, Вейерштрасс имел в виду изолированные особые точки. Он подразделял их на несущественно и существенно особые. Под первыми он понимал такие точки a для функции $f(z)$, когда при умножении последней на целую степень $z-a$ получалась функция, регулярная в окрестности a. При отсутствии такой возможности точка a считалась существенно особой. В основе классификации функций Вейерштрасс полагал число и характер особых точек. Класс рациональных функций одного переменного (z) определялся им как «совокупность таких однозначных функций от z, для которых в области (существования — *В. Д.*) этих величин имеются только несущественно особые точки». При этом установлено, что если внутри некоторой области однозначная функция имеет бесконечно много несущественно особых точек, то внутри или на границе этой области существует, по крайней мере, одна существенно особая точка. Следовательно, рациональные функции с необходимостью характеризуются лишь конечным числом несущественно особых точек. Эти же идеи могут дать намек, указывал Вейерштрасс, и для исследования и классификации трансцендентных однозначных функций одного аргумента, т. е. в соответствии с числом обладаемых

[1] Эти названия были предложены Вейерштрассом значительно раньше на его лекциях. В литературе они стали известны через работы его учеников. Фукс упоминал об этом в 1868 г. [153. 2, 378].

[2] В работе [5, 178] это положение изложено ошибочно в связи с неточностью перевода.

ими существенно особых точек. Из них ближайшими к рациональным будут те, которые имеют конечное число существенно особых точек. Функции, имеющие данное число таких точек, принадлежат к одному виду.

Любая однозначная функция без существенно особой точки может быть представлена как отношение двух целых рациональных функций от z. Отсюда встает очень важный вопрос о возможности составления арифметического выражения из переменной z и неопределенных констант, представляющего все однозначные функции определенного класса с конечным числом существенно особых точек (и только этого класса). Решение этого вопроса и составляло основной предмет указанного сочинения Вейерштрасса. Общее разложение произвольной целой функции было дано в форме произведения

$$f(z) = z^{\lambda} e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_k}\right)^p} \right\}, \qquad (4.5)$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция. В этом случае данное бесконечное произведение будет абсолютно сходящимся для всех конечных значений z. Понятием целой трансцендентной функции Вейерштрасс пользовался и раньше. Формулой (4.5) подчеркивалась, следуя Эйлеру, аналогия между многочленами и целыми трансцендентными функциями как своего рода «многочленами бесконечно высокой степени» [47.1, 74]. Вейерштрасс предложил ряд формул для выражения конкретных видов известных однозначных функций. Он ввел также понятие примфункции как такой однозначной функции, которая имеет только одну (существенно или несущественно) особую точку и один или ни одного нуля. Через эту функцию арифметическими операциями легко выражалась любая однозначная функция с одной особой точкой и более сложные (с конечным числом существенно особых точек). Последний параграф статьи [275.6] Вейерштрасс посвятил исследованию поведения рассматриваемых функций в окрестности их существенно особых точек. Здесь была доказана известная теорема о том, что при как угодно малом изменении z в бесконечно малой окрестности точки C функция $f(z)$ изменяется прерывно таким образом, что может приближаться как угодно близко к любой произвольно заданной величине и, следовательно, не обладает для $z=c$ определенным значением. Этот же вопрос исследовался в 1868 г. в магистерской диссертации [69.17] Ю. В. Сохоцкого [1]. Существенно особую точку z_0 он называл такой точкой функции $f(z)$, что $f(z_0)$ обращалось в бес-

[1] Как отметил А. И. Маркушевич [47.1, 79], эту же теорему одновременно с Сохоцким получил итальянский математик Казорати.

конечность бесконечного порядка. Позже (1879) теорема Сохоцкого—Вейерштрасса была уточнена Пикаром [235.2, 663].

Обобщение понятия особых точек на функции многих переменных было дано Вейерштрассом в 1880 г. [275.7, 128]. Более подробно поведение функций многих переменных в окрестности особых точек изучено в [275.8, 157 и след.].

Автор первого учебника по теории аналитических функций [99.2, 174] Отто Бирман, следовавший идеям Вейерштрасса, особые точки однозначных функций определял как такие, в которых терялись свойства, присущие области непрерывности, т. е. конечность, непрерывность и однозначность.

Классификацию особых точек для однозначных функций комплексного переменного, введенную Вейерштрассом, Фукс считал недостаточной для функций многозначных, являющихся частыми объектами аналитической теории дифференциальных уравнений. Поэтому он предложил в [153.13] собственную классификацию, имея в виду охватить ею все известные тогда простые и сложные особые точки многозначных функций. «Точку a, в которой функция может принять ряд значений, зависимый от одного из последних элементов пути», Фукс назвал точкой неопределенности. Это основное понятие. Им автор хотел подчеркнуть природу точки, в которой функция не получает определенного значения. Оно зависит от пути, по которому к данной точке подходит аргумент, и для случая однозначной функции совпадает, очевидно, с существенно особой точкой.

Точка неопределенности в то же время может быть (или не быть) и точкой разветвления. Причем разветвление в такой точке подразделяется на два вида. Если a — точка неопределенности, то может быть, что в довольно малой, но конечной окрестности a не содержится другой точки разветвления. Такое разветвление называется определенным. Например, для функции $(z-a)^{\lambda}\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — однозначна в окрестности $z=a$, а в точке a неопределенна и где λ — действительная величина, точка a есть точка неопределенности с определенным разветвлением.

Может быть, что в любой как угодно малой окрестности a имеется в наличии бесчисленно много точек, кроме a, в которых встречается разветвление. Тогда оно называется неопределенным. Например, в функции $\sqrt[m]{e^{\frac{1}{z-a}}}-b$, где $b\neq 0$ и m — положительное целое число, $z=a$ есть точка неопределенности, в которой одновременно наблюдается неопределенное разветвление.

Пусть $e^{\frac{1}{\zeta-a}}=b$. Тогда уравнение $\frac{1}{z-a}=\frac{1}{\zeta-a}+2k\pi i$ представит для бесконечного ряда действительных чисел k бесконечный ряд точек z, удовлетворяющих уравнению $e^{\frac{1}{z-a}}=b$. Таким образом, находится бесконечно большое число отличных от a ве-

личин, но внутри достаточно малой области, заключающей эту точку. И в каждой из таких точек находится разветвление.

Фукс подчеркивает, что в общем случае не представляется возможным разложить функцию в степенной ряд по целым или дробным степеням $z-a$, который бы представлял эту функцию в некоторой окрестности точки неопределенности a с неопределенным разветвлением. Это обстоятельство встречается уже для точек неопределенности, в окрестности которых нет разветвления. Такой, например, является функция $\frac{1}{\frac{1}{e^{z-a}}-b}$, представляемая рядом Лорана внутри кольца, образованного двумя кругами с центром a, внутри которого не лежит корень уравнения $\frac{1}{e^{z-a}}-b=0$. Но это разложение не действительно для любого приближения к точке a.

Так как указанные выше особенности наблюдаются для нелинейных дифференциальных уравнений, то Фукс предлагает в таких случаях отказываться от традиционных средств и больше прибегать при исследовании подобных особенностей к помощи других вспомогательных средств, чтобы проникнуть в суть целого запаса значений, которыми обладает функция в окрестности особой точки.

Таким образом, к концу 70-х и в 80-е годы прошлого века были установлены основные виды особых точек функций комплексного переменного и охарактеризовано поведение функций в их окрестности.

§ 4. Особые точки дифференциальных уравнений (Брио и Буке, Жуковский, Пуанкаре и др.)

Первая монография по теории функций комплексного переменного, включавшая систематически и дидактически обработанные результаты Коши, Лорана, Пюизё, Эрмита, Лиувилля и других ученых до 1855 г., принадлежала Брио и Буке [112.6] (1856). В дальнейшем основное содержание этой работы было включено в их книгу [112.9] по теории эллиптических функций, оставшуюся долгое время одним из основных пособий по этому предмету. Она была переиздана с большими дополнениями в 1875 г. [112.10].

Авторы заменили здесь некоторые известные понятия (вместо монодромной функции — монотропная и т. д.) и установили ряд новых: многозначная функция — политропная; голоморфная — непрерывная, монотропная и имеющая производную, или функция, подобная целым функциям (многочленам).

Введенные ими понятия критических точек, корней или нулей функций и полюсов [112.10, 12—15] стали общеупотребительными. Полюс определялся так: «Если функция u — голоморфна в некоторой части плоскости, за исключением точки z, где она

становится бесконечной таким образом, что функция $\frac{1}{u}$ остается голоморфной в окрестности этой точки, то говорят, что эта точка есть полюс или бесконечность функции u». Функцию, голоморфную в некоторой части плоскости, за исключением некоторых полюсов, Брио и Буке называли мероморфной в некоторой части плоскости, т. е. подобной рациональным дробям.

В основу классификации функций они положили отношение последних к особым точкам. Брио и Буке писали, что любая монодромная функция после первых трех категорий (рациональной, периодической, двоякопериодической) составляет новую трансцендентную: «Трансцендентные различаются между собой по распределению их бесконечностей». Как неисчерпаемый источник новых трансцендентных можно рассматривать дифференциальные уравнения. Авторы отличали точки трансцендентные от алгебраических, но ограничивались лишь отдельными примерами.

Как принципиально новый и важный вклад Брио и Буке в теорию отметим четкую постановку и довольно подробное решение вопроса о поведении интегралов дифференциальных уравнений в области особых точек, в частности, когда дифференциальные коэффициенты, т. е. правые части уравнения $y'=f(z, y)$, становятся бесконечными или неопределенными, в [112.7] (1856 г.). Этим самым был поставлен вопрос об исследовании особых точек дифференциальных уравнений (которые тогда еще не были классифицированы). Им же принадлежит и первая, хотя еще и не совершенная, классификация уравнений и их интегралов по характеру особых точек дифференциальных коэффициентов. Под ними Брио и Буке понимали такие точки z_0, для которых не выполнялись условия теоремы Коши о существовании (и единственности) решений дифференциальных уравнений, но для окрестности которых может быть поставлен вопрос о существовании решений $y=y(z)$ при $z\to z_0$. Оказалось, что в области такой точки иногда будут голоморфные решения, иногда часть их будет голоморфна, а другие нет. Принципиальные установки Брио и Буке в этом смысле не менялись, и в начале нашего века перешли в учебную литературу. Так, в известном трактате по теории дифференциальных уравнений Форсайт [147, т. 2, 47] особые точки дифференциального уравнения $\frac{dw}{dz}=f(w, z)$ предполагал в тех случаях, когда функция $f(w, z)$: 1) не конечна; 2) не определена; 3) не однозначна. В подобных случаях функция-интеграл в самих точках или при стремлении к ним теряла прежде всего свойство однозначности, что и было существенным признаком наличия особой точки дифференциального уравнения.

Одним из первых названия для особых точек дифференциальных уравнений первого порядка предложил Пуанкаре в цик-

ле работ начала 80-х годов. Однако приоритет в вопросе о классификации особых точек таких уравнений должен принадлежать Н. Е. Жуковскому Этот вопрос был подробно им разобран в магистерской диссертации [26.1], опубликованной в 1876 г. Изучая теорию скоростей и ускорений жидкости с единой общей точки зрения, автор вместе с тем разрабатывал и совершенно новые методы исследования для данного случая. Таким является и вопрос о классификации особых точек кривых, определенных дифференциальным уравнением первого порядка и первой степени. Исследуя движение бесконечно малой частицы жидкости в гл. 1, автор получил дифференциальные уравнения для бесконечно малых линий токов точек частицы в виде

$$\frac{dx}{e_1 x - ry} = \frac{dy}{e_2 y + rx} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_3 \zeta}.$$

После ряда преобразований Жуковский находит интегралы этой системы и исследует их геометрический смысл, выясняя тем самым расположение линий токов на конусах девиации. Уже в процессе этого он получает семейства кривых, связанных с основными видами особых точек, указанных позже Пуанкаре, и другие при определенных сочетаниях величин e_1, e_2, e_3, r, ζ. Исследуя затем течение жидкости (гл. 2), автор обратился к более общему случаю (§ 20), когда скорости течения u, v, w внутри некоторого пространства, ограниченного замкнутой поверхностью, будут непрерывны, однозначны и конечны. При этом оказывается, «что линии токов, наполняющие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное значение. Этого нельзя сказать, когда скорости u, v, w обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$ или становятся многозначны. Будем называть,— предлагает Жуковский,— критическими точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну, и разберем свойства таких точек сначала для плоского течения» [26.1, 180].

Помещая начало косоугольных координат в точку, где u, v обращаются в 0, ∞, $\frac{0}{0}$, он отыскивает $\lim \frac{u}{v}$ при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Если этот предел имеет конечную величину $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, то уравнения линий токов, бесконечно близких к началу координат, получаются при интегрировании уравнения $\frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Затем Н. Е. Жуковский переходит к рассмотрению различных критических точек и характеристике интегральных кривых вблизи их. Не выписывая формул, приведем лишь снимок данных автором чертежей (рис. 8). Из них легко усмотреть, что по современной терминологии *1* — седловина; *2* — узел; *3* — дикритический узел; *4* — узел (отличный от 2); *5* — фокус; *6* — центр.

Таким образом, Н. Е. Жуковский в процессе исследования кинематики жидкости естественным путем открыл особые точки дифференциального уравнения и при более полном анализе их, чем это было сделано через несколько лет Пуанкаре чисто теоретически. Правда, Жуковский особые точки назвал здесь нулевыми критическими и не определил каждого их типа, отметив лишь, что они бывают гиперболическими или эллиптическими.

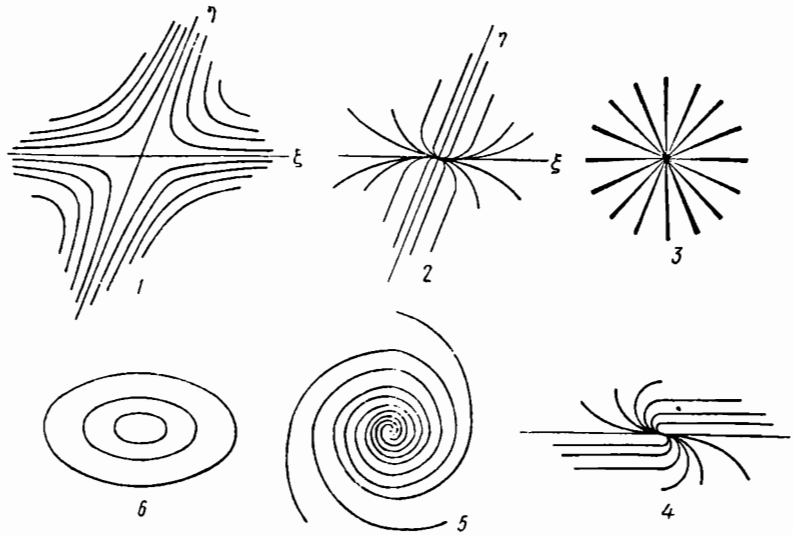


Рис. 8.

«В первом случае две линии тока пересекаются в критической точке, во втором — линии токов обхватывают критическую точку, обращаясь в пределе в бесконечно малые эллипсы. Если в нулевой критической точке первого порядка вращение элемента площади равно нулю, то через эту точку проходят две пересекающиеся под прямым углом линии тока» [26.1, 182]. Кроме нулевых критических точек первого порядка, могут еще быть нулевые критические точки n-го порядка, когда в данной точке скорости u, v и их производные до n-го порядка обращаются в нули, а производные n-го порядка конечны. Автор исследует и такие точки для случая плоского течения без сжатия и вращения. Критические точки, в которых u, v обращаются в ∞ или $\frac{0}{0}$, автор называет бесконечными неопределенными. Он изучает также свойства критических точек истечения и вихря (более сложной природы).

Анализ особых точек дифференциальных уравнений в работе Жуковского 1876 г., естественно, не уменьшает значения дальнейших работ Пуанкаре, но в истории вопроса он имеет принци-

пиальное значение как по своему подходу, так и по существу, что справедливо уже отметил Д. Синцов [65.4, 79]. Однако этот факт не отражен пока в обзорной литературе, прошел он мимо внимания и авторов [28.1].

Развивая далее идею Брио и Буке, Пуанкаре (с 1878 г.) подробно исследовал уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \tag{4.6}$$

(где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — многочлены) в цикле работ (публиковавшихся в 181—1886 гг. [237.1.—22]) о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Подчеркивая необходимость «изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям», Пуанкаре отмечал, что «первый шаг на этом пути был уже сделан, когда было изучено поведение функции, определяемой дифференциальным уравнением, в окрестности какой-либо данной точки плоскости. Задача, стоящая теперь перед нами,— это пойти дальше и изучить поведение этой функции на всем протяжении плоскости» [237.22, 12]. «Полное исследование функции,— отмечал он далее,— состоит из качественной части (т. е. геометрического изучения кривой, определяемой данной функцией) и количественной (т. е. вычисления числовых значений функции). Всякое исследование функции должно начинаться с качественной части, а затем уже можно перейти к вычислениям. С другой стороны, к качественному исследованию могут быть сведены различные, очень важные вопросы анализа и механики, как, например, задача трех тел и много других.

Кривые, определяемые уравнением (4.6), Пуанкаре назвал характеристиками. Они могут быть разделены на две полухарактеристики. Для обхода трудностей, возникающих при изучении бесконечных ветвей, автор применяет гномоническую проекцию плоскости на сферу, а кривые, расположенные на ней определенным образом, называет циклами и полициклами (имеющими двойные точки).

В зависимости от особенностей расположения кривых (циклов и полициклов) на сфере, система которых уподобляется топографической системе кривых уровня земной поверхности, Пуанкаре вводит и специальную терминологию. Двойные точки полициклов соответствуют седловинам, а особые точки, через которые не проходит ни один цикл — вершинам и котловинам земной поверхности. Отсюда получены названия особых точек — седла, вершины (узлы) и котловины (фокусы). Особой точкой более сложного вида является центр, который вообще представляет аналогию с фокусами, но вокруг которого в некоторых случаях интеграл представляет замкнутую кривую [1]. Эти четыре

[1] Подробное исследование названных и других случаев см. в [72, 76—84].

Анри Пуанкаре (1854—1912).

типа автор называет особыми точками первого рода. Особые точки второго рода [1] можно рассматривать как результат слияния нескольких особых точек первого рода. Пуанкаре подробно изучил точки первого рода и их распределение в плоскости и т. д.

Результаты о возможном поведении и формах характеристик уравнения первого порядка и их соотношении между собой, полученные Пуанкаре в мемуарах [237.4—5], были позже обобщены в работе Бендиксона [98.5], рассмотревшего понятие узловой области и применившего методы теории множеств [2].

Дальнейшее исследование уравнения (4.6) продолжено в работе Бёрлинга [101], где были дополнены и обобщены результаты Пуанкаре о числе так называемых исходных направлений интегральных кривых из особой точки.

В это же время методическая разработка и дополнение анализа особых точек уравнения $F\left(u, \frac{du}{dz}\right)=0$, данного Брио и Буке [112.9], было предложено Кэли (44) [123.4].

Дополнение исследования Брио и Буке уравнения (4.6) с применением развитого Пюизё метода ломаных Ньютона [3] выполнил Фине (45) [144.1] в 1889 г.

Ряд новых интересных результатов получил Дюляк (46) в серии работ по исследованию поведения интегралов уравнения (4.6) в области особой точки. Отметим из них диссертацию [137.2], где вопрос рассмотрен для комплексной области. Им также подробно исследован случай так называемой дикритической точки [137.5].

§ 5. Классификация особых точек Пенлеве, Голубева и ее дополнения

Объектом изучения аналитической теории дифференциальных уравнений являются такие уравнения, в которых аргумент z и неизвестная функция w входят достаточно просто. По верному замечанию В. В. Голубева, особый интерес представляют те случаи, когда неизвестная функция и ее производные входят в

---

[1] О таких особых точках см. в [152].

[2] См. об этом подробно в [237.22, 267 и след.].

[3] Автор считал творцом метода Пюизё.

дифференциальное уравнение алгебраически, а коэффициенты этой алгебраической функции есть аналитические функции независимого переменного, свойства которых уже изучены. Такие уравнения в основном только и изучались в рассматриваемый период. В некоторой круговой области интеграл существует согласно фундаментальной теоремы Коши, дающей элемент аналитической функции, который может быть затем продолжен. Но чтобы изучить поведение интеграла во всей области его существования и во всей плоскости, надо знать, как мы упоминали, характер и положение особых точек данного вида уравнений и поведение функции в их области. В предыдущих параграфах уже шла речь о классификации особых точек как однозначных, так и многозначных функций. Этот вопрос был в известной степени подытожен и уточнен в работах Пенлеве. Так, уже в его докторской диссертации [228.1] (1888), посвященной изучению особых линий аналитических функций, весьма подробно рассматривались различные виды особенностей этих функций на основе понятий теории множеств. Через несколько лет, в Стокгольмских лекциях (1895), Пенлеве выделял два класса особых точек: трансцендентные и алгебраические.

Рассматривая систему $w_1(z), \ldots, w_m(z)$ аналитических функций, для которых $z=a$ — особая неалгебраическая точка, и направление l, по которому стремится z к a, не встречая никаких особенностей $w(z)$, автор определяет a как существенно особую точку в том случае, когда по крайней мере ни одна из функций $w(z)$ не стремится ни к какому пределу (конечному или бесконечному) при стремлении z к a вдоль l.

В противном случае $z=a$ называется трансцендентной точкой $w_i(z)$. Это новое понятие. Напомним, что если функция при обходе вокруг особой точки меняет свое значение, то такая точка называется критической, или точкой разветвления. В противном случае она будет некритическая, как, например, полюс или существенно особая точка однозначных функций.

Далее выделяется класс особых точек, которыми могут обладать алгебраические функции: алгебраические особые точки (например плюсы). Если в окрестности критической точки z_0 функция представляется рядом по возрастающим дробным положительным степеням, то z_0 называется обычной критической алгебраической точкой; если в разложение входит конечное число членов, содержащих отрицательные дробные степени, то z_0 есть критический полюс. Итак, к типу алгебраических особых точек относятся критические алгебраические точки, полюсы и критические полюсы. Функции, обладающие в некоторой области только алгебраическими особыми точками, называются алгеброидными (термин Пуанкаре) в этой области.

Таким образом, были разделены особые точки алгебраических и трансцендентных функций. Эта классификация касалась

не только изолированных особых точек, но распространялась и на точки, образующие особые линии [1].

Рассматривая особые точки — алгебраические, трансцендентные и существенные в роли начальных данных интегралов, Пенлеве отметил, что первый случай трактуется элементарно, второй ведет к изучению интегралов в окрестности начальных особых условий, третий — просто априори, выходит за пределы любого метода.

Говоря об особых точках интегралов дифференциальных уравнений, следует иметь ввиду еще одно важное обстоятельство. В процессе интегрирования функция-интеграл получает произвольную постоянную C, входящую таким образом, что положение особых точек зависит или не зависит от C и в первом случае может меняться с изменением начальных условий. Такие особые точки интегралов называются подвижными. Если положение особых точек интегралов не зависит от начальных данных, то они называются неподвижными. На первых этапах развития теории, в силу ограниченности опыта, когда в основном изучались простейшие уравнения, в частности линейные, которые не обладали подвижными особыми точками, это обстоятельство проходило мимо внимания исследователей. Однако в процессе дальнейшего развития теории оно скоро было обнаружено. Едва ли не впервые Гамбургер [169.2, 186] (1877 г.) четко заметил, что для интегралов нелинейных дифференциальных уравнений (выше, чем второй степени) существуют подвижные критические точки и что положение особых точек зависит определенным, заранее неизвестным способом от констант, содержащихся в общем интеграле уравнения и его n—1 первых производных. А уже в начале 80-х годов в работе [153.10] Фукс выделил класс дифференциальных уравнений первого порядка, интегралы которых обладают неподвижными критическими точками. Разработка этой идеи была продолжена затем Пуанкаре и особое развитие получила в трудах Пенлеве, указавшего еще в начале своей научной деятельности класс таких уравнений первого порядка, в интегралах которых отсутствуют подвижные трансцендентные и существенно особые точки.

Именно наличие или отсутствие того или иного вида подвижных особых точек в интегралах изученных дифференциальных уравнений было затем одним из существенных признаков, положенных в основу классификации этих уравнений.

Во введении к лекциям [228.11] Пенлеве отмечал, что наличие подвижных существенно особых точек в интегралах, которые нельзя предусмотреть по виду уравнений, представляет большие трудности, встречающиеся в аналитической теории дифференциальных систем. Подвижные существенно особые точки могут быть: 1) изолированными, или пределами изолированных точек;

[1] См. об этом в [16.3, 41 и след.].

2) образующими в некоторой части плоскости множество, никакая точка которого не является изолированной, без чего это множество не составит никакой части линии; 3) образующими подвижные особые линии, как, например, в случае уравнений третьего порядка, интегралы которых являются либо фуксовыми функциями, существующими только в круге, либо клейновыми функциями, допускающими как сечение неаналитическую линию без кривизны.

Так обстоит дело, если рассматривать интегралы как функции аргумента z. Новый источник трудностей появляется, когда эти функции допускают существенные особенности в области начальных условий и независимо от z, как можно показать на уравнении $w''=\frac{(w')^2}{w}$, интеграл которого $w=w_0\, e^{\frac{w_0'}{w_0}z-z_0}$. Общие теоремы, известные для аналитических функций многих переменных и их особенностей, не могут оказать здесь большой помощи, ибо они предполагают особенности, удовлетворяющие некоторым упрощенным условиям, которые не выполняются для системы интегралов.

Отсюда легко понять, что результаты изучения уравнений первого порядка за рассматриваемый период по природе своей весьма отличны от соответственных результатов для уравнений высших порядков. В первом случае были получены теоремы более точные. Но ряд положений, найденных для уравнений первого порядка, мог быть обобщен и на уравнения высших порядков.

Весьма важное значение при классификации особых точек имело введение понятия области их неопределенности, когда характер особой точки определялся более полно. Происхождение самого понятия связано, видимо, с введенным Фуксом понятием точек неопределенности. Истоки нового понятия можно усмотреть уже в диссертации Пенлеве [228.1], когда для характеристики особой точки были привлечены понятия от теории множеств. Однако и в этой работе, и в его стокгольмских лекциях само понятие области неопределенности еще отсутствует (47). Оно было введено Пенлеве в 1900 г. в [228.18], затем попало в лекции Зоретти [282.3, 59—61] (1911 г.), на которые и ссылается В. В. Голубев в [16.5, 46]. Понятие это вводится так. Около рассматриваемой особой точки однозначной функции z_0 проводят окружность C радиуса ρ. Из точки внутри ее, где функция голоморфна, строят все возможные продолжения функции $L\rho$, не выходя из окружности C. Обозначив через M множество значений, принимаемых функцией в точках, до которых можно дойти, и через M' его производное множество, получают $F=M+M'$ — континуум, ибо оно замкнутое и совершенное, так как любая точка M есть предельная. Кроме того, это множество такое, что любые его две точки можно соединить непрерывной ли-

нией, все точки которой принадлежат к множеству: назовем его $F(\rho)$, так как оно зависит от ρ. Множество D всех точек, принадлежащих всем $F(\rho)$, Пенлеве назвал областью неопределенности функции $w=f(z)$ в точке z_0. Можно доказать, что оно есть непрерывное множество или состоит из одной точки. Обособив полюсы, рассматриваем только трансцендентные точки. Если область неопределенности состоит из одной точки, то такая особая точка называется обыкновенной трансцендентной точкой; точки, для которых область неопределенности составляет некоторое непрерывное множество, называются существенно особыми. Если область неопределенности особой точки покрывает всю плоскость, то она называется точкой с полной областью неопределенности. В противном случае будут точки с неполной областью неопределенности. Дальнейшее уточнение понятия области неопределенности принадлежит В. В. Голубеву [16.5, 47].

С накоплением новых фактов, расширением и углублением теории с начала нынешнего века происходила и дальнейшая эволюция в области классификации особых точек, хотя классические основы ее по существу не менялись. Дополнялось, уточнялось и углублялось изучение особых точек более сложных категорий. Кроме того, в дальнейшем особые точки дифференциальных уравнений более детализировались. Так, рассматривая теорию уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(w,z)}{Q(w,z)}, \tag{4.7}$$

где P, Q — полиномы по y, Бутру (48) в [109.7, гл. III] указывает на пять категорий особых точек его интегралов, которые сводились к алгебраическим критическим (и подвижным) трансцендентным (неподвижным). Он дает свой принцип классификации трансцендентных точек в отличие от данных Пенлеве двух видов (обычных трансцендентных и существенно особых).

Интерес к исследованию особенностей аналитических функций в начале нашего века весьма возрос. Существенные результаты в этом направлении были получены Штуди, Каратеодори, Кёбе, Гроссом, Данжуа, Гурвицем, Ф. Неванлинной, Иверсеном и многими другими. В частности, Иверсен в [182], используя терминологию Бутру, провел интересное исследование свойств моногенных функций в окрестности существенно особой точки.

Большой вклад в развитие аналитической теории дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного в первые десятилетия нашего века внес В. В. Голубев (49). Еще в студенческие годы он исследовал характер особых точек уравнений Пенлеве (1) — (5), значительно упростив метод изучения и дополнив таким образом результаты Пенлеве, полученные для уравнения (6). В скором времени была опубликована магистерская диссертация В. Голубева [16.5], содержащая глубокие исследования автором однозначных аналитических функций с совершенным множеством особых точек и ставшая, как

отметил А. И. Маркушевич [47.3, 5], классическим трудом по теории граничных свойств аналитических функций. Не разбирая подробно эту работу [1], отметим, что она была очень важной и для рассматриваемой теории, ибо содержала интересные результаты по изучению множества особых точек аналитической функции, в том числе и особых линий. О ней Н. Н. Лузин писал: «Эта оригинальная и обильная идеями, постановками проблем и цепными вопросами книга В. В. Голубева послужила источником не только моей статьи [2], но и двух диссертаций (И. И. Привалова и В. С. Федорова)» [41.2, 4]. Большинство авторов — Принсгейм, Пуанкаре, Борель и др.— при изучении аналогичного вопроса множество особых точек разбивали на отдельные точки и изучали поведение функции в области каждой точки, как это делалось в случае изолированных особых точек. Но «между тем,— отмечает В. В. Голубев,— поведение функций в области изолированных особых точек коренным образом отличается от поведения функций в области совершенных множеств особых точек». Эти особенности возникают в связи с особой структурой, которую имеет совершенное множество. Поэтому автор исследовал поведение функции в области совершенного множества, рассматриваемого целиком, не разбивая его на отдельные точки совершенно новым оригинальным методом. Он уточняет здесь понятие области неопределенности и отмечает, что существуют особые точки с различными областями неопределенности. Более того, можно построить примеры особых точек, которые имеют счетные множества различных областей неопределенности, смотря по тому, как мы к ним подходим. Можно рассматривать также область неопределенности линии и любого прерывного множества особых точек.

В. В. Голубев (1884—1954)

Дальнейшее развитие идеи Голубева получили в работе «Исследования по теории особых точек однозначных функций», написанной в 1918—1921 гг. Здесь, как указал автор, изучались совершенные множества особых точек методами, аналогичными методам теории целых функций. В этом сочинении им получено также много новых важных результатов, часть которых, как свидетельствует А. И. Маркушевич [47.3], были переоткрыты Р. Неванлинной, П. Монтелем и др.

---

[1] См. об этом в [47.3, 5] и др.

[2] См. [41.1].

Глава V. ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЯ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

§ 1. Простейшие виды особенностей. Исследования Брио и Буке

Особыми точками дифференциальных уравнений могут быть особые точки их коэффициентов, нули коэффициента при старшей производной и других, точка ∞, критические, изолированные краевые и особые точки разных видов области существования интеграла, к которой принадлежат и начальные значения.

Но особые точки интеграла могут быть различной природы в том смысле, что некоторые из них можно усмотреть по форме правой части уравнения

$$w' = f(w, z), \tag{5.1}$$

а другие по этому виду нельзя определить. В тесной связи с исследованием характера особой точки стоит и проблема построения решения в ее окрестности. Вопрос об особенностях поведения интегралов уравнений вида (5.1) в тех точках, где их правые части $f(w, z)$ перестают быть голоморфными, в частных случаях ставился еще Коши.

Систематически он стал разрабатываться в сочинениях Брио и Буке. Вполне естественно, что в первую очередь и лучше всего были изучены вопросы существования интегралов и их поведения для простейших видов особенностей правой части уравнений (5.1). Характер особенностей сильно усложняется уже для алгебраического уравнения второго порядка.

Особенно простые результаты были получены для алгебраического, так называемого дифференциального, уравнения Брио и Буке вида

$$F(w, w') = 0. \tag{5.2}$$

Эти авторы и их последователи много сделали для получения ответа на вопрос о существовании и виде решений данного уравнения или их системы при данных начальных условиях, а также о том, как далеко такие решения определяются начальными данными, хотя первые исследования относились только к существованию и поведению решений в некоторой ограниченной области независимого переменного. Брио и Буке первые же показали, что дифференциальное уравнение может привести к ряду,

везде (кроме нулевой точки) расходящемуся. Этот простой факт имел большое принципиальное значение.

Основные идеи их исследования были изложены в 1854 г. в заметке [112.2] и подробно опубликованы несколько позже [112.7]. Напомним, что они рассматривали уравнение

$$\frac{du}{dz} = f(z, u) \tag{5.3}$$

и для случая голоморфности f доказали существование голоморфного интеграла, удовлетворяющего данным начальным значениям. Далее они изучили также поведение интеграла и в случаях, когда функция f обращается в бесконечность, представляется в форме $\frac{0}{0}$ или перестает быть монодромной и моногенной по другим причинам.

Итак, пусть для $z = z_1$, $u = u_1$, $f(u, z) = \infty$ таким образом, что $\frac{1}{f(u, z)}$ остается конечной и непрерывной в их окрестности. Положив $z = z_1 + \bar{z}$, $u = u_1 + \bar{u}$, получаем

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} = f(u_1 + \bar{u},\ z_1 + \bar{z}),$$

откуда

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{u}} = \frac{1}{f(u_1 + u,\ z_1 + \bar{z})}. \tag{5.4}$$

Интеграл последнего уравнения $\bar{z}$ как функция от $\bar{u}$ допускает также начальное значение $\bar{z}=0$ для $\bar{u}=0$. Правая часть (5.4) может быть представлена степенным рядом по $\bar{u}$, $\bar{z}$, так что

$$\frac{d\bar{z}}{du} = a\bar{u}^{-m} + b\bar{z} + c\bar{u}\bar{z} + e\bar{z}^2 + \ldots \tag{5.5}$$

Если любой член справа (5.5) содержит $\bar{z}$, то

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{u}} = \bar{z}(b + cu + e\bar{z} + \ldots),$$

откуда

$$\ln\frac{\bar{z}}{z_1} = \int_{\bar{u}_1}^{\bar{u}} (b + c\bar{u} + e\bar{z} + \ldots)\, d\bar{u}.$$

Из того, что при $\bar{z} \to 0$ и $\bar{u} \to 0$ левая часть последнего равенства неограничено возрастает, а правая остается конечной, следует вывод, что уравнение не допускает никакого интеграла[1], исчезающего с $\bar{z}$. Если в правой части (5.5) содержится хотя бы один член,

[1] В дальнейшем было установлено, что этот случай может представлять в $\bar{z}$ трансцендентную особую точку.

независимый от $\bar{z}$, то оно определит при $\bar{z}=0$, $\bar{u}=0$ некоторую функцию z, монодромную и моногенную по $\bar{u}$ в окрестности $\bar{u}=0$ и представимую рядом $\bar{z}=A_0\bar{u}^{\alpha}+A_1\bar{u}^{\alpha+1}+\ldots$

Коэффициенты этого ряда можно найти подстановкой его в уравнение (5.5). При этом получим

$$\bar{z}=\frac{a}{m+1}\bar{u}^{m+1}+\ldots \text{ и } A_0=\frac{a}{m+1},\ \alpha=m+1 \text{ и т. д.}$$

Отсюда $\bar{u}$ определяется как неявная функция от $\bar{z}$. При этом авторы устанавливают, что $\bar{u}$ будет иметь ровно $m+1$ значений, где m — порядок первой, отличной от нуля, частной производной функции $\frac{1}{f}$ по u. Эти значения будут перемещаться одно с другим циклично, когда z вращается около z_1. Отсюда следует вывод о том, что если в некоторой точке плоскости уравнение допускает равные корни, то значения дифференциальных коэффициентов в ней вообще должны становиться бесконечно большими. Интеграл $\bar{u}$ представляется рядом

$$\bar{u}=B_0\bar{z}^{\frac{1}{m+1}}+B_1\bar{z}^{\frac{2}{m+1}}+\ldots$$

Таким образом был открыт признак существования критической точки интеграла, которая вообще говоря была подвижной, так как зависела от начальных значений z_1, u_1. Но на это еще не обращали внимание. Серия хорошо подобранных и подробно рассмотренных примеров дополняла анализ авторов.

Далее они рассмотрели случай, когда правая часть уравнения (5.3) представляется в форме $\frac{0}{0}$ для некоторого $z=z_1$, $u=u_1$, т. е. в форме отношения двух функций $\varphi(u,z)$ и $\psi(u,z)$, непрерывных, монодромных, моногенных и обращающихся в нуль при $z=z_1$, $u=u_1$. Полагая $z=z_1+\bar{z}$, $u=u_1+\bar{u}$, раскладывая в степенные ряды по $\bar{u},z$ функции φ и ψ, обозначая $\mu=\frac{p}{q}$ степень $\bar{u}$ по отношению к $\bar{z}$ и переходя к переменным $\bar{z}=t^q$, $\bar{u}=vt^p$, а затем $v=v_0+\zeta$, Брио и Буке получают для исследования[1] исходное уравнение в простейшей форме

$$t\frac{d\zeta}{dt}=a\zeta+bt+c\zeta^2+d\zeta t+et^2+\ldots=f(\zeta,t). \tag{5.6}$$

Свойства функции ζ принципиально зависят от коэффициента a в (5.6). Подставляя в дальнейшем $\zeta=-\left(\frac{b}{a-1}+\bar{\zeta}\right)t$, они приходят к уравнению

$$t\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=(a-1)\bar{\zeta}+bt+\ldots$$

[1] О приведении к простейшим формам см. подробно в [235.17, гл. II, разд. III].

Такое преобразование было бы невозможным, если $a=1$. В тех случаях, когда a не будет целым положительным, коэффициент при $\bar{\zeta}$ можно преобразовать так, что его действительная часть будет меньше или равна нулю.

Доказав одну лемму из теории функций, авторы формулируют теорему о том, что дифференциальное уравнение

$$z\frac{du}{dz} = f(u, z) = au + bz + \ldots, \tag{5.7}$$

в котором коэффициент a отличен от целого положительного числа, допускает монодромный интеграл, исчезающий вместе с z [1].

Возвращаясь затем к уравнению (5.6), интеграл которого является монодромной функцией, разлагающейся в ряд по целым степеням t, для функции u получаем разложение по $(z-\bar{z})^{1/q}$. Следовательно, она имеет q различных значений, когда переменная z вращается около точки $\bar{z}$. Доказав единственность этого интеграла, Брио и Буке разбирают случай, когда действительная часть коэффициента a положительна. В этом случае, кроме упоминаемого выше монодромного интеграла, уравнение (5.6) допускает еще бесконечно много других немонодромных интегралов (зависящих от произвольной постоянной λ_0). Доказывается это так. Пусть ζ — первый монодромный интеграл и $\zeta+\xi$ — второй. Подставим последний в (5.6) и от полученного результата вычтем (5.6), что даст

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi(a + 2c\zeta + c\xi + dt + \ldots).$$

Заменив здесь функцию ζ ее значением, получим

$$t\frac{d\xi}{dt} = \xi(a + c\xi + d_1 t + \ldots). \tag{5.8}$$

Положив $\xi = t^a\lambda$, предполагая новую функцию λ конечной и ξ исчезающей с t, получаем уравнение

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(c\lambda t^{a-1} + d_1 + \ldots).$$

Правую часть этого равенства при $a \neq 1$, $a \neq 0$ можно интегрировать вдоль некоторой кривой от начальной произвольной величины λ_0. Принимая приближенно $\xi = \lambda_0 t^a$ и положив $t = re^{\theta i}$, $\lambda_0 = le^{\omega i}$, $a = \alpha + \beta i$, получим $\xi = lr^\alpha e^{-\beta\theta} e^{(\beta \ln r + \alpha\theta + \omega)i}$, где $|\rho| = R = lr^\alpha e^{-\beta\theta}$ и $\arg\xi = \Theta = \beta \ln r + \alpha\theta + \omega$. При $r \to 0$ величина $R \to 0$, тогда как $|\Theta| \to \infty$.

Таким образом, при $t \to 0$ функция ξ описывает около значения $\xi = 0$ спираль с бесконечным числом оборотов, все более приближаясь к этой точке как асимптотической [2].

[1] Это же справедливо и для $a=o$.

[2] Здесь точка $t=0$ в общем является трансцендентной.

Если коэффициент a — действительное, положительное и соизмеримое с $\frac{m}{n}$ число, то значения функции (соответствующие одному и тому же значению переменной и тому же значению λ_0) образуют циркулирующую последовательность n величин, взаимно перемещающихся [1]. Брио и Буке отметили, что уравнение (5.8) не имеет иных интегралов, кроме рассмотренных. Также устанавливается существование лишь монодромного интеграла в случае, когда действительная часть коэффициента a отрицательная.

Случай положительного целого коэффициента a можно свести к $a=1$. Если при этом $b\neq 0$ (см. уравнение (5.6)), то рассматриваемое уравнение не имеет никакого монодромного интеграла; если же при $a=1$ $b\neq 0$, то оно допускает бесконечно много монодромных интегралов. Кроме того, отмечается, что в предыдущем случае ($a=1$, $b\neq 0$) оно допускает бесконечно много монодромных интегралов.

Следующий основной случай сводится к исследованию уравнения вида

$$t\frac{d\zeta}{dt} = g\zeta^m + bt + d\zeta t + et^2 . \tag{5.9}$$

Здесь легко установить существование монодромного интеграла, применяя предыдущие соображения. Основное внимание авторы уделяли исследованию наличия других интегралов и доказательству их отсутствия (кроме некоторых исключительных случаев). Позже Пенлеве [228.27, 38] отметил неточность этого заключения, основанного на стремлении аргумента к нулю вдоль конечного пути и предположения ограниченности аргумента.

Третий основной тип рассматриваемых уравнений приводится к форме

$$t^m\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + \ldots , \tag{5.10}$$

где m — целое положительное. Оно, вообще говоря, не обладает монодромным интегралом, удовлетворяющим начальным условиям [2].

Эту работу Брио и Буке очень высоко оценил Коши [122.30]. Говоря о том случае, когда коэффициент a — дробное число, он подчеркивает, что частный интеграл будет функцией монодромной и моногенной для t меньше некоторого предела. Коши фиксировал внимание геометров на исследовании уравнения вида (5.6), так как эта часть «не оставляла желать ничего лучше по четкости доказательств». Он отметил весьма справедливо также

---

[1] В этом случае $t=0$ есть точка критическая алгебраическая.

[2] Здесь точка $t=0$ в общем существенно особая, как можно увидеть из простого примера уравнения: $t^2\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta$.

важность геометрических интерпретаций и построений (следуя вероятно, примеру Пюизё) в виде чертежей, что в научных математических трактатах до того встречалось весьма редко. (В работах Коши они, например, отсутствуют). Итак, это исследование Брио и Буке открывало новую страницу в анализе в смысле объекта исследования и постановке нового вопроса; оно было также весьма прогрессивным явлением и в методическом смысле, так как изложено четко и с возможной ясностью, снабжено достаточным количеством хорошо продуманных примеров.

Что же касается применяемых методов, то они базировались на результатах классического анализа предыдущих десятилетий, главным образом на работах Коши. В связи с этим нельзя не отметить замечания Фукса [153.13, 392], сделанного через 30 лет, о том, что сама форма правой части исследуемого уравнения предполагала точку неопределенности «не такой, для которой u как функция от z будет вообще неопределенна. Может быть, когда это случится, разложение в ряд, которое ведет к трем названным типам, нельзя делать». Он рекомендовал сначала исследуемое уравнение привести к виду $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z^k} F(z, u)$, и только в тех случаях, когда интегралы его не становятся неопределенными в $z=0$, считал приемлемым переход к названным типам. Иначе говоря, он имел в виду законность таких разложений, когда не было названных им точек неопределенности.

§ 2. Представление неголоморфных интегралов. Связь с теорией устойчивости (Пуанкаре, Ляпунов, Пикар и др.)

Дальнейшее развитие работы Брио и Буке получили лишь через несколько десятилетий и прежде всего в трудах французских ученых. Новая (указанная в заголовке) проблема впервые решена одновременно Пуанкаре и Пикаром в 1878 г. двумя различными способами, основанными на использовании метода мажорант. Подытожив предыдущие результаты Брио и Буке, Пуанкаре [237.1] обратил внимание на те случаи, имея в виду уравнение (5.6), при которых либо действительная часть коэффициента a была положительна при $t=0$, $\zeta=0$, либо a было целым положительным и уравнение, кроме голоморфного интеграла (или не имея его), допускало еще бесконечно много интегралов неголоморфных, исчезающих вместе с аргументом t, и изучил их более обстоятельно.

Данное уравнение он рассматривает в форме

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5.11}$$

где функция f голоморфна по обоим аргументам в окрестности $x=0$, $y=0$. Пуанкаре установил, что упомянутые только что

интегралы: 1) в случае $\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda$ для $x=y=0$ будут голоморфны по x и x^λ, если λ — не целое положительное число и его действительная часть — положительна, 2) если $\frac{\partial f}{\partial y}$ для $x=y=0$ — целое положительное, то они голоморфны по x и $x\ln x$.

При доказательстве этих утверждений Пуанкаре сначала разобрал вопрос, в каких случаях функция y, определяемая уравнением (5.11), может быть представлена в окрестности $x=0$ сходящимся рядом как по возрастающим степеням x, так и x^λ. При этом рассматривается $y=\varphi(x, z)$, где $z=x^\lambda$. Для установления сходимости полученного разложения (λ — дробное) используется вспомогательное уравнение

$$x\frac{dy}{dx}=\alpha_0+\beta_0 y+\frac{M\left|\right.}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R_1}\right)},$$

где α_0 и β_0 выбраны так, что для $x=y=0$ правая часть равна нулю и что $\lambda=\frac{1}{m}$, где m — целое. К этому приводится и случай, когда действительная часть λ положительна. Область сходимости в первом случае ограничена кругом и одновременно логарифмической спиралью.

Второй случай, когда λ — целое положительное, как показывали еще Брио и Буке, легко приводился к $\lambda=1$. В результате его исследования Пуанкаре пришел к выводу, что любая функция, определенная уравнением (5.11), где $\frac{\partial f}{\partial y}=1$, будет разложимой по возрастающим степеням x и переменной t, определенной из уравнения $x\frac{dt}{dz}=t-x$, или по $x\ln x$ в окрестности $x=0$, $y=0$. Область сходимости ряда определяется условиями $|x|<\rho$; $|x\ln x|<\rho_1$. И здесь функция y могла быть представлена, как и в первом случае, по возрастающим степеням входящего в разложение произвольного параметра.

Дальнейшее развитие изложенные идеи Пуанкаре получили в его докторской диссертации [237.2], защищенной 1 августа 1879 г. перед комиссией в составе Буке (председатель), Боннэ и Дарбу. Пуанкаре изучал здесь (часть вторая) проведение интегралов дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка или системы n обыкновенных уравнений с n неизвестными функциями в окрестности особой точки, обобщая соответственные результаты Брио и Буке и свои собственные, опубликованные на год раньше. В системе

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \qquad (5.12)$$

предполагались $X_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k$, x_k — комплексные координаты точки плоскости n измерений; n поверхностей $X_i = 0$ пересекаются в одной (нулевой) точке. В окрестности начальных условий $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ эта система имеет форму $\frac{0}{0}$. Затем рассматривалось уравнение $X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = S\lambda$, где λ — один из n корней уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.13)$$

подчиненных условиям: а) они все различны и отличны от нуля; б) такие, что $m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n \neq \lambda_1$ (где $m_i \geqslant 0$ — целые) [1]; в) расположены в комплексной плоскости по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало. Тогда устанавливается существование n различных общих голоморфных интегралов уравнений (5.12), определенных в окрестности нулевой точки, в форме

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n} \; (= t), \qquad (5.14)$$

где T_i — функции, голоморфные от x_i и K_i — константы интегрирования. Аналогичным образом был рассмотрен и более общий случай нелинейных уравнений. Различные обстоятельства, которые могут представиться при исследовании особенностей, зависят, как и в случае уравнений первого порядка, от сравнения знаков и величины действительных частей отношений величин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (63).

К более глубокому исследованию особых точек дифференциальных уравнений первого порядка Пуанкаре возвратился в серии работ о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, основная часть которых переведена на русский язык [237.22]. Материал гл. 2 и других из указанной работы можно найти почти в любом учебнике по теории дифференциальных уравнений (см., например, [72, гл. II, § 2]).

В цикле указанных работ очень подробно в различных аспектах изучался вопрос распределения особых точек интегралов, а также (в мемуарах 3, 4) излагались основы теории устойчивости Пуанкаре (см. об этом [49. гл. 3, § 8]). Его результаты о воз-

[1] Это условие было указано позже, в [237.17]. Без него в некоторых случаях теорема Пуанкаре была бы неверной.

можном поведении и формах характеристик уравнения первого порядка, указанные в работах [237.4.—5], были через 15 лет обобщены Бендиксоном в [98.5], а его идеи по теории устойчивости послужили исходной точкой [43.2, предисловие] капитальных исследований Ляпунова [1].

В докторской диссертации [43.2] Ляпунов шагнул далеко вперед, перекрыв частично некоторые результаты упоминаемой работы Бендиксона и более поздней статьи Фроммера [152]. Первые результаты Ляпунова в этом направлении опубликованы в 1888 г. [43.1]. Эта статья была одной из первых по вопросам устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы. Уже здесь наметились некоторые важные идеи [2], получившие дальнейшее развитие в его докторской диссертации и последующих сочинениях. Во второй части статьи [43. 1] с п. 9 Ляпунов останавливается на некоторых вопросах общей теории устойчивости. Ввиду того, что содержание этой работы не освещается даже в больших обзорных статьях, мы остановимся на ней с точки зрения изучаемой проблемы. Здесь рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x + B_i y + C_i z + \ldots + f_i(x, y, z, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.15}$$

правые части которых явно не содержат время t, а x, y, ... — величины, определяющие движение системы и обращающиеся в нуль для невозмущенного движения. Коэффициенты A_i, B_i, C_i,...— постоянны, а f_i — многочлены по своим аргументам и не содержащие их в нулевом и первом измерении. Если интегралы системы (5.15) таковы, что при любых достаточно малых начальных значениях они остаются сколь угодно малыми для всякого t, то невозмущенное движение устойчиво. Если же существует хотя бы одно частное решение этих уравнений, при котором начальные значения функций x, y, z, ... могут быть выбраны сколь угодно малыми, но обладающее свойством, когда для достаточно больших значений t функции x, y, z, ... принимают значения, бóльшие некоторого данного предела, как бы малы не были их начальные значения, то это движение неустойчиво. Интегрируя уравнения (5.15) способом последовательных приближений, при весьма малых начальных возмущениях, для x, y, z, ... получают выражения в виде рядов, которые, как показывает автор, будут сходящимися в известных пределах. Члены этих рядов представляются однородной целой функцией n-й степени от начальных

---

[1] Подробно об этом см. в [66.5].

[2] Полную самостоятельность первых работ Ляпунова по теории устойчивости подчеркивает Н. Д. Моисеев [49, 539].

данных $a, b, c, \ldots$ (при $t=0$) и от n-й степени величин $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}, \ldots$, где k_i — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1 - k & B_1 & C_1 & \ldots \\ A_2 & B_2 - k & C_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & C_3 - k & \ldots \\ & & \ldots & \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.16)$$

степени m. Но это уравнение подобно (5.13) (относительно λ). Если для его корней k соблюдается условие, аналогичное (б) для (5.13), то коэффициенты в упомянутых выше целых функциях величин $e^{k_i t}$ будут постоянными. Также уточняются и другие заключения относительно исследуемых решений в зависимости от характера корней уравнения (5.16). Отбрасывая в упомянутых выше рядах все члены, следующие за n-м, получаем так называемое n-е приближение. Указав, что в рассматриваемых вопросах обыкновенно ограничиваются исследованием первого приближения и по нему судят об устойчивости невозмущенного движения, Ляпунов отмечает, что если среди корней уравнения (5.16) нет имеющих положительные вещественные части, а в выражения первых приближений показательные функции, соответствующие корням с нулевыми вещественными частями, входят с постоянными коэффициентами, то невозмущенное движение считается устойчивым, в противном случае — неустойчивым; и хотя движения, устойчивые или неустойчивые по первому приближению, в действительности могут и не быть такими, в ряде случаев исследование уравнения (5.16) действительно решает вопрос об устойчивости. Разобрав этот вопрос, Ляпунов доказывает, что невозмущенное движение несомненно неустойчиво, если в числе корней уравнения (5.16) есть такие, вещественные части которых положительны. Полученные здесь общие результаты применяются затем для исследуемого автором вопроса устойчивости движения твердого тела в жидкости.

Не входя в дальнейший обзор развиваемых далее идей Ляпунова, когда были четко сформулированы основные понятия и предложена стройная система строгих доказательств (см. об этом в [49; 66.5] и др.), мы хотели лишь показать истоки его глубоких представлений и тесную связь основных положений теории устойчивости Ляпунова с анализом особых точек дифференциальных уравнений. Ряд конкретных результатов в последнем направлении получены им в докторской диссертации [43.2] (см. об этом в [228.27, 55]).

Таким образом, чисто теоретические исследования Брио и Буке, Пуанкаре и Ляпунова в аналитической теории дифференциальных уравнений привели к рождению таких мощных отделов анализа, как качественая теория и теория устойчивости, прикладное значение которых общеизвестно.

Дополнение Пикара [235.1] к рассмотренным исследованиям Брио и Буке состояло в распространении их идей на уравнения второго порядка вида

$$z\frac{du'}{dz}=f(u,u',z),$$

где функция f — однозначна и непрерывна по своим аргументам в окрестности точки $z=0$, $u=\alpha$, $u'=\beta$ и принимает в этой точке нулевое значение.

К исследованию уравнения (5.7) Пикар возвратился в заметке [235.3], имея в виду тот случай, когда действительная часть коэффициента a при u положительна и больше единицы и когда уравнение допускает бесконечно много немонодромных интегралов, исчезающих для $z=0$. Дополнительное исследование поведения интеграла уравнения первого порядка в области особой точки — седловины и уточнение данного ранее доказательства Пуанкаре указано Пикаром в письме к Клейну [235.15] в 1895 г. Его результат был частично обобщен несколько позже Лонгли [208.1].

Оригинальное дополнение исследований Брио и Буке было предложено также Горном в 1894 г., когда строились возможные интегралы с так называемым нерациональным порядком исчезновения.

В скором времени упоминаемые выше работы Пуанкаре и Пикара были существенно дополнены. Так, уже в мемуаре [237.16] существование голоморфных интегралов системы (5.12) Пуанкаре доказывал, опустив условие в) для корней уравнения (5.13), а в статье [237.4, гл. II] исследовал частные случаи: $\lambda_1=\lambda_2$; $\lambda_1=0$.

Новая теорема относительно системы интегралов была получена Бендиксоном в [98.2] (и доказана для $n=2$), когда для корней уравнения Пуанкаре (5.13) снималось то условие, что его корни λ различны. В следующей работе [98.3] он изучил дополнительно интегралы вида (5.14) при $n=2$, когда отношение λ_1 и λ_2 не являлось действительным положительным числом, и установил для них новую форму выражения.

Важное значение в развитии рассматриваемой теории имела большая работа Бендиксона [98.5], где автор обобщил наиболее важные из теорем Пуанкаре на случай, когда функции X_1, X_2 ($n=2$ для системы (5.12)) предполагаются лишь непрерывными со своими первыми производными. Здесь рассмотрены важные новые понятия — интегральной кривой, проходящей через особую точку, узловой области и другие очень существенные при изучении интегральных кривых в окрестности особых точек.

Обобщение упомянутой теоремы Пуанкаре относительно системы интегралов уравнений (5.12) при отсутствии условия б) относительно корней уравнения (5.13), т. е. при наличии линейной зависимости для корней λ, дал Линделеф [204.4]. Он пока-

зал, что общие решения системы (5.12), записанной в иной форме, разложимы по целым положительным степеням аргументов $t^{\lambda_{\nu_1}}$, $t^{\lambda_{\nu_2}}$, ... $t^{\lambda_{\nu_k}}$, $\ln t$, обозначив через λ_{ν_k} те величины λ, которые не зависят линейно от остальных.

Несколько раньше был опубликован большой мемуар Горна [177.3], где изучались системы вида

$$x\frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $G_i = \sum_1^n a_{ik}y_k + \ldots$ — степенные ряды по x, y_1, y_2, ..., y_n, исчезающие в нулевой точке. Для этих систем автор устанавливает теоремы большой общности и доказывает, в частности, как можно непосредственно найти, методом неопределенных коэффициентов, те ряды, существование которых чуть позже доказывал Линделеф. Горн записывал интегралы y_i в таком виде:

$$y_i = \sum c^i_{\lambda,\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m} (\ln x)^{\lambda_1\nu_1+\ldots+\lambda_m\nu_m},$$

где α_1, α_2, ..., α_m подчинены условию вида б) для корней уравнения (5.13); $i=1, 2, \ldots, n$; $\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_m>0$; $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ — целые положительные числа или нули, которые определяются по коэффициентам a рядов G_i. В последней части работы обсуждается тот же вопрос, но лишь при наличии условия, подобного в) для корней уравнения (5.13). При этом дано доказательство, что x может пробегать кривую, неограниченно приближающуюся к нулевой точке (в общем логарифмическую спираль), что абсолютное значение всех величин $x^{\varrho_i} \ln x^{k_i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ становится как угодно малым (k_i — нуль или положительное целое число).

Возможность подобных разложений при наличии условий а), в) для корней уравнения вида (5.13) была раньше доказана Кенигсбергером [195.2, гл. V, § 4]. Здесь же он дал подробное изложение и дальнейшее развитие идей, намеченных в диссертации Пуанкаре, а несколько раньше (гл. V, § 1), обобщая исследования Брио и Буке, показал, что исследование голоморфных решений в нулевой точке в общем приводится к той же проблеме относительно систем (5.12) при некоторых дополнительных условиях.

Распространение идей Брио и Буке, уточнение их анализа и обобщение его на случай системы уравнений было выполнено в работах Фине [144.1] и Гурса [163.3]. При исследовании используется уравнение вида (5.13) и известные предположения относительно его корней. Гурса подробно исследовал также различные виды того случая (при $n=2$), когда один или два корня λ

соответственного квадратного уравнения типа (5.13) есть положительные целые числа, распространив потом полученную теорему на случай любого числа уравнений.

§ 3. Из истории теории особых решений

Классическая теория особых решений уравнений вида $F(x, y, y')=0$ в XIX веке получила существенное развитие. Во второй его половине само понятие особого решения дифференциального уравнения было несколько расширено в связи с развитием учения о поведении интегралов в области особых точек. Под особым решением понималось такое, которое во всех своих точках не удовлетворяло условию единственности. Для его существования, очевидно, необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши существования и единственности решений. Эти решения Пенлеве связывал [228.27, стр. 26 и след.] с так называемыми обычными особенностями правой части уравнений (5.1), в отличие от ее существенных особенностей, которые начали подробно изучать Брио и Буке и их последователи. Обычные особенности обусловливались наличием алгебраических особых точек. Подробное исследование этого случая содержится в статье Пенлеве [228.27, 28 и след.].

Согласно условиям Лагранжа уравнение

$$F(x, y, y')=0 \tag{5.17}$$

будет иметь особое решение $y=g(x)$, если оно совместимо с уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 \tag{5.18}$$

(т. е. условие будет достаточным при $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, не равных тождественно нулю при $y=g(x)$ [235.17, гл. III, § 1]). В таком случае $y=g(x)$ будет огибающей семейства кривых $F(x, y, C)=0$.

О точном разделении особых решений и частных интегралов вопрос прямо был поставлен Коши. Соответственный критерий выражался теоремой [219, 453]: для установления, является ли интеграл $y=g(x)$ особым или частным для уравнения $y'=f(x, y)$, достаточно проверить, будет или нет бесконечно малой величина определенного несобственного интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dz}{f[x, g(x)+z]-f[x, g(x)]},$$

где x рассматривается как константа, а α и β — два бесконечно малых значения переменной z, между которыми подынтегральная функция не меняет знак.

Другой метод отличия частных и особых интегралов в 1846 г. был указан Бланше (см. об этом в [203, 28—29].

Большое внимание изучению особых решений уделил Буль в трактате по дифференциальным уравнениям (2-е изд. в 1865 г.), где содержались и его новые результаты.

Если из уравнения (5.17) и первого (5.18) исключить y', то получим так называемое дискриминантное уравнение

$$D(x, y) = 0, \tag{5.19}$$

которое, кроме особого решения, может представить геометрическое место точек возврата интегральных кривых и т. д. Впервые этот факт был установлен Курно в 1842 г. (см. об этом в [251, 377]). Он затем был исследован переоткрывшим его де-Морганом [133.2] и дополнительно Булем. Некоторую ясность внес в этот вопрос Мансион [212], (1872).

Но вполне определенно для весьма широкого класса функций этот вопрос был сформулирован Дарбу (51) в 1870 г. [130.1], имевшего в виду функцию F (для 5.17) однозначной, конечной и непрерывной по всем своим аргументам. Сообщение Дарбу вызвало полемическое возражение Каталана [121] и ответ Дарбу [130.2]. В скором времени Дарбу опубликовал большую статью [130.3], где дал обстоятельное и точное доказательство двумя способами своей теоремы и показал ее связь с более широким, чем было общепринято, взглядом на геометрическое значение дифференциальных уравнений, вытекающим из применения к последним принципа двойственности.

В это же время вышла одна из последних интереснейших статей Рудольфа Клебша [126.1], где теория дифференциальных уравнений первого порядка была приведена в тесную связь с аналитической геометрией. Здесь было введено в геометрию новое понятие коннекса. Теория коннексов включала как частные случаи теорию кривых различных порядков и теорию кривых различных классов. Она тесным образом связана с принципом двойственности, разработанным в трудах главным образом Штейнера, Штаудта, Клебша (геометрическое изложение) и Плюкера (аналитическое). Рассматривая как первичный элемент точку и прямую вместе, заданные в однородных координатах (x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3), четыре отношения между которыми вполне определяют положение элемента, можно получить совокупность последних как систему четырех измерений на плоскости. Коннексом Клебш назвал совокупность всех элементов, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{5.20}$$

где Φ — целая однородная функция по всем своим аргументам. Если между координатами элемента имеют место уравнения

$$\text{I.}\quad \Phi_1 = 0, \qquad \text{II.}\quad \Phi_2 = 0, \tag{5.21}$$

Гастон Дарбу (1842—1917).

то геометрическая форма, состоящая из совокупности всех элементов, координаты которых удовлетворяют уравнениям (5.21), была названа коинциденцией (совпадающей). В нее входят, очевидно, элементы, общие двум коннексам I и II. Поэтому в коинциденции каждой точке M соответствуют касательные, общие тем двум кривым K_n и K_n^1, которые сопряжены с точкой M, первая — в коннексе I, вторая — в II. Коинциденция, соответствующая данному коннексу $\Phi=0$ и уравнению тождественного коннекса $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$, называется главной. Каждой главной коинциденции, а значит, и каждому коннексу соответствует некоторая система кривых линий, а последняя может быть определена дифференциальным уравнением вида

$$\Phi(x_1, x_2, x_3,\ x_2dx_3 - x_3dx_2,\ x_3dx_1 - x_1dx_3,\ x_1dx_2 - x_2dx_1) = 0 \qquad (5.22)$$

либо

$$\Phi(u_2du_3 - u_3du_2,\ u_3du_1 - u_1du_3,\ u_1du_2 - u_2du_1,\ u_1, u_2, u_3)=0, \qquad (5.23)$$

которые по своему характеру являются алгебраическими. Таким образом, задача интегрирования уравнений (5.22), (5.23) может быть рассмотрена как отыскание системы кривых линий, соответствующих коннексу (5.20) и его главной коинциденции. От уравнения в точечных координатах (5.22) легко перейти к обыкновенному, заменив систему однородных координат прямоугольными декартовыми. В результате этих исследований был получен важный результат о том, что всякому алгебраическому дифференциальному уравнению соответствует коннекс, поэтому исследование таких уравнений можно было привести к исследованию соответствующих коннексов. А отсюда можно найти и условия, при которых дифференциальные уравнения имеют особые решения. Этот вопрос в русской литературе, вероятно, впервые рассматривался в работе А. Васильева [12.1] в 1878 г. Дальнейшее развитие идеи Клебша нашли в магистерской диссертации [65.2] Д. М. Синцова и других его работах.

Клебш один из первых обратил внимание на различную постановку вопроса об отношении особых решений к дифференциальным уравнениям в зависимости от того, что брать за первичный элемент исследования — дифференциальное уравнение или его интеграл. Этот вопрос был дальше развит в работах Кели, Дарбу, Казорати. При этом особое внимание уделялось анализу соответственных дискриминантных уравнений (полу-

ченных при двух различных исходных элементах), который давал иногда противоречивые результаты о наличии особых решений в данном уравнении, что было выражено в ряде известных парадоксов. Относительно источников этих парадоксов высказывалось немало остроумных замечаний Дарбу (130.3), Линдеманом [176.2] и др. Решение вопроса они связывали как с исходным элементом исследования, так и с характером и особыми соотношениями между константами. И в зависимости от этого получалась либо огибающая, либо геометрическое место точек возврата и т. д. В связи с этим Дарбу считал необходимым теорию особых решений разделить на две обособленных части. В первой из них, принадлежащей дифференциальному исчислению, исследуется дифференциальное уравнение, полученное исключением констант; во второй, принадлежащей интегральному исчислению, не делая никаких предположений о начале (происхождении — *В. Д.*) дифференциального уравнения, следует придерживаться общих гипотез и не предполагать существования интеграла вида $F(x, y, C)=0$, что и не следует из теоремы существования [130.3, 167]. Таким образом, работами Дарбу была подведена геометрическая основа условиям Лагранжа необходимости существования особых решений.

Рудольф Клебш (1833—1872).

Почти одновременно с Дарбу, выдающиеся результаты в этой области получил и Кэли [123.1]. Его исходные позиции во многом совпадали с теми же у Дарбу. Он подробно изучал геометрическую трактовку дискриминантных уравнений, исходя из интеграла, а затем из самого уравнения. Оказалось, что они могут представить огибающие, узловые точки и точки возврата и касания систем кривых. Эти же вопросы аналитическим путем исследовал Хилл [175.1].

Подробное исследование уравнения $Lp^2+2Mp+N=0$ $\left(p=\right.$ $\left.=\frac{dy}{dx}\right)$ (L, M, N — рациональные коэффициенты по x, y) провел Кэли в [123.2]. Отыскивая ответ на актуальный тогда вопрос, при каких условиях дифференциальное уравнение определяет вообще говоря семейство кривых, которые не имеют огибающей, автор ошибочно предположил, что уравнение соответственного общего интеграла обычно имеет трансцендентную природу и соответственная система кривых не может обладать огибающей. Как позже показал Гамбургер [169.4], существование огибающих или особых решений не связано с трансценден-

Артур Кэли (1821—1895).

ной или алгебраической природой общего интеграла. Причину ошибочного взгляда Кэли объяснил через двадцать лет его соотечественник Кристаль [125]. Впрочем и сам Кэли нашел контрпример своему утверждению.

Ряд интересных новых результатов по данному вопросу и, в частности, о геометрическом истолковании дискриминантов получил Казорати [120.1.—2 и др.], не знакомый, как Мансион [212], сначала с важными исследованиями Дарбу и повторивший (как Мансион) некоторые положения Каталана.

Результаты Дарбу и Кэли получили новые аналитические доказательства в работах 80-х годов XIX века: Глетчера, Хилла, Джонсона, Пикара, Воркмана. Пределла в 1895 г. привел новое геометрическое доказательство, хотя и не везде безупречное, предложенных Кэли и аналитически решенных Каптейном [190.1] вопросов, дал общий сбзор всех разрозненных результатов Казорати и Воркмана и изучил простейшие формы дифференциальных уравнений первого порядка третьей степени.

Исследование особых решений, исходя из интегрального уравнения, содержащего произвольные константы в степени не выше n-й и с коэффициентами — целыми рациональными функциями по x, y, выполнила Медисон [210]. После общего исследования семейства n-го порядка ею были подробно рассмотрены специальные квадратичные, кубичные и биквадратичные семейства кривых с привлечением новых средств из теории инвариантов.

С начала 90-х годов центр исследований в данной области начинает перемещаться в сторону чисто аналитических исследований.

Если Гамбургер оперирует аналитическими функциями еще в действительной области, то уже Форсайт начинает исследование функциональных соотношений, выраженных дискриминантным уравнением (исходя из дифференциального уравнения), также для комплексных значений интегралов.

Вместе с тем намечается и новый подход к истокам предмета на основе фундаментальных исследований Брио и Буке и их последователей по теореме существования интегралов и по видам особых точек. Весьма полезными в этом отношении оказались и работы Фукса 1884 г. о поведении интегралов уравнений первого порядка.

Еще в первом издании своего курса анализа (1868 г.) Серре

отмечал, что в тех точках x, y, где $f(x, y)$ — регулярна, не может быть особых решений уравнения $y'=f(x, y)$. Следовательно, особыми решениями могут быть только такие геометрические места, в окрестности которых y' становится нерегулярной. Эта естественная идея была положена в основу диссертации Карла Шмидта [255], исследовавшего такие многообразия, полученные из алгебраического дифференциального уравнения, которые в общем не являются решениями, их значение и связь с частными интегралами. Ему удалось более подробно изучить свойства дискриминантных кривых, исследуя их поведение в окрестности отдельных точек, а также рассмотреть переход дискриминантной кривой в особое решение.

Существенным продвижением в теории была работа [163.3] Гурса, опубликованная в 1889 г. в американском математическом журнале. Обобщив здесь теорему Брио и Буке для уравнения (5.7) на случай системы, автор уделил основное внимание распространению результатов Дарбу относительно особых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений на системы совместных дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков. В ряде точек с этой работой соприкасалась статья американского математика Фине [144.2], опубликованная в том же томе журнала. Фине также исходил из исследований Брио и Буке и считал, что особые решения появляются в исключительных случаях. Он установил условие представления дискриминантным уравнением огибающей или геометрического места точек возврата, а также изучал вопрос о распространении теории на уравнения высших порядков. Последний вопрос немного раньше в 1887 г. рассматривался также в Стокгольме Мёллером главным образом для уравнения второго порядка.

Особые решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одним аргументом и n функциями изучались А. Майером [213.2], О. Бирманом [99.1] и Диксоном [135]. Диксон построил своеобразный итеративный процесс для получения n видов особых решений (первые, вторые и т. д.) соответственно с n—1, n—2, ..., 1, 0 произвольными константами.

Многие из оставшихся невыясненными вопросов данной теории были весьма четко решены в исследовании Гамбургера [169.4]. Он установил, что дифференциальное уравнение, допускающее особое решение, должно обладать определенным свойством, обусловленным как исключительный случай в свойствах семейства интегральных кривых. Решение этого вопроса (парадокса) состоит в том, что когда дифференциальное уравнение представлено в общем виде, то получаемое из него интегральное уравнение обладает тем особым свойством, что представляемая им система кривых вообще говоря не обладает огибающей. «Итак,— говорит он,— случай правила для дифференциального уравнения обусловливает исключение в интегральном уравнении и наоборот: когда интегральное уравнение дано в общих

коэффициентах, то выведенное из него дифференциальное уравнение представляет исключительный случай обладать особым интегралом» [169.4, 207]. Дело в том, как пояснил Гамбургер, что одно и то же свойство проявляется в одних условиях как всеобщее, в других — как особый случай. Так, заданная в точечных координатах с общими коэффициентами кривая не имеет двойных точек. Напротив, если уравнение кривой задано в линейных координатах, то коэффициенты его должны удовлетворять некоторому условию, чтобы не существовало двойных точек.

Обратное имеет место, если принять во внимание существование двойных касательных. Наличие огибающей зависит по существу только от природы семейства кривых, а не от их представления. От формы представления зависит лишь существование или несуществование огибающей как появление общего случая. В этом исследовании Гамбургер исходил из принципов, лежащих в основе работы Фукса [153.10]. Их существенное значение состояло в разложении дискриминанта Δ дифференциальных уравнений на их линейные делители и в разложении различных совпадающих ветвей от y' как алгебраических функций от y, данных дифференциальными уравнениями, в ряды по степеням таких делителей $y-\eta$, коэффициенты которых, так же как η, зависят от x. В заключение первой части работы Гамбургер доказывает, что каждое алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка и n-й степени в отношении y' допускает интегральное уравнение в форме $F(x, y, C)=0$, где F — целая функция n-й степени по C и коэффициенты которой — ряды по целым положительным степеням $x-a$, $y-b$ с определенной областью сходимости.

Во второй части он исходит из такого же уравнения $F(x, y, C)=0$ и устанавливает условия, когда представимое этим уравнением семейство кривых не имеет огибающей. В результате обстоятельного изучения вопроса получались те же условия для существования особых решений, как и при изучении самих дифференциальных уравнений. Отметив, что проведенные исследования, исходя из интегрального или дифференциального уравнения, вели к совпадающим целям, Гамбургер с полным основанием писал, что утверждение так называемой несравнимости обоих путей рассмотрения потеряло всякое право.

Несколько в стороне от общего русла работ была статья Вельтмана [270], давшего в 1876 г. отличное от общепринятых определение особого решения, понимая под ним такую функцию-решение $y=\varphi(x)$, для которого во всей области существования нет смежных решений. Под смежными он понимал такие, которые могли получаться из $\varphi(x)$ при ее бесконечно малом изменении, т. е. она являлась особым решением, если при малейшем ее изменении переставала удовлетворять данному дифференциальному уравнению.

В конце прошлого и начале нашего века появлялось еще множество работ по данной проблеме, где главным образом геометрическим путем дополнялись и улучшались полученные ранее основные результаты. Это статьи Зайончковского, Кокля, Гольмана, Перри, Петровича, Розенблата и др. Дальнейшее развитие и обобщение метода Гамбургера на уравнения высших порядков и на системы было выполнено им же в цикле статей конца 90-х годов.

Теория особых решений изучалась в работах русских ученых Деларю, Васильева (52), Лахтина и других, получивших ряд новых оригинальных результатов.

Как видно из изложенного, ряд методов исследования особых решений, в частности геометрические, оказались полезны и применимы для других частей аналитической теории дифференциальных уравнений, например, там, где рассматривается вопрос о делителях дискриминанта уравнений фуксового типа; с другой стороны, методы, выработанные в смежных отделах этой теории, помогли пролить свет на многие неясные места теории особых решений. Кроме того, понятие особых решений распространялось на комплексную область (Форсайт, Дюлак и др.).

§ 4. Алгебраические интегралы уравнений первого порядка. Геометрическая теория Отона. Дальнейшее развитие идей Брио и Буке

Упоминаемые выше (§ 3) идеи Клебша нашли широкое применение в теории дифференциальных уравнений. Так, в скором времени Дарбу развил их в ряде работ (опубликованных в 1878 г.) по исследованию алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени.

Создаваемая таким образом теория частных алгебраических интегралов по своему характеру может быть рассмотрена как одно из направлений аналитической теории дифференциальных уравнений, обогатившее ее рядом интересных методов. Вместе с тем она имела очень тесную связь с рассматриваемой нами общей задачей изучения поведения интегральной кривой в области особой точки. Эта связь в самом общем виде и очень ясно показана в заметке [37.2] М. Н. Лагутинского (53). Автор отметил здесь, что полное решение задачи проведения интегральных кривых через особую точку требует среди других исследований предварительного изучения частных алгебраических интегралов.

Дарбу (в 1878 г.) исходил из уравнения в однородной форме

$$L(ydz - zdy) + M(zdx - xdz) + N(xdy - ydx) = 0, \qquad (5.24)$$

где L, M, N — целые однородные функции той же степени m от x, y, z. Известные формы указанного выше типа уравнений можно привести к (5.24) многими способами, но среди них есть од-

на, так называемая нормальная, форма, которая удовлетворяет инвариантному условию

$$H \equiv \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

и к которой каждое дифференциальное уравнение приводится только одним способом. Отсюда находится число произвольных констант, появляющихся в (5.24): m^2+4m+2.

В первой части работы [130.7] Дарбу строит новый метод интегрирования, устанавливая интегрирующий множитель μ для (5.24), когда последнее становится полным дифференциалом некоторой однородной функции. Далее показывается, что интегрирование этого уравнения приводится к интегрированию системы

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}.$$

Дарбу сначала устанавливает условия, при которых уравнение (5.24) допускает как частный интеграл алгебраическую неприводимую функцию $f(x, y, z)=0$, а затем находит общий интеграл этого уравнения в форме

$$U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_l^{\alpha_l} = C, \tag{5.25}$$

где U_i — частные алгебраические интегралы; α_i — постоянные показатели, а $l = \frac{m(m+1)}{2} + 2$. Во многих случаях можно обойтись знанием и меньшего числа частных интегралов, возможность для этого открывается подробным изучением особых точек дифференциального уравнения. Дарбу установил, что для отыскания общего интеграла надо знать p частных решений, представляемых кривыми, не проходящими через q особых точек, где $p = \frac{m(m+1)}{2} + 2 - q$; он запишется в форме (5.25) (при замене индекса $l=p$). Обобщение метода на случай систем алгебраических дифференциальных уравнений рассмотрено в [130.6].

Новое более простое доказательство теоремы о числе особых точек уравнения (5.24) в 1891 г. предложил Фуре [148]. В это же время появилась работа Пуанкаре [237.19], где были использованы и развиты рассмотренные идеи Дарбу и дополнены опубликованные немного раньше работы Пенлеве и Отона, о которых речь будет дальше. Интеграл уравнения (5.24) в окрестности особой точки x_0, y_0, z_0 записывается им в форме $X_1^{-s_1} X_2^{-s_2} = \text{const}$, где X_1, X_2 — степенные ряды по $\frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0}$, $\frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0}$. Чтобы уравнение (5.24) было интегрируемо в алгебраических функциях, необходимо, чтобы для всех особых точек их «пока-

затель» $r=s_1:s_2$ был бы действительным и рациональным. Если $r>0$, получается узловая точка, при $r<0$ — седловина и т. д.

Пуанкаре устанавливает определенные зависимости рода интегральных кривых от показателя полиномов m и числа ветвей в особых точках такого или иного вида. Этим самым решался вопрос, поставленный Пенлеве относительно принадлежности к данному роду алгебраической кривой общего интеграла для всех случаев, когда измерение m было выше 4 .Основная задача автора состояла в определении верхней границы для степени p общего алгебраического интеграла, записанного в форме $f+C\varphi=0$, где C — произвольная константа, а f и φ — однородные полиномы по x, y, z степени p. Она полностью решалась в особом случае, когда для всех «седел» показатель z равен — 1, формулой $m+2=p\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)$, где α_1 и α_2 — взаимно простые числа. В этом случае можно было установить алгебраическую интегрируемость уравнения (5.24).

Эта работа Пуанкаре скоро была дополнена заметкой Пенлеве [228.4], исследовавшим тот же вопрос — установление условий наличия алгебраических интегралов для более общего уравнения первого порядка $f(x, y, y')=0$, где f — неприводимый полином по x, y, y' и по y' — степени q. Сам Пуанкаре продолжил эти исследования через 6 лет [237.18], добавив к рассмотренному случаю новые, более общие, когда ему удалось, преодолевая большие трудности, ограничить величину p и тем самым решить проблему алгебраической интегрируемости, а также дать углубленное исследование встреченных здесь особых точек.

Весьма полезной для решения вопроса была теорема Фукса [153.11] об условиях алгебраичности общего интеграла уравнения вида

$$f(y', y, z, A, B, \ldots, M)=0,$$

где f — целая рациональная функция своих аргументов, а A, B, ... M — функции от z, подчиненные некоторым условиям. Эта теорема представляла также возможность построения такого интеграла, если он существовал. Позже Д. Мордухай-Болтовский [50] показал, что, пользуясь известным методом Лиувилля [205.2, 342 и след.], можно получить как результат Фукса, так и некоторое его обобщение.

Подробное и углубленное обобщение результатов Дарбу на алгебраические системы дифференциальных уравнений, расширение области применения его методов, анализ ряда новых, связанных с этим понятий и более простые доказательства ряда теорем, ряд новых интересных сведений содержится в монографии М. Лагутинского [37.1].

Исследование интегралов уравнений первого порядка и первой степени в области особых точек было одной из важнейших проблем анализа конца прошлого века. Именно совершенство-

вание этой теории при обращении особого внимания на роль критических точек было темой конкурса, объявленного Парижской академией наук в 1890 г. Как одно из выдающихся на этом конкурсе (удостоено почетного отзыва) отмечено сочинение Отона [95.4], за которым последовала большая серия работ, посвященных в основном дальнейшему развитию геометрической теории дифференциальных уравнений на основе высказанных здесь идей.

Автор изучал уравнение вида

$$M(\xi, \eta)\, d\xi + N(\xi, \eta)\, d\eta = 0,$$

где M, N — рациональные функции. Вводя однородные переменные $\xi = x_1 : x_3$, $\eta = x_2 : x_3$, он получает уравнение

$$\sum_{1}^{3} {}_i P_i (xdx)_i = 0, \quad \text{где} \quad (xdx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2, \quad (xdx)_2 = x_3 dx_1 - \ldots,$$

т. е. уравнение типа (5.24), изученное впервые подробно Дарбу в [130.7]. Здесь P_i — тройничная форма по x_i порядка m, который называется измерением данного уравнения (m — целое, положительное). Ту же проблему Отон (54) решал с другой точки зрения, исследуя отношения между интегралами и некоторыми кривыми, проходящими на уникурсальных поверхностях, и характер особенностей в уравнениях как обычных (критические точки — указанные в программе конкурса), так и исключительных (названных им точками поликритическими и гиперкритическими).

Отон рассматривает интегральные кривые, обладающие простым и общим для любого дифференциального уравнения свойством иметь касательные на некотором, всегда и том же линейном комплексе, который он назвал капитальным. Интегрантой (дополняющей) он назвал любую кривую, касательные которой — «капитальны», т. е. расположены на капитальном комплексе. В таком случае их дополняющие (а, следовательно, и интегралы) в известной степени могут быть изучены независимо от дифференциальных уравнений. Можно, например, исследовать по отношению к некоторым преобразованиям поверхностей интегранты, обладающие свойством инвариантности. Он устанавливает, что любое дифференциальное уравнение первого порядка $F(\xi, \eta, p) = 0$, где $p = \frac{d\eta}{d\xi}$, F — полином по ξ, η, p, может быть рассмотрено как уравнение некоторой алгебраической поверхности. Эта поверхность будет уникурсальной, если производная p входит в первой степени. Будет верно и обратное — исследование интегрант влечет за собой интегрирование уравнения первого порядка. Оно будет первой степени, если названная автором поверхность Φ — уникурсальна. Этот случай представ-

ляет особый интерес. Здесь положение точки z на Φ определяется четырьмя однородными координатами $z_j (j=1, 2, 3, 4)$, причем $\rho z_j = \varphi_j(x_1, x_2, x_3)$, где ρ — коэффициент пропорциональности, φ_j — тройничные формы. Интегранты будут характеризоваться элементом

$$(zdz) = \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dz_3 & dz_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

и на плоскости l представляться местом точек x с координатами $x_i (i=1, 2, 3)$ через интегралы так называемого регламентарного уравнения

$$(\varphi d\varphi) = \begin{vmatrix} (xdx)_1 & (xdx)_2 & (xdx)_3 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (xdx)_1 & (xdx)_2 & (xdx)_3 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} \end{vmatrix} = 0,$$

где $\varphi_{ji} = \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$.

Любое уравнение первого порядка и первой степени может быть рассмотрено как регламентарное. Основа развиваемого в этой работе метода состоит в том, что познание интегрант на уникурсальной поверхности Φ ведет к тому же для интегралов регламентарных уравнений.

В соответствии с высказанными идеями классификация уравнений производится не по их измерению, как поступали раньше (Дарбу в указанном мемуаре, например, изучал случай второго измерения), а согласно порядка поверхности Φ, или согласно порядка форм φ_j (линейных, квадратных, кубических и т. д.). Автор изучал из указанных те случаи, где Φ — плоскость, поверхность второго порядка, скрещивающиеся поверхности третьего порядка или общая поверхность третьего порядка, содержащая узловую кривую. В большинстве этих случаев (кроме последнего) Отон получает интегралы рассматриваемых уравнений в форме алгебраических функций или квадратур от них, в зависимости от существования, видов и количества упоминаемых выше особых точек.

Случай скрещивающихся поверхностей третьего порядка ведет к уравнению Риккати (присутствие одной дикритической точки) и т. д. В этой большой работе получили дальнейшее развитие идеи Клебша и Дарбу, в том числе применение теории коннексов к геометрической теории дифференциальных уравнений. В 1892 г. это исследование было продолжено. И здесь шла речь об изучении интегральных кривых как главных коинциденций некоторого коннекса, обозначенных автором как «регламентарных», о том, как можно узнать по регламентации о принадлежности поверхности Φ к уже изученным и т. д.

Следующий цикл работ Отона [95.—1. —3. —5. —6] связан с решением задачи о верхней границе степени алгебраического интеграла уравнений первого порядка, которой уже занимались Пуанкаре и Пенлеве. И здесь проблема трактуется геометрическим методом, развитым в предыдущих работах, когда интегральные кривые соответственных уравнений в однородных координатах появляются как главные коинциденции коннексов. Подобно тому, как каждому элементу коннекса благодаря некоторому бирациональному преобразованию соответствует точка пространства, так коннексу соответствует некоторая алгебраическая поверхность Φ, а каждой интегральной кривой — некоторая кривая G (интегранта) на этой поверхности.

Таким образом, отыскание алгебраического интеграла сводится к построению алгебраической кривой G. Проблема решается установлением максимума для степени алгебраической интегранты G, что составляет главную задачу автора, хотя он и не воздерживается от изучения кривых G самих по себе. В процессе анализа он существенно использовал методы и результаты большой работы Альфена [167.1] о классификации алгебраических пространственных кривых и получившей премию Штейнера Берлинской академии наук в 1882 г. В скором времени Отон распространил свое исследование на алгебраические поверхности Φ с любыми особенностями в работах [95.7].

Ряд интересных результатов о поведении интегралов в области особых точек в начале нашего века получил Дюляк, исследовавший уже в заметке [137.1] уравнения вида

$$(x + \ldots)\,dy + (-\lambda y + \ldots)\,dx = 0 \qquad (5.26)$$

для случая, когда λ — рационально (отрицательно) (а коэффициенты при dx и dy — голоморфны по x и y в окрестности $x=0$, $y=0$). Он дополнил предыдущие результаты, показав, что в общем через начало координат проходит бесконечно много интегралов (см. об этом в [235.17, (1928), 30]). Затем последовала серия работ по исследованию аналитических интегралов уравнений первого порядка в окрестности особых точек, завершенная в диссертации [137.2] и ее продолжении [137.3]. Дюляк изучал здесь, имея в виду прежде всего комплексную область изменения аргумента, интегралы уравнения вида

$$X(x, y)\,dy + Y(x, y)\,dx = 0, \qquad (5.27)$$

где X, Y — голоморфны в окрестности точки x_0, y_0 и равны нулю при $x=x_0$, $y=y_0$ и которое могло быть приведено к форме (5.26). Полученные результаты использовались им и для заключений относительно поведения интегралов в действительной области.

В первой части работы для уравнения (5.26) Дюляк рассматривает четыре случая:

1) λ — ни нуль, ни отрицательно, ни целое, ни обратное целому. Исключая здесь случай положительного λ, он показал, что $x=0$ есть существенно особая точка интегралов $y(x)$ и что в общем в комплексной области не имеет места различие между случаями, когда действительная часть λ положительна или отрицательна;

2) λ — отрицательно [1]. В этом случае уравнение приводится к виду $xdy+y(v+\ldots)dx=0$ при v положительном, а общий интеграл записывается в форме $yx^{\nu}H(x, y)=\text{const}$, где H — голоморфная, отличная от нуля функция для $x=y=0$. Здесь рассматриваются три пункта [2] с использованием терминов Пуанкаре и в зависимости от характера γ и $H(x, y)$: а) γ — иррациально (имеется седловина); б, в) γ — рационально (имеется фокус или центр, в последнем случае существует $H(x, y)$;

3) λ — целое или обратное целому. В этом случае доказано новым методом, что общий интеграл уравнения (5.27) может быть всегда выражен в форме

$$\frac{\varphi(x, y)}{[g(x, y)]^{p}}+a\log[g(x, y)]=\text{const};$$

4) λ — нуль, изучался подробно Дюляком, применившим подходящую замену переменных, позволившую рассмотреть все интегралы [3] в окрестности особых точек, что не достигалось приемом Брио и Буке.

Во второй части работы изучается случай, когда особые значения $x=0$, $y=0$ соответствуют точке пересечения некоторого порядка кривых $X=0$, $Y=0$. При этом исследуются так называемые регулярные интегралы, для которых x, y стремятся одновременно к нулю и $\frac{y}{x^{\mu}}$ стремится при любом μ к некоторому пределу конечному или бесконечному [4]. Дальнейшее исследование уравнения вида (5.27) содержится в работах [137.3.—4]. Рассматривая начальные условия x_0, y_0, лежащие как угодно близко к $x=0$, $y=0$, исследовался еще неизвестный вопрос о поведении интеграла относительно этих начальных условий, когда x стремится к нулю. При этом не было еще установлено, обладает ли он конечным или бесконечным числом критических точек в окрестности $x=0$. В особом случае, когда x мог быть множителем в X, при стремлении x к нулю Y мог не стремиться к определенному пределу.

Преодолению трудностей в решении общего вопроса содействовали полученные автором весьма точные результаты для случая так называемой дикритической точки. Он рассматривал

---

[1] Изучался Пуанкаре [237.12] и Бендиксоном [98.2—3].

[2] См. об этом также в [228.27, 42].

[3] Подробно об этом см. в [228.27, 42].

[4] Несколько позже этот вопрос уточнялся в работе Розенблата [250.1].

уравнение

$$[xA(x, y) + \varphi_n(x, y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = yA(x, y) - \psi_n(x, y) + \ldots, \qquad (5.28)$$

где в скобках и правой части имелись разложения по степеням x и y, из которых записаны лишь члены низших измерений: однородные полиномы A, φ_n, ψ_n соответственно степени n—2, n и n. Предполагалось, что ни для каких значений x и y одновременно $A(x, y)$ и $y\varphi_n(x, y) + x\psi_n(x, y)$ не обращались в нуль. При этом были справедливы две теоремы:

1. Можно найти такое число ε, что когда $|x_0| < \varepsilon$, $|y_0| < \varepsilon$, то интеграл уравнения (5.28), соответствующий начальным условиям x_0, y_0 для $|x| < |x_0|$, будет голоморфным и стремящимся к нулю вместе с x или алгеброидным и, следовательно, по крайней мере по одной ветви стремящимся к нулю вместе с x.

2. Все ветви рассматриваемых интегралов сходятся с x к нулю, если x является множителем левой части уравнения (5.28); для каждого интеграла, проходящего в окрестности $x=0$, $y=0$, y стремится некоторым образом к нулю, когда $x \to 0$.

Единственные интегралы, для которых x и y сходятся к нулю, есть для $x=0$ алгеброидные (в общем голоморфные) и их существование в бесконечном числе было хорошо известно, но не исследовано, единственные ли они, для которых x и y сходятся к нулю. Кроме того, вторая теорема дает достаточные условия сходимости y с x к нулю.

Дальнейшему уточнению, развитию и обобщению полученных результатов посвящены многие работы Дюляка, публиковавшиеся главным образом во французских журналах в 1907—1913 гг. В том же направлении исследования проводили Макмиллан, получивший другим методом некоторые результаты Дюляка, а также Г. Ремундос (55). Ряд интересных результатов последний сообщил в серии статей, публиковавшихся в 1908 г. в Париже. Он рассматривал весьма интересное по ряду обстоятельств дифференциальное уравнение вида

$$x^2\frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y), \qquad (5.29)$$

где $\alpha \neq 0$, f — голоморфна по x, y в окрестности нулевой точки, стремится к нулю при $x \to 0$, $y \to 0$ и не содержит члена вида αy. Используя известные результаты Брио и Буке, Ремундос изучил сначала проблему существования голоморфного интеграла в окрестности нулевой точки и равного нулю при $x=0$. При этом было установлено отсутствие указанного вида интеграла при данных условиях заведомо в том случае, когда коэффициенты разложения в ряд Маклорена функции $f(x, y)$ все действительны и отрицательны и число α положительно. Принципиально важным было то, что, рассматривая построение решения этого уравнения в форме степенного ряда, автор установил источник

его расходимости в связи с присутствием некоторых, подробно изученных, множителей, названных им «множителями расходимости». Полученные выводы он распространил и на уравнения некоторого вида высших порядков, введя понятие «силы» (56) для выражения $y_1=F(x, y, y', \ldots y^{(m)})$, где F — полином относительно производных с коэффициентами, голоморфными в окрестности нулевой точки функциями. В определенных случаях знак величины этой «силы» позволяет решить вопрос о наличии или отсутствии голоморфного решения. Борель (как сообщил Ремундос в [244.2]) понятие «сила» предложил заменить термином «вес». Несколько позже [244.3] для уравнения вида (5.29) Ремундос рассмотрел α как переменный параметр при неподвижных коэффициентах $f(x, y)$ и установил (в зависимости от их характера) три случая, когда совокупность значений α, при которых уравнение обладает голоморфным, исчезающим в $x=0$ интегралом, есть счетное множество. Исследование уравнения (5.29) было также предметом статьи лейтенанта кавалерии Витвинского [278].

Изучение поведения интегральных кривых уравнения вида (5.27) и более общих в области особых точек проводилось Бюхелем, Розенблатом, Диком, Коном и Горданом, Матсумото и др. Системы уравнений вида (5.29) и более общего исследованы Бендиксоном, Беркеляндом, Розенблатом, Купменом (несколько иного вида) и др. Отличный от общепринятого метод для исследования того же вопроса для уравнения n-го порядка предложен Лонгли [208.2].

§ 5. Уравнения с неподвижными критическими точками. Условия Фукса и Пуанкаре. Однозначные интегралы

Особые точки интегралов дифференциальных уравнений, как отмечалось выше, Фукс разделил на два класса — неподвижные и подвижные. Очевидно, что подвижные особые точки появляются в интегралах в связи с тем, что аргумент z входит в правую часть уравнения $w'=f(w, z)$ (5.30) через его коэффициенты, которые сами могут иметь особые точки. Таким образом неподвижные особые точки интегралов могут быть какими угодно и их положение, вообще говоря, можно установить непосредственно по уравнению. Отсюда видно, что особый научный интерес представляет исследование вопроса о природе подвижных особых точек, а также выделение таких классов уравнений, интегралы которых не имеют никаких подвижных особых точек. Так, легко доказать, основываясь на теореме существования Коши и исходя из общеизвестных положений теории функций [35.4, 47], что интегралы линейных уравнений не имеют подвижных особых точек. Не случайно поэтому общая аналитическая теория линейных уравнений была построена раньше на 20—30 лет, чем заложены основы общей теории нелинейных уравнений, хотя именно

Лазарь Фукс (1833—1902).

последние были исходным объектом изучения в работах Коши, Брио и Буке.

Первым наиболее подробно исследован класс уравнений, в интегралах которых отсутствуют подвижные алгебраические критические точки. Как помним, еще Брио и Буке дали четкое условие наличия критической точки в $z=z_0$ для интеграла уравнения (5.30), определенного начальными данными w_0, z_0, которая в общем случае может быть подвижна, так как z_0 зависит от начального значения w_0, что видно из условия $\frac{1}{f(w_0, z_0)}=0$.

Если в интегралах данных дифференциальных уравнений отсутствуют особые критические точки (или точки разветвления), то они, следовательно, представляют однозначные аналитические функции, теория которых к концу прошлого века была хорошо изучена. Установление таких классов уравнений представляло поэтому особый интерес.

Исследование однозначных функций, определенных алгебраическими дифференциальными уравнениями первого порядка, исходит от работ Абеля и Якоби, рассматривавших уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Предложение о том, что каждая однозначная двоякопериодическая функция, которая в конечных точках может иметь только полюсы, удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению вида $F(y, y')=0$, высказал Мерэ, будучи еще студентом [112, 6, 129]. Уравнения такого же вида с однозначными интегралами исследовали затем Брио и Буке с Вейерштрассом. Эрмит (57) первый указал на значение жанра p алгебраического уравнения $F(y, y')=0$ для проблемы интегрирования.

Итак, как общий класс сначала были изучены уравнения с неподвижными критическими точками. Эта проблема поставлена и впервые решена Фуксом в 1884 г. в статье [153.10].

При изложении своего метода он исходил из того, что поведение интегралов линейных уравнений в окрестности особых точек, в частности критических, характеризуется некоторыми величинами так, что последние в любом случае делаются независимыми от начальных значений интеграла в том смысле, что «каждая (такая) величина менялась с этими начальными данными не непрерывно». Задача, таким образом, состояла в том,

чтобы отыскать такие классы дифференциальных уравнений (первого порядка), которые по своей природе стоят ближе всего к линейным, т. е. те, у которых соответственные величины характеризовали бы критические точки интегралов, находящиеся в неподвижных местах, и не менялись бы непрерывно с начальными условиями данных интегралов. Фукс рассматривал уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.31}$$

где F — целая рациональная функция по y и y', коэффициенты которой зависят от x. Тогда, полагая $y'=z$ и учитывая условие

$$\frac{\partial F}{dz} = 0, \tag{5.32}$$

из двух последних уравнений исключается z и получается дискриминантное уравнение

$$D(x, y) = 0. \tag{5.33}$$

Подставляя затем $y=\eta+u$, $z=\zeta+v$, где $y=\eta$ — корень уравнения (5.31) и $z=\zeta$ — общий корень уравнения (5.31) и (5.32), Фукс переходит к уравнению

$$F_1(x, u, v) = 0, \tag{5.34}$$

где F_1 — целая рациональная функция по u и v с зависимыми от x коэффициентами, для которого дискриминат $D_1(x, u)$ отличен от нуля для любой (за исключением $u=0$) точки некоторого круга K в u-плоскости, и записывает каждый корень уравнения (5.34) в форме

$$V = g_0 u^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 u^{\frac{k+1}{\alpha}} + g_2 u^{\frac{k+2}{\alpha}} + \ldots \tag{5.35}$$

при условии, что x принадлежит некоторой обусловленной области B в x-плоскости, а u — кругу K в u-плоскости. Величина k обозначает целое положительное, отрицательное число или нуль; α — целое положительное число; $g_0, g_1, g_2, \ldots$ — внутри B — непрерывные и однозначные функции, которые внутри некоторых кругов, описанных около точки a и полностью принадлежащих области B, могут быть представлены рядами по положительным целым степеням $x-a$.

Если точки разветвления интеграла передвигаются непрерывно с изменением начальных значений, то последние в общем можно так варьировать, что каждая точка некоторой области независимого переменного станет критической. Доказав верность обратного утверждения, Фукс возвращается к исследованию уравнения (5.31), предполагая функцию F также неприводимой относительно y'. Интеграл этого уравнения y имеет критическую точку в $x=x_0$, в окрестности которой коэффициенты уравнения (5.31) однозначны и непрерывны только тогда, когда для $x=x_0$ следует $y=y_0$ такого свойства, что корни y' уравнения

$F(x_0, y_0, y')=0$ будут кратны или бесконечны. Применив затем предыдущие рассуждения, положив для (5.35) $u=t^\alpha$ и учтя проведенную замену переменных, он получает разложение

$$\alpha t^{\alpha-1}\frac{dt}{dx}=\zeta-\frac{d\eta}{dx}+g_0t^k+g_1t^{k+1}+\ldots \qquad (5.36)$$

В силу сделанных предположений g_0 отлично от тождественного нуля и в области B можно выбрать произвольную точку $x_0\neq 0$.

Затем для (5.36) исследуются случаи:

1. $k<0$, при котором получается разложение

$$x-x_0=C_0t^{\alpha-k}+C_1t^{\alpha-k+1}+\ldots, \qquad (5.37)$$

(где $\alpha-k>1$; C_i — константы), из которого следует, что t, также u, а значит, и интеграл y в $x=x_0$ разветвляется. Отюда следует, что если произвольная точка $x=x_0$ не является критической, то k не должно принимать отрицательных значений, т. е. уравнение (5.34) для $u=0$ не должно обладать бесконечно большим корнем v. Тогда, согласно предположению, это уравнение для $u=0$ обладает многими корнями $v=0$, откуда следует

2. $k>0$. Если теперь $\zeta-\frac{du}{dx}\not\equiv 0$, то можно определить произвольную точку x_0 так, что для нее $\zeta-\frac{du}{dx}\neq 0$ и из (5.36) после некоторых преобразований получается

$$x-x_0=C_0t^\alpha+C_1t^{\alpha+1}+\ldots.$$

При $\alpha\geqslant 2$ t, а также u и y для $x=x_0$ разветвляются. Чтобы избежать этого, должно быть

$$\zeta-\frac{d\eta}{dx}\equiv 0. \qquad (5.38)$$

Итак, если η корень уравнения (5.33) определен так, что алгебраическая функция y' от y при произвольном x разветвляется в $y=\eta$, $y'=\zeta$, то ζ должно совпадать с производной от η, т. е. η должно быть интегралом уравнения (5.31). Но если $\zeta-\frac{d\eta}{dx}\equiv 0$, то для случая $\alpha-1-k>0$ следует, что y может разветвляться в $x=x_0$. Поэтому должно быть $k\geqslant\alpha-1$, когда t станет или тождественным нулем, или в окрестности $x=x_0$ однозначным. Т. е., когда для алгебраической функции y' от y при произвольном x точка $y=\eta$, $y'=\zeta$ есть $(\alpha-1)$-кратная точка разветвления, то уравнение $F(x, y, \zeta)=0$ с неизвестным y должно иметь η по крайней мере своим $(\alpha-1)$-кратным корнем.

Если уравнение (5.34), кроме $v=0$, для $u=0$ обладает еще корнем $v\neq 0$, то в этом случае рассматривается

3. $k=0$. При условии (5.38) или (5.36) следует уравнение, аналогичное тому, из которого получено (5.37), если положить $k=0$, и отсюда получается разветвляющийся интеграл y при

$\alpha \geqslant 2$, т. е., если $y=\eta_1$ — отличный от $y'=\zeta$ корень уравнения $F[x, \eta, y']=0$, то алгебраическая функция y' от y не разветвляется в точке $y=\eta$, $y'=\zeta_1$.

Проведя еще ряд дополнительных рассуждений, автор резюмировал полученный результат в форме теоремы: необходимыми и достаточными условиями того, чтобы интеграл уравнения (5.31) обладал неподвижными критическими точками, являются следующие:

1. Уравнение (5.31) имеет форму

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \ldots + \psi_m = 0, \qquad (5.39)$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ есть целые рациональные функции от y с зависимыми от x коэффициентами такого свойства, что ψ_k имеют высшую степень относительно y, равную $2k$.

2. Если $y=\eta$ есть корень дискриминантного уравнения (5.33), для которого определенная через (5.39) алгебраическая функция y' от y разветвляется, то η есть интеграл уравнения (5.39). В представляющей y' как алгебраическую функцию от y римановой поверхности y' имеет во всех лежащих над $y=\eta$ точках разветвления значение $y'=\zeta=\frac{d\eta}{dx}$.

3. Каждому из α листов, на которые в $y=\eta$ разветвляется $y'=\zeta=\frac{d\eta}{dx}$, соответствует по крайней мере $\alpha-1$ совпадающих с $y=\eta$ корней уравнения $F(x, y, \zeta)=0$ с неизвестной y.

Эти условия, как отметил Пуанкаре [237.13, 4], устанавливали вместе с тем и конечность числа особых точек интегралов таких уравнений.

В заключение работы рассматривается интересный случай, когда алгебраическая функция y' от y, определенная уравнением (5.39), принадлежит, по обозначению Римана, к классу $p=0$ или $p=1$, а также примеры некоторых других случаев, из которых были непосредственно получены известные результаты Брио и Буке.

При этом в случае жанра $p=0$, как показал Фукс, рассматриваемое уравнение с неподвижными критическими точками приводится к известному уравнению Риккати, а для $p=1$ уравнение $F(z, y, y')=0$ принимало форму

$$\frac{dt}{dz} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 \sqrt{R(t)},$$

где A_j — функция от z и R — полином четвертой степени по t, коэффициенты которого — функции от z, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R,$$

где B_0, B_1 являются функциями от z.

Эти результаты опубликованы в протоколах заседаний Берлинской академии за 26 июня 1884 г., а в протоколах Парижской академии за 15 июля того же года появилась уже заметка Пуанкаре [237.8], где развивался и дополнялся последний результат (для случая $p=1$) об интегрируемости уравнения в квадратурах, а случай $p>1$ трактовался как представляющий алгебраический интеграл.

В скором времени на эту же тему появилась и большая статья Пуанкаре [237.13]. Здесь после изложения условий Фукса для уравнения $F(z, y, y')=0$ (5.40) было указано, что, иными словами, уравнение (5.40) должно удовлетворять таким условиям:

1. Функция y', определенная этим уравнением, может стать бесконечно большой, когда y будет тоже бесконечной, или для некоторых частных значений z.

2. Если положить $y_1 = \frac{1}{y}$, $y_1' = \frac{dy_1}{dt}$, то уравнение (5.40) станет $F_1(z, y_1, y_1') = 0$, где y_1' может стать бесконечностью при $y_1 = 0$ для некоторых частных значений z.

3. Уравнения $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$ будут определять особые интегралы уравнения (5.40).

4. Дифференцируя (5.40), получаем $\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dz} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. При этом имеет место тождество $\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} = PF + Q\frac{\partial F}{\partial y'}$, где P, Q — целые полиномы по y и y' с коэффициентами-функциями от z.

Сначала Пуанкаре надеялся открыть новый класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в фуксовых трансцендентных. Скоро он, однако, убедился, что уравнения первого порядка, удовлетворяющие условиям Фукса, не содержат реально новых видов дифференциальных уравнений, определяющих неизвестные до того функции. При этом он уделил особое внимание изучению роли величины жанра p поверхности, определяемой алгебраическим уравнением $F(z, y, y')=0$ между y и y' (при параметре z). Подробное изучение случая $p=1$ не привело его к существенно новым классам уравнений. Пуанкаре уделил много внимания исследованию случая $p>1$, не рассматриваемого Фуксом, существенно используя теорию преобразования поверхностей. При этом уравнение (5.40) рассматривалось как представляющее некоторую поверхность Римана S (по параметру z). Так, значению z_0 соответствовала S_0 и т. д. Все поверхности S_0, S_1, ... имели те же самые модули, так как можно было перейти от поверхности S_0 к S_1 и т. д. при помощи бирациональных преобразований. Следовательно, модули поверхностей не зависели от z. Согласно известным теоремам о числе бирациональных преобразований поверхности рода p в себя автор указал, что для $p=0$ они образовали непрерывную группу

с тремя параметрами (троекратная бесконечность), для $p=1$— непрерывную группу с одним параметром (простая бесконечность преобразований), а для $p>1$ в общем имелось только одно и лишь в особых случаях не более как конечное число таких преобразований. Последний факт давно известен, но схема его доказательства впервые предложена Клейном (58) в письме Пуанкаре в апреле 1882 г. [228.3, 16]. Далее Пуанкаре доказал существование алгебраического уравнения формы (5.40), алгебраически интегрируемого, жанра $p>1$ и удовлетворяющего условиям Фукса. Процесс его интегрирования основывался на установлении вышеупомянутых однозначных преобразований двух эквивалентных поверхностей Римана одна в другую. Пуанкаре отметил, что так поставленная проблема имела большую аналогию с задачей приведения арифметических форм. Таким образом, в случае $p>1$ интегрирование указанных уравнений сводилось к чисто алгебраическим операциям. В заключение автор высказал предположение, что могут быть открыты существенно новые классы уравнений, интегрируемых в фуксовых трансцендентных, но среди уравнений высших порядков.

Рассмотренная работа Пуанкаре пролила новый свет на значение открытия Фукса для решения вопроса об алгебраической интегрируемости уравнений. В предыдущем параграфе мы встречались с другими подходами к его решению, однако применение метода Фукса оказалось более надежным и вместе с тем весьма простым.

Дополняя свою работу, Фукс вскоре установил [153. 12], что интегралы алгебраических уравнений вида (5.40), с неподвижными критическими точками, являются аналитическими функциями. Если рассмотреть в этом случае y как функцию от z, или наоборот, то оказывается, что алгебраические функции, представлявшие y_z' как функцию от y и z_y' как функцию от z, имеют ранг нуль или единицу. Здесь же был просто получен результат Якоби о невозможности обращения гиперэллиптических интегралов в форме аналитических функций.

Рассмотренные исследования Фукса и Пуанкаре вызвали множество работ, дополнявших и развивавших их идеи. Из них укажем прежде всего на диссертацию [272.1] Валленберга (59), (1890 г.). Именно здесь уравнения, впервые рассмотренные Фуксом в [153.10], получили название фуксовых, как и соответственные условия неподвижности критических точек. Подытожив сначала в новой методической обработке уже имевшиеся результаты, Валленберг исследовал затем подробно отдельные классы фуксовых уравнений: так называемые биномиальные, трехчленные (2—3-я часть), полные дифференциальные уравнения третьей степени (3-я часть) и другие (4-я часть), а также дал некоторые дополнения по исследованию фуксовых дифференциальных уравнений любой степени (5-я часть) и примеры (6-я часть). Исходя из III условия Фукса, Валленберг делает заклю-

чение о максимальном числе рода p алгебраической функции y' от y, определенной уравнением (5.40), в том смысле, что $p \leqslant (m-1)^2$, если дискриминант $D(z, y)$ имеет по y высшую степень $2m(m-1)$, а также устанавливает ряд других важных соотношений.

Дальнейшее исследование условий Фукса и Пуанкаре содержится в статье [272.3] Валленберга и в большом мемуаре Пикара [235.9], о котором речь будет далее. Вместе с тем в свете новых результатов рассматривался Валленбергом и другими вопрос алгебраической интегрируемости уравнения первого порядка и связь его со второй производной от интеграла уравнения (5.40).

Исследования Валленберга были дополнены в диссертации А. Краузе [196], изучившим специально дифференциальное уравнение фуксова типа первого порядка и четвертой степени.

Существенное дополнение к условиям Фукса предлагалось в заметке Хилла и Берри [176] (1911 г.). Авторы построили пример дифференциального уравнения первого порядка, которое удовлетворяло условиям Фукса, но его интеграл имел подвижные критические точки, для которых y — бесконечно. Они отметили, что Фукс, видимо, мало внимания обратил на тот случай, когда y может быть бесконечным в точке ветвления. Эту возможность он рассматривал по существу при установлении его условия (1), согласно которому коэффициент при y'^m в (5.39) должен быть независимым от y и мог быть заменен единицей. Применяя замену $w = \frac{1}{y}$ и используя условие 1), Фукс отмечал, что коэффициент при w'^m преобразованного уравнения должен быть независимым от w, не заметив, однако, что для преобразованного уравнения необходимо также наличие условий 2) и 3). Но в случае такой замены каждый множитель $y-\eta(z)$, $(\eta \neq 0)$ дискриминанта $D(z, y)$ представляет множитель $w-\frac{1}{\eta(z)}$ дискриминанта $D'(z, w)$ преобразованного уравнения и для такого сомножителя условия 2) и 3) автоматически удовлетворяют преобразованному уравнению, если они удовлетворяли исходному. Но так как D' может содержать множитель w, то соответственные условия могут или не могут быть удовлетворены. В связи с этим авторы предложили дополнить три известных условия Фукса четвертым.

4. В преобразованном подстановкой $w = \frac{1}{y}$ уравнении должны сохраняться условия 2) и 3) в точках ветвления соответствующих $w=0$, если рассматривать w' как (алгебраическую — *В. Д.*) функцию от w.

Хилл и Берри первые указали на недостаточную корректность решения вопроса у Фукса, хотя необходимость проверки условий Фукса для преобразованного уравнения подстановкой $\frac{1}{y}$

отмечалась уже в лекциях Пенлеве [228.11, 60]. Но это замечание прошло мимо внимания Форсайта, Шлезингера и других авторов трактатов по теории дифференциальных уравнений, как и заметка Хилла и Берри ускользнула от внимания многих авторов более поздних учебных пособий по данному предмету.

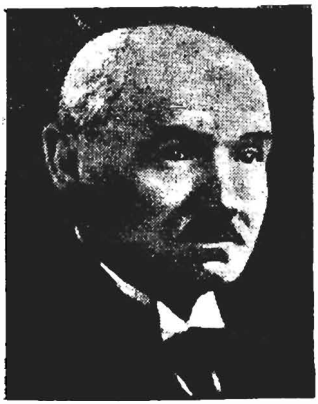
Уточнение вопроса о необходимости условий Фукса было проведено Дюляком в заметке [137.6]. Исследование квадратного дифференциального уравнения первого порядка проведено Коэном в 1922 г. Применение понятий теории множеств к трактовке особенностей интегралов алгебраических уравнений с неподвижными критическими точками находим в более ранней статье Виванти. Общие идеи Бутру по изучению особых точек были применены Мальмквистом в интересной работе [211.4, 1] для исследования интегралов с неподвижными особыми точками уравнения вида $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ (где P, Q — многочлены). Исследованию систем дифференциальных уравнений некоторого вида с неподвижными критическими точками посвящались статьи Шлезингера, Гарнье и др.

§ 6. Неподвижность нулей и полюсов интегралов алгебраических дифференциальных уравнений. Исследования Петровича, Ремундоса и Голубева

В тесной связи с проблемой неподвижности критических точек интегралов находится задача отыскания условий неподвижности других характерных точек функции-интеграла: ее нулей, бесконечностей, максимумов, минимумов и т. д.

Если в интеграле $y = \varphi(x, C_1, \ldots C_p)$ менять произвольные константы, то вместе с ними будут меняться и величины x, определяющие эти характерные точки. При движении C_i вдоль кривой Γ_i величина x_0 опишет одну из кривых Δ_i. Но можно исследовать условия, при которых кривые Δ_i преобразуются в изолированные точки, иначе говоря, когда величины x_0 не будут меняться в зависимости от констант. Таким образом, ставится проблема отыскания условий, при которых нули или полюсы общего интеграла дифференциального уравнения не меняются с константами интеграции, и прямого вычисления нулей или полюсов этого общего интеграла. Аналогичный вопрос для алгебраических критических точек был поставлен Фуксом, для трансцендентных — Пенлеве.

Новая проблема о нулях и бесконечностях была поставлена и успешно решена выдающимся югославским ученым М. Петровичем (60) в серии работ и главным образом в его докторской диссертации [234.2] (1894 г.). Он предвидел большое значение решения комплекса только что указанных проблем для приложений, ибо представляемые такими точками особенности кривой



Мишель Петрович (1868—1943).

могли характеризовать различные физические или механические свойства объектов, которые часто было очень важно знать.

Полное решение проблемы, т. е. установление необходимых и достаточных условий неподвижности нулей или полюсов общего интеграла в весьма простой форме дано Петровичем для алгебраического уравнения первого порядка. Он указал также средство изучения интегралов в окрестности таких особых точек, а в случае их подвижности — метод определения их порядков, которые являются всегда числами рациональными. Он же нашел весьма удобный графический способ установления этих особых точек, связанный с построением некоторого многоугольника.

Для случая уравнений высших порядков Петрович дал достаточные условия неподвижности нулей или полюсов интеграла, предполагая его трансцендентные особенности неподвижными. Полученные им теоремы могли найти применение в изучении мерофорфных интегралов уравнений. Проверка достаточности условий здесь более сложная, чем в случае уравнений первого порядка, но она сводится к построению соответственного многоугольника и отысканию корней некоторого алгебраического уравнения (зависимого от данного дифференциального уравнения). Это дает также возможность определения порядков подвижных нулей и полюсов интеграла.

Несколько меняя условия Фукса, Петрович получил условия для неподвижности, как он говорит, «всех возможных особенностей, включая полюсы». Если эти условия выполнены, то уравнение интегрируется алгебраическими операциями или через квадратуры. Он использовал эти условия для отыскания уравнений таких типов, интегралы которых имеют все их особенности неподвижными.

Большое внимание уделил Петрович установлению признаков существования однозначных интегралов и их вычислению, а также отысканию тех классов уравнений, где все однозначные интегралы являются рациональными функциями. Там, где были однозначные трансцендентные интегралы, он определил верхний предел числа всех различных интегралов и указал алгебраические соотношения, которые существовали между двумя или тремя из этих интегралов. Основной результат по этой части был опубликован немного раньше, в заметке [234.1]. Здесь Петрович

рассмотрел уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{5.41}$$

где P и Q — полиномы по y степени m и n, алгебраические по x, в предположении, что $m=n+2$. Оказалось, что необходимым условием наличия в уравнении (5.41) однозначных трансцендентных интегралов есть то, что P и Q должны быть рациональны по x. Исследовав четыре случая наличия различных корней уравнения $Q=0$: 1) $n>2$, 2) $n=2$, 3) $n=1$, 4) $n=0$ (Q — независимо от y), Петрович высказал важную теорему о том, что уравнение (5.41) не может допускать более трех различных (т. е. алгебраически независимых друг от друга — *В. Д.*) однозначных интегралов [1]. Если их три, то это будет уравнение Риккати, если два, то уравнение Риккати или линейное, или приводящееся к виду $y' = \frac{P(x, y)}{[y-\varphi_1(x)]^n}$, где P — полином степени $n+2$ по y, рационален по x; $\varphi_1(x)$ — рациональная дробь по x. Если оно допускает один корень, то оно может иметь одну из предыдущих форм либо приводится к виду

$$y' = \frac{P(x, y)}{(y-\varphi_1)^{k_1}(y-\varphi_2)^{k_2}},$$

где φ_1 и φ_2 — алгебраические по x; P — полином степени k_1+k_2+2 по y. Развиваемый здесь метод мог быть применен к некоторым дифференциальным уравнениям первого порядка, алгебраическим по x, y, y' и жанра нуль по (y, y'). Исследование условий наличия однозначных трансцендентных интегралов для уравнений первого порядка некоторого вида рассмотрел Петрович в [234.3].

Развивая результаты Петровича, Ремундос в 1908 г. доказал теорему [244.1] о том, что дифференциальное уравнение (5.41), где P, Q — полиномы по y, коэффициенты которых — однозначные функции от x, при помощи подстановки $t = \frac{(y-y_2)(y_1-y_3)}{(y-y_3)(y_1-y_2)}$ (где y_1, y_2, y_3 — частные интегралы уравнения (5.41)) может быть преобразовано в такое, общий интеграл которого имеет счетное множество неподвижных нулей и полюсов; если же P и Q — также полиномы и по x, то число этих неподвижных нулей и полюсов конечно.

Пользуясь некоторыми идеями этой работы Ремундоса, в следующем году В. В. Голубев [16.1] дал более простое доказательство теоремы Петровича и обобщил ее на более широкие случаи. Рассматривая уравнение (5.41), где P и Q — многочлены относительно y и аналитические функции по x, и обозначив множество неподвижных особых точек этого уравнения через ξ (сюда могут войти: 1) особые точки коэффициентов при степенях

[1] Современную формулировку и доказательство см. в [16.3, 65—67].

y в полиномах P и Q; 2) нули P и Q; 3) точки второго вида для уравнения, полученного из (5.41) подстановкой $y=\frac{1}{y_1}$; 4) результат изучения уравнения в области $x=\infty$ после подстановки $x=\frac{1}{x_1}$), автор рассматривает выражение

$$z(x)=\frac{y_1-y_3}{y_1-y_4}:\frac{y_2-y_3}{y_2-y_4},$$

где y_1, y_2, y_3, y_4 — четыре различных интеграла уравнения (5.41).

Если в области точки x_0, отличной от точек ξ, функции y_1, y_2, y_3, y_4 однозначны, то $z(x)$ в области x_0 голоморфна и отлична от 0 и 1; если функции y_i однозначны в области изолированной неподвижной особой точки ξ_0, то $z(x)$ в области ξ_0 не принимает значений 0, 1 и ∞ и по теореме Пикара точка ξ_0 не может быть для $z(x)$ существенно особой. Отсюда следует теорема: если есть четыре однозначных интеграла в области изолированной неподвижной особой точки ξ_0, то $z(x)$ в ξ_0 или голоморфна, или мероморфна. Если множество ξ — конечное, а y_1, y_2, y_3, y_4 — интегралы, однозначные во всей плоскости, то $z(x)$ есть функция рациональная; если при этом P и Q — многочлены относительно x, то получается теорема Петровича.

Если же множество ξ бесконечное, но не имеет точек сгущения в конечной части плоскости x, то $z(x)$ — функция мероморфная или целая. Если при этом есть три мероморфных интеграла y_2, y_3, y_4, то и всякий однозначный интеграл y_1 есть также функция мероморфная или целая. Существенно особыми точками функции $z(x)$ могут быть только точки сгущения множества ξ. Теорему о функции $z(x)$ можно рассматривать как обобщение известного свойства интегралов уравнения Риккати на интегралы уравнений вида (5.41) при указанных условиях.

§ 7. Неподвижность трансцендентных и существенно особых точек. Теорема Пенлеве

Среди уравнений первого порядка можно найти примеры таких, интегралы которых обладают подвижными трансцендентными или существенно особыми точками. Условия Фукса, предполагавшие вполне определенные значения $\omega(z)$ в области изменения аргумента z, оказывались недостаточными в случае присутствия подвижных существенно особых точек интеграла, которые могли быть и критическими. Достаточность условий Фукса (с указанным выше дополнением Хилла—Берри, которое в дальнейшем будет иметься в виду) могла сохранять свою силу для тех классов уравнений, в интегралах которых заведомо отсутствовали подвижные существенно особые точки. Такой класс уравнений был указан фундаментальной теоремой Пенлеве в

его докторской диссертации и в монографии [228.1]. Эта работа состояла из двух частей, в каждую из которых входило две главы. Основная ее цель состояла в изучении особых линий аналитических функций, или сечений, понятие которых восходит еще к Коши. Глубокая трактовка важного вопроса об области определенности функции и других с ним связанных сопровождалась получением ряда новых теорем. Интересные результаты были получены также по части разложения функций с различными особенностями в суммы и произведения, в том числе в ряды полиномов.

Рассматривая функцию $F(z)$, определенную с одной стороны линии L (понимаемой как сечение), Пенлеве допускал существование второй функции $F_1(z)$, которая совпадает с первой в окрестности L и продолжает F по другую сторону L непрерывно. В этом случае сечение L называется «искусственным». Оно будет существенным в противоположном случае. Таким образом, существенно особая линия является естественной границей функции, за которую последняя не может быть продолжена. Устанавливаются необходимые и достаточные условия «искусственности» сечения. Из этих условий выводится ряд теорем, касающихся неявных функций и дифференциальных уравнений первого порядка. Так, в главе 2, части 1 [228.1, В. 41] была сформулирована следующая теорема.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dz} = f(z, u), \tag{5.42}$$

где $f(z, u)$ однозначна при z, изменяющемся в некоторой области S и u — в плоскости U. Если для любой точки z_0 из S точки неопределенности $f(z_0, u)$ образуют в плоскости U точечную последовательность (аффиксы которой аналитически зависят от z_0 с указанными ограничениями), всякий однозначный (или принимающий n значений) в области Σ, ограниченной контуром σ внутри S, интеграл $u(z)$ есть продолжимый вне σ и представляет в Σ полюсы (или критические алгебраические точки). Не приводя здесь довольно длинного доказательства этой теоремы, основные идеи которого изложены в [16.3, 55—58; 79—80], проследим лишь дальнейшие рассуждения автора, по своему направлению в общем отличные от современной методической обработки, что видно также и из формулировки выше приведенной теоремы. Итак, он пришел к выводу, что указанный интеграл при данных условиях не имеет подвижных существенно особых точек. Эта теорема остается в силе, когда функция $f(z, u)$ принимает p значений: $f_1, f_2, \ldots f_p$ при изменении z в области S и u в плоскости U. Иначе говоря, $\frac{du}{dz}$ может быть рассмотрена как корень алгебраического уравнения

$$F(u', u, z) = \varphi_p(z, u)\, u'^p + \varphi_{p-1}(z, u)\, u'^{p-1} + \ldots + \varphi_0(z, u) = 0,$$

где функции φ_i удовлетворяют тем же условиям, что и $f(z, u)$. И для этого случая автор доказывает, что при указанных ранее условиях интеграл $u(z)$ продолжим за σ и обладает в Σ лишь алгебраическими особыми точками. Пенлеве также устанавливает, что всякий однозначный интеграл уравнения (5.42), в случае отсутствия существенно особых точек для $f(z, u)$, есть необходимо рациональная дробь от z, а всякий интеграл, допускающий n значений, есть необходимо алгебраическая функция от z.

Как приложение предыдущей теоремы рассматриваются необходимые условия алгебраичности интеграла во всей области его существования для уравнений

$$\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)}, \tag{5.43}$$

где P, Q — полиномы по z с коэффициентами — алгебраическими функциями от u;

$$F(u', u, z) = 0,$$

где F — полином по u' и z. В виде второго приложения устанавливается также конкретная форма уравнения (5.42) (где f однозначна), имеющего однозначный общий интеграл во всей плоскости. Таким оказывается общее уравнение Риккати

$$\frac{du}{dz} = au^2 + bu + c,$$

где a, b, c — однозначные функции от z. Среди уравнений вида (5.43), где P, Q — полиномы по u, уравнение Риккати — единственная форма, допускающая общий однозначный интеграл. Также отмечается, что единственным видом уравнения, имеющего общим интегралом целую функцию, есть необходимо линейное.

Из указанной теоремы Пенлеве следовала достаточность условий Фукса для отсутствия в интегралах подвижных критических точек. Она же устраняла и некоторые неточности трактовки аналогичного вопроса у Пуанкаре.

Глава VI. УРАВНЕНИЯ С ПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

§ 1. Постановка вопроса. Ограниченность числа значений интегралов около подвижных критических точек. Алгебраические интегралы. Монография Пенлеве

Итак, к началу девяностых годов прошлого века были получены фундаментальные результаты в области изучения уравнений линейных и нелинейных первой степени. Особое внимание уделялось, как видно из предыдущего, изучению поведения интегралов в области особых точек, хотя заметна некоторая несистематичность этих исследований.

Принципиально важным шагом вперед было установление различных видов разложений неголоморфных интегралов в окрестности особой точки x_0 (см. гл. V, § 2) в работах Пуанкаре, Пикара и других математиков. Но в связи с этим ставился вопрос о характере изменения такого интеграла, если x менять некоторым образом в плоскости его определения. Будет ли он принимать при этом ограниченное или неограниченное число значений и т. д.?

Вместе с тем вставал и общий вопрос изучения дифференциальных уравнений первого порядка, следующего по сложности класса за тем, интегралы которого имели неподвижные критические точки. Это были, очевидно, такие уравнения, интегралы которых обладали подвижными критическими точками, но с ограниченным числом значений в области таких точек.

Эта проблема была поставлена и нашла свое решение в ряде статей Пенлеве, первая из которых [228.2] с четкой постановкой вопроса и изложением основных идей его решения опубликована в 1888 г. Затем полученные результаты были обработаны и опубликованы в форме объемистой монографии [228.5] (1891—1892). За эту работу автор удостоен большого приза по математическим наукам Парижской академии в 1890 г. Рассматривая указанный цикл работ, мы будем иметь ввиду прежде всего эту монографию. Именно здесь вошли в обиход термины подвижных и фиксированных критических точек. Исходными пунктами исследования были работы Пикара [235.9] и Пуанкаре [237.13]. Пенлеве обобщил здесь как решение вопроса, данное Пуанкаре, так и метод его исследования.

Все критические неподвижные точки x_i интегралов уравнения

$$F(y', y, x) = 0 \tag{6.1}$$

соединяются разрезами L в плоскости x таким образом, чтобы подвижная точка x могла достичь некоторой точки плоскости, не пересекая разрезы и не описывая замкнутый контур. Если y_0— частный интеграл, соответствующий x_0, меняется, выходя из x_0, то в процессе этого изменения y может получить конечное или бесконечное число значений для одной и той же точки x. В первом случае говорят, что общий интеграл уравнения (6.1) принимает n значений около подвижной критической точки. В связи с этим ставится две задачи: а) изучить свойства интеграла уравнения (6.1), если он относится к этому виду; б) установить, принимает ли интеграл данного уравнения (6.I) ограниченное число значений в окрестности подвижных критических точек. Решение этих двух проблем и было основным предметом указанного труда Пенлеве.

При этом доказаны некоторые характеристические свойства уравнений первого порядка, среди которых отметим, что когда общий интеграл уравнения (6.1) принимает n значений около подвижных критических точек, то между $y(x)$ и $y(x_0)$ существует алгебраическое соотношение $\Phi(y, y_0, x, x_0) = 0$ степени mn по отношению к y и y_0 соответственно, если m обозначает степень y' в уравнении (6.1). Это предложение остается в силе, если y' — аналитическая функция от y, принимающая m значений, которая для любого значения x не допускает в плоскости y особой линии. Таким образом, если интеграл принадлежит уравнению изучаемого вида, то y' есть необходимо алгебраическая функция от y. Высказанное положение почти очевидно в том случае, когда интеграл y есть алгебраическая функция от x.

При наличии указанных автором свойств общий интеграл уравнения можно записать в форме

$$y^n + R_{n-1}(y_0, y_0', x_0, x)\, y^{n-1} + \ldots + R_0(y_0, y_0', x_0, x) = 0, \tag{6.2}$$

где R — рационально по y_0, y_0', которые зависят от x некоторым способом. Отсюда можно получить

$$y_0^n + R_{n-1}(y, y', x, x_0)\, y_0^{n-1} + \ldots + R_0(y, y', x, x_0) = 0, \tag{6.3}$$

т. е. интеграл уравнения (6.1) определяется соотношением

$$R_i(y, y', x, x_0) = R_i(y_0, y_0', x_0, x) = C_i$$

или таким уравнением, что

$$\rho(y, y', x) = \text{const} = \gamma, \tag{6.4}$$

где ρ — рациональная функция по y, y' и y' — функция от (y, x), определяемая уравнением (6.1). Иначе говоря, интеграл

удовлетворяет бесконечному множеству соотношений вида

$$R(y, y', x) = A(x, C), \tag{6.5}$$

где A — функция от x, критические точки которой не зависят от констант C. Константам γ дается название интегральных констант, функциям A — интегральных функций. Две интегральных константы γ, γ_1 связаны алгебраическим соотношением $g(\gamma, \gamma_1)=0$, а две интегральных функции — соотношением $H(A, A_1, x)=0$, алгебраическим по A, A_1. Оно получается, если y и y' исключить из уравнений (6.5) и данного (6.1).

Оказалось, что всегда можно так выбрать две интегральные функции $r=a$, $r_1=a_1$, связанные уравнением $h(r, r_1, x)=0$, что все другие интегральные функции $R=A$ выражаются рационально с помощью r, r_1, т. е. $R=\varphi(r, r_1, x)$; $A=\varphi(a, a_1, x)$. Это соотношение $h=0$ определено некоторым бирациональным преобразованием и названо соотношением между интегральными функциями или константами. Например, за r и r_1 достаточно взять две интегральные константы ρ и $\frac{d\rho}{dx_0}$, связанные соотношением $h\left(\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, x_0\right)=0$, где x_0 — некоторая константа. Можно также взять за r и r_1 две интегральные функции

$$r(y, y', x) = r^0(x, C), \quad r'(y, y', x) = r'^0(x, C),$$

где r^0 и $r'^0 = \frac{dr^0}{dx}$ выражены в форме некоторых сумм, подобных суммам для ρ и $\frac{d\rho}{dx_0}$. Функции $r_0(x)$ или r (когда заменить y интегралом уравнения (6.1)) удовлетворяют дифференциальному уравнению $h\left(r^0, \frac{dr^0}{dx}, x\right)=0$ или $h\left(r, \frac{dr}{dx}, x\right)=0$, критические точки которого неподвижны.

Если жанр соотношения $h=0$, обозначаемый далее ω, равен нулю, то интегральные функции и константы выражаются рационально одна через другую и существует соотношение

$$G(y, \gamma, x)=0 \tag{6.6}$$

степени m по γ и степени n по y. При этом величина γ удовлетворяет общее уравнение Риккати и интеграл y может быть записан в форме

$$y^n + R_{n-1}(C, x)\, y^{n-1} + \ldots + R_0(C, x) = 0, \tag{6.7}$$

где C_i — константы; R_i — рациональные дроби по C степени m.

Когда $\omega = 1$, интеграл имеет вид

$$y^n + r_{n-1}(C, x)\, y^{n-1} + \ldots + r_0(C, x) +$$

$$+ \sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}\,[\rho_{n-1}(C, x)\, y^{n-1} + \ldots + \rho_0(C, x)] = 0, \tag{6.8}$$

и существуют соотношения (6.6) степени m по γ, степени $2n$ по y, где $\gamma = \gamma(x)$ удовлетворяет уравнение $\frac{d\gamma}{dx} = N(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}$, в котором $N(x)$ может быть выбрана произвольно, в том числе $N=0$.

Эти теоремы в частных случаях были известны раньше. Фукс доказал, например, другим методом [153.11], что алгебраический интеграл уравнения (6.1) может быть выражен в форме $\rho(y, y', x)=\gamma$. Когда x не входит явно в (6.1), форма интеграла (6.2) соответствует теореме сложения простых или двоякопериодических функций.

Если уравнение имеет неподвижные критические точки, то (6.2) переходит в $y = R(y_0, y_0', x_0, x)$ и равенство $h = 0$, где можно сделать $r = R$, $r' = \frac{dR}{dx}$, в уравнение (6.1). Так из соотношений, установленных здесь Пенлеве, можно прийти к результатам Пуанкаре как частным случаям, а именно: уравнения

$$y' = \frac{dR}{dx}(y_0, y_0', x_0, x); \quad y = R(y_0, y_0', x_0, x)$$

определяют бирациональное соответствие между двумя кривыми

$$F(y, y', x) = 0 \text{ и } F(y_0, y_0', x_0) = 0.$$

Но в более общем случае равенства $\gamma=\rho(y, y', x)$, $\gamma_1=\rho_1(y, y', x)$ определяют рациональное соответствие между кривой $F(y, y', x)=0$ и кривой $h(\gamma, \gamma_1)=0$, выражающей соотношение между интегральными константами.

Также, если $\omega=0$, то между кривой (6.1) и кривыми (6.6) в общем существует рациональное соответствие, которое может перейти в бирациональное тогда, когда γ есть константа.

Таким образом, в этой работе существенную роль играли свойства рациональных преобразований алгебраических кривых, подробное изучение которых автор провел в гл. 2. Полученные результаты можно резюмировать так. Пусть (α) $f(y, z)=0$, (β) $F(y_1, z_1)=0$ — уравнения двух кривых степени m и m_1 и (γ) $y=\varphi(y_1, z_1)$, $z=\psi(y_1, z_1)$ — две рациональные функции от (y_1, z_1), которые допускают переход от (α) к (β).

Если жанр кривой (α) есть $p=0$, то всегда можно перейти от (α) к (β) через бесконечность подстановок (γ), которые зависят от произвольной рациональной функции аналитической точки (y_1, z_1) в (β). Когда $p=1$, то в общем нельзя перейти рационально от (α) к (β). Но для возможности этого необходимо, чтобы абелев интеграл первого вида кривой (β) переходил в эллиптические интегралы с модулем, равным модулю (α).

Если $p>1$, то существует конечное число подстановок (γ), переводящих (α) в (β), и все они вычисляются алгебраически.

Эти теоремы доказаны методами, аналогичными тем, которые использовали Пикар и Пуанкаре при изучении ими бира-

циональных преобразований кривых и поверхностей. При этом было установлено, что жанр p кривой (α) должен быть не больше жанра p_1 кривой (β) (в случае бирационального соответствия $p=p_1$) и что преобразование обратимо в том случае, когда $p>1$ [1].

В приведенных выше предложениях имелось в виду, что кривые (α) и (β) даны. Но проблема заключалась в том, что надо было определить все те различные кривые (α), которые соответствовали рационально (по формулам (γ)) данной кривой (β). Под различными кривыми автор понимал такие кривые, которые не имели тех же самых модулей, и, следовательно, не соответствуют бирационально. Он установил, что можно вычислить алгебраически тип всех классов таких кривых жанра $p>1$ и что число таких типов или классов ограничено. Случай жанра $p=1$ приводился к рассмотрению вопроса о том, обладает ли абелев интеграл первого вида, связанный с кривой (β), двумя периодами.

Установленные положения немедленно применялись к изучению дифференциальных уравнений.

Итак, пусть интеграл уравнения (6.1) принимает n значений около критических подвижных точек. Тогда существует рациональное соответствие между кривой (6.1) и некоторой кривой $H(C, C_1)=0$, определяющей соотношение между интегральными константами. Это соответствие $C=R(y, y', x)$, $C_1=R_1(y, y', x)$ и определяет общий интеграл уравнения (6.1).

Теперь решение вопроса о том, существует ли такая кривая H жанра $\omega>1$, определяется теоремой: чтобы узнать алгебраически, принимает ли интеграл данного уравнения (6.1) конечное число значений около критических подвижных точек, соответственная величина ω предполагается больше 1. Если это имеет место, интеграл получается также алгебраически.

В этом случае $n=\frac{p-1}{\omega-1}$ должно быть ограниченным, если p — жанр уравнения (6.1) и $\omega>1$. Имелось в виду также $p\geqslant\omega$. Если $p=\omega(p>1)$, то интеграл имеет его критические точки неподвижными, так как соответствие между F и H станет бирационально.

Случай $\omega=1$ связывался с существованием абелева интеграла первого вида для (6.1)

$$I(y, y', x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(x)\int\frac{P_i(y, y', x)}{F'_{y'}}dy,$$

удовлетворяющего равенству $I(y, y', x)=h(x)+C$, если $y(x)$ есть некоторый интеграл уравнения (6.1). Выражая эквивалент-

[1] Аналогичная теорема была установлена на 15 лет раньше другим способом Вебером в заметке [274].

Пауль Пенлеве (1863—1933).

ность последнего соотношения с уравнением (6.1), получают некоторое число линейных однородных соотношений по отношению к λ_i, $\frac{d\lambda_i}{dx}$. Если эти соотношения совместимы, то определение λ_i зависит от линейного однородного уравнения не выше $p-1$ порядка. После отыскания λ_i вычисление интеграла приводится к квадратуре. Для желаемой формы один из полученных таким образом интегралов должен обладать двумя периодами. В случае $\omega=1$ число n может превзойти любой предел для данной степени уравнения (6.1) по y, y'.

Единственный случай $\omega=0$ не охватывался этим методом, хотя общий вопрос, является ли общий интеграл уравнения (6.1) функцией, которая принимает в плоскости x данное число n значений около подвижных критических точек, решался при любом ω.

Практически при исследовании вопроса автор рекомендовал, опуская громоздкие вычисления, связанные с методом прямого доказательства теоремы, сразу различать три случая: $\omega>1$, $\omega=1$, $\omega=0$.

Первый легко трактуется с помощью теории рациональных преобразований. Второй ведет к исследованию, приводится ли абелев интеграл I первого вида уравнения (6.1) к эллиптическим интегралам преобразованием n-го порядка — вопросу, уже трактовавшемуся определенным образом в классическом анализе (см. (6.8)). Третий случай укладывается в форму интеграла уравнения (6.6), где γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma'=M\gamma^2+N\gamma+P. \tag{6.9}$$

При этом коэффициенты соотношения (6.6) выбираются таким образом, чтобы оно соответствовало уравнению (6.1).

Если жанр уравнения (6.1) равен нулю, то оно приводится к виду

$$y'=R(y,x)=\frac{P(y,x)}{Q(y,x)}, \tag{6.10}$$

который более удобен для исследований.

Итак, надо узнать, приводится ли уравнение (6.10) к уравнению Риккати таким преобразованием, что

$$\gamma=\frac{y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\ldots+a_1y}{b_{n-1}y^{n-1}+\ldots+1}. \tag{ε}$$

Если это возможно, то возможно единственным способом, и M, N, P (для 6.9), и $a_{n-1}, \ldots, a_1$, $b_{n-1}, \ldots$ определяются линейными операциями. Заметно упрощает эти операции введение преобразования

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \quad x = \varphi(x_1), \tag{δ}$$

где h, h_1, k, k_1 — функции от x_1. Это преобразование наиболее общее, которое сохраняет одновременно форму уравнения (6.10) и число величин y, перемещающихся около критических подвижных точек. Пенлеве изучает в деталях это преобразование аналогично тому, как это делал Аппель [94.1], изучая преобразование $y = hy_1 + h_1$, $x = \varphi(x_1)$ при трактовке вопроса об инвариантах и случаях интегрируемости уравнения вида (6.10).

Пенлеве называет два уравнения вида (6.10) принадлежащими к тому же классу, если они выводятся одно из другого подстановкой δ. Если n — степень P по y, m — то же для Q и ν — большее из чисел n и $m+2$, то оно называется степенью дифференциального коэффициента (т. е. правой части уравнения (6.10)). Это ν не меняется преобразованием δ.

Последняя (шестая) глава рассматриваемой работы Пенлеве посвящена изучению алгебраических интегралов уравнения первого порядка. Здесь рассматриваются те упрощения общей теории, которые связаны с гипотезой, что интеграл уравнения — алгебраическая функция во всей плоскости. Для последнего необходимо и достаточно, чтобы интеграл уравнения $h\left(z, \frac{dr}{dx}, x\right) = 0$ (Δ) с неподвижными критическими точками был бы алгебраическим. Если жанр этого уравнения $\omega > 1$, оно интегрируется алгебраически. Когда $\omega = 1$, проблема сводится к рассмотрению, является ли интеграл уравнения $\frac{at}{dx} = H(x)\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}$ (полученного из (Δ)) алгебраическим. Когда $\omega = 0$, проблема решается алгебраически или уравнение приводится к квадратуре $\frac{t'}{t} = H(x)$.

Таким образом, установление алгебраичности интеграла уравнения (6.1), принимающего n значений около критических подвижных точек, решается алгебраически или приводится к проблеме преобразования абелевых интегралов в интегралы эллиптические или логарифмические.

Указанная проблема здесь изучена весьма детально, особенно относительно алгебраических интегралов уравнений (6.10), переплетаясь в некоторых местах с результатами Отона, например в части исследования дикритических точек и т. д. Здесь получили, таким образом, дальнейшее развитие упоминаемые ранее результаты Дарбу и других ученых, проводивших исследования уравнений первого порядка.

Общее заключение, к которому пришел Пенлеве, было тождественно с тем, которое получил Пуанкаре при изучении уравнений Фукса: общие интегралы изученного класса уравнений первого порядка представляли трансцендентные функции, не отличавшиеся от тех, которые определялись квадратурами или линейными уравнениями. Здесь же отмечено, что далеко не все полученные заключения могли быть перенесены на теорию уравнений высших порядков, хотя теория рациональных преобразований поверхностей в известной степени могла быть и там полезна. Таковы основные положения фундаментальной работы Пенлеве, рассмотренной нами несколько подробнее, так как в учебной, да и монографической литературе она мало известна. Некоторые детали были доработаны Пенлеве в заметках [228.6.—7]. В дальнейшем проблему, поставленную здесь Пенлеве, мы будем именовать просто проблемой Пенлеве относительно уравнений первого порядка.

§ 2. Дальнейшее развитие проблемы Пенлеве

Многие результаты Пенлеве относительно уравнений первого (и второго) порядка нашли свое отражение в известных его стокгольмских лекциях (1895 г.). Здесь они были не только методически переработаны (бо́льшая лаконичность и точность формулировок, краткость и упрощение доказательств), но и получили некоторое усовершенствование по существу. Это касается прежде всего изложения названной нами проблемы Пенлеве. Особое внимание здесь было уделено алгебраической интеграции уравнений первого порядка с приведением подробных вычислений и составлением таблиц.

Теорема Пенлеве для некоторых частных случаев прямым вычислением позже была доказана Каптейном [190.2].

Существенным продвижением в теории с постановкой и рассмотрением решений ряда новых вопросов была статья Пенлеве [228.25], помещенная как дополнение к лекциям его ученика Бутру [109.3] в 1908 г. Здесь изучалось уравнение (6.10), где P, Q — полиномы по x, y, и сначала уточнялся вопрос об особенностях аналитического продолжения интеграла этого уравнения. В лекциях 1895 г. Пенлеве углубил рассмотрение вопроса аналитической зависимости интеграла дифференциального уравнения от начальных условий, что было выражено в форме второй главной теоремы. Итак, в плоскости x рассматривается множество неподвижных особых точек уравнения (6.10) ξ, точка $x=x_0$, характеризующая начальное условие (ей соответствует $y=y_0$), две произвольно выбранные неподвижные точки $\bar{x}_0$ и $\bar{x}$, отличные от неподвижных особых точек ξ. Тогда можно записать интеграл уравнения (6.10) в форме $y=\varphi(x, y_0, x_0)$. В точке $\bar{x}$ он примет значение $\bar{y}$. Если подвижная точка x будет перемещаться от $\bar{x}_0$ к $\bar{x}$ вдоль некоторой кривой L, кото-

рая не проходит ни через точки ξ, ни через подвижные точки разветвления, соответствующие изменениям y_0, то L должна изменяться в соответствии с y_0. Тогда согласно второй теореме Пенлеве [228.14, 36—38], функция $y=\varphi(x, y_0, x_0)$, зависимая от y_0, будет везде алгеброидная. Из этой теоремы, пишет Пенлеве [109.3, 142], может быть выведено «следствие, что эта функция не может представить в области y_0 неалгебраические особенности. Важно понять, что это заключение неточно». На этот вопрос автор обратил внимание значительно раньше, ибо он, с ссылкой на Пенлеве, трактовался уже в большой статье Зоретти [282.1, 39—40] в 1905 г. Итак, предположим, что интеграл $y(x)$ имеет конечное число p ветвей. Проведем затем в плоскости x между x_0 и x p линии $L_1, L_2, \ldots L_p$ конечной длины, которые не проходят ни через точки ξ, ни через критические точки интеграла, соответствующего начальным условиям $x=x_0$, $y=b$. Таким образом, функция $y=\varphi(x, y_0, x_0)$ получает в x, двигаясь по этим p направлениям, p значений: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ и, согласно второй теореме для $y_0=b$, они будут алгеброидные. Но если рассматриваемый интеграл $\varphi(x, y_0, x_0)$ для соседнего с $y_0=b$ значения y_0 имеет больше p ветвей, то функция $y=\varphi(x, y_0, x_0)$ имеет другие значения, пусть $y=\varphi_{p+1}(x, y_0, x_0) \ldots$, которые могут допускать $y_0=b$ как трансцендентную особую точку. В связи с этим уточняется понятие общего интеграла как n-значной функции и форма его выражения и ряд других.

При изучении уравнений, общие интегралы которых обладали точно n ветвями, перемещающимися около критических подвижных точек, автор допускал существование и других, составляющих счетное множество, названных им особенными (или исключительными).

Основные выводы и заключения даны в более корректной форме, обусловленной прогрессом анализа в последующие 20 лет, которые отделяли эту работу Пенлеве от [228.2]. Вместе с тем здесь получен и ряд новых соотношений и свойств, поставлены новые вопросы. Так, принципиально уточняется постановка проблемы: является ли общий интеграл $y(x)$ данного уравнения (6.10) трансцендентной функцией, допускающей неизвестное конечное число значений около критических подвижных точек [это число является одним и тем же для всех интегралов, исключая, может быть, счетное множество частных (особых) интегралов]. Эта проблема может быть решена с помощью конечного числа рациональных операций. Но если поставить ту же проблему, опуская ограничение, что интеграл должен быть трансцендентным, то она становится намного сложнее, так как в общем еще неизвестно, может ли общий интеграл уравнения (6.10) быть алгебраическим? Показывается также и важность оговорки в квадратных скобках (см. выше).

Интересный результат получен при изучении уравнения [1]

$$y' = \frac{y}{x(y+1)}, \tag{6.11}$$

интеграл которого $y(x)$ имел две неподвижных критических точки $x=0$ и $x=\infty$ и единственную подвижную критическую точку (алгебраическую, в окрестности которой перемещалось две ветви); но бесконечность ветвей этого интеграла перемешалась друг с другом, когда x вращался около подвижной критической точки, не вращаясь, вместе с тем около фиксированных точек разветвления. Конкретно изучен и ряд других уравнений, что способствовало более углубленному проникновению в сущность вопроса.

Глубоко были изучены свойства уравнений (6.10), интегралы которых имели не больше n ветвей, особенности интеграла как функции величины y_0, наконец, свойства «особых» интегралов и многие другие.

Работы Пенлеве 90-х годов и более поздние по данному сюжету легли в основу довольно обширного цикла весьма интересных статей, диссертаций и монографий его последователей и учеников.

Одним из первых последователей Пенлеве в решении задачи об определении всех дифференциальных уравнений вида

$$P(y', y, x) = 0 \tag{6.12}$$

(где P — полином данной степени по y', y с аналитическими коэффициентами по x), общие интегралы которых принимают только данное число n значений при обходе подвижной критической точки (конец 90-х годов), был Коэн. Эта задача, как помним, поставлена и решена Пенлеве в том случае, когда P был первой степени по y', в уже упоминавшихся работах и в [228.10.—11]. Коэн изучает вопрос в [117.1] для уравнений второй степени по y' и для степени q по y, рассматривая уравнение

$$Ly'^2 - 2My' + N = 0 \tag{6.13}$$

и отметив, что дробно-линейные подстановки дают возможность всегда допустить, что L, M, N — полиномы по y степени соответственно q—4, q—2, q.

Если общий интеграл уравнения (6.13) имеет конечное число n значений около подвижных критических точек, то он может быть записан в форме

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0, \tag{6.14}$$

где α, β, γ — полиномы по y степени n с коэффициентами, зависимыми от x, когда жанр ω соотношения между интегральными

[1] Как свидетельствует Мальмквист [211.1, 2—3], это уравнение раньше было рассмотрено фон-Кохом.

константами (61) равен нулю и степени $2n$, когда жанр равен единице. Случай $\omega>1$ здесь не имеет места.

После рассмотрения случая $\omega=0$ и случая $\omega=1$ Коэн приходит к основной теореме: если даны целые числа q и n ($4\leqslant q\leqslant 4n$) и три целых положительных числа i, j, k удовлетворяют соотношению $2q-4=2i+j+k$ и неравенствам $j+k\geqslant 2$, $3j+k\leqslant 2n$, $k\geqslant q-2n$, то каждому из этой системы целых i, j, k соответствует бесконечно много уравнений вида (6.13), интегралы которых содержат точно n значений около критических подвижных точек. Эти уравнения, которые образуют два различных класса в соответствии с жанром ω соотношений между интегральными константами, зависят алгебраически от $i+4$ произвольных функций и от $2n+k-q-3$ или $k-q$ произвольных констант, в соответствии с тем, что $\omega=0$ или $\omega=1$.

Теорема верна и для случаев, когда $q=4$; тогда $k=4$ или $k=2$, $j=0$. В этих частных случаях уравнение (6.13) имеет критические неподвижные точки.

Через год полученные результаты были изложены более подробно в диссертации [117.2]. Здесь Коэн дополнил по данному вопросу результаты Пенлеве относительно уравнений вида (6. 10), указав также явно отдельные виды уравнений данного класса. Это же было сделано в форме приложения и для уравнений второй степени по y' для $n=2$ и $q=4$, 5, 6, 7, 8 и некоторые для $n=3$.

Здесь же решено две важные задачи: 1) построения уравнений вида (6.13) с алгебраическими коэффициентами данной степени q по y, общий интеграл которых принимал данное число n значений около подвижных критических точек; 2) то же самое для уравнений, общий интеграл которых есть функция трансцендентная, которая принимает лишь конечное (не данное) число таких же значений.

Ряд новых интересных результатов при изучении особых точек аналитических однозначных функций с широким применением новых тогда методов теории множеств получил Зоретти (62) в диссертации [282.1], дополненной заметкой [282.2]. Здесь уделялось много внимания доказательству теоремы (A) о том, что однозначная аналитическая функция, обладающая в некоторой, довольно малой области особой точкой z_0, принадлежащей к совершенному везде разрывному множеству особых точек, есть заведомо разрывная в этой области (в некоторых точках этой области). Точка z_0 тут выступает как трансцендентная существенно особая. Эта и ряд других теорем автора играли существенную роль для более простого решения проблемы Пенлеве относительно дифференциальных уравнений первого порядка. Зоретти исходил из ряда теорем и положений, опубликованных Пенлеве через несколько лет, но уже известных кругу его учеников. Таким образом, некоторые, неизвестные еще в печати, результаты Пенлеве были указаны в рассматриваемой работе

Зоретти. Он считал естественным сформулировать проблему в несколько иной форме и изучать случай, где общий интеграл $y(x)$ есть функция не более n ветвей. В решении этой проблемы Пенлеве существенную роль играла указанная выше теорема. Опираясь на нее, можно было получить важный вывод о том, что если общий интеграл алгебраического дифференциального уравнения первого порядка не выше, чем n-значная функция, то он обладает около подвижных критических точек числом $m \leqslant n$ ветвей и что общий интеграл есть алгебраическая функция от интегральных констант.

Дальнейший прогресс в решении проблемы Пенлеве был обусловлен работами талантливого скандинавского математика Мальмквиста (63), сумевшего уже в своей диссертации [211.1] глубоко проникнуть в сущность предмета и предложить ряд существенных усовершенствований, в смысле корректности, как в доказательствах, так и в формулировках Пенлеве и других ученых по данному предмету. Эта работа была предпринята по рекомендации Миттаг-Леффлера. Часть ее результатов совпадает с полученными ранее в упоминаемой диссертации Зоретти и остававшейся неизвестной Мальмквисту в период начала его исследований по данной проблеме. Мальмквист напомнил здесь в связи с доказательством теоремы (A), которое искал Зоретти в [282.1], о примере Помпею, построившего в своей диссертации [238] пример функции, однозначной и непрерывной во всей плоскости и допускавшей совершенное везде разрывное множество особых точек. Отметим, что в свое время функция Помпею рассматривалась как малоубедительная в связи с тем, что она могла быть тождественным нулем. В 1909 г. к этому вопросу возвратился Данжуа в заметке [134], представленной Пенлеве в доклады Парижской академии, рассмотрел некоторые аспекты, прошедшие мимо внимания Помпею и, наряду с другими свойствами, показал, что указанная функция не является тождественным нулем. Уточнение примера Помпею, данное Данжуа, открывало, как отметил здесь же Пенлеве [228.26], «необычайно замечательный тип особенностей аналитических функций».

В связи с вышеизложенным значение теоремы Зоретти значительно ограничивалось, хотя она могла быть обобщена, по замечанию Мальмквиста с некоторыми оговорками, на случай интегралов, имеющих бесконечно много ветвей. В рассуждениях же Пенлеве существенную роль играло некоторое обобщение известной теоремы Сохоцкого и Пикара об однозначных функциях в окрестности существенно особой точки. Но было мало вероятным обобщение этого метода для случая любого n, а в случае интегралов с бесконечностью ветвей он заведомо не применим.

В связи с этим Мальмквист стремился найти лучший подход к трактовке рассматриваемых вопросов. Так, при изучении множества особых интегралов, имеющих конечное число ветвей и

конечное число критических точек, автор использовал метод Петровича[1] для определения числа различных однозначных интегралов.

Д. Помпею (1873—1954).

Мальмквист начал рассмотрение вопроса с уравнения вида (6.10), уделяя также внимание изучению особенных интегралов, обладающих бесконечным множеством ветвей.

Относительно множества особых интегралов, имеющих конечное число ветвей и конечное число критических точек, было доказано, что оно образует счетное множество, или уравнение (6.10) приводится к уравнению Риккати преобразованием вида (ε) (стр. 166), и ряд других теорем. Полученные результаты были затем распространены на уравнение вида (6.12), где коэффициентами при y', y являлись алгебраические функции по x. Работа интересна в методическом отношении: ряд общих заключений трактовался затем для случая $n=2$.

Дальнейшему расширению и углублению полученных результатов Мальмквист посвятил еще несколько работ. Так, теорема Пенлеве о счетности множества особенных интегралов в общем виде новым методом, основанным на применении результатов Бутру о росте интеграла уравнения первого порядка, доказана в большей статье [211.2] (1913 г.). Здесь же получены весьма общие результаты о природе некоторых особых точек. Изучая уравнение вида (6.10) и применяя тот же метод, Мальмквист доказал здесь весьма замечательную теорему о том, что если уравнение (6.10) не является уравнением Риккати, то каждый его однозначный интеграл есть рациональная функция. Так же было установлено, что если уравнение формы $\frac{dy}{dx}=a_0y^p+$ $+a_1y^{p-1}+\ldots+a_p$ подстановкой вида $z=\frac{y^n+\beta_1y^{n-1}+\ldots+\beta_n}{y^{n-p+1}+\alpha_py^{n-p}+\ldots+\alpha_n}$ не преобразуется в уравнение Риккати $z'_x=az^2+bz+c$ (где коэффициенты a_i, α_i, β_i, a, b, c — рациональные функции по x), то каждый конечномногозначный интеграл есть неообходимо алгебраическая функция. Эта теорема была сообщена немного раньше.

Признак алгебраичности или трансцендентности интеграла для уравнения вида $F(y'_x, y, t, x)=0$, где F — многочлен по всем аргументам и t — алгебраическая функция для x, был установлен в [211.3]. Полученные результаты применялись к случаю

[1] См. об этом также в [235.17, изд. 3, стр. 378—381].

уравнения $F(y'_x, y, x)=0$, где F — многочлен по y' и y, коэффициенты которых — степенные ряды по x. Интегралы с подвижными особыми точками системы уравнений

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(y, z; x)}{X(y, z; x)}; \quad \frac{dz}{dx}=\frac{Z(y, z; x)}{X(y, z; x)} \tag{6.15}$$

с применением упомянутого ранее метода преобразования Бендиксона [98.5] изучались в более поздних статьях, в том числе в [211.4, (II)].

§ 3. Интегралы с особыми точками, в окрестности которых они обладают бесконечным числом ветвей (исследования Бутру)

Последующее углубленное изучение особенностей дифференциальных уравнений первого порядка было обусловлено дальнейшими успехами теории аналитических функций. Были найдены новые средства представления функций, в частности трансцендентных,— разложение в бесконечные произведения, в ряды полиномов, представление асимптотическими рядами, наконец, разложения, сходящиеся в звезде Миттаг-Леффлера. Благодаря новым методам трансцендентные функции могли быть определены не только в окрестности отдельной точки, но и в более широкой области. В то же время многие ученые обращали внимание на изучение некоторых общих свойств функций, которые в общем не зависели от формы представления данной функции. Одним из таких свойств был характер роста функций, систематическое изучение которого начато в замечательных работах Адамара и Бореля в конце прошлого века. Новые идеи давали возможность расширить область исследования интегралов дифференциальных уравнений, распространяя ее на все более сложные виды особенностей.

Аналогичные идеи и методы, подкрепленные теорией множеств, стали все глубже проникать и в аналитическую теорию дифференциальных уравнений, найдя отражение в работах Пенлеве и его учеников. Среди других важных результатов Пенлеве установил, что для интегралов уравнения вида (6.10) трансцендентные точки будут неподвижны. Из всех уравнений такого вида однозначными интегралами могло обладать лишь уравнение Риккати. Таким образом, все другие виды уравнения (6.10), не являющиеся уравнениями Риккати, будут иметь многозначные интегралы. Часть из них является функциями конечнозначными. Этот тип охватывает те уравнения (6.10), которые можно преобразовать в уравнение Риккати рациональной заменой переменных.

При помощи конечного числа алгебраических операций можно узнать, дает ли эффект такая замена переменных. Но другие виды уравнений (6.10) определяют такие многозначные функ-

ции, которые могут обладать бесконечным числом ветвей. В этом направлении к началу века вопрос был мало изучен и трактовался в форме локальных исследований, развивавших в основном идеи Брио и Буке. Систематически он стал изучаться в многочисленных работах талантливого ученика Пенлеве известного французского математика П. Бутру. Уже в диссертации [109.1] он поставил задачу: более тонко установить имеющую место связь для целых трансцендентных функций между характером их роста и числом нулей в данной области. Не имея возможности входить в обзор полученных результатов в этой большой работе, отметим, что разработанный здесь общий метод распространялся на мероморфные функции некоторого общего класса, а также применялся для исследования роста величин интегралов тех типов данных Пенлеве дифференциальных уравнений (второго порядка, с неподвижными критическими точками), которые интегрировались в мероморфных функциях. Автор также искал (в четвертой части работы) уточнение результатов, полученных Борелем [105.1] и Линделефом [204.5] относительно роста интегралов алгебраического дифференциального уравнения первого порядка (вида (6.10) и др.). При этом им был определен класс таких дифференциальных уравнений, интегралы которых имеют порядок роста весьма аналогичный тому, которым обладали целые функции конечного жанра.

Диссертация Бутру играла роль функционально-теоретической основы для дальнейших исследований о природе многократных интегралов. Его работы по этой тематике стали появляться довольно часто в последующие 15—17 лет. Он изучал в основном уравнение вида (6.10). Уже в одной из первых заметок по этому вопросу в 1904 г. Бутру отмечал, что простейшие дифференциальные уравнения, интегралы которых обладают бесконечно многими ветвями, имеют вид

$$y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3. \qquad (6.16)$$

Такое уравнение может быть приведено к более простым формам, для одной из которых исследуется поведение интеграла $y(x)$ в окрестности трансцендентной критической точки $x=\infty$. При этом оказывается, что интеграл обладает так называемыми квази-периодами, которые получаются через обход многих критических точек и которые в общем не обмениваемы. В следующей заметке в том же году предложена классификация трансцендентных особенностей уравнения (6.16), охватываемая тремя основными классами или 19 видами, а в [109.2] для уравнения $y'+A_2y^2+A_3y^3=0$ было определено число критических точек в зависимости от степени m_2 и m_3 полиномов A_2 и A_3 по x и исследовалось поведение интегральных ветвей этого уравнения в окрестности трансцендентной особой точки $x=\infty$ в трех конкретных случаях.

В известном смысле некоторый итог предыдущих исследова-

ний подведен в «Лекциях» Бутру [109.3] в 1908 г., где изучались вышеуказанные виды уравнений и особенно (6.16) при A_i полиномах по x. Интегралы этого уравнения, как упоминалось,— бесконечно многозначные функции с бесконечно многими особыми точками.

Бутру следовал здесь по пути изучения характера роста и поведения одной ветви интеграла, когда x приближается к трансцендентной особой точке. Затем изучается сгущение особых точек или ветвей интегралов около граничных величин. Главное внимание уделялось подходу к изучению механизма, по которому различные ветви некоторых частных определенных интегралов переходят друг в друга. Имея в виду изучить степень разрешимости вопроса и пригодность различных методов для его решения, Бутру ограничился рассмотрением простейших видов уравнений (6.10). Книга содержала много нового интересного материала, включавшего почти современные ее изданию результаты, и название лекций подходило к ней весьма условно, разве что в смысле современного спецкурса. Естественно, что такого вида работа не была свободна от недостатков, в том числе и от ошибочных утверждений, замеченных позже [15].

Дальнейшее продвижение Бутру в исследовании вопроса связано с рядом заметок и двумя большими статьями (1910 г.).

В работе [109.4] более четко трактуется подход к исследованию бесконечно значных функций. Здесь же автор возвращается к уточнению многих вопросов, уже рассмотренных в предыдущих работах, отмечая прежде всего, что многозначную функцию $y(x)$ можно лучше изучить, если выразить x и y в однозначных функциях параметра t, $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$. Тогда вопрос сведется к определению поверхности Римана, обладающей бесконечным множеством листов и к выполнению конформного отображения на плоскость t, или к разложению плоскости t на бесконечную последовательность участков, которым функция $x=f(t)$ ставит в соответствие листы поверхности Римана. Однозначную функцию $x=f(t)$, удовлетворяющую этим условиям, можно найти и представить, таким образом, посредством однозначных функций все множество ветвей некоторой многозначной функции. Но как эти ветви переплетаются, как они переставляются, надо было еще выяснить. В решении этого вопроса автор намечал свой подход. Переход функции $f(t)$, определенной на поверхности Римана, от n листа к $n+1$ соответствует перестановке около некоторых критических точек $y(x)$. Итак, в общем, если индекс n листа неограниченно возрастает, то число n и сложность (complication) (запутанность) перестановок перехода равномерно и неограниченно возрастает, тогда способ связи листов одного с другим не может быть уже определен, и одно и то же значение $t(x)$ (или $y(x)$) будет появляться вновь на поверхности Римана бесконечное число раз. Это так называемая «искусственная» запутанность. А чтобы найти поверхность Ри-

мана, реализующую некоторым образом регулярную и адэкватную униформизацию $y(x)$, надо исследовать механизм перестановок этой функции. В связи с этим Бутру устанавливает три условия, которым подчинялись подстановки (или обмен ветвей), в том числе наличие в конечном числе так называемых фундаментальных подстановок $[y_j, y_j^{(1)}]$, $[y_j, y_j^{(2)}]$..., через произведение которых выражались другие такие подстановки $[y_j, y_k]$ и которые устанавливали однозначное и обратное соответствие между y_j и $y_j^{(1)}$..., и проводит их подробное изучение.

Полученный результат применялся к исследованию интегралов дифференциальных уравнений. Сначала уточняется понятие ветви интеграла, рассматриваемой изолированно, как составляющая интеграла, представляющаяся листом поверхности Римана. Она характеризуется величиной, принимаемой в данной точке, и ей, следовательно, может соответствовать величина константы интегрирования. Так появляется упорядоченное множество ветвей интеграла, или упорядочение величин параметра интеграции, принадлежащих одному решению. В то же время параметры связываются с простейшими подстановками, произведенными над параметром, когда переменная описывает некоторый замкнутый контур. Детально рассмотрев различные круговые обходы независимого переменного, Бутру также подробно изучает подстановки (и перестановки), которые происходят в окрестности различных трансцендентных точек уравнения. Оказывается, что характеристические свойства уравнения определяются природой его трансцендентных точек. В частности, фундаментальные подстановки зависят исключительно от этих точек и довольно просто. Ограничившись рассмотрением уравнений с более простыми типами трансцендентных точек, он определял систему фундаментальных подстановок, соответствующих различным трансцендентным точкам уравнения и удовлетворяющих поставленным условиям. Важным здесь было установление функций подстановок с помощью рядов рациональных функций. Решение вопроса в простейших случаях, например, когда вырождаются одна или многие трансцендентные точки, рассматривалось как предпосылка для более общих заключений.

Подробная классификация особых точек уравнения вида (6.10) с детальным обсуждением установленных типов рассмотрена в [109.5]. Автор стремился показать здесь, что особые точки уравнения (6.10) приводятся к небольшому числу их типов для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y), \tag{6.17}$$

так что исследование последних вело к общей классификации трансцендентных особых точек, представляемых рациональными уравнениями первого порядка. Общая схема охватывает 19 видов, которые подробно изучены.

Следующий цикл работ Бутру (1919—1920 гг.) был связан с изучением представления всех ветвей функции во всей области ее существования и явным выражением ее характерных свойств. Полученные и предыдущие результаты использовались для детального изучения интегралов уравнения $zz'=3mz+2x^3+bx+c$ при довольно малом $|m|$, $m<0$ и некоторых частных значениях b, c. Этим открывался путь изучения интегралов уравнения (6.10) в общем ранее указанном направлении.

Одним из первых последователей Бутру был американский математик (ученик Биркгофа) Слипен. Он исследовал в 1915 г. не отдельные решения уравнений вида (6.10), а свойства совокупности всех решений «в целом», опираясь на работы Пуанкаре [237.4.—5]. При этом имелось конечное число особых точек, через которые могло проходить больше, чем одна кривая, и существовали некоторые замкнутые граничные кривые или циклы, около которых спиралевидно обвивались другие кривые. Было показано, что в случае комплексной области замкнутым циклам соответствуют некоторые аналоги. Здесь каждое решение обладает граничными решениями, которые играют ту же роль, что и замкнутые циклы в действительной области. Эти граничные решения наличны в общем в бесконечном числе, в отличие от действительного случая, где число замкнутых граничных циклов конечно. Применяя восходящий к Биркгофу [100.3] фильтрующий процесс, автор пришел к некоторым циклическим системам граничных решений, которые обладали замечательными свойствами. В общем могла быть только одна такая система, совпадающая (но не всегда) с совокупностью решений. Слипен рассмотрел также соотношения между неподвижными особенностями, граничными решениями и циклическими системами граничных решений. В частности, было показано, что, когда все неподвижные особые точки уравнения имеют простейший вид, два любые интеграла проходят через общую неподвижную особую точку или обладают общим граничным решением. Специально рассматривался случай существования алгебраических решений.

Из более поздних работ, трактовавших иначе проблему Бутру и при других предпосылках, назовем статью бельгийского математика Бюро [115]. В этом мемуаре он изучал в окрестности трансцендентной особой точки $x=0$, $y=0$ интегралы уравнения (6.10), где $P(x, y)=ax+by+\ldots$ $(b\neq 0)$; $Q(x, y)=a_1x+b_1y+\ldots$ — голоморфные функции в области $|x|\leqslant r$; $|y|\leqslant\rho$. Вопрос сводился к изучению в окрестности $x=0$ поверхности Римана, в которой данный интеграл однозначен и которая может иметь бесконечность листов. Метод автора отличен от того же у Бутру и своими истоками имел работы Пуанкаре, Бендиксона, Дюляка [137.2] относительно уравнений того же вида. Четвертая глава статьи и посвящена конструкции поверхности Римана, сочетающейся с интегралами изучаемого уравнения.

Глава VII. ИЗУЧЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Уравнение Риккати

Как было видно из вышеизложенного, уравнения Риккати играют особую роль в аналитической теории дифференциальных уравнений. По своей структуре эти уравнения принадлежат к следующему по сложности классу за уравнениями линейными. Неудивительно поэтому, что они привлекали внимание исследователей с начала семнадцатого века и вплоть до наших дней. Многие интересные свойства этих уравнений и их интегралов были установлены еще основоположниками анализа. Ряд принципиальных результатов получен в прошлом веке. В связи с развитием рассматриваемой теории интерес к этого вида уравнениям не ослабевал, и в последние десятилетия для них был получен ряд интересных новых соотношений.

Уравнение Риккати в общей форме имеет вид

$$w^1 = a_0(z)\,w^2 + a_1(z)\,w + a_2(z), \tag{7.1}$$

где a_i — некоторые функции от z. Свое наименование, по предложению Даламбера, оно получило от имени итальянского математика графа Якопо Риккати (1676—1756). Изучая одно дифференциальное уравнение второго порядка, связанное с проблемой вычисления траектории, Риккати пришел к необходимости интегрировать уравнение вида

$$x^n dq = du + \frac{u^2}{q}\,dx, \tag{7.2}$$

где $q=q(x, u)$, а n — число.

Интеграция как этого уравнения, так и в случае $q=q(x)$, оказалась невозможной в общем виде, и хотя Риккати знал некоторые случаи сводимости этого уравнения к разделению переменных, в 1724 г. он [245] поставил перед современными математиками задачу об отыскании таких значений m в случае $q=x^m$ (при любом n), когда уравнение (7.2) приводится к разделению переменных. Как потом стало известно, значительно раньше о своих поисках Риккати поделился с Николаем Бернулли, пред-

ложив ему решить уравнение

$$ax^m dx + by^2 x^p dx = dy. \tag{7.3}$$

Вскоре после этого между рядом математиков завязалась оживленная переписка (64), и в научных журналах того времени стали появляться статьи различных авторов с трактовкой данного вопроса, положившие начало довольно многочисленным исследованиям уравнения Риккати в различных аспектах.

Непосредственно за статьей Риккати, в том же журнале (Acta Eruditorum), следовала статья Даниила Бернулли, где сообщалось, что сам он, как и его братья Николай I, Николай II и отец Иоганн I, решил задачу Риккати. При этом оказалось, что они пришли к одинаковому результату независимо друг от друга различными путями. Это давало ему повод предполагать, что найденные ими случаи — единственно возможные. Тем не менее свое решение он явно не сообщал (чтобы дать, как он говорил, возможность другим математикам испытать свои силы в решении этой задачи), записав его в форме криптограммы. Полностью решение Д. Бернулли было опубликовано через 2 года.

Следующая статья (1776 г.) на эту тему принадлежала Христиану Гольдбаху [162], изучавшему уравнение Риккати весьма общего вида

$$ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy \tag{7.4}$$

и отыскавшему интеграл уравнения вида

$$ayx^m dx + by^n x^p dx = dy$$

в форме $y = cx^{\frac{-p-1}{n-1}}$, где c — корень уравнения

$$bc^{n-1} + ac^{f-1} + \frac{p-m}{n-f} = 0 \text{ и при } m = \frac{fp + f - p - n}{n-1}.$$

Николаю Бернулли удалось найти довольно широкий класс решений уравнения (7.3) в конечном виде, когда $m = \frac{-2np-4n\pm p}{2n\pm 1}$, где p — рациональное число, а n — целое, о чем он написал в письме к Гольдбаху в 1721 г. Несколько позже, в 1726 г., он изучал уравнение вида

$$ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$$

и различные его упрощенные формы. Главный его результат касался указания простой формы случая интегрируемости уравнения

$$ax^m dx + by^2 dx = dy$$

при $m = \frac{-4n}{2n \pm 1}$, где n — произвольное целое число.

Простой вывод различных случаев интегрируемости наиболее полно впервые был изложен Эйлером в первом томе его

трактата об интегральном исчислении. Он записывал уравнение Риккати в сокращенной форме

$$dy + y^2 dx = ax^m dx. \tag{7.5}$$

Найдя вышеуказанное значение m, он включил сюда и случай $m=-2$ (когда $n=\infty$), который отмечал Д. Бернулли, как требующий особого рассмотрения. Здесь же Эйлер указал случаи интегрируемости в конечном виде, когда исследование переносится с показателя на коэффициент, т. е. с помощью данной им подстановки уравнение Риккати преобразуется в такое, где параметр m входит не в показатель степени, а в коэффициент.

Во втором томе того же сочинения Эйлер изложил метод интегрирования бесконечными рядами линейного дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^n y = 0$, непосредственно связанного с уравнением Риккати. А в 1785 г. он показал, что к интегрированию уравнений Риккати приводится задача вычисления одного весьма широкого класса непрерывных дробей. Здесь же было установлено, что интеграл уравнения Риккати может быть всегда представлен бесконечной непрерывной дробью. Таким образом, Эйлер занялся впервые, как он сам об этом отметил, интегрированием уравнения Риккати и в тех случаях, когда интеграл последнего не брался в конечном виде. Аналогичный метод в менее совершенном виде излагался Эйлером еще в 1739 г. [141.1].

Уравнение общего вида (8.1) также было предметом изучения Эйлера с 1738 г. В 1762 г. он доказал, что если известен один частный интеграл уравнения (7.1), то оно может быть сведено к линейному и интегрироваться с помощью двух квадратур. Если известно два частных интеграла, то вопрос сводится к одной квадратуре.

В дальнейшем многие математики продолжали искать условия интегрируемости этого уравнения в конечном виде, рассматривая главным образом его частную форму

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_2(x)\, y^2 \tag{7.6}$$

и чаще вида (7.5).

Второе направление, получившее начало в работах Эйлера, состояло в представлении общего интеграла уравнения Риккати в виде бесконечного ряда или определенного интеграла, содержащего независимое переменное в качестве параметра. Одна из первых работ XIX века в этом направлении принадлежала Лиувиллю [205.1]. Здесь интеграл уравнения Риккати (7.5) выражался весьма сложным способом в форме m-кратного определенного интеграла от суммы некоторого бесконечного ряда. Но уже в следующем году был опубликован весьма интересный мемуар [198.1] Куммера (65), где тот же интеграл представлялся в виде определенного интеграла с переменным x как парамет-

ром. Формула Куммера получена в результате суммирования определенным интегралом бесконечного ряда, выражающего интеграл уравнения Риккати. Более усовершенствованный аналогичный метод применен им с той же целью в работе [198.3]. В это же время прямым методом (не прибегая к рядам) получена формула Лобатто для выражения интеграла уравнения Риккати в форме определенного интеграла.

Важной вехой в исследовании уравнения Риккати были последующие работы Лиувилля. В 1837 г. им опубликован оригинальный мемуар о классификации трансцендентных функций. Затем он изучил вопрос об интегрировании линейных уравнений второго порядка в конечном виде, а в 1841 г. использовал полученные результаты для доказательства в [205.6] интересного факта о том, что известные до того условия интегрируемости в конечном виде уравнения Риккати не только достаточны, но и необходимы. Значительно позже, в 1877 г., Дженочи [160] обнаружил промах в цепи рассуждений Лиувилля относительно наличия алгебраического интеграла в уравнении $\frac{d^2u}{dz^2} = \left(A + \frac{B}{z^2}\right)u$, к которому приводится уравнение Риккати. Предложенное им усовершенствование (см. об этом в [79, 7]) оказалось малоэффективным. Доказательство пропущенного Лиувиллем случая было сведено к уже известным в работе М. Фельдблюма [79, гл. II].

Вопросы интегрируемости различных видов уравнений как формы (7,5; 7.6), так и общего вида, были в дальнейшем предметом многих исследований. Ими занимались Кэли, Глечер, Летников, Флоров, Алексеевский, Каталан, Мич, Ажелло, Тилли и др. Из работ последнего времени, рассматривавших вопросы интегрируемости уравнения Риккати, отметим заметки Карапанджича [191], Рао и Укидава [242], а также ряд весьма интересных статей Д. Митриновича [217.1—2 и др.], посвятившего целую серию работ исследованию интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь были дополнены, уточнены и обобщены случаи интегрируемости, указанные в справочнике [188]. Как было потом показано, многие предыдущие признаки интегрируемости уравнения Риккати в конечном виде обобщались критерием Митриновича.

Весьма важное принципиальное значение для этих вопросов имела работа [44] В. П. Максимовича о невозможности интегрирования в конечном виде общего линейного уравнения второго порядка (1885 г.). Это положение распространялось и на общее уравнение Риккати.

Выражение решений уравнения Риккати в форме определенных интегралов, связь с теорией рядов, цепных дробей, приближенные методы интегрирования рассмотрены в работах Шлефли, Гельмлинга, Мича, Паскаля и др.

Связь уравнений Риккати и Бесселя изучали Гренхил и Ломмель в 1878—1879 гг., а обзор теории уравнения Риккати выполнил Штуди в 1910 г.

Ряд исследований конца прошлого и начала нашего века имеет комплексный характер. Здесь обзорная часть переплетается с оригинальными результатами авторов по ряду отдельных вопросов.

Из указанного цикла работ для нас представляют интерес те, где исследовались различные функциональные свойства интегралов названных уравнений и зависимость их от характера коэффициентов уравнения. Одна из первых работ, где вычислялись рациональные интегралы уравнения вида (7.1), где коэффициенты — рациональные функции аргумента, принадлежала Гиллу [174].

Большой цикл работ был связан с исследованием алгебраичности частных решений общего уравнения Риккати. Этот вопрос был рассмотрен в статье Дарбу, написанной в 1881 г. в память Д. Челини, с использованием теории ковариантов. Найденный результат мог быть получен непосредственно из исследований Фукса [153.7] о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с алгебраическими интегралами. К таким уравнениям приводилось уравнение Риккати давно известным простым преобразованием [1]. Более подробно природа алгебраических интегралов уравнения вида (7.1) изучалась в статьях Отона [95.1—8]. Аналогичный вопрос интересовал Н. В. Бугаева [10.1, § 15], Флорова [81], исследовавших условия и случаи алгебраического интегрирования уравнения (7.1), Паскаля [230], установившего общий класс уравнений Риккати, алгебраические интегралы которых определяются через уравнения третьей и четвертой степени.

Форма алгебраических интегралов уравнений вида

$$y' + y^2 + f_1(x, z)\, y + f_2(x, z) = 0,$$

где f_1, f_2 — рациональные функции от x и от любой, неприводимой по x алгебраической функции z, исследовалась в брошюре Кенигсбергера [195.5] через приведение к однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Подробное исследование поведения интегралов уравнения Риккати в окрестности особой точки выполнил Фалькенхаген в 1904 г.

С конца прошлого, начала текущего века получали все большее распространение работы, изучавшие различные обобщения уравнения Риккати. Эти обобщения распространялись иногда на форму свободного члена, но главным образом в виде замены полинома второй степени по y на полином более высокой степени на рассмотрение уравнения вида (7.1) с весьма обобщенны-

[1] См. об этом, например, в [72, гл. 1, § 6].

Д. М. Синцов (1867—1946).

ми коэффициентами, наконец, на повышение порядка. Естественно, что такие обобщенные уравнения можно связывать с известным уравнением Риккати лишь условно, хотя между ними и наблюдается известная общность некоторых свойств. Такого рода исследования проводили Д. М. Синцов, Сиаччи, Паскаль, Валленберг, Пачи и др.

Уже из приведенного, далеко не полного и беглого обзора мы видим, сколь богата и разнообразна литература, касающаяся уравнения Риккати. О нем более или менее подробно упоминается почти в любом курсе по дифференциальным уравнениям. Простота и изящество соотношений, возможность получения все новых, иногда весьма любопытных фактов, сравнительная простота методов исследования привлекали к нему внимание математиков. Кроме большого чисто аналитического интереса, представляемого свойствами функций Риккати, они играют весьма важное значение и в прикладной математике. К интегрированию уравнений Риккати приводятся многие задачи анализа, геометрии, механики, физики, химии и других наук.

Уравнения Риккати непосредственно примыкают к линейным в том смысле, что для тех и других можно определить заранее некоторые особые точки. Как мы помним, уравнения Риккати обладают неподвижными критическими алгебраическими точками. Но в отличие от линейных уравнений (и это весьма существенно), интегралы уравнения Риккати могут иметь и подвижные особые точки, которыми является полюс первого порядка. Благодаря тому, что уравнение Риккати приводится к линейному однородному уравнению второго порядка вида

$$\frac{d^2u}{dx^2} + s_1 \frac{du}{dx} + s_2 u = 0, \tag{7.7}$$

для изучения свойств функций Риккати можно применить основные результаты теории линейных дифференциальных уравнений. Такой путь был использован в работе В. А. Анисимова [2.3].

Вычислив общий интеграл уравнения (7.7) и учтя произведенную подстановку, можно получить общий интеграл уравнения (7.1) в форме

$$w = \frac{1}{a_0} \frac{u_2' + cu_1'}{u_2 + cu_1}, \tag{7.8}$$

если $u = c_1u_1 + c_2u_2$, $c = \frac{c_1}{c_2}$. Иначе говоря, функция Риккати является линейной рациональной функцией произвольного постоян-

ного. Отсюда следует, что всякая функция вида

$$w = \frac{p_1 + cp_2}{p_3 + cp_4}, \tag{7.9}$$

где p_i — функции от x, а c — произвольная константа, удовлетворяет уравнению Риккати. Это, как и следующее свойство, непосредственно вытекало из известного уже Эйлеру факта о приводимости уравнения Риккати к линейному второго порядка. В дальнейшем они были подчеркнуты Пикаром в 1877 г.

Из вышеуказанных формул после несложных преобразований можно показать, что

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = c, \tag{7.10}$$

т. е. сложное (ангармоническое) отношение четырех интегралов уравнения Риккати есть величина постоянная. Зная три каких-нибудь частных интеграла уравнения Риккати, общий его интеграл можно получить по формуле (7.10) без всякого интегрирования, т. е. рациональными операциями. Именно отсюда следует, что критическими особыми точками интеграла уравнения Риккати могут быть только критические особые точки трех его частных интегралов, т. е. неподвижные особые точки, а также и то, что если уравнение (7.1) имеет три однозначных интеграла, то и всякий его интеграл — однозначная функция. Аналогично строится вывод и для случая мероморфных интегралов. Эти свойства характерны для уравнений Риккати. Поведение функций Риккати в области неподвижных особых точек было изучено В. А .Анисимовым [2.3].

Геометрические приложения теории общего уравнения Риккати, связь его с различными задачами анализа и механики и подробное изложение теоретической части приведено в монографии Фельдблюма [79]. Уравнение Риккати и применение его к химии рассматривалось в статье Петровича 1896 г. В дальнейшем он возвращался к исследованию этого уравнения.

Исследования по теории уравнения Риккати в различных направлениях продолжаются, представляя все новые интересные результаты и притом весьма часто в классическом стиле. Таковы, например, заметки Н. П. Еругина [25.5], давшего интересное исследование о построении $P(x)$, $Q(x)$ для $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — решения уравнения и получившего решение уравнения Риккати во всей области его существования и ряд других интересных результатов, П. Г. Тодорова [77] и Э. И. Грудо [19], установивших область голоморфности решения уравнения $y' = y^2 + f(x)$, где $f(x)$ — голоморфная в области $|x| < \rho$ функция с начальным условием $y(0) = 0$.

§ 2. Уравнение Брио и Буке. Исследование общего случая

Общий метод, развитый Брио и Буке в мемуарах [112.2.—7] для изучения свойств интегралов дифференциальных уравнений, был применен ими в работах [112.4.—5.—8] для исследования дифференциальных уравнений вида

$$F\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0. \tag{7.11}$$

Уравнения такого вида и более частные, рассмотренные Брио и Буке, принадлежат к общему классу уравнений первого порядка, в интегралах которых могут отсутствовать критические подвижные точки, и подчинены приводимой далее теореме Эрмита. Это значительно упрощает схему исследования таких уравнений. Но упомянутые факты не были еще известны в тот период, когда начали свою деятельность Брио и Буке. Поэтому схема их исследования и важные общие заключения, к которым они пришли, не лишены научного интереса.

В уравнении (7.11) под F понимался полином степени m по отношению к производной, не содержащий переменной z. Брио и Буке, полагая $z=z_0$, $u=u_0$ и $\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)$, рассматривают u как аргумент и z как функцию. Тогда каждому значению u соответствует m значений $\frac{dz}{du}$, данных уравнением. Если переменная u, выходя из u_0, возвращается в ту же точку, описав замкнутый контур, не содержащий корня уравнения (7.11), равного другому, то $\frac{dz}{du}$ принимает начальное значение $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ и приращение z вдоль этого контура равно нулю. В противном случае дифференциальный коэффициент меняется и принимает некоторое значение $\left(\frac{dz}{du}\right)_1$. Так получаются m значений производной $\frac{dz}{du}$, соответствующих $u=u_0$, а интеграл z в зависимости от этого принимает m значений: $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{m-1}$. Многие контуры могут приводить к той же величине $\frac{dz}{du}$. Здесь берется случай, когда к m контурам приводятся m различных величин $\frac{dz}{du}$. Предполагая теперь, что переменная u после описания некоторых из этих m контуров выходит из u_0 к некоторой точке u плоскости вдоль некоторой кривой, то интеграл z примет m различных значений в точке u. Таким образом, каждому значению u соответствует уже m значений z, отличающихся друг от друга на величины, кратные некоторым так называемым периодам $\omega, \omega_1, \ldots$, г. е. на величины вида $n_1\omega_1+n_2\omega_2+\ldots$, где $n_1, n_2, \ldots$ — целые числа. Из вышеизложенного делается весьма ин-

тересное замечание, что интеграл уравнения $P(z, u, u')=0$, где P — полином, не может быть периодическим.

Далее следует доказательство теоремы о том, что если каждой величине переменной соответствует ограниченное число значений функции интеграла u, то последний будет алгебраической функцией либо по отношению к аргументу z, либо по отношению к периодической функции $\operatorname{tg}\frac{\pi z}{\omega}$, либо по отношению к эллиптической функции $\sin am\,(gz)$, которую авторы еще обозначают $\lambda(z)$. Здесь прежде всего устанавливалось, что если функция-интеграл допускает ограниченное число значений для каждой величины z, то она не может иметь более двух периодов. Доказательство следовало методом от противного, когда из допущения, что z может иметь три различных периода ω, ω_1, ω_2, получалось, что интеграл должен обладать бесконечным числом значений для каждой величины z.

Если периоды функции равнялись нулю, то интеграл получался в форме алгебраического уравнения между u, z. Если функция обладала одним периодом ω и каждому значению u соответствовало m значений z, то u выражалась уравнением, имеющим коэффициентами рациональные дроби по $\operatorname{tg}\frac{\pi z}{\omega}$. В случае двух периодов u выражалась аналогично через $\lambda(z)$.

После этого доказывалась теорема о том, что монодромный интеграл уравнения (7.11) может быть рациональной дробью, функцией периодической или двоякопериодической (эллиптической). Доказательство легко следовало из предыдущей теоремы.

Дальше, естественно, следовало решение комплекса вопросов об установлении признака, когда интеграл уравнения (7.11) будет монодромным, а в последнем случае — к какой из трех вышеуказанных категорий он принадлежит. Исследование монодромных интегралов уравнения (7.11) собственно и составляло главную цель мемуара [112.8]. Такого рода прямому изучению дифференциальных уравнений авторы придавали большое значение. Они занялись, прежде всего, выяснением фундаментальных свойств функций-интегралов, перейдя затем к непосредственной интеграции уравнений данного типа и классификации их интегралов и получая весьма общим способом также и уже известные ранее результаты.

Общий итог этого исследования Брио и Буке сформулировали в такой теореме: чтобы дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0 \qquad (7.12)$$

обладало монодромным интегралом,

1) коэффициенты $f_1(u)$, $f_2(u)$, ..., $f_m(u)$ должны быть целыми полиномами по u и первый — не выше второй степени, второй — не выше четвертой степени, ... последний — не выше степени $2m$;

2) если для некоторой величины u уравнение имеет кратный корень, отличный от нуля, $\frac{du}{dz}$ должна оставаться монодромной по отношению к u;

3) когда для некоторой величины $u=u_1$ уравнение имеет кратный корень, равный нулю, то первый член разложения $\frac{du}{dz}$ по возрастающим степеням $(u-u_1)^{\frac{1}{n}}$ должен иметь показатель $\frac{n-1}{n}$, если этот показатель меньше единицы;

4) наконец, дифференциальное уравнение, которое выводится из (7.12) подстановкой $u=\frac{1}{v}$, должно обладать для $v=0$ тем же характером. Эти условия Брио и Буке давали как достаточные.

Почти через 20 лет в монографии [112.10] они внесли некоторые коррективы в формулировку этой важной теоремы, рассматривая ее условия 1—4 как необходимые и достаточные для монодромности интеграла неприводимого алгебраического дифференциального уравнения вида (7.12). При этом условия 1, 4 оставались теми же, во втором требовалась голоморфность ненулевого корня уравнения (7.12) по отношению к u, в третьем выяснилось значение n.

Брио и Буке разобрали также вопрос о принадлежности монодромного интеграла к одной из трех названных выше категорий, в зависимости от характера корней как уравнения (7.12), так и корней уравнения, полученного из последнего подстановкой $v=\frac{1}{u}$. Такими интегралами могли быть функции двоякопериодические, рациональные или просто периодические.

§ 3. Теорема Эрмита. Дальнейшие исследования уравнения Брио и Буке

После работ Брио и Буке уравнение (7.11) было предметом исследований многих ученых. Существенное значение здесь имела известная теорема Эрмита относительно жанра этого уравнения. Доказательство ее было приведено в литографированном курсе Эрмита (часть II) политехнической школы в 1873 г.[1] Из нее следовало: если интеграл уравнения $f(u', u)=0$ есть однозначная функция, то жанр его необходимо равен нулю или единице. Отсюда легко установить, что при данных условиях интеграл уравнения есть либо рациональная функция, либо рационально выражается через показательные или эллиптические функции. Нетрудно теперь заметить, что исследования Брио и Буке уравнения (7.11) и установленные ими условия касались уравнений с неподвижными критическими точками. Отметим,

[1] См., например, в [16. 3, 112; 235. 17, 61].

что если жанр уравнения (7.11) или (7.12) равен нулю, то при помощи рациональных преобразований оно приводится к уравнению Риккати (и притом с постоянными коэффициентами), интеграл которого есть рациональная функция от z или от $e^{\alpha z}$, а в случае жанра единица интеграл его можно выразить рационально через эллиптические функции.

Шарль Эрмит (1822—1901).

Из теоремы Эрмита можно получить весьма важное заключение о том, что теоремой сложения обладают только рациональные функции от z или $e^{\alpha z}$ и эллиптические функции [16.3, 113].

Дальнейшие применения метода Эрмита к отдельному виду уравнения (7.11), с усовершенствованием некоторых вычислений, предложил Фукс в 1881 г. Более подробно исследование уравнения вида (7.11) для случая, когда интеграл его выражается алгебраическими или просто периодическими функциями, провел Хансен в том же году.

Ученик Фукса, рано погибший молодой талантливый математик из Данцига Вальтер Рашке, дополняя работы предшественников и опираясь на идеи Эрмита и Фукса, добился весьма существенных результатов в своей диссертации 1883 г. Исходя из алгебраического уравнения между u и v, которые выражались с помощью параметра x и квадратного корня из целой функции по x не выше четвертой степени, находятся условия, что это уравнение имеет однозначный интеграл при $v=\frac{du}{dz}$. Этим самым обобщалась указанная выше работа Фукса. Следуя этому пути, Рашке вывел формы дифференциальных уравнений с однозначными интегралами в соответствии с результатами Брио и Буке. Опираясь затем на известные теоремы теории алгебраических функций, он установил, что упомянутые выше формы охватывают все виды тех дифференциальных уравнений, которые обладают однозначными интегралами. Он подробно исследовал однозначность интегралов также отдельных видов уравнений данного класса и среди них, едва ли не впервые, уравнение четвертой степени.

Исходя из исследований Брио и Буке, результатов Фукса, Эрмита, Пикара, Гурса доказал в 1884 г. интересную теорему об однозначности общего интеграла линейного дифференциального уравнения третьего порядка с рациональными коэффициентами и регулярными интегралами. Таким образом, каждому типу,

установленному Брио и Буке, ставился в соответствие определенный класс дифференциальных уравнений, которые интегрировались через однозначные двоякопериодические функции первого или второго рода. Это уравнения как второго, так и третьего порядка, среди которых особое внимание уделено уравнению, являющемуся некоторым обобщением уравнения Ламе.

Уточнение, в смысле строгости, относительно области моногенности функции u для уравнения (7.11) и рассмотрение случая, когда функция u неоднозначна, иллюстрирующегося многими примерами, содержится в большей статье Фрагмана, опубликованной в 1891 г.

Проблема определения алгебраическим способом условий, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения (7.12), имеющего интегралом эллиптическую функцию, решалась в диссертации Янке в 1889 г. При этом другим способом было получено условие (1) Брио и Буке и ряд новых соотношений. Затем он же занимался определением условий того, чтобы уравнение (7.12) имело интегралами рациональные функции. Янке исходил из предположения, что рациональная функция y определена дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = K(y) = g_0 y^4 + g_1 y^3 + \ldots + g_4 \tag{7.13}$$

и находится с функцией u в соотношении $\frac{du}{dz} = V(u) + yW(u)$, где V и W — рациональные функции. Доказательство опирается на результаты предыдущей работы и дополняет ее.

Интересное обобщение проблемы Брио и Буке, поставленной несколько в ином виде, было предложено Пикаром [235.17, гл. IV, § II). Исходя из уравнения $f(u, u')=0$, он записывает $\int^{(u, u')} \frac{du}{u'} = z$, где слева — абелев интеграл относительно кривой f, и рассматривает случай, где предыдущее обращение дано для u и u' — однозначных функций от z.

Итак, можно некоторым весьма общим способом взять алгебраическую кривую $f(x, y) = 0$ и требуется, если можно, найти такой подходящий абелев интеграл $\int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} R(x, y)\, dx$, который дает уравнение $\int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} R(x, y)\, dx = u^{(x_0, y_0)}$ для x и y, однозначных функций от u. Так, поставленный вопрос Пикар обобщает следующим образом. Рассматриваются выражения вида

$$u = \int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} \lambda(x, y)\, dx} dx, \tag{7.14}$$

где $\lambda(x, y)$ — рациональная функция от переменных x, y, связанных соотношением $f(x, y)=0$, и предполагается, что функция u имеет на поверхности Римана полюсы или логарифмические бесконечности таким образом, что особенности u имеют ту же точно природу, что и абелевы интегралы, связанные с кривой $f(x, y)=0$.

Надо было исследовать, в каком случае обращение выражения (7.14), при любых начальных условиях, дает для x и y однозначные функции от u и какова будет природа этих однозначных функций. В результате Пикар пришел к заключению, что кривая f необходимо должна быть жанра нуль или единица, а однозначные функции от u приводятся к двоякопериодическим функциям или их вырождениям. Этот вопрос впервые был рассмотрен Пикаром в мемуаре [235.9] 1889 г., отмеченном премией Парижской академии наук.

§ 4. Биномиальное уравнение. Результаты Брио и Буке и их дополнение

Рассмотренные раньше общие принципы Брио и Буке применили к детальному исследованию уравнений вида

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u), \tag{7.15}$$

где $f(u)$ — целый полином от u степени не больше $2m$. Уравнения такого вида получили наименование биномиальных. Как известно [16.3, 114], к уравнению такого вида приводятся уравнения формы $(u')^m = \frac{P(u)}{Q(u)}$, в интегралах которых отсутствуют подвижные критические точки. В дальнейшем изложении мы будем иметь в виду работу [112.8], где впервые вопрос изложен наиболее полно. Уравнение (7.15) записывается более подробно в форме

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{p}{n}}(u-b)^{\frac{p'}{n'}}\ldots, \tag{7.16}$$

где показатели степеней преобразованы к наиболее простому виду. Для монодромности интеграла показатели, меньшие единицы, должны иметь форму $1-\frac{1}{p}$; каждый из них равен по крайней мере $\frac{1}{2}$. Преобразованное уравнение $\left(u=\frac{1}{v}\right)$ будет иметь вид

$$\frac{dv}{dz} = -gv^{2-\frac{p}{n}-\frac{p'}{n'}\cdots}(1-av)^{\frac{p}{n}}(1-bv)^{\frac{p'}{n'}}\ldots \tag{7.17}$$

и сумма дробных показателей не должна превосходить 2. Показатель v будет положителен; если он меньше единицы, то должен быть нулем или вида $1-\frac{1}{n_1}$.

Сначала рассматривается простейший случай, когда правая часть уравнения (7.16) содержит только один множитель $(u-a)^{\frac{p}{n}}$. Если показатель $\frac{p}{n}$ меньше единицы, он должен быть вида $1-\frac{1}{n}$. Показатель v в преобразованном уравнении (7.17) будет равен $1+\frac{1}{n}$. Таким образом, интеграл есть рациональная функция, обращающаяся в бесконечность для $z=\infty$. Следовательно, это целая функция степени n. Если показатель $\frac{p}{n}$ больше единицы, то для v он станет меньше единицы и примет форму $1-\frac{1}{n}$; пусть $\frac{p}{n}=1+\frac{1}{n}$. Получим рациональную функцию, стремящуюся к a, когда z неограниченно возрастает. Если показатель $\frac{p}{n}$ равен единице, то же будем иметь и для v, и в результате получается монодромный интеграл и просто периодический.

Далее рассматривается случай, когда правая часть уравнения (7.16) содержит два множителя. Если показатель первого $\frac{p}{n}$ больше единицы, то будет лишь два сомножителя [1] и показатель второй должен быть меньше единицы и вида $1-\frac{1}{n_1}$. Учитывая допустимую величину показателя v и арифметические соображения, для этого случая авторы получают уравнение вида

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)^{\frac{n+1}{n}}(u-b)^{\frac{n-1}{n}}, \qquad \text{(A)}$$

допускающее рациональный интеграл при любом n.

Если первый показатель $\frac{p}{n}$ равен единице, то справа (7.16) может быть не больше трех сомножителей. При этом показатели двух других достаточно взять равными $\frac{1}{2}$. Если сомножителей два, то показатель второго может быть равен единице или $\frac{1}{2}$. Таким образом, этому случаю будет соответствовать три конкретных вида уравнения (7.16), которым удовлетворяют периодические интегралы

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)\sqrt{(u-b)(u-c)}; \qquad \text{(B)}$$

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)(u-b); \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)\sqrt{u-b}. \qquad \text{(D)}$$

[1] В противном случае, так как показатели остальных не меньше $\frac{1}{2}$, сумма показателей превзойдет 2.

Затем исследуется случай, когда показатели первого и остальных сомножителей правой части (7.16) меньше единицы. Таких сомножителей может быть четыре и три. В результате допустимых комбинаций показателей получается

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) \qquad (I)$$

и еще четыре вида уравнений, которые допускают как интегралы функции — монодромные [1], двоякопериодические.

Проверка различных возможных комбинаций двух сомножителей в правой части уравнения (7.16) дает одно уравнение с монодромным просто периодическим интегралом

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(u-a)(u-b)} \qquad (E)$$

и еще шесть уравнений, обладающих как интегралами двоякопериодическими функциями, например [2]

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = G(u-a)^3(u-b)^4. \qquad (VI)$$

Итак, среди рассмотренных таким образом видов находилось 11 уравнений, приводящих, как сказали авторы, к монодромным двоякопериодическим функциям. Первые два из них были давно известны и хорошо изучены в связи с эллиптическими функциями в ряде блестящих работ Абеля, Якоби и в трудах других математиков.

Полученные Брио и Буке типы функций отличались, по их замечанию, друг от друга расположением и характером бесконечностей. Они также отметили, что подходящими преобразованиями можно привести рассмотренные 11 типов двоякопериодических функций ко второму (II), и дают конкретные указания по этой операции.

Для представления об эволюции идей у самих Брио и Буке интересно сравнить выше приведенные типы уравнений (7.16) с однозначными (мероморфными) интегралами, с теми, которые они представили в более поздней работе [112.10]. Говоря здесь об установлении конкретных видов уравнений рассмотренного класса, они прежде всего предполагают, что каждый из показателей сомножителей правой части уравнения (7.16) приведен к простейшей форме и что сумма их равна двум [3]. В соответствии с этим добавился один вид уравнений с рациональным интегра-

---

[1] Доказательство однозначности интеграла уравнения (1) во всей плоскости комплексного переменного z см. в курсе Пикара [235.17, гл. 12, § 3].

[2] Нумерация уравнений приведена по оригиналу [112.8].

[3] Как известно если n — степень многочлена $f(u)$ в (7.15) меньше $2m$, то после соответственной замены [16.3, 115] его можно привести к многочлену степени $2m$.

Георг Валленберг (1864—1924).

лом

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^2. \qquad (F)$$

Но в случае интегралов просто периодических соответственно опущены типы (D) и (E).

Уравнения с двоякопериодическими интегралами были сведены к четырем типам: I, V, IV, III. Остальные рассматривались как производные, которые получались с помощью некоторого преобразования и при специальном расположении одной из критических точек.

Установленные здесь восемь типов уравнений с однозначными интегралами и перешли затем в учебную литературу (см. в [16.3, 119]).

Тот же метод был применен Брио и Буке и для исследования уравнения третьей степени вида

$$U^3 + PU^2 + Q = 0,$$

где $U = \frac{du}{dz}$, P, Q — полиномы по u, первый — не выше второй степени, второй — шестой степени. Это уравнение заключало все монодромные двоякопериодические функции третьей степени. Серия интересно подобранных примеров дополняла теорию.

В монографии [112.10, 405] было также довольно подробно исследовано трехчленное уравнение вида

$$U^m + f_1(u)\,U^{m-1} + f_m(u) = 0$$

относительно наличия однозначных и двоякопериодических интегралов.

В заключение отметим, что развитые общие методы Брио и Буке стремились применить к конкретному изучению одного из важнейших тогда классов двоякопериодических функций. Они нашли основные типы этих функций благодаря исследованию дифференциальных уравнений и значительно упростили сам процесс изучения. Этим самым были заложены основы нового метода исследований, применяемого затем и к другим классам функций.

Работы Брио и Буке, вскоре последовавшие статьи Фукса, Пуанкаре способствовали исследованиям молодежи в новой теории. Так, дальнейшее изучение биномиальных уравнений проводили Нетто, Янке, Валленберг и др. Опираясь на свои предыдущие результаты, о которых мы упоминали выше (§ 3), бино-

миальные уравнения третьей степени вида

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = p^2(u), \tag{7.18}$$

где $p(u)$ — многочлен третьей степени, исследовал Янке в [183]. Он нашел формулы преобразования, позволяющие свести решение вопроса для уравнения (7.18), обладающего интегралом в форме эллиптической функции, к рассмотрению уравнения вида (7.15) при $m=2$ и где $f(u)$ — полином не выше четвертой степени. Некоторое обобщение результатов Брио и Буке получил в 1883 г. Кличковский, изучавший общую форму биномиальных дифференциальных уравнений (см. об этом в [183]).

Весьма серьезным вкладом в развитие учения об уравнениях с неподвижными критическими точками и, в частности, биномиальных была диссертация Валленберга [272.1]. Здесь нашла приложение, уточнение и ряд дополнений в данных конкретных случаях известная работа Фукса [153.10] об уравнениях с неподвижными точками разветвления. Решаемые автором задачи вообще шире проблемы Брио и Буке и в этой связи о данной работе у нас шла речь в гл. 6. В интересующем нас аспекте представляет интерес прежде всего первая часть, где исследовалось биномиальное уравнение Фукса вида $y'^m=R(z, y)$, где R — многочлен степени не выше $2m$ по y и с коэффициентами, зависимыми от z, и такие, которые к нему приводились. В трех следующих частях изучались такие уравнения Фукса, в которые первая производная входит в степени не выше 3 и особенно те, которые имели жанр 0 или 1 и, следовательно, интегрировались алгебраически. Валленберг установил максимальное число рода дифференциальных уравнений третьей степени, а также нашел переход от условий Фукса к условным уравнениям для коэффициентов и получил ряд важных соотношений для их интегрирования. Интеграция уравнения третьей степени в случае отсутствия члена с квадратом производной выполняется алгебраически, что показано различными методами в четвертой части работы. Жанр этого уравнения оказался не больше единицы. Пятая часть содержала ряд важных общих замечаний, из которых отметим установление условий алгебраичности интеграла; исследование вопроса о связи интегрирования рассматриваемых уравнений с решением некоторого линейного уравнения второго порядка.

Глава VIII. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Постановка задачи и первые подходы к ее решению. Геометрическая теория в работах Пикара. Уравнения с однозначными интегралами

В предыдущих главах мы видели, насколько усложняется вопрос при исследовании алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка, принадлежащих более общим классам. И все же общая задача их исследования существенно была облегчена тем, что в интегралах этих уравнений так называемого обычного типа отсутствовали, по известной теореме Пенлеве, подвижные существенно особые точки. Однако такого заключения нельзя было сделать уже относительно уравнений второго порядка. Давно известны такие их типы, весьма простые по виду, интегралы которых обладали подвижными особыми точками (критическими или нет). Более того, были доказаны теоремы о необходимых условиях присутствия трансцендентных особенностей в интегралах уравнений второго порядка. Таким образом, развиваемые методы для исследования уравнений первого порядка не были столь эффективны и не могли просто и непосредственно распространяться на уравнения второго порядка и выше.

Тем не менее исторически вопрос развивался таким образом, (и в этом его особенность), что некоторые общие заключения относительно характера интегралов алгебраических дифференциальных уравнений второго и высших порядков, были получены раньше, чем сформировалась и завершилась общая теория исследования уравнений первого порядка. В развитии изучаемой теории особенно бурным и плодотворным было последнее десятилетие прошлого века, когда заседания академий и страницы многих известных журналов, особенно часто озарялись вспышками новых глубоких результатов. Как основные первооткрыватели здесь выступали три замечательных математика той эпохи — Пикар, Пуанкаре, Пенлеве.

Отправными точками первых исследований в данном направлении были новые результаты в теории алгебраических функций, которой принадлежало много работ молодого Пикара. Так,

уже в заметках 1880 г. он рассматривает две однозначные функции u и v переменного z, связанные неприводимым алгебраическим уравнением

$$F(u, v) = 0 \tag{8.1}$$

степени m, и решает вопрос об отыскании возможных видов этих функций в зависимости от жанра уравнения (8.1). Если оно выражает кривую жанра нуль, а функции u и v — однозначные и могут иметь как особые точки лишь полюсы, то $u=\varphi[R(z)]$, $v=\varphi_1[R(z)]$, где φ и φ_1 — рациональные функции и F — однозначная. В случае жанра 1 функции u и v можно рассматривать как двоякопериодические, с теми же периодами, от параметра z. Таким образом, в обоих случаях они выражались и притом единственным способом через однозначные функции z, имеющие особыми точками лишь полюсы.

Пикар рассмотрел применение полученных результатов как к биномиальному уравнению, так и к уравнению вида

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0, \tag{8.2}$$

где F — полином. В столь общей форме здесь впервые ставился вопрос об отыскании признаков существования однозначных интегралов данного уравнения. Напомним, что известные работы Фукса и Пуанкаре по соответствующей проблеме для уравнения первого порядка появились через четыре года. Для биномиальных уравнений первого порядка она поставлена и решена Брио и Буке.

Опираясь на предыдущий результат и проведя детальный анализ различных многих случаев, Пикар пришел к заключению, что уравнение (8.2) (жанра 0 или 1) может допускать однозначные интегралы (обладавшие особыми точками не сложнее, чем полюсами) лишь в форме функций, рациональных от z, от e^{az} (a — константа), или функций двоякопериодических. Специальную природу этих интегралов предстояло еще изучить.

К этому времени была уже известна теорема Шварца о том, что кривые жанра 0 и 1 есть единственные, которые обладают свойством переходить в себя через семейство рациональных однозначно обратимых преобразований. В 1886 г. Пикар аналогично доказал, что такие алгебраические поверхности, которые переходят в себя через зависимые от двух параметров рациональные однозначно обратимые подстановки, есть рода нуль или единица. Если же подстановка обладала лишь одним параметром, то род (жанр) поверхности мог быть любым. Если жанр поверхности был больше единицы, то вообще имелось только конечное число подстановок, которые переводили поверхность в себя. Если же они содержали один параметр, то рассмотрение сводилось к первому случаю.

Полученный результат был применен Пикаром к исследованию уравнений вида

$$f(y, y' y'') = 0 \tag{8.3}$$

(где f — полином) относительно однозначности его общего интеграла, обладающего существенно особой точкой только на бесконечности. При этом получалось, что род уравнения (рассматриваемого как уравнение поверхности) должен быть равен нулю или единице. Также был решен обратный вопрос о возможности интегрирования этих уравнений с помощью абелевых функций для случая, что жанр поверхности был равен единице.

Этот же вопрос одновременно изучал и Пуанкаре. Исходя из теоретико-групповых представлений, он доказал важную теорему о том, что три функции x, y, z от двух переменных t, u, обладающие теоремой сложения, однозначны во всей плоскости. Отсюда легко следовало доказательство вышеуказанных теорем Пикара.

Развитые методы Пикар применил затем к исследованию уравнения вида

$$f(y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0 \tag{8.4}$$

(f — полином), характерного отсутствием явно аргумента x и при предположении, что общий интеграл этого уравнения есть однозначная функция от x, единственная существенно особая точка которой лежит на бесконечности. Уравнение $f=0$ преобразуется затем в себя через однозначно обратимую подстановку, которая содержит один произвольный параметр. В случае $m=1$ это преобразование — бирационально, в общем случае — нет. Пикар установил также, что общий интеграл Y уравнения (8.4) может быть представлен с помощью абелевых функций или их вырождений, ограничившись при выводе случаем $m=3$. Такое представление всегда возможно, если общий интеграл Y может быть выражен с помощью частного интеграла y в форме $Y=R(y, y', \ldots, y^{(m)}, a_1, \ldots, a_m)$, где R — рациональная функция и $a_i (i=1, 2, \ldots m)$ — произвольные константы.

Важное значение в теории функций имела публикация мемуара Пикара [235.9], премированного большим призом Парижской академии по математическим наукам за 1888 год. Теория алгебраических функций двух независимых переменных к тому времени была уже объектом важных работ Нетера и других ученых. Но большой интерес представляла и новая проблема, изученная здесь Пикаром, о рассмотрении некоторых трансцендентных выражений, связанных с алгебраическими кривыми. Этими трансцендентными были интегралы от рациональных функций координат x и y, связанных соотношением, которое определяла кривая $f(x, y)=0$. Раньше подобный вопрос трактовался Нетером относительно двойных интегралов. Пикар же распространяет точку зрения трансцендентных на алгебраические поверхности другим образом, рассматривая интегралы от

полных дифференциалов вида $\int^{x,y} P dx + Q dy$, где P, Q — рациональные функции по x, y, z, связанные соотношением, которое определяет поверхность $f(x, y, z)=0$. Пикар и занялся прежде всего изучением этих интегралов, разделив их на три вида и уделив особое внимание интегралам второго вида. Он прежде всего рассмотрел так называемые циклы алгебраических поверхностей (двух видов), имеющих важное значение, как и теория циклов при изучении алгебраических кривых. Употребленные здесь методы позволили дополнить теорию интегралов второго и третьего видов. Была, например, доказана важная теорема о том, что число различных интегралов второго вида равно числу их периодов. Бирациональным преобразованиям поверхностей в себя была посвящена третья глава работы, которая могла быть рассматриваема как применение общих результатов автора к интегралам от полных дифференциалов. Изучение этих преобразований было весьма различным в зависимости от жанра поверхности, особенно от того, больше он единицы или нет. Особое внимание уделено изучению интересного класса поверхностей, которые действительно аналогичны плоским кривым жанра нуль и единица.

Особый интерес для нашей теории представляла пятая глава, где давались применения установленных раньше результатов к изучению некоторых дифференциальных уравнений. Сначала рассматривается уравнение (8.3) в предположении, что его общий интеграл есть однозначная функция от x, имеющая существенно особую точку только на бесконечности. Построение соответственной теории сталкивается здесь с существенными трудностями, смысл которых состоит в том, что, как было показано в третьей главе, алгебраическая поверхность может допускать однозначное преобразование в себя, которое не является бирациональным, тогда как для алгебраических кривых, напротив, такое преобразование есть необходимо бирациональное. В связи с этим сначала рассматривается частный случай, когда биоднозначное преобразование поверхности f (8.3) будет бирациональным. В этом случае все исследование связывается с изучением соотношений, полученных в третьей главе. В результате рассмотрения множества случаев, в зависимости от характера поверхности f и других, автор пришел к выводу, что в этом случае общий интеграл будет выражаться через известные трансцендентные.

Рассмотрение общего случая представляло, как говорил Пикар, пункт в высшей степени деликатный и трудный. Уравнение (8.3) приводится к виду

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{8.5}$$

Здесь для изучения p как функции от y можно применять принципы, установленные Брио и Буке. Для исключения первой се-

рии трудностей автор предположил, что при изучении особенностей этого уравнения его можно свести к простому и уже изученному Брио и Буке виду (5.6).

Опираясь на некоторые допущения «для большинства случаев», он полагает возможным обсудить уравнение (8,5) и возвратиться к начальному уравнению, т. е. к $\frac{dy}{dx} = p(y)$. Здесь встречаются большие трудности при установлении, является ли функция y, определенная данным уравнением, однозначной от x. Имеется и ряд других затруднений, которые нелегко устранить, и Пикар ограничивается изучением интегралов уравнения (8.3), которые он называет однозначными по виду [1].

Рассматривая специально случай уравнения

$$y'' = R(y, y'), \tag{8.6}$$

где функция R — рациональна по y и y', Пикар получил лишь достаточные условия, чтобы интеграл $y(x)$ не имел ни критических алгебраических, ни критических трансцендентных точек некоторого частного вида. Он рассматривает также уравнение более общего вида

$$f(x, y, y', y'') = 0, \tag{8.7}$$

где f — полином по y, y', y'', в предположении неподвижности критических точек общего интеграла, стремясь к обобщению известной проблемы Фукса и Пуанкаре, поставленной для уравнений первого порядка. Здесь играло важную роль некоторое биоднозначное преобразование, поэтому сначала рассматривался случай, когда оно будет бирациональным.

В дальнейшем Пикар опубликовал еще несколько статей, где возвращался к уточнениям и дополнениям рассмотренного выше круга вопросов, но не смог получить существенно интересных результатов. Его же верные заключения относительно простейших видов уравнений вели к известным уже результатам. Видно было, что применяемые им основные методы, весьма эффективные для уравнений первого порядка, не были такими в новой области, хотя он и получил ряд интересных заключений. Относительно работ Пикара по этому циклу несколько позднее Пенлеве справедливо отмечал [228.23], что усилия знаменитого геометра, как и усилия всех тех, кто шел, следуя за ним, сталкивались с трудностями, которые не представлялись в случае (уравнений — *В. Д.*) первого порядка: могут существовать существенно особые подвижные точки интегралов. Таким образом, распространение условий Фукса на второй порядок могло привести к уравнениям, обладающим критическими подвижными трансцендентными точками.

---

[1] Нестрогость некоторых положений Пикара в этой части работы позже была отмечена Пенлеве [228. 23, 9].

Работы Пикара вызвали ряд последующих исследований других авторов. Среди них назовем прежде всего Валленберга. В первой части большой статьи [272.4] он исследовал на предмет однозначности интеграла однородное дифференциальное уравнение вида (8.3) в том случае, когда подстановка $w=y':y$ вела к уравнению первого порядка вида $g(w, w')=0$ без особых неподвижных точек на конечном расстоянии. Тогда подвижные особые точки уравнения (8.3) ищутся среди полюсов функции w. А условие того, что они не будут представлять существенно особые точки интеграла уравнения (8.3), состоит в том, что в разложении $w'=\frac{y''}{y'}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2$ по убывающим степеням $w=\frac{y'}{y}$ показатель высшей степени w, если он больше единицы, должен быть больше или равен. 2. Условия же (необходимые и достаточные) отсутствия в интеграле уравнения (8.3) точек разветвления, т. е. его однозначности, получаются полностью из указанных выше результатов исследований Брио и Буке относительно уравнения $g(w', w)=0$. Найденный метод во второй части применен к исследованию того же вопроса относительно дифференциального уравнения (8.7), где f — однородный многочлен m-го измерения по y, y', y'', с коэффициентами — аналитическими функциями по x.

В следующей статье Валленберг установил, что общий интеграл уравнения (8.2) может быть однозначной функцией только в том случае, когда функция F будет линейной по второй производной. Затем несколько иным путем он подошел к уже известным результатам Пикара о жанре уравнения (8.2) и т. д., и дополнил их, а также выписал четыре основных типа биномиальных уравнений второго порядка с однозначными частными интегралами. Полученные результаты продвигали решение вопроса вперед, но все же в несложных и весьма частных случаях.

Исходя из исследований Пикара, была установлена также интегрируемость отдельных видов уравнений

$$y''=y'(ay+b)+Ay^3+By^2+Cy+D \tag{8.8}$$

в работах Франсена [149] и Миттаг-Леффлера [218.3]. Полученные в результате интегрирования функции есть известные однозначные. Отметим, что поводом к вышеуказанным работам Миттаг-Леффлера и Франсена послужило письмо Пикара Миттаг-Леффлеру в мае 1893 г. Автор подчеркивал здесь глубокое различие в подходе к изучению некоторых проблем относительно уравнений первого порядка и более высокого. Это отличие состоит прежде всего в том, что в уравнениях первого порядка (целых, алгебраических) существенно особые точки интегралов — неподвижны. Но эта теорема не распространяется на уравнения высшего порядка, и для алгебраического дифференциального уравнения (8.7) существенно особые точки будут в общем подвижны, что Пикар показывает на примере. Если для

Г. Миттаг-Леффлер (1846—1927).

уравнений первого порядка были известны условия неподвижности критических алгебраических точек, то совсем иначе обстояло дело с уравнениями высшего порядка. В этом случае можно еще было легко узнать, что произвольная точка не может быть критической алгебраической для интеграла, но из этого не следовало с необходимостью, что общий интеграл будет иметь неподвижные критические точки, так как он мог иметь подвижные существенные особенности. Пикар высказал здесь также предположение, что необходимые и достаточные условия для реальной однозначности общего интеграла (в отличие от введенного им понятия «общего интеграла по виду») будут в общем иметь трансцендентную природу. Свои работы в этом отношении он не считал особенно ободрительными и писал, что «мало вероятно, что уравнения высшего порядка с критическими неподвижными точками могут повести к изучению новых трансцендентных, расширяя в этом смысле линейные уравнения» [235. 13, 300].

В этой же заметке Пикар рассматривал уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + Qy^3 + Ry^2 + Sy + T = 0, \qquad (8.9)$$

коэффициенты которого — однозначные функции по x (Q отлично от тождественного нуля). Чтобы установить «однозначность по виду» общего интеграла уравнения (8.9), Пикар искал условия того, чтобы интеграл $y(x)$ обладал подвижными полюсами, используя, как он сам указал, идею С. В. Ковалевской, положенную ею в основу исследований интегралов движения твердого тела около неподвижной точки в работах [29.2—3.—4]. Как отметил в дальнейшем Пенлеве [328.23], найденные условия (весьма сложного вида) оказались достаточными для отсутствия подвижных критических точек общего интеграла уравнения (8.9).

В свете изложенного выясняется более четко значение указанных только что работ С. В. Ковалевской, особенно первой (1889 г.), непосредственно для нашей теории. Отметим, что интегрирование дифференциальных уравнений, интегралы которых имеют в конечной части плоскости из особых точек только подвижные полюсы, вполне возможно при некоторых условиях [16.4, гл. II]. Поэтому особый интерес представляли те случаи, когда интегралы уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки имели вышеуказанный характер. При

этом можно было получить решение задачи, которая распадалась на две части: а) установление тех случаев, когда интегралы уравнений движения имеют подвижные полюсы; б) дать доказательство, что в таких случаях интегралы не имеют других особых точек, кроме подвижных (некритических) полюсов при любом конечном t, т. е. во все время движения. Обе задачи С. В. Ковалевская решила. Достаточность найденных ею условий была очевидна из того, что полученные уравнения удалось проинтегрировать и их интегралы в действительности оказались без подвижных критических точек. Указанные исследования С. В. Ковалевской являются классическим примером применения методов аналитической теории дифференциальных уравнений к решению задач механики. При этом она быстро и творчески использовала самые глубокие идеи относительно однозначности интегралов уравнений общего вида, которые в те годы только стали разрабатываться. А полученный ею результат был использован для решения тогда еще чисто теоретического вопроса. В дополнение к известным Ковалевская нашла еще один случай однозначных интегралов изучаемой задачи. В связи с неполнотой метода Ковалевской, предполагавшего в интегралах существование полюсов (а возможны были случаи, когда интегралы, не имея полюсов, могли обладать, например, существенно особыми точками или на конечной части комплексной плоскости вообще не иметь особых точек), для решения ее задачи был предложен так называемый метод уравнений в вариациях А. М. Ляпунова [43. 3], свободный от подобных возражений. В дальнейшем для решения задачи С. В. Ковалевской применялся метод введения в уравнения малого параметра [16.4 гл. II, § 3].

В то же время (конец XIX в.), несмотря на ряд неудач, Пикар предпринимал весьма энергичные попытки выделить класс уравнения второго порядка с неподвижными критическими точками в серии работ о новых трансцендентных. Но, несмотря на многочисленные, глубокие исследования, с весьма остроумными приемами, решение общего вопроса оставалось открытым, и его положение было уточнено Пикаром в следующих словах: отдельные уравнения, о которых можно было утверждать, что их критические точки были неподвижны, были уравнения интегрируемые, и эта интегрируемость также указывала с очевидностью на неподвижность критических точек [228.23, 111].

Однако в феврале 1893 г. появилась весьма важная заметка Пенлеве [228.8], открывшая новую главу в исследованиях однозначности интегралов дифференциальных уравнений второго порядка. Здесь он различал особые неалгебраические точки: трансцендентные и существенно особые. При рассмотрении уравнения

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{8.10}$$

где F — алгебраическая функция по всем переменным, отмечалось, что можно доказать, и этот факт весьма неожиданный, что для уравнения вида (8.10), взятого случайно, не существует существенно особых точек. В дальнейшем уравнения этого вида Пенлеве разделил на два класса — общий и особый. К последнему он относил те уравнения, в интегралах которых могли присутствовать подвижные существенно особые точки. Для выявления их важное значение имела теорема (А), сообщенная в этой заметке. Ее условия были уточнены в сообщении [228.9], где рассматривалось то же уравнение (8.10). Здесь автор писал: «Условия того, чтобы уравнение принадлежало к особому классу, следующие: 1. величины y'' есть бесконечные или переставляющиеся при любом y', для величин x, y, удовлетворяющих соотношение $S_1(x, y)=0$, куда входит y; 2. уравнение (8.10), где x рассматривается как функция, допускает при любом x_0 интеграл $x\equiv x_0$. Наконец, пусть x, y — пара величин, которые обращают в нуль S_1 (или пусть $y'=\infty$), тогда невозможно заменой переменных $y_1=\varphi(x, y, y')$, алгебраической в окрестности рассматриваемых величин, выразить уравнение регулярно в соответствующей области».

Возвращаясь к [228.8], отметим, что уравнение (8.10) можно заменить системой

$$\frac{dx}{P(x, y, z, t)} = \frac{dy}{Q(x, y, z, t)} = \frac{dz}{R(x, y, z, t)}; \quad F(x, y, z, t) = 0, \quad (8.11)$$

где P, Q, R — полиномы по x, y, z, t. В предположении, что над yz производится наиболее общее гомографическое преобразование с двумя переменными, из теоремы (А) получалась теорема (А′) о том, при каких условиях интегралы $y(x)$, $z(x)$ уравнений (8.11) представляли бы существенно особые подвижные точки.

Из этих теорем вытекало важное заключение о том, что ни в каком случае интеграл $y(x)$, однозначный или с n значениями внутри некоторой области, не представлял в этой области особой линии. Но, как следовало из дальнейших исследований Фату, Зоретти, а позже В. В. Голубева, вопрос оказался значительно сложнее, чем можно было ожидать в 90-е годы XIX века, и доказательство Пенлеве, как отметил В. В. Голубев [16.5, 136], не было корректным. Условия I и II теоремы (А) или (А′) являются достаточными для существования подвижных существенно особых точек. Однако Пенлеве указывает, что иногда эти условия являются также и необходимыми, а именно тогда, когда они выполняются оба, по его выражению, intrinsèquement, т. е. внутренним образом.

Таким образом, те уравнения (8.10), которые удовлетворяют внутренним образом условиям I и II, принадлежат особому классу.

Если предположить, что интеграл принимает конечное число значений около подвижных критических точек, то, в случае при-

надлежности уравнения (8.10) к общему классу, существенно особые точки его интеграла $y(x)$ неподвижны. Тогда, как было показано раньше, уравнение либо интегрируется алгебраически, либо в квадратурах или приводится к линейному уравнению третьего порядка. Если же уравнение (8.10) принадлежит особому классу, то его интеграл $y(x)$ может не иметь подвижных существенно особых точек, но является в каждом случае трансцендентной функцией констант y_0, y_0'. Говоря о применимости этого метода к уравнениям более высокого порядка, Пенлеве здесь же замечает, что интегралы уравнений третьего порядка могут быть однозначными и представлять особые подвижные линии. В таком случае интеграл необходимо неопределен в окрестности этих линий.

Вслед за сообщением Пенлеве появилась заметка Пикара [235.12], где он указал на большое значение работы Пенлеве, отметив, что в упоминавшемся ранее письме к Миттаг-Леффлеру он также различал точки трансцендентные и существенно особые. «Не углубляя вопроса — писал он дальше,— я предполагал, что алгебраические дифференциальные уравнения второго порядка имеют в общем существенно особые подвижные точки: это предположение не было верным. Как видно из статьи Пенлеве, имеется единственно особый класс уравнений, которые могут иметь подвижные существенные особенности. Действительно, этот класс содержит все уравнения, которые были объектом моих исследований, то есть уравнения, интегралы которых, согласно моей терминологии, являются по виду однозначными и те, которые были по виду уравнениями с критическими неподвижными точками. Я надеюсь, что полезные исследования Пенлеве внесут скоро некоторую ясность на особый класс уравнений, столь важных для определения новых трансцендентных». Как увидим далее, эта надежда Пикара сбылась в скором времени.

§ 2. Уравнения с неподвижными критическими точками. Метод исследования Пенлеве

Активная научная деятельность Пенлеве началась в 1887 г. публикацией докторской диссертации и получением весьма существенных результатов по уравнениям первого порядка. В течение ближайших пяти лет им была в основном построена теория уравнений первого порядка, о чем шла речь в предыдущих главах. После нескольких заметок относительно уравнений высшего (второго) порядка с интегралами, обладающими конечным числом ветвей, он продолжил разработку теории уравнений второго порядка с однозначными интегралами, которая в основных чертах была создана в 1893—1895 гг. В последующие 10—12 лет (а из них особенно в первое пятилетие) шла доработка, уточнение и весьма существенное дополнение ранее полученных

результатов, пропаганда их среди учеников, наконец, создание первой научной школы по нелинейной аналитической теории дифференциальных уравнений в начале нашего века.

Занимаясь еще уравнениями первого порядка, Пенлеве уделил серьезное внимание рассмотрению интегралов как функций произвольных констант или начальных условий. Этому вопросу были затем посвящены третья и шестая лекция его курса [228.11]. Большое значение в теории уравнений второго порядка имел характер зависимости их общих интегралов от произвольных констант. Более того, он непосредственно определял принадлежность уравнения к одному из двух классов [1], о которых шла речь в конце предыдущего параграфа. Из определения этих классов следовал вывод [228.11, предисловие, стр. 15] о том, что интеграл некоторого уравнения E_n вида (8.10) содержит константы y_0, y_0' в форме алгебраической или трансцендентной в зависимости от того, принадлежит E_n к классу общему или к классу особому. Но в зависимости от того, как уточняет Пенлеве в [228.9, 568], что существенно особые точки будут фиксированы или подвижны, произвольные константы y_0, y_0' входят в интеграл y двумя различными способами. Они различаются по тому, можно или нет заменить их двумя константами α, β таким образом, что y станет алгебраической функцией одной из них. В первом случае можно сказать, что y есть трансцендентная функция единственной константы интегрирования. Если это так, то уравнение (8.10) приводится к уравнению первого порядка, алгебраическому по y, y' и коэффициенты которого есть функции от x, зависящие от уравнения Риккати. Отсюда следует уточнение важнейшего положения о том, что если интеграл уравнения (8.10) будет представлять новую трансцендентную, то необходимо (но недостаточно), чтобы он содержал две константы некоторым трансцендентным способом. Этим самым, с одной стороны, был установлен существенный признак, при выполнении которого можно было ожидать новых открытий, а с другой — вскрывался внутренний механизм довольно сложной зависимости констант, присущей лишь уравнениям второго порядка. Открытие этого нового качества — одна из больших научных удач Пенлеве.

Установленная таким образом классификация уравнений вида (8.10) легла в основу построения курса [228.11]. Многие положения формулировались здесь для уравнений общего класса E_n. Но автор показал, что для этих уравнений случай некоторого n приводится к случаю $n=1$. Иначе говоря, любое уравнение, интеграл которого есть алгебраическая функция двух констант, приводится алгебраически к уравнению, интеграл которого $y(x)$ имеет критические неподвижные точки и содержит

[1] Уточнение характеристики классов см. в [228.9, 567], [228.11, пред., 15].

рационально константы y_0, y_0', y_0'', связанные соотношением

$$F(y_0'', y_0', y_0, x_0) = 0. \tag{8.12}$$

Мы рассмотрим, как накоплялся этот материал в историческом аспекте. После фундаментального исследования, показавшего наличие двух названных классов, открылась, естественно, возможность приступить к более подробному изучению сначала общего, а затем особого из них. Но Пенлеве пошел иным путем — конкретного исследования более простых видов уравнений. Он рассмотрел сначала уравнение вида

$$y'' = R(y', y), \tag{8.13}$$

где R — рационально по y', алгебраично по y и не зависит явно от x, т. е. уравнение, подобное (8.6), изученному ранее Пикаром, и решил вопрос, когда это уравнение обладает однозначным интегралом. Примененный им метод позволял образовать все уравнения такого вида с указанным свойством. Пенлеве изучил также уравнение

$$y'' = R(y', y, x), \tag{8.14}$$

записав его в форме $y''=R_1(y', y, Y, x)$, $\varphi(y, Y, x)=0$, где R_1 — рациональная дробь по y', y, Y; φ — полином по y, Y, а Y выражается рационально через y, y', y''. Если при этих условиях критические точки интеграла уравнения (8.14) неподвижны, жанр $\varphi=0$ не может превзойти единицу. Но если x не входит явно в (8.14), то получается, что y и Y будут однозначными по x. Отсюда следует, что алгебраическое преобразование позволит изучать единственно уравнения вида

$$y'' = Ay'^2 + By' + C, \tag{8.15}$$

где A, B, C — рациональные функции либо от одного y, либо от y и от $\sqrt{(1-y^2)(1-B^2y^2)} \equiv \sqrt{R(y)}$. Можно показать, что если коэффициенты B, C являются нулями в исходном уравнении, то они также будут нулями и в преобразованном.

Если уравнение (8.13) считать эквивалентным уравнению первого порядка между y и y', где y' рассматривается как функция от y, то можно установить необходимые условия, чтобы $y(x)$ был однозначным. Применяя эти условия к уравнению $y''=Ay'^2$, автор приводит его к нескольким конкретным видам с однозначными интегралами. Эти результаты другим путем уже были получены Пикаром [235.9].

При переходе к уравнению $y''=Ay'^2+By'$ сначала отмечается, что A должно удовлетворять условиям предыдущего случая, и выписываются, как и для случая $y''=Ay'^2+C$, конкретные виды уравнений с однозначными интегралами. Все они интегрировались в квадратурах либо приводились к уравнению Риккати с периодическими коэффициентами.

В это же время был рассмотрен и вопрос об общем интеграле алгебраического дифференциального уравнения

$$F(y'', y', y, x) = 0, \tag{8.16}$$

принимающем данное число n значений около критической подвижной точки и зависящем алгебраически от констант y_0, y_0'.

Далее были установлены отдельные виды уравнения (8.16), обладающие интегралами с неподвижными критическими точками. При этом получен пример уравнения (66), которое не могло быть приведено каким-либо способом к комбинации уравнений первого порядка.

Исследования Пенлеве по уравнениям первого и второго порядков в скором времени были отработаны в методическом отношении, дополнены в ряде пунктов и положены в основу его курса лекций [228.11] в 1895 г., изданного несколько позже литографированным способом. Именно здесь появились впервые многие новые его результаты, а также нашли уточнение уже известные.

Из уравнений второго порядка сначала изучались те, которые принадлежали к общему классу, т. е. интегралы которых алгебраически зависят от констант. Используя важнейшие результаты Пикара в его известных исследованиях об алгебраических функциях двух переменных, особенно теоремы о бирациональных преобразованиях, которые мы упоминали, и собственные дополнения, Пенлеве удалось выяснить природу интеграла во всяком случае, когда он зависит алгебраически от постоянных. При этом установлено, что всякое уравнение E_n общего класса или эквивалентно комбинации двух уравнений первого порядка с неподвижными критическими точками, или приводится алгебраически либо к линейному уравнению, либо к гиперэллиптической системе

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = h(x)\,dx; \quad \frac{ydy}{\sqrt{R(y)}} + \frac{zdz}{\sqrt{R(z)}} = k(z)\,dx;$$

$$R \equiv a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5.$$

Для получения этих результатов Пенлеве пришлось сделать значительное отступление от темы, посвятив несколько лекций теории поверхностей, допускающих непрерывную конечную группу бирациональных преобразований. При этом значительное место уделено изучению однозначных функций, определенных обращением двух полных алгебраических дифференциалов. Известная теорема Вейерштрасса о функциях многих переменных, обладающих теоремой сложения, была строго доказана в 16 лекции (стр. 345—348). Благодаря этому можно было более ясно представить природу поверхностей S, допускающих конечную непрерывную группу бирациональных преобразований в себя. Этот вопрос раньше был предметом исследований Пикара и Пу-

анкаре. В случае справедливости теоремы Вейерштрасса эти поверхности были гиперэллиптическими или их вырождениями. Но доказательство этой теоремы Вейерштрасса, как свидетельствует Пенлеве, не было опубликовано, а первое строгое ее доказательство Пикаром и Пуанкаре не обладало достаточной полнотой. Этот пробел восполнен Пенлеве.

П. Пенлеве в молодости.

Особенности дифференциальных уравнений с неподвижными критическими точками изучены в 19-й лекции. Лекция 20 посвящена рассмотрению уравнений второго порядка с фиксированными критическими точками, интегралы которых зависят алгебраически от одной из констант. Здесь, таким образом, изучались уравнения некоторой части особого класса, интегралы которых назывались функциями полутрансцендентными. В другом случае имелась просто трансцендентная функция двух констант. В первом случае уравнение E_n было эквивалентно комбинации двух уравнений первого порядка с неподвижной критической точкой.

Итак, неприводимыми к уравнениям первого порядка будут те уравнения E_n особого класса, интегралы которых содержат две постоянные в трансцендентной форме, выбранные некоторым образом. Изучению этого класса уравнений с фиксированными критическими точками посвящалась лекция 21. Здесь прежде всего уточняется смысл понятия неприводимости. Как известно, вопросы приведения дифференциальных уравнений в конце XIX века были объектом многочисленных работ С. Ли, Кенигсбергера, Пикара, Вессиота, Драша. Согласно общей точке зрения участвующие в уравнениях переменные рассматривались симметрически, а система имелась в виду приводимой, если интегрирование приводилось к последовательной и совместной интеграции более простых систем, скомбинированных некоторым образом.

Пенлеве исходил из иной точки зрения, считая независимую переменную данной. Входящие при этом в систему переменные уже не играли симметрической роли и одна из них или некоторые из них были переменными независимыми, а остальные — функциями. Подчинив независимую переменную условию оставаться все той же, Пенлеве ввел более узкое определение неприводимости по сравнению с общепринятым в других исследованиях, но, как говорил он, здесь импонирующее. Так, рас-

сматривая уравнение третьего порядка, которому удовлетворяет модулярная функция

$$y=\varphi(x),\ \frac{y'''}{y'^3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{y''^2}{y'^4}=\frac{1}{2(y-1)^2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{41}{72}\cdot\frac{1}{y(y-1)}\equiv G(y),$$

можно взять x как функцию от y и $x(y)$ будет удовлетворять уравнению $\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=G(y)$. Если положить $x'=\frac{1}{z^2(y)}$, затем $\frac{z'}{z}=t(y)$, то t удовлетворит уравнению Риккати $\frac{dt}{dy}+t^2+\frac{1}{2}G(y)=0$. Итак, исходное уравнение приводимо квадратурами к уравнению Риккати, и модулярная функция $\varphi(x)$ приводима к трансцендентным, порожденным уравнениями первого порядка, если понятие приводимости брать в его наиболее общем смысле. Но в смысле, указанном Пенлеве, функция $y=\varphi(x)$ остается неприводимой к трансцендентным, которые порождаются уравнением первого порядка. Классификация трансцендентных функций, порожденных дифференциальными уравнениями, рассматривается по порядкам, классам и рангам. Затем изучаются свойства интегралов приводимых и неприводимых уравнений.

Среди других при этом устанавливается теорема о том, что для неприводимости уравнения E_n особого класса (алгебраического по y'', y', y, x) необходимо и достаточно, чтобы его интеграл был бы функцией трансцендентной (и не полутрансцендентной) двух констант. Автор рассматривает построение таких уравнений E_1 второго порядка с неподвижными критическими точками, интегралы которых есть функции однозначные от y_0, y_0', остающиеся трансцендентными по отношению к двум константам, каковы бы ни были константы, подставляемые в y_0, y_0'.

Что же касается отыскания всех неприводимых уравнений E_n особого класса, то эта интересная проблема требовала еще многих исследований. Для более простого случая уравнения (8.13) она была решена, и это также нашло отражение в «Лекциях». Там же были определены все уравнения вида

$$F(y'', y', y) \tag{8.17}$$

жанра выше нуля, интегралы которых имели только подвижные полюсы. В этих случаях они представлялись алгебраическими или полутрансцендентными функциями констант. Здесь же были намечены пути и методы изучения интегралов уравнений (8.16).

§ 3. Дальнейшее развитие метода. Исследование уравнения $y'' = R(x, y, y')$. Уравнения с неподвижными критическими точками

Существенное развитие и дополнения к предыдущим результатам, применение метода малого параметра, а вместе с тем и завершение основ теории уравнений второго порядка выполнил Пенлеве в 1898—1902 гг. В ряде сообщений и мемуарах [228. 22.—23] основное внимание уделяется анализу уравнения

$$y'' = R(x, y, y') \tag{8.18}$$

и установлению отдельных его видов, обладающих однозначными интегралами, их классификации и исследованию отдельных видов.

В первой заметке из этого цикла работ рассматривалось уравнение (8.18), где R — рациональная дробь по y', y с коэффициентами — аналитическими функциями от x (условие А). Автор прежде всего отмечает, что задача построения всех уравнений вида (8.18) с неподвижными критическими точками наталкивалась на трудности, казавшиеся непреодолимыми. В процессе их изучения Пенлеве удалось найти метод, позволивший ему обособить такие дифференциальные уравнения и внесший, как он и предполагал, заметный прогресс в решение вышеуказанной задачи. Прежде всего интеграл $y(x)$ уравнения (8.18) не должен допускать критических алгебраических точек. Тогда, как известно, R является полиномом по y' не выше второй степени

$$y'' = A(y, x)\, y'^2 + B(y, x)\, y' + C(y, x), \tag{8.19}$$

в коэффициентах которого, как установил автор, y может быть не выше, чем в шестой степени. Подходящей заменой переменных вида $y = \varphi(Y, X)$, $x = \psi(X)$, где алгебраическая функция φ очень простая от Y и такая, что $Y(X)$ обладает по-прежнему только неподвижными критическими точками, можно привести уравнение (8.18) к одному из таких четырех типов, где P_j — полиномы степени j по y, зависимые аналитически от x:

I $y'' = y' P_1 + P_3$;

II $yy'' = y'^2 + y' P_2 + P_4$;

III $(4y^3 - g_2 y - g_3)\, y'' = y'^2 \left(6y^2 - \frac{g_2}{2}\right) + y' P_4 + P_6$,

где g_2, g_3 — числа;

IV $y(y-1)(y-x)\, y'' = \frac{y'^2}{2}[3y^2 - 2y(1+x) + x] + y' P_4 + P_6$.

Если предположить в (8.18) R рациональной по y', алгебраической по y, аналитической по x (условие В), то можно выразить y'' в форме $y'' = \rho(y', y, z, x)$, где ρ — рационально по y', y, z и где z связано с y алгебраически (зависимо от x) соотношением

$s(y, z, x)=0$ так, что z будет рациональным по y, y', y''. Автор установил, что для произвольного x кривая $s(y, z)=0$ имеет жанр 0 или 1. Если она жанра 0, уравнение приводится алгебраически к одному из указанных четырех типов: если она жанра 1, то уравнение приводится алгебраически к одному из других двух типов (V, VI), которые мы не выписываем.

Таким образом, любое уравнение (8.18) с неподвижными критическими точками (при условии B) приводится алгебраически к одному из шести указанных типов, которые могли иметь только неподвижные критические точки.

Так стал разрабатываться новый метод и применяться к установлению нужных типов уравнений, хотя о сущности его почти ничего не говорилось. Это весьма примечательно. Пенлеве стремился, видимо, лишь закрепить за собой новые результаты и до исчерпания основной их части не спешил излагать идею самого метода.

В следующих заметках приводился анализ вышеуказанных типов (при условии B) и в том же 1898 г. уже были получены два конкретных вида рассматриваемого I типа уравнений, которые не интегрировались,

$$(\mathrm{E}) \quad y''=6y^2+x;$$

$$(\mathrm{E}_1) \quad y''=2y^3+xy+\gamma, \ (\gamma \text{ — константа}),$$

т. е. не приводились к известным. А их интегралы оказались неприводимыми к однозначным трансцендентным, порожденным линейными уравнениями, абелевым функциям и их комбинациям. Здесь же было показано, что интеграл уравнения (E) представляет собой мероморфную функцию во всей плоскости, а также содержит две константы трансцендентным способом. Он выражался через некоторую целую функцию $u(x)$, удовлетворяющую весьма простому уравнению третьего порядка [1], соотношением $y=(\log u)''$. Аналогично для уравнения (E_1) — $y^2=(\log u)''$.

В третьей из заметок [228.12] исследовался с такой же целью II тип уравнений (8.18) (при условии B). Среди найденных восьми видов автор отметил уравнение [2]

$$y''=\frac{y'^2}{y}+\frac{(y^4-1)e^{2x}+(hy-gy^3)e^x}{y} \quad (A)$$

и еще два, которые, как он полагал, могли порождать новые трансцендентные. Это утверждение оказалось справедливым относительно уравнения (A). Так был завершен первый этап

---

[1] См. об этом также в [16.3, 190].

[2] В дальнейшем это уравнение записывалось в несколько более общей форме: $y''=\frac{y'^2}{y}+e^x(\alpha y^2+\beta)+e^{2x}\left(jy^3+\frac{\delta}{y}\right)$ [228. 23, 51].

установления таблицы уравнений вида (8.18) (при условии B) с неподвижными критическими точками. В сводной таблице [228.12, четвертая публ.] приводилось три класса, объединяющие 13 типов уравнений. Среди них Пенлеве отметил три, интегралы которых содержали две константы трансцендентным образом и которые могли вести к появлению новых трансцедентных.

Далее Пенлеве в заметках [228.14] решает обратную задачу: является ли заданное уравнение (8.18) уравнением с критическими неподвижными точками, и если оно таково, то как проинтегрировать его или привести к неприводимой канонической форме. Эта задача решается алгебраическим процессом в первой заметке при условии (A), во второй — при условии (B).

В первом случае указывается два условия: 1) необходимое относительно формы коэффициента A в (8.19); 2) о совпадении после преобразования данного уравнения с одним из видов приведенной таблицы, содержащей 23 типа. Во втором сообщении к предыдущим типам добавляется еще два. Полученный результат резюмировался в форме теоремы о том, что относительно уравнений вида (8.18) с помощью конечного числа простых алгебраических операций можно узнать, имеет ли оно критические точки неподвижными, и если это так, оно приводится к одному из указанных 25 типов. Но все же имелся один исключительный, когда уравнение (8.18) приводилось к 24 типу, единственно обладавшему интегралом с существенно особыми подвижными изолированными точками. Из указанных 25 типов было шесть, приводившихся к четырем неприводимым E, E_1, B_2[1] и еще одному, записанному с опечаткой. Установленные результаты позволяли затем решить еще две проблемы: установить все уравнения вида (8.18) с неподвижными критическими точками: 1) когда R — рационально по y', алгебраично по y и x; 2) когда R — рационально по y', алгебраично по y и не зависит от x.

Достигнутые результаты позволили Пенлеве установить несколько общих теорем и относительно уравнения с неподвижными критическими точками вида

$$F(y'', y', y, x)=0, \tag{8.20}$$

где F — полином по y'', y', y и аналитичен по x. Для уравнений этого вида следует различать те же два общих случая относительно характера зависимости интеграла от констант (алгебраически или трансцендентно). При этом были строго доказаны теоремы, высказанные ранее в «Лекциях», как вероятные, и, в

---

[1] $(B_2)\ y''=y'^2\frac{dp}{dy}\cdot\frac{1}{2p}+y'\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}\right)+$
$+\frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)}\mu(x)\sqrt{P};\ P\equiv y(y-1)(y-x).$

частности, о том, что если интеграл уравнения (8.20), обладая неподвижными критическими точками, имеет подвижные существенно особые точки, то последние являются изолированными, и уравнение не неприводимо.

В сообщении [228.16] Пенлеве говорит о применении разработанного метода для явного установления уравнений (8.18) с неподвижными критическими точками к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями, а также к уравнениям третьего порядка. Именно здесь (в марте 1900 г.), видимо, впервые были подробно сформулированы и изложены основные идеи его метода. В различных вариантах эти положения излагались также в следующем сообщении [228.15] и в больших статьях монографического характера [228.22.—23].

Найденный и примененный Пенлеве метод [1] распадался на две различные части. Первая часть имела целью отыскать необходимые условия неподвижности критических точек интегралов рассматриваемых уравнений; вторая — установить, являются эти условия достаточными или нет. Сущность метода для определенности излагалась применительно к системе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y, z)}{C(x, y, z)}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{B(x, y, z)}{C(x, y, z)}, \tag{S}$$

где A, B, C — полиномы по своим переменным.

Идея первой части метода весьма проста. Если дифференциальная система зависит аналитически от некоторого параметра α, $\alpha \neq 0$ и при этом ее общий интеграл имеет неподвижные критические точки, то это свойство интеграла сохраняется и при $\alpha = 0$. В более общей форме это можно выразить так, что разложения неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$ по возрастающим степеням α будут иметь коэффициентами функции с неподвижными критическими точками. Сформулированная лемма есть следствие известного, ставшего классическим метода Пуанкаре, о котором мы упоминали раньше. Для применения к данной системе Пенлеве вводит в нее параметр α таким образом, что для некоторого α новая система имеет неподвижные критические точки вместе с данной и при $\alpha = 0$ становится интегрируемой. Тогда в разложении неизвестных функций по возрастающим степеням α коэффициенты можно определить квадратурами. При этом условия однозначности коэффициентов при обходе по некоторому замкнутому пути и являются необходимыми для однозначности интегралов.

Уравнения S_0, полученные в результате указанного построения при $\alpha = 0$, Пенлеве назвал упрощенными. Предыдущий метод можно применить к упрощенной системе при указанных выше так называемых первых условиях, а затем повторять его снова до тех пор, пока не получится новых условий.

[1] Особенно подробно и с примерами он изложен в [228. 23].

Так, применяя этот процесс к уравнению (8.18), прежде всего видим, что R (это нам уже известно другим путем) должен быть полиномом второй степени по y' [см. (8.19)], где A, B, C — рациональные дроби по y и аналитические по x. Положив затем $x=x_0+\alpha X$, приводим уравнение (8.19) к виду $y''=A(x_0, y)y'^2+$ $+\alpha(\ldots)$. Итак, чтобы уравнение (8.19) имело неподвижные критические точки, необходимо, чтобы уравнение $y''=A(x_0, y)y'^2$ имело такие точки, откуда получались все возможные формы $A(x, y)$. Применяя, наконец, метод к полюсам $y=g(x)$ функции R, получаем типы, указанные раньше.

Если предыдущие (необходимые) условия были выполнены, то система не могла обладать подвижными критическими точками алгебраическими. Но могли существовать подвижные существенно особые точки. Чтобы доказать их отсутствие, применялся следующий метод. Устанавливалось, что если a есть особенность решений $y(x)$, $z(x)$ системы (S), то существуют величины x, как угодно близкие к a, для которых $y(x)$, $z(x)$ принимают значения, близкие к некоторым значениям b, c (конечным или нет); эти величины a, b, c такие, что в их окрестности известна форма первых интегралов системы (S), и эта форма показывает, что функции $y(x)$, $z(x)$ — мероморфны в области $x=a$. Итак, единственные подвижные особенности функции $y(x)$, $z(x)$ есть полюсы.

Чтобы показать существование подвижных трансцендентных особых точек, в систему (S) вводится еще такой параметр α, когда для некоторого его значения все особенности новой системы так же, как и старой, являлись неподвижными. Если для $\alpha=0$ система интегрировалась и если интегрирование выявляло подвижные трансцендентные особенности, то такие особенности существовали тем более для (S).

Первая часть метода без особых трудностей могла применяться к дифференциальной системе любого порядка. Но как отмечал Пенлеве, усложнение второй части метода возрастало с порядком системы. Когда существовали подвижные трансцендентные особенности, необходимо было к первым условиям добавлять новые, трансцендентного характера. «Но тогда,— говорил он,— нельзя надеяться узнать с помощью конечного числа операций, имеет ли в самом деле такая система (S) критические точки неподвижными; но можно доказать, что класс данных систем (S) содержит системы с критическими неподвижными точками» [228.16, 769]. Это проходило, например, для уравнений третьего порядка, которые определяют фуксовы функции. Применение метода к уравнениям (8.18) показывало, что первые условия — алгебраические и достаточны для того, чтобы общий интеграл не имел других подвижных особенностей, кроме полюсов; исключение представлял единственный тип, интегрируемый в квадратурах; этот тип обладал подвижными существенно особыми точками. В заключение отмечалось, что рассматриваемый

метод можно распространить и на исследование уравнений (8.20), когда F — полином по y'', y', y, аналитичен по x и второй степени по y'' и т. д., но усилия следовало бы направить для определения всех уравнений (8.20) с неподвижными критическими точками независимо от степени полинома F по y''.

Полученные результаты с некоторыми дополнениями и многими подробностями были затем изложены в двух больших статьях [228.22.—23], являющихся своего рода итогом работ автора в данном направлении в период после чтения стокгольмских лекций. В первой из них уделяется большое внимание раскрытию основного метода исследования, применению его к выделению уравнений (8.18) или (8.19) с неподвижными критическими точками и, особенно, к подробному исследованию более простого уравнения

$$y'' = b(x)\,y' + B(x)\,y^2 + C(x)\,y + D(x),$$

а также разбору фундаментальных свойств принадлежащего этому классу уравнения (E). Интеграл этого уравнения — однозначная функция с подвижными полюсами — содержал две константы в трансцендентной форме. Таким образом, это была трансцендентная мероморфная существенно новая функция так называемого второго порядка, не приводимая к классическим трансцендентным (которые автор назвал первого порядка) или их комбинациям. Она может быть выражена в форме

$$y = \frac{z'^2 - zz''}{z^2},$$

где $z(x)$ — целая существенно новая функция, определяемая системой второго порядка

$$\frac{z'}{z} = \eta,\quad \frac{\eta''}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

Следовательно, $y(x)$ представлена отношением двух целых функций от x, x_0, y_0, y_0', разложения которых могут быть получены бесконечным множеством способов. Выражение y, y' через y_0, y_0' определяет соответствие, существенно биоднозначное между парой переменных (y, y') и (y_0, y_0') (67).

Как на одно из характерных свойств указывается на то, что, если $y(x)$ — частный интеграл уравнения (E), то уравнение $y(x) = A$ обладает бесконечным множеством корней для любой (конечной или бесконечной) величины A. Если $N(\rho, A)$ — число корней уравнения $\varphi(x) = A$ при $|x| \leqslant \rho$, то оказывается, что $\frac{N(\rho, A)}{N(\rho, A_1)} \to 1$ при $\rho \to +\infty$ $(A \neq A_1)$.

Во второй из вышеназванных статей давался обзор полученных результатов. Тут сперва определялись все дифференциальные уравнения вида (8.18) (при условии B) с неподвижными кри-

тическими точками. Среди них указывалось пять уравнений, интегралы которых являются функциями существенно трансцендентными двух констант. Из них отмечены лишь уравнения трех видов (E), (E_1), (A), которые порождали новые мероморфные функции. В целом же были проанализированы десятки уравнений общего вида (8.18) и отдельных частных случаев при различных предположениях относительно характера зависимости R от входящих в нее переменных.

С помощью составленных таблиц таких канонических уравнений с неподвижными критическими точками решалась обратная задача о принадлежности отдельных видов уравнения (8.18) (как при условии A, так и при условии B) к данному классу.

Развитый Пенлеве метод, как видим, оказался весьма эффективным для решения важнейшей проблемы, стоявшей тогда на порядке дня, об исследовании интегралов уравнений второго порядка. Полученные благодаря этому принципиально новые результаты, в частности открытие новых трансцендентных, их исследование и характер зависимости от произвольных констант, имели огромное научное значение, открывали перспективу возможности исследования уравнения третьего и более высоких порядков, к чему и приступил Пенлеве.

Но этот метод мог быть полезен не только для решения рассмотренного круга проблем; его значение несколько шире. На это указывал и сам Пенлеве [228.19].

Мы уже отмечали важность применения общих методов аналитической теории и полученных благодаря этому результатов в работах С. В. Ковалевской относительно движения тяжелого тела около неподвижной точки. Новые результаты Пенлеве существенно дополняли идеи Ковалевской в постановке проблемы, рационализировали путь ее решения и вели к изучению вопроса об определении всех случаев, когда движение тяжелого тела определяется однозначными функциями времени t.

Как второй случай применения можно указать вопрос обращения полных дифференциалов, удовлетворяющих системе уравнений

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du;\ P_1(x, y)\,dx + Q_1(x, y)\,dy = dv,$$

в которой следует определить такой случай однозначности функций $x(u, v)$, $y(u, v)$. Если левые части этих уравнений — точные дифференциалы первого вида, то $x(u, v)$, $y(u, v)$ являются невырожденными абелевыми функциями. Тогда рассматриваемый метод позволяет представить их в форме отношения целых функций, удовлетворяющих весьма простой алгебраической системе дифференциальных уравнений. Можно было бы таким образом построить всю теорию абелевых функций на более простых основаниях.

Как на другие виды применений метода укажем на исследование случая, когда общий интеграл системы дифференциаль-

ных уравнений не допускает трансцендентных особенностей, а также на исследование интегралов дифференциальных систем в действительной области [1].

§ 4. Дополнения результатов Пенлеве в работах других ученых. Новые виды неприводимых уравнений второго порядка

Исследования Пенлеве очень скоро стали достоянием математиков разных стран и вызвали множество работ, дополняющих его результаты в различных аспектах. Одним из первых откликнулся известный русский математик В. П. Ермаков (68), предложивший в [24.2] свой метод установления критических точек и их характера в интегралах дифференциальных уравнений. Идея его состояла в несколько ином подходе к построению упрощенного уравнения, дифференцированием по параметру α. Здесь же был изложен метод Ковалевской и отмечена полезность комбинации ее метода и метода Пенлеве. Это была первая статья по данной проблеме на русском языке и автор уделил здесь внимание также общему обзору вопроса.

Некоторые виды уравнений (8.18), общие интегралы которых $F(x, y, a, b)=0$, где F — полином по a, b, коэффициенты которого есть функции по x и y, в том же 1902 г. изучал Адамар в [166.2]. При этом x, y рассматривались как данные, а величины a, b как текущие координаты. Тогда уравнение $F=0$ представляло некоторую алгебраическую кривую как место точек a, b при произвольных константах x, y. Изучение дифференциального уравнения этих кривых, названных автором «коррелятивными интегралами», и составляло основное содержание его статьи.

Несколько позже Борель (69) заинтересовался в [105.2] видом тех дифференциальных уравнений, интегралы которых $u(z)$ были целыми функциями от z при любых начальных условиях. Автор отметил интересный факт, что для таких уравнений, исследованных главным образом Пенлеве, совокупность членов высшего веса по отношению к индексам производных совпадает с инвариантами некоторых бинарных (особенно квадратичных и биквадратичных) форм, коэффициенты которых образуются из зависимой переменной и ее последовательных производных. Так, для уравнения (E) функция (интеграл) y есть вторая логарифмическая производная функции u, удовлетворяющей уравнению $(uv)^4=u_0^2z$. Публикуя эту заметку, Борель следовал приводимому ниже высказыванию Эрмита: «внимательное наблюдение аналитических фактов есть плодотворнейший источник математических открытий». Некоторые дополнения к этой статье были предложены затем Шази [124.1 и др.].

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускаю-

[1] Подробнее об этом см. в [228.19, 499].

щие конечную непрерывную группу алгебраических преобразований (содержащую два параметра) и их преобразование к четырем типам Пенлеве, рассмотрел Обрио в 1902 г.

Эмиль Борель (1871—1956).

Целую серию статей, посвященных трактовке неприводимости уравнений и, в частности, известного уравнения (Е), опубликовал Пенлеве в 1902 г. Они были вызваны заметками Р. Лиувилля [206 и др.], пытавшегося доказать, что интегрирование уравнения (Е) может быть приведено через подходящее преобразование к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с алгебраическими коэффициентами. Пенлеве показал в связи с этим, что заключение Лиувилля имеет место для любого дифференциального уравнения второго порядка. Источник заблуждения Пенлеве видел в том, что эффективное построение подобного преобразования требует выполнения интеграции, которая эквивалентна интегрированию предложенного дифференциального уравнения, и доказывает неприводимость уравнения (Е) в смысле Драша таким образом, что оно не может быть приведено формальным интеграционным процессом.

Как уже отмечалось и раньше, между дифференциальными уравнениями с неподвижными критическими точками и теорией линейных уравнений существует весьма тесная и своеобразная связь, установленная еще при первых исследованиях уравнения Риккати. В дальнейшем этот вопрос был предметом ряда исследований Шлезингера, Р. Фукса, Бутру и др. для уравнений второго порядка[1]. Так, в ряде статей [154.2.—3. и др.] Рихард Фукс (70) вслед за Шлезингером изучил характер связи линейных дифференциальных уравнений второго порядка, группа подстановок которых независима от входящего в коэффициенты уравнения параметра с дифференциальными уравнениями второго порядка с неподвижными критическими точками. Благодаря этому углубляется анализ уравнений, а также получено уравнение этого вида весьма общей формы, которое автор исследовал, в частности, и на предмет аналитического представления его общего интеграла в окрестности неподвижных критических точек 0, 1, ∞. Таким образом, была обнаружена еще одна форма связи двух основных ветвей рассматриваемой теории.

Следующий цикл работ по рассматриваемой проблеме, включающий как заметку [228.24] Пенлеве, так и ряд статей его ученика Гамбье, связан с дальнейшим пополнением установленной Пенлеве таблицы уравнений вида (8.19) с неподвижными кри-

[1] См. об этом подробнее в [109.6, partie 7, § 29].

тическими точками. Гамбье (71) с большим вниманием (с 1906 г.) проанализировал все результаты Пенлеве и после тщательной кропотливой ревизии его таблицы нашел некоторые существенные пропуски. Эта работа Гамбье подытожена в диссертации [156]. Существенный пропуск Пенлеве при исследовании различных форм коэффициента A в (8.19) касался случая $A=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{y}$ $(n>1)$, что влекло за собой рассмотрение еще ряда важных вариантов. Среди них особый интерес представляли случаи новых трансцендентных, порожденных дифференциальными уравнениями второго порядка. К указанным Пенлеве трем типам канонических уравнений (E, E_1, A) было добавлено еще три новых

$$y''=\frac{y'^2}{2y}+\frac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y}; \qquad (C_1)$$

$$y''=y'^2\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)-\frac{y'}{x}+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left[\alpha y+\frac{\beta}{y}\right]+\gamma\frac{y}{x}+\frac{\delta y(y+1)}{y-1}. \qquad (C_2)$$

$$y''=\frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{x}{y^2}+j\frac{x-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]. \qquad (C_3)$$

Первое из них (C_1) отсутствовало в таблице Пенлеве. Второе (C_2) входило для случая $\alpha=\beta=0$, позволявшего подстановкой $y=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ привести его к виду (A) [1]; но при $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ оно неприводимо к типу (A). Уравнение (C_3) фигурирует в таблице Пенлеве в случае $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\delta=\frac{1}{2}$, когда оно было интегрируемо, в общем же случае оно неприводимо. Пенлеве показал [228.24], что первые пять типов могут быть рассмотрены как разновидности шестого (C_3). Именно об этом уравнении шла речь в упоминаемых работах Р. Фукса, впервые сообщившего о нем в 1905 г. [152.16, 556]. Общий интеграл этого уравнения

---

[1] Уравнение третьего типа (A) записано в форме $y''=\frac{y'^2}{y}-\frac{y'}{x}+\frac{1}{x}(\alpha y^2+\beta)+jy^3+\frac{\delta}{y}$, это уравнение, как и ($C_2$), имеет $x=0$ и $x=\infty$ как критические трансцендентные точки. Если произвести в этих двух типах преобразование $x=e^X$, то функция $y(X)$ будет однозначной трансцендентной.

$y(x)$ допускает критические трансцендентные точки $x=0$, $x=1$, $x=\infty$.

Там же Пенлеве показал, что уравнение (C_2) есть вырождение (C_3); (A) и (C_1) — вырождение (C_2); (E_1) — вырождение (A) или (C_1) и (E) — вырождение (E_1). Метод, примененный Пенлеве для доказательства неподвижности критических точек уравнения (E), мог быть применен и к остальным. Из доказанной Пенлеве неприводимости уравнения (E) в смысле Драша следовало то же для остальных пяти типов, за исключением, быть может, некоторых частных значений констант α, β, γ, δ.

Гамбье вместе с тем несколько дополнил метод Пенлеве, особенно в части исследования достаточности условий, рассматривая вопрос не только о подвижных полюсах, но и о подвижных нулях и единицах. Как существенный результат следует отметить, что полученные для уравнений второго порядка, первой степени и рациональных по y необходимые условия, по указанному Гамбье процессу, были в то же время достаточны, чтобы интеграл имел критические точки неподвижными. Он дает сначала таблицу, содержащую 50 видов уравнений (8.18), имеющих общие интегралы с неподвижными критическими точками (при условии A), а также решает и обратную задачу при том же предположении. Приведенные виды уравнений подробно исследованы.

Но еще совсем мало, особенно с точки зрения теории функций, были изучены интегралы неприводимых канонических уравнений, следующих после первого вида (E). Необходимость более детального изучения интегралов указанных уравнений отмечалась Пенлеве как одна из первоочередных задач. Ее решением с успехом начал заниматься молодой русский математик В. В. Голубев [16.2], обративший особое внимание на изучение характера особых точек интегралов (полюсов, нулей и т. д.). Он упрощает здесь рассуждения Пенлеве, имевшие место при исследовании интегралов уравнений (E, C_3), применяет их к изучению уравнений (C_1, C_2) и намечает основные пункты доказательства для уравнений (E, E_1, A). Он показывает, что интегралы уравнений (E, E_1, A, C_1, C_2) — мероморфные функции и могут быть представлены не только в виде традиционного в то время отношения двух трансцендентных по известной теореме Вейерштрасса, но и весьма просто через логарифмические производные целой функции. Все они есть алгебраические функции от вторых логарифмических производных целых трансцендентных. Представляли интерес указанные автором несколько случаев интегрируемости рассмотренных уравнений через известные функции при подходящем выборе параметров α, β, γ, δ (полагавшихся, впрочем, чаще равными нулю).

Существенный вклад в изучение интегралов рассмотренных уравнений второго порядка и систем двух уравнений с двумя функциями, начиная с 50-х годов нашего века, внес Н. П. Еру-

гин, позже его ученики Н. А. Лукашевич, А. И. Яблонский и другие ученые, в работах которых получено большое число новых результатов [1], исследование которых выходит за пределы нашей задачи.

§ 5. Асимптотический метод изучения дифференциальных уравнений второго порядка. Монография Бутру

Прослеживая схему исследования уравнений второго порядка, нетрудно заметить, как новые методы помогали проникать все глубже в суть вопроса, причем с тем большим успехом, чем сильнее они отличались от уже общеизвестных и традиционных. После каждой такой вспышки проходил весьма бурный процесс новых открытий и выяснения новых закономерностей, освещения уже известных фактов с новой точки зрения. Через некоторое время частота этих явлений замедлилась, а освещение известных или недавно открытых положений и закономерностей показывало, что они далеко еще не во всем были уж так хорошо известны и изучены.

Из предыдущего мы видели, как сильно продвинулась теория благодаря новому методу Пенлеве. Потом этим же методом получен еще ряд новых и интересных результатов. Но вместе с тем не было достаточной четкости и простоты в применении второй его части — установления достаточных условий. Природа новых трансцендентных, порожденных каноническими неприводимыми уравнениями, несмотря на виртуозность приемов в исследованиях самого Пенлеве и его учеников и последователей, не была все-таки еще достаточно выяснена. Она могла стать яснее при некотором другом освещении, с пока неизвестной стороны. Интерес в этом отношении представляли исследования Л. Шлезингера, Р. Фукса, Р. Гарнье.

Но особенно важной в этом отношении, нам кажется, была тогда обширная статья монографического характера П. Бутру [109.6], за которую автор получил большой приз Парижской академии по математическим наукам в 1912 г. Он подошел к изучению вопроса несколько с иной стороны и сущность его идеи можно понять по следующим вводным замечаниям.

«Если исключением, — говорит он, — образовать дифференциальное уравнение, общий интеграл которого может быть однозначным, то остается еще преодолеть большие трудности: необходимо доказать, что интегралы этого уравнения действительно не имеют критических точек. Положение мало утешительное, так как доказательство отсутствия критических особых точек не дает еще наличия отрицательного свойства у функций, определенных дифференциальным уравнением. На какие трудности не наталкиваются, если хотят получить положительные свойства

[1] См. об этом кратко в заключении.

этих функций, если стремятся узнать их структуру подобно структуре эллиптических функций». Не зная, видимо, о работе Голубева [16.2], Бутру писал, что к тому времени ничего не было известно о функциональных свойствах многих трансцендентных, открытых Пенлеве. Неожиданное, как казалось Бутру, вторжение этих трансцендентных в некоторые вопросы теории линейных уравнений, без сомнения, было фактом новым и весьма замечательным. Свои исследования по дальнейшему выяснению природы и различных свойств новых функций Бутру рассматривал как установление связи проблемы Пенлеве с проблемой более общей. Бутру стремился установить роль и значение трансцендентных Пенлеве и их расположение среди множества подобных им функций.

В результате своих исследований он пришел к общему заключению, что трансцендентные Пенлеве, преобразованные подстановками $y=x^m Y$, $X=x^l$, при подходящем выборе показателей m, l есть функции, в определенном смысле асимптотические по отношению к двоякопериодическим функциям. Иначе говоря (с известной степенью условности — *В. Д.*), трансцендентные Пенлеве так относятся к эллиптическим функциям, как мероморфные функции Бесселя к функциям круговым. Рассматривая, например, уравнение

$$y''=6y^2-6x, \tag{8.21}$$

подстановкой $X=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $y=\sqrt{x}Y$ можно преобразовать его в

$$Y''+\frac{Y'}{X}-\frac{4}{25}\cdot\frac{Y}{X^2}=6Y^2-6, \tag{8.22}$$

интеграл которого может быть охарактеризован как асимптотическая функция интегралов уравнения

$$Y''=6Y^2-6. \tag{8.23}$$

Для асимптотического изучения уравнения (8.22) и при сравнении его с (8.23) (как и для других случаев) вводился параметр μ, который менялся от нуля таким образом, что найденные Бутру обобщенные уравнения при $\mu=0$ переходили в уравнения второго порядка, определяющие эллиптические функции, а для $\mu=1$ — в уравнения Пенлеве. Так, для изучения уравнения (8.21) рассматривалось обобщенное уравнение

$$y''=6y^2-6x^{\mu} \tag{8.24}$$

или, положив $y=x^{\frac{\mu}{2}}Y$, $X=\frac{4}{\mu+4}x^{\frac{\mu+4}{4}}$, получалось эквивалентное

$$Y''+\frac{5\mu}{\mu+4}\cdot\frac{Y'}{X}+\frac{4\mu(\mu-2)}{(\mu+4)^2}\frac{Y}{X^2}=6Y^2-6,$$

Пьер Бутру (1880—1922).

которое варьировалось между (8.23) и (8.22). Многие полученные Бутру результаты применялись к (8.24), как и к (8.21), однако интегралы уравнения (8.24) не имели неподвижных критических точек.

Асимптотическое изучение уравнений (8.22) и других автор вел в направлении изучения роста интегральных ветвей, распределения их полюсов (или точек, где они принимали некоторое значение), механизма перестановок (перемещений) обратных функций. Знание роста $Y(X)$ позволяло выбрать с должным основанием способ разложения или представления этих функций, который лучше выражает особенность их различных характеров. Оно дает также возможность изучить, по терминологии Бутру, периодические свойства функций $Y(X)$. Периодом интеграла $Y(X)$ он называл разность $X_1 - X_0$, где X_0, X_1 — две точки, в которых интеграл $Y(X)$ принимает одно и то же значение η.

При рассмотрении так называемых неполных или усеченных интегралов уравнения (8.23) замечено, что они являются вырождениями эллиптических функций $\wp$, один или два периода которых становятся бесконечными. Бутру проследил изменение этих интегралов при переходе от уравнения (8.23) к асимптотическому (8.22) и получил весьма интересные следствия. Особенно подробно изучено уравнение (8.21). В целом же работа, содержащая семь частей, проливала новый свет на природу трансцендентных Пенлеве. Нетрудно понять значение нового метода и систематического его применения в данном исследовании, а также пользу его для других отраслей математики.

§ 6. Изучение отдельных видов уравнений. Связь с линейными уравнениями. Дополнения Мальмквиста

Большое внимание в процессе дальнейших работ уделяли исследователи изучению различных видов уравнений Пенлеве. Одним из первых рост интегралов уравнений I—III Пенлеве изучал Бутру в докторской диссертации [109.1]. Чуть позже, в 1914—1915 гг., связь уравнений Пенлеве с теорией линейных уравнений в серии заметок рассмотрел Р. Гарнье (72).

Большую часть [157.3] посвятил он изучению уравнения VI (C_3) Пенлеве. Это уравнение обладало двумя замечательными свойствами, которые обеспечивали ему заметное место среди уравнений этого класса. С одной стороны, как уже упоминалось,

Пенлеве показал, что другие пять видов уравнений могут быть рассмотрены как вырождение данного. Поэтому любое продвижение в теории этого уравнения могло положительно отразиться и на остальных пяти. С другой стороны, уравнение (C_3) играло важную роль в теории линейных уравнений. При решении задачи отыскания коэффициентов уравнения

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-t)^2}+\frac{d}{x(x-1)}+$$
$$+\frac{3}{4(x-\lambda)^2}+\frac{\alpha}{x(x-1)(x-t)}+\frac{\beta}{x(x-1)(x-\lambda)} \qquad (\varepsilon_I)$$

таким образом, чтобы его группа монодромии была данной группой, т. е. проблемы Римана относительно (ε_I), необходимо было прежде всего выразить, что группа (ε_I) независима от t. Для выполнения этого условия требуется, чтобы λ удовлетворяло уравнению вида (C_3) по отношению к t как аргументу

$$\lambda''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t-\lambda}\right)\lambda'+$$
$$+2\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[a+b+c+d+1-\left(a+\frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2}+\right.$$
$$\left.+\left(b+\frac{1}{4}\right)\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-\frac{ct(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right], \qquad (VI)$$

где a, b, c, d имеют то же значение, что и для ε_L а α и β в ε_I являются полиномами по λ' с рациональными коэффициентами по λ и t. Относительно общего интеграла уравнения (VI) известно, что он мероморфен, за исключением трех особых точек $t=0$, $t=1$, $t=\infty$. Весьма важно было исследовать поведение интеграла в окрестности этих точек. Упоминаемые ранее результаты Р. Фукса в этом направлении Гарнье находил неточными и главное внимание уделил здесь более точному и строгому решению проблемы, ограничиваясь в основном точкой нуль, так как все они играли эквивалентную роль. В основу исследования положен метод последовательных приближений, при помощи которого получены так называемые характеристики (термин Бутру) ветвей интеграла вдоль некоторого прямолинейного направления (73). Их построение для уравнения (VI) и классификация рассмотрены в первой части работы. Доказательству факта их единственности и представлению интеграла посредством подходяще подобранных характеристик посвящены вторая и третья ее часть; в четвертой части изучаются два замечательных частных случая и анализируется работа Р. Фукса.

Дополнение работы Бутру по исследованию первого и второго уравнений Пенлеве предложено Аппелем (74) в [94.4]. Вопрос о множестве значений интеграла одного уравнения Пенлеве трактовался Гроссом в [164].

Поль Аппель (1855—1930).

Изучая группу рациональности уравнения $y''=6y^2+ax+\beta$, Драш [136.2] приходит к выводу о том, что это уравнение определяет новые трансцендентные.

Одна из теорем Пенлеве о неподвижных критических точках уравнения общего вида $P(y'', y', y, x)=0$, где P — полином по y'', y', y и аналитичен по x, высказанная им как весьма вероятная, была доказана Трикоми на основе новых результатов об алгебраических функциях в двух заметках (1923 г.).

Среди других работ по данному кругу вопросов отметим весьма важные статьи Мальмквиста [211. 5 и др.]. Он исходил из замечания Бутру в рассмотренной выше работе о том, что его методы могут быть применены к изучению подвижных особых точек уравнений более общего вида и тем самым к изучению проблемы Пенлеве, установив ее связь с более общими теориями. «Глубоко изучив работы Бутру, — писал Мальмквист, — я осознал, что его результаты могут быть получены и, как мне кажется, более простым и естественным путем и при помощи метода, который является не чем иным, как модификацией и развитием первого метода Пенлеве, скомбинированного с изучением некоторых дифференциальных систем частного вида, бывшим объектом хорошо известных исследований Брио и Буке, Пуанкаре, Пикара, Горна, Линделефа, Бендиксона, Дюляка» [211.5, 235]. Этим самым развивалось замечание Пенлеве [227.23,11; 80] о применимости его методов не только к изучению случаев, где интегралы однозначны, но также к любому вопросу, касающемуся аналитических свойств интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений.

До появления работы Мальмквиста в основном изучались уравнения вида (8.18) (при условии B). Он исследовал в указанных статьях дифференциальные системы с неподвижными критическими точками вида

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(y,z;x)}{X(y,z;x)};\quad \frac{dz}{dx}=\frac{Z(y,z;x)}{X(y,z;x)}, \tag{8.25}$$

где X, Y, Z — функции целые и рациональные по y, z и аналитические по x. Проведя подходящую замену переменной $z=\zeta+v$, Мальмквист получает систему в преобразованном виде

$$v^m\frac{dy}{dx}=R_0(y,\zeta;x)+R_1(y,\zeta;x)\,v+\ldots;$$

$$v^n \frac{dv}{dx} = S_0(y, \zeta; x) +$$

$$+ S_1(y, \zeta; x) v + \ldots, \qquad (8.26)$$

где R_i, S_i — рациональные функции по y, ζ.

Далее можно различать два случая: $m < n+1$ или $m \geqslant n+1$, в зависимости от чего устанавливаются признаки исследования характера функций y и z в некоторой области точки x_0. В процессе исследования Мальмквист дает краткий очерк отыскания необходимых условий для применения первого метода Пенлеве, делая ряд интересных замечаний относительно его развития, и в заключение работы [211.5] показывает также (для отдельных случаев), как развитой им метод может быть применен к изучению проблемы Бутру.

Иоганнес Мальмквист (1882—1952).

Не входя в сравнительную оценку различных методов исследования уравнений Пенлеве, отметим, что изучение их во всех случаях приводило к согласованным результатам.

Работы Пенлеве, его учеников и последователей способствовали дальнейшим многим исследованиям как по общим вопросам, так и по изучению отдельных видов уравнений, и интерес к этой тематике не ослабел вплоть до настоящего времени. Много интересных уточнений, дополнений и новых подходов к рассмотрению проблемы находим в более поздних работах Гарнье, Петровича, Бюро, Хукугары и многих других, обзор работ которых может быть предметом отдельного исследования.

Глава IX. УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

§ 1. Уравнения третьего порядка с неподвижными критическими точками. Подход Пенлеве

Вскоре после получения основных результатов для уравнений с неподвижными критическими точками второго порядка Пенлеве обратился с аналогичной целью к исследованию уравнения

$$y''' = R(y'', y', y, x), \tag{9.1}$$

где R — рациональная функция по y'', y', алгебраическая по y и аналитическая по x. Применяя изложенный им общий метод [228.16], он пришел к таким результатам: если уравнение (9.1) имеет неподвижные критические точки, то 1) R есть полином не выше второй степени по y''; пусть

$$y''' = A(y', y, x)\, y''^2 + B(y'\, y, x)\, y'' + C(y', y, x); \tag{9.2}$$

2) уравнение

$$y''' = A(y', y_0, x_0)\, y''^2 \tag{9.3}$$

имеет однозначный интеграл (x_0, y_0 — некоторые константы), иначе говоря, A совпадает с одним из указанных автором 12 выражений в форме рациональных дробей, содержащих в знаменателе y' в первой степени и функции от y, x;

3) B и C, рассматриваемые как рациональные функции от y', имеют те же полюсы, что и A, они простые, и для $y'=\infty$ выражения $\frac{B}{y'}$, $\frac{C}{y'^3}$ — конечны;

4) пусть теперь $y'=-a$ — один из полюсов A. Запишем уравнение (9.1) в форме

$$\frac{dy}{dx} = z - a; \quad z\frac{d^2z}{dx^2} = G(y, x)\, z'^2 + H(y, x)\, z' + K(y, x) + z(\ldots),$$

где величина G, согласно предыдущим условиям, равна одной из трех величин: 0, 1, $\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Если $G\equiv 1$, то $K\equiv 0$; если $G\equiv 0$ или $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, то H, K — тождественные нули; более того, если $n<0 (n\neq -1)$, то $a(y, x)$ есть просто функция от x.

Если принять эти условия, то двенадцать типов уравнения (9.1), соответствующих дюжине выражений A, зависят не более как от девяти неизвестных функций от y, x (алгебраических по y, аналитических по x). «Но,— отмечает Пенлеве,— необходимые условия, которые представляет метод, далеко еще не исчерпаны». Приведя далее уравнение (9.1) к виду

$$y''' = \frac{y''^2}{y'}(\alpha + \varepsilon) + y'' y' [\beta(y, x) + \varepsilon_1] + y'^3 [\gamma(y, x) + \varepsilon_2],$$

где $\varepsilon \to 0$ вместе с $\frac{1}{y'}$, и уславливаясь говорить, что уравнение

$$y''' = \frac{y''^2}{y'}\alpha + y'' y' \beta(y, x_0) + y'^3 \gamma(y, x_0) \qquad (9.4)$$

есть упрощенное по отношению к (9.1) (x_0 — константа, $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$, $n \neq -1$, целое или $n = \infty$), он указывает как на необходимое условие неподвижности критических точек уравнения (9.1) наличие однозначного интеграла в упрощенном уравнении (9.4).

В частности для $n = -2$, $\beta \equiv 0$ уравнение (9.4) (с однозначным интегралом) определит автоморфные функции (фуксовы или клейновы).

Интересно отметить, что уже в начале изучения вопроса обнаруживалась определенная связь интегралов изучаемого класса уравнений с автоморфными функциями. Это могло повести к интересным заключениям, о которых Пенлеве частично говорил в данном сообщении и более подробно в статье [228.22]. Он высказал здесь такое положение, что интеграл уравнения (9.2) может быть новой однозначной трансцендентной, не мероморфной: она может представлять подвижные существенно особые точки. Они могут образовать совершенные множества (и именно линии); и это обстоятельство, наверное, будет иметь место, если оно существует для упрощенного уравнения (9.4).

Отдельная глава работы [228.23] посвящалась также рассмотрению уравнений третьего порядка. Здесь вместо приведенного ранее условия 4) введено другое, ограничивающее степени рациональных дробей A, B, C по y' (в числителе соответственно 2, 4, 6, в знаменателе — 3). Более определенно утверждается: 1) если однозначный интеграл уравнения (9.4) представляет особые линии, то тем более интеграл уравнения (9.1) представляет особые подвижные линии; 2) если однозначный интеграл уравнения (9.4) представляет совершенные (разрывные) множества особых точек, то тем более интеграл уравнения (9.1) представляет совершенные множества подвижных особых точек (множества разрывные или непрерывные); 3) если однозначный интеграл уравнения (9.4) не является мероморфным, то тем бо-

лее интеграл уравнения (9.1) представляет подвижные существенные особенности (изолированные или нет).

Пенлеве отмечает, что не представляется возможным, подобно уравнениям второго порядка, образовать конечное число типов уравнений (9.1) с неподвижными критическими точками, которые были бы приводимы к другим. Это с достаточностью показывает рассмотрение автоморфных функций. В самом деле каждому классу алгебраических кривых соответствуют различные типы автоморфных функций и, следовательно, различные типы уравнений (9.4) (где $n=-2$, $\beta=0$) с однозначным интегралом. Вместе с тем Пенлеве дает эскиз предполагаемого решения проблемы (в том числе и для уравнения более общего вида), представлявшийся ему весьма вероятным, не выходя существенно за пределы уже трактовавшегося круга идей.

В дальнейшем эстафета исследований в этом направлении перешла к ученикам и последователям Пенлеве. Первым среди них был А. Буланже, занявшийся в 1903 г. определением всех уравнений вида (9.1) (при условии, что R — рациональна по y'', y' и аналитична по y, x), которое допускает непрерывную группу преобразований вида $X=x$, $Y=F(x, y, a, b, c)$, где F — рациональна по y, аналитична по x и зависит существенно от трех параметров: a, b, c. Согласно общей теоремы Пенлеве [228.17], уравнения, допускающие подобную переходную группу, имеют критические точки неподвижными. Опираясь на это, Буланже установил, что единственные уравнения, которые допускают непрерывную группу с тремя параметрами указанного вида, могут быть только линейные уравнения или приводящиеся к таковым через простое возможное гомографическое преобразование, произведенное над функцией y, связанное или нет с заменой функции $y=e^z$.

§ 2. Дальнейшие исследования уравнений третьего порядка. Работы Шази и Гарнье

Основная работа по исследованию уравнений третьего порядка в первые два десятилетия нашего века была выполнена двумя талантливыми учениками Пенлеве—Шази (75) и Гарнье. Здесь мы встречаемся с весьма интересным для того времени явлением, когда почти один и тот же круг вопросов стал решаться в одно время двумя математиками одной школы, исходившими из аналогичных основ, но работавших при этом независимо друг от друга. Так как направление их исследований по крайней мере корректировалось Пенлеве, то в этом явлении можно усмотреть интересный случай своеобразного научного эксперимента, поставленного Пенлеве, видимо, вполне сознательно. При этом увеличивалась надежность и разнообразие результатов, а также более ускоренное их усвоение в научном обиходе. Случаи развития сходных идей и совпадения открытий в мате-

матике и вообще в науке встречаются нередко. Примером тому служит построение самого аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Но при рассмотрении подобных вопросов основное внимание (даже и сейчас) направляется на выяснение приоритета в хронологическом отношении, тогда как по существу он может в иных случаях и не быть единоличным, что не умаляет заслуг отдельных ученых, а наука от этого может лишь выиграть. Для неё важен сам факт открытия гораздо более, чем его авторство. Но вместе с тем открытия делаются конкретными учеными, в конкретной исторической обстановке, и раскрытие связей и причин, имевших место,— наша задача.

В данном случае работы Шази и Гарнье не были совместными, в отличие от знаменитого дуэта Брио и Буке; каждый из них публиковался отдельно, но в разработке данного вопроса они получили весьма существенные, частично сходные, друг друга дополняющие результаты и разделяют примерно одинаково заслугу прогресса в данной области. Их многочисленные заметки об уравнениях третьего порядка стали появляться в докладах Парижской академии с 1907 г., а в 1911 г. эти исследования подытожены в больших статьях монографического характера [124.2; 157.2], которые в основном будем иметь в виду при обзоре их результатов. Шази и Гарнье исследовали прежде всего общий интеграл упрощенного уравнения

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\,y'y'' + c(y)\,y'^3, \quad (n \neq -1), \qquad (9.5)$$

установив для него явную форму сначала при условии, когда коэффициенты b и c были рациональными функциями по y, а затем для более общего случая, когда они — алгебраические жанра единица. Эти первые результаты молодых ученых, как отметил Пенлеве, были получены одновременно (в 1907 г.) несколько различными путями и совсем независимо друг от друга.

Основная задача, которую стремился решить Шази [124.2], состояла в исследовании новых уравнений с неподвижными критическими точками и открытии новых трансцендентных [1]. Именно такой путь поиска обусловливается тем, что большинство классических функций (показательных, эллиптических, автоморфных и т. д.) являлись интегралами тех дифференциальных уравнений, общие интегралы которых были однозначны и которые не были линейными ни для функций эллиптических, ни для функций автоморфных. Среди интегралов таких уравнений автор и надеялся найти новые трансцендентные, важность которых для различных ветвей анализа была бы очевидной.

В случае $n=-2$, $b(y)=0$ однозначные функции, определенные уравнением (9.5), были автоморфными или выражались

[1] По содержанию это его докторская диссертация, опубликованная в Упселе в 1910 г.

через известные функции. Для $n \neq -2$ Пенлеве высказал без доказательства положение, что жанр алгебраических функций $b(y)$ и $c(y)$ есть нуль или единица и что определенные уравнением (9.5) однозначные функции есть классические или их комбинация. Об изучении других случаев уравнения (9.5) мы уже упоминали выше.

Шази занялся подробным изучением уравнения вида

$$y''' = P(y'', y', y, x), \tag{9.6}$$

где P — полином по y'', y', y с аналитическими коэффициентами по x, надеясь найти простые уравнения, интегралы которых не были бы известными классическими функциями и которые не приводились бы к каноническим уравнениям Пенлеве I—VI, которые мы в дальнейшем будем именовать группой A. Но результаты оказались мало обнадеживающими. В классе рассмотренных уравнений, за исключением четырех видов, еще не до конца изученных, не имелось существенно новых, подобных классу A. Были только уравнения, допускающие интегрирующий множитель и приводящиеся к уравнению второго порядка, преобразующемуся алгебраически к уравнениям А.

Но среди уравнений (9.6) оказались достойными внимания уравнения

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2; \tag{9.7}$$

$$y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36 - k^2}(6y' - y^2)^2 \tag{9.8}$$

(k — целое, больше 6), общие интегралы которых были однозначны в области, ограниченной прямой или окружностью, которые изменялись вместе с константами интеграции и образовали существенно особую линию (сечение). Трудно было предположить, что интегралы столь простых по виду уравнений представляли весьма сложные особенности. Они могли быть определены как функции $y(x) = \frac{6}{z} \cdot \frac{dz}{dx}$, где z удовлетворяла гипергеометрическому уравнению

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dz} - \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4} = 0 \tag{9.9}$$

(где $k > 6$, целое или $k = \infty$), и уравнение $x = \frac{z_1(t)}{z(t)}$ (z, z_1 — различные произвольные, линейно независимые интегралы уравнения (9.9)) определяет функцию Шварца $t(x)$, фундаментальный треугольник которой имеет углы[1] $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$. Общий интеграл уравнения (9.7) голоморфен в области его определения, а общий интеграл уравнения (9.8) мероморфен в такой же

[1] См. об этом в следующих главах.

области. Если положить $y=\frac{k-6}{2}\cdot\frac{u}{u}$, то функция u будет удовлетворять уравнению четвертого порядка $uu^{IV}-(k-2)u'u'''+\frac{3k(k-2)}{2(k+6)}u''^2=0$, общий интеграл которого также обладает как существенно особым разрезом переменной окружностью и определен внутри или вне этой окружности в зависимости от величин констант интегрирования. Он голоморфен в любой точке области определения, за исключением, в общем, $x=\infty$.

Если интеграл определен внутри разреза или если разрез — прямая, то он однозначен; если, напротив, он определен вне разреза, то число его ветвей около сечения равно знаменателю дроби $\frac{12}{k-6}$ как при частном интеграле $u=x^{\frac{12}{6-k}}$.

Функция $u(x)$ обладает функциональными свойствами, подобными тета-фуксовым, и для $k=7, 8, 9, 12$ сама есть тета-фуксова. Отмечены и другие интересные свойства функции $u(x)$.

Среди типов уравнений (9.6), еще не полностью изученных Шази, он отметил уравнение $y'''=y^{\lambda}y''-(\lambda+1)y^{\lambda-1}y'^2$ (λ — целое, положительное) как наиболее интересное в том смысле, что его изучение привело исследователя к рассмотрению уравнений, общие интегралы которых однозначны, в то время как особые их интегралы имеют подвижные критические точки. О существовании таких уравнений не было известно.

Изучение уравнений (9.6) с неподвижными критическими точками показало характер трудностей как вычислительного, так и аналитического порядка и оказалось настолько интересным и поучительным, что представилось возможным перейти и к рассмотрению уравнений вида

$$y'''=R(y'', y', y, x), \tag{9.10}$$

где R — рациональная дробь по y'', y', y с аналитическими коэффициентами по x. Исследование их уже не представляло существенно новых трудностей. Из этого класса Шази старался рассмотреть такие, упрощенные уравнения которых были возможно более сложные. В том случае, когда интеграл упрощенного уравнения был фуксовой или клейновой функцией, общий интеграл полного уравнения также выражался в этих функциях. Если же интеграл упрощенного уравнения обладал подвижными существенно особыми изолированными точками, то это же имело место и в общем интеграле полного уравнения и интегрирование его сводилось к интегрированию уравнения второго порядка с неподвижными критическими точками.

В третьем случае упрощенное уравнение получается исключением констант A и B в уравнении $y'^2=AP+BQ$, где P и Q обозначают два полинома четвертой степени по y с постоянными коэффициентами. Среди уравнений с неподвижными крити-

ческими точками, допускающих это упрощенное уравнение, автор нашел одно уравнение вида

$$y''' = \sum \frac{(y'-a_i')(y''-a_i'')}{y-a_i} +$$

$$+ \sum \frac{A_i(y'-a_i')^3 + B_i(y'-a_i')^2 + C_i(y'-a_i')}{y-a_i} +$$

$$+ Dy'' + Ey' + \Pi(y-a_i)\sum \frac{F_i}{y-a_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \qquad \text{(F)}$$

коэффициенты которого, зависимые от шести параметров, определялись некоторой системой дифференциальных и алгебраических уравнений (S), содержащей 31 уравнение между 32 функциями. Шази удалось доказать, пользуясь распространением метода Пенлеве для уравнений второго порядка, что интегралы уравнения (F) в самом деле имели их критические точки неподвижными и, помимо особых точек коэффициентов, они не имеют других особых точек, кроме полюсов. Шази не завершил интегрирования системы (S) и не нашел класса неприводимых уравнений, которому принадлежало уравнение (F). Но все-таки он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (F) являются уравнениями класса A и, следовательно, уравнение (F) может быть рассмотрено как существенно новое.

Докторская диссертация Гарнье [157.2] посвящалась также исследованию уравнений третьего порядка. Здесь сначала обсуждалось, как распространить метод Пенлеве исследования уравнений второго порядка на изучение уравнений третьего и более высоких порядков, интегралы которых имеют критические точки неподвижными. Трактовка вопроса следует для уравнения (9.10), где R — рациональная по y'', y', алгебраическая по y и аналитическая по x функция. Прежде всего было рассмотрено уравнение (9.5) при условии, что рациональные функции $b=b(y, z)$, $c=c(y, z)$ связаны алгебраическим соотношением $f(y, z)=0$ жанра ω. В первой части работы после введения давался простой метод для решения задачи при любом ω, включая $\omega=0$. Он основан на простейших предположениях теории алгебраических функций одной переменной и легко ограничивает жанр в общем случае. Это существенный момент в теории уравнений (9.10), так как отсюда сразу же следовала теорема Пенлеве о жанре алгебраического соотношения и характере интеграла уравнения (9.10). Отсюда также следовало, что если выражать координаты y, z точки алгебраической кривой жанра выше 1 в функциях x, удовлетворяющих уравнению (9.10) с неподвижными критическими точками, наиболее простыми функциями, которые можно употребить для этого действия, то эти функции — автоморфные. Это следствие аналогично следствию из известной теоремы

Пикара. Но, имея ограничение жанра (при $n \neq -2$), можно было перечислить все случаи, при которых уравнение вида (9.5), при указанных b, c, обладало бы однозначным интегралом.

Эдуард Гарнье (род. 1887).

Уточнив таким образом изучение уравнения (9.5), можно было перейти к рассмотрению уравнения (9.10), что было весьма подробно выполнено Шази. И Гарнье следует иным путем, возвращаясь к обобщенному рассмотрению соответственной задачи Шлезингера и Р. Фукса, имея в виду большее число особых точек и связь рассмотренной ими проблемы с VI уравнением Пенлеве. Но так как изучение проблемы в общем случае чрезвычайно трудно, то Гарнье сначала занялся рассмотрением вырождений более общей проблемы, ставшей затем объектом третьей части его работы. В работах Л. Фукса было доказано, что для независимости группы линейного уравнения ε второго порядка с рациональными коэффициентами по x от входящих в уравнение параметров $t_1, t_2, \ldots, t_n$, необходимо и достаточно, чтобы, добавляя к уравнению ε системы

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i y + B_i \frac{\partial y}{\partial x}; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.11}$$

(где A_i, B_i — рациональны по x), получить систему, полностью интегрируемую. Эта проблема рассматривалась Р. Фуксом для линейных уравнений ε_1 с четырьмя существенно особыми точками, установившим связь ее с VI уравнением Пенлеве, о чем подробнее шла речь в гл. 8. С другой стороны, Пенлеве показал, что первые пять его уравнений могут быть рассмотрены как вырождения шестого. Сопоставление этих результатов позволило Гарнье заключить о существовании линейного уравнения ε_1 с коэффициентами, рациональными по x (но уже не необходимо регулярными), аналитическими по t, обладающими вероятной особой точкой λ и таких, что условия интегрируемости системы, образованной ε_1 и уравнением из (9.11) (с рациональными коэффициентами по x), определяются точно первым уравнением Пенлеве $\lambda'' = 6\lambda^2 + t$. Но такое уравнение ε_1 действительно легче построить.

Поэтому во второй части работы Гарнье рассматривается линейное однородное неприводимое уравнение

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{m} a_k x^k + \sum_{i=1}^{\nu} \left[\frac{3}{4(x - \lambda_i)^2} + \frac{\rho_i}{x - \lambda_i} \right], \tag{9.12}$$

обладающее особыми по виду[1] точками $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ ($x=\infty$ — существенно особая точка); m, ν — данные числа. Требуется выбрать для a_k, λ_i, ρ_i такие возможно более общие аналитические функции от n параметров $t_1, \ldots, t_n$, что от присоединения к (9.12) фуксовых уравнений (9.11) ($i=1, 2, \ldots, n$) получается полностью интегрируемая система. Подробно исследуется случай $n=2$, $m \leqslant 4$. При этом были изучены некоторые виды уравнений третьего порядка и получено попутно ряд интересных заключений.

В третьей части Гарнье исследует обобщенное уравнение Р. Фукса

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} + \\ + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right] + \qquad (\varepsilon_n) \\ + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right].$$

С помощью простых свойств рациональных функций по x он показал, что для независимости группы монодромии (ε_n) от $t_1, t_2, \ldots, t_n$ коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \beta_n$ должны выражаться рационально в функциях от $t_1, t_2, \ldots t_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и через первые производные λ_j по отношению к одному из t_i; в то же время $\lambda_j(t_i)$ удовлетворяют некоторой дифференциальной системе (f_n, F_n) порядка $2n$, которая в случае $n=1$ переходит в VI уравнение Пенлеве.

В процессе дальнейшего исследования Гарнье показал, что система (f_n, F_n) была первым примером явно данной дифференциальной системы произвольно высокого порядка, интегралы которой имели неподвижные критические точки и содержали константы интеграции в трансцендентной форме.

Для некоторых частных значений $c_1, \ldots, c_{n+3}$ это утверждение не имело места в том смысле, что система (f_n, F_n) допускала решения, удовлетворяющие уравнениям более низкого порядка. Например, если (ε_n) обладала интегралом, логарифмическая производная которого рациональна, то (f_n, F_n) допускала решения, представимые отношением гипергеометрических функций высшего порядка и удовлетворяющих тем уравнениям, которые обсбщали рассмотренные ранее (при $n=2$) Дарбу, Аппелем и Пикаром. Гарнье получил эти результаты двумя различными методами, один из которых основан на понятии группы и как раз позволил ему построить линейное уравнение второго поряд-

[1] Т. е. не существенно особыми точками.

ка, допускающее данную группу (стр. 115—126). Этим самым был решен частный случай [1] (для ε_n) знаменитой проблемы Римана, о которой подробнее речь будет далее. Так дополнялись и обобщались результаты, полученные раньше Р. Фуксом. Углубленное изучение системы (f_n, F_n) вело к новым исследованиям, в том числе к установлению связи ее с так называемыми уравнениями σ, построенными Шлезингером и т. д. Несомненный успех исследований Гарнье в данном направлении отражал плодотворность применения идей, получивших развитие в нелинейной теории и глубокую их связь с важнейшими проблемами линейной теории. Кроме того, здесь была также показана полезность использования теории групп для решения задач нелинейной теории, что в то время было весьма прогрессивным явлением [2]. В ближайшие годы после этого Гарнье исследовал отдельные соотношения для уравнений третьего порядка, но в основном, как известно, занимался исследованием уравнений второго порядка. К выше рассмотренной тематике он возвратился несколько позже в ряде сообщений (1924 г.), где изучалось поведение общих интегралов дифференциальной системы порядка $2n$ (f_n, F_n) в окрестности их особых трансцендентных точек. В процессе этого был применен разработанный им ранее метод при исследовании VI уравнения Пенлеве и полученные там результаты распространены на любой класс дифференциальных систем вида (f_n, F_n).

В отличие от Гарнье Шази еще ряд лет сохранял верность исследованиям уравнений третьего порядка и их взаимосвязи с другими. Так, при исследовании уравнений вида

$$y''' = ayy'' + by'^2 + cy^2y' + dy^4$$

(где a, b, c, d — константы) с однозначными общими интегралами он нашел новый случай интегрируемости уравнения

$$\frac{dv}{du} = A(u)\,v^3 + B(u)\,v^2 + C(u)\,v + D(u),$$

когда

$$A(u) = 6u^3 - (2a + b)\,u^2 - cu - d, \quad B(u) = 7u - a,$$

т. е. принадлежащего к виду, изученному ранее Р. Лиувиллем в 1892 г.

Шази один из первых применил метод асимптотических рядов к исследованию интегралов нелинейных уравнений в работах 1912 г. Так, обобщая с помощью этого метода одну теорему Пенлеве, а также распространяя результаты Бендиксона [98.5] и

[1] Случай, когда уравнение (ε_n) обладает интегралом, логарифмическая производная которого рациональна.

[2] Раньше некоторые соотношения между теорией непрерывных групп и дифференциальными уравнениями с неподвижными критическими точками изучал Пенлеве [228.17] в 1900 г. и [228.11] в 1895 г., а еще раньше Пикар, Пуанкаре и др. Несколько выше мы упоминали о результатах Буланже.

Пикара [235.17, 2-е изд., 257—267] о разложении интеграла некоторого дифференциального уравнения первого порядка с действительной области на комплексную, Шази удалось доказать, что общий интеграл уравнения

$$y'''=yy''-2y'^2, \tag{9.12}$$

не обладающий ни полюсами, ни алгебраическими критическими точками, обнаруживает логарифмическую (трансцендентную) критическую точку. Те же результаты Бендиксона и Пикара Шази обобщил на комплексную область и на изучение некоторого уравнения второго порядка, применяя метод последовательных приближений, строя асимптотическое представление интеграла этого уравнения и исследуя его.

Результаты вышеупомянутых и других заметок, были затем подробно изложены в большой статье [124.3]. Шази здесь отмечал, что найденные им результаты могут найти применение в проблеме n тел вблизи момента, когда сталкиваются более двух тел или когда тела удаляются вдоль некоторых траекторий, которые обобщают параболические траектории проблемы двух тел. Координаты n тел допускают разложения рассматриваемого вида по степеням времени; один из показателей есть $\frac{1}{3}$, другие зависят от отношения масс и могут быть действительными или мнимыми.

Вторая глава этой работы есть часть мемуара, отмеченного большим призом Парижской академии по математическим наукам в декабре 1912 г. Здесь изучается в указанном ранее аспекте уравнение (9.12), причем в доказательствах используется асимптотическое представление в некотором секторе интеграла уравнения $x^n \frac{dy}{dx}=F(x, y)$, где $n>1$ — целое, F — голоморфная функция по x, y и равна нулю при $x=y=0$. Таким образом, Шази начал рассматривать в аналитической теории такие дифференциальные уравнения, коэффициенты которых представлялись расходящимися рядами. Комбинируя предыдущий метод с методом Пенлеве, ему удалось доказать, что если $P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x)$ есть полином по отношению к n переменным $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ с аналитическими коэффициентами по x и если общий интеграл дифференциального уравнения $y^{(n)}=P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots y', y, x)$ однозначен, то степень полинома P по отношению к каждой из n переменных ограничена. Если рассматривать каждую производную $y^{(i)}$ как величину веса, равного индексу дифференцирования, увеличенному на единицу, и функцию y — как веса 1, то вес любого члена полинома P не может превышать веса $y^{(n)}$, т. е. $n+1$. Этим самым обобщался классический результат относительно уравнения Риккати. Аналогичное ограничение могло иметь место и в некоторых случаях, когда P была функцией рациональной или алгебраической (тогда, когда рассматриваемое уравнение не приводилось к фуксовому или клейновому).

§ 3. Уравнения высших порядков

Как видно из предыдущего, трудности исследования уравнений с повышением порядка существенно возрастали, а число общих заключений значительно уменьшилось. Тем не менее ряд общих положений был доказан и относительно уравнений любого порядка. Первое исследование уравнений высшего порядка с критическими неподвижными точками было опубликовано Пенлеве в 1900 г. Краткая трактовка этого вопроса в несколько иной форме имеется также в [228.22]. Пенлеве рассматривал уравнение q-го порядка вида

$$y^{(q)}=R(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(q-1)}), \tag{9.13}$$

где R — рациональна по $y^{(q-1)}$, $y^{(q-2)}$, алгебраична по остальным аргументам. Он искал явное выражение простых условий, необходимых, чтобы уравнение (9.13) имело неподвижные критические точки, записывая его в виде системы

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}=u;\quad \frac{d^2u}{dx^2}=R\,(x,y,y',\ldots y^{(q-3)},u,u'), \tag{9.14}$$

и для второго из этих уравнений, исходя из предыдущих принципов, устанавливались условия: 1) R должен быть полиномом по u' не выше второй степени, т. е.

$$R\equiv Lu'^2+Mu'+N, \tag{9.15}$$

где L, M, N — рациональны по u, алгебраичны по $y^{(q-3)},\ldots$ $\ldots y'$, y, x; 2) L должен совпадать с одним из указанных автором выражений [1]. Доказательство следует из рассмотрения упрощенной системы вида

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}=u;\quad \frac{d^2u}{dx^2}=u'^2L\,(u,y_0^{(q-3)},\ldots,y_0',y_0,x_0),$$

которая должна иметь однозначный интеграл; 3) любой полюс $u=g\,(y^{(q-3)},\ldots,y',y,x)$ для L, M, N из (9.15) должен быть невыше первого порядка и, конечно, полюсом L, а выражения $\frac{M}{u}$, $\frac{N}{u^3}$ конечны для $u=\infty$.

Записывая (9.13) в форме

$$\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}=t;\quad \frac{d^3t}{dx^3}=\frac{t''^2}{t'}\,[a\,(t)+\varepsilon]+t''t'\,[b\,(t)+\varepsilon_1]+$$
$$+t'^3\,[c\,(t)+\varepsilon_2],$$

---

[1] Например, $\frac{1}{2(u+a)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u+b}$ для $q\leqslant 7$; $\frac{1}{2\,(u+a)}+\frac{3}{4\,(u+b)}$ для $q\leqslant 5$ и другие, где a, b—алгебраические функции от $y^{(q-3)},\ldots,y',y,x$.

где a, b, c независимы от t''', t', алгебраичны по t и $y^{(q-4)}, \ldots, y', y, x$ а $\varepsilon, \varepsilon_1 \varepsilon_2$ (независимы от t'') стремятся к нулю с $\frac{1}{t'}$ и, придавая функции y и ее производным до $y^{(q-4)}$ включительно числовые значения, при которых функции $a(t), b(t), c(t)$ станут величинами a_0, b_0, c_0, получим упрощенное уравнение вида

$$t''' = a_0(t)\frac{t''^2}{t'} + b_0(t)\,t''t' + c_0(t)\,t'^3, \quad \text{где } t = \frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}, \qquad (9.16)$$

которое должно иметь однозначный интеграл, чтобы уравнение (9.13) было с неподвижными критическими точками. Имелось в виду, что определенная им функция $t(x)$ должна быть однозначной, будучи производной $(q-3)$-го порядка от однозначной функции.

Замечание о некоторых уравнениях третьего и четвертого порядков с однозначными интегралами в дополнение к работам Пенлеве и Бореля [105.2] сделал Шази в [124.1]. Более подробно этим вопросом и другими исследованиями уравнений четвертого и высших порядков с неподвижными критическими точками он занимался в четвертой части работы [124.2].

§ 4. Некоторые приложения теории нелинейных уравнений

Как видно из предыдущего, аналитическая теория нелинейных уравнений в процессе выработки собственных методов использовала также результаты многих других теорий и методов. Но и построенные здесь методы и найденные результаты оказались полезными и применимыми как для других отраслей теории уравнений и анализа, так и для применений к решению некоторых фундаментальных задач механики. Частично эта тема уже трактовалась нами раньше при рассмотрении соответственных конкретных вопросов. Особо интенсивно стали применяться методы аналитической и качественной теории дифференциальных уравнений к основным проблемам динамики, небесной механики и космогонии с конца прошлого столетия. Одна из первых и очень успешно применяла эти методы к механике, попутно их развивая, С. В. Ковалевская.

Большое значение в этом отношении имели ее работы о вращении твердого тела около неподвижной точки [29.2.—3.—4]. Этот вопрос был предметом исследований Эйлера, Пуансо, Лагранжа и других видных математиков[1]. В их работах решены две задачи о движении. Аналитическими исследованиями найдено, что в обоих случаях задача решается с помощью эллиптических функций, а искомые величины выражаются с помощью функций времени, имеющих особые точки только в форме по-

[1] См. об этом подробнее в [26.2, 16].

люсов для конечных значений аргумента. В основу решения этой задачи С. В. Ковалевская положила новую идею и применила к исследованию проблемы методы теории аналитических функций, представив аргумент — время в форме комплексного переменного. Она искала вообще все те случаи, когда параметры движения выражались мероморфными функциями от t, содержащими пять произвольных постоянных, и в результате пришла к открытию третьего случая, когда в эллипсоиде инерции два главные момента инерции равняются удвоенному третьему [1] и центр тяжести лежит в плоскости равных между собою моментов. В этом случае решение получено с помощью эллиптических и ультраэллиптических функций.

П. Пенлеве за работой.

Как отметил Н. Е. Жуковский [26.2, 18], основа успеха С. В. Ковалевской при решении задачи заключалась в прибавлении к известным интегралам живых сил и площадей еще одного нового алгебраического интеграла. После этого дело свелось к выполнению определенных аналитических операций. Все сложные и длинные вычисления Ковалевская проделала до конца и нашла выражения общих решений рассматриваемой системы уравнений в функциях от времени. За первый из указанных мемуаров она получила Борденовскую премию Парижской академии наук, за второй — премию Шведской академии наук. Важно здесь отметить, что ее идеи при решении данной проблемы привели к постановке общей задачи об отыскании такого класса дифференциальных уравнений, интегралы которых — однозначные функции. В этом направлении получены важные результаты, тесно связанные вместе с тем с развитием общей теории алгебраических функций. Исследования Ковалевской в этом направлении были продолжены многими учеными. Из них отметим работу А. М. Ляпунова [43.3], давшего строгое доказательство теоремы С. В. Ковалевской и притом обобщившим ее на случай любых однозначных общих интегралов (С. В. Ковалевская рассматривала только такие однозначные интегралы, которые выражались рядами Лорана с конечной главной частью), а также монографию Г. Г. Аппельрота [3.1], посвященную решению того же вопроса [2].

В скором времени область применений методов аналитиче-

[1] Подробнее об этом см. в [57.2].

[2] О дальнейшем развитии идей Ковалевской можно прочесть в больших статьях Г. Г. Аппельрота [3.2] и П. Я. Полубариновой-Кочиной [57.1], а также в богатых содержанием лекциях В. В. Голубева [16.4].

ской теории дифференциальных уравнений существенно расширилась, охватывая не только смежные области анализа, но и такие дисциплины, как изучение автоколебательных процессов, теорию автоматического регулирования и т. д. Подробная история этой важной проблемы может быть темой отдельной большой работы и мы приведем здесь, в дополнение к сказанному раньше, лишь некоторые сведения о применениях изучаемой теории, ограничиваясь их начальным этапом и используя работы Пенлеве [228.11 и др.]. В этом отношении прежде всего отмечается применение полученных результатов к исследованию первых интегралов дифференциальных систем. А отсюда следовало определение первых интегралов уравнений динамики, алгебраических по отношению к скоростям.

Далее можно указать изучение уравнений n-го порядка, интегралы которых выражаются в форме $P(C_1, C_2, \ldots C_n, x, y)=0$, где P — полином по отношению к константам и аналитическая функция по x, y. Этот класс уравнений содержит, в частности, такие, интегралы которых $y(x)$ являются алгебраическими функциями констант. Опираясь на общую теорию, Пенлеве доказал, что интегрирование такого уравнения приводится всегда к интегрированию дифференциальной системы, все неполярные особенности которой неподвижны. Эта система может быть общего или особого класса. Применение общих методов нелинейной теории позволяло проще и в более общей форме решать вопрос об определении алгебраических интегралов линейных уравнений. Пенлеве трактовал также и обратный вопрос, в частности, о построении всех линейных однородных уравнений третьего порядка с рациональными коэффициентами, общие интегралы которых алгебраические.

Существенный интерес представляет вопрос о применениях результатов рассматриваемой теории к действительной области. Здесь прежде всего изучались кривые, определенные системой трех, а затем n уравнений, в том числе и содержащих параметр. Много внимания Пенлеве уделил уравнениям динамики. Он рассматривает материальную систему S с n степенями свободы и независимыми от времени связями, предполагая S лишенной трения и подчиненной заданным силам, имеющим потенциал. Надо вычислить положение S в некоторый момент t, зная ее положение и скорости при $t=0$. Но если система S проходит через некоторые особые точки, то, как известно, уравнения динамики не представят возможности изучения ее движения. Можно предположить, что такие особенности в естественных проблемах никогда не представятся, так как материальные системы всегда занимают в данный момент времени определенное положение. Но этот аргумент был бы основательным, если бы формулы динамики строго соответствовали действительности. Автор приводит примеры, когда система S (при стремлении t к t_1) стремится к некоторому определенному положению, для которого уравне-

ния движения перестают быть регулярными. И в исследованиях этого рода важную роль играло изучение особых точек интегралов. При этом Пенлеве показал, что наличие существенно особых точек для интегралов уравнений динамики, вследствие особенности их формы, является общим правилом, а не исключением. Поэтому представляло большой интерес узнать, обладает ли система уравнений Лагранжа рассмотренными автором особенностями или нет. Если доказать, что они существуют, то это приведет к весьма замечательным особенностям движения; если же окажется, что они не существуют, то представляется некоторая возможность наблюдать за движением системы S по крайней мере до тех пор, пока S не пройдет через особое положение. Применив известные результаты своих исследований по аналитической теории к действительной области, Пенлеве установил ряд общих теорем о движении рассматриваемой системы S. Если ее положение регулярно, то уравнения Лагранжа, решенные по отношению ко вторым производным, могут быть представлены в форме

$$x_i'' = f_i(x_1', \ldots, x_n', x_1, \ldots x_n) \equiv \sum \alpha_{j,k}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)\, x_j' x_k' + \\ + \beta^{(j)}(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{9.17}$$

и можно искать параметры x_1, x_2,..., x_n таким образом, чтобы в окрестности S, где S — регулярна, коэффициенты $\alpha_{jk}^{(i)}$ были бы голоморфны. Это имеет место, если x_i' стремятся к конечным пределам, когда t стремится к t_1. Система (9.17) определит движение S и это движение будет оставаться регулярным для $t > t_1$. Но при этом существенную роль играет стремление $x_i'(t)$ к конечным пределам, что обеспечивает следующая доказанная Пенлеве теорема: если при t, стремящемся к t_1, S стремится к регулярному положению S_1, то ее скорости x_i' стремятся к конечным предельным значениям. Эта теорема дополняется замечанием, что если $t \to \infty$ и S стремится к регулярному положению S_1, то S_1 есть необходимо положение равновесия, и все скорости $x_i'(t)$ стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{t}$. И наоборот, если t, возрастая, стремится к t_1 и система S стремится к регулярному положению равновесия со стремящимися к нулю скоростями, то t_1 — необходимо, бесконечно.

В том случае, когда S есть особое место и при $t \to t_1$ скорости $x_i'(t)$ стремятся к конечным пределам, то уравнения движения, в общем, не определят положение S для $t > t_1$. То же заключение имеет место, если скорости $x_i' \to \infty$ при $t \to t_1$ или, оставаясь конечными, не стремятся к предельным величинам, когда $t \to t_1$. При этом могут быть различные случаи, которые далее и исследуются.

Ю. Д. Соколов (1896—1971).

После трактовки ряда дальнейших важных проблем динамики [1] Пенлеве рассмотрел также аналитическую характеристику определяющих движение функций для трех категорий систем, не допускающих особых положений, а также интегрирование уравнений динамики с помощью рядов. Отдельные параграфы были посвящены трактовке проблемы трех тел и проблемы n тел. В дальнейшем Пенлеве посвятил ряд работ специально исследованию различных проблем механики и получил ряд весьма существенных результатов [2], хотя ему и не удалось решить все поставленные вопросы, а некоторые высказанные им положения не лишены ошибок, что позже показано, в частности, Ю. Д. Соколовым (76), доказавшим важную теорему о минимуме взаимных расстояний трех материальных точек.

Работы Пенлеве имели весьма большое значение и для развития одной из важнейших отраслей динамики—теории соударений. Инициатором этого рода исследований был Ф. А. Слудский, высказавший еще в 1878 г. теорему о необходимом условии общего соударения n материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. После работ Пенлеве эта проблема была предметом исследований Леви-Чивита, Бискончини, Зундмана, Армелини, В. П. Ермакова, Шази, Биркгофа (77) и других [3]. Полный анализ поведения величин, характеризующих движение трех тел в окрестности момента общего соударения, дан в докторской диссертации Ю. Д. Соколова [68.1]. Здесь же впервые установлены все условия общего соударения (одно для прямолинейного движения и два для плоского, кроме условия Ф. А. Слудского). Кроме того, доказаны теоремы, представляющие широкие обобщения теорем Слудского и Дзиобека, и исследованы все особые случаи соотношений масс, оставленные Шази без рассмотрения. Дальнейшее развитие и обобщение этот вопрос получил в последующих работах Ю. Д. Соколова, подытоженных в монографии [68.3].

---

[1] См. в [68.3, 7] теоремы 2, 3.
[2] См. об этом в [68.3, введение].
[3] Подробнее об этом см. в [68.3, 8—13].

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава X. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Постановка вопроса. Диссертация Каке и другие работы

Так как линейные уравнения являются одним из видов более общего класса дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными, то, естественно, на них распространяются теоремы существования и единственности голоморфных решений, рассмотренные выше. Вместе с тем линейные уравнения по своей структуре более простые и обладают рядом специфических свойств, благодаря чему оказалось возможным глубокое проникновение в их теорию и получение выводов весьма широкой общности. Достаточно напомнить, что первая общая теория интегрирования была создана Эйлером именно для класса линейных уравнений. Как раз здесь оказалась весьма благодатная почва для дальнейших многочисленных исследований. Мы не погрешим против истины, если отметим, что за первые 250 лет развития теории дифференциальных уравнений большая часть исследований посвящена именно уравнениям линейным. Уже к концу прошлого века здесь были созданы весьма глубокие и общие теории, пролившие свет и на другие отделы теории дифференциальных уравнений.

При этом были использованы новейшие результаты, главным образом из теории функций, из алгебры, теории групп и т. д.

Теоремы существования и их доказательства для линейных уравнений допускали иной подход, применение других или проще применяемых методов. При способе мажорант здесь можно взять за мажорирующие функции более специального вида. Это обстоятельство дает возможность иногда расширить область, в которой интегралы, установленные по теореме Коши, будут заведомо голоморфными.

Трактовка многих вопросов для систем линейных дифференциальных уравнений удобна с методической точки зрения, когда, не нарушая общности, можно рассматривать случай двух уравнений и результаты его распространить на систему любого конечного числа уравнений.

Для доказательства теорем существования интегралов линейных уравнений применялись с различными модификациями в

основном те же общие методы, о которых у нас шла речь раньше. В этом параграфе мы кратко остановимся на первых двух из них, в следующих рассмотрим применение метода мажорантных функций.

Одной из первых работ, где рассматривался вопрос отыскания решений линейных уравнений, была диссертация [118] Каке. Здесь наблюдалось своеобразное сочетание метода ломаных и метода последовательных приближений. Основная идея Каке выражена словами: «можно искать уравнение в частных разностях, совпадающее с предлагаемым, когда разности независимой переменной стремятся к нулю, затем ищут свойства этого уравнения, которые не зависят, большей частью, от этих разностей». Свой метод он рассматривал как новый для интегрирования линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = A(x) + A_0(x)\,y + A_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + A_p(x)\frac{d^p y}{dx^p}. \quad (10.1)$$

В соответствии с этим рассматривалось уравнение в конечных разностях

$$\frac{\Delta^{p+1}y}{\Delta x^{p+1}} = A(x) + A_0(x)\,y + A_1(x)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \ldots + A_p(x)\frac{\Delta^p y}{\Delta x^p}. \quad (10.2)$$

При этом указывается, что каждое уравнение, эквивалентное (10.2), будет иметь тот же предел, что и уравнение, эквивалентное (10.1), и что переменная рассматривается в форме $u+v\sqrt{-1}$, а коэффициенты $A_i(x)$ — величины, конечные для рассматриваемых значений x.

Отметим, что изложение Каке довольно трудоемкое, перегружено массой тождественных преобразований, которые мы опустим. В результате он пришел к соотношению

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = F(x) + \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x,z)\,dz.$$

Затем

$$\frac{d^p y}{dx^p} = a_p + \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} F(z)\,\varphi(x,z)\,dz$$

и т. д.

Обозначив, наконец, через $\psi_0(x)$ и $\psi(x)$ результаты, полученные после $p+1$ интеграции, и через $\theta(x) - \sum_{i=0}^{p} a_i \frac{(x-x_0)^i}{i!}$, можно записать общий интеграл в виде $y = \theta(x) + \psi_0(x) + \psi(x)$.

Следует отметить, что Каке в своей работе явно не говорит о теореме существования интеграла. Этот вопрос сливается у

него с методом отыскания интеграла, кстати говоря, довольно громоздким и на практике в общем случае мало приемлемым, что видел и сам автор.

Несколько позже аналогичный вопрос рассматривался в работах Фукса [153.4], Оливера [225], в статьях А. Старкова [70.1.—2].

Основываясь на работах Коши и применив своеобразный итерационный процесс, Старков предложил свой способ интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0 \quad (p_i = p_i(x)), \tag{10.3}$$

доказав вместе с тем существование их интегралов. Уравнение (10.3) приводилось к системе n совместных уравнений

$$\frac{dy}{dx} + Q_1 z = 0; \quad \frac{dz}{dx} + Q_2 v = 0, \ldots; \quad \frac{dt}{dx} + Q_n y = 0, \tag{10.4}$$

коэффициенты которых находились последовательным интегрированием соответствующих линейных дифференциальных уравнений порядка n—1 и ниже. Тогда общий интеграл уравнения (10.3) представлялся в форме суммы

$$\varphi = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x),$$

где функции находились последовательным интегрированием функций $Q(x)$ в определенном порядке. Сходимость рядов такого вида установлена для тех значений x, для которых существуют и ограничены функции Q_k. Практическое применение этого метода имело смысл лишь для уравнений второго порядка, когда функция Q могла быть определена простой квадратурой. Первая статья Старкова вызвала две полемические заметки проф. Е. Ф. Сабинина [61.1.—2], где последний пытался показать прямую связь работы Старкова с известным мемуаром Коши [122.8], а также отметил некоторые неточности в изложении Старкова. В ответ на это Старков [70.2] отклонил многие замечания Сабинина как недостаточно обоснованные и в свою очередь указал на ряд промахов в заметках Сабинина.

Четкая постановка теоремы существования решений для линейных дифференциальных уравнений и доказательство ее методом последовательных приближенных была предложена Пеано в 1887 г. Он рассмотрел вопрос (в области действительного переменного) для системы однородных уравнений и изящно доказал сходимость рядов, выражающих их интегралы во всем интервале непрерывности коэффициентов и единственность решений при заданных начальных условиях. Полученный результат распространен также и на случай неоднородных систем.

Несколько позже, в 1894 г., уже в процессе доработки метода последовательных приближений Пикар применил его специаль-

но и к доказательству существования интегралов линейных уравнений. Для уравнения вида (10.3) он повторил результат Пеано, а также доказал еще теорему о том, что если коэффициенты $p_i(x)$ зависят от произвольного параметра k, являясь целыми его функциями, когда x меняется от 0 до a, т. е. голоморфными во всей плоскости комплексного переменного k, то любой интеграл уравнения для тех же значений x есть функция, целая от k. Доказательство следует из равномерной сходимости ряда, представляющего интеграл внутри некоторого круга C (по переменному k), и использования формулы Коши, выражающей значение функции в области через ее значения на границе области.

Пикар не отметил здесь упоминаемой выше работы Пеано, и в связи, очевидно, с этим, последний позже (1897) в статье [232.4] отстаивал свой приоритет применения метода последовательных приближений к доказательству существования интегралов дифференциальных уравнений.

В дальнейшем различные варианты доказательства теоремы существования интегралов линейных уравнений и другие связанные с этим вопросы (для действительной области) были рассмотрены в статьях Гуцмера, Шлезингера, Полякова, Хилла, Пиконе, Бохера и других авторов.

§ 2. Теорема Фукса

Первая работа Фукса по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений опубликована в годичном отчете ремесленного училища Берлина в январе 1865 г.

В следующем году после небольших изменений и дополнений она появилась в журнале Крелля (т. 66) и стала основой огромного цикла работ как самого Фукса, так и его учеников и последователей. Эти работы составили одно из мощных направлений анализа прошлого века. Задавшись целью, под влиянием работ Брио и Буке, построить общую аналитическую теорию линейных дифференциальных уравнений, Фукс, естественно, прежде всего обратил внимание на доказательство теоремы существования интегралов таких уравнений. Он сначала отметил, что «главная задача в теории дифференциальных уравнений состоит не в приведении их к квадратурам, а гораздо важнее — в исследовании изменения их интегралов для всех точек плоскости, то есть для всех значений переменных, полученных из самого дифференциального уравнения» [153.1, 121].

Непосредственным толчком к занятиям Фукса данным кругом вопросов было изучение сочинений Римана и, в частности, его работы о гипергеометрическом ряде. Этим занятиям способствовали, как указал сам Фукс, и лекции Вейерштрасса об абелевых функциях, читанные им летом 1863 г. Изложенные там идеи послужили фундаментом теории линейных дифференциальных уравнений и оказали существенное влияние на способ, как

говорит Фукс, «абстрактного установления интеграла линейного дифференциального уравнения», т. е. на метод доказательства теоремы существования.

Фукс рассматривает уравнение

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y, \qquad (10.5)$$

где p_i — функции от x, имеющие лишь конечное число точек разрыва внутри простой (односвязной — *В. Д.*) замкнутой области T, однозначны и непрерывны в T. Около точки x_0 описывается окружность радиусом, равным расстоянию до ближайшей особой точки. Область круга называется здесь окрестностью точки x_0.

Если точка x_0 — не особая, то внутри T существует такая ее окрестность, в которой функция y — решение уравнения (10.5) — будет конечной, однозначной, непрерывной и удовлетворяющей заданным начальным условиям при $x = x_0$. Для доказательства обозначается: $\max |p_i| = M_i$ (в окрестности x_0), a_i — ближайшая к x_0 — особая точка, $|a_i - x_0| = r$ и $\dfrac{M_i}{1 - \dfrac{x - x_0}{r}} = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда для каждого целого k, следуя методу мажорантных функций,

$$\left| \frac{d^k p_i}{dx^k} \right|_0 < \left(\frac{d^k \varphi_i}{dx^k} \right)_0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (10.6)$$

где $[f(x)]_0 = [f(x)]_{x=x_0}$. Затем все производные функций y, удовлетворяющих уравнению (10.5), приводятся к виду

$$\frac{d^k y}{dx^k} = A_{k1}(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_{k2}(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + A_{km}(x)\, y, \qquad (10.7)$$

где величины A получаются из величин p и их производных операциями сложения и умножения. Далее строится уравнение

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \varphi_2 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + \varphi_m u, \qquad (10.8)$$

все производные интеграла которого могут быть представлены в форме, подобной (10.7)

$$\frac{d^k u}{dx^k} = B_{k1}(x) \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + B_{k2}(x) \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + B_{km}(x)\, u. \qquad (10.9)$$

Величины B получаются из соответственных величин A, когда вместо функций p и их производных подставлены соответственно функции φ и их производные.

Отсюда следует $B_{ki}(x_0) > |A_{ki}(x_0)|$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если найти решение уравнения (10.8) в виде функции u, однозначной, непрерывной, конечной в окрестности x_0 и удовлетворяющей началь-

ным условиям при $x=x_0$, то существует также однозначная, непрерывная и конечная функция y в окрестности x_0, удовлетворяющая уравнению (10.5) и заданным начальным условиям для $x=x_0$. Подстановкой $\frac{x-x_0}{r}=z$ уравнение (10.8) приводится к виду

$$(1-z)\frac{d^m u}{dz^m}=M_1 r\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}}+M_2 r^2\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}}+\ldots+M_m r^m u. \quad (10.10)$$

Пусть решение этого уравнения представляется рядом $u=\sum_0^\infty b_k z^k$, тогда для любого целого l можно установить соотношения

$$(m+l)(m+l-1)\ldots(l+1)\,b_{m+l}=(m+l-1)(m+l-2)\ldots;$$

$$\ldots(l+1)\cdot[l+M_1 r]\,b_{m+l-1}+M_2 r^2(m+l-2)(m+l-3)\ldots \quad (10.11)$$

$$\ldots(k+1)\,b_{m+l-2}+\ldots+M_m r^m b_l.$$

Беря здесь все b положительными, получаем

$$b_{m+l}=\frac{l+M_1 r}{m+l}\,b_{m+l-1}+\psi,$$

где $\psi>0$. Можно выбрать M_1 достаточно большим, чтобы $M_1 r>m$, и тогда $b_{m+l}>b_{m+l-1}$ для каждого целого l, т. е. величины b растут вместе с их индексами и $\frac{b_r}{b_s}$ ограничено при $r<s$ для любых r и s. Из равенства (10.11) находится отношение $\frac{b_{m+l}}{b_{m+l-1}}$ и его предел при $l\to\infty$ равный 1.

Вместе с тем $\lim\frac{b_{m+l}z^{m+l}}{b_{m+l-1}z^{m+l-1}}=z$, и, значит, ряд $u=\sum_0^\infty b_k z^k$ сходится для $|z|<1$.

Следовательно, уравнение (10.8) имеет внутри T, в окрестности x_0 интеграл, выражающийся рядом $\sum_0^\infty c_k(x-x_0)^k$ и удовлетворяющий любым положительным начальным условиям. Этим доказано и существование функции y, обладающей указанными выше свойствами.

Далее Фукс рассматривает вопрос существования интеграла вне указанной окрестности x_0. Областью T' называется область T за вычетом кругов довольно малых радиусов и содержащих особые точки. Соединяя эти кружки непересекающимися линиями с границей области T, он получает односвязную замкнутую

область T''. Внутри ее остается вышеопределенную функцию y продолжить некоторым способом, так что внутри T'' получится однозначная, непрерывная и конечная функция y, удовлетворяющая уравнению (10.5) и любым начальным условиям для каждой точки этой области. Но если выйти из точки x_0 и возвратиться в нее после одного или нескольких переходов через сечения, то y и его производные в общем получат значения, отличные от первоначальных. Ими как начальными условиями внутри T'' определяется функция, отличная от y. Таких функций можно получить бесконечно много. Далее речь идет о многолистной поверхности и сечениях, по разные стороны которых функция принимает различные значения и о переходе переменного x через сечения с одного листа на другой непрерывным образом вдоль бесконечно многих ветвей. «Этим,— заключает автор,— полностью определено поведение интегралов дифференциального уравнения (10.5) внутри T', когда в точке этой области установлены любые заданные начальные условия для y, $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$».

В скором времени (1870 г.) Фукс предложил в статье [153.4] новый вариант построения ряда, представляющего интеграл линейного дифференциального уравнения. Члены рядов такого вида строились в форме повторных квадратур по весьма простому закону, хотя на практике вычисление их было довольно трудоемким. Однако идея его весьма отлична от той, которую использовал раньше Каке, и носит более естественный и простой характер.

Фукс рассматривает уравнение вида

$$y^{(m)} = p_{m-1}y^{m-1} + p_{m-2}y^{m-2} + \ldots + p_0 y + p \qquad (10.12)$$

с заданными начальными условиями при $x = x_0$, $y = \eta_0$,

$$y' = \eta_1, \ldots, y^{(m-1)} = \eta_{m-1}, \qquad (10.13)$$

имея в виду, что точка x_0 — обыкновенная. Решение уравнения (10.12) ищется методом вариации произвольных постоянных в форме

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m, \qquad (10.14)$$

где функции $c_i(x)$ подлежат вычислению, а $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — система линейно независимых частных интегралов. После известных преобразований Фукс получает искомый интеграл [1] в форме

$$y = \sum_1^m y_i \int_{x_0}^x \frac{p\Delta_i}{\Delta}\, dx + \sum_1^m \gamma_i y_i, \qquad (10.15)$$

[1] Δ здесь означает определитель, получивший позже имя Вронского; Δ_i — коэффициент при $y_i^{(m-1)}$.

где γ_i — произвольные постоянные и $\gamma_1\eta_{1i}+\gamma_2\eta_{2i}+\ldots+\gamma_m\eta_{mi}=\eta_i$ для $i=0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Первое слагаемое он называет основным интегралом, принадлежащим к точке x_0. В случае однородного уравнения он обращается в нуль. Величина его не зависит от того, какой y_i брать из фундаментальной системы.

Введя обозначение линейного дифференциального оператора, исходное уравнение (10.12) можно записать в форме $D(y)-p=0$. Обозначив через $D_2(y)$ оператор, содержащий производную не выше $m-1$ порядка, можно положить $D(y)=D_1(y)-D_2(y)$ и представить данное уравнение в форме

$$D_1(y)=D_2(y)+p. \tag{10.16}$$

Затем рассматривается следующий процесс. Пусть u_0 — интеграл уравнения $D_1(y)=0$ при начальных условиях (10.13).

Положив в уравнении (10.16) $y=u_0+u$, видим, что u есть основной интеграл, принадлежащий к точке x_0, уравнения

$$D_1(u)=D_2(u)+F_0(x), \tag{10.17}$$

где $F_0(x)=D_2(u_0)+p$.

Пусть u_1 — основной интеграл уравнения $D_1(u)=F_0(x)$. Положив для (10.17) $u=u_1+v$, получим, что v есть основной интеграл уравнения

$$D_1(v)=D_2(v)+F_1(x), \tag{10.18}$$

где $F_1(x)=D_2(u_1)$.

Пусть u_2 — основной интеграл уравнения $D_1(v)=F(x)$. Положив в уравнении (10.18) $v=u_2+v_1$, получим, что v_1 есть основной интеграл уравнения

$$D_1(v_1)=D_2(v_1)+F_2(x), \tag{10.19}$$

где $F_2(x)=D_2(u_2)$ и т. д.

В результате этого интеграл y уравнения (10.12), удовлетворяющий начальным условиям, будет строиться в виде последовательности $y=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_r+v_{r-1}$, где u_ρ есть основной интеграл, принадлежащий x_0, для уравнения

$$D_1(y)=F_{\rho-1}(x);\ F_\rho(x)=D_2(u_\rho) \tag{10.20}$$

при $\rho>0$, а v_{r-1} — такой же интеграл уравнения

$$D_1(y)=D_2(y)+F_r(x). \tag{10.21}$$

Далее рассматривают применение этого процесса для непосредственного вычисления функций (u и F), не обращаясь каждый раз к дифференциальному уравнению. Из изложенного сле-

дует

$$u_\varrho = \sum_1^m c_{\varrho i} y_i \tag{10.22}$$

для $\rho > 0$, где $c_{\varrho i} = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(x)\,\Delta_i}{\Delta}\,dx$

и

$$D_2(u_\varrho) = \sum_1^m c_{\varrho i} D_2(y_i). \tag{10.23}$$

После соответствующих подстановок и замен переменных [1] из (10.20) и (10.23) при $\rho > 0$ следует

$$F_\varrho(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\,\Delta(t, x)}{\Delta(t)}\,ds. \tag{10.24}$$

Произведя еще соответствующую замену под знаком определителя и исходя из (10.22), получим также для $\rho > 0$

$$u_\varrho = \int_{x_0}^{x} \frac{F_{\varrho-1}(t)\,\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)}\,ds. \tag{10.25}$$

Согласно (10.24) находятся последовательно $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... и т. д., а формула (10.25) даст значения u_1, u_2, ..., u_n, составляющие ряд для интеграла y. Автор устанавливает сходимость ряда $F_1(x)+F_2(x)+\ldots$, отмечает, что интегралы берутся вдоль любой кривой, не проходящей через особую точку, обращая внимание на случай бесконечного пути, устанавливает также сходимость ряда $y=u_0+u_1+\ldots$ и то, что он удовлетворяет данному уравнению. В заключение показывается, что ряд, построенный Каке (см. § 1 этой главы), может быть рассмотрен как специальный случай указанного Фуксом класса представлений.

§ 3. Развитие вопроса в работах других ученых (Гюнтер, Шлезингер, Племель)

Усовершенствование доказательства теоремы Фукса о существовании интегралов линейных дифференциальных уравнений было предложено в 1897 г. молодым математиком П. Гюнтером. Основная идея его работы состоит в замене вспомогательного уравнения, рассматриваемого Фуксом, другим, общий интеграл которого может быть указан непосредственно.

---

[1] В том числе и под знаком определителя вместо производных $\frac{d^{m-1} v_i}{ds^{m-1}}$ станут $D_i(y)$, $i=1, 2, \ldots, m$; он обозначается $\Delta(t, x)$.

Рассматривая линейное однородное уравнение вида (10.5) при тех же предположениях, которые указаны в начале § 2 этой главы, и исходя из

$$\left|\frac{d^k p_\lambda}{dx^k}\right|_{x=x_0} < 1\cdot 2\ldots k\,\frac{M_\lambda}{r^k},\quad \lambda = 1, 2, \ldots, m$$

и

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\,\frac{M_\lambda}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^\lambda}\right|_{x=x_0} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)\,\frac{M_\lambda}{r^k},$$

получаем

$$\left|\frac{d^k p_\lambda}{dx^k}\right|_{x=x_0} < \left|\frac{d^k}{dx^k}\,\frac{M_\lambda}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^\lambda}\right|_{x=x_0}$$

Все производные от функции y, удовлетворяющей уравнению (10.5), приводятся к виду

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = A_{\alpha 1}(x)\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + A_{\alpha 2}(x)\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + A_{\alpha m}(x)\,y,$$

где величины A получаются из величин p и их производных действиями сложения и умножения. Далее образуется уравнение

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \frac{M_1}{1-\dfrac{x-x_0}{r}}\cdot\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^2}\cdot\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_m}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^m}u \qquad (10.26)$$

так, что все производные удовлетворяющей ему функции u представляются в виде

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = B_{\alpha 1}\,\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + B_{\alpha 2}\,\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots + B_{\alpha m}u.$$

Величины B получаются из соответственных величин A, когда вместо функций p_i и их производных подставить функции $\dfrac{M_\alpha}{1-\dfrac{x-x_0}{r}}$ и их производные; отсюда следует, что $B_{\alpha i}(x_0) > A_{\alpha i}(x_0)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Но общий интеграл уравнения (10.26) известен

$$u = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{s_\alpha},$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_m$ — корни уравнения

$$s(s-1)\ldots(s-m+1) = -M_1 rs(s-1)\ldots(s-m+2) + M_2 r^2 s(s-1)\ldots(s-m+3)\ldots + (-1)^{m-1} M_{m-1} r^{m-1} s + (-1)^m M_m r^m.$$

Людвиг Шлезингер (1864—1933).

Ряд, выражающий этот интеграл, сходится для $|x-x_0|<r$ и в этой области представляет функцию однозначную, конечную и непрерывную, которая вместе с ее производными до $m-1$ порядка может принимать любое положительное значение. Отсюда следует существование в той же области однозначной конечной и непрерывной функции y, удовлетворяющей уравнению (10.5) и принимающей любые заданные начальные значения.

По поводу заметки Гюнтера Фукс в том же журнале поместил замечание, где отметил свой приоритет в разработке данного вопроса, имея в виду неточности в рецензии Максима Бохера [104], считавшего основателем теории Римана и приписавшего Фуксу лишь обобщение метода Каке. Более общую и весьма прогрессивную постановку вопроса наметил Шлезингер (78) в 1905 г. В результате многолетнего изучения теории линейных уравнений и, в частности, работ Римана он пришел к заключению, что большинство изучаемых в этой теории вопросов, в особенности теоретико-группового характера, можно трактовать более глубоко, если их рассмотрение связывать не с однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка, а с системой n однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Кроме этого, поводом к его занятиям данным вопросом, как указано в статье [254.4], было то, что доказательство теоремы существования интегралов линейных уравнений Фуксом не выходило за пределы круга идей теории функций Коши—Вейерштрасса, в то время как сам Фукс уже в своем первом фундаментальном сочинении провозгласил курс следования идеям Римана. Шлезингер указывает как на один из недостатков метода доказательства Фукса тот, что при нем нельзя усмотреть характер сочетания мнимой и действительной части в моногенных интегралах, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению. Поэтому он считал небесполезным

развить метод доказательства существования интеграла системы уравнений, основанный на применении способа Коши—Липшица для случая действительной независимой переменной, а затем, постепенно следуя пути, указанному Риманом, для определения интеграла моногенной функции комплексного переменного подойти к случаю комплексной независимой переменной. В той части, где речь идет о случае действительной переменной, этот метод перекликался с тем, которым занимался Вольтерра (79) в его замечательных сочинениях в 1887—1899 гг. Эти сочинения, как указывал Шлезингер, тогда мало известные по эту сторону Альп, служили стимулом к его занятиям.

Для системы уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} \sum_{i-1}^{n} a_{ik}(x)\, y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.27}$$

где коэффициенты a_{ik} — однозначные и конечные функции действительного переменного x на отрезке (p, r), при заданной матрице $(y^0{}_{ik})$ от n^2 постоянных элементов с отличным от нуля определителем при $q<r$ строится интеграл-матрица

$$(y_{ik}) = \lim_m (y_{ik}^{(m)}) = (y_{ik}^{(0)}) \int_p^q (a_{ik}dx + \delta_{ik}).^1 \tag{10.28}$$

Здесь

$$\int_p^q (a_{ik}dx + \delta_{ik}) = I_p^q (a_{ik}) \tag{10.29}$$

— матрица, при $p = q$ переходящая в единичную и такая, что при $q = x$ элементы каждого ряда матрицы $I_p^x (a_{ik})$ представят функциональную систему, которая, будучи подставлена вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворит уравнению (10.27). Итак, матрица

$$(y_{ik}) = (y^0_{ik}) I_p^x (a_{ik}) \tag{10.30}$$

представит, следовательно, такую фундаментальную систему интегралов дифференциальной системы (10.27), которая при $x=p$ принимает начальные значения $(y^0{}_{ik})$; эта система будет, очевидно, однозначно определена заданием ее начальных значений.

После исследования свойств интеграл-матриц Шлезингер переходит к изложению случая комплексной переменной, рассмат-

---

[1] δ_{ik} — символ Кронекера, $\delta_{ik}=0$ для $i\neq k$, $\delta_{kk}=1$ и $(\delta_{ik})=1$ — единичная матрица.

ривая систему уравнений вида

$$du_k = d\xi \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(\xi, \eta)\, u_i + d\eta \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik}(\xi, \eta)\, u_i, \quad k = 1, 2, \ldots m, \quad (10.31)$$

где предполагается для простоты, что α_{ik}, β_{ik} есть однозначные, конечные и дифференцируемые функции действительных переменных ξ, η внутри односвязной области S на ξ, η-плоскости. Для этой системы устанавливаются известные условия интегрируемости

$$\left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial \eta}\right) + (\beta_{ki})(\alpha_{ik}) = \left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \xi}\right) + (\alpha_{ik})(\beta_{ik}).$$

Выполняя их и выбирая путь интегрирования целиком внутри S, строим матрицу

$$(v_{ik}) = \int_{\eta_0}^{\eta} (\beta_{ik}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{ik}) + \int_{\xi_0}^{\xi} (\alpha_{ik}(\xi, \eta)\, d\xi + \delta_{ik}),$$

удовлетворяющую уравнениям

$$D_\xi (v_{ik}) = (\alpha_{ik}); \; D_\eta (v_{ik}) = (\beta_{ik}), \lim_{\substack{\xi \to \xi_0 \\ \eta \to \eta_0}} (v_{ik}) = (\delta_{ik}),$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Для краткости она обозначается

$$(v_{ik}) = S \int_{(\zeta_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (\alpha_{ik} d\xi + \beta_{ik} d\eta + \delta_{ik}).$$

Эта матрица определена в любой точке (ξ, η) области S. Далее доказывается, что она будет однозначна внутри S. Она обладает также тем свойством, что каждый ее ряд, подставленный вместо $u_1, u_2, \ldots, u_m$, тождественно будет удовлетворять системе (10.31). Следовательно, (v_{ik}) представляет такую фундаментальную систему вполне интегрируемой системы (10.31), которая для $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ преобразуется в единичную матрицу (δ_{ik}). Тогда наиболее общая фундаментальная система уравнения (10.31), которая для $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ принимает произвольно заданные постоянные начальные значения (u^0_{ik}), содержится в форме $(u_{ik}) = (u^0_{ik})(v_{ik})$.

Определив так интеграл-матрицу, Шлезингер обращается затем к классической теории линейных дифференциальных уравнений, вводя понятие интеграл-матрицы, определенной кривой c, и, изучив ее свойства, возвращается к рассмотрению системы (10.27), предполагая уже $x = \xi + \eta\sqrt{-1}$ и a_{ik} моногенными функциями от x, голоморфными внутри односвязной замкнутой облас-

ти S x-плоскости. Полагая $y_k = u_k + v_k\sqrt{-1}$; $a_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}\sqrt{-1}$, он преобразует комплексную систему (10.27) при отделении действительной и мнимой частей в другую, но в общем вполне интегрируемую, и строит общий интеграл-матрицу для системы (10.27) в форме

$$(y_{ik}) = S\int_{x_0}^{x}(a_{ik}dx + \delta_{ik}) = SI_{x_0}^{x}(a_{ik}), \qquad (10.32)$$

при которой, как он отметил, «характер сочетания интегралов из их действительных и мнимых частей наглядным способом переходит в очевидность».

Не останавливаясь на рассмотрении всех аспектов интересной статьи Шлезингера, отметим, что здесь были существенно использованы не только результаты Вольтерра и основоположников теории — Коши, Фукса, но также и соответственных работ Фробениуса, Соважа, Кенигсбергера, Гефтера, Гейзеля, Ландсберга и других.

В другом плане было разработано более позднее доказательство той же теоремы Иосипом Племелем (80) в 1911 г. в статье [254.4]. По его замечанию до тех пор доказательство теоремы существования велось по существу дважды для окрестности регулярной точки $x = x_0$, представлявшей начальные условия, и для окрестности особой точки так называемого фуксова типа. Теперь Племель строил доказательства существования таким образом, что из существования решений для окрестности регулярной точки непосредственно следовало их существование при условии приближения x к особой точке a фуксового характера и что эти решения могут возрастать не быстрее, чем степень $|x-a|^{-M}$, где M — подходящая положительная величина. К тому же доказательство Племеля довольно простое по своей конструкции. Итак, рассматриваемое уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)\,y = 0 \qquad (10.33)$$

преобразуется в систему первого порядка заменами $y = u_1$, $(x-a)\,y' = u_2$, ... (в предположении, что a — особая точка фуксового характера) и при соотношениях

$$\begin{aligned}
(x-a)\,u_1' &= u_2;\\
(x-a)\,u_2' &= u_3 + u_2; \qquad (10.34)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(x-a)\,u_n' &= (n-2)\,u_n - (x-a)\,p_1 u_n -\\
&- (x-a)^2 p_2 u_{n-1} - \ldots - (x-a)^n p_n u_1.
\end{aligned}$$

Справа в системе (10.34) коэффициенты u в точке a регулярны. Тогда можно исходить из системы

$$\frac{du_i}{dx} = A_{i1}u_1 + \ldots + A_{in}u_n, \tag{10.35}$$

где аналитические коэффициенты $A_{i\lambda}(x)$ в точке a будут иметь полюсы не выше первого порядка.

Доказательство существования проводится обычным путем с помощью мажорант в предположении $x_0=0$; $a=1$. Через начальные значения $u_k(0)$, кторые по абсолютной величине меньше некоторого положительного g, выражаются все производные при последовательном дифференцировании системы (10.35) в форме

$$u_k^{(m)} = A_{k1m}u_1 + A_{k2m}u_2 + \ldots + A_{knm}u_n,$$

где коэффициенты $A_{k\lambda m}$ составлены из первоначальных и их производных действиями сложения и умножения. Далее обосновывается применение мажоранты в предположении, что все коэффициенты $|A_{kn}(x)|<G$, и рассматривается система

$$\frac{dU_i}{dx} = \frac{G}{1-x}U_1 + \ldots + \frac{G}{1-x}U_n, \tag{10.36}$$

которая при некоторых предположениях сводится к уравнению $\frac{dU}{dx} = \frac{nGU}{1-x}$, решение которого, единственное при $U(0) = g$ и $nG=M$, имеет вид

$$U = g(1-x)^{-nG} = g(1-x)^{-M}. \tag{10.37}$$

Оно может быть представлено и в форме ряда, сходящегося в единичном круге

$$U = g\left(1 + \frac{M}{1}x + \frac{M(M+1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots\right)$$

и являющегося рядом Тейлора для функции U, отсюда можно записать ряд Тейлора для $u_k(x)$, сходящийся в единичном круге

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1}x + \frac{u''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots, \tag{10.38}$$

и затем придти к уже известным заключениям. Но, как говорит Племель, из указанного выше доказательства сходимости можно узнать еще поведение $u(x)$ в фуксовой особой точке.

Предполагая регулярную точку x_0 расположенной так, что на окружности с центром x_0, проходящей через ближайшую особую точку a, не содержится других особых точек, и взяв опять $x_0=0$, $a=1$, он выводит, что в единичный круг входит одна особая точка, являющаяся простым полюсом коэффициентов $A_{k\lambda}(x)$. Они представятся рядом $A_{k\lambda}(x) = \frac{g_{k\lambda}}{1-x} + B_{k\lambda}(x)$, где степенной

ряд $B_{k\lambda}(x)$ сходится в единичном круге и, следовательно, обладает ограниченными коэффициентами. Учтя запись $\frac{g_{k\lambda}}{1-x} = g_{k\lambda}x+g_{k\lambda}x^2+\ldots$, видим ограниченность коэффициентов в разложении $A_{k\lambda}(x)$ (пусть по абсолютной величине меньших G). Применив сделанное выше заключение и вспомогательную функцию U, Племель получает непосредственно $|u(x)|<g[1-|x|]^{-M}$. Это говорит о том, что решение $u(x)$ растет не быстрее, чем $(x-1)^{-M}$, когда x приближается к единице изнутри круга по любому направлению, не совпадающему с касательной в точке 1, т. е. внутри угла, несколько меньшего чем π. При этом предполагается, что особая точка не обходится бесконечное число раз, ибо тогда $u(x)$ может возрастать на любую величину.

Затем Племель довольно простым способом дает доказательство того, что фуксова форма дифференциального уравнения в особой точке a является достаточной, что никакое решение не растет быстрее при неограниченном приближении к a, чем подходящая отрицательная степень расстояния от a. Решение этого вопроса облегчило дальнейшие шаги в исследовании интегралов линейных уравнений.

Глава XI. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Вводные замечания. Постановка задачи. Идеи Римана

Из рассмотренного в первой части следует, что основное внимание математиков при изучении нелинейных уравнений было обращено на установление таких их классов, в которых отсутствовали подвижные критические точки, и на исследование интегралов этих уравнений. И все же изучение уравнений с неподвижными особыми точками носило фрагментарный характер и не характеризовалось получением довольно общих результатов для всего типа уравнений. Значительно больший прогресс в этом отношении имел место в аналитической теории линейных уравнений, интегралы которых, как известно, обладают лишь неподвижными особыми точками. В таком случае аналитический характер интегралов линейных дифференциальных уравнений вполне определяется поведением их в области неподвижных особых точек. А неподвижные особые точки интегралов линейных уравнений обусловливаются их присутствием в коэффициентах данного уравнения. Такого рода непосредственная связь существенно облегчает решение общей проблемы исследования интегралов по заданному дифференциальному уравнению.

Быстрому прогрессу развития линейной аналитической теории дифференциальных уравнений содействовали такие факторы, как уже весьма завершенное построение общей теории линейных уравнений аналитиками XVIII и первой половины XIX веков, успехи в области теории подстановок, общей теории групп, теории инвариантов и т. п., упоминаемые ранее достижения в общей теории функций. Сравнительная простота формулировки задач, обширность поля исследования, а также зарождение новой теории в крупнейших германских научных центрах, где было сконцентрировано большое по тому времени число молодых научных работников, в том числе приезжавших и из других стран, и где выходила масса журналов с математическим содержанием, облегчавших печатание, повело к тому, что по этой теории за сравнительно короткое время появилось много публикаций, а среди них и немало фундаментальных работ. В иных случаях эти публикации весьма тесно переплетаются с такими, где трактуются другие аспекты общей теории линейных дифференциальных уравнений, и произвести их обособление не

так просто. В небольшом очерке [254.10] по развитию линейной теории (1865—1905 гг.). Людвиг Шлезингер привел в библиографии 1742 источника, отведя ей больше половины публикации. Существенная их часть принадлежит аналитической теории.

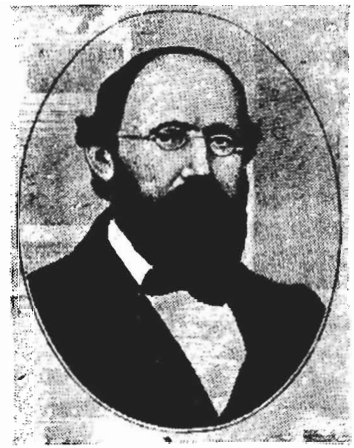
К концу прошлого и в начале настоящего века исследования по линейной теории дифференциальных уравнений велись практически уже во всех странах, где культивировалась научно-исследовательская работа по математике. Естественно, что в нашем очерке представляется возможность рассмотреть лишь основные работы и результаты, имевшие принципиальное значение для развития данной теории.

Как известно из общей теории, решение неоднородного линейного уравнения может быть найдено (методом вариации произвольных постоянных), если известен интеграл соответственного однородного уравнения. А общий (следовательно, и любой) интеграл однородного уравнения может быть выражен как сумма произведений произвольных постоянных C_i на соответственные линейно независимые частные решения y_i, т. е. $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$.

Но можно поставить вопрос иначе: об изучении совокупности функций y, линейно зависимых от n произвольных постоянных, при условии, что функции y_i регулярны во всей плоскости комплексного переменного x, за исключением конечного числа точек a_k. Впервые задачу такого рода изучал Риман [246.3] в 1857 г. для частного случая рассматриваемой теории: при наличии трех критических точек, для функций, удовлетворяющих уравнение второго порядка, частным случаем которого является известное гипергеометрическое. В то же время в статье [246.4] им был поставлен вопрос и в общей форме, но эта статья увидела свет впервые почти через двадцать лет, когда уже была в основном построена теория Фукса, исходной точкой которой служили дифференциальные уравнения. Риман же, оставаясь верным своим принципам, положенным в основу докторской диссертации [246.1], характеризует исследуемые им функции не с помощью формулы, роль которой могло бы играть дифференциальное уравнение или его решение, а посредством перечисления необходимых внутренних свойств, присущих изучаемым функциям, и, в частности, их поведением около особых точек, и уже в итоге исследования приходит к дифференциальному уравнению.

Вышеуказанные функции y_i могут быть охарактеризованы таким образом, что при обходе около каждой из точек a_k (k — конечно) любая y_i может быть выражена в форме линейной комбинации $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Иначе говоря, вся система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подвергается некоторому линейному преобразованию, которое считается заданным для каждой из точек a_k. Совокупность таких преобразований при обходе y_i по любым замкнутым путям, не проходящим через a_k, образует группу для дан-

ного семейства y_i. Исходя из заданных преобразований этой группы, Риман имел целью построить дифференциальное уравнение, имеющее своими интегралами все функции семейства. Установив ряд их свойств и характер коэффициентов интересующего его дифференциального уравнения, Риман, однако не смог определить вид этого дифференциального уравнения и доказать существование системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ той природы, которая требовалась в его работе. Отсюда возникла известная «проблема Римана», о которой речь будет впереди.



Бернард Риман (1826—1866).

Эта общая постановка вопроса не была известна Фуксу, но он мог хорошо изучить упоминаемую выше статью, где вопрос решался для частного случая. Здесь Риман прямо писал: «В настоящей работе я изучаю гауссову трансцендентную функцию посредством нового метода, который в сущности остается применяемым ко всякой функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами. С помощью этого метода можно почти непосредственно из определения вывести результаты, которые раньше получались иной раз в итоге достаточно кропотливых вычислений» [246.3, 159]. Автор вводит здесь понятие точки ветвления, для обозначения исследуемой функции символ

$$P = \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix} \right\}$$

и дает ее определение как удовлетворяющей трем указанным требованиям. Из них выводятся следствия, т. е. свойства функции P, изучается ее характер. В результате этого Риман пришел к заключению, что 1) если две ветви P-функции отличаются не только постоянным множителем, то всякая иная P-функция с теми же показателями выражается через эти ветви линейно, с постоянными коэффициентами; 2) функция, характеризуемая тремя указанными требованиями, определяется с точностью до двух констант; эти последние легко и во всех случаях находятся из значений функции для специальных значений переменной, удобнее всего подстановкой значений, соответствующих точкам ветвления. И здесь же он ставит вопрос, принципиально важный и трудность решения которого для случая $n>3$ критических точек, вероятно, была ему понятна, а именно: о существовании

функции, удовлетворяющей поставленным требованиям. В данном конкретном случае он решается построением функций с помощью определенных интегралов и гипергеометрических рядов. При этом, в частности, устанавливается, что «вторая производная P-функции выражается через саму функцию и ее первую производную линейно с рациональными относительно x коэффициентами, так что всякая P-функция удовлетворяет некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка» (стр. 171).

Интересно отметить, что этот мемуар Римана был написан в 1856 г. [246.10, 492], т. е. именно в том году, когда вышли известные «Исследования» Брио и Буке [112.7]. Появление этих работ, весьма различных по тематике, по характеру и главное по методу, обусловливалось и различными исходными точками. Исследования по гипергеометрическому ряду и получение весьма глубоких результатов были характерны для немецкой математики (Гаусс, Куммер, Якоби). Риман продолжил эти исследования принципиально новым и глубоким методом, идеи которого овладели затем вниманием и умами многих математиков. В то же время мы встречаемся с широкой и прямой постановкой более общего вопроса об исследовании функций по дифференциальным уравнениям на основе глубоких идей французской школы теории функций, который породил мощный поток исследований, в своем комплексе образовавших новую дисциплину. Таким образом, Римана можно рассматривать как одного из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений.

Нет необходимости, на наш взгляд, входить в сравнительные оценки роли и значения этих различных методов, дополняющих друг друга и содействующих прогрессу науки.

Таким образом, когда Фукс приступил в 1865 г. к построению основ аналитической теории линейных уравнений, он встретился с двумя, как могло показаться, независимыми направлениями в предшествующих работах. С одной стороны, установившиеся методы доказательства существования решений дифференциальных уравнений, широкое применение теории рядов, принцип аналитического продолжения и сложившиеся уже приемы исследования аналитического поведения решений в окрестности некоторых особых точек. С другой — пример исследования Риманом функций, представимых гипергеометрическим уравнением, показавшего возможность аналитической трактовки решений в случае линейных однородных дифференциальных уравнений, составленных по известным правилам и рассматриваемых как линейные комбинации некоторого семейства функций. Итак, в основе метода Фукса легко усмотреть сочетание обоих вышеупомянутых принципов, хотя сам Фукс указывает, что к своим исследованиям он был подведен изучением сочинений Римана.

§ 2. Разложение интегралов в области особых точек. Теория Фукса

В сочинениях [153.1.—2] Фукс рассматривает уравнение вида

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y, \tag{11.1}$$

находит необходимое и достаточное условие линейной независимости системы частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (как неравенство нулю в любой регулярной точке известного определителя) и вводит понятие фундаментальной системы. Задачу интегрирования уравнения (11.1) он рассматривает как исследование изменения интеграла в результате обхода около особой точки a. Итак, некоторый интеграл (11.1) можно записать в форме

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m, \tag{11.2}$$

где C_i — константы. После обхода особой точки a функции y_i перейдут в $\bar{y}_i$ и получим

$$\bar{y}_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \ldots + \alpha_{im} y_m, \tag{11.3}$$

где α_{ik} — константы. Тогда

$$\bar{u} = y_1 \sum_1^m \alpha_{i1} C_i + y_2 \sum_1^m \alpha_{i2} C_i + \ldots + y_m \sum_1^m \alpha_{im} C_i. \tag{11.4}$$

Умножив (11.2) на константу ω и вычитая из (11.4) и учитывая линейную независимость интегралов y_i, Фукс получает систему

$$\begin{aligned} &C_1(\alpha_{11} - \omega) + C_2 \alpha_{21} + \ldots + C_m \alpha_{m1} = 0; \\ &C_1 \alpha_{12} + C_2(\alpha_{22} - \omega) + \ldots + C_m \alpha_{m2} = 0; \\ &\quad \ldots \quad \ldots \\ &C_1 \alpha_{1m} + C_2 \alpha_{2m} + \ldots + C_m(\alpha_{mm} - \omega) = 0, \end{aligned} \tag{11.5}$$

где ω есть корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0. \tag{11.6}$$

Установив, что $\omega \neq 0$, Фукс принимает $\omega_k = e^{2r_k \pi \sqrt{-1}}$, уравнение (11.6), связанное с особой точкой a, называет фундаментальным и формулирует теорему о том, что коэффициенты уравнения (11.6) независимы от выбора фундаментальной системы. Иначе говоря,

корни этой системы характеризуют особую точку a уравнения, а не случайно выбранные интегралы.

Рассмотрев затем случай различных корней уравнения (11.6), он приходит к теореме, что каждой особой точке a принадлежит фундаментальная система $u_1, u_2, \ldots, u_m$, общий элемент которой перемножается со степенями $x-a$ и в окрестности a будет однозначным. Иначе говоря

$$u_1 = (x-a)^{k_1}\varphi_1; \quad u_2 = (x-a)^{k_2}\varphi_2, \ldots, \tag{11.7}$$

где $k_1, k_2, \ldots k_m$ — некоторые конечные величины, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ — однозначные функции в окрестности a.

Для случая кратных корней уравнения (11.6), когда имеется λ_i корней ω_i, так что $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m$ после довольно громоздкого изложения, автор приходит к резюме, что принадлежащие к фундаментальной системе группы интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= (x-a)^r\varphi_{11}; \\ u_2 &= (x-a)^r\varphi_{21} + (x-a)^r\varphi_{22}\log(x-a); \\ &\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot\ \cdot \\ u_\lambda &= (x-a)^r\varphi_{\lambda 1} + (x-a)^r\varphi_{\lambda 2}\log(x-a) + \\ &\quad + \ldots + (x-a)^r\varphi_{\lambda\lambda}[\log(x-a)]^{\lambda-1}, \end{aligned} \tag{11.8}$$

где r обозначает одно из бесконечно многих в целых числах друг от друга отличающихся величин выражений $\frac{\log\omega_h}{2\pi\sqrt{-1}}$, а функции φ — однозначны в окрестности $x-a$. Если $x=\infty$ — особая точка, то после подстановки $x=\frac{1}{t}$ в уравнение (11.1) рассматривается соответственная фундаментальная система для особой точки $t=0$.

Вопрос о представлении членов фундаментального уравнения был затем предметом рассмотрения многих математиков, стремившихся упростить их вид, особенно для случая кратных корней. Так, Гамбургер [169.1], опираясь на метод, предложенный Жорданом [186.1], разделял группу интегралов, принадлежащих кратному корню фуксова фундаментального уравнения в окрестности особой точки, на подгруппы такого свойства, что элементы каждой такой подгруппы при обходе около особой точки переходят только в линейные однородные функции друг друга [1]. При этом устанавливалась связь числа подгрупп и числа элементов в каждой из них с теорией Вейерштрасса элементарных делителей детерминантов [275.5]. Новый вывод теоремы Гамбургера относительно формы интеграла в окрестности особой точки, за

[1] Подробнее об этом см. в [2.1, гл. 2].

которую бралась $u=0$, в случае равных корней фундаментального уравнения был предложен Юргенсом в 1875 г.

Два новых вывода фуксова фундаментального уравнения дал Казорати в 1880 г. Существенный интерес представляло его следующее сообщение [120.3], где так же, как и в докладе Штикельбергера [261], совершенно разными путями развивается мысль Гамбургера о связи построения фундаментальной системы с теорией элементарных делителей. При этом были получены совпадающие результаты.

Распространение метода на системы линейных уравнений первого порядка осуществлено Соважем. В [253] он дал подробное изложение общей теории систем линейных однородных уравнений, следуя принципам Фукса с учетом последующих работ Фробениуса, Томé и особенно Горна.

Новый, более компактный вывод фундаментального уравнения и дальнейшее развитие идей Гамбургера, Казорати и других находим в работах Шлезингера 1894 г., а чуть позже Гамбургер предложил еще один вариант вывода фундаментального уравнения. Все эти выводы имели в виду представление аналитической формы решений в окрестности особой точки. В одной из последних работ [153.18], появившейся почти через 40 лет после первой по этой же тематике, Фукс предложил другой подход к представлению аналитической формы фундаментальной системы решений уравнения вида (11.1), которая следовала из фундаментального уравнения для любого замкнутого обхода u внутри области T. К сожалению, здесь была изложена лишь часть работы, подготовленной к печати.

Здесь же рассматривались вопросы: о конечности числа значений независимой переменной x, для которых отношения $\frac{y_i}{y_1}$ $(i=2, 3, \ldots n)$ могли принимать те же значения; о характере группы подстановок при определенных условиях для уравнения (11.1), наконец, относительно условий, при которых отношения $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \ldots \frac{\omega_n}{\omega_1}$ (где ω_i — корни принадлежащего обходу u_0 фундаментального уравнения) становились бы корнями из единицы. В случае же $p_1=0$ (для уравнения вида (11.1), когда величины $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ удовлетворяли условию $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n=1$, все они сами становились корнями из единицы. Частные случаи затронутой здесь проблемы ранее рассматривались Пикаром [235.17] и более подробно Шлезингером [264.1, т. 2, ч. 2].

Дальнейший прогресс в изучаемом вопросе связан с построением аппарата матричного исчисления и, в частности, с работами Вольтерра [271.2.—4] и их отражением в курсах Шлезингера [254.8 и др.]. Результат соответственных исследований, относящихся в целом к окрестности изолированной особой точки, где коэффициенты линейной дифференциальной системы однознач-

ны, следуя Шлезингеру, можно выразить следующим образом. Пусть для каждой линейной подстановки (c_{ik}) устанавливается дифференциальная система вида

$$\frac{d\eta_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \frac{r_{\lambda k}}{x-a} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.9}$$

(где r_{ik} — константы), для которой существует интеграл-матрица η_{ik}, которая испытывает заданные подстановки (c_{ik}) при обходе точки $x = a$. Решения такой системы, которая переводится подстановкой $x - a = e^t$ в систему с постоянными коэффициентами и независимым переменным t, составляются известным способом из выражения вида $(x-a)^{r_\alpha}$, $\log(x-a)$, где r_α есть корни характеристического уравнения

$$|r_{ij} - \delta_{ik} r| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots n). \tag{11.10}$$

Интеграл-матрица (y_{ik}), которая при обходе около $x = a$ испытывает подстановку (c_{ik}), представима затем в форме

$$(y_{ik}) = (\eta_{ik})(\varphi_{ik}),$$

где φ_{ik} — однозначны в окрестности $x=a$, т. е. могут быть представлены рядом Лорана. Таким образом, принципы идей Римана и Фукса сохранили свое значение и в дальнейшем.

§ 3. Случай регулярной особой точки

Формулы вида (11.7) или (11.8) давали только лишь качественную характеристику поведения интегралов в окрестности особой точки a. Для вычисления их необходимо было еще найти способ определения показателей ω_k и коэффициентов разложения в ряд Лорана функций φ по коэффициентам разложения функций p_i, входящих в уравнение (11.1). Так как величины r_k, входящие в формулы (11.7) и (11.8), зависели от $\log \omega_k$, то при надлежащем их выборе и при условии, что функции φ имели в точке a лишь полюсы, можно было добиться того, что эти функции φ в области точки a были бы голоморфны и отличны от нуля при $x=a$. Таким образом, случай, когда точка a для функций φ не являлась существенно особой, мог представить для всей теории особый интерес вследствие сравнительной простоты его изучения. Это имело место тогда, когда ряды Лорана для функций φ содержали только конечное число отрицательных степеней $x-a$. Решения, соответствующие этому случаю, Л. Томé [265.2] назвал регулярными, а особая точка соответственно дифференциального уравнения в этом случае стала называться регулярной. Если же она была существенно особой хотя бы для одной из функций φ, то называлась иррегулярной особой точкой уравнения.

Исследованием случая регулярных решений и занялся прежде всего Фукс в первых указанных нами работах (1865—1868 гг.). При этом прямой путь выше рассмотренной теории оказался малоэффективным. Поэтому надо было найти хотя и менее общий, но основательный способ для вычисления величин r_i простыми алгебраическими операциями из коэффициентов дифференциального уравнения, так же, как и определение коэффициентов ряда Лорана рекуррентными формулами.

Как следует из только что изложенного, регулярные решения линейных уравнений обладали тем простым свойством, что, будучи умноженными на некоторую целую положительную степень $x-a$, становились целыми (конечными) и голоморфными в области a. Очевидно, что таким свойством могло обладать не каждое уравнение с рациональными коэффициентами вида (11.1). И первая задача, которую поставил себе Фукс, как раз состояла в определении свойств коэффициентов p_i уравнений (11.1), которые обладали бы регулярными решениями. Но в процессе ее рассмотрения были решены и другие вышеуказанные вопросы. При этом был также рассмотрен и случай особой точки указанного вида для $x=\infty$.

Итак, Фукс исходил из уравнения (11.1) и после соответствующего исследования пришел к виду

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{\rho-1}(x)}{\psi}\cdot\frac{d^{m-1}y}{dm^{m-1}} + \frac{F_{2(\rho-1)}(x)}{\psi^2}\cdot\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{F_{(m-1)(\rho-1)}(x)}{\psi^{m-1}}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{F_{m(\rho-1)}(x)}{\psi^m}\,y, \qquad (11.11)$$

где $\psi=(x-a_1)\,(x-a_2)\,\dots\,(x-a_\rho)$, отмечая, что для выполнения поставленных в задаче условий уравнение (11.1) должно иметь именно такую форму.

Далее вводится замена $\dfrac{F_{j(\rho-1)}(x)\,(x-a)^j}{\psi^j} = P_{ij}(x)$, $i=1, 2, \dots \rho$, $(j=1, 2, \dots, m)$ и получается

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\cdot\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\cdot\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_{im}(x)\,y}{(x-a_i)^m}. \qquad (11.12)$$

Как было показано впервые Фуксом, эта форма уравнения, где P_{ih} являются аналитическими функциями в точке $x=a_i$, есть необходимая и достаточная, чтобы линейное дифференциальное уравнение (11.1) обладало регулярным решением. Иначе говоря, коэффициенты уравнения (11.1) $p_1, p_2, \dots, p_m$ в точке $x=a_i$ могут иметь соответственно полюсы только 1, 2, m-го порядка.

В первом доказательстве Фуксом этого положения имелся в виду случай исключительно регулярной особой точки, т. е. вышеуказанная характеристика ρ_i распространялась на всю плоскость. Через два года [153.2] он доказывает его в формулиров-

ке, не предполагающей определенного характера коэффициентов вне непосредственной окрестности особой точки.

Немного позже другое доказательство необходимости указанной формы, исходя из одной вспомогательной теоремы Фукса в [153.2], предложил Томé (81) в [265.1], используя для этого метод полной математической индукции, когда соответствующая форма получается для уравнения первого порядка. Он же рассмотрел вопрос о распространении исследования на такие уравнения, которые имеют меньшее число $n-h$ линейно независимых регулярных, по его терминологии, интегралов. В оригинальной обработке, с указанием некоторых исключений, которые имеют место в доказательстве Фукса, был изложен аналогичный материал (1875 г.) в большой статье [263] Жюля Таннери (82), основоположника этого нового направления во французской математике.

Для доказательства достаточности указанной формы, т. е. регулярности интеграла уравнения (11.12) в точках a_i, Фукс ищет решение в форме

$$y = (x - a_i)^r u, \tag{11.13}$$

где u определяется рядом

$$u = \sum_0^\infty c_j (x - a_i)^j \tag{11.14}$$

при $c_0 \neq 0$. Подставив эти выражения в уравнение (11.12) и сравнивая коэффициенты, для $(x - a_i)^{-m}$ получаем $P'_{im}(a_i)\, c_0 = 0$. Так как $c_0 \neq 0$, то $P'_{im}(a_i) = 0$, и отсюда можно искать элементы $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$ принадлежащей к a фундаментальной системы решений. Соответственные показатели $r_{i_1}, r_{i2}, \ldots, r_{in}$ будут удовлетворять уравнению

$$r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)\,P_{i1}(a_i) - \\ - r(r-1)\ldots(r-m+3)\,P_{i2}(a_i) - \ldots - rP_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0. \tag{11.15}$$

Это уравнение в работе [153.2, 220] было названо определяющим фундаментальным уравнением уравнения (11.1). Кстати, здесь для уравнения (11.1) Фукс ввел несколько иную, общепринятую сейчас форму записи, и соответственным образом была изменена форма записи уравнения (11.15). В дальнейшем за (11.15) сохранилось несколько более краткое наименование определяющего уравнения, предложенное Фробениусом в 1875 г.

Продолжая доказательство, Фукс упорядочивает по действительной части корни $r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{im}$ и, положив $y = (x - a_i)^{r_{i1}} U$, возвращается к уравнению (11.1), получает новое (11.16) [1] отно-

[1] Здесь не выписано.

сительно U, подставляет потом в него степенной ряд и т. д. и находит корни нового уравнения типа определяющего. Применяя метод мажорантных функций, он доказывает потом существование интеграла уравнения (11.16) в форме ряда (11.14). Этот ряд сходится внутри некоторого круга и в окрестности a_i определяет некоторую голоморфную, отличную от нуля в a_i, функцию U. Тогда частный интеграл уравнения (11.1) y_{i1}, перемножаясь с $(x-a_1)^{-r_{i1}}$, даст однозначную, конечную и непрерывную в окрестности a_i и отличную от нуля в a_i функцию. Положив потом

$$y = y_{i1} \int z dx, \tag{11.17}$$

Жюль Таннери (1848—1910).

автор получает для z уравнение вида

$$\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = \frac{G_{i1}(x)}{x-a_i}\cdot\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \frac{G_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\cdot\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \ldots + \frac{G_{i,m-1}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}z, \tag{11.18}$$

где коэффициенты $G_{ik}(x)$ — внутри некоторого, описанного около a_i круга S — функции однозначные, конечные и непрерывные. Корни соответственного уравнения

$$\begin{aligned} r'(r'-1)\ldots(r'-m+2) - r'(r'-1)\ldots(r'-m+3)G_{i1}(a_i) - \\ - r'(r'-1)\ldots(r'-m+4)G_{i2}(a_i) - \ldots \\ \ldots - r'G_{i,m-2}(a_i) - G_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{aligned} \tag{11.19}$$

будут $r_{i2}-r_{i1}-1$, $r_{i3}-r_{i1}-1, \ldots r_{im}-r_{i1}-1$ (упорядоченные по действительной части).

Поступая таким же образом, как и выше, обосновывается существование функции z, которая, перемножаясь с $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$, внутри круга S — однозначна, непрерывна, конечна и отлична от нуля в a_i. Если подставить затем в (11.17) z_1 вместо z, получаем интеграл уравнения (11.17) вида

$$y_{i2} = \varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a_i), \tag{11.20}$$

где φ_1 и φ_2 содержат конечное число степеней $(x-a_i)^{-1}$, так что y_{i2}, перемножаясь с конечной степенью $x-a_i$, для $x=a_i$ будет конечно.

Положив затем $z = z_1 \int t dt$, Фукс находит для t уравнение $m-2$ порядка, сходное с (11.18), где функции $\bar{G}_{ik}$ обладают свойствами, аналогичными с G_{ik}, и для уравнения, подобного (11.19), получает

корни $r_{i3} - r_{i2} - 1$, $r_{i4} - r_{i2} - 1, \ldots r_{im} - r_{i2} - 1$ и т. д. и обосновывает существование функции t_1 со свойствами, аналогичными z_1, внутри S_1. Тогда для уравнения (11.18) записывается интеграл вида $z_2 = \varphi_1' + \varphi_2' \log(x - a_i)$, где φ_1' и φ_2' имеют свойства, аналогичные φ_1 и φ_2. Подставив z_2 вместо z в (11.17), получаем частный интеграл уравнения (11.1) вида

$$y_{i3} = \varphi_1'' + \varphi_2'' \log(x - a_i) + \varphi_3'' \log^2(x - a_i),$$

где φ_1'', φ_2'', φ_3'' имеют свойства функций φ_1, φ_2. Продолжая этот процесс, Фукс доказывает таким образом существование m частных интегралов уравнения (11.12), определенных в окрестности точки a_i, удовлетворяющих поставленным условиям и образующих фундаментальную систему. Отсюда следовало, что подобным свойством обладают все интегралы уравнения вида (11.12) и, значит, (11.11). Уравнения такого вида впоследствии получили название уравнений класса Фукса.

Из полученных результатов Фукс вывел ряд интересных следствий. Так, если функция F, перемножаясь с $(x-a_i)^{-k}$, в окрестности a_i принимает форму многочлена

$$(x - a_i)^{-k} F = \varphi_0 + \varphi_1 \log(x - a_i) + \varphi_2 [\log(x - a_i)]^2 + \ldots$$

$$\ldots + \varphi_n [\log(x - a_i)]^n,$$

коэффициенты которого в окрестности a_i — однозначные, конечные и непрерывные функции от x, то k можно выбрать так, что $(x-a_i)^{-k}F$ для $x=a_i$ будет также отлична от нуля и конечна как целая функция от $\log(x-a_i)$ с постоянными коэффициентами a, b, c, ... l, т. е.

$$L = a + b \log(x - a_i) + c [\log(x - a_i)]^2 + \ldots + l [\log(x - a_i)]^s.$$

В таком случае функция F называется принадлежащей к показателю k. Разобрав свойства таких функций, Фукс формулирует затем теорему о том, что к каждой особой точке a_i уравнения (11.11) принадлежит уравнение (11.15). В окрестности некоторой из этих точек имеется всегда фундаментальная система, элементы которой соответствуют корням уравнения (11.15) таким образом, что каждому корню принадлежит элемент как к его показателю. После несложных рассуждений устанавливается, что если интегралы уравнений (11.11) не содержат логарифмов, то уравнения (11.15) не должны иметь равных корней, а также и то, что если разность принадлежащих к одной из особых точек a_i (точке ∞) корней уравнений (11.15) отлична от нуля или целого числа, то интеграл уравнения (11.11) в его выражении в окрестности этой точки не содержит логарифмов. Если некоторые из этих разностей — целые числа, то логарифмы могут входить в данное выражение.

Из сказанного легко сделать важный вывод о том, что если дифференциальное уравнение обладает только алгебраическими интегралами, то оно должно иметь форму (11.11). В этом случае корни уравнений (11.15) должны быть различными друг от друга рациональными числами.

Дополнение и некоторое развитие к первым двум работам Фукса было дано в [153.2]. Здесь уделено внимание прежде всего случаю, когда определяющее уравнение имело кратные корни. Чтобы показать, что r корней определяющего уравнения в самом деле соответствуют независимым друг от друга интегралам, Фукс упорядочивает корни определяющего уравнения в группы так, что каждая из них содержит равные друг другу или отличающиеся целыми числами корни. Корни внутри группы упорядочиваются так, что если $\alpha<\beta$, то $r_\alpha - r_\beta > 0$. Сначала доказывается, что корень r_0 соответствует интегралу вида (11.13). Сходимость ряда в окрестности a_i доказывается методом мажорантных функций. Отсюда получается сходимость ряда до ближайшей особой точки. Посредством подстановок вида (11.17) можно получить для определения остальных интегралов каждой группы новые дифференциальные уравнения, к которым применимы уже известные способы [1].

Затем Фукс уточняет понятие существенно и несущественно особой точки, записывает после соответственного анализа уравнение в форме

$$(x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} p_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m(x)\, y = 0 \tag{11.21}$$

и формулирует вывод о необходимых и достаточных условиях, чтобы точка a была несущественно особой точкой (83) уравнения (11.1). Первое из них состоит в том, чтобы в окрестности этой точки уравнение имело вид (11.21), где функции $p_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots m)$ в окрестности a однозначны, непрерывны и конечны. Остальные три условия связаны со значением $p_i(a)$, характером корней соответствующего определяющего уравнения и значениями некоторых определителей.

§ 4. Развитие идей Фукса в трудах других ученых

Выше упомянутые работы Фукса вызвали большой поток дальнейших исследований, дополняющих, уточняющих и расширяющих полученные им результаты. Так, Мост в 1870 г. при вы-

[1] Как отметил Хилб [172.2, 479, 481], в работе Петцваля (1859) имелись рассуждения о виде коэффициентов для уравнения (11.12) в расплывчатой и неясной форме, как и подход к рекуррентному способу вычисления логарифмических членов.

воде формы интеграла в случае кратных корней определяющего уравнения пытался использовать прием: рассмотрение этого случая как граничного для случая неравных корней.

Существенный интерес для развития теории представляли исследования Фробениуса в 1873—1875 гг. Так, в статье [151.1] он резонно отметил, что метод доказательства Фукса существования интегралов в случае кратных корней определяющего уравнения, опирающийся на метод мажорантных функций, весьма общий. Поэтому можно было ожидать, что в случае линейных уравнений к цели могут привести более простые методы. Фробениус (84) и поставил себе задачу: построить такое доказательство, непосредственно исходя из самого уравнения. Ему удалось найти способ прямого вычисления коэффициентов тех интегралов, в разложение которых в общем входили логарифмы, избегая употребления дифференциальных уравнений низших порядков, что требовалось по способу Фукса.

Для простоты рассуждений Фробениус за особую точку принимал $x=0$, рассматривая уравнение вида

$$P(y) \equiv p(x)\, x^{\lambda} y^{(\lambda)} + p_1(x)\, x^{\lambda-1} y^{(\lambda-1)} + \ldots + p_{\lambda}(x)\, y = 0, \tag{11.22}$$

где $p(x) \neq 0$ для $x = 0$, и принимая затем $p(x) = 1$. Тогда интеграл этого уравнения y мог быть представлен рядом вида

$$y(x, \rho) = \Sigma\, g_{\nu} x^{\rho+\nu}.$$

Посредством введения функции

$$f(x, \rho) = \rho(\rho-1)\ldots(\rho-\lambda+1)\, p(x) + \rho(\rho-1)\ldots$$

$$\ldots(\rho-\lambda+2)\, p_1(x) + \ldots + p_{\lambda}(x) = \Sigma\, f_{\nu}(\rho)\, x^{\nu}, \tag{11.23}$$

которая для $x = 0$ переходит в $f(\rho)$, получаются для коэффициентов ряда $y = \sum\limits_{\nu} g_{\nu} x^{\rho+\nu}$ (11.24), удовлетворяющего уравнению (11.22), рекуррентные формулы вида

$$\begin{gathered} g f(\rho) = 0; \qquad (11.25) \\ g_1 f(\rho+1) + g f_1(\rho) = 0; \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ g_{\nu} f(\rho+\nu) + g_{\nu-1} f_1(\rho+\nu-1) + \ldots + g_1 f_{\nu-1}(\rho+1) + g f_{\nu}(\rho) = 0, \end{gathered}$$

где ρ — корень принадлежащего к $x = 0$ определяющего уравнения $f(\rho) = 0$.

Своеобразность метода Фробениуса состоит затем в том, что, абстрагируясь от этого первого уравнения, рассматривается изменение величины ρ при условии $|\rho-\rho_j| > \delta > 0$ $(j=1, \ldots \lambda)$, где δ — фиксированное и достаточно мало. Коэффициенты g_{ν} затем

также рассматриваются как функции ρ. Тогда ряд

$$y = \Sigma g_\nu(\rho)\, x^{\rho+\nu} = g(x, \rho) \qquad (11.26)$$

будет интегралом уравнения

$$P(y) = f(\rho) \cdot g(\rho)\, x^\rho.$$

После ряда преобразований Фробениус получил выражение

$$y = g^k(x, \rho_k) = x^{\rho_k} \sum \Big\{ g_\nu^{(k)}(\rho_k) + k g_\nu^{(k-1)}(\rho_k) \log x + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} g_\nu^{(k-2)}(\rho_k) (\log x)^2 + \ldots \ldots g_\nu(\rho_k) (\log x)^k \Big\} x^\nu, \qquad (11.27)$$

Георг Фробениус (1849—1917).

представляющее принадлежащий корню ρ_k интеграл дифференциального уравнения $P(y) = 0$ (11.22). Это будет и общий интеграл такого рода, который связан здесь через $g(x, \rho)$ с произвольной функцией от ρ как сомножителем и содержит $k + 1$ произвольную константу. Из этой формы довольно легко следуют некоторые теоремы, найденные Фуксом и Томé, так же, как и условия того, что в интеграл, при надлежащий показателю ρ_k, не входят логарифмы.

Прямые подходы к вычислению интегралов, содержащих логарифмы, находим в диссертации Фабри (1885 г.) и учебнике Гефтера [171.1].

Непосредственная связь исследования неоднородного линейного уравнения с соответственным однородным была рассмотрена Фуксом уже в [153.2]. Несколько позже Гефтер, Шлезингер и другие также исследовали разложения на подгруппы корней определяющего уравнения и изучали зависимость от этого формы интегралов. Поведение интегралов в окрестности особой точки a для уравнения вида

$$(x-a)\frac{d^n y}{dx^n} = E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + E_n(x)\, y,$$

где $E_i(x)$ в окрестности точки a однозначные и непрерывные, изучал Похгаммер (85) в 1871 г. Он нашел условия отсутствия в интеграле логарифмов и существования $n-1$ линейно независимых в a аналитических интегралов. Через 40 лет после этого в более общей форме поведение интеграла уравнения (11.1) в области особой точки $x=0$ изучал Перрон. Он получил довольно простое и полное решение проблемы, обобщив, в частности, пре-

дыдущие результаты в форме теоремы: если коэффициенты уравнения (11.1) обладают в точке a полюсом не выше порядка s, то по крайней мере $m—s$ интегралов в точке a ведут себя аналитически.

Усовершенствование метода доказательства сходимости рядов, выражающих интегралы линейных однородных уравнений в известной теореме Фукса, было предложено А. Кнезером в 1896 г. Несколько позже аналогичная проблема совсем иным путем и в более общей форме трактовалась Шоттки [256].

Для систем дифференциальных линейных уравнений первого порядка необходимые и достаточные условия, выражающие их форму (при наличии регулярных точек), не имели подобной простоты.

Однако с 1886 г. появился цикл работ Соважа, посвященных рассмотрению этого вопроса. Им были применены основные идеи Фукса для исследования формы и существования регулярных интегралов в окрестности особых точек для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Он рассматривал систему вида

$$(x-x_0)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11.28)$$

где коэффициенты a_{ik} — голоморфные функции в окрестности x_0, и установил, что необходимым условием регулярности точки $x=x_0$ системы является то, что коэффициенты системы должны иметь в этой точке полюсы только первого порядка, т. е. она имеет форму (11.28). При этом сначала показывается, что система имеет по крайней мере одно решение, элементы которого $y_i = (x-x_0)^r\varphi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где φ_i — сходящиеся в окрестности x_0 ряды Тейлора по $(x-x_0)$, а r — корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0, \qquad (11.29)$$

где a_{ik}^0 есть a_{ik} при $x=x_0$. Посредством найденного решения данная система приводится к системе подобного вида с $n-1$ неизвестными функциями, которая допускает решение с указанными свойствами. Продолжая этот способ рассуждения, Соваж нашел, что данная система имеет n регулярных решений, образующих фундаментальную систему. Систему (11.28) Соваж назвал канонической. Он далее установил, что каждая линейная система с однозначными коэффициентами в окрестности $x=x_0$, для которой точка x_0 является регулярной, должна приводиться к виду (11.28) рядом подстановок определенной формы. Более подробно вопрос освещен в [253].

Некоторые пробелы в работах Соважа были восполнены частично Кенигсбергером [195.2, гл. VI]. Весьма полно и в безупречной форме вопрос чуть позже трактовался Горном. Соваж и Кенигсбергер свои суждения о достаточности формы (11.28) основывали на методе Фукса, в то время как Горн и немного ранее Грюнфельд исходили из упоминаемого выше метода Фробениуса. Дальнейшее пополнение теории находим в монографии Горна [177.1]. Он первым отметил, что в случае систем многократному корню определяющего уравнения также могут соответствовать многие различные элементарные делители фундаментального уравнения, так что многократному корню может принадлежать больше чем один свободный от логарифмов интеграл. Подобный случай не имеет места для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений или для канонической системы, происходящей из таковых подстановкой

$$y_k = (x - x_0)^{k-1} \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad [172.2,\ 485]$$

Несколько позже прямое доказательство основной теоремы Соважа предложил Шлезингер, существенно опираясь на соответственные результаты Вольтерра [271.3]. Далее подобный метод с успехом был применен в заметке [100.2] Биркгофом, использовавшим идею Ляпунова, имевшую место при доказательстве одной из теорем в [43.2] [1]. Биркгоф проводит исследование сначала для уравнения второго порядка, затем весьма лаконично обобщает полученный результат на систему

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ имеют не более как полюсы первого порядка в данной регулярной особой точке a. В этом случае существует такое число M, что в некоторой окрестности $x = a$ будем иметь

$$|a_{ij}(x)| \leqslant \frac{M}{r}; \quad \left|\frac{dy_i}{dx}\right| < \frac{M}{r} \sum_{j=1}^{n} |y_j|, \quad \text{где } r = |x - a|.$$

Если рассмотреть потом положительную действительную функцию $U = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2$, то найдем

$$\left|\frac{\partial U}{\partial r}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |2y_i y_i'| \leqslant \frac{2M}{r}\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right) \leqslant \frac{2nM}{r} U.$$

[1] См. [235.17, изд. 3, стр. 385]. Именно через источник [43.2] (1-е издание) эта идея стала известна Биркгофу, как видно из вводной части его статьи.

Это значит $-\frac{2nM}{r} \leqslant \frac{\partial \ln U}{\partial r} \leqslant \frac{2nM}{r}$, откуда следует $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-2nM} \leqslant \frac{U_0}{U} \leqslant \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2nM}$ или $U \leqslant U_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2nM}$, где U_0 — значение U на расстоянии r_0 от $x=a$.

Обозначая через **G** верхнюю границу таких величин для $0 \leqslant \arg(x-a) < 2\pi$, получим $U \leqslant G\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2nM}$. Отсюда можно получить оценку для модуля y в данном секторе, т. е., как говорит Биркгоф, это значение y становится бесконечным только конечного порядка в $x=a$. Отсюда легко следуют все дальнейшие заключения.

Вышеупомянутые доказательства Шлезингера и Биркгофа имеют место также и в случае, когда коэффициенты уравнения являются неаналитическими функциями. Впервые для этого случая рассматривались несущественно особые (как он говорил, регулярные) точки Бохером в 1900 г. посредством метода последовательных приближений. Дункель распространил вскоре метод Бохера на системы.

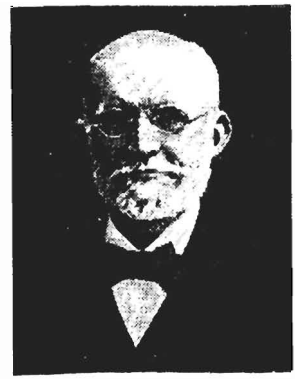
§ 5. Разложение интегралов в области других особых точек. Нормальные интегралы. Работы Томé и других ученых

Мы уже упоминали, что Томé [265.1.—2] стал изучать уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y = 0 \qquad (11.30)$$

такого вида, когда по крайней мере $n-h$ его линейно независимых интегралов в точке a ведут себя определенно (т. е. регулярно в смысле предыдущих параграфов). Величина h получила название характеристического индекса. Томé сперва показал, что если в уравнении (11.30) коэффициенты от p_1 до p_h $(h \geqslant 1)$ становятся бесконечными конечного порядка (имеют полюсы) и уравнение должно иметь по крайней мере $n-h$ линейно независимых регулярных интегралов, то остальные коэффициенты для $x=a$ должны быть такого же вида, и характеристический индекс есть $\leqslant h$. Для случая $h=0$ следовала известная теорема Фукса, о чем шла речь выше. Если же индекс совпадает с порядком уравнения, то оно не имеет регулярных интегралов. В дальнейшем Томé посвятил большую серию статей изучению данной проблемы, увязывая ее с вопросами приводимости и неприводимости уравнений. Как один из важных результатов была получена теорема о том, что существование k линейно независимых в точке a регулярных интегралов $(k<n$ — *В. Д.*) эквивалентно тому, что существует линейное дифференциальное уравнение k-го порядка, для которого точка a регулярна и все интегралы

которого удовлетворяют данному дифференциальному уравнению.



Людвиг Томé (1841—1910).

Здесь не представляется возможным рассмотреть многие интересные и важные его результаты. Ученик Вейерштрасса и Куммера, ближайший друг Г. Кантора Томé был не только коллегой и преемником профессуры у Фукса, но одним из активнейших его последователей и сотрудников по разработке аналитической теории линейных уравнений. Ей он оставался верен всю свою жизнь, начав публикации с 1871 г. и продолжая их в течение дальнейших почти сорока лет и при том исключительно в журнале Крелля. Если, как свидетельствует Энгель [140, 266], о Фуксе говорили, что он своей теорией линейных дифференциальных уравнений в математическом государстве добавил новую провинцию, то нельзя не заметить, что Томé выполнил очень большую и не менее важную работу для окончательного завоевания этой провинции. Но так как он не был первооткрывателем в этой области, то не так просто охарактеризовать его вклад в нее. Да и сам Томé мало способствовал этому формой своего изложения, требующей основательного изучения, чтобы понять сущность работы и степень ее оригинальности. После публикаций в 74—95 томах журнала в 96-м томе Томé поместил подробный систематический обзор [265.3] своих работ за прошедший десятилетний период объемом в 97 страниц. Этот отчет был написан по рекомендации Вейерштрасса, подчеркивавшего, что работы Томé нелегко читать. Следующий, более краткий, обзор своих работ Томé поместил в 122-м томе (1900 г.) того же журнала.

Некоторые из первых теорем Томé были выведены Фробениусом более простым способом уже в 1875 г. благодаря применению его понятия неприводимости линейных дифференциальных уравнений. А в диссертации Флокé (1879 г.) (последователя Таннери) были подробно изложены примыкающие к работам Фукса исследования Томé и Фробениуса, дополненные собственными изысканиями автора. Установленную благодаря этому связь с Флокé Томé поддерживал до конца жизни.

Итак, Томé был первым, рассматривавшим построения в духе Фукса, но для более общего класса особых точек.

Далее Томé (в 1877 г. и следующих) открыл и подробно исследовал простейший случай класса нерегулярных интегралов, которые он назвал нормальными элементарными интегралами. Эти интегралы имеют вид

$$\mu = e^{g(x)}(x-a)^r \varphi(x), \qquad (11.31)$$

где $g(x)$ — целая рациональная функция от $(x-a)^{-1}$ и $\varphi(x)$ — обыкновенный степенной ряд по $x-a$ для $x=a$, отличный от нуля. Автор назвал r принадлежащим показателем и $g(x)$ определяющим множителем. Такие элементарные интегралы определяются уравнением

$$\frac{dy}{dx} - qy = 0, \tag{11.32}$$

где $q = \frac{d}{dx}\log\mu$ для $x=a$ однозначна и бесконечна конечного порядка. Имея l выражений вида (11.31) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, положив $q_k = \frac{d}{dx}\log\mu_k$ и построив совместную систему

$$\frac{dy_i}{dx} - q_{i+1}\,y_i = y_{i+1}\,(i = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{11.33}$$

получаем, что y удовлетворяет уравнению l-го порядка формы (11.30), интеграл которого имеет вид

$$\mu_1 \int dx \frac{\mu_2}{\mu_1} \int dx \frac{\mu_3}{\mu_2} \ldots \int dx \frac{\mu_k}{\mu_{k-1}}, (k = 1, 2, \ldots, l). \tag{11.34}$$

Это выражение образует систему нормальных элементарных интегралов.

Если характеристический индекс h уравнения (10.30) для $x=a$ больше нуля, то встает вопрос о наличии элементарного интеграла (11.31). Для отыскания показателя r получается алгебраическое уравнение степени $n-h$, и тогда можно установить возможные формы определяющих множителей. Если до сих пор не встречалось противоречие, то для $\varphi(x)$ получается в заключение вполне определенный степенной ряд, коэффициенты которого могут быть получены алгебраическими операциями. Итак, дело сводится к исследованию сходимости этого ряда, что в отдельных случаях, как показал автор, может быть рационализировано.

Если обозначить левую часть уравнения (11.30) через $G_n(y, x)$ и положить $y = e^{g(x)}z$, получим $G_n(y, x) = e^{g(x)}\overline{G}_n(z, x)$, где $\overline{G}_n$ построено так же, как и G_n. Если выбрать $g(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{(x-a)^\nu}$, то коэффициенты $\overline{G}_n$ в окрестности $x=a$ получаются как рациональные функции и можно искать определение $g(x)$ таким образом, что $\overline{G}_n$ для $x=a$ получит характеристический индекс нуль, что, как говорит Томé, при $x=a$ даст регулярное дифференциальное выражение. Возможно, это следует только одним способом и тогда G_n при $x=a$ называется нормальным дифференциальным выражением. Оно заведомо обладает при $x=a$ системой n линейно независимых нормальных элементарных ин-

тегралов, так как $\overline{G}_n$ при $x=a$ обладает только регулярным интегралом.

Если коэффициенты p_k уравнения (11.30) — рациональные функции, то можно пытаться так определить рациональную функцию $g(x)$, что $\overline{G}_n$ для каждой особой конечной и бесконечной точки получит характеристический индекс нуль. Если указанное требование вообще выполнимо, здесь можно выбирать $g(x)$ единственным способом и тогда $\overline{G}$ есть нормальное дифференциальное выражение, которое обладает вообще только нормальным элементарным интегралом. Так определенный класс дифференциальных уравнений (11.30) с рациональными коэффициентами охватывает класс Фукса как отдельный случай и по справедливости может быть назван классом Томé. Разумеется, в этом классе не так просто охарактеризовать рациональные коэффициенты уравнения (11.30), как в классе Фукса. Но Томé далеко не ограничился рассмотрением этого класса. Он не раз возвращался к обсуждению вполне общего уравнения (11.30) с рациональными коэффициентами, которые обладали в точке $x=a$ системой $l\leqslant n$ нормальных элементарных интегралов. Здесь им был получен важный результат о характере связи коэффициентов $g(x)$, показателей r, коэффициентов разложения φ и величин μ с рациональными коэффициентами дифференциального уравнения. Дальнейшие его усилия были направлены на вычисление нормальных интегралов, затем проведение интеграций в выражениях (11.34) и представление интеграла в указанной Фуксом форме, которая здесь получается совсем по-другому.

Из рассмотрения длинного ряда работ Томé следует, что он дал и многочисленные применения теории линейных уравнений, и участвовал в дальнейшем ее построении. Несколько работ посвятил он асимптотическому представлению интегралов линейных уравнений, войдя в связи с этим в небольшую дискуссию с Пуанкаре.

Применение линейных дифференциальных уравнений к теории алгебраических функций изучено Томé в 1888 г. В дальнейших исследованиях он рассматривал определение рода алгебраических функций, их представление и т. д. в связи с изучением линейных дифференциальных уравнений, в частности, с многозначными алгебраическими коэффициентами. Специально анализу таких уравнений было посвящено несколько статей, как и применениям линейной теории уравнений к вариационному исчислению. Работы последних лет касались рассмотрения систем линейных уравнений и приведения их к линейному дифференциальному уравнению высшего порядка с одной неизвестной функцией.

В процессе своих исследований Томé установил весьма примечательный факт, что если уравнение (11.30) для $x=a$ имеет

ранг ρ, то выражения вида (11.31), формально удовлетворяющие уравнению, всегда имеют место и могут быть установлены чисто алгебраическими операциями из коэффициентов уравнения. Упрощение этих вычислений дано М. Гамбургером и П. Гюнтером. Поводом для большой статьи Гамбургера послужили работы Кэли, одного из первых английских авторов, продолживших и развивавших исследования Фукса, Томé, Фробениуса и других в английской математике. В статье [123.3] Кэли познакомил английских читателей с основными результатами упомянутых ученых относительно разложений в ряды интегралов линейных дифференциальных уравнений в окрестности особых точек. Здесь, и особенно в последующей статье, Кэли уделил внимание рассмотрению нормальных интегралов Томé. Кэли давал там свой способ построения нормального интеграла, называя его субрегулярным интегралом, допустив, однако, некоторые неточности, замеченные Гамбургером. Восполнению этих пробелов и доказательству существования нормальных интегралов, однако для случая, когда алгебраическое уравнение, служащее для определения высших коэффициентов в показателях определяющих множителей, имеет простые корни, посвящалась работа М. Гамбургера 1888 г. Она была дополнена в следующем году статьей Гюнтера, предложившего удобный способ вычислений во всех случаях и ведущий к цели при конечном числе операций и некоторые другие усовершенствования метода Томé, обсудив также вопрос о существовании так называемых логарифмических нормальных интегралов.

Следуя Пуанкаре, Ян Раевский одним из первых в польской математической литературе (1890 г.) стал рассматривать нормальные ряды вида

$$F(x)=e^{g\left(\frac{1}{x-a}\right)}[a_0(x-a)^r+a_1(x-a)^{r+1}+\ldots],$$

определяющие функцию $F(x)$, которая по разделении на $e^{g\left(\frac{1}{x-a}\right)}$ вела себя регулярно в существенно особой точке $x=a$. Здесь через g обозначалась целая функция n-й степени и относительно $F(x)$ говорилось, что она в существенно особой точке $x=a$ принадлежит рациональной функции g. Раевский исследует выражение интеграла линейного однородного уравнения m-го порядка посредством нормальных рядов определенного вида, устанавливает вид коэффициентов уравнения p_i в предположении ограниченности числа особых точек, изучает форму интегралов линейного уравнения некоторого вида.

Отметим здесь, что существенную роль в представлении нормальных интегралов сыграли асимптотические ряды. Эти две ветви анализа способствовали взаимному обогащению их методов и результатов. Данный вопрос мы рассмотрим далее, а сейчас обратимся к разложению интегралов в кольце и применению других функционально-теоретических методов.

§ 6. Разложение интегралов в кольце

Как помним, интегралы линейных однородных уравнений с однозначными коэффициентами испытывают линейную подстановку, когда независимое переменное x описывает замкнутый путь, огибающий одну или несколько особых точек. Вычисление коэффициентов этих подстановок из дифференциальных уравнений в случае, когда речь шла об одной только такой точке и регулярных в ней интегралах, выполнено в первых работах Фукса. Развитый им далее метод применялся к уравнениям определенного ограниченного класса. Но уравнения вида (11.30) могли иметь и более сложные коэффициенты p_k и, в частности, такие, которые содержат бесконечное число отрицательных степеней $x-a$ и когда предыдущие методы уже не имеют места и появляются так называемые нерегулярные интегралы. Некоторый их вид был изучен Томé. Но далее появилась необходимость в более общем методе, который давал бы возможность изучить поведение интеграла в окрестности особой точки в общем случае, когда составленные по теореме Фукса ряды для интегралов содержат положительные и отрицательные степени $x-a$ в бесконечном числе. Для определения корней принадлежащего к заданной особой точке фундаментального уравнения и коэффициентов соответственных рядов Лорана, для которых составлялись рекуррентные формулы в виде бесконечно многих уравнений с бесконечно многими неизвестными, впервые был предложен метод Гамбургера в 1877—1878 гг. [169.2.—3.]. Этот метод приводил к цели при помощи подходящего конформного преобразования. Таким образом, был рассмотрен случай, что каждый путь около особой точки пробегается внутри кольца между двумя концентрическими окружностями. Понимая под x_0 точку кольцевой области, Гамбургер положил $x=x_0e^z$ и разложил интеграл по степеням z. Если полученные ряды сходились еще для $z=2\pi i$, то они вели к решению задачи, если они не сходились столь далеко, то можно было обходиться рассмотрением промежуточных значений, которые, как показал автор, при таком подходе давали меньше осложнений, чем в противном случае. Гамбургер рассмотрел также и уравнения с многозначными коэффициентами.

Метод Гамбургера был далее развит и обобщен в большой статье Пуанкаре [237.9], выбравшем в качестве отображающей функцию[1] вида $x=x_0(1+t)^{\frac{2h}{\pi i}}(1-t)^{-\frac{2h}{\pi i}}$ и построившем разложение интеграла по целым степеням t. Знание этого разложения позволяло судить о поведении интеграла при любом обходе x внутри кольца.

---

[1] Как и в предыдущем случае, имелось в виду, что особая точка находится в начале координат.

Дополнение результатов Гамбургера, уточнение установленной Кэли формы для фундаментальной системы интегралов, новая форма коэффициентов фундаментального уравнения, принадлежащего особой точке, и связь их с предыдущей работой Пуанкаре рассмотрены П. Гюнтером в [165.1.—2].

Дальнейшее развитие метод Гамбургера и Пуанкаре нашел в работе Миттаг-Леффлера [218.2], упростившего доказательство Пуанкаре, в котором он устранил кажущуюся зависимость от x_0, а также распространил результаты на кольцевые области между конфокальными эллипсами.

Второй метод рассматриваемых разложений состоит в применении бесконечных определителей. Впервые они были применены астрономом Г. Хиллом в 1877 г., исследовавшим линейное однородное уравнение второго порядка, а затем встречаются в работе Пинкерле (1884 г.), изучавшего разложения шаровых функций. Статья Хилла привлекла внимание Пуанкаре, строго доказавшего указанные Хиллом свойства этих определителей и рассмотревшего некоторые теоретические аспекты вопроса в 1886 г. С помощью двух общих теорем он получил важные заключения о сходимости бесконечных определителей. Этот метод был использован затем в цикле работ Хельге фон Коха (86), ученика Миттаг-Леффлера, для решения некоторых общих вопросов с 1891 г. Так, в статье [193.1] эта теория применяется для представления интеграла линейного однородного уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)\, y = 0 \qquad (11.35)$$

с аналитическими однозначными коэффициентами в окрестности особой точки, за которую принимается $x=0$. В окрестности этой точки коэффициенты могут быть представлены разложением

$$P_r = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \alpha_{r\lambda} x^{\lambda} \, (r = 2, 3, \ldots, n), \qquad (11.36)$$

сходящимся для $R < |x| < R'$. Как известно, существует ряд

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}, \qquad (11.37)$$

сходящийся внутри указанного кольца и удовлетворяющий данному дифференциальному уравнению. Для определения g_λ и ρ ряд (11.37) подставляется в (11.35) и составляются соответственные уравнения в бесконечном количестве. Исходя из них, строится бесконечный определитель $\Omega(\rho)$. Условия разрешимости системы представляют для ρ трансцендентное уравнение, левая сторона которого выражается через такой бесконечный оп-

ределитель. При подходящем образовании этих определителей получается показатель ρ как нуль некоторой целой трансцендентной функции с периодом единица и в общем обладающий в полосе периода n несовпадающими корнями, вещественные части которых отличаются друг от друга на дробные числа. Для каждой из этих n систем несовпадающих корней получается интеграл вида (11.37). Итак, вопрос здесь был решен для уравнений весьма широкого класса, но с тем ограничением, что выражение интеграла не содержало логарифмов. В следующем большом сочинении [193.2] Кох решил проблему уже во всей общности, изложив попутно с возможной строгостью в первой части работы ряд свойств бесконечных определителей и указав применение бесконечных определителей к некоторым системам линейных уравнений, где число неизвестных, как и число уравнений, было бесконечным. Во второй части, посвященной трактовке общей теории линейных дифференциальных уравнений и представлению их интегралов, явно устанавливались выражения для отдельных групп, на которые в общем распадалась фундаментальная система интегралов. Здесь были также установлены новые формы инвариантов дифференциального уравнения.

Дальнейшее развитие этой проблемы нашло место в последующих работах Коха, где с помощью того же метода решались вопросы об установлении необходимых и достаточных условий для существования: 1) однозначных и 2) регулярных интегралов рассматриваемых уравнений; об изменении условий сходимости, установленных Пуанкаре; о существовании регулярных интегралов уравнений (11.35) в окрестности $x=0$ и при предположении, что разложения коэффициентов P содержат только конечное число отрицательных степеней x, или когда P есть функции рациональные. В работе 1894 г. уточнялись некоторые положения, установленные Томé.

В одной из последующих статей [193.4] Кох рассматривал вопрос о нерегулярных интегралах, исследуя рост интеграла в окрестности a — точки неопределенности. Для доказательства основной его теории рассматривается сходимость ряда, коэффициенты которого вычисляются с помощью бесконечных определителей. Как применение получается представление интеграла по граничным лучам их звезды Миттаг-Леффлера.

К тем же основным результатам подошел Перрон в 1919 г. при более кратких и простых вычислениях, получив более точное неравенство для ограничения модуля интеграла y.

Как на основу третьего метода решения рассматриваемой проблемы Шлезингер указывает на метод последовательных приближений, дающий разложения в ряды интегралов уравнений. Он был применен П. Гюнтером [165.2] для случая $n=2$.

Глава XII. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Асимптотическое представление величин. Асимптотические и расходящиеся ряды. Вводные замечания

Асимптотический метод исследования функции, состоящий в том, что изучаемая функция заменяется другой, так называемой функцией сравнения и такой, что поведение ее лучше известно при тех же значениях аргумента, чем исходной, играет в анализе чрезвычайно важную роль. Функция сравнения, как правило, выбирается более простой по своему аналитическому выражению и таким образом, чтобы она характеризовала исследуемые свойства данной функции с определенной, поддающейся учету, степенью точности. Так, уже в древнегреческой математике для изучения поведения гиперболы на бесконечности были введены ее прямолинейные асимптоты, а на заре развития анализа рассматривались различные элементарные асимптотические оценки в форме сравнения порядков бесконечно малых (правило Лопиталя и т. п.).

Согласно определению Пуанкаре, функция какого-нибудь переменного $\psi(z)$ называется асимптотической по отношению к другой функции $\varphi(z)$ того же переменного, если предел отношения этих функций равен единице, когда переменное стремится к некоторому пределу, в том числе и к бесконечности. Асимптотичность двух функций может различаться по порядкам. Две функции называются асимптотическими n-го порядка в окрестности асимптотической точки, если

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi''(z)}{\psi''(z)}=\ldots=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(n)}(z)}{\psi^{(n)}(z)}=1.$$

Иногда представляется возможным для функции $\varphi(z)$ подобрать не одну функцию сравнения, а некоторую последовательность функций $\psi_0(z), \psi_0(z)+\psi_1(z), \ldots, \psi_0(z)+\psi_1(z)+\ldots+\psi_n(z)\ldots$, причем так, что с увеличением n эта последовательность представляет $\varphi(z)$ все более точно. При этом особый интерес вызывает тот случай, когда

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\sum_{i=0}^{n-1}\psi_i(z)}{\psi_n(z)}=1,$$

т. е. порядок величины ошибки при замене функции $\varphi(z)$ суммой $\sum_{i=0}^{n} \psi_i(z)$ меньше, чем порядок величины последнего использованного члена. Если при таких условиях можно построить последовательность $\sum_{i=0}^{n} \psi_i(z)$ для любого n, то говорят, что функция $\varphi(z)$ характеризуется при $z \to z_0$ асимптотическим разложением $\varphi(z) \sim \sum_{i=}^{\infty} \psi_i(z)$.

Одну из важных форм асимптотического разложения представляют асимптотические ряды. Изучение последних весьма тесно переплеталось с изучением так называемых расходящихся рядов, которое за несколько последних десятилетий образовало отдельную отрасль анализа [83]. Одним из первых расходимость гармонического ряда и некоторых ему аналогичных доказал П. Менголи. Уже тогда была обнаружена связь таких рядов с логарифмической функцией и их исследованию заметное внимание уделил Ньютон [1].

Существенной вехой зарождавшихся асимптотических методов была задача об установлении формул для функций быстро растущих аргументов. Средства для ее решения искались в теории суммирования числовых рядов. В процессе этого в 1730 г. был построен знаменитый ряд Стирлинга, являющийся асимптотическим при весьма четкой и общей постановке задачи. Почти в то же время была получена известная формула суммирования Маклорена—Эйлера [86, 458] и соответственный ряд. Изучая его поведение, Эйлер сталкивается с так называемым «парадоксом» асимптотических рядов, т. е. с тем явлением, когда эти расходящиеся ряды [2] с ростом аргумента представляли хорошее приближение некоторых видов функций.

Применяя свою формулу к многочисленным примерам, Эйлер получил ряд замечательных результатов. Интересно отметить, что подобные применения проводились только в тех случаях, когда ряд получался асимптотическим. Установив расходимость таких рядов, Эйлер подчеркивал все же, что каждый ряд должен обладать определенным значением. Но это значение не следовало именовать суммой, «поскольку с этим словом обычно связывают такое понятие, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места». Харди считал [83, 29], что «это — почти тот язык, которым мог бы пользоваться Чезаро или Борель». Эйлер предлагал под суммой ряда понимать то «конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд».

---

[1] См. об этом подробнее в [86, 444 и след.].

[2] Об истоках исследований Л. Эйлера по расходящимся рядам см. в [20].

Эйлер с большим искусством использовал найденные им асимптотические ряды для исследования функций, установив попутно ряд функциональных свойств таких рядов, что было позже строго обосновано. Новые функциональные свойства их и необходимость более глубокого выяснения смысла представимости функции такого вида рядами были показаны в соответственных работах Лагранжа, Лапласа и Лежандра. Так, в «Аналитической теории вероятностей» в конце первой книги (п.44) Лаплас делает общие замечания о сходимости рядов, которые он назвал «рядами ограниченными». Он отметил, что эти ряды сходятся очень быстро в их первых членах, затем эта сходимость уменьшается и, наконец, меняется на расходимость. Однако, считал он, это не должно препятствовать использованию этих рядов хотя бы в их первых членах, когда сходимость быстрая, так как остаток ряда, которым пренебрегают, очень мал по отношению к предыдущему. Как пример рассматривается разложение

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2T^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3T^6} + \ldots\right).$$

И хотя этот ряд расходится, все же можно, по словам Лапласа, без особой погрешности использовать первые его члены. И он производит соответственные оценки, отмечая далее, что сказанное распространяется и на другие подобные ряды. Характер сходимости таких рядов исследовался довольно подробно и Лежандром, который назвал их полусходящимися [86, 467].

В начале XIX века, в связи с построением новых основ математического анализа, был существенно изменен взгляд на расходящиеся ряды. Гаусс, Коши, Абель, Больцано, работами которых начиналась новая эпоха в развитии математического анализа, установили известные нормы пользования бесконечными рядами и притом как необходимое условие — предварительное исследование и доказательство их сходимости. В 1812 г. Гаусс опубликовал, в духе присущей ему строгости, известное исследование о гипергеометрическом ряде [159].

В 1821 г. вышел курс анализа Коши [122.1], где была построена общая теория рядов с подробным толкованием относящихся сюда принципиальных вопросов. Известны аналогичные взгляды Абеля, хотя в 1826 г. он обращал внимание на то, что надо разобраться с расходящимися рядами [105.3, 2 изд., 10]. Не оставляла эта мысль и Коши, который в работе 1843 г. снова вернулся к рассмотрению расходящихся рядов, интересуясь прежде всего вопросом о том, почему употребление расходящихся рядов почти всегда приводит к точным результатам. В указанной выше заметке Коши провел впервые строгое исследование асимптотического ряда Стирлинга и дал оценку его остаточного члена. Относительно этого он отмечал, что, занявшись этим во-

просом, он установил, что в ряде Стирлинга и в множестве других рядов того же вида первый из отбрасываемых членов точно представляет верхний предел допущенной ошибки, и далее: ... ...«принципы, которые я изложил, достаточны для очевидного выражения преимуществ, которые можно предложить употреблению ряда Стирлинга и многих других рядов той же природы, несмотря на их расходимость» [122.16, 19]. Как на пример он указывает, что, в частности, ряд Стирлинга дает значение логарифма функции $\Gamma(n)$, если основание n превосходит число 10, с таким приближением, что допущенная ошибка меньше двух единиц порядка 27-го десятичного знака. Таким образом, авторитетом Коши было обращено внимание на важность исследования асимптотических рядов, заложены основы их общей теории, но должного развития в то время эти идеи еще не получили.

Немного раньше идея асимптотического представления решений дифференциальных уравнений имела место в работах Лиувилля [205.3.—4], где впервые получены асимптотические формулы для решений уравнений второго порядка вида (1.5) (и изучено [90.96] поведение решений при стремлении параметра к ∞), а затем и для уравнений более высокого порядка. Значительно позже (в 1893 г.) метод Лиувилля применен де-Спааром к решению задачи вращательного движения снаряда. Асимптотический характер полученного решения доказан Горном [177.4].

В работах Н. И. Лобачевского (1834, 1841 гг.) [86, 468], уделялось внимание исследованию асимптотических рядов и дано доказательство асимптотического ряда Эйлера-Маклорена для $\log z$. Оговаривая условия, которые надо наложить на суммируемую функцию, Лобачевский, следуя за Лапласом, называет подобные ряды предельными. Он весьма подробно рассмотрел общие условия, при которых ряд Эйлера—Маклорена становился асимптотическим.

Однако, несмотря на отдельные, весьма интересные результаты и применения идеи асимптотичности, общей теории асимптотических рядов не было все же создано после упоминаемого мемуара Коши в течение последующих четырех десятилетий.

Первые большие публикации по этой теории предприняты в 1886 г. Стилтьесом и Пуанкаре. Стилтьес назвал изучаемые ряды полусходящимися, однако термин этот оказался малоудобным, может быть, потому, что полусходящимися рядами иногда называли и условно сходящиеся. Более удачным оказался термин Пуанкаре, назвавшего их асиптотическими. Здесь более глубоко охватывалась их сущность и в дальнейшем это понятие стало общепринятым. Такое утверждение встречается во всех исследованиях, касающихся асимптотических рядов и интегралов. Нам кажется, этот вопрос следует несколько уточнить. Дело в том, что в 1879 г. был опубликован весьма любопытный трактат Буссинеска (87) натур-философского характера «Согласо-

вание подлинного детерминизма механики с существованием жизни и моральной свободы». Не останавливаясь на разборе этой работы, отметим только, что автор уделил здесь существенное место рассмотрению, по его термину, асимптотической функции. Более того, здесь было введено понятие, и, видимо, в столь четкой постановке впервые, асимптотических интегралов дифференциальных уравнений. О них он писал, что «асимптотические интегралы могут быть рассмотрены, в зависимости от случая, либо как место сходимости, соединения частных интегралов, либо как место расходимости или разветвления, либо, наконец, как одно и другое одновременно» [108.1, 50—51]. Более четко вопрос об асимптотических интегралах изложен Буссинеском в статье [108.2] (1882 г.), где он охарактеризовал сущность асимптотического интеграла, а также уточнил его геометрический смысл: асимптотическое решение образует ядро (стержень), или, лучше, ось пучка интегралов, бесконечно сжатая часть которого, содержа интегралы, выходящие с бесконечности или предназначенные к разделению только в бесконечности, не имеет ширины; напротив, интегралы обычные смежные принадлежат пучку менее тесным образом, если это не в бесконечности, и следуют близко к нему лишь только на некотором его участке.

Таким образом, Буссинеск довольно четко владел понятием асимптотических интегралов, понимал их связь с асимптотическими рядами и ввел соответствующую терминологию несколько раньше, чем Пуанкаре. Вполне вероятно, что указанная работа Буссинеска дала повод Пуанкаре для введения термина «асимптотический» ряд. По существу оно уже было в обиходе математиков.

§ 2. Теория асимптотических рядов Стилтьеса и Пуанкаре и применение их к представлению интегралов уравнений

В мемуаре [262] Стилтьес имел целью изучить некоторую функцию $F(a)$ для весьма больших значений положительного действительного аргумента a и в предположении, что $\lim\limits_{a\to\infty} F(a) = m_0$. Иначе говоря, m_0 дает приближенное значение $F(a)$ для очень большого значения a, или $F(a) - m_0 \to 0$ при $a \to \infty$. Пусть затем $\lim\limits_{a\to\infty} a\,[F(a) - m_0] = m_1$, причем $\lim\limits_{a\to\infty}\left[F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a}\right] = 0$. Аналогично пусть $\lim\limits_{a\to\infty} a^2\left[F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a}\right] = m_2$, причем $\lim\limits_{a\to\infty} a^2\left[F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a} - \frac{m_2}{a^2}\right] = 0$ и т.д. Тогда можно получить асимптотическое (по термину автора полусходящееся) разложение для функции $F(a)$

$$F(a) \sim m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots + \frac{m_n}{a^n} + \ldots \qquad (12.1)$$

Эти разложения автор делит на два вида в зависимости от того, меняются ли знаки их членов или остаются неизменными. Чтобы можно было использовать такие ряды для числовых расчетов, надо исследовать их остаточный член R_n. Рассматривая ряды первого вида (знакочередующиеся), автор установил, что R_n меняет знак при переходе от S_n к S_{n+1} и по абсолютной величине будет меньше последнего из оставленных или первого из отброшенных членов. Таким образом, оказывалось, что $F(a)$ содержалась всегда между суммами n и $n+1$ первых членов ряда вида (12.1).

Томас Стилтьес (1856—1894).

Для рядов второго рода, исследование которых составляло главную часть работы, Стилтьес предлагает непосредственно оценивать порядок R_n, где $R_n = F(a) - \sum_{i=0}^{n} \frac{m_i}{a^i}$. В процессе этого он искал то значение n, когда R_n возможно меньше, по формуле

$$n = \alpha a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots \qquad (12.2)$$

и брал ближайшее к n целое число.

Пуанкаре подошел к асимптотическим рядам в связи с необходимостью представления ранее упомянутых нами нормальных интегралов линейных дифференциальных уравнений (вида $\sum_{k=0}^{n} P_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$, где P_k — функция от x). Именно в первом из сообщений [237.11] (1885 г.) речь шла о таких интегралах и связанных с ними нормальных рядах. Пуанкаре там же указал некоторые фундаментальные свойства нормальных рядов (и связанных с ними интегралов), отмечая, что их аналитическая природа аналогична тому, что имелось при изучении ряда Стирлинга.

Применяя преобразование Лапласа, Пуанкаре строит интеграл данного уравнения в форме $y = \int e^{zx} v dz$, где v как функция z удовлетворяет уравнению того же вида, что и данное. Так было указано принципиальное значение асимптотических рядов для выражения интегралов уравнений и перечислены их основные свойства. Подробно и в общей форме, с введением соответственного термина, вопрос изложен в мемуаре [237.15], опубликованном в 1886 г. И здесь (что принципиально важно) теория асимп-

тотических рядов стала разрабатываться как инструмент для выражения интегралов линейных уравнений.

Автор говорил, что расходящийся ряд

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots, \qquad (12.3)$$

сумма $n+1$ первых членов которого S_n, представляет асимптотически функцию $I(x)$, если выражение $x^n(I-S_n)\to 0$ при $x\to\infty$. При достаточно больших x $x^n(I-S_n)<\varepsilon$, где ε — достаточно малое; ошибка $I-S_n=\frac{\varepsilon}{x^n}$, когда за функцию берется сумма $n+1$ первых членов, весьма мала. Более того, она значительно меньше ошибки, допускаемой в том случае, если брать только сумму n первых членов ряда (12.3). Этот ряд подобен ряду Стирлинга. При довольно больших x его члены убывают довольно быстро, а потом с определенного значения возрастают неограниченно по абсолютной величине. Однако, несмотря на его расходимость, можно им пользоваться при вычислениях I. Если асимптотическое разложение данной функции существует, то оно единственное. Пуанкаре здесь же показывает, что с асимптотическими рядами можно поступать как с некоторыми функциями и над ними можно производить действия сложения, вычитания, деления, умножения, возвышения в целую положительную степень и интегрирования, но нельзя дифференцировать в общем случае. Асимптотический ряд можно получить при определенных условиях в результате подстановки степенного асимптотического ряда в сходящийся степенной ряд. Также было замечено, что один и тот же асимптотический ряд может представлять различные многие функции и что возможно обобщение асимптотических рядов на функции комплексного переменного. В заключение первого параграфа Пуанкаре дал также обобщенное определение асимптотического ряда.

Затем подробно изучается уравнение

$$P_n\frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0, \qquad (12.4)$$

коэффициенты которого P_i — полиномы по x. Вопрос ставится о представлении его интегралов в окрестности $x=\infty$. Если степени полиномов P_n, P_{n-1}, ... P_0 образуют убывающую последовательность, то согласно с теоремой Фукса имеется n удовлетворяющих формально уравнению (12.4) и сходящихся для достаточно больших значений $|x|$ рядов вида

$$x^\alpha\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right) \qquad (12.5)$$

и называющихся регулярными интегралами. Значения α даются некоторым определяющим уравнением. Исключительным явля-

ется случай, когда разность двух корней этого уравнения становится равной целому числу. В этом случае в ряды может войти $\log x$.

Если последовательность степеней полиномов P не является монотонной и если степень P_0 меньше степени P_n, то в некоторых случаях могут существовать m ($m<n$) рядов вида (12.5), которые формально удовлетворяют уравнению, но нигде не сходятся. Наконец, если оставить в стороне некоторое ограниченное число исключительных случаев (о которых речь идет далее), можно доказать, что имеется n рядов вида

$$e^{Q}x^{\alpha}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right), \tag{12.6}$$

которые формально удовлетворяют уравнению (12.4) (Q — целый полином по x). Такой ряд Пуанкаре называет «нормальным» и притом p-го порядка, если многочлен Q — p-й степени. Здесь также могут появляться логарифмы, тогда получится «логарифмический нормальный ряд» p-го порядка и вида

$$e^{Q}x^{\alpha}\left(\psi_0+\psi_1\log x+\psi_2\log^2 x+\ldots+\psi_q\log^q x\right),$$

где ψ — степенные возрастающие ряды по степеням $\frac{1}{x}$. Между порядком нормальных рядов и степенью полиномов P_i имеется следующее соотношение. Пусть M_i — степень P_i и $N_i=(M_i-M_n):(n-i)$. Пусть h — наибольшее из n чисел N_i, а p — целое число, равное h или непосредственно следующее за h. Тогда все нормальные ряды, удовлетворяющие формально уравнению (12.4), будут порядка не выше p. Величина h называется рангом уравнения (12.4).

Пуанкаре сначала исследует случай, когда все нормальные ряды первого порядка (§ 3 мемуара). В этом случае степень m для P_n не превзойдется никаким P_i. Если A_i — коэффициент при x^n в P_i, то образуется уравнение

$$A_n a^n+A_{n-1}a^{n-1}+\ldots+A_1 a+A_0=0 \tag{12.7}$$

и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все его корни, по предположению различные. Итак, уравнению (12.4) будут удовлетворять n нормальных рядов первого порядка и вида

$$e^{\alpha_1 x}x^{a_1}\varphi_1,\ e^{\alpha_2 x}x^{a_2}\varphi_2,\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}x^{a_n}\varphi_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ — подходяще выбранные константы и φ_i ($i=1,2,\ldots,n$) — ряды, упорядоченные по возрастающим степеням $\frac{1}{x}$.

Применяя затем к уравнению (12.4) преобразование Лапласа (о чем уже шла речь и раньше), можно получить уравнение

$$Q_m \frac{d^m v}{dz^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0, \qquad (12.8)$$

где Q — полиномы по z не выше n-й степени. Итак, уравнение (12.8) допускает n простых особых точек $z=a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, и определяющее уравнение относительно точек a_i имеет корни $0, 1, 2, \ldots m-2, \beta_i$. Если предположить сначала, что β_i — не целое число, то в окрестности $z=a_i$ уравнение (12.8) будет иметь $m-1$ голоморфный интеграл и m-й в форме

$$v_i = (z-a_i)^{\beta_i} + c_1 (z-a_i)^{\beta_i+1} + \ldots$$

Тогда

$$I_i = \int_{k_i} v_i e^{zx} dz$$

(где k_i — некоторый замкнутый контур, содержащий несобственные элементы) будет интегралом уравнения (12.4). После некоторых преобразований Пуанкаре получает представление всех n интегралов уравнения (12.4) асимптотически нормальными рядами первого порядка. Это утверждение имеет место и в том случае, когда β_i — целое число и в представление v_i входят логарифмы. Но если логарифмические члены отпадают, то вместо кривой k_i берется как путь интегрирования прямая от a_i до $-\infty$.

Исключительный случай получается тогда, когда два корня уравнения (12.7) равны между собой. Тогда уравнение (12.4) в общем не интегрируется через нормальные ряды. Если нормальный ряд сходится, то он всегда представляет интеграл уравнения (12.4). Необходимым и достаточным условием этого есть то, что интеграл v_i представим в форме $(z-a_i)^{\beta_i} \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — голоморфная во всей плоскости функция.

Рассмотрев также обобщения полученных результатов, Пуанкаре пришел к важному выводу, что «наиболее общий интеграл уравнения (12.4) представлялся асимптотически через нормальный ряд» (стр. 343).

§ 3. Учение об асимптотических рядах и их применении к представлению интегралов дифференциальных уравнений в 90-е годы XIX и в начале XX веков (связь с теорией устойчивости)

Выше рассмотренные работы Стилтьеса, а особенно Пуанкаре легли в основу нового, большого направления в анализе. С 90-х годов прошлого века довольно бурно стала развиваться как теория асимптотических рядов, так и их применения к интегрированию дифференциальных уравнений в трудах Пуанкаре,

Пикара, Ляпунова, Бореля, Горна, Кнезера, Адамара, Боля и других. При этом интенсивно стало культивироваться направление, рассматривавшее тесную связь этой теории с общей задачей об устойчивости движения. Так, уже в 1892 г. в первом томе монографии Пуанкаре «О новых методах в небесной механике» [237.20] глава VII была посвящена асимптотическим решениям. Здесь рассматривалась система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \ (x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \ (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (12.9)$$

где X_i — функции, разлагающиеся в ряды по целым положительным степеням x_i и периодические по t с периодом 2π. Проводя замену переменной $x_i = x_i^0 + \xi_i$, после которой правые части уравнений вида (12.9) будут того же характера соответственно по ξ и t, но не содержащими членов, не зависящих от ξ, принимая ξ достаточно малыми и принебрегая членами, содержащими более высокие степени ξ, получаем систему

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n$$

линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Ее общее решение записывается в форме

$$\xi_i = A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1i} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2i} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{ni},$$

где A_k — константы интегрирования; α_k — фиксированные константы, которые называются характеристическими показателями; φ_{ki} — периодические функции от t. Проведя затем подстановку $\xi_i = \eta_1\varphi_{1i} + \eta_2\varphi_{2i} + \ldots + \eta_n\varphi_{ni}$, он приходит к системе уравнений относительно η_i и после ряда преобразований получает выражения для η_i в форме рядов, которые сходятся и, значит, определяют решения η_i при условии, что действительные части всех величин α_k одного знака и отличны от нуля.

Предполагая затем, что действительные части k величин α положительные, а действительные части $n-k$ величин α — отрицательные или нуль и наоборот, Пуанкаре приходит к определению двух видов решений, выражаемых рядами для η_i и упорядоченных по степеням вида $A_k e^{\alpha_k t}$. Эти разложения приближались асимптотически к рассматриваемым периодическим решениям либо при $t \to -\infty$, либо при $t \to +\infty$. И такие решения он называет асимптотическими [237.20, 340]. Далее Пуанкаре рассмотрел также асимптотические решения уравнений динамики и ряд других вопросов.

Доказательство Пуанкаре было изменено и результаты его обобщены в курсе Пикара [235.17, гл. VII, § 5], наложившим меньшие ограничения на характер зависимости от t правых частей дифференциальных уравнений (12.9).

Но в том году, когда вышла вышеуказанная монография Пуанкаре, лишь позже на несколько месяцев, уже стали известны результаты гораздо большей общности, полученные независимо от Пуанкаре в докторской диссертации Ляпунова [43.2], посвященной изучению общего вопроса об устойчивости движения. Изучение этого вопроса вело к исследованию дифференциальных уравнений вида (12.9), где X_i при достаточно малых x_i разлагались в ряды по целым положительным степеням x_i, обращающиеся в нуль при всех $x_i=0$. Задача состояла в том, чтобы узнать, можно ли начальные значения функций x_s, не делая их нулями, выбрать настолько малыми, чтобы во все время, следующее за начальным моментом, функции эти оставались численно меньшими некоторых заранее данных, отличных от нуля, но сколь угодно малых пределов. При этом важно найти способы решения этой задачи независимо от интегрируемости системы (12.9). До того часто пользовались приемом, отбрасывая в исследуемых дифференциальных уравнениях все члены выше первого измерения относительно x_i и вместо первоначальных рассматривали полученные таким образом линейные уравнения, хотя законность такого упрощения ничем не оправдывалась, ибо по существу одна задача подменялась другой. А. М. Ляпунов поставил себе целью в данном сочинении, исходя из общих идей Пуанкаре, указать те случаи, в которых первое приближение действительно решало вопрос об устойчивости, и предложить новые способы, позволяющие решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости. Вопрос трактовался Ляпуновым в основном для двух случаев: 1) когда коэффициенты в разложениях правых частей (12.9) были величины постоянные (глава II); 2) при более общем предположении, что они являются периодическими функциями времени (глава III). Но он коснулся впервые и более общего случая, когда названные коэффициенты были бы произвольными функциями времени, ограниченными сверху (гл. I). Особое внимание уделял Ляпунов тем случаям, когда в дифференциальных уравнениях надо было принимать во внимание члены выше первого измерения.

В процессе работы Ляпуновым были созданы два основных метода, применяемых при исследовании устойчивости [1]. Таким образом, вопрос сводился к исследованию устойчивости нулевого решения $x_1=x_2=x_n=0$ для системы уравнений (12.9), которая записывалась в форме

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\sum P_s^{(m_1,m_2,\ldots,m_n)}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}, \tag{12.10}$$

[1] Об этом см. в [66.5, 346—7, 351—355]; о первом методе в современном изложении см. в [25.7].

где правые части, обозначаемые также X_s, зависят от комплексных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, модули которых достаточно малы, и при $t \geqslant t_0$ величины X_s — голоморфны для $|x_i| \leqslant A_i$ (где A_i $(i=1, 2, \ldots n)$ или постоянные, отличные от нуля, или функции по t, которые нигде в нуль не обращаются) и разложимы в ряды по целым положительным степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, абсолютно сходящиеся для $|x_i| \leqslant A_i$, и где $m_1+m_2+\ldots+m_n>1$. (Коэффициенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ — функции по t, по предположению есть определенные, ограниченные и непрерывные, а по характеру задачи — вещественные для всякого вещественного $t \geqslant t_0$). Для интегрирования системы (12.9) применяется метод последовательных приближений и затем устанавливается методом мажорантных функций абсолютная сходимость рядов [1], выражающих интегралы x_s и расположенных по целым положительным степеням некоторых постоянных, ограниченых по модулю, и для довольно больших t $(t>t_0)$.

Далее Ляпунов рассмотрел некоторые общие вопросы теории линейных уравнений. Всякую функцию, модуль которой при $t>t_0$ всегда меньше некоторого предела, автор называет ограниченной. Так же вводится понятие неограниченной и исчезающей функции. Последняя характеризуется тем, что, будучи ограниченной при $t\to\infty$, стремится к нулю. Устанавливаются леммы о характере функции x. Так, в частности, если x — ограниченная функция от t, то $xe^{-\lambda t}$ при всяком положительном постоянном λ есть функция исчезающая.

Чрезвычайно важным было установление понятия характеристического числа любой функции $x(t)$, определенной при $t \geqslant t_0$, которая могла принимать и комплексные значения. Рассмотрим это, следуя Ляпунову. Берется неубывающий ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и невозрастающий $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ таким образом, чтобы $\lambda_i<\lambda^{(k)}$, $\lambda^{(n)}-\lambda_n$ при выборе достаточно большого n могло стать величиной сколь угодно малой и функция xe для всякого n была исчезающей, а функция $xe^{\lambda^{(n)}}$ для всякого n — неограниченной. Эти два ряда определят число λ_0 не меньшее, чем числа первого ряда, и не большее, чем числа второго ряда; это число λ_0 и называется характеристическим числом [2] функции x. Иначе говоря, при любом положительном α произведение $x(t)\,e^{(\lambda_0-\alpha)t}\to 0$ при

---

[1] $$x_s=\sum L_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}e^{-\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i t} \qquad (s=1,2,\ldots,n), \qquad (12.a)$$

где L_s — не зависящие от постоянных α_i непрерывные функции t с неотрицательными, так называемыми характеристическими числами (см. об этом далее) и $m_1+m_2+\ldots+m_k>0$.

[2] Например, для всякой, отличной от нуля постоянной, как и для функции t^m (m — постоянная), характеристичное число равно нулю, а для нуля равно $+\infty$, как и для функции t^{-t}.

$t \to +\infty$, а произведение $x(t)\, e^{(\lambda_0+\alpha)t}$ растет по модулю неограниченно при $t \to +\infty$.

Если $x(t)\, e^{\lambda t} \to 0$ при $t \to +\infty$ при любом λ, то характеристическим числом функции $x(t)$ условились брать $+\infty$, а если $x(t)\, e^{\lambda t}$ при любом λ растет по модулю неограниченно при $t \to +\infty$, то характеристическое число $x(t)$ принимается равным $-\infty$. Следовательно, любая функция $x(t)$ с указанными свойствами будет обладать определенным характеристическим числом.

Таким образом, Ляпунов установил асимптотическое сравнение поведения функций $x(t)$ при $t \to \infty$ с асимптотическим поведением известных показательных функций $e^{\lambda t}$. Почти через 20 лет после выхода работы Ляпунова Э. Коттон (88) подчеркивал в [128.1, 474] возможность введения в науку понятия характеристического числа группы функций. «Характеристические числа,— писал он,— кажется весьма трудно определить на практике (за исключением уравнений с постоянными коэффициентами). Но их теоретическое значение огромно. В самом деле, они показывают, что существенным элементом в исследовании асимптотических решений, стремящихся к нулю, есть скорость, с которой некоторое решение стремится к нулю. Они измеряют некоторым образом эту скорость сравнения с показательными функциями».

Ляпунов устанавливает леммы о характеристических числах суммы, произведения, интеграла функций, и т. п. и ряд важных теорем о характеристических числах решений системы линейных дифференциальных уравнений. Из первой из них следует интересный вывод, что в каждом вещественном решении $x_1, x_2, \ldots x_n$, отличном от нулевого, непременно найдутся функции с конечными характеристичными числами и не найдется ни одной с характеристичным числом $-\infty$. Также установлено, что если $x(t) \neq 0$, то сумма характеристичных чисел $x(t)$ и $\frac{1}{x(t)}$ не больше нуля, а если имеется n линейно независимых решений системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si} x_i, \tag{12.11}$$

обозначаемых $x_i^{(p)}\,(i, p = 1, 2, \ldots n)$, то каждому такому решению соответствует свое характеристичное число λ_p. Эти независимые решения можно подобрать так, чтобы сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ была наибольшей. В этом случае система n независимых решений называется нормальной. Вводится также понятие правильной и неправильной системы (12.11). Она называется правильной, если $s + \mu = 0$, где $s = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ и μ — характеристичное число функции $e^{-\int \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt}$

Частным случаем правильных систем являются приводимые. Если система (12.11) преобразуется надлежаще выбраной подстановкой

$$z_s = q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \ldots + q_{sn}x_n \ (s = 1, 2, \ldots n),$$

где $q_{si}(t)$ и их производные есть непрерывные и ограниченные функции при $t \geqslant t_0$ и величина, обратная определителю, составленному из $q_{si}(t)$, есть также ограниченная функция t, в систему уравнений с постоянными коэффициентами для z, то она называется приводимой. Полученная система с постоянными коэффициентами имеет те же характеристичные числа, что и приводимая (12.11). Таким образом, характеристичные числа системы (12.11) по отношению к указанным преобразованиям обладали свойствами инвариантов. Полученные результаты применяются затем к решению вопроса об устойчивости по первому приближению, которое выражается следующей теоремой. Если система (12.11) — правильная и если все ее решения имеют положительное характеристичное число, то для системы (12.10) характерна устойчивость. Так же может быть сформулировано и условие неустойчивости.

При условии вышеприведенной теоремы во всяком возмущенном движении, достаточно близком к невозмущенному (т. е. если начальные значения x_k^0, $(k=1, 2, \ldots n)$ решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$ $x_n(t)$ системы (12.10) достаточно близки к нулю), все $x_s(t)$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании t. Это обстоятельство Ляпунов выражает, говоря, что возмущенное движение (достаточно близкое к невозмущенному — *В. Д.*) асимптотически приближается к невозмущенному.

Если система дифференциальных уравнений первого приближения не является правильной, то теорема будет справедлива, но при условии, что каждое из характеристичных чисел, взятых для составления рядов x_s (12а), больше некоторого числа $\sigma > 0$.

Таким образом, в процессе решения конкретного вопроса из механики Ляпунов создал новый метод большого не только практического, но и теоретического значения. Полученные Ляпуновым результаты развивались и дополнялись в ближайшее время в работах Кнезера, Адамара, Пенлеве, где нашли дальнейшее применение качественные методы [228.27, 56—57]. Но особое развитие идей Ляпунова и существенное дополнение его результатов имело место в докторской диссертации [7.1] П. Г. Боля (89), одной из первых работ, посвященных разработке и систематическому применению качественных методов математического анализа. Известное влияние на выбор предмета исследования Боля оказал проф. А. Кнезер (1862—1930), с которым Боль был в тесном научном контакте. Со временем его диссертация так же, как ранее диссертация Ляпунова, была переведена на французский язык и опубликована в Париже.

П. Г. Боль (1865—1921).

Боль изучал систему уравнений [7.2]

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_n + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (12.12)$$

где a_{ik} — постоянные, для которых характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (12.13)$$

не имеет корней, вещественная часть которых равна нулю, а X_i — функции, удовлетворяющие условиям: 1) $a_i<x_i<b_i$; 2) для соответственных значений t ($t>t_0$ — случай α; $t<t_0$ — случай β; t — произвольная величина — случай γ) имеют непрерывные частные производные по своим аргументам; 3) можно выбрать такое $\varepsilon>0$, что $|x_i|\leqslant\varepsilon$ удовлетворяют условию 1) и $\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right| < \Delta_1$, $|X_i|_0<\Delta_2\varepsilon$, где $|X_i|_0$ обозначают $|X_i|$ при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, Δ_1, Δ_2 — некоторые положительные числа, которые могут быть определены как функции коэффициентов a. Боль рассматривает n линейных форм y относительно x при помощи линейных подстановок с постоянными коэффициентами и с определителем, отличным от нуля. Величины y распадаются на две группы: $p_1, p_2, \ldots p_k$ и $q_1, q_2 \ldots q_l$, причем элементы группы p соответствуют корням уравнения (12.13) с положительной вещественной частью, а элементы группы q — корням с отрицательной вещественной частью. Может быть, имеется только одна группа. Затем системы p и q характеризуются условиями

$$\text{I.}\ \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqslant \delta\varepsilon^2; \quad \text{II.}\ \sum_{\nu=1}^{e} f_\nu q_\nu^2 \geqslant \delta\varepsilon^2, \quad (12.14)$$

где $d>0$, $f<0$, $\delta>0$ — некоторые постоянные, зависящие от a_{ik}. Каждой системе p, q, удовлетворяющей условиям (12.14), соответствует система x, удовлетворяющая условиям — $\varepsilon<x_i<\varepsilon$ ($i=1, 2, \ldots n$). Системы p, q, удовлетворяющие условиям (12.14), обозначены P и Q. Тогда будут справедливы теоремы:

I. Случай α. Какой-нибудь из систем Q, $[q]$ соответствует одна, вполне определенная система P (обозначенная $[p]$) такого

рода, что решение уравнений (12.12), соответствующее начальным значениям $[p]$ и $[q]$ для $t=t_0$, удовлетворяет условиям (12.14) для всех $t>t_0$. Два произвольно выбранных решения такого рода асимптотически приближаются друг к другу для $t\to\infty$.

II. Случай β. Пусть $[p]$ — какая-нибудь из систем P. Тогда ей соответствует одна, вполне определенная система Q (обозначенная $[q]$) такого рода, что решение уравнений (12.12), соответствующее начальным значениям $[p]$ и $[q]$ для $t=t_0$, удовлетворяет условиям (12.14) для всех $t<t_0$. Два произвольно выбранных решения такого рода асимптотически приближаются друг к другу для $t\to-\infty$.

III. Случай γ. Одновременно справедливы упомянутые выше теоремы для случаев α и β и существует одно определенное решение уравнений (12.12), удовлетворяющее для всех t условиям (12.14). Решение, удовлетворяющее для достаточно больших t условиям (12.14), асимптотически приближается к этому решению для $t\to+\infty$. Решение, удовлетворяющее для достаточно малых t условиям (12.14), асимптотически приближаются к этому решению для $t\to-\infty$.

После установления существования ограниченных решений системы (12.12) Боль рассмотрел для их представления метод последовательных приближений и его сходимость. В процессе доказательств он предполагал, что характеристическое уравнение, соответствующее системе (12.12), не имеет корней с нулевой действительной частью. Таковы были основные результаты Боля по интересующему нас вопросу.

В скором времени результаты Ляпунова и Боля были весьма подробно изложены, дополнены и в некоторой части обобщены в большой статье монографического характера Коттона [128.1] в 1911 г. Здесь был использован новый метод, состоящий в преобразовании данных дифференциальных уравнений в соответственные интегральные уравнения и в применении к последним классического метода последовательных приближений. Коттон дал изложение теорем Боля в собственной уточненной формулировке и отметил приоритет последнего и характерные черты его метода.

Дальнейшее уточнение выводов Боля—Коттона относительно существования решений системы (12.12) и их асимптотического характера в том случае, когда $X_i(0, 0, \ldots 0, t)\neq 0$, но

$$\lim_{x_j\to 0,\, t\to+\infty} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

а также применение полученных выводов к некоторым задачам динамики, рассмотрено в статье Ю. Д. Соколова [68.2].

Ряд статей, посвященных специально исследованию асимптотического представления интегралов некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка, написал А. Кнезер

в 1896—1899 гг. Полученные результаты применялись к теории Бесселевых функций и решению некоторых вопросов механики (90). Но особенно интенсивные исследования по этой проблеме проводились в то же время И. Горном (91), получившим ряд важных новых результатов. Так, уже в [177.4] асимптотическое представление интеграла линейного дифференциального уравнения в общем расходящимися нормальными рядами проводится без использования преобразования Лапласа, что имело место и в работах Пуанкаре. Горн начинает исследование рассмотрением уравнения Риккати

$$x^{-k}\frac{dy}{dx}+Ay^2+By+C=0,$$

где k — положительное целое число или нуль, и в окрестности $x=\infty$ коэффициенты представляются рядами $A=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots$, $B=b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots$, $C=c_0+\frac{c_1}{x}+\ldots$

Если k_0', k_0'' — корни уравнения $a_0k_0^2+b_0k_0+c_0=0$ и действительная часть $a_0(k_0'-k_0'')$ положительна, то установлено, что при $x\to\infty$ каждый интеграл уравнения представляется асимптотически рядом $F'=k_0'+\frac{k_1'}{x}+\ldots$, за исключением единственного интеграла с граничным значением k_0'', который имеет асимптотическое представление $F''=k_0''+\frac{k_1''}{x}+\ldots$

В установлении существования одного и только одного интеграла с граничным значением k_0'' состояло существенное дополнение складывавшейся уже теории. Затем при помощи подстановки $y=x^{-k}\frac{d\log w}{dx}$ уравнение вида $\frac{d^2w}{dx^2}+x^kP\frac{dw}{dx}+x^{2k}Qw=0$ с точкой неопределенности $x=\infty$ ранга k (по термину Пуанкаре (92)), где $P=p_0+\frac{p_1}{x}+\ldots$; $Q=q_0+\frac{q_1}{x}+\ldots$, приводится к уравнению Риккати с вышеуказанными свойствами и получается асимптотическое представление интеграла указанного линейного уравнения через нормальные ряды. Если уравнение $k_0^2+p_0k_0+q_0=0$ имело равные корни, то интеграл асимптотически представлялся в общем через «анормальные ряды», убывающие по степеням $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Затем в следующих работах давалось асимптотическое представление посредством нормальных рядов интегралов уравнений вида

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{dy}{dx}+[x+(\lambda_1-\lambda_2)i]\,y=0,$$

исключая целочисленные значения λ_1, λ_2, $\lambda_1+\lambda_2$, и рассматривался ряд смежных вопросов. Продолжая работы Пуанкаре, Горн обобщил полученные ранее результаты на уравнение вида

$$p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+p_{m-1}\frac{dy}{dx}+p_m y=0, \qquad (12.15)$$

коэффициенты которого — многочлены по x и которое при помощи преобразования Лапласа $y=\int\limits_l ve^{zx}dz$ переходило в

$$(a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_{m-1}z+a_m)\frac{d^p v}{dz^p}+\ldots=0.$$

Предполагая $a_0\not\equiv 0$ и m корней характеристического уравнения

$$a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\alpha+a_m=0$$

различными, он получил асимптотическое представление интеграла уравнения (12.15) через нормальные ряды вида

$$S_i=e^{a_i x}x^{-\lambda_i-1}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{A_{i\mu}}{x^{\mu}} \quad (i=1,2,\ldots,m), \qquad (12.16)$$

существенно расширяя полученные ранее в этом направлении результаты Пуанкаре. При этом представлялась возможность обозреть поведение интеграла во всей окрестности особой точки $x=\infty$, тогда как у Пуанкаре шла речь о поведении интеграла в определенном направлении, проходящем через особую точку.

Перенесение полученных результатов на более общие случаи выполнено в работах Горна в 1898—1902 гг. Здесь была уточнена общая теория, дан обзор полученных результатов и изучено поведение нерегулярных интегралов линейного уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами и с коэффициентами, представляемыми в форме асимптотических рядов. Немного раньше, в заметке [177.5] было показано, как можно получить посредством метода последовательных приближений асимптотическое представление нерегулярных интегралов рассматриваемого уравнения через нормальные ряды Томé. Этот же метод был применен Горном для исследования поведения интеграла уравнения в [177.6].

С большим успехом асимптотический метод применялся в работах В. А. Стеклова с 1896 г., когда он стал заниматься проблемой разложения функции в ряд по фундаментальным функциям краевой задачи Штурма—Лиувилля. После докторской диссертации (1901 г.) фундаментальные функции стали основным объектом его научных исследований. Разработанная Стекловым теория замкнутости [1] открывала новую страницу в истории математического анализа.

[1] См. об этом в [28.1, 370 и след.].

Асимптотическому выражению некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, был специально посвящен его мемуар [71.2] (1907 г.). Здесь автором был указан общий и весьма простой метод получения асимптотических выражений для всех последовательностей функций, определяемых некоторым линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Как отметил В. А. Стеклов [71.2, 7], основная идея этого метода, представляющего обобщение метода Боннэ, вытекала из исследований Лиувилля, посвященных задаче разложения произвольной функции в ряд по функциям Штурма—Лиувилля (1837 г.) и дополненных позже Кнезером. Здесь же была использована установленная им теорема замкнутости. Развитый автором метод получил позже название метода Лиувилля—Стеклова. Полученные в этой работе результаты были применены затем для эффективного решения вопроса о разложении произвольной функции в обобщенный ряд Фурье по ортогональным многочленам и по функциям Штурма—Лиувилля. При этом получен ряд важных асимптотических формул для классических ортогональных многочленов, чем были обобщены приемы Лапласа, Эрмита, Боннэ, Дарбу, Дини, Адамова. Среди них назовем многочлены Чебышева—Эрмита, некоторые классы многочленов Чебышева—Лагерра, многочлены Якоби и функции Бесселя.

§ 4. Дальнейшие исследования по асимптотическому представлению интегралов дифференциальных уравнений в начале XX века

В течение одного десятилетия после первых работ Пуанкаре и Стилтьеса об асимптотических рядах интерес к ним и вообще к рядам расходящимся настолько возрос, что в 1898 г. Парижская академия объявила конкурс на тему «Исследование распространения роли, которую могут играть в анализе расходящиеся ряды». Большим призом на этом конкурсе был отмечен мемуар Бореля [1] [105.1]. Во введении здесь справедливо отмечалось, что для трактовки данного вопроса необходимо было разрешить прежде всего ряд различных проблем анализа и в том числе теории функций, которые приходили в соприкосновение с расходившимися рядами. С присущей ему скромностью Борель также заметил, что в тексте можно найти больше поставленных проблем, чем решенных вопросов. Среди важных его результатов отметим доказательство того положения, что если расходящийся ряд формально удовлетворяет дифференциальному алгебраическому уравнению и если он суммируем, то он определяет решение уравнения (т. е., как поясняет автор, представляет средство числового вычисления этого решения). Кстати, понятию сумми-

[1] Первая его заметка по этой тематике появилась в 1895 г.

руемый он не придавал абсолютного смысла, желая только отметить, что имеется бесконечность таких процессов суммирования, что теорема остается справедливой. Работа его состояла из трех глав: 1) общие положения о сходимости и расходимости; 2) рассмотрение суммируемости расходящихся рядов вообще и, в частности, степенных рядов, радиус сходимости которых конечен, и аналитического продолжения; 3) третья посвящалась случаю, когда этот радиус равнялся нулю. Она заканчивалась изучением и толкованием с точки зрения автора результатов Стилтьеса для частного случая таких рядов и общим заключением. Не имея возможности останавливаться подробно на этом интересном сочинении, отметим лишь, что Борель подошел здесь к разработке своей теории суммирования рядов указанного вида, более общей и полной, чем теория Пуанкаре, и существенно продвинул решение вопроса о представимости интегралов указанного ранее вида уравнений. Распространение полученных результатов на область комплексного переменного вело к уточнению классификации особых точек, порядков бесконечностей и т. д.

Теории асимптотических рядов посвящена большая часть главы III. Борель здесь подчеркивал отличие своей точки зрения на предмет по сравнению с точкой зрения Пуанкаре. Существенное состояло в том, что Борель искал условия, при которых ряд может быть рассмотрен как представляющий определенную функцию, между тем как тот же асимптотический ряд без этих условий для того же аргумента x всегда представляет бесконечное множество функций. Вместе с тем отмечалось, что изучение асимптотических рядов ведет к понятию особых аргументов или аргументов, для которых ряд перестает представлять асимптотически ту же аналитическую функцию или тот же интеграл дифференциального уравнения, которое изучается.

В скором времени (1901 г.) вышло в свет первое издание известных лекций Бореля о расходящихся рядах [105.3]. Здесь содержалась весьма полная, более общая и строгая чем у Пуанкаре и довольно всесторонне освещенная теория асимптотических рядов и их применений. После исторического введения, где были кратко рассмотрены основные работы предшественников, Борель изложил основы теории и ее применение к интегрированию дифференциальных уравнений, рассмотрел связь непрерывных дробей с теорией Стилтьеса, весьма подробно развил теорию суммируемых рядов и связь их с аналитическим продолжением, а также разложения в ряды полиномов. Во втором издании (1928 г.) была добавлена глава VI о современном развитии теории расходящихся рядов.

В начале нашего века интегрирование дифференциальных уравнений посредством асимптотических методов изучали также Адамар [166.1], Л. Шлезингер [254.7], А. Гамбургер [168]. Шлезингер рассматривал вопрос об асимптотическом представлении решений линейной системы дифференциальных уравнений, когда

ее коэффициенты зависят от параметра μ так, что точка $\mu=\infty$ была изолированной точкой неопределенности интеграла. Полученное разложение в отношении μ имело ту же структуру, что и нормальные ряды Томé в отношении x, и оно представляло асимптотически некоторую систему решений для больших значений μ. Аналогичный вопрос уже трактовался Горном в 1899 г. Шлезингер же дает здесь более общее решение для любой дифференциальной системы и для любой комплексной величины.

В диссертации А. Гамбургера [168] дополнялись результаты А. Кнезера относительно асимптотического представления интегралов определенного вида линейных уравнений второго порядка и оценивались остатки этих представлений. Некоторые дополнения общей теории и новые доказательства ряда известных теорем были предложены в диссертации Г. Гамбургера в 1914 г.

Задача уточнения общей теории степенных асимптотических рядов была рассмотрена затем Ватсоном [273], который ввел понятие о характеристиках асимптотического ряда. Так, он называл числа k, l, ρ, σ при условии, что функция $f(x)$ представляется разложением

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + R_n,$$

когда

$$|a_n| \leqslant A\Gamma(kn+1)\rho^n; \qquad |R_n x^{n+1}| \leqslant B\Gamma(ln+1)\sigma^n,$$

а числа A, B — постоянными асимптотического разложения. Он отметил, что характеристики для асимптотического ряда имели то же значение, что и радиус сходимости для сходящегося ряда. Опираясь на определение характеристик, Ватсон ставил и решал вопрос о единственности функции, определяемой асимптотическим рядом. Результаты его в смысле уточнения достаточности условий были дополнены Сан-Жуаном [23, 44].

Задача дальнейшего обобщения и углубления полученных Ватсоном результатов была потом поставлена и решалась Ф. Неванлинной в [223]. Здесь было уточнено общее понятие асимптотического представления регулярной аналитической функции $f(z)$ в области $-\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}$, $r > R$ $(z = re^{i\varphi})$ и развиты далее основы теории Пункаре. Как весьма важный элемент в этом отношении мы отметим установление им теоремы о возможности почленного дифференцирования асимптотических рядов для получения асимптотического представления производной. Эта теорема оказалась верной только в случае угловых областей. Исходя из замечания, что один и тот же ряд асимптотически представляет много функций, Неванлинна ищет тот класс функций, в котором они однозначно определены их асимптотическими разложениями, и получает еще ряд других интересных результатов.

В первые два десятилетия нашего века И. Горн продолжал разработку рассматриваемой проблемы с прежней интенсивностью. В его предыдущих работах применялись два основных метода. Первый из них, как отметил Хилб [172.2, 493], состоял в использовании результатов, найденных Пуанкаре в работах о граничных значениях логарифмических производных интеграла при приведении дифференциального уравнения n-го порядка к уравнению n—1-го порядка, для которого асимптотическое представление принималось как доказанное. Но этот метод терял силу в том случае, когда совпадали действительные части корней соответственного (12.7) уравнения. Он был также мало подходящим при исследовании поведения интеграла во всей окрестности особой точки, так как при приближении по некоторым направлениям x к ∞ имели место исключения. Поэтому в дальнейшем он применялся реже. Второй метод, имевший применение не только в работах Горна, но, как мы видели, и в работах многих других математиков, состоял в том, что к асимптотическим представлениям применялся метод последовательных приближений в таком виде, который позволял исследовать полностью поведение интеграла в окрестности особой точки и довольно удобно проводить оценки остатков. И в дальнейших работах Горна этот метод и его развитие занимал основное место. Приведение ранее полученных результатов в соответствие с новыми идеями Ватсона выполнено в [177.7]. Ряд последующих статей и заметок посвятил Горн интегрированию линейных дифференциальных уравнений через лапласовы интегралы и факториальряды, опираясь на данное Биркгофом обобщение преобразования Лапласа и приводя посредством последнего систему линейных дифференциальных уравнений, имевших $x=\infty$ точкой неопределенности высшего ранга (119), к системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Проведенное Горном суммирование расходящихся рядов в [177.8] при помощи упомянутого интеграла Лапласа представляло обобщение известного метода суммирования Бореля.

Асимптотическое поведение интегралов отдельных видов уравнений рассмотрено в диссертации Свенссена в 1907 г. Бендиксон распространил в [98.6] полученные ранее результаты на асимптотическое представление решений системы уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при использовании метода последовательных приближений.

Асимптотическое представление функций, теория суммируемости рядов и применение асимптотического метода рассматривалось в монографии Н. Парфентьева [53.1], посвященной исследованию теории роста функций. Решение задачи автор дал в форме ряда асимптотических законов, связав рост модуля

функции-ряда с ростом модулей коэффициентов ряда и ростом модулей ее нулей.

Одна из первых крупных работ по асимптотическому представлению интегралов линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, опубликованных в Брюсселе, принадлежала Нейлону [224]. В оригинальной обработке и со своими дополнениями он изложил многие известные результаты в своеобразной системе, начиная с перечисления правил «асимптотического исчисления».

Дополнение некоторых результатов Горна об асимптотическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений и применение этого метода к асимптотической теории шаровых функций рассмотрено Блюменталем [103]. Продолжение этих исследований, изучение конкретного случая уравнения четвертого порядка с применением идеи Пенлеве рассматривать упрощенное уравнение и связь с проблемами упругости (вычисление напряжений в шаровых оболочках) доложено им же в 1912 г.

Изучение асимптотики в американской математической литературе нашло отражение главным образом в работах Бохера, Дункеля, Биркгофа, Лава и др.

Проблема асимптотического представления нерегулярных интегралов для того случая, когда корни характеристического уравнения являлись кратными, еще до 1914 г. в общем не трактовалась. Для отыскания способов ее решения Лав [209] стал изучать случаи многократных корней подробно для уравнений (с переменными коэффициентами, разлагающимися в асимптотические ряды) второго и третьего порядков. Разрабатываемый метод мог быть применим и для уравнения любого порядка. Особенно интересные результаты и впервые автором были получены для уравнений третьего порядка. Если характеристическое уравнение обладало одним простым и одним двукратным корнем, то в этом случае в асимптотическом разложении интегралов, соответствующих обоим двойным корням, появлялась степень в общем $x^{1/2}$, а в особом подслучае $\log x$. В случае тройных корней в общем появлялась степень $x^{1}/^{3}$, в особых подслучаях снова $x^{1}/^{2}$ и соответственно $\log x$. Распространение полученных результатов на уравнения n-го порядка при некоторых ограничениях относительно корней предложено им в том же 1914 г. По существу он дал здесь, опираясь на известные теоремы Дини (1898—1899 гг.), доказательство существования фундаментальных решений, представимых асимптотическими разложениями.

Много интересных и принципиально новых результатов в рассматриваемой проблеме получил Биркгоф, начав ее разработку еще в диссертации, посвященной асимптотическим свойствам решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, и с применением к задаче распространения краевых значений (1907 г.). Этот же вопрос трактовался несколько иначе в его первых опубликованных ра-

ботах. Биркгоф рассматривал здесь асимптотический характер решений уравнений вида

$$\frac{d^n z}{dx^n} + \rho a_{n-1}(x, \rho) \cdot \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \\ + \ldots + \rho^n a_0(x, \rho) z = 0$$

для величины $|\rho|$. Коэффициенты $a_i(x, \rho)$ в окрестности $\rho = \infty$ есть аналитические функции комплексного параметра ρ, обладающие производными любого порядка по действительному переменному x. Чуть раньше асимптотическое свойство для $\rho \to \infty$ в определенном направлении $\arg\rho = \alpha$ рассматривал Шлезингер [254.7]. В данной работе Биркгофа подобное свойство рассматривается для области $\theta < \arg\rho < \psi$, но другим методом. Здесь он по существу обобщил как случай, рассмотренный ранее Лиувиллем [205.3, § 3], так и результаты упоминавшихся ранее работ Шлезингера и Горна на уравнения n-го порядка и на системы уравнений. (При этом имелся в виду тот случай, когда корни характеристического уравнения оставались простыми на всем промежутке изменения аргумента).

Георг Биркгоф (1884—1944).

Следующий цикл работ Биркгофа был посвящен изучению в свете новых идей особых точек системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.17}$$

где

$$|x| > R, \; a_{ij}(x) = a_{ij} x^q + a_{ij}^{(1)} x^{q-1} + \ldots + a_{ij}^q + \\ + a_{ij}^{(q+1)} \frac{1}{x} + \ldots \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.18}$$

и q — целое число. Биркгоф исследовал природу ее решений в окрестности точки $x = \infty$, которая взята как особая точка этой системы, так что $q \geqslant -1$. Число $q+1$, согласно Пуанкаре, названо рангом системы (12.17) при $x = \infty$; n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ характеристического уравнения $|a_{ij} - \delta_{ij}\alpha| = 0$ ($\delta_{ij} = 0$, при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$) имелись в виду различными и в случае $q = -1$ разность их не равнялась целым числам (общий случай трактуется

позже). Подходящим линейным преобразованием

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) Y_j, \tag{12.19}$$

где функции $\lambda_{ij}(x)$ в $x=\infty$ аналитичны или имеют полюсы, система (12.17) преобразуется в другую с коэффициентами вида (12.18), но не обязательно при тех же q. Две системы вида (12.17), связанные подстановкой (12.19), называются эквивалентными относительно особой точки ∞. Также вводится понятие эквивалентных особых точек. Опираясь затем на доказанную лемму из теории аналитических функций, Биркгоф доказывает важную теорему о том, что каждая система линейных дифференциальных уравнений вида (12.17) с особой точкой ранга $q+1$ для $x=\infty$ в отношении особой точки $x=\infty$ эквивалентна канонической системе вида

$$x \frac{dY_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x) Y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $P_{ij}(x)$ — полиномы не выше $q+1$-й степени.

Таким образом, достигалось приведение к тому случаю, который уже обсуждался ранее Пуанкаре и его последователями. В специальном случае, когда $x=\infty$ была так называемой особой точкой определенности (несущественно особой), т.е. $q=-1$, функции $P_{ij}(x)$ переходили в константы b_{ij}, которые были коэффициентами при $\frac{1}{x}$ в разложениях $a_{ij}(x)$ по убывающим степеням x. В этом случае подстановкой (12.19) можно было прийти к элементарно интегрируемой системе дифференциальных уравнений. По существу метод Биркгофа позволял однообразно толковать как особые точки определенности, так и неопределенности конечного ранга. Ряд интересных дополнений по исследованию уравнений второго порядка предложено в [100.5].

Отдельные вопросы асимптотического поведения интегралов линейных дифференциальных уравнений и представления нерегулярных интегралов рассматривались в работах Перрона, Гамеля, Гарнье.

Герристон [158] рассмотрел асимптотические решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка и установил их форму.

Развитие общей теории в дальнейшем отражено в большой работе Штернберга [260] и статье Карлемана [119]. В последней было существенно обобщено обычное понятие асимптотических рядов и соответственно рассмотрено представление интегралов общего линейного однородного уравнения с коэффициентами, представленными в форме асимптотических рядов.

Дальнейшее обобщение результатов Шлезингера и Биркгофа связано с работами Я. Д. Тамаркина и прежде всего с фундаментальной его монографией [74], вторая глава которой посвящалась асимптотическому представлению решений дифференциальных систем, зависящих от параметра

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x, \rho)\, y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты a_{ik} — однозначные функции комплексного параметра ρ, аналитические около точки $\rho = \infty$, т. е. при всех ρ с достаточно большим $|\rho|$, и для которых точка $\rho = \infty$ есть полюс. Автор рассмотрел здесь частично и случай кратных корней характеристического уравнения, когда вместо рядов, расположенных по степеням ρ, появлялись ряды, расположенные по степеням $\sqrt{\rho}$ (стр. 88 и след.); этот результат совпадал в принципе с уже упомянутым результатом Лава, который, видимо, не был известен Тамаркину, отмечавшему, что этот случай до тех пор никем не был рассмотрен.

Следует также отметить, что проблема асимптотического представления решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков и систем линейных дифференциальных уравнений при достаточно больших значениях входящего в уравнение параметра решалась Тамаркиным на основе более простого метода, чем у его предшественников. В основе его лежало приведение дифференциального уравнения к интегральному некоторого вида и применение к последнему метода последовательных приближений. Упомянутая выше диссертация Тамаркина была первой в России работой по несамосопряженным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вскоре результаты Шлезингера, Биркгофа, Тамаркина были распространены на неоднородные дифференциальные уравнения Фоулером и Локком, упростившими также ряд доказательств Биркгофа [80,5].

Довольно полное изложение состояния вопроса об асимптотическом представлении решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и обобщение результатов Шлезингера — Биркгофа, Тамаркина на случай линейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих параметр, было дано в 1936 г. в статье Тржицинского [266.2].

Глава XIII. СВЯЗЬ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТЕОРИЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Инварианты. Группа преобразований. Группа монодромии

Большая польза для установления закономерностей в теории линейных дифференциальных уравнений была почерпнута из общей теории алгебраических линейных уравнений и дисциплин, порожденных на ее основе или к ней примыкающих. В этих двух теориях можно наблюдать ряд аналогий как внешнего, так и внутреннего, более глубокого характера. Как известно, для получения общего интеграла линейного дифференциального уравнения n-го порядка необходимо иметь n частных линейно независимых решений. Также для отыскания решения алгебраического уравнения n-й степени надо знать его n корней. В случае же системы дифференциальных уравнений с n неизвестными строится интегральная матрица из n линейно независимых систем решений. Тогда коэффициенты системы a_{ik} будут выражаться через элементы интегральной матрицы (y_{ik}) и их первые производные в форме

$$a_{ik} = (y_{ik})^{-1}\left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right).$$

Иначе говоря, они могут быть вычислены как отношения определителей с общим знаменателем $\Delta = |y_{ik}|$, который в случае уравнения n-го порядка переходит в известный определитель Вронского. Представление этого определителя в форме $\Delta = e^{\int \sum_k a_{kk} dx}$ для уравнения n-го порядка было дано уже Абелем и Лиувиллем, а для системы — Якоби в 1837 г. При переходе от одной интегральной матрицы к другой, т. е. когда (y_{ik}) испытывает линейную подстановку (c_{ik}) с постоянными коэффициентами, то (a_{ik}) остаются без изменения, в то время как Δ перемножается с $|c_{ik}|$. Таким образом, определитель Δ является инвариантом для зависимой от n^2 параметров группы относительно всех линейных преобразований. Изучая аналогичный вопрос в серии сообщений 1880 г. и в статье [94.3], П. Аппель установил теорему, что каждая целая рациональная функция образующих фундаменталь-

ную систему интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (13.1)$$

и их производных, которая переходит в себя, перемножаясь с константами через подстановку другой фундаментальной системы для $y_1, \ldots y_n$, равна целой рациональной функции коэффициентов дифференциального уравнения и их производных, умноженной на степень $e^{-\int a_1 dx}$. Он применил эту теорему для решения общей проблемы преобразования линейных дифференциальных уравнений, состоящей в том, чтобы построить линейное уравнение, которое имеет интегралом функцию

$$f(y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1)}; y_2, y_2', \ldots y_2^{(m_2)}; \ldots y_n, y_n', \ldots y_n^{(m_n)})$$

— целую рациональную по своим аргументам, и коэффициентами — данные функции от x. Здесь же были рассмотрены такие уравнения, интегралы которых удовлетворяли некоторому алгебраическому уравнению с постоянными коэффициентами и указывалось средство, как установить существование подобных соотношений. Так связывался этот вопрос с классом инвариантов линейных дифференциальных уравнений, введенных Лагерром [1] в 1879 г. После этого появилось большое число исследований, посвященных изучению инвариант линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальным в этой области, как отметил К. С. Сибирский [163], было сочинение Альфена [167.3], удостоенное в 1888 г. большого приза Парижской академии. Построение и применение инвариантов линейных дифференциальных уравнений рассмотрено в 1886 г. в кандидатской диссертации П. Боля, отмеченной золотой медалью (121).

В дальнейшем инварианты группы линейных преобразований фундаментальной системы интегралов уравнений вида (13.1) были подробно изучены в диссертации Вессиота в 1892 г. и в монографии Шлезингера [254.1, т. 1, 38 и след.]. Общая линейная группа, или точнее, как отметил Ли, ее $(n-1)$-кратное расширение, играет здесь ту же роль, что и симметрическая группа в теории алгебраических уравнений. В дальнейшем эта аналогия следовала в направлении алгебраических идей Галуа и под влиянием теории Ли преобразования групп, что нашло отражение в работах Пикара и позже Вессиота.

Первоначально понятие группы преобразований, как и группы монодромии [2], касалось лишь определенных фундаменталь-

---

[1] Основы теории инвариантов были заложены в работах Кэли в 1846 г. В дальнейшем ее развитии фундаментальное значение сыграли публикации Гильберта в начале 90-х годов XIX века.

[2] Этот термин обозначает группу преобразований, которым подвергается система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вдоль такого замкнутого пути, вдоль которого $y_1, y_2, \ldots, y_n$ остаются монодромными [192.11, 311].

ных систем, но затем эти понятия стали играть для дифференциального уравнения тождественную роль.

Как известно, основная задача интегрирования линейного дифференциального уравнения, поставленная в самом общем виде, сводится к определению его группы, или, по термину Клейна, группы монодромии. Установление этой группы уже в начале 70-х годов рассматривалось как основная проблема теории, способствующая установлению связи между разложениями, которые имели место в окрестности отдельных особых точек. Для числового ее определения предлагались различные подходы, применявшиеся сперва к уравнениям фуксова типа. Естественно, что почин в решении этого вопроса принадлежал Фуксу. В статьях [153.6] он исходил из положения, что установленные в каждой особой точке разложения для фундаментальной системы имеют радиус сходимости до ближайшей особой точки. Затем, чтобы выразить друг через друга принадлежащую к соседней особой точке фундаментальную систему, бралась некоторая точка, принадлежащая общей части областей сходимости обеих фундаментальных систем, и тут же вычислялись значения интеграла и его $n-1$ первых производных для обеих фундаментальных систем. Вычисления значительно упрощались, когда за точку сравнения могла быть выбрана одна из двух рассматриваемых особых точек, на что указывалось в работах Томé, где он пытался решить поставленную задачу Фукса другими способами, не весьма, впрочем, эффективными, применяя одну из установленных им теорем.

Лежащий в основе решения задачи Фукса метод состоял по существу в построении нового, отличного от общеизвестного приема аналитического продолжения функции. При этом имелось в виду построить такой метод аналитического продолжения интегралов линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, в котором была бы ясно видна связь между начальными и конечными значениями этих интегралов. В основе предлагаемого метода лежало аналитическое представление функции, которое получали некоторым рациональным преобразованием, отображая плоскость одного переменного на плоскость другого. Но, как отметил П. А. Некрасов [52.1, 538], превосходный по основной идее фуксов метод аналитического продолжения функций требовал еще в основах своих исправления, что было задачей далеко нелегкой.

Фукс рассматривал отображение части z-плоскости на круговую область w-плоскости посредством рациональной подстановки вида $z = F(w) = \frac{g(w)}{wh(w)}$, где $g(w)$ и $h(w)$ — целые рациональные функции, отличные от нуля при $w = 0$. Точки w и w_1 называются соответственными, если удовлетворено условие

$$\psi(w, w_1) = \frac{F(w) - F(w_1)}{w - w_1}, \quad \psi(w, w_1) = 0. \tag{13.2}$$

В. А. Анисимов (1860—1907).

Наибольший из концентрических кругов, описанных из точки $w=0$ как из центра, и обладающий тем свойством, что всякой точке w, лежащей внутри этого круга, соответствуют точки w_1, лежащие вне его, назывался, по Фуксу, предельным кругом (K), принадлежащим функции $F(w)$. При движении точки w внутри K по кругу радиуса $r<R$, где R — радиус круга K, точки w_1, изображающие корни уравнения (13.2), опишут некоторую кривую $C(r)$. При бесконечно малом r она будет состоять из бесконечно малых замкнутых кривых, окружающих полюсы функции $wF(w)$, и, если $F(\infty)=\infty$, из замкнутой бесконечно удаленной кривой. При возрастании r кривая $C(r)$ будет деформироваться, но при $r<R$ лежать вне предельного круга K, не касаясь его. Но когда r, возрастая он нуля, достигает R, круг $K(r)$ достигнет предельного круга K и кривая $C(r)$ перейдет в предельную кривую C, которая должна в некоторых точках касаться круга K, располагаясь остальными вне его. Фукс пришел к выводу, что радиус R предельного круга K, принадлежащего функции $F(w)$, равен наименьшему из модулей корней уравнения $F'(w)=0$. Неточность и в общем ошибочность этого положения впервые была усмотрена П. А. Некрасовым и показана на частном примере в магистерской диссертации [2.1] В. А. Анисимова (94). При более тщательном изучении оказалось, что в основе своей метод Фукса допускает исключения и может применяться при некоторых ограничениях. О своих возражениях В. А. Анисимов написал Фуксу, и берлинский академик, исправляя свою неточность, высказал второе правило для определения радиуса предельного круга, которое также не достигало цели вследствие вкравшейся в его заметку новой ошибки, как это было показано П. А. Некрасовым [52.1], исправившим погрешность Фукса и предложившим свое правило определения радиуса предельного круга, годное для всех случаев (стр. 543).

Однако дискуссия на этом не окончилась и Фукс продолжал защищать свое видоизмененное правило в [153.15], считая указанные ему противоречия парадоксом, который казался легко устранимым. Частично этому способствовала неточность критики Некрасова, на что он сам указал, и после дополнительного исследования в [52.2] он пришел к выводу, что основа погрешности в рассуждениях Фукса состояла в том, что он вводит дифференциалы $d\varphi$ и $d\varphi_1$ функций φ и φ_1 при таком значении пере-

менного r, когда производные $\frac{d\varphi}{dr}$ и $\frac{d\varphi_1}{dr}$ вообще говоря обращаются в бесконечность.

Таким образом, решение задачи об установлении группы уравнения привело к постановке весьма важной проблемы в теории функций об исследовании одного из видов аналитического продолжения. Прошедшая дискуссия была весьма плодотворной и послужила основой монографии В. А. Анисимова [2.2], с достаточной полнотой и основательностью охватившей относящийся сюда круг вопросов.

Возвратимся, однако, к понятию группы монодромии, которое изучалось потом Жорданом [186.2] и Пуанкаре [237.6], определивших ее как множество линейных подстановок, которые испытывает фундаментальная система, когда независимое переменное, выходя из неособой точки и не встречая особой точки, пробегает некоторый замкнутый путь таким образом, что коэффициенты уравнения после обхода остаются неизменными. Вся система величин, вполне определяющих группу, была названа ее инвариантами. Выше мы указали некоторые работы, касающиеся этого вопроса. В то же время Пуанкаре ввел понятие фундаментальных инвариантов группы, которые не изменялись при переходе от одной фундаментальной системы к другой и посредством которых можно было вычислить алгебраическим путем коэффициенты подстановок, которые совершались над некоторой фундаментальной системой. Примеры таких фундаментальных инвариантов представляются коэффициентами фундаментального уравнения, принадлежащего к системе линейных подстановок. Было установлено, что число фундаментальных инвариантов группы монодромии [16.3, гл. IV, § 10] дифференциального уравнения с однозначными коэффициентами зависит от числа особых точек (включая бесконечность). Если рассматривать вместо интегралов систему их отношений вида $\frac{y_i}{y_1}$ $(i=2, \ldots n)$, то она испытывает при обходах особых точек дробнолинейные неоднородные подстановки. Множество их образует так называемую проективную группу монодромии, зависящую от определенного числа фундаментальных инвариантов, и характера коэффициентов уравнения. Подробное исследование фундаментальных инвариантов для уравнения второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}=p(x)y$, принадлежащего фуксовому классу, проведено в диссертации Фогта в 1889 г.

Представление интегралов уравнений в кольце привело к иному способу числового установления группы монодромии, что подробно трактуется в работе Миттаг-Леффлера [218.2]. Но подобные способы не давали представления о характере фундаментальных инвариантов как функций, входящих в дифференциальное уравнение параметров. Все же Пуанкаре удалось, опи-

раясь на теорему существования дифференциальных уравнений с частными производными и пользуясь методом последовательных приближений, прийти к заключению [237.9], что интегралы являются целыми трансцендентными функциями тех параметров, от которых коэффициенты уравнения есть целые рациональные функции при условии, что начальные значения рассматриваемых интегралов выбраны независимо от упомянутых параметров. Отсюда непосредственно следовала теорема, что фундаментальные инварианты есть также целые трансцендентные функции этих параметров. Этот вопрос изучался позже в статье Гюнтера [165.2]. Из упомянутых работ также следовало, что если коэффициенты дифференциального уравнения не являются целыми функциями параметров, то интегралы в общем — бесконечно многозначные функции от параметров и, в частности, от понимаемой как переменное особой точки.

§ 2. Проблема Фукса; связь линейной и нелинейной теории в работах Р. Фукса и Л. Шлезингера

Напомним, что Риман первым поставил вопрос [246.4] об изучении интеграла линейного дифференциального уравнения как функции особых точек, имея в виду, как отметил Хилб [172. 2, 502], вероятно, тот случай, когда группа монодромии не зависела от понимаемых как параметры особых точек. Позже развитие этой проблемы нашло трактовку в серии работ Л. Фукса 90-х годов [153.14 и других], где велось исследование интегралов как функций от параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, от которых зависели коэффициенты уравнения, но не группа монодромии. Впервые такой класс уравнений вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots p_n y = 0 \qquad (13.3)$$

он рассмотрел в одном из сообщений Берлинской академии 1888 г. В дальнейшем Л. Фукс установил ряд весьма общих теорем, связанных с трактовкой указанной проблемы.

Обобщение понятия обхода около особой точки на многозначные функции двух переменных, а также распространение результатов Фукса на уравнения с многими переменными рассматривалось сперва в работе Горна, где частично дополнялись результаты Соважа, а затем в более общей форме в [177.1.—2]. Здесь исследовались условия регулярности системы полных линейных уравнений с частными производными, а в случае их выполнимости — представление регулярной системы ветвей. Т. е. он изучал здесь отдельный вид такого класса системы линейных уравнений с частными производными, которая обладала несущественно особыми точками.

Подробное исследование случая, когда группа монодромии независима от единственной особой точки, в связи с изучением проблемы Римана выполнил Шлезингер в [254.2.—5].

Существенного успеха в решении проблемы о линейных однородных дифференциальных уравнениях, группа подстановок которых не зависима от входящих в коэффициенты уравнений параметров, поставленной в общем виде и решаемой Л. Фуксом, добился его сын Рихард Фукс. Уже в одной из первых работ [154.1] он дал более простое изложение вопроса. Здесь были прежде всего установлены необходимые и достаточные условия того, что уравнение указанного вида обладает независимой от параметра группой подстановок. Затем выводится теорема о том, что если уравнение указанного вида с однозначными коэффициентами обладает для фундаментальной системы интегралов независимой от параметра группой подстановок, то этот интеграл, рассматриваемый как функция параметра, также удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с однозначными коэффициентами. Р. Фукс доказал и обратную теорему для случая, что оба уравнения, о которых идет речь, второго порядка.

В серии дальнейших работ [154.2, 3 и др.] Р. Фукс стал изучать проблему независимости группы монодромии от особой точки, связав ее с рассмотрением дифференциальных (нелинейных) уравнений с неподвижными критическими точками. Автор исследовал здесь вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя существенно особыми точками: 0, 1, t и ∞, для которых коэффициенты подстановок, совершаемых над системой интегралов при обходах независимого переменного около особых точек, лежащих в конечной части плоскости, обладают любыми заданными и, следовательно, независимыми от выбора особых точек величинами, т. е. решал конкретный случай вышеуказанной проблемы. Он сперва показал, что наряду с четырьмя вышеуказанными существенно особыми точками должна существовать по крайней мере одна кажущаяся (несущественно особая) точка. Затем устанавливались необходимые и достаточные условия для констант, входящих в коэффициенты, чтобы уравнение обладало вышеуказанными свойствами, и доказывалось, что эти условия друг с другом совместимы. Фукс показывает, что координата $\lambda(t)$ мнимой особой точки, как функция от t, удовлетворяет дифференциальному уравнению типа Пенлеве, которое может перейти через преобразование посредством одного эллиптического интеграла в неоднородное линейное уравнение второго порядка, левая часть которого совпадает с левой частью уравнения Лежандра. Р. Фукс показывает также связь данного исследования с проблемой Римана и устанавливает еще ряд интересных соотношений. Таким образом Р. Фукс пришел первым к открытию известного шестого уравнения (см. С. г. 141; сообщение Гамбье по этому вопросу — С. г. 142; Пенлеве — С. г. 143), установил его значение для рассматриваемой проблемы и изучил некоторые его свойства.

В следующей работе Р. Фукс определял фундаментальные инварианты рассматриваемого уравнения и вычислял с их помощью фундаментальные и переходные подстановки. Затем он установил зависимость мнимой особой точки от параметра через дифференциальное уравнение с неподвижными критическими точками. Уравнение такого вида встречалось уже в диссертации Гарнье [157.2]. Фукс показал здесь некоторые его интересные свойства.

Почти в то же время аналогичный круг вопросов обсуждался и в ряде статей Шлезингера, связанных главным образом с решением проблемы Римана, о чем речь будет дальше. Шлезингер первым занялся изучением проблемы Фукса для систем дифференциальных уравнений. Так, в работе [254.5], посвященной памяти Дирихле, углубляя и развивая по данному вопросу результаты [254.2], он явно установил необходимые и достаточные условия того, чтобы фундаментальные подстановки некоторой просто канонической линейной дифференциальной системы вида

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda k}^{\nu}}{x - a_\nu} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (13.4)$$

не зависели бы от особой точки. Эти условия были представлены в форме нелинейной системы дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять дифференциальные подстановки как функции особой точки, рассматриваемой в качестве параметра. Интегрирование этой системы было предметом большой статьи [254.11].

Как известно, Шлезингер был одним из активнейших последователей Римана, стремившимся обосновать и развить точку зрения последнего на интегрирование дифференциальных уравнений. Именно Шлезингер первый показал, насколько глубоко владел Риман тем аналитическим методом, который впоследствии развил Фукс. Он первым же поставил вопрос о решении проблемы Римана и в процессе этого, развивая свои идеи далее в [254.6], установил необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа монодромии системы линейных однородных уравнений была независимой от особых точек, обобщая, таким образом, результаты Р. Фукса.

Характерным для многих работ Шлезингера с 1905 г. был метод исследования интегралов линейных дифференциальных уравнений и их систем при помощи матричного исчисления под влиянием работ Вольтерра. Этот же метод был положен в основу его курса [254.8] по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений и применен в упомянутой выше работе [254.11]. Здесь уместно отметить весьма интересный факт, что данная работа Шлезингера была прислана им на шестой конкурс на соискание премии им. Лобачевского по объявленной

Казанским физико-математическим обществом теме. В 1912 г. общество объявило конкурс на две премии им. Лобачевского: одна — за работы по геометрии (премию получил Ф. Шур и почетный отзыв И. Кулидж) и вторая — за работы по анализу на тему: «Изучение общих интегралов уравнений Пенлеве (дифференциальных уравнений второго порядка первой степени), общий интеграл которых имеет неподвижные критические точки. Желательно подробное изучение одного из типов этих уравнений». Отметим, что для большой премии по математическим наукам Парижской академии наук в том же 1912 г. была выдвинута тема: «Усовершенствование теории алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка и третьего порядка, общие интегралы которых однозначны». Первую премию по этому конкурсу получил Бутру [1] за сочинение [109.6], вторую поделили Шази [124.2] и Гарнье [157.2].

Таким образом, в разных странах, причем тогда еще с весьма различным уровнем развития данной теории, были выдвинуты по существу одинаковые темы. Важность и дальновидность подобной акции со стороны руководства Казанского физико-математического общества трудно переоценить. Этим самым было открыто еще одно русло потока новых идей в русскую математическую литературу. В трудах общества появился благодаря этому один из лучших мемуаров Шлезингера, а также весьма обстоятельный отзыв на него проф. Парфентьева [53.2], где кратко излагался общий курс идей, имевших отношение к теме конкурсной работы.

В мемуаре Шлезингера, как он сам об этом говорил, решалось по существу две проблемы — Фукса и Римана. В направлении решения первой из них Шлезингер находит уравнения, которые служат в то же время необходимым и достаточным услоем, чтобы группа монодромии системы (13.4) была независима от координат особых точек. Вторая часть мемуара [254.11] посвящена изучению интегралов найденной таким образом системы уравнений. По результатам эта часть совпадает с работами Гарнье. В третьей части исследуется характер изменения интегральной матрицы (y_{ik}) при перемещении особых точек. В процессе решения этой и других задач Шлезингеру удалось выделить целый класс таких дифференциальных систем, интегралы которых внутри некоторой области являются мероморфными. Хотя такая система имела подвижные полюсы, в ней отсутствовали подвижные критические точки и подвижные существенно особые точки. Она охватывала собой все дифференциальные уравнения второго порядка с неподвижными критическими точками и этим самым, в известном смысле, уравнения аналогичного класса, рассмотренные ранее Пенлеве и его учениками. Таким образом, идеи Шлезингера могли служить исходным пунк-

[1] См. об этом рапорт Пенлеве [228.28].

том для аналогичного исследования уравнений высшего порядка. Ввиду несомненной научной ценности мемуара Шлезингера, трактовавшего проблему более общего порядка, чем было указано в конкурсе, хотя формально и отличную от заданной, ему была единогласно присуждена искомая награда. Рассмотренные нами работы Р. Фукса, Л. Шлезингера и математиков французской школы с несомненностью показывают, насколько плодотворной является идея использования сложившихся понятий линейной теории для исследования новых вопросов — нелинейной теории. Мы уже упоминали в предыдущих главах о дальнейшем развитии этих идей в трудах французских математиков (Гарнье, Шази и др.).

Проблема Фукса для систем была затем предметом фундаментальных исследований И. А. Лаппо-Данилевского в [38.4]. Применяя его методы, Г. Ф. Федоров в [78] исследовал задачу Фукса для системы двух уравнений, когда группа их не зависела от координаты одной из особых точек. Он установил достаточность условий Л. Шлезингера и И. А. Лаппо-Данилевского для решения задачи Фукса, показал, что несущественно особые точки, необходимость которых показал Р. Фукс, получаются в результате перехода от системы к одному дифференциальному уравнению, а также выяснил ряд других важных вопросов.

§ 3. Приводимость и неприводимость уравнений

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, коэффициенты которого принадлежат некоторой области рациональности, называется приводимым, когда оно имеет общий интеграл с некоторым, также определенным, линейным дифференциальным уравнением низшего порядка. Понятие неприводимости было введено в 1873 г. Фробениусом. Под приводимым он понимал такое дифференциальное уравнение с коэффициентами — однозначными определенными аналитическими функциями, которое не имеет общего интеграла ни с каким дифференциальным уравнением низшего порядка, или при равных порядках низшей степени с такого же характера коэффициентами. Автор рассматривал здесь однородные уравнения фуксового класса и установил ряд общих теорем. В частности, когда линейное дифференциальное уравнение имеет общий интеграл с линейным неприводимым уравнением, то оно имеет также все интегралы, общие с ним. Поэтому не каждое решение линейного дифференциального уравнения является также интегралом неприводимого уравнения. Если линейное дифференциальное уравнение приводимо, то имеется одно или несколько линейных дифференциальных уравнений низшего порядка, с которыми оно имеет все интегралы общими. Эти теоремы доказывались двумя различными методами. Здесь же Фробениус высказал теорему, что если из двух линейно независимых интегралов однородного линейного уравне-

ния один представим как однородное линейное дифференциальное выражение другого, то данное уравнение приводимо. Несколько позже эта теорема была также предметом исследования Гамбургера, но в 1906 г. Ландау показал [199.2], что эта теорема верна не для всякой области.

Опираясь на понятие неприводимости уравнений, Фробениус в скором времени [151.3] весьма простым способом получил указанные раньше результаты Томé относительно того случая, когда уравнение вида (13.3) имело не все интегралы регулярными. Существование регулярных интегралов было равнозначным с приводимостью рассматриваемых дифференциальных уравнений в том смысле, что оно давало линейное уравнение низшего порядка, которому удовлетворяли только регулярные интегралы и коэффициенты которого также имели характер рациональных функций в окрестности особой точки. Среди ряда других интересных результатов, полученных им, отметим теорему о том, что дифференциальное уравнение, обладающее только регулярными интегралами, составляется из уравнений первого порядка, каждое из которых имеет регулярный интеграл и т. д.

Понятие неприводимости уравнений было затем объектом исследования многих ученых — Фабри, Бендиксона, Беке. Вопрос выяснения приводимости или неприводимости уравнения сводился здесь к некоторому конечному числу операций; кроме того, само определение неприводимости несколько видоизменилось. Подробная трактовка этого понятия и ряд новых теорем о соотношении интегралов содержится в статье Кенигсбергера [195.1].

Понятие неприводимости вело к разложению линейных однородных дифференциальных выражений на неприводимые множители. При этом теоремой Ландау [199.1] было установлено число множителей и порядки их при всех таких разложениях. Несколько позже Шлезингер и Леви перенесли понятие приводимости на линейные дифференциальные системы.

Результаты Фробениуса были изложены и дополнены в работе Флоке в 1879 г. и затем применены им для исследования регулярных интегралов. Он же рассматривал и метод разложения дифференциального уравнения на символические первичные множители и использование его для определения числа регулярных интегралов и связи его со степенью определяющей функции.

В ряде исследований связывалось изучение приводимости группы преобразований с приводимостью дифференциального уравнения. Так, достаточность первого для второго была установлена Беке в 1894 г. В одной важной теореме Бернсайда [116] трактовались необходимые и достаточные условия приводимости конечной или бесконечной группы линейных однородных подстановок в связи с некоторыми условиями для решений систем линейных уравнений.

Таким образом, в известной степени теория приводимости

линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами согласовывается с теорией приводимости групп линейных подстановок. Изложение теории становилось более прозрачным и удобным, когда от изучения линейных дифференциальных уравнений перешли к изучению линейных дифференциальных систем с применением также матричного исчисления, что в полной мере и весьма подробно впервые осуществил Шлезингер [254.8].

§ 4. Классификация линейных дифференциальных уравнений. Понятие класса, вида и семейства

О понятии класса впервые речь шла в известном фрагменте Римана [246.4]. Автор вводил его независимо от дифференциального уравнения. Принадлежащими одному классу он считал все такие системы функций, которые обладают одними и теми же несущественно особыми точками и той же группой монодромии. «Производные этих функций,— говорил он,— очевидно, образуют систему, принадлежащую тому же классу. Отсюда выводится следствие, что «функции y, образующие систему, удовлетворяют дифференциальному уравнению n-го порядка, коэффициенты которого — целые (рациональные) функции от x» [246.4, 181]. Кроме того, как существенный признак указывался тот, что «каждая система, принадлежащая тому же классу, выражается линейно, с рациональными коэффициентами, через эти функции и их производные до $(n-1)$-го порядка» (там же). Отсюда следует возможность установить общий вид системы данного класса, откуда, как отметил автор, видно, что число всех таких систем бесконечно. Ближайшую задачу строящейся на новых принципах теории линейных дифференциальных уравнений Риман усматривал в разыскании простейших систем каждого класса. Но доказательство существования функций y оказалось связанным с рядом трудностей и составило известную «проблему Римана», решению которой были посвящены многие работы нашего века. Таким образом, в основу классификации Римана ставился не вид уравнения или его коэффициентов, а характер определяемых дифференциальным уравнением функций.

Уточнение этого понятия находим в посмертной работе Риттера [248]. Опираясь на идеи Римана [246.3] и развивая одну из предыдущих своих работ, Риттер рассматривает вместо семейства функций семейства форм, используя однородные переменные. Изложив ряд вводных понятий, он доказал существование соответственного семейства форм при любой заданной группе, используя метод Пуанкаре из его работ о зета-фуксовых функциях. Затем устанавливалось определение принадлежащих к тому же классу семейств форм, а также был получен ряд новых интересных соотношений [172.2, 513—514].

Связь понятия класса линейного дифференциального уравнения, данного Риманом, с понятием общей многократности двух линейных дифференциальных выражений P и R, а также простой способ устанавливать все принадлежащие к одному классу с $R=0$ уравнения рассмотрены в статье Гефтера [171.2].

Понятие рода или вида уравнения, встречающееся в работах Пуанкаре [237.10], Фукса и их последователей, исходило из других основ. Так, рассматривая два однородных линейных уравнения соответственно порядка n и n_1 с рациональными коэффициентами при условии $n_1 \leqslant n$, Пуанкаре говорил, что второе уравнение принадлежит вместе с первым к одному и тому же роду (виду) или содержится в виде, определенном первым уравнением, если интеграл z второго уравнения представляется через интеграл y первого уравнения в форме

$$z = r_0(x)\, y + r_1(x)\, y' + \ldots + r_m(x)\, y^{(m)}, \qquad (13.5)$$

где может быть взято $m \leqslant n-1$, а функции $r_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \ldots m)$ рациональны и $r_0(x)$ отлично от константы. Если $n_1 < n$, то первое уравнение, по определению Фукса [153.14], будет приводимым. Если же $n=n_1$, то оба уравнения принадлежат к тому же роду и оба одновременно будут, как установил Фробениус, приводимы или нет и обладать той же самой группой монодромии. Ряд других свойств уравнений, принадлежащих к тому же роду, приведено в работе Шлезингера [254.1, т. 2, ч.1, 120—122].

Аналитическому изучению особенностей линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами и классификации их трансцендентных решений посвящалась первая часть диссертации Маротта (1898 г.). Он показал здесь, что каждой особой точке a такого уравнения принадлежит линейная группа преобразований, которая при исследовании особенностей играет ту же роль, что и группа Галуа при решении алгебраического уравнения. Эта группа, характеризующая природу особых точек, названа Мароттом «мероморфной», так как ее дифференциальные инварианты в окрестности точки a есть мероморфные функции. Были установлены также отношения, которые существуют между группой рациональности, монодромии и мероморфными группами по отношению к различным особым точкам линейного уравнения. Эти и другие полученные им результаты использовались затем для классификации трансцендентных интегралов вышеуказанных уравнений и для установления некоторых свойств дифференциальных уравнений того же вида; кроме того, предложен метод для распознавания, принадлежат или нет два данных дифференциальных уравнения к тому же виду. Вторая часть работы посвящалась изучению группы рациональности уравнений указанного вида и ее применениям.

Несколько иная трактовка понятия вида уравнения была связана с рассмотрением свойств символических дифференци-

альных выражений и их взаимной простоты. Это имело место в упоминаемой раньше работе Гефтера [171.2], в курсе Шлезингера [254.1, т. 2, ч. 1], в ряде статей Леви, в частности 1912 г., где были установлены две новых теоремы рассматриваемой теории по аналогии с теоремами алгебры о делимости целых функций. Здесь получается уже найденный Гефтером результат о том, что два линейных однородных дифференциальных выражения A и A_1 того же порядка с коэффициентами из рассматриваемой области рациональности Σ принадлежат тогда и только тогда к одному и тому же виду, когда существует линейное однородное дифференциальное выражение P (вида 13.5) с коэффициентами из Σ, которое взаимно простое с A и для которого символическое произведение A_1P делимо на A.

Подробному изучению алгебраических свойств линейных однородных дифференциальных выражений, в том числе и понятия рода, посвящалась диссертация Блюмберга 1912 г. Понятие рода для функциональных систем, сочетание его с понятием класса, выделение из последнего так называемых главных классов, связанных с решением римановой проблемы, изучалось Шлезингером в 1901 г. Он же, как и Леви, распространил понятие класса и рода на дифференциальные системы и изучил их свойства в работе [254.11], о которой у нас шла речь раньше. Понятие рода системы [254.10, 152] по существу не отличалось от аналогичного понятия для уравнения n-го порядка. Оно состояло в том, что две дифференциальные системы ($k=1, 2, \ldots n$)

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}; \tag{13.6}$$

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{\lambda=k}^{n} z_\lambda b_{\lambda k} \tag{13.7}$$

с коэффициентами из области рациональности принадлежат к тому же роду, если справедливы соотношения

$$z_k = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda k}, \tag{13.8}$$

где $r_{\lambda k}$ есть также функции из области рациональности. При этом было установлено [254.8], что необходимым и достаточным условием принадлежности обеих систем (13.6) и (13.7) к одному и тому же виду есть то, что линейная дифференциальная система для n^2 неизвестных

$$\left(\frac{dr_{ik}}{dx}\right) = (r_{ik})(b_{ik}) - (a_{ik})(r_{ik}) \tag{13.9}$$

обладает системой решений, которая принадлежит области рациональности.

Если положить в основу не обыкновенную группу монодромии, а проективную, то вместо понятия рода получим понятие семейства. Оно было впервые определено в § 2 мемуара Пуанкаре [237.10]. Рассматривая два линейных уравнения порядка p

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0; \tag{13.10}$$

$$\frac{d^p u}{dx^p} + \sum \varphi'_k(x, y) \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \tag{13.11}$$

при условии $\psi(x, y)=0$ (13.12) и с рациональными коэффициентами по x, y, Пуанкаре говорил, что они принадлежат к одному и тому же семейству, если общий интеграл второго (13.11) может быть выражен в форме

$$u = \Lambda\left[F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx} + F_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots + F_{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dx^{p-1}}\right], \tag{13.13}$$

где v — общий интеграл уравнения (13.10), функции F_j рациональны по x, y и Λ — некоторая, так называемая мультипликативная [1], функция от x, y. Эти уравнения будут принадлежать к одному виду, если $\Lambda=1$. Если два уравнения (13.10) и (13.11) принадлежат одному виду, то они будут обладать одной группой монодромии; если же они принадлежат только одному семейству, они не будут обладать одной группой, но оказывается, что в этом случае отношения интегралов уравнения (13.11) испытывают точно те же преобразования, что и отношения интегралов уравнения (13.10). Несколько позже, исходя из этого, Клейн вывел [192.8] все дифференциальные уравнения второго порядка, принадлежащие к одному и тому же семейству.

§ 5. Алгебраическая интегрируемость линейных дифференциальных уравнений

Вопрос об алгебраической интегрируемости линейных уравнений занимает весьма важное место в рассматриваемой теории. Уже в первой работе Фукса по данному кругу проблем в 1865 г. было отмечено, что, с одной стороны, любая алгебраическая функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, а, с другой — дифференциальное уравнение, обладающее чисто алгебраическим интегралом, принадлежит к фуксовому

[1] Мультипликативной называют такую голоморфную в окрестности некоторой точки z_0 функцию, которая умножается на некоторый определенный множитель μ при (положительном) обходе около этой точки. Простейший пример мультипликативной функции (при $z_0=0$) представляет общая степень z^{ϱ} при любом комплексном ϱ с $\mu=e^{2\pi i\varrho}$.

типу, имея корнями определяющего фундаментального уравнения только рациональные числа, при условии, что в разложение интеграла не входят логарифмы. Уже этим самым в основу данной проблемы было положено решение двух основных вопросов: а) установление всех алгебраически интегрируемых уравнений данного порядка; б) разработка и установление признаков алгебраической интегрируемости данного дифференциального уравнения и соответственное определение, хотя бы приближенное, входящих акцессорных (дополнительных) параметров.

Для уравнений второго порядка

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{13.14}$$

в этом смысле прежде всего ставилась задача определения всех фундаментальных областей, входящих в рассмотрение, которые после конечного числа повторений полностью один или несколько раз покрывали шаровую поверхность.

Как отметил раньше Шлезингер [254.10, 158], по богатству оригинальных и далеко идущих методов и по заметной элегантности результатов в этом отношении следует прежде всего отметить работу [257] Шварца (95), где был исследован случай алгебраической интегрируемости гипергеометрического дифференциального уравнения. Именно здесь вопрос об интегралах фундаментальной системы переносится на рассмотрение отношения $s = y_1 : y_2$ линейно независимых интегралов уравнения (13.14), удовлетворяющего некоторому нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка вида

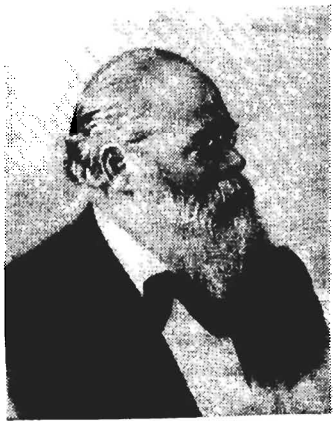
$$\psi(s, x) = \frac{2\frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^3s}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2s}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx} = F(x), \tag{13.15}$$

являющегося частным случаем уравнения

$$2\frac{d^3z}{dzdx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dzdx}\right)^2 - Z\frac{d^2z}{dx^2} + X = 0,$$

которое получил Куммер при сравнении двух гипергеометрических рядов, и имеющего важное значение в теории модулярных уравнений эллиптических функций. Шварц рассмотрел случаи, когда разности λ, μ, ν корней соответствующего определяющего фундаментального уравнения принимают действительные значения. При этом была установлена теорема о том, что лежащая на положительной стороне действительной оси плоскости аргумента x полуплоскость E конформно отображается при помощи частного интеграла дифференциального уравнения

$$\psi(s, x) = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(1-x)}, \tag{13.16}$$



Герман Шварц (1843—1921).

где λ, μ, ν принимают действительные значения, на некоторую односвязную область S, не содержащую внутри точек ветвления и граница которой вообще говоря состоит из образующих треугольник трех круговых дуг. Положение этих кругов в зависимости от λ, μ, ν было затем подробно исследовано, как и сам круговой треугольник. Продолжая затем конформное отображение для каждого из трех участков действительной оси $-\infty$, ..., 0,0, ... 1,1, ... ∞, можно было распространить тем самым рассмотрение и на область аргумента функции S, которая располагалась в полуплоскости E_1 на отрицательной стороне действительной оси. Оказывалось, что полуплоскости E_1 соответствовал также треугольник из круговых дуг S_1, который имел с S общую сторону. При этом был установлен так называемый «закон симметрии по отношению к круговым линиям» (по сути продолжение отображений через зеркальное отражение с помощью инверсии), откуда получалось бесконечно большое число областей S и S_1, конформно эквивалентных полуплоскостям E и E_1 посредством аналитической функции[1] s и ее аналитических продолжений. Во всех случаях, когда функция s алгебраическая, число данным способом полученных, отличных друг от друга областей S и S_1 конечно. Но так как было верным и обратное положение, то тем самым исследование вопроса, принадлежащего к теории функций, приводилось к геометрической задаче, которую Шварц формулировал так: найти все круговые треугольники, которые дают при их размножении по закону симметрии только конечное число различных по положению круговых (т. е. состоящих из круговых дуг) треугольников. При этом трансцендентность или алгебраичность функции $s(x)$ определялась весьма просто характером суммы углов $\lambda\pi+\mu\pi+\nu\pi$ упомянутого выше треугольника. Для первого случая она должна быть меньше или равна π, для второго — больше π, когда оказывалось возможным отображение на единичную сферу. Но таким образом проблема сводилась к уже ранее многократно обсуждавшейся задаче — найти все сферические треугольники, симметрические и равные повторения которых на шаре ведут только к конечному числу различных треугольников. Так как обе римановы поверхности, геометрически представляющие области изменений x и s, в этом случае будут замкнутые поверхности с конечным числом листов, то

[1] Впоследствии Клейн назвал эту функцию треугольной [192.11, 398].

отсюда следует, что при сделанных предположениях о зависимости между x и s эта зависимость должна быть алгебраической. Решение указанной задачи было связано с отысканием конечных групп правильных многогранников, совпадающих самих с собой при вращении.

В скором времени (1875 г.) после этого Клейн, изучая конечные группы проективных подстановок комплексного переменного, доказал существование ограниченного числа конечных групп линейных преобразований одной переменной, соответствующих установлению групп целых вращений правильных многогранников [192.11, 388 и след.], пополнив соответственные исследования Шварца явным установлением бинарных форм, которые допускают линейные преобразования в себя самих. Чрезвычайно важным было исследование группы икосаэдра, тесно связанной с проблемой разрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени. Через год Клейн получил в работе [192.1] пять видов уравнений формы (13.15), обладающих алгебраическими интегралами. Таким образом, исследование вопроса об алгебраичности интегралов линейных уравнений второго порядка переплеталось с решением того же вопроса для некоторого нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с рациональными коэффициентами.

Исследование общего вопроса об алгебраической интегрируемости линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и прежде всего второго порядка было предметом многих работ Фукса с 1875 г. Так, в [153.7] для решения его Фукс использует теорию форм. В процессе исследования автор приходит к понятию неразложимых форм, которые он назвал «первичными» (примформами) и нашел их интересные свойства, в частности, то, что существует только ограниченное число так называемых низших «первичных форм», и получил верхнюю границу степени — двенадцать. Приведенная автором таблица охватывала формы степеней 2, 4, 6, 8, 10, 12 и, как позже показал Клейн [192.1], содержала еще излишние. После необходимых преобразований в [153.8] было показано, что таблица примформ низших степеней совпадала с таблицей форм, установленной Шварцем и Клейном. В этой же работе была более полно развита теория примформ и притом показано, что степень N низших примформ, когда она больше 4, может принимать только значения 6 и 12, а также показано ее значение для решения рассматриваемого комплекса вопросов. Объяснение полученных результатов следовало из теоремы Клейна, согласно которой каждое алгебраически интегрируемое дифференциальное уравнение второго порядка преобразуется подстановкой $\xi=\varphi(x)$ (где φ — рациональная функция) в такое же дифференциальное уравнение, в котором независимая переменная ξ есть рациональная функция отношения интегралов. Он же показал, что дифференциальное уравнение, к которому подходит последнее свойство, имеет

не более трех особых точек, т. е. может быть всегда приведено к гипергеометрическому. Таким образом, указывалась возможность явного установления интегрируемых алгебраически всех дифференциальных линейных уравнений второго порядка. Теорема же Фукса о высшем пределе степени для примформ низших степеней давала критерий, как установить при помощи конечного числа операций, обладает ли данное уравнение указанного вида алгебраическими интегралами или нет. Теоретико-инвариантные свойства примформ низшей степени были предметом исследования Гордана (в 1877 г.) и других ученых.

Дальнейшее плодотворное развитие для уравнений порядка выше двух рассматриваемая проблема получила в работах Фукса в 1882—1883 гг. Здесь теория форм применяется сначала для исследования алгебраичности интегралов уравнения третьего порядка вида

$$\frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0 \qquad (13.17)$$

с рациональными коэффициентами и регулярными интегралами в окрестности всех особых точек, когда корни всех определяющих фундаментальных уравнений есть рациональные числа. Далее рассматривается неприводимое уравнение n-й степени между тремя фундаментальными интегралами

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0, \qquad (13.18)$$

где f — целая однородная функция с постоянными коэффициентами. При этом установлено, что в случае $n=2$ каждый интеграл есть квадрат интеграла дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. Если же $n>2$, то интегралы уравнения (13.17) есть алгебраические функции от z. Эти исследования Фукса стали исходной точкой для теории интегральных кривых и инвариантов. Установленная Фуксом теорема для $n=3$ была обобщена в диссертации Людвига Шлезингера (1887 г.) на случай $n=4$ и в работе Валленберга [272.2] на любое n. Результаты Фукса для $n=3$ алгебраическим путем для форм третьей степени были найдены в диссертации Липмана Шлезингера (1888 г.). Дальнейшее развитие вопрос получил благодаря применению понятия группы преобразований в работах Фано (1895 г.) и Людвига Шлезингера [254.1, т. II, ч. 1].

Приложение теории форм для исследования алгебраичности интегралов линейных уравнений было впервые применено Пепиным в 1863 г., однако, с получением, как позже показал Фукс, неверных результатов. После этого Пепин опубликовал одну статью в 1877 г. и большую работу [233], где старался сочетать начало своего прежнего изложения с новыми методами Фукса и их дополнениями, хотя и без ссылок на это.

Вскоре после первых работ Фукса по данному вопросу была опубликована статья Бриоски [111], где пополнялось учение о

примформах относительно их ковариантов и инвариантов и уточнялся ряд заключений о виде форм и их значении. Метод Бриоски подробно позже освещен и развит Форсайтом. Но еще раньше, в 1880 г., появились заметки Дарбу, положившие основу новым приложениям теории форм. Идеи Дарбу были затем развиты в большой работе Альфена [167.2]. Здесь все приложения теории форм основаны на рассмотрении формы, получаемой из формы $f(z_1, z_2, \ldots z_m)$ с постоянными коэффициентами посредством некоторой линейной подстановки, коэффициенты которой — функции x.

Дальнейшее развитие и обобщение полученных ранее результатов в этом направлении находим в магистерской диссертации [21] Н. М. Гюнтера (96). Еще раньше он исследовал вопрос об интегрируемости в гипергеометрических функциях уравнений (13.14). Решение этой задачи находилось в тесной связи с отысканием алгебраических интегралов данного уравнения. В диссертации [21] Гюнтер разобрал предыдущую теорию вопроса и исследовал среди других проблем задачу интегрирования линейного однородного уравнения с рациональными коэффициентами m-го порядка, если известна некоторая форма степени n с постоянными коэффициентами $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, составленная из линейно независимых неизвестных частных решений, в функции независимой переменной. Гюнтер установил достаточные условия того, чтобы общий интеграл уравнения был алгебраической функцией, и рассмотрел также некоторые случаи, когда эти условия не выполняются. На указанной основе им построена теория уравнений второго порядка с общим алгебраическим интегралом. В таком же направлении рассматривалась и теория уравнений третьего порядка. В процессе этой работы были обнаружены и исправлены ошибки в упоминаемых ранее трудах его предшественников (мемуаре Бриоски, диссертации Липмана Шлезингера и др.). Н. М. Гюнтер обратил особое внимание на случай, когда уравнение третьего порядка принадлежит к числу уравнений, которые получаются при составлении уравнений для произведения соответственных интегралов двух уравнений второго порядка одного и того же рода, подобно тому, как это наблюдалось в теории гипергеометрических уравнений. Он дал необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение третьего порядка принадлежало к указанному классу. Особенно детально со многими рационализациями разобран случай уравнения второго порядка, когда его общий интеграл — алгебраический и когда или произведение двух независимых частных интегралов его, или некоторый его частный интеграл равны корням из рациональных функций.

Иное направление развитие вопроса получило в работах Жордана, посвятившего цикл статей 1876—1877 гг. изучению проблемы алгебраически интегрируемых дифференциальных

уравнений второго и любого высшего порядка. При этом им был развит метод, дающий возможность установить для каждого значения n все конечные группы линейных подстановок из n переменных. По существу рассматриваемая проблема затем тесно связывалась с установлением всех конечных групп линейных подстановок, поскольку для алгебраической интегрируемости было необходимо и достаточно, чтобы соответствующее уравнение принадлежало к фуксовому типу и чтобы его группа монодромии была конечной. В случае $n=2$ получилось совпадение с уже известными результатами Клейна. Для $n=3$ Жордан предложил таблицу конечных групп, которая была затем еще пополнена Клейном (в 1879 г.) и Валентинером (в 1889 г.). Жордану удалось доказать весьма общую теорему о том, что если уравнение (13.3) порядка n с рациональными коэффициентами имеет алгебраические интегралы, то оно имеет n частных решений, удовлетворяющих двучленным уравнениям, правые части которых есть рациональные функции независимого переменного и корней вспомогательного уравнения, порядок которого ниже некоторого предела, зависящего только от n. Аналогичный круг вопросов позже рассматривался в статьях Бличфельда.

В одной из первых статей по этой же проблематике Фробениус [151.2] показал, что если все интегралы однородного линейного дифференциального уравнения алгебраические, то он должен обладать таким интегралом, через который все другие выражаются рационально. Это условие применяется к изучению уравнений фуксового типа. Добавляя сюда еще условие о неприводимости уравнения, Фробениус получает важное представление о том, что все интегралы такого уравнения будут алгебраическими, как только его порядок станет выше второго.

Группы конечного числа линейных преобразований в связи с решением задачи об алгебраических интегралах линейных дифференциальных уравнений, с использованием результатов Шварца, Клейна, Жордана и других были предметом одного из первых исследований по данной тематике в русской литературе А. В. Васильева [12.2].

Опираясь на вышеуказанные работы Жордана, Пуанкаре сначала для случая уравнения третьего порядка строил линейные уравнения с алгебраическими интегралами, соответствующие каждой из определенных Жорданом групп, но допустил ошибку в вычислениях, что привело к неверным результатам. В первой из заметок [237.7] положение было исправлено, и Пуанкаре показал, как, исходя из известной конечной группы, можно построить бесконечное множество линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, обладающих алгебраическими интегралами. Эта же тема нашла освещение в большой работе Пуанкаре [237.21]. Здесь были использованы новые исследования Фробениуса по арифметическим методам (о характерах групп) (1896 г.) и Картана по теории конечных

групп и показана взаимосвязь теорий этих двух математиков.

Идеи Фукса, Жордана, Клейна нашли продолжение и развитие в работах Отона, написанных в 1882—1884 гг. Здесь автор выяснил, как отражается на неприводимом алгебраическом уравнении $H=0$ простой степени $m=p+n$, корни которого удовлетворяют дифференциальному линейному уравнению $Y=0$ порядка p, существование между m корнями n линейных однородных соотношений с постоянными коэффициентами. Он изучал сначала случай, когда m простое и $n<4$. При этом, если $n=1$, m — простое число и коэффициент при члене, содержащем степень $m-1$ в уравнении $H=0$, отличен от нуля, то уравнение $H=0$ — абелево и $Y=0$ обладает фундаментальной системой интегралов, из которых один — рациональный, а $p-1=m-2$ других — корни m-й степени из рациональных функций. Далее так же подробно изучены случаи $m=2$, $m=3$ и получены две новых теоремы [65.3, 157]. Мемуар [95.2] посвящен общему исследованию особенностей групп вышеуказанных уравнений $H=0$.

К рассмотренным работам примыкают первые исследования Пенлеве в 1887—1888 гг., где сначала обсуждалась алгебраическая интегрируемость уравнений вида

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0, \tag{13.19}$$

для которых существуют два инварианта, содержащих отношения $t=\frac{y_2}{y_1}$; $u=\frac{y_3}{y_1}$ от трех линейно независимых интегралов y_1, y_2, y_3 уравнения (13.19). Обобщая метод Шварца и Клейна, Пенлеве получает систему уравнений для t, u, интеграл которой должен быть также алгебраическим. Значения систем (t, u) для данной величины x образуют затем конечную группу (α) линейных подстановок, и имеется два фундаментальных инварианта этой группы $\varphi(t, u)$, $\psi(t, u)$, являющихся рациональными функциями от x: $\varphi=P(x)$, $\psi=Q(x)$. Систему уравнений для t, u можно потом преобразовать в систему уравнений для P, Q, которая допускает систему рациональных интегралов. Если они, а значит, и t, u известны, то получаем

$$y = C(t''u' - t'u'')^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}\int a dx} \tag{13.20}$$

Таким образом, чтобы интеграл уравнения (13.19) был алгебраическим, необходимо и достаточно: 1) чтобы a было логарифмической производной рациональной функции; 2) для группы (α) уравнения относительно P, Q допускали систему рациональных интегралов. Пенлеве показал, что при помощи конечного числа операций можно узнать, соответствует ли интеграл уравнения (13.19) данной конечной группе (т. е. является ли он алгебраическим). Особого рассмотрения требовал случай, когда группы были аналогичны группам диэдра. В этом случае, как отметил Пуанкаре, уравнение (13.19) приводилось к квадрату-

Феликс Клейн (1849—1925).

рам. Там же показано применение предыдущего метода к линейным дифференциальным уравнениям любого порядка, а также к системам уравнений с частными производными, в предположении выполнения условий интегрируемости.

С начала 90-х годов вопрос об отыскании алгебраических интегралов линейных уравнений довольно активно обсуждался в русской математической литературе. Мы уже упоминали о важных результатах Н. М. Гюнтера. Но еще раньше эта тема была предметом подробного обзора с рядом уточнений и дополнений в интересной монографии [62] (глава III) С. Е. Савича. Затем следовала статья В. П. Ермакова [24.1], где вопрос трактовался для уравнения второго порядка, и в попытке его простейшего решения автор старался обойтись без теории подстановок. После этого появилась обширная работа [39.2] Л. К. Лахтина, где, продолжая и расширяя исследования Клейна, изучались свойства так называемых дифференциальных резольвент n-го порядка, т. е. линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют все корни данного алгебраического уравнения, имеющего коэффициентами рациональные функции независимого переменного. Лахтин дал также применения к уравнению третьего порядка, но, как отметил Д. Синцов [65.3, 158], он не обратил внимания на результаты указанных выше работ Пенлеве, Отона и др. Последние были скоро дополнены в статьях главным образом Буланже, Кемпбелла и др. Дальнейшие глубокие результаты на теоретико-множественной основе в данном направлении получены в большой статье Фано [142].

Параллельно с этими шли работы Фукса и его учеников и последователей, рассматривавших главным образом вопрос о линейных однородных уравнениях n-го порядка, между n фундаментальными интегралами которых существовало $n-2$ однородных соотношений степени выше первой. При его решении Липман Шлезингер использовал так называемые дифференциальные инварианты. Далее этот вопрос развит в работах Круга, Макса Мейера — для уравнений четвертого порядка, когда были получены другим путем результаты диссертации Людвига Шлезингера. Дальнейшее применение теории форм и дифференциальных инвариантов содержалось в работах Фукса, Бриоски, Вукичевича, Миттаг-Леффлера, Валленберга и др.

В тесной связи с отысканием алгебраических интегралов линейных дифференциальных уравнений стояла задача установле-

ния их рациональных интегралов. Впервые для ее решения был предложен известный способ Лиувилля (1832—1833 гг.), бывший не без оснований объектом критики со стороны Пуассона, а позже Альфена и других французских математиков. Способ Лиувилля послужил в какой-то степени исходной точкой работ Фукса об алгебраических интегралах линейных уравнений второго порядка, которые стали развиваться, однако, в ином направлении. Через 50 лет на старый способ Лиувилля обратил внимание известный русский математик В. Г. Имшенецкий, приложивший немало творческих усилий для возрождения и обоснования по существу нового способа для той же цели, весьма тесно связанного с методом Лиувилля. Эта его работа вызвала оживленную полемику на страницах русской математической печати в течение нескольких лет. Сущность обоих способов, их сравнительная оценка, как и упоминаемая полемика, довольно подробно освещены в докторской диссертации Д. М. Синцова [1] [65.3] и позже в кандидатской диссертации В. А. Кочева [32]. Для наших целей следует отметить важность самой постановки вопроса у Лиувилля, а также и то, что его способ давал не только рациональные интегралы, но и те интегралы, которые равны корню из рациональной функции, на что в свое время обратил внимание Фукс в [153.7].

В заключение параграфа отметим еще интересную работу Миттаг-Леффлера [218.1], где автор ставил задачи: 1) установление общего типа однородного линейного уравнения, общий интеграл которого есть однозначная аналитическая функция рационального характера; 2) такое установление фундаментальной системы этого типа, чтобы каждый интеграл был бы отношением двух постоянно сходящихся рядов. Решение первой задачи дается непосредственно методом Фукса, второй — по принципам Вейерштрасса. В деталях она рассмотрена для уравнения вида $y''=f(x)y$.

[1] По своему характеру обзорная монография Д. М. Синцова содержит, как отметил А. В. Васильев [12, 3], ряд ценных самостоятельных исследований, в том числе и по части алгебраического интегрирования.

Глава XIV. ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ

§ 1. Уравнения класса Фукса

Уравнения класса Фукса принадлежат к общему типу линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и обладают интегралами, все особые точки которых регулярны. Они впервые в общем виде были изучены Фуксом, развившим глубокую теорию их исследования и интегрирования, что и послужило затем основой для их названия. Регулярные особые точки рассматриваемых уравнений, в том числе и бесконечно удаленные, для их коэффициентов являются полюсами. Уже в работе Фукса 1865 г. были установлены необходимые и достаточные условия принадлежности уравнения к фуксовому типу, если оно задавалось в форме

$$y^{(n)} + \frac{g_{m-1}(x)}{\psi(x)} y^{(n-1)} + \frac{g_{2(m-1)}x}{[\psi(x)]^2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{g_{n(m-1)}(x)}{[\psi(x)]^n} y = 0. \tag{14.1}$$

При этом $\psi(x) = (x-a_1)\ (x-a_2) \ldots (x-a_m)$, а $g_k(x)$ — многочлены по x степени не выше k. Необходимо друг от друга отличные значения $a_1, a_2, \ldots, a_m$ являются координатами особых точек уравнения в конечной части плоскости, к которым в общем добавляется еще $a_{m+1} = \infty$. Если корни принадлежащего к $x = \infty$ определяющего уравнения рассматривать как результат полученного после преобразования $z = \frac{1}{x}$ и к $z = 0$ принадлежащего уравнения, то последние можно взять, следуя Гефтеру [171.1], с противоположными знаками.

В первых же работах Фукса были установлены основные соотношения для корней r_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m+1)$ к точкам a_j принадлежащих определяющих уравнений в форме

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} r_{ij} = \frac{(m-1)\, n\, (n-1)}{2}. \tag{14.2}$$

Если величины r_{ij} удовлетворяют лишь условиям (14.2), то можно, задав особые точки, составить дифференциальное урав-

нение, в котором для $l \geqslant 2$ функции $g_{l(m-1)}(x)$ содержат еще по $l(m-1)-m$ произвольных констант. Изучая далее вопрос о соотношениях между особыми точками и корнями определяющих уравнений, Фукс [153.5] пришел к выводу, что по определении последних для уравнения (14.1) остается еще $\frac{n(n-1)}{2}(m+1)+1-n^2$ произвольных параметров, которые затем по Клейну стали называться акцессорными (дополнительными).

Особый интерес для изучения представлял случай, когда все коэффициенты уравнения вполне определялись через показатели r_{ik}. Для уравнений второго порядка при этом условии число особых точек могло равняться одной, двум или трем. В первом из этих случаев уравнение могло быть приведено к виду $\frac{d^2w}{dt^2}=0$; во-втором получалось уравнение Эйлера $\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{A_1}{t}\cdot\frac{dw}{dt}+\frac{c}{(a_2-a_1)^2}\cdot\frac{w}{t}=0$, отыскание общего интеграла которого не представляло особого труда [16.3, 227—228]. Более интересным был случай трех особых точек для уравнения второго порядка типа Фукса, получившего название уравнения Римана и послужившего предметом исследований многих выдающихся математиков, особенно когда оно имело форму гипергеометрического уравнения.

Уравнения типа Фукса были предметом исследования ряда ученых. Так, в диссертации Гефтера (1886 г.) ставилось целью распространить некоторые свойства гипергеометрического уравнения на любое уравнение Фукса второго порядка, обладающее ρ особыми точками.

Аналогичный вопрос в 1875 г. рассматривал Зайферт в своей диссертации, но для случая трех особых точек (исключая точку бесконечности). Он делал предположение о совпадении двух из особых точек a, b, c и наметил путь решения, который был потом развит Гефтером, рассмотревшим также некоторое обобщение полученных результатов на уравнения более высокого порядка.

Случай трех особых точек для уравнения Фукса второго порядка изучался также в диссертациях Шрентцеля в 1893 г. и Франца в 1899 г. Случай интегрируемости одного уравнения третьего порядка был установлен Томé в 1876 г.

В конце известного мемуара [94.2], отмеченного премией Шведского короля, Аппель сделал некоторые замечания об однородных линейных дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами, принадлежащих классу Фукса, определяющие фундаментальные уравнения которых обладали целочисленными корнями. Уравнения этого вида, а вместе с ними и интегралы, он разделил на три группы в соответствии с тем, что 1) их общий интеграл везде конечен и не имеет критических логарифмических точек; 2) имеет полюсы и не имеет критических

логарифмических точек; 3) обладает критическими логарифмическими точками. Он дал также соотношения между подстановками, которые испытывают решения этих уравнений, когда переходят через разрезы, переводящие риманову поверхность, на которой коэффициенты уравнения однозначны, в односвязную. Несколько позже аппелево уравнение второго порядка и первого вида, обладающее такой группой, исследовал Витали в 1902 г., продолжив затем изучение тех же уравнений второго порядка и второго вида в 1904 г. и доказав теорему о возможном числе линейно независимых аппелевых уравнений второго порядка, обладающих той же группой. Он рассмотрел и ряд соотношений для уравнений третьего вида. В то же время подробное исследование аппелевых уравнений второго порядка для особого случая, когда принадлежащая риманова поверхность была гиперэллиптической, произвел Сюхар в 1902 г. В частности, он показал, как должны быть определены коэффициенты, чтобы эти уравнения были первого вида.

В дальнейшем стали рассматриваться и уравнения фуксового типа с акцессорными параметрами. Этот вопрос для случая одного такого параметра изучался в диссертации Вакера в 1912 г.

§ 2. Уравнение Лапласа

Еще Эйлер, рассматривая общий вопрос о построении уравнений по заданным интегралам во втором томе интегрального исчисления [141.3, гл. X, § 1053 и след.], поставил задачу отыскать уравнение, которому удовлетворял бы интеграл

$$y = \int e^{KQ} P dx, \tag{14.3}$$

где P, Q — функции от x, а K —функция от u. При этом было найдено, что y как функция от u удовлетворяла некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Исходя из такого же интеграла, в 1772 г. Лаплас построил общее уравнение n-го порядка

$$(a_0 x + b_0)\, y^{(n)} + (a_1 x + b_1)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_n x + b_n)\, y = 0,$$

которое получило его имя.

Уже у Лапласа встречается постановка вопроса о том, как в интеграле (14.3) определить функцию $P(x)$, чтобы он удовлетворял любому заданному линейному дифференциальному уравнению с целыми рациональными коэффициентами. При этом оказалось, что $P(x)$ могло быть выбрано как решение некоторого также линейного дифференциального уравнения. В дальнейшем исследованиями различных видов этого типа уравнений в начале 30-х годов XIX века занимались Лиувилль, Шерк и другие [172.2, 555].

С аналитической точки зрения уравнение Лапласа изучалось в работах Пуанкаре [237.14], Пикара [235.17, гл. XIV, § 2], Шлезингера [254.1 т. 1, часть 7, гл. IV]. Результаты Лапласа, в частности известное его преобразование, сыграли потом заметную роль в исследованиях Пуанкаре об асимптотическом представлении интегралов линейных дифференциальных уравнений. Об этом шла речь в главе XII.

В 1892 г. Пинкерле [254.10, 172] показал, что посредством интеграла эйлеровского вида

$$\int (z-x)^{\rho-1} v(z)\, dz$$

могут быть представлены решения уравнения фуксового типа, когда $v(z)$ выбрано как решение также линейного уравнения фуксового типа, и что знание группы последнего уравнения дает возможность простейшим способом определить группу данного дифференциального уравнения.

Преобразование Лапласа широко используется также в операционном исчислении и в других отраслях анализа. Чтобы распространить его применение с уравнений ранга 1 на дифференциальные уравнения ранга $q+1$, Биркгоф [100.1, 458] рассмотрел

$$y = \int e^{zx^{q+1}} [\eta_0(z) + x\eta_1(z) + \ldots + x^q \eta_q(z)]\, dz, \qquad (14.4)$$

где функции η_i определялись из системы линейных дифференциальных уравнений, особые точки неопределенности которых были ранга q. Но каждая из них могла заменяться особой точкой определенности посредством соответствующего ей преобразования исходного дифференциального уравнения. Рассмотрение этого вопроса было тесно связано с изучением асимптотических разложений.

§ 3. Гипергеометрическое уравнение

Гипергеометрическое уравнение — одно из наиболее известных в анализе — было предметом исследования многих математиков на протяжении более чем двух столетий и история его может быть интересным объектом отдельного исследования. Здесь мы кратко коснемся этого вопроса и только в самых основных пунктах.

Гипергеометрическое уравнение, принадлежащее к фуксовому классу уравнений с тремя особыми точками, представляет собой простейший пример линейного уравнения, не интегрируемого в общем элементарными методами. Это единственное из уравнений порядка выше первого с тремя особыми точками, интегралы которого вполне определяются положением его особых точек и корнями определяющего фундаментального уравнения. Для уравнений с большим числом особых точек это уже, как ра-

нее упоминалось, не имеет места. Определяемые этим уравнением функции играют важную роль как в теории, так и в приложениях, при решении многих задач математической физики (см. также [18.2, гл. 9]).

Исследование гипергеометрического уравнения в XVIII и первой половине XIX века тесным образом переплеталось с изучением известного гипергеометрического ряда, являющегося одним из интегралов упомянутого уравнения. При этом в основном уделялось внимание установлению различных соотношений между интегралами гипергеометрических уравнений и установлению формы коэффициентов последних, если между их интегралами существовали данные связи. Но уже в известном мемуаре Куммера [198.2] получено шесть независимых интегралов, которые, по более поздней терминологии, образовали фундаментальную систему попарно принадлежащих к особым точкам 0, 1 и ∞. Хотя в мемуаре Куммера посвящалась специальная глава (7) изучению гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при изменении аргумента x в комплексной области, принципиальное распространение теории на общий случай комплексного переменного, как уже отметил Папперитц [229.2, 66], лежало вне поля зрения Куммера; для этого не были еще созданы тогда соответственные теоретические предпосылки. Найденных Куммером решений все же было недостаточно для получения общего интеграла уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \qquad (14.5)$$

во всех случаях с помощью простых определенных интегралов. Этот пробел восполнен в работе Якоби.

В капитальном труде [40.2, гл. III] А. В. Летникова (97) посредством разработанного им метода междупредельного дифференцирования с произвольным указателем получены не только все указанные Якоби, но и некоторые новые виды частных решений гипергеометрического уравнения и притом в более краткой и удобной форме. Их было вполне достаточно для получения общего интеграла рассматриваемого уравнения в различных частных случаях.

Новая эпоха в учении о гипергеометрических функциях была связана с развитием общей теории аналитических функций, что нашло плодотворное отражение прежде всего в ряде работ Римана. В первой из них, законченной в 1856 г. [246.3], имелось целью дать легко обозримую теорию гипергеометрических функций от комплексного аргумента на основе того метода, принцип которого был изложен ранее в его докторской диссертации. Здесь была четко проявлена основная тенденция рассуждений Римана, в основе которой лежало изучение функции не по формуле, а по ее основным свойствам. Он исходил из линейного дифференциального уравнения с алгебраическими коэффициентами, опреде-

ляя функции достаточным числом независимых условий, в частности их граничными условиями и совокупностью точек разрыва, и выводя отсюда другие их свойства.

Изучаемую функцию Риман обозначил символом

$$P\begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}, \qquad (14.6)$$

понимая под ним множество всех продолжений, получающихся из некоторой ее ветви. Эта функция от x должна была удовлетворять следующим условиям: 1) она однозначна и конечна для всех значений x, кроме a, b, c; 2) между любыми тремя ветвями этой функции P', P'', P''' имело место линейное однородное соотношение с постоянными коэффициентами: $C'P'+C''P''+C'''P'''=0$; 3) функцию можно представить в каждом из трех видов

$$C_\alpha P^\alpha + C_{\alpha'} P^{\alpha'}; \quad C_\beta P^\beta + C_{\beta'} P^{\beta'}; \quad C_\gamma P^\gamma + C_{\gamma'} P^{\gamma'},$$

где $C_\alpha, C_{\alpha'}, \ldots, C_{\gamma'}$ — постоянные, а функции $P^\alpha, \ldots, P^{\gamma'}$ подчинены некоторым условиям. Относительно шести величин (показателей) $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'$ предполагалось, что разности $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ отличны от целого числа[1] и, кроме того, $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$.

Эрнст Куммер (1810—1893).

Из определения P-функций получалась возможность ряда их преобразований, откуда, в частности, следовало, что в основу исследования, не нарушая общности, можно было положить изучение функции

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \rho & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} \equiv P(0, \infty, 1, x) \equiv P\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha' & \rho' & \gamma' & x \end{pmatrix}.$$

Далее Риман уточняет поведение функции в области особых точек при обходе последних по любым замкнутым путям и получает соответственные формулы. В процессе следующих выкладок была установлена, по дальнейшей терминологии, группа монодромии и ее свойства. Что же касается вопроса о существовании функции, удовлетворяющей поставленным требованиям,

[1] В противном случае в общем интеграле соответствующего дифференциального уравнения, как известно, появляются логарифмические члены. Общие свойства таких интегралов были известны Риману, как это следует из [246.6].

то он выяснялся далее при построении функции с помощью определенных интегралов и гипергеометрических рядов. Таким образом, существование ее доказывалось одновременно с представимостью.

При этом Риман отмечал, что для доказательства существования не потребуется особого исследования, в чем можно усмотреть понимание им трудностей такого доказательства в случае произвольного числа (больше трех) критических точек.

После изучения различных соотношений и свойств P-функций Риман приходит к выводу о том, что «всякая P-функция удовлетворяет некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка» [246.3, 171]. Он также установил связь гипергеометрической функции Гаусса с функцией P, откуда легко получалось представление P-функции через определенный интеграл. Риман при этом отметил, что можно было бы использовать такой определенный интеграл с самого начала для определения функции и вывести отсюда непосредственно свойства P-функций. Эта идея была чуть позже воплощена в жизнь учеником Римана И. Тóме (98), опиравшегося как на принципы своего учителя, так и на идеи Коши, и установившего свойства функции $P\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{matrix}, x\right)$, исходя из ее выражения в форме риманова интеграла и исследуя подходящие пути интегрирования в комплексной области.

В следующей работе из данного цикла [246.5] Риман рассматривал разложение в непрерывные дроби частного двух смежных P-функций, исследуя сходимость получаемых подходящих дробей. Этот же вопрос решался потом в работах Гейне (1857 г.), Л. Томé (1866 г.) в диссертации Ван-Влека (1894 г.).

Большой интерес представляют и лекции Римана о гипергеометрических функциях. Характеристику их, довольно подробную, находим в докладе [277] австрийского математика Виртингера (99) и краткую — в книге Клейна [192.11, 294]. В этих лекциях рассматривалось установление группы монодромии методом варьирования пути интегрирования, когда x совершал обход около особой точки. Еще до публикации этих лекций и независимо от результатов Римана аналогичным вопросом занимались И. Тóме, Фукс, Матье, Шлефли и др. Несколько позже подстановки перехода для получения группы монодромии другими путями выводились в работах Папперитца [229.1], Больца (1893 г.), Перрона (1913 г.), Хилла (1919 г.) и др.

Значительно раньше ряд интересных результатов был получен в работах Летникова. Так, в статье [40.3] он подробно изучил определенные интегралы, зависящие от функций, удовлетворяющих уравнению

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(c+hx)\frac{dy}{dx}+ky=0, \qquad (14.7)$$

вида

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n y_a dx \qquad (14.8)$$

(где y_α — частное решение уравнения (14.7) для точки a) и им подобные. С помощью символов междупредельных производных с произвольным указателем имелось в виду представить в одном общем выражении различные по виду и по свойствам частные решения одного и того же дифференциального уравнения. Этот вопрос был им решен как для уравнения (14.7), так и для формы интегралов (14.8).

Представление гипергеометрических функций и их обобщений в форме определенных интегралов было предметом интересных исследований Геймана (1884 г.), Шафхейтлина (1887 г.), Гурса (1887 г.), Виртингера (1902 г.), Некрасова (1904 г.) и многих других математиков. Особенно широко этот предмет трактовался в многочисленных работах Похгамера (1890 г. и др.). Он нашел отражение и в трудах И. Р. Брайцева, в частности в монографии [8].

Новый этап в учении о гипергеометрических функциях связан с работами Вейерштрасса по общей теории аналитических функций. С тех пор начинает наблюдаться весьма характерная и для дальнейшей эпохи тесная связь теории гипергеометрических трансцендентных с родственными теоретико-функциональными дисциплинами. Эта теория начинает занимать одно из важнейших мест в общей системе знаний как ее неотъемлемая составная часть и притом как начальная ступень более общей теории линейных дифференциальных уравнений.

Сочинение Вейерштрасса [275.4] по теории факториалов (1854 г.) уже содержало ряд теорем, необходимых для строгого обоснования учения о гипергеометрических функциях при изменении аргумента во всей комплексной плоскости, когда в основу полагается степенной ряд. Таким образом, функция определялась системой продолжаемых друг из друга степенных рядов. Вместе с тем был уточнен вопрос о сходимости общего гипергеометрического ряда.

Для дальнейшего прогресса в учении о гипергеометрических функциях было важным выделить принадлежащий им класс алгебраических функций. Решение этой задачи предпринято в 1871 г. в классическом мемуаре Шварца [257], содержащем замечательное по простоте и изяществу толкование особенностей изучаемых им функций. Опираясь здесь на учение Вейерштрасса и результаты других ученых, Шварц создал по существу новое направление в изучении гипергеометрических функций и предложил общий весьма остроумный метод определения алгебраических интегралов рассматриваемых уравнений, о чем частично шла речь ранее (гл. 13, § 5). Большой заслугой Шварца было рассмо-

А. А. Марков (1856—1922).

трение и исследование величины s отношения двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения. Рассматриваемая как функция от x, она удовлетворяла известному уравнению [1]

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2x(1-x)}, \qquad (14.9)$$

общий интеграл которого представлялся в форме дробно-линейной функции от частного интеграла. Решение вопроса об алгебраичности или трансцендентности функции $s(x)$ и относящейся к ней P-функции зависело от того, была ли сумма углов $\lambda\pi+\mu\pi+\gamma\pi$ соответственного кругового треугольника больше π или нет. Таким образом, оказалось возможным установить полную систему алгебраических s-функций. Теорема Шварца позволяла также решить вопрос, является ли однозначной обратная функция $x(s)$, а также определить имевшую место естественную границу обратной функции в форме круга или прямой линии. Каждая точка такой линии, как известно, будет существенно особой для этой функции.

Ввиду особой важности и большого интереса для науки в дальнейшем уравнение вида (14.9) и его обобщения стали называть уравнением Шварца, а его решения получили название функций Шварца; функции, обратные функциям Шварца, принадлежат к классу автоморфных. (В более общей форме см. об этом в [16.3, гл. VI]).

Фундаментальные результаты Шварца в скором времени дополнялись статьями и заметками Клейна (1877 г.), Кэли (1878 г), Бриоски (1881 г.), Альфена (1881 г.), Гумберта (1888 г.), в заключительной части статьи [263] Ж. Таннери и других. Несколько по-иному вопрос об алгебраичности интегралов гипергеометрического уравнения полностью решен А. А. Марковым в статьях [45.1.—2.—3.—4]. Он рассмотрел там все случаи, когда произведение двух интегралов уравнения вида (14.5) было целой функцией от x, а также все случаи, когда это уравнение допускало интегралы некоторого специального вида. Он изучил свойства указанной целой функции, а также распределение нулей гипергеометрической функции при определенных соотношениях ее параметров α, β, γ.

---

[1] См. также (13.15), (13.16).

Вопрос о необходимых условиях алгебраичности интегралов гипергеометрического уравнения рассматривал Ландау в 1904 г., Стридсберг — в 1910 г.

Первой обзорной работой по теории гипергеометрических рядов и функций на русском языке была небольшая книжка М. Г. Баранецкого [4] (1873 г.). Более глубоко и подробно с дополнениями автора материал охвачен в магистерской диссертации [76] М. Тихомандрицкого. Здесь были использованы основные достижения изучаемой теории, в том числе работы Римана, Фукса, Похгамера и лишь упомянуто о результатах Шварца.

Эдуард Гурса (1858—1936).

Широкое освещение теория гипергеометрических функций получила в работах Гурса, публиковавшихся в течение нескольких десятилетий. Одна из крупных статей этого цикла [163.1] составляла его докторскую диссертацию (1881 г.). Эта работа содержала полную для того времени теорию дифференциального уравнения (14.5) без ограничения рассматриваемой области переменных. Много внимания уделил Гурса специально проблеме преобразования гипергеометрических рядов, поставленной в довольно общей форме еще Куммером. Этот вопрос в более общей форме Гурса трактует в большом мемуаре [163.2], подробно исследуя свойства рациональной функции, которая определяла рациональные преобразования гипергеометрических функций. Теорема Гурса после соответствующего обобщения была применена Папперитцем (100) в [229. 1] вообще для всех алгебраических преобразований, но в предположении, что λ, μ, ν должны быть только рациональными числами.

Папперитц же в [229.2, 73] подчеркнул глубокое значение доказательства различия суммы величин $\lambda+\mu+\nu$ от единицы для теории преобразования, что было уже осознано и Шварцем. Именно, если $\lambda+\mu+\nu \gtrless 1$, то отсюда следовала классификация гипергеометрических функций: 1) алгебраические; 2) гипергеометрические функции, которые преобразуются в логарифмические, круговые функции и эллиптические интегралы; 3) собственно гипергеометрические трансцендентные. Последние образуют хорошо определенную область аналитических функций с общими существенными свойствами, которые были еще мало изучены.

Цикл работ касался теории квадратичных (Гобсон и Барнес)

и кубических (Ватсон и Фоулер) преобразований гипергеометрических функций, получивших начало в трудах Римана. Вопрос об обращении гипергеометрической функции и приведении ее к эллиптическим, а также к гиперэллиптическим интегралам изучался в работах А. П. Полякова [58.1.—2.]. Исследование предельных случаев P-функции Римана, т. е. когда две или три ее особых точки совпадали в одну, образуя существенно особую точку, было выполнено М. И. Акимовым в 1907 г.

Одним из основных направлений в исследовании гипергеометрических функций было изучение распределения их нулей или корней. Особенно важными и плодотворными оказались в этом отношении несколько заметок (появившихся в 1890 г.) и статья [192.6] Ф. Клейна. Здесь был развит новый, весьма замечательный как по содержанию, так и по результатам метод определения числа действительных корней, которыми обладала гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при действительных значениях параметров и для значений x между нулем и единицей. Этот метод был основан на конформном отображении положительной полуплоскости на треугольник, ограниченный круговыми дугами, посредством отношения $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ двух фундаментальных интегралов y_1 и y_2 линейного однородного уравнения второго порядка в интервале 0—1 и на известной теореме Штурма о нулях интегралов дифференциального уравнения второго порядка.

Так было положено начало новому направлению исследований. Их потом продолжили Гурвиц, Портер, Монтессю, Гегенбауэр, Ван-Влек и другие. Ван-Влек и независимо от него Гурвиц рассматривали вопрос об установлении числа комплексных корней гипергеометрической функции. Гурвиц же установил замечательное свойство корней гипергеометрической функции, состоящее в том, что можно было указать область на плоскости, в которой расположены все корни этой функции.

Новые результаты о распределении корней гипергеометрической функции на плоскости получены в статье [1.2] К. Ф. Абрамовича (101), распространившего метод Гурвица для различных ветвей римановой функции P. Он же подытожил и изложил в оригинальной обработке исследования гипергеометрических функций с одной так называемой особой по виду точкой (Nebenpankte) в большой статье (1.1). Здесь были обобщены полученные ранее результаты Риттера, Шиллинга, Франца и др.

Из работ, трактующих применения гипергеометрических функций, мы укажем лишь на обширную, богатую содержанием монографию Л. К. Лахтина [39.1], где дана систематическая обработка теории алгебраических уравнений, разрешимых в гипергеометрических функциях.

Здесь мы не останавливаемся на довольно многочисленных исследованиях некоторых специальных видов гипергеометриче-

ского уравнения, а также на различных видах обобщений гипергеометрических уравнений, представляющих также несомненный интерес для изучаемой теории.

§ 4. Уравнение Ламе

Уравнение Ламе в общем виде может быть рассмотрено как принадлежащее к следующему по классу сложности после гипергеометрического. Это линейное уравнение второго порядка с четырьмя полюсами: a_1, a_2, a_3, ∞. Оно встречается в различных формах в зависимости от характера исследования. Это уравнение можно получить из уравнения Лапласа (для $n=3$) после соответственных подстановок и преобразований [222] в форме

$$w'' + \left(\frac{1}{z^2-a_1} + \frac{1}{z^2-a_2} + \frac{1}{z^2-a_3} - \frac{1}{z^2}\right) zw' + \\ + \frac{(Az^2+B)\,z^2 w}{(z^2-a_1)(z^2-a_2)(z^2-a_3)} = 0, \qquad (14.10)$$

где a_1, a_2, a_3, A, B — константы. Заменой $x=z^2$, $w=g(x)$ оно переходит в так называемую алгебраическую форму [1]

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x-a_3}\right) y' + \frac{(Ax+B)\,y}{4(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = 0. \qquad (14.11)$$

С теорией дифференциального уравнения Ламе тесным образом связано решение вопроса о том, когда линейное дифференциальное уравнение имеет решением полином. Как отметил Шлезингер в [254.10, 163], первоначально вопрос самим Ламе в 1857 г. ставился именно о том, когда дифференциальное уравнение вида

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + R'(x)\frac{dy}{dx} - [n(n+1)k^2x^2 + h]\,y = 0, \qquad (14.12)$$

где $R(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$, может быть удовлетворено целой рациональной функцией от x. При этом оказалось, что n должно быть целым (положительным) числом и, кроме того, параметр h выбирается как корень некоторого алгебраического уравнения. Тогда число n определит степень целой рациональной функции, которая принадлежит к так называемым полиномам Ламе.

Если в дифференциальном уравнении вместо x рассмотреть новую переменную, введенную по формуле $t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, то интеграл его представится как функция двоякопериодическая и притом целая от snt, cnt, dnt.

[1] См. о нем также в следующей главе, § 4.

Уравнение Ламе было предметом исследования Лиувилля, давшего ряд общих теорем, Гейне, определившего в 1860 г. основные свойства функций Ламе (см. о них в [222]). Целую серию сообщений этому предмету посвятил Эрмит в 1877 г. Основной целью их было впервые рассмотренное им определение общего интеграла уравнения Ламе вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)\,k^2 sn x + h]\,y \qquad (14.13)$$

при целых положительных n, но для любого значения параметра h. Так же, как и в отдельных случаях для частных значений h, Эрмит показал, что общее решение уравнения (14.13) при любом h всегда есть однозначная функция (но вообще уже не двоякопериодическая). При этом исследование частных случаев $n=1$, $n=2$ предшествовало общему. Случай $n=1$ позволял применить результат к проблеме вращения твердого тела около неподвижной точки без ускоряющих сил и вел к формулам, полученным Якоби в 1849 г. Следовали и другие применения (фигуры равновесия упругих пластин, сферический маятник и т. п.). Это важное исследование Эрмита имело фундаментальное значение, так как представляло первый и притом, по замечанию Шлезингера [254.10, 164], образцовый пример метода интегрирования, который позже был обобщен Пуанкаре на любое дифференциальное уравнение с алгебраическими коэффициентами и состоял в том, что зависимая и независимая переменные подобного дифференциального уравнения представлялись как однозначные функции некоторого параметра, т. е. по существу применялся метод униформизации.

Полученные результаты Эрмита были обобщены затем в работах Фукса, Бриоски, Пикара, Миттаг-Леффлера и других, рассматривавших такие виды дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами, интегралы которых были однозначными функциями без существенно особых точек в конечной части плоскости. При этом Пикаром было доказано, что эти однозначные функции есть эллиптические функции (по термину Эрмита) второго вида, т. е. такие, которые при увеличении аргумента на период умножаются на постоянный множитель. Для этого вида уравнений также рассматривался вопрос о представлении зависимой и независимой переменных как однозначных функций эллиптических интегралов первого вида, для чего давались необходимые и достаточные условия. Полученные результаты для уравнений второго порядка были обобщены потом Пикаром на уравнения любого порядка; его доказательство пополнено Миттаг-Леффлером. (См. об этом подробнее в монографии Краузе [197]).

Теория дифференциального уравнения Ламе была продолжена и обобщена Клейном в работах [192.3.—5] несколько в ином направлении. Если в исследовании Эрмита частные значения па-

раметра, для которых имело место целое рациональное решение дифференциального уравнения Ламé, отодвигались на второй план, то Клейн исходил именно из этих специальных видов решений. Он рассмотрел распределение действительных корней таких целых рациональных решений в зависимости от соответствующих значений параметра h. Таким образом, устанавливалась связь распределения нулей решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с прежними исследованиями Штурма 1836 г., о которых мы упоминали в гл. 1, § 3. Так получалась своеобразная теорема колебаний, которая рассматривалась сначала для функций Ламé второго порядка, потом была обобщена на p-й порядок. Эта теорема была в 1885 г. распространена Стилтьесом на общий случай линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, рассмотренных Гейне в 1864 г. При этом предполагались действительными нули коэффициента при старшей производной, другие особые точки и сами коэффициенты. Результаты Стилтьеса обобщены на случай комплексных величин М. Бохером, дополнены Ван-Влеком, Гильбертом, Клейном, Хилбом и другими учеными.

В ходе дальнейших обобщений, на основе этих и других работ, развивалась теория краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Глава XV. ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Вводные замечания. Задачи обращения в теории эллиптических и абелевых интегралов

Простейшие задачи обращения решались математиками конца XVIII, начала XIX веков весьма часто и в связи с необходимостью найти конкретные ответы на запросы главным образом математической физики и механики. Как на примеры здесь можно указать на задачу Лапласа о виде функции, выражающей силу действия магнита на элемент проводника, на задачу Ампера об определении функции расстояния при взаимодействии двух элементов проводника. Обе эти задачи решались затем Лиувиллем при более общих предположениях относительно вида искомой функции, опираясь на, видимо, впервые им примененный метод дифференцирования с произвольным указателем.

Эти задачи, как и соответствующие задачи в теории притяжения, представляли собой частные случаи более общей задачи, поставленной Абелем в заметке [93.1] об определении вида кривой линии, по которой спускается тяжелая материальная точка за время t, выраженное как некоторая заданная функция $\varphi(x_0)$ от высоты падения x_0.

Пользуясь известной формулой, Абель легко получил уравнение

$$\varphi(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{ds}{\sqrt{x_0 - x}}, \tag{15.1}$$

из которого следовало определить $s(x)$, где s — длина дуги кривой, соответствующая высоте x_0 и отсчитываемой от начала движения. Вместо уравнения (15.1) Абель подробно рассматривает более общее вида

$$\varphi(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{f'(x)\,dx}{(x_0 - x)^n}, \tag{15.2}$$

где $f'(x)\,dx = ds$, из которого следует определить функцию $s = f(x)$, полагая, что функция $\varphi(x_0)$ известна. Пользуясь символом гамма-функции, полагая, как это видно из решения, вели-

чину n между нулем и единицей, после ряда выкладок Абель получил из (15.2) уравнение

$$s = \frac{\sin \pi n}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(x_0)\, dx_0}{(x - x_0)^{1-n}}, \qquad (15.3)$$

выражающее дугу s как функцию от x, и применил найденный результат к конкретным случаям. В дальнейшем были уточнены условия относительно компонент подынтегрального выражения (15.2), как и относительно функции φ, для возможности решения задачи.

Указанный вид задач широко применялся при создании теории эллиптических модулярных функций. К основам этой теории Гаусс подошел, как это следует из его дневника, в результате установления связи между арифметико-геометрическим средним и длиной лемнискаты (102) уже весной 1800 г., когда было отмечено открытие общих двоякопериодических функций [192.11, 63].

В скором времени теория эллиптических функций была разработана Гауссом в самых различных направлениях, а одно из его решений в «Арифметических исследованиях» оказалось поводом для открытия в 1825 г. Абелем двойной периодичности и комплексного умножения эллиптических функций общего вида. А в 1826 г. он стал разрабатывать еще ранее зародившиеся у него идеи об обращении эллиптических интегралов, которые нашли отражение в публикациях [93.2]. Этим занятиям Абеля способствовало знакомство с трактатом Лежандра об эллиптических интегралах, исследованием которых последний занимался в продолжении 40 лет. Рассмотрение всех эллиптических интегралов Лежандр привел к трем основным

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ (a)}; \quad \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ (в)};$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ (c)}, \qquad (15.4)$$

называемых интегралами первого, второго и третьего рода. Интеграл первого рода оказался простейшим и обладающим наиболее важными свойствами. Если обозначить его через u и сделать в нем подстановку $\sin \varphi = x$, то получим

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad (15.5)$$

Функцию, ему обратную, Якоби назвал амплитудой и обозначил $\varphi = amu$. Тогда можно получить $x = \sin amu$. Так же получились

$\sqrt{1-x^2} = \cos amu$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta amu$, ..., названные Якоби эллиптическими функциями.

Основные результаты Якоби по теории эллиптических функций, где он пользовался идеей обращения и двойной периодичностью, опубликованы практически одновременно с исследованиями Абеля, а в 1829 г. вышли отдельной книгой. Функции $\sin amu$, $\cos amu$, Δamu Якоби представил в виде дробей, числители и знаменатели которых были его известные четыре тэта-функции θ_j. Отношения этих периодических функций были двоякопериодическими. Эти функции, по замечанию Розенгайна, встречались уже в работах Фурье (1822) по теории теплоты, рассматривавшего их с иной точки зрения. В 1832—1835 гг. Якоби рассмотрел уже более общую задачу об обращении интегралов

$$u_1 = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{P_6(x)}} \text{ и } u_2 = \int_a^x \frac{xdx}{\sqrt{P_6(x)}}, \qquad (15.6)$$

где $P_6(x)$ — полиномы шестой степени. Подобно тому, как эллиптические имели два модуля, каждый из этих интегралов имел четыре модуля. Но применяя, по образцу эллиптических интегралов, идею инверсии к гиперэллиптическим, Якоби пришел к четырехкратно периодическим функциям $x(u_1)$ и $x(u_2)$, поведение которых оказалось загадочным, проявляющемся в том, что в каждой точке они принимали любое произвольное значение. Упустив из виду, что интересующие его обратные функции могут быть и многозначными, автор объявил рассматриваемую им проблему «абсурдной». Для решения этой проблемы ему еще недоставало понятия о многолистных поверхностях. Изучая далее идею обращения, Якоби высказал предположение, что проблема может быть решена с помощью выражения новых функций через обобщенные (кратные) θ-ряды. Эта задача была представлена затем на конкурс Парижской академией наук и подробно решена в указанном направлении в 1846 г. учеником Якоби Розенгайном (напечатано 1851) и в более абстрактной форме Гепелем (опубликовано 1847). Гепель и Розенгайн, опираясь на лекции Якоби, рассматривали новые функции θ_1 от двух аргументов, представляющие собой непосредственное обобщение функций θ Якоби. Это дало им возможность представить в ясном виде функции, обратные гиперэллиптическим интегралам. Существенным пробелом теории у Абеля и Якоби было отсутствие доказательства однозначности функций, получаемых при обращении, а также отсутствие представления о модулярных функциях (103), которым обладал Гаусс [35, 185 и след.].

Далее, естественно, возникла проблема обращения абелевых интегралов более общего вида, которой стал заниматься Эрмит уже в 1844 г., хотя ему и не удалось получить еще полных результатов.

Существенный прогресс по этому кругу вопросов был достигнут в лекциях Вейерштрасса, создавшего новое (второе после Гепеля—Розенгайна) направление в изучении гиперэллиптических и абелевых функций и интегралов. Впрочем, лекции его остались малоизвестными, а опубликовано было лишь несколько статей (1849—1856 гг.) без строгих доказательств. Вейерштрасс дал прямое обобщение методов, которым следовали Абель и Якоби в своих первых трудах по теории эллиптических функций. При этом были построены функции $al(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, соответствующие эллиптическим Якоби и представимые в виде частного некоторых функций вида $Al(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$ и $Al(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Ярким представителем третьего направления был Клебш, способствовавший установлению тесной связи между теорией абелевых функций и геометрией. Здесь не представляется возможным, к сожалению, остановиться даже кратко на изложении его идей. Отметим только, что работы Клебша стали основой целой школы математиков, среди которых назовем Клейна, Брилля и Нетера. К работам Клебша примыкало сочинение Брио (1879) по теории абелевых функций.

Особого успеха в рассматриваемой тематике удалось добиться Риману, рассмотревшему многозначность функций комплексного переменного и сделавшему блестящее открытие, что при помощи обобщенных функций θ можно решить общую задачу обращения абелевых интегралов. Таким образом, теория абелевых интегралов сводилась к изучению обратных им абелевых функций.

Исследования Римана по этим вопросам велись в период 1851—1856 гг. и результаты их были изложены в курсе лекций в Геттингенском университете на протяжении двух семестров 1855/56 гг. и подытожены в мемуаре [246.2]. В этой работе, посвященной анализу алгебраических функций и их интегралов на основе принципа Дирихле, следуя своим принципиальным установкам, Риман доказывает сперва существование функций, обладающих наперед заданными особенностями на произвольной замкнутой римановой поверхности конечного рода. Затем он строит аналитические выражения этих функций в виде интегралов от алгебраических функций. Здесь была решена также задача Якоби об обращении абелевых интегралов какого угодно рода p. При этом был разъяснен характер конформного отображения посредством такого интеграла и выяснена неоднозначность обратной функции. При введении обобщенных p-кратных $\theta(v_1, v_2, .., v_p)$ рядов были рассмотрены условия их сходимости и в связи с этим построены особые θ-функции, зависящие от p параметров. Исследованием их свойств и особенностей устанавливаются соответствующие соотношения (конгруэнции), в результате чего Риман и решает проблему обращения в общем виде (см. об этом подробнее в [17, 20 и след.]).

Дальнейшие результаты Римана по теории алгебраических и

абелевых функций были изложены в его лекциях в 1861/62 гг. Здесь содержались элементы более общей теории θ-функций, построение выражений для абелевых функций в простейших случаях ($p=3$) и др. Разработка его наследия проводилась в трудах непосредственных его учеников и последователей — Прима, Неймана, В. Вебера, Клебша и др. (см. об этом также [56]).

Таким образом, к концу 60-х годов прошлого века теория обращения эллиптических и абелевых интегралов была разработана в самой общей форме и это оказало существенное влияние на дальнейшее развитие соответствующего направления в аналитической теории дифференциальных уравнений.

§ 2. Проблема обращения в теории дифференциальных уравнений (Риман, Фукс, Клейн)

Наиболее разработанной и представляющей особый интерес для науки оказалась задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Она состоит в определении из отношения

$$\eta = \frac{y_1}{y_2} = f(x), \tag{15.7}$$

где y_1, y_2 — два независимых интеграла рассматриваемого уравнения, величины x как функции от η и изучении ее свойств. Задача обращения интеграла может быть рассмотрена как частный случай только что указанной. Внимание исследователей, занимавшихся подобными задачами, было направлено в основном на уравнения с рациональными коэффициентами и, в частности, на уравнения с регулярными особыми точками. Решение этой задачи, о чем у нас частично шла уже речь, привело к результатам огромной важности, в частности к открытию нового весьма общего класса функций — автоморфных, получивших свое название по предложению одного из активнейших создателей этой теории Ф. Клейна [1].

Разработкой принципов нового направления одним из первых стал заниматься Фукс, поставив в общем виде задачу о построении для решений линейных дифференциальных уравнений фуксового типа теории, аналогичной классической теории алгебраических функций. При этом имелось в виду прийти к функциям, через которые выражались бы интегралы этих дифференциальных уравнений таким же способом, как алгебраические функции и их интегралы выражались через абелевы трансцендентные. По существу этим ставился вопрос об обобщении упоминаемой выше задачи Якоби. Однако Фуксу не удалось отыскать таких функций, которые играли бы для линейных дифференциальных уравнений ту же роль, что абелевы трансцендентные для алге-

[1] Об истоках этой теории см. в статье [35].

браических уравнений. Но тем не менее исследования его в этом направлении привели к фундаментальным понятиям, которые дали возможность Пуанкаре сформулировать проблему обращения для линейных дифференциальных уравнений таким образом, что униформизация переменных, связанных линейным дифференциальным уравнением, т. е. выражение их в виде однозначных аналитических функций одного переменного, могла бы способствовать решению этой проблемы. В связи с этим внимание многих ученых конца прошлого и начала нынешнего века было привлечено к решению одной из основных задач теории функций: к построению эффективных методов униформизации аналитических многозначных функций. Развитие идей при решении указанных проблем представляет любопытный пример того, как часто в математических исследованиях приходили к новым представлениям весьма окольным путем.

Существенную роль в подготовке дальнейших методов для решения исследуемой проблемы сыграла теория модулярных функций (134), появившаяся как одно из существенных затем ответвлений теории эллиптических функций. Объектом ее изучения были функции, представлявшие простейший пример автоморфных. Как уже упоминалось, модулярную функцию вида $x=e^{-\pi\frac{\mu}{\lambda}}$ (лежандров интегральный множитель) впервые изучал К. Ф. Гаусс [35, 186]. Затем лежандров интегральный множитель появляется в качестве аргумента в θ-рядах Якоби.

Фундаментальное значение в развитии проблемы обращения дифференциальных уравнений, как и для других направлений рассматриваемой теории, имели работы Римана по основам теории аналитических функций, теории абелевых функций, гипергеометрических и по теории минимальных поверхностей. В его работах можно найти почти все основные идеи и даже ряд конкретных результатов, которые легли в основу будущей теории автоморфных функций. Частично об этом шла уже речь в предыдущих главах. Здесь мы отметим, что в ряде отрывков из лекций по гипергеометрическому ряду под заглавием «О функциях, порождаемых некоторыми линейными дифференциальными уравнениями» [246.7, 199 и след.] Риман изучает трасцендентные функции, получаемые при обращении отношения $z=\frac{y_2}{y_1}$ двух частных интегралов уравнения

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0. \tag{15.8}$$

Отметив, что при обходе x по замкнутому пути z переходит в $z_1=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, он изучает затем $x=f(z)$ как функцию от z, которая обладает свойством удовлетворять тождеству $f(z)=f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ и оставаться неизменной при выполнении над z как преобразо-

ваний, связанных с точками ветвления, так и тех, которые из данных составляются, а затем составляет дифференциальное уравнение для данной функции, принимая $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Этот метод применяется к гипергеометрическим функциям $y(x)$, где x рассматривается как функция отношения двух частных интегралов того уравнения, которому удовлетворяет y. При этом P^{α} принимается за y_1, а $P^{\alpha'}$ за y_2.

Рассматривая затем конформное отображение сферы на плоскость и наоборот, Риман находит, что рассматриваемая область, ограниченная двумя прямыми и дугой окружности, отобразится на сферический треугольник с углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, где $\lambda=\alpha-\alpha'$, $\mu=\beta-\beta'$, $\nu=\gamma-\gamma'$. При продолжении функции z он получает систему, по его выражению, симметрически конгруэнтных треугольников. Исследуя $x=f(z)$, которая зависит также от λ, μ, ν, и обозначая через x_1 другую подобную функцию от z с разностями показателей λ_1, μ_1, ν_1, Риман ставит и решает вопрос, при каких условиях x и x_1 связаны алгебраическим соотношением? Оказывается, что в таком случае область изменения z состоит из n пар симметрически конгруэнтных сферических треугольников с углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ и т. д. Далее он отмечает, что по существу речь идет о том, в каких случаях функция $z(x)$ посредством алгебраического преобразования аргумента переходит в функцию того же типа. По рассмотрении ряда примеров Риман резюмирует, что «такие преобразования порождаются каждым правильным многогранником, так как возникающие при этом сферические фигуры различными способами составляются из конгруэнтных сферических треугольников. Если эти последние известны, нахождение самих преобразований не представляется затруднительным» [246.7, 205].

В этой же работе Риман уделил внимание исследованию эллиптических интегралов первого рода, рассматриваемых как частный случай гипергеометрических, и отметив при этом, что интегралы такого вида являются весьма простыми функциями параметра. Далее была изучена область изменения K и K_1 интегралов уравнения

$$(1-k^2)\frac{d^2K}{(2d\ln k)^2}-\frac{k^2dK}{2d\ln k}-\frac{1}{4}k^2K=0, \tag{15.9}$$

когда

$$K=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx \tag{15.10}$$

при различных значениях k^2.

Формулы, выражающие зависимость эллиптических интегралов (15.10) от модуля k^2, выведены Якоби в 1829 г. За переменную он брал $q=e^{-\pi\frac{K_1}{K}}$, но в дифференциальное уравнение ввел само отно-

шение $\frac{K_1}{K}$, т. е. отношение двух частных интегралов. Теперь Риман подробно исследует, рассматривая k^2 как функцию отношения $\frac{K_1}{K}$, как изменяется $\frac{K_1}{K}$ при определенных изменениях k^2, и строит соответственный чертеж для области изменений $\frac{K_1}{K}$, показывая тем самым значение этой функции как униформизирующей.

Мы позволили себе остановиться подробнее на этой работе Римана, чтобы непосредственно показать не только богатство идей, но и конкретно тот вклад, который внес автор в основы теории эллиптических модулярных и более общих автоморфных функций.

Дальнейшее и более полное развитие эти идеи получили затем в работах Шварца, Клейна и других математиков. Г. А. Шварц дал доказательства и более полное изложение многих положений, высказанных Риманом [1], а также весьма существенно дополнил их [257], выяснив, в частности, что частными классами так называемых треугольных функций являются эллиптические, модулярные и полиэдрические функции. О других важных результатах Шварца, как и Клейна, имеющих непосредственное отношение к данному разделу, мы уже говорили раньше. Напомним, что Шварц, как и Риман, доказал, что каждое частное решение s уравнения третьего порядка (14.9) в случае вещественных λ, μ, ν дает простое конформное отображение верхней полуплоскости x на треугольник, образуемый дугами окружностей, пересекающимися под углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Далее чисто геометрически было построено изменение функций s с помощью принципа симметрии. Этот треугольник отображался на сферу, после чего в работах Клейна была установлена связь с вращениями правильных многогранников. За функцией s утвердилось также название треугольной.

После Римана изучение модулярных функций проводилось Дедекиндом, Эрмитом, Клейном и его учениками [192.11, 412 и след.], [35. 187], [150.2]. О значении этих работ Клейн отметил, что изучение модулярных функций, или в более общей форме треугольных, привело к общим автоморфным функциям, обладающим естественной границей.

Довольно оживленно многие из относящихся сюда вопросов стали обсуждаться во второй половине 70-х — начале 80-х годов прошлого века, т. е. в те несколько лет, когда была создана в основном теория автоморфных функций. Так, в одном из писем 1876 г. Эрмит предлагал Фуксу объяснить причину, почему функция обращения отношения периодов эллиптического интеграла первого рода является однозначной для всех значений этого

[1] Напомним, что вышерассмотренная работа Римана [246.7] была впервые опубликована в 1902 г. и упоминаемые ранее результаты Шварца получены независимо от нее. Клейну эта работа стала известна в 1897 г.

Давид Гильберт (1862—1943).

отношения, коэффициент которого при $\sqrt{-1}$ положителен, в то время как аналогичное обстоятельство не имеет места для функции обращения отношения периодов интегралов второго рода.

В ответе Фукса, сославшегося на его же работу [153.3] о модулях периодичности гиперэллиптического интеграла, рассматриваемых как функция параметра, где обсуждено в качестве примера уравнение Лежандра для модуля периодичности эллиптического интеграла, была построена теория модулярных функций, свободная от возражений, как позже отметил Шлезингер [254.10, 174], если не считать некоторых неточностей выражений. Вместе с тем Фукс нашел основу для объяснения указанных Эрмитом явлений. В том же номере журнала помещена большая статья [131] Дедекинда, где определялась модулярная функция по римановой поверхности и где закладывались по существу основы новой теории эллиптических модуль-функций, причем совершенно независимо от обычной теории эллиптических функций устанавливались соотношения между величинами ω, k, K, где $\omega = \frac{K_1}{K} i$. Иначе говоря, он дал основы теории преобразования модулярных функций. Здесь же были указаны упоминаемые выше неточности в работе Фукса.

В том же 1877 г. появилась известная работа Клейна об икосаэдре, затем он публикует большую статью [192.2] о преобразованиях эллиптических функций и решении уравнений пятой степени, выясняет и просто истолковывает многие принципиальные вопросы изучаемой теории. Клейн подошел к решению основного вопроса с новой точки зрения. Опираясь на теорию модулярных уравнений, в которой он значительно продвинулся благодаря его исследованиям об икосаэдре, уравнение которого было разрешено в эллиптических модулярных функциях, и развивая идеи Дедекинда, Клейн вместо модулей Лежандра—Якоби положил в основу абсолютные инварианты, как им были названы модулярные функции, которые он рассматривал как инвариантны собственно разрывных групп (104). Он также показал, что известные в литературе модулярные функции являются инвариантами или общей модулярной группы, или ее конгруэнтных подгрупп. Далее, изучая отображение, осуществляемое отношением периодов, он использовал в своих выводах неэвклидову геометрию, установив тем самым прочную

связь между обособленно развивавшимися ранее дисциплинами.

Как уже было отмечено в [35, 190], истолковав риманову сферу как фундаментальный образ пространственного неэвклидового мероопределения, Клейн показал, что полиэдрическими группами исчерпываются все конечные собственно прерывные группы, что вело к завершению оснований теории автоморфных функций.

§ 3. Построение основ теории автоморфных функций

Вопросы, связанные с проблемой обращения, разработанные здесь методы имели существенное значение для построения теории однозначных автоморфных функций. Вместе с тем это течение пробивало себе дорогу и как ответвление аналитической теории линейных уравнений. В истоках его лежали работы Фукса. Этим он занимался, хотя не систематически, и раньше, но в 1880 г. появилась серия его работ, сыгравших фундаментальную роль в дальнейшем развитии изучаемой теории. В период начала его деятельности придавалось большое значение теории абелевых трансцендентных. А вот теперь он возвращается к обобщению проблемы обращения Якоби, заменив в соответствующих уравнениях алгебраические функции решениями линейных дифференциальных уравнений. Эти работы означали существенное продвижение не только в теории линейных уравнений, но и в общей теории функций, ибо открывалась новая, далеко идущая область аналитических функций многих переменных, основы построения которых были заложены в интегралах решений линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Случай алгебраических решений вел здесь к известным абелевым функциям. Итак, Фукс изучал проблему, при каких свойствах функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_m(z)$, составляющих фундаментальную систему решений уравнения m-го порядка с рациональными коэффициентами, можно было определить величины $z_1, z_2, \ldots, z_m$ как аналитические функции от $u_1, \ldots, u_m$ в форме m уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\xi_i}^{z_i} f_k(z)\,dz = u_k \quad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{15.11}$$

при $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ постоянных.

Конкретное рассмотрение вопроса Фукс проводит для случая двух переменных и формулирует условия разрешимости задачи, т. е. существование выражений $z_1 = F_1(u_1, u_2)$, $z_2 = F_2(u_1, u_2)$, где F_1, F_2 — обобщения абелевых функций. Таким образом, вопрос сводился к изучению случая $m=2$, когда неоднородная линейная группа $\alpha u_1 + \beta u_2 + c_1$; $\gamma u_1 + \delta u_2 + c_2$, где α, β, γ, δ — элементы подстановок группы монодромии линейного уравнения второго по-

рядка и c_1, c_2 — постоянные, подобна той, которая позже получила название собственно разрывной. Из исследования Фукса следовало, что для этого необходима разрывность проэктивной группы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Среди условий для однозначности симметрических функций z_1, z_2 содержалось как необходимое то, что независимая переменная линейного дифференциального уравнения второго порядка, рассматриваемая как функция отношения двух интегралов, должна быть однозначной. Было также показано, что для однозначности функции обращения отношения интегралов в окрестности отдельных особых точек, не являющихся, по выражению Фукса, точками неопределенности, необходимо и достаточно, чтобы разность корней определяющего фундаментального уравнения была величиной, обратной целому числу, если она отлична от нуля. Отсюда следовали некоторые алгебраические условия для однозначности z_1, z_2. Но в одном из писем Пуанкаре в мае 1880 г. обратил внимание Фукса на то, что данные им условия не всегда вели к однозначной обратимости отношения интегралов. Так, среди данной Фуксом таблицы дифференциальных уравнений было и такое, которое, кроме указанных ранее условий, требовало еще и дополнительного, а именно: чтобы однозначность функции обращения отношения интегралов имела место вообще, а не только в окрестности отдельных особых точек. Это условие было трансцендентной природы, ибо требовало, чтобы для соответствующего уравнения с четырьмя особыми точками появившийся в коэффициентах параметр был бы модулем периодичности эллиптического интеграла. Другие уравнения таблицы Фукса содержали не более трех особых точек и для них было достаточно алгебраических условий. С этим фактом мы уже встречались в исследовании Шварца, высказавшего теорему об однозначности функции, обратной отношению интегралов $x(s)$ для гипергеометрического уравнения, когда разности корней определяющего фундаментального уравнения были обратны целым числам. Но его доказательство касалось тех случаев, когда эта обратная функция была рациональной или представимой через эллиптические.

В появившейся вскоре заметке [153.9], в ответ на замечание Пуанкаре, Фукс дал уточнение трансцендентных условий, которые следовало добавлять к алгебраическим, чтобы функция, обратная отношению интегралов, была однозначной.

Некоторое развитие и дополнение (для случая $m=2$) работ Фукса дано в статьях Лонштейна (1890 г.), Кепинского (1896—1902 гг.) и др. Большого успеха в деле униформизации функциональных соотношений, определяемых линейными дифференциальными уравнениями с алгебраическими коэффициентами, удалось добиться Пуанкаре. Но если в исследованиях Фукса, имевших в этом смысле предварительный характер, вопрос однозначности рассматривался попутно с другими, то Пуанкаре выдвинул

его на передний план. Он стремился к характеристике и отысканию в общем таких однозначных функций от одного переменного, обратные которым представлялись бы как отношения интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка фуксового типа.

Рассмотрению комплекса вопросов, связанных с указанной проблемой, в начале 80-х годов Пуанкаре посвятил много работ (всего около тридцати) и в том числе [237.3.—7.—9.—10]. Здесь была прежде всего поставлена задача определить такие группы проективных подстановок одного переменного, которые представляли бы область значений некоторой аналитической функции в смысле Якоби, т. е. не содержали бы бесконечно малых преобразований или, по термину Пуанкаре, были бы прерывны. Опираясь на соотношения, которые были получены в случае трех особых точек для гипергеометрического уравнения, Пуанкаре обратил внимание на те дискретные группы, которые были связаны с преобразованием неэвклидовой плоскости в себя. Такие группы движения не содержали бесконечно малых подстановок и составлялись из конечного числа фундаментальных подстановок. Они представляли всегда и одним способом однолистное и сплошное покрытие многоугольниками неэвклидовой плоскости.

Пуанкаре удалось затем установить все эти группы, названные им фуксовыми. Так были построены в тесной связи с тэта-рядами однозначные функции, которые вели себя в области конечной точки неэвклидовой плоскости как рациональные функции и при подстановках фуксовой группы оставались неизменными. Эти функции получили название фуксовых. Функции, обратные фуксовым, являлись отношениями интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка с алгебраическими коэффициентами фуксового типа. Их риманова поверхность и особые точки (помимо бирациональных преобразований) сами определялись группой. Корни определяющего фундаментального уравнения удовлетворяли данным Фуксом условиям однозначности в окрестности особых точек. Но, за исключением случаев $p=0$ и когда число особых точек $n\leqslant 3$, соответствующее дифференциальное уравнение не было полностью определено, так как оно содержало еще некоторые алгебраически неопределимые параметры, которые должны подчиняться некоторым трансцендентным условиям. Такое уравнение Пуанкаре назвал фуксовым. Определение таких условий имело фундаментальное значение, так как от этого зависел и вопрос униформизации. В случае утвердительного его решения фуксовы функции представляли для любого линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами то же, что эллиптические функции — для уравнения Ламе или его обобщений. Подобно тому, как отношения интегралов фуксового уравнения имеют прообразом эллиптический интеграл первого рода, так решения линейного уравнения, которые могут быть представлены как однозначные функции этого отношения

интегралов, имеют прообразом зета-функции. В случае, когда соответствующее линейное уравнение принадлежало фуксовому типу и когда для всех фундаментальных подстановок, соответствующих обходам независимой переменной около отдельных особых точек, корни принадлежащего фундаментального уравнения имели абсолютную величину, равную единице, Пуанкаре удалось получить разложения в ряды для однозначно полученных интегралов, которые он назвал фуксовыми зета-функциями. Так был ясно определен аналитический характер этих функций.

Вышеизложенные принципы устанавливались в тесном контакте и при существенном участии Ф. Клейна, занимавшегося в 1881—1882 гг. теми же вопросами и получившим некоторые важные результаты немного раньше Пуанкаре [192.11, 426 и след.]. Клейн предложил иной способ получения фуксовых функций, который представлял доказательство существования функций, принадлежащих данной фундаментальной области. Он указал также, что, кроме фуксовых, существуют еще и другие группы проективных подстановок, обладающие свойством дискретности, и что отсутствие у последних бесконечно малых подстановок еще не является условием дискретности. Такие группы Пуанкаре назвал клейновыми. На них потом строились клейновы функции и т. д. Они были истолкованы затем как группы движений неэвклидового пространства. Частный случай таких групп указан ранее Шоттки.

Отметим также, что Клейн несколько ранее Пуанкаре предложил глубокий и важный метод, так называемый метод непрерывности, с помощью которого мог быть решен упоминаемый выше основной вопрос теории фуксовых функций. Задача состояла в том, что на римановой поверхности R жанра p даются $n+1$ особых точек $a_1, \ldots, a_{n+1}$, каждой из которых соответствует заданное положительное целое число g_k (в том числе и ∞), и надо определить уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = B(x)\,u \qquad (15.12)$$

фуксового типа с рациональными в R коэффициентами, интегралы которого в окрестности любой точки R, за исключением a_i ($i=1, 2, \ldots, n+1$), однозначны, конечны и непрерывны, причем для a_k разности корней определяющего фундаментального уравнения равны $\frac{1}{g_k}$. Эта задача, легко решаемая в случае $p=0$, для $p>0$ при $n=0$ и $g_1=1$ разобрана Клейном в его лекциях 1894 г. Она рассматривалась также Пиком (в 1903 г.) и другими. Определенное этими алгебраическими условиями дифференциальное уравнение содержало еще некоторое число произвольных (по Клейну, акцессорных) параметров. Они были так определены, что группа дифференциального уравнения (15.12) была фуксовой. Таким образом, многообразию римановых поверхно-

стей с одним и тем же p противопоставлялось соответствующее многообразие автоморфных групп с граничным кругом. В связи с этим в первую очередь обсуждается доказательство существования такого уравнения. Метод непрерывности доставлял такое доказательство. При этом для полного решения надо было исследовать некоторые граничные случаи, чем занимался Пуанкаре в работах 1883 г., а позже ряд случаев подробно разобран Фрике в 1904 г.

Для доказательства существования, о чем выше упоминалось, было позже предложено еще три различных метода. Первый из них — метод Шварца (1886); он основан на интеграции уравнения с частными производными $\Delta u = ke^u$. Второе доказательство основано на применении метода Пуанкаре для униформизации любой моногенной функции одного комплексного переменного. Полезность такого применения указана в лекциях Клейна 1894 г. Затем решением этой задачи занимались и другие, но удовлетворительное решение впервые кратко было изложено Кёбе [194], улучшившим также метод Пуанкаре в существенных пунктах. Третье доказательство (связанное со вторым методом) сначала для некоторого частного случая нашел Шлезингер в 1889 г. Позже Гильберт и Клейн [192.10] указали на четвертый метод, которым связывалось определение ацессорных параметров с теоремой колебаний. Дальнейшее обобщение вопроса и развитие подобных идей находим в трудах Хилба, в том числе в [172.1]. Здесь ставился вопрос об определении акцессорных параметров для уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками.

Таким образом, теория автоморфных функций возникла как результат обобщения довольно подробно к тому времени разработанных теорий частных видов автоморфных функций в результате комбинации большого числа математических идей, опираясь на геометрическую теорию аналитических функций, теорию групп как объединяющий принцип, теорию алгебраических и эллиптических функций, аналитическую теорию линейных уравнений, проективную и неэвклидову геометрию.

§ 4. Задача обращения для дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками (А. Пуанкаре, Ф. Клейн, В. Смирнов)

Как известно, задание особых точек и соответствующих им корней определяющего уравнения не всегда определяет полностью коэффициенты дифференциального уравнения (15.8). Они зависят еще, о чем уже упоминалось ранее, от произвольных дополнительных (акцессорных) параметров, если число особых точек уравнения больше трех. Уравнения же с тремя и меньшим числом особых точек таких параметров не содержат, и это упро-

щало их изучение. Уравнение с одной особой регулярной точкой приводится к виду $y''=0$ и не представляет особого интереса; уравнение с двумя особыми точками a_1 и a_2 после ряда преобразований [16.3, 227] приводится к уравнению Эйлера

$$y'' + \frac{A_1}{x} y' + \frac{C}{(a_2 - a_1)^2} \cdot \frac{y}{x^2} = 0; \qquad (15.13)$$

уравнение с тремя особыми точками может быть приведено к гипергеометрическому, которое в квадратурах уже не интегрируется. Об исследованиях его у нас шла речь в гл. XIV.

Дальнейшее увеличение числа особых точек вело к новым усложнениям, связанным как с появлением акцессорных параметров, так и с повышением степени полиномов, входящих в коэффициенты дифференциального уравнения, что затрудняло отыскание решения этого уравнения в форме определенного интеграла. Изучение таких уравнений сводилось в основном к изучению свойств их интегралов в функции акцессорных параметров. Естественно, что в первую очередь и более подробно удалось изучить уравнение второго порядка с четырьмя особыми точками. Решение этой задачи связано с многими трудностями, которые были выявлены, а тем более изучены не так скоро и потребовали больших усилий многих ученых и применения новейших вспомогательных средств.

Уравнение такого вида, если за особые точки принять числа 0, a, 1, где $0<a<1$ и ∞, корни определяющего уравнения, соответствующие первым трем особым точкам, считать равными 0 и α, β, γ, а для особой точки в бесконечности — δ_1 и δ_2, причем $\delta_1 \delta_2 = A$, акцессорный параметр обозначить через λ, можно записать в форме [1]

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-a} + \frac{1-\gamma}{x-1}\right) y' + \frac{Ax+\lambda}{x(x-a)(x-1)} y = 0. \qquad (15.14)$$

Задача обращения гипергеометрического уравнения (с действительными коэффициентами) впервые подробно изучена, как известно, Шварцем. Но результаты его не могли быть распространены непосредственно на уравнение с четырьмя особыми точками в связи с появлением нового параметра, от значения которого зависело решение.

Задача изучения уравнения с четырьмя регулярными особыми точками рассматривалась Пуанкаре в 1884 г. [237.9] в связи с общей проблемой обращения уравнений второго порядка и изучением свойств однозначных функций, которые не менялись при подстановках, образующих дискретные группы. Для того чтобы показать, как эти функции и им аналогичные представляют интегралы линейных дифференциальных уравнений с алебра-

[1] Нетрудно заметить, что оно представляет частный случай уравнения «Ламе» (см. гл. XIV, § 4).

ническими коэффициентами, ему следовало решить две проблемы: 1) если дано линейное уравнение с алгебраическими коэффициентами, надо определить его группу; 2) если дано линейное уравнение второго порядка, зависящее от некоторых произвольных параметров, следует определить эти параметры таким образом, чтобы группа уравнения была фуксовой. Для решения этих задач Пуанкаре пользовался так называемым методом непрерывности, проводя подсчет числа параметров, входящих в уравнение вида (15.8) с переменными коэффициентами, и числа постоянных, от которых зависела группа уравнения. Интересующий нас вопрос был связан как раз с решением второй задачи, когда также искалось определение параметра таким образом, чтобы функция, обратная частному двух независимых интегралов уравнения, была фуксовой.

Пуанкаре рассматривал уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{15.15}$$

где $\varphi(x, y)$ — рациональная функция и x, y связаны рационально соотношением $\psi(x, y)=0$. При этом предполагались известными корни определяющего уравнения и особые точки, а в (15.15) входили еще произвольные параметры. Обозначая через z отношение двух интегралов уравнения и рассматривая x как функцию от z, он изучал характер этой функции (т. е. является ли она фуксовой или клейновой в зависимости от расположения упомянутых произвольных параметров). Случай четырех особых точек α, β, γ, δ он кратко трактовал как приложение в п. 15 мемуара, высказав там ряд принципиальных положений.

Значительно позже, в 1907 г., данный круг вопросов привлек внимание Клейна, побуждаемого новыми исследованиями в области интегральных уравнений Гильберта установить связь между теоремой осциляции (колебаний) и теоремой существования автоморфных функций, о чем ранее шла речь в [192.5]. В работе [192.10], исходя из общих задач теории автоморфных функций, ставился вопрос об определении входящих в линейное дифференциальное уравнение акцессорных параметров так, чтобы соответствующие фигуры на η-шаре обладали некоторыми отличительными свойствами. Связывая это требование с теоремой колебаний и опираясь на соответственные результаты Гильберта, Клейн обсуждал отдельный случай вышеуказанной общей проблемы на примере простейшего вида дифференциального уравнения второго порядка с тремя действительными конечными и бесконечно удаленной особыми точками с акцессорным параметром. Последний определен так, что соответствующий круговой четырехугольник охватывался на η-сфере (или η-плоскости) одной из тех четырех ортогональных к абсолюту окружностей, дуги которых являются сторонами четырехугольника. А этот вопрос был решен Гильбертом при помощи интегральных урав-

нений для граничного случая, когда принадлежащие к четырем особым точкам разности показателей были нули. Полученным весьма любопытным, принципиальным результатам Клейн дал аналитическую и геометрическую трактовку.

К вышеуказанной работе Клейна тесно примыкало исследование Хилба, подробно рассмотревшего в 1908 г. уравнение, приводящееся к (15.14), и предложившего чисто аналитическую трактовку выраженных в ранее опубликованных работах геометрических идей. Ряд уже известных положений Хилб довольно просто доказал, опираясь на идею непрерывности, предполагая действительными все параметры, входящие в уравнение. Он же рассмотрел и случай комплексных особых точек, изучая фундаментальную область, на которую соответственно разбитая плоскость отображалась отношением двух частных решений. Задача состояла сначала в установлении мероопределения такой фундаментальной области, а затем в исследовании определения акцессорного параметра через такое, подлежащее установлению, число-меру. В этом случае параметр приобретал, естественно, некоторое комплексное значение. Несмотря на существенный прогресс в этом отношении, результаты Хилба все же не представлялись полными, так как наряду с доказательством существования бесконечно многих значений параметра λ, при которых группа уравнения будет фуксовой, не было доказательства единственности этих значений при некоторых дополнительных условиях.

В работе Хилба рассматривался случай, когда определяющее уравнение не имело кратных корней. Изучение случая кратных корней определяющего уравнения чуть позже проведено в диссертации Герстенмеера [161], применявшего в своих работах метод Хилба и рассмотревшего кратко также уравнения с пятью регулярными особыми точками. И у него отсутствовало вышеупомянутое доказательство единственности, как отмечено в [60, 6], а другие доказательства приведены не везде достаточно строго [66.1, XIII].

В то же время Гильберт (105) в шестом сообщении Геттингенскому научному обществу в 1910 г. привел решение задачи Пуанкаре в случае кратных корней определяющего уравнения к исследованию одного интегрального уравнения. На основе теории интегральных уравнений он доказал теорему о том, что имеется бесконечно много действительных значений λ, для которых отношение двух решений уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0$$

при обходе комплексной переменной x около особых точек a, b, c, ∞ испытывает подстановки с действительными коэффициентами.

К этому исследованию непосредственно примыкала работа Кёнига (1912 г.). Здесь речь шла об уравнении, аналогичном предыдущему, вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)\frac{dy}{dx}+$$
$$+\frac{(x+B)\,y}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}=0 \quad (15.16)$$

(где $a>b>c$, B — дополнительный параметр) и решалась вышеуказанная задача относительно вида подстановок таким же методом, но более полно. При этом был уточнен выбор B и вид отображающей функции η и тот случай для функции от η, когда ортогональный круг перейдет в действительную ось.

В. И. Смирнов (1887—1974).

Исследование аналогично поставленной задачи Пуанкаре для случая клейновых функций почти не проводилось. Некоторое отношение к этому имел мемуар Фрике [150.1], где рассматривался вопрос образования симметрической группы при помощи последовательных отображений кругового четырехугольника через его стороны с подробной геометрической трактовкой, а также диссертация Иленбурга [179], посвященная исследованию односвязных четырехугольников, ограниченных дугами окружностей и не имеющих точек разветвления нигде, кроме вершин.

Наиболее подробно и всесторонне задача обращения для уравнения класса Фукса второго порядка с вещественными коэффициентами и четырьмя особыми точками была рассмотрена (1918 г.) в монографии [66.1] В. И. Смирнова (106). Здесь были разрешены практически все вопросы, стоявшие тогда на порядке дня и связанные с уравнением с четырьмя особыми точками. Опираясь на принцип выбора, на подробное исследование группы уравнения, на новые результаты теории функций и применив ряд остроумных соображений, он дал полную картину спектра этого уравнения, конкретно выяснив, для каких значений акцессорного параметра задача обращения имеет однозначное решение. Этой работой, изданной, к сожалению, по обстоятельствам того времени, в весьма малом числе экземпляров, по существу открывалось и утверждалось новое направление в Ленинградской научной школе исследований по аналитической теории линейных уравнений, которое, как увидим далее, привело к фундаментальным достижениям. Уже в этом сочинении, наряду с глубиной и широтой исследования, сказалось умение автора весьма сложные вопросы излагать с большой методической ясностью, что послужило, вероятно, надежной основой для привлечения внимания молодежи к новым идеям и быстрого ими овладения.

В кратком введении Смирнов знакомил читателя сразу с основными результатами теории, на которой строились дальнейшие рассуждения и выводы.

Особенно полно в работе трактовался тот случай уравнений с четырьмя особыми точками, когда фундаментальное определяющее уравнение имело кратный корень в каждой из особых точек. При этом В. Смирнов занимался исследованием зависимости группы уравнений от параметров и вопросом об определении уравнения по заданной группе. Все исследование состояло из пяти глав. Первая из них имела вспомогательный характер и посвящалась изучению групп дробно-линейных преобразований на плоскости комплексного переменного. Особое внимание обращалось здесь на понятие непрерывной группы, особой точки группы и др. Аналитический характер изложения этой теории был отличительной чертой, ибо предыдущие работы основывались на методах проективной геометрии. Как основной метод здесь использовался принцип выбора (107).

В следующих двух главах подробно исследуется задача обращения при вещественных a и λ для уравнения вида

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0, \qquad (15.17)$$

где особыми точками были точки $x=0,\ 1,\ a,\ \infty,\ 0<a<1$; оба корня определяющего уравнения в первых трех точках равны нулю, а в четвертой — единице. В главе II нашли развитие идеи Гильберта Кёнига, но не на основе метода интегральных уравнений, а с использованием обычного метода Штурма—Лиувилля, что существенно упростило изложение. Основное внимание в главах II—III уделялось определению тех значений параметра, при которых проективная группа уравнения (15.17) будет фуксовой. При этом была рассмотрена зависимость интегралов уравнения от параметра, исследован вид кругового четырехугольника, на который отображается полуплоскость при помощи отношения двух интегралов уравнения, и, главное, определены те значения параметра, при которых задача обращения приводила к однозначной функции, а также изучена группа уравнения в таких случаях. Оказалось, что значения параметра λ, для которых задача обращения для $\eta=\frac{y_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}$ имела однозначное решение, заполняли целиком некоторый отрезок $\lambda_0'\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0''$ и, кроме того, еще в некоторых промежутках [1] $\mu_{-1}\leqslant\lambda<\lambda_0'$; $\lambda''<\lambda\leqslant\mu_1$ имелись дискретные значения λ с точками сгущения λ_0' и λ_0'' (принадлежащими окрестности λ_0), при которых возможно однозначное обращение η. При этом установлены значения λ, когда обращение вело к функциям Фукса или Клейна.

---

[1] $\mu_{-2}<\lambda_{-1}<\mu_{-1}<\lambda_0<\mu_1<\lambda_1<\mu_2$. См. об этом подробнее в [67, 16—17].

В четвертой главе исследовались группы уравнения рассматриваемого вида при различных значениях λ, изучался вопрос о свойствах уравнений вида (15.17) с одной и той же группой подстановок и о построении уравнения по заданной группе. При рассмотрении подробно того случая, когда λ принадлежало отрезку $\mu_{-1} \leqslant \lambda \leqslant \mu_1$ однозначного обращения, было установлено, что любому уравнению вида (15.17) соответствует по крайней мере одно уравнение из промежутка однозначного обращения с той же группой.

Более общий случай уравнения вида (15.14) с четырьмя особыми точками, когда корни соответствующего характеристического уравнения были различны (вещественны, положительны и больше единицы), трактуется в главе V.

Здесь применялись методы, развитые раньше, и решался примерно тот же круг основных задач. Тут был восполнен упоминаемый выше пробел в исследовании Хилба относительно доказательства единственности значений параметра λ. Был рассмотрен также тот случай, когда подстановки группы, оставляя неизменной некоторую окружность, преобразуют части плоскости, на которые эта окружность делит всю плоскость, друг в друга, а также исследованы свойства кругового четырехугольника, получаемого отображением полуплоскости при помощи функции η, при различных значениях параметра λ изучена и однозначность решения задачи обращения. При этом несколько раньше был установлен очень важный результат [66.1, 289—293], которым исчерпывались все возможные значения параметра λ, когда подстановки группы уравнения (15.14) преобразуют в себя некоторую окружность, т. е. когда группа данного уравнения фуксова. Этим самым пополнялись фундаментальные результаты предшественников В. И. Смирнова в исследовании данной проблемы.

В. И. Смирнов кратко изложил полученные результаты в докладах Парижской академии и более подробно в статье в журнале Дарбу [66.3]. О последней Хилб писал [184, т. 48, 510—511], что здесь к известным результатам было добавлено много нового.

К выше рассмотренной работе В. И. Смирнова примыкала одновременно опубликованная его статья [66.2], где исследовалась основная задача униформизации для неприводимого алгебраического уравнения $f(x, y)=0$ при помощи фуксовых функций $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, однозначных и регулярных внутри единичного круга и имеющих окружность этого круга своей естественной границей. Сложное доказательство существования униформизации указанного типа, данное почти одновременно в 1907 г. Пуанкаре и Кёбе, было существенно упрощено В. И. Смирновым благодаря применению здесь новых подходящих принципов [67, 14—15].

Он же показал раньше, что уравнение с четырьмя особыми точками в некоторых случаях может быть получено при помощи

рационального преобразования независимого переменного из гипергеометрического уравнения. В дальнейшем [66.4] был исследован общий вопрос о рациональных преобразованиях того же уравнения Гаусса в уравнения с четырьмя особыми точками. При условии, что разность корней определяющего уравнения в каждой особой точке равнялась нулю или единице, деленной на целое число, было доказано, что решение поставленной задачи приводится к решению топологической задачи о построении на плоскости сети треугольников, причем эта сеть должна иметь определенный тип [67, 18].

После диссертации В. И. Смирнова исследование уравнения с четырьмя регулярными особыми точками в начале 20-х годов было продолжено в статье Племеля и диссертации Ваксели, а еще почти через 15 лет в работе Племеля [236.4]. Здесь вопрос трактовался без предположения о вещественности особых точек и параметра и изучалось поведение интегралов при различных обходах независимым переменным различных контуров на комплексной плоскости. Автор ссылается на предшественников, не упоминая, однако, о работах Смирнова.

Идеи и результаты В. И. Смирнова были далее развиты в работе В. А. Фока [82], где рассматривалось конформное отображение четырехугольника, ограниченного дугами окружностей на полуплоскость, и показывалось, что функция, производящая отображение, дается частным двух интегралов уравнения типа Ламé. При этом выведены формулы, позволяющие вычислять параметры, входящие в это уравнение, если задан конкретный четырехугольник (с нулевыми углами). Для определения интегралов уравнения Ламе использовался метод разложения в ряды по степеням малого параметра. Этот же метод позже применила Э. Д. Пергаменцева в работе [54] для решения задачи об отображении четырехугольника, ограниченного дугами окружностей, когда две противоположные стороны его при продолжении касались, и с углами, равными π. При этом оказалось, что построение отображающей функции сводилось к нахождению периодического интеграла уравнения Ламé.

Таким образом, задача конформного отображения многоугольников, ограниченных дугами окружностей, сводится к интегрированию уравнения (15.8), число особых точек которого равно числу вершин заданного многоугольника и сложность ее решения возрастает с увеличением числа особых точек.

Глава XVI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ (ПРОБЛЕМА РИМАНА)

§ 1. Постановка вопроса у Римана и первые подходы к его решению

Проблема Римана, состоящая в установлении линейного дифференциального уравнения фуксова типа по заданным особым точкам и группе монодромии, являлась одной из центральных в анализе на протяжении последнего столетия. Решению ее в различных аспектах, а также рассмотрению других, примыкающих сюда вопросов, уделяли внимание многие математики в конце прошлого и особенно в текущем столетии. Мы можем оценить сейчас творческую проницательность Д. Гильберта, сформулировавшего на рубеже двух столетий в своем замечательном докладе [173.1] на втором международном конгрессе математиков некоторые основные проблемы математики, ожидавшие решения в то время. Среди других как одна из наиболее фундаментальных в теории линейных дифференциальных уравнений с одним аргументом под № 21 и была указана задача об определении n функций от одной переменной z, регулярных во всей комплексной плоскости, за исключением, быть может, заданных особых точек, в которых функции могли иметь полюсы только конечного порядка, причем при обходе переменной z вокруг указанных точек эти функции подвергались линейной подстановке.

Истоки названной проблемы находятся в трудах Римана. Относящиеся сюда идеи для частного случая гипергеометрического уравнения изложены в его лекциях, о чем уже было сказано. Продолжением и сообщением их можно считать материал известного фрагмента [246.4], датированного автором 20 февраля 1857 г. Первая часть рукописи (до заголовка «Определение формы дифференциального уравнения»), как сообщал Вебер, имела отредактированный вид, а потом шли отрывочные записи по дальнейшему развитию мыслей. Эта часть работы была восстановлена Вебером с дальнейшими поправками (во втором немецком издании) Гильберта. В лекциях Клейна [192.11] отмечается всеобщее изумление, вызванное публикацией этой работы через десять лет после смерти автора. К этому времени, как известно, была в основном построена Л. Фуксом аналитическая теория ли-

нейных уравнений, исходным пунктом которой служили сами уравнения. Риман же исходит из характеристики исследуемых функций их поведением около особых точек и приходит к дифференциальному уравнению уже в итоге исследования, т. е. применяет и в общем случае тот метод, который был им использован в лекциях о гипергеометрическом ряде.

В упоминаемом фрагменте Риман ставит следующую задачу. Он рассматривает регулярные во всей комплексной плоскости (за исключением конечного числа точек $a, b, \ldots, g$) функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (16.1). При обходе x около каждой из этих точек ветвления функции y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ переходят в некоторые линейные комбинации их прежних значений. В частности, при положительном обходе x около a y_1 переходило в $\sum_{i=1}^{n} A_i^{(1)} y_i$, y_2 — в $\sum_{i=1}^{n} A_i^{(2)} y_i$, $\ldots$, y_n — в $\sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} y_i$ и аналогично при положительном обходе около b y_k переходит в $\sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} y_i$ и т. д., то же для точки g — y_k переходит в $\sum_{i=1}^{n} G_i^{(k)} y_i$. Затем для краткости система значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ обозначается через (y), система nn коэффициентов $A_1^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)}$, $A_1^{(2)}, \ldots, A_n^{(u)}$ — через (A), система коэффициентов B — через (B) и т. д. и значения $\sum A_i^{(1)} y_i, \ldots, \sum A_i^{(n)} y_i$, получающиеся из (y) посредством системы коэффициентов (A) — через $A(y)$. Тогда упомянутые системы коэффициентов оказываются связанными условиями

$$(G)(F)\ldots(B)(A) = (0), \tag{16.2}$$

где через (0) обозначена система коэффициентов, не меняющая значений[1] рассматриваемых функций. Система n функций, обладающих указанными свойствами, обозначается через

$$Q\begin{pmatrix} a, b, c, \ldots, g \\ A, B, C, \ldots, G \end{pmatrix} x. \tag{16.3}$$

Далее следует определение важнейшего понятия — класса, объединяющего все те системы, для которых точки ветвления и соответствующие подстановки одни и те же и обладающие свойством (16.2).

Таким образом, для рассматриваемого семейства функций здесь была построена, по более поздней терминологии, группа монодромии. Исходя из заданных преобразований этой группы, автор изучает свойства рассматриваемого семейства функций,

[1] Очевидно, ее лучше было бы обозначить через (1) — *В. Д.*

имея конечной целью построить дифференциальное уравнение, для которого все функции семейства были бы решениями. Предполагая, что функции y «нигде не обращаются в бесконечность бесконечно большого порядка» [246.4, 179], Риман устанавливает теорему: для любых $n+1$ систем, принадлежащих одному классу, существует линейное однородное соотношение с коэффициентами, являющимися целыми функциями от x. Отмечая с этой целью различные величины в указанных $n+1$ системах верхними индексами и допуская, что между ними имеют место n соотношений

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y_i^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16.4}$$

он делает заключение, что величины $a_0, a_1, \ldots, a_n$ пропорциональны некоторым определителям, которые в рассматриваемых особых точках не могут обращаться в бесконечность бесконечно большого порядка, а значит, разлагаются по степеням $(x-a)$, возрастающим на 1, начиная с некоторого числа. Отсюда следовало, что и величины $a_0, a_1, \ldots, a_n$ относились как целые функции и могли быть заменены такими в уравнениях (16.4).

Далее легко найти как следствие, что производные функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по x образуют систему, принадлежащую тому же классу. Из вышеуказанной теории и последнего замечания делалось заключение, что «функции y, образующие систему, удовлетворяют дифференциальному уравнению n-го порядка, коэффициенты которого — целые (рациональные) функции от x» и что «каждая система, принадлежащая тому же классу, выражается линейно, с рациональными коэффициентами, через эти функции и их производные до $(n-1)$-го порядка» [246.4, 181]. Риман потом отметил, что последнее следствие позволяет установить общий вид системы данного класса, откуда видно, что число всех таких систем бесконечно. При этом вопрос о существовании указанных дифференциальных уравнений приводился к последовательному подсчету констант [1] в общих решениях в соответствии с заданными условиями. Ближайшая задача строящейся на новых принципах теории линейных дифференциальных уравнений, о которой шла речь в начале второй части фрагмента, состояла в разыскании простейших систем каждого класса. Здесь приводился ряд интересных соображений, в частности, относительно уравнений класса Фукса, но в целом работа осталась незаконченной. Но самое главное, что не сделано Риманом [17.23] — это доказательство существования системы функций

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{16.5}$$

[1] Это, как отметил Клейн в [192.8, 137], в общем не вело к доказательству существования.

которые вели бы себя так, как это требуется в его работе (108). На этой почве и выросла знаменитая проблема Римана. Самим Риманом она была разрешена для случая гипергеометрического уравнения в [246.3], где указана явным образом фундаментальная система, обладающая нужными свойствами. О том, как он предполагал решать эту задачу в общем случае, указаний не осталось. Возможно, что в силу недостаточно еще развитой в то время теории дифференциальных уравнений и других смежных дисциплин, Риман не видел еще всех трудностей доказательства существования. Но не лишено оснований и предположение, что он эти трудности осознавал и, оставаясь в этом отношении принципиально самокритичным, не спешил публиковать уже созревшие фундаментальные идеи, обрекая их тем самым на многолетнюю бесплодность. Насколько идеи Римана опережали свое время, говорит и тот факт, что предпосылки и вспомогательный материал для исследования его проблемы созрели еще несколько позже, а вопрос о ее решении встал на порядок дня лишь в последнее десятилетие прошлого века и был с достаточной строгостью рассмотрен в различных вариантах только в начале нашего века, когда вспомогательные теории были достаточно развиты. Напомним в этой связи теорию фуксовых функций, идеи униформизации, теорию интегральных уравнений. Если сравнить развитие рассматриваемых нами вопросов в последние три десятилетия прошлого века с анализом работ Римана, то можно отметить, что во многом это развитие шло в том направлении, как это предугадывалось в его работах. Напомним здесь о рассматриваемых им задачах обращения, о большой униформизирующей силе, которую он признавал за модуль-функциями и т. д.

Важной вехой на пути решения рассматриваемой проблемы были работы Пуанкаре начала 80-х годов прошлого века об интеграции линейных уравнений и о зета-фуксовых функциях и рядах. Здесь особо следует отметить его мемуар [237.10], где изучалась система решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка, коэффициенты которого принадлежали данной алгебраической области как однозначные функции введенной автором функции зета (ζ) при определенных предположениях относительно особых точек уравнения. Было установлено, что каждой подстановке группы Γ дробно-линейных подстановок ζ однозначно соответствует линейная подстановка группы монодромии данного дифференциального уравнения. Эта связь была всесторонне изучена в зависимости от характера подстановок группы Γ. Несколько раньше в [237.7] аналогичная идея была использована Пуанкаре для доказательства существования бесконечно многих линейных дифференциальных уравнений (обладающих алгебраическими интегралами с рациональными коэффициентами), с заданными особыми точками и с указанной группой монодромии для случая, когда она была конечна.

Исходя из точной формулировки проблемы Римана в лекциях Клейна [192.8], в большой посмертной статье [248] Е. Риттер указывал на возможность провести в общем случае требуемое доказательство существования постулируемой во фрагменте Римана системы функций при помощи зета-рядов Пуанкаре. Но при этом не было сделано замечания о необходимых ограничениях для верности подобного доказательства. Риттер ввел здесь однородные переменные, рассматривая вместо семейства функций семейства форм, и говорил о существовании таких семейств форм для любой заданной группы, в то время как зета-фуксовы ряды сходятся только при некоторых ограничениях для фундаментальных подстановок группы. Теоремы, обратные указанным Риманом в [246.4], были сформулированы и доказаны Куртисом в [129].

Большую роль в разработке проблемы Римана и ее популяризации сыграл Л. Шлезингер, посвятивший этому вопросу множество публикаций на протяжении двух десятилетий. Собственно ему принадлежит первая попытка доказательства существования указанной Риманом системы функций на основе теории зета-фуксовых функций Пуанкаре [254.1, II (2), 382 и след.; и др.], но при весьма существенном ограничении. Оно состояло в том, что коэффициенты рассматриваемых линейных дифференциальных уравнений предполагались рациональным (у Римана они предполагались любыми алгебраическими) и корни определяющего фундаментального уравнения были с модулем единица. Последнее было продиктовано для уверенности в сходимости зета-фуксовых рядов. Им же в 1901 г. была показана интересная связь между проблемой Римана и исследованиями Фукса [153.14.—16] о линейных дифференциальных уравнениях, группа подстановок которых не зависима от входящего в коэффициенты параметра. Из других результатов Шлезингера, полученных в то же время, отметим решение вопроса [254.2 и след.] об аналитическом характере зависимости изучаемой им системы моногенных функций от точек разветвления, рассматриваемых как независимые друг от друга переменные, что вело к весьма интересным заключениям, в частности к общему определению одного замечательного, по термину автора, класса функций многих переменных, которые удовлетворяли как функции по каждой отдельной переменной линейному дифференциальному однородному уравнению n-го порядка с однозначными по всем переменным (рациональными по x) коэффициентами и с конечным числом точек разветвления. Шлезингер отметил в [254.3, 224], что, возможно, так представлялся класс функций Риману, когда он говорил о «неправильной» системе [246.8, 385 и след.]. Пример такой функциональной системы представлен в форме решения дифференциального уравнения Тиссо—Похгамера, а частные ее случаи трактовались в работах Аппеля, Пикара, Гурса и других, о чем у нас была речь выше.

В следующем цикле работ Шлезингера [254.5 — 6.—9 и др.] с большой настойчивостью для нового и полного решения задачи Римана, хотя и не совсем успешно, был использован упоминаемый ранее метод непрерывности, который Клейн и Пуанкаре применили для доказательства фундаментальной теоремы в теории автоморфных функций, о чем шла речь в гл. XV. Однако проведенное Шлезингером доказательство встретило позже ряд обоснованных возражений со стороны молодого ученого И. Племеля из Черновиц. В заметках [236.2] он отметил некоторые неточности доказательства Шлезингера, основанного на континуум-методе. Племель указал, в частности, на неоднозначность соотношений некоторых параметров, которые Шлезингер считал однозначными. Это и было основным пунктом, пошатнувшим весь метод доказательства. В связи с этим Шлезингер [254.9] старался дополнить свою аргументацию и совершенствовать доказательство, что было, впрочем, не так просто в связи с недостаточной еще разработкой самих основ теории метода.

Шлезингер указал весьма любопытные следствия, если предположить разрешимость проблемы Римана. Одно из них касалось теоремы о том, что линейное дифференциальное уравнение с рациональными коэффициентами (в общем с однозначными и с конечным числом точек разветвления) всегда когредиентно дифференциальному уравнению фуксова типа, т. е. что его зависимая переменная z представляется через зависимую переменную y уравнения фуксового типа всегда в форме

$$z = r_0 y + r_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + r_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \tag{16.6}$$

где $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ — однозначные функции, удовлетворяющие линейной дифференциальной системе с рациональными (соответственно однозначными коэффициентами). Второе касалось вопроса получения дифференциальных уравнений, группа монодромии которых независима от параметров, входящих в коэффициенты. А он был тесно связан с вопросом о нелинейных уравнениях второго порядка с неподвижными критическими точками, о чем шла речь ранее.

§ 2. Применение метода интегральных уравнений к изучению проблемы (Гильберт, Племель)

В начале предыдущего параграфа было указано, какое большое значение решению проблемы Римана придавал Гильберт. Скоро он сам возвратился к этому вопросу и искал его решение для случая $n=2$ системы линейных однородных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами с данным числом k особых точек (полюсов) на основе разрабатываемой тогда им теории линейных интегральных уравнений. Об этом

впервые (1904 г.) шла речь на третьем международном конгрессе математиков [173.2], где была приведена первая часть доказательства. В скором времени это доказательство стало предметом большой статьи, а в 1912 г. оно было помещено в десятой главе монографии [173.3]. Идея о методе доказательства высказана Гильбертом в лекциях по теории интегральных уравнений уже в зимнем семестре 1901/02 г., и его ученик О. Келлог позже в статье 1905 г. занимался этим вопросом в одном случае. Но, как отметил Племель [236.1, 211], этот опыт не был удачным.

Иосип Племель (1873—1967).

Итак, речь шла о линейном однородном уравнении второго порядка. Данные его особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$ связывались циклически в комплексной z-плоскости посредством замкнутой аналитической кривой C. Затем строились пары функций $f(z)$, $f^1(z)$, которые вели себя рационально во всей плоскости и только на отрезках кривой между z_1 и z_2, z_2 и $z_3, \ldots, z_{m-1}$ и z_m проявляли особый характер, так как их значения на внешней стороне этих отрезков получались из значений на внутренней стороне через линейные однородные комбинации с заданными комплексными коэффициентами. Решение задачи приводилось к такому определению функций

$$f_i(z), \quad f_i^1(z), \quad f_a(z), \quad f_a^1(z), \tag{16.7}$$

обладающих характером рациональных вне и соответственно внутри кривой C, что их граничные значения f_a, f_a^1, f_i, f_i^1 были бы везде на C непрерывны и соответственно для отрезков кривых между z_h и z_{h+1} $(h = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяли бы соотношениям вида

$$f_a = \gamma_1^{(h)} f_i + \gamma_2^{(h)} f_i^1, \quad f_a' = \gamma_1^{1(h)} f_i + \gamma_2^{1(h)} f_i^1, \tag{16.8}$$

где $\gamma_1^{(h)}$, $\gamma_2^{(h)}$, $\gamma_1^{1(h)}$, $\gamma_2^{1(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ — данные константы с отличным от нуля определителем. Таким образом, вопрос приводился к уже решенной Гильбертом задаче о существовании функций $f(z)$ с определенными свойствами, опираясь на теорию интегральных уравнений. Этим самым решалась задача установления системы функций с заданной группой монодромии для данного случая.

Значение этого доказательства, полученного хотя и непрямым путем, трудно преуменьшить. Важен был прогресс в решении задачи для данного случая двух уравнений и без имевших место

ограничений в работе Шлезингера. Правда, Племель (и не без оснований) считал, что введение сложных функций Грина и многих вспомогательных функций усложняли доказательство и делали его менее наглядным.

Более простое доказательство существования для общего случая n, достигающее цели без введения функций Грина, основанное на теории интегральных уравнений и использующее весьма элементарные вспомогательные средства из теории функций комплексного переменного, было предложено в 1906 г. И. Племелем и опубликовано с некоторыми дополнениями через два года [236.1]. Здесь же обсуждался вопрос о числе независимых решений, который методом Гильберта прямо не решался, тогда как способ Племеля приводил к цели без особых трудностей. При этом было установлено существование фундаментальной системы простейших «примитивных» решений

$$Y^{(i)} = [Y_1^{(i)} Y_2^{(i)} \ldots Y_n^{(i)}] \; (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16.9}$$

для которых функции $Y_k^{(i)}$ были аналитичны во всей плоскости, за исключением заданных особых точек, и давали определители $|Y_k^{(i)}|$, отличные от нуля. В то же время они могли быть представлены в области точек ветвления в форме канонических разложений указанного автором вида, определитель коэффициентов которых был отличен от нуля. Целые числа, которые входили в корни определяющих уравнений (в показатели разветвления), могли быть зафиксированы произвольно для всех точек, за исключением последней.

Через полученную таким образом примитивную фундаментальную систему линейно, с целыми рациональными коэффициентами, представлялось каждое решение при некотором простом условии относительно корней определяющих уравнений. Отсюда, в частности, следовало, что примитивная фундаментальная система удовлетворяла простой канонической дифференциальной системе без несущественно особых точек.

Примитивная фундаментальная система Племеля представляла в возможной простой форме решение системы линейных дифференциальных уравнений, так как число входящих туда констант в общем случае точно совпадало с числом независимых параметров группы монодромии. Случай, когда вместо обычной плоскости в основу рассуждений полагалась риманова поверхность, весьма искусным приемом Племель привел [236.2, 20] к уже рассмотренному. Тем самым было подведено надежное основание ранее упоминаемым исследованиям Риттера [248].

Следует отметить, что общий результат Племеля в известном смысле завершал в то время теорию систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными коэффициентами, хотя, как отметил в беседе с нами Н. П. Еругин, им не исчерпывалось полное решение проблемы

Римана в современном понимании [1]. Обстоятельное изложение проблемы Римана и других, связанных с ней вопросов, содержится в монографии Племеля [236.5].

Аналогичные исследования для систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с мероморфными коэффициентами на произвольной компактной или некомпактной римановой поверхности долгое время отсутствовали. Они нашли отражение значительно позже, в работе [249] Х. Рерля, использовавшего как методы теории функций многих комплексных переменных, так и теории комплексно-аналитических расслоений на римановых поверхностях.

§ 3. Другие методы исследования проблемы

В 1909 г. Биркгоф изучал вопрос о представлении решений системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{16.10}$$

в окрестности особых точек и доказал, что для каждой такой системы при $x=\infty$ существует эквивалентная, так называемая каноническая система. Решения последней связаны с решениями исходной системы простыми линейными соотношениями, коэффициенты которых $\lambda_{ij}(x)$ при $x=\infty$ аналитичны. Отсюда устанавливалась форма фундаментальной системы решений для (16.10). Биркгоф рассмотрел характеристику решений канонической системы в окрестности $x=\infty$, распространяя ее на решения системы (16.10).

В процессе дальнейшего изучения вопроса, он пришел к заключению о вероятной возможности обобщения проблемы Римана и на тот случай, когда особые точки системы дифференциальных уравнений являются нерегулярными. Напомним, что в классической постановке проблема Римана ограничивалась рассмотрением дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками. Подробней эта тема была освещена Биркгофом в статье [100.4]. Здесь изучалась проблема Римана для линейных дифференциальных уравнений с нерегулярными особыми точками, а также для линейных разностных и для линейных q-разностных уравнений. Биркгоф предложил обойти интегральные уравнения прямым применением метода последовательных приближений, использовав при этом множество различных упрощений.

Еще работами Племеля устанавливалась связь с функциями Прима n-го порядка. Определенный интерес для рассматри-

[1] Эта задача для ряда конкретных случаев была решена позже в работах Лаппо-Данилевского и его последователей. См. об этом в § 4.

ваемого круга вопросов представляло фундаментальное сочинение [239] Прима и Роста, трактовавшее о развитии некоторых вопросов римановой теории функции.

Несколько позже, с 1915 г., вопросами, близко связанными с проблемой Римана, стал заниматься Хаупт. В большой статье [170.1] он сперва исследует связь доказательства существования для функций Прима первого порядка с новейшими результатами Гильберта и Вейля относительно принципа Дирихле. Здесь же он сообщил о доказательстве существования и однозначности для функций Прима n-го порядка, найденном новым путем в 1920 г. Затем исследование было продолжено в направлении идей Прима и Роста о связи проблемы Римана с соответствующими краевыми задачами.

Цикл работ, трактующих решение задачи Римана и смежные с ней вопросы, принадлежат Гарнье. Эта проблема неоднократно привлекала его внимание с 1910 по 1957 год. В одной из первых работ данного цикла [157.1] автор показывает связь проблемы Римана с исследованиями Фукса 90-х годов по линейным уравнениям и с теорией нелинейных уравнений второго порядка с неподвижными критическими точками. Его метод является все же лишь обобщением способа, примененного Р. Фуксом для случая четырех существенно особых точек.

Последующие статьи Гарнье в этом направлении теснейшим образом связаны с его работами по нелинейным уравнениям второго и третьего порядка с неподвижными критическими точками. Так, уже в 1912 г. во второй части монографии [157.2] решалась одна важная задача для уравнения второго порядка в связи с проблемой Римана, а в третьей — рассматривалась связь обобщенного уравнения Р. Фукса (ε_n) с шестым уравнением Пенлеве (см. гл. IX, § 2). В процессе дальнейших исследований Гарнье получил ряд важных результатов, в том числе и решение проблемы Римана для частного случая уравнения (ε_n). Полезной в этом направлении была и его большая статья [157.3], где исследовалось поведение интеграла шестого уравнения Пенлеве в окрестности особых точек 0 и 1 посредством метода последовательных приближений. Обобщение полученных результатов Гарнье в различных направлениях находим затем в его работах [157.4—5] и др. Так, во второй из указанных работ он решал новым способом проблему Римана для линейного дифференциального уравнения второго порядка с $n+3$ особыми регулярными точками: 0, 1, ∞, t_1, t_2, ..., t_n и n особыми по виду точками λ_1, ..., λ_n. Для случая $n=1$ она была им решена уже ранее. Подробно его результаты изложены в большой статье [157.4]. Не имея возможности входить в разбор довольно сложных и порой несколько запутанных выкладок автора, отметим, что основная ее часть была посвящена обсуждению решений некоторой системы (g_n, G_n) уравнений с частными производными второго порядка (соответствующей (f_n, F_n) в его диссертации [157.2]) с не-

подвижными критическими точками. Эти решения определяли и коэффициенты основного изучаемого уравнения (ε_n). В процессе этого Гарнье пользовался весьма эффективно методом последовательных приближений и получал решения G_n в некоторой области, подчиняя их определенным начальным и граничным условиям. Полученные теоремы давали возможность изучить общее решение (g_n, G_n) в некоторой области R.

Применение к собственно римановой проблеме дается в последней (пятой) части сочинения. При заданной группе монодромии $\widehat{G}_n$ можно установить систему (g_n, G_n). Тогда дифференциальное уравнение второго порядка (ε_n) имеет группу, заведомо независимую от t_i. Выбором решений (g_n, G_n) можно так распорядиться, что они будут идентичны с $\widehat{G}_n$. Устремляя затем t_i к нулю, удается перейти от (ε_n) к (ε_{n-1}), т. е. к уравнению, имеющему на одну особую точку меньше, и соответственно к системе (g_{n-i}, G_{n-1}), которой проблема Римана для группы $\widehat{G}_{n-1}$ решена [1]. (Риманом было дано решение в случае $n=0$ — для известной P-функции). Распространение полученных результатов для линейных систем S_m в случае порядка $m \geqslant 2$ было предложено Гарнье в статье [157.6] (1956 г.). Здесь показано, что на основании изучения решений так называемой предельной системы Σ с неподвижными критическими точками можно получить решение задачи Римана, пользуясь тем же методом последовательных приближений, который применялся для той же цели в упоминаемых выше работах Биркгофа, Племеля, а потом и Гарнье.

§ 4. Алгорифмический метод решения основных проблем аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (И. А. Лаппо-Данилевский)

Введение алгорифмического метода для решения основных проблем аналитической теории линейных уравнений знаменовало весьма существенный и большой качественный скачок в ходе ее развития. После фундаментальных открытий в этой области в конце 60-х, начале 80-х и в конце 90-х годов прошлого века, в начале нынешнего века стало заметным уменьшение интенсивности новых работ, хотя временами и появлялись новые вспышки. Несколько уменьшился и всеобщий интерес к этой теории, когда часть математиков переключила свое внимание на другие предметы и решение прикладных вопросов. Здесь, как и в нелинейной теории, казались уже исчерпанными старые методы и появилась необходимость создания какого-то существенно нового метода, качественно отличного от предыдущих и такого, кото-

[1] Как отметил Гарнье, этот метод не может быть применим к группе $\widehat{G}_0$.

рый дал бы возможность значительно продвинуться вперед, осветить нерешенные или еще не вполне решенные вопросы по новому и содействовать их решению, оживить всю теорию и создать тем самым перспективы ее дальнейшего развития.

К такому поворотному пункту, к новому взлету аналитической теории привели работы ученика В. И. Смирнова, талантливого ленинградского математика И. А. Лаппо-Данилевского (109).

Его исследования, явившиеся крупным явлением в мировой литературе по данному вопросу, могут быть рассмотрены как завершающие определенный, рассмотренный нами весьма интенсивный этап развития аналитической теории линейных уравнений; они вносили в уже известные вопросы полную ясность и законченность.

Вышесказанное, естественно, не следует понимать в том смысле, что методы Лаппо-Данилевского были созданы на пустом месте. Наоборот, все предыдущее развитие теории и последние результаты в узком, рассматриваемом сейчас нами вопросе о проблеме Римана, было в известной степени подготовкой, таило в себе зародыш новой теории, способствовало ее рождению. Как на конкретные факты в этом отношении укажем на создание метода матричного исчисления и применение его в теории линейных уравнений в работах Шлезингера, на освоение операций с бесконечными определителями в работах Коха и других, на постановку общих проблем, для полного решения которых предыдущие методы не давали уже должного эффекта. А полученные порой неполные решения этих проблем, кроме аналитической виртуозности авторов, требовали привлечения или заимствования результатов из смежных теорий, отличающихся по своей природе и основные понятия которых не были традиционны для данной теории.

Однако непосредственного прототипа новой теории не было. Для ее создания следовало обладать, помимо глубоких знаний и широкой образованности, еще выдающимся талантом и большими аналитическими способностями. Ведь для решения ниже рассматриваемых задач Лаппо-Данилевским была создана по существу новая ветвь анализа, в основу которой положено понятие функциональной зависимости в области матриц. Как сам он отмечал, некоторый намек на теорию функций матриц можно встретить у Вейра (1887 г.), имея, очевидно, в виду заметку последнего [276]. Здесь рассматривались гиперкомплексные величины

$$x = \xi_1 l_1 + \xi_2 l_2 + \ldots + \xi_n l_n, \tag{16.11}$$

компоненты которых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — обычные действительные или комплексные числа. После определения правил действий изучается

вопрос об определении комплекса в форме ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu. \tag{16.12}$$

При этом рассматривались уравнения

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j l_j; \quad x^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j' l_j; \quad x^3 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j'' l_j, \ldots . \tag{16.13}$$

При исключении из них единиц получалось

$$x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \ldots + \gamma_m x = 0 \quad (m \leqslant n) \tag{16.14}$$

в предположении линейно независимыми m систем величин ξ, $\xi'', \ldots, \xi^{(m-1)}$. Было установлено, что ряд (16.12) определяет комплексную величину тогда и только тогда, когда корни уравнения (16.14), в котором x рассматривается как обыкновенное комплексное число, принадлежат области сходимости степенного ряда $\sum_{1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^\nu$. При выполнении этих условий величины, определяемые рядами вида (16.12), могли быть непосредственно записаны с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Подобные результаты получил автор и в том случае, когда вместо ряда (16.12) рассматривался более общего вида ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$. Таким образом, по существу здесь изучались степенные ряды от одной переменной матрицы с точки зрения представления ими гиперкомплексных чисел и давались условия их сходимости.

Мы указывали на применение матричного исчисления в работах Шлезингера. В его курсе [254. 12] системы двух линейных уравнений (глава V) довольно систематично рассматриваются на основе этого исчисления, в частности исследуются интегралматрицы, даются их представления в области изолированной особой точки и т. п. Здесь же (§ 39) рассматривался степенной ряд

$$e^R = I + \frac{R}{1!} + \frac{R^2}{2!} + \ldots, \tag{16.15}$$

представляющий функцию e^R, где R — матрица из четырех элементов, т. е. функцию от матрицы. Однако он не пошел дальше использования нового аппарата для упрощения выкладок в известных уже положениях аналитической теории линейных уравнений. Понятие о функции одной переменной матрицы рассматривали также Картан, Джорджи, Марти и др.

Указанные и им подобные исследования трудно назвать даже началом теории аналитических функций от матриц, ибо в основе

новой теории лежал не ряд степеней одной переменной матрицы, а ряд композиций нескольких переменных матриц. И только в последнем случае могла быть отражена характернейшая особенность нового исчисления, а именно: некоммутативность композиции, соответствующей умножению [1]. В случае коммутативности композиций таблиц (матриц) указанные далее прямые и обратные задачи теории допускали бы совершенно элементарное решение в конечном виде. Последний случай был рассмотрен Лаппо-Данилевским, давшим соответственные формулы этих конечных решений. Построенный им новый аппарат теории аналитических функций матриц может быть рассмотрен как обобщение известной теории функций комплексного переменного Вейерштрасса. Подобно тому, как в обычной теории функций значениями аргументов и функций были числа, в новой теории такими значениями являются матрицы. Степенному ряду численных аргументов здесь соответствует ряд композиций аргументов-матриц, определяющий аналитическую голоморфную функцию этих матриц в области его сходимости. Были даны основные положения исчисления таких рядов композиций, рассмотрен вопрос о подстановке ряда в ряд и об обращении рядов.

При помощи построенного метода автор исследовал — и это была общая задача всех его работ — функции, удовлетворяющие системе линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Этот обширный класс функций, заключающий в себе также все алгебраические функции, в общей градации аналитических функций следовал непосредственно за классом рациональных функций. Это обусловливало фундаментальное значение функций указанного класса как в теоретической, так и в прикладной математике.

Ввиду обширности материала, большого аналитического аппарата и множества аспектов, по которым шли исследования Лаппо-Данилевского, и в связи с ограниченностью нашего очерка здесь не представляется возможным дать сколько-нибудь исчерпывающий обзор этих работ. К тому же имеется их новое издание как на французском языке [38.5], так и на русском [38.6] с замечательной вводной статьей акад. В. И. Смирнова [66.6] и речью И. А. Лаппо-Данилевского при защите им докторской диссертации, где были изложены полученные результаты. Это в известной степени облегчает нашу работу, в которой мы рассмотрим лишь основные идеи его исследований.

Общей теорией функций, определяемых дифференциальными уравнениями с рациональными коэффициентами, И. А. Лаппо-Данилевский начал заниматься с 1927 г. и все свои фундаментальные труды создал в ближайшие 3—4 года. Главные его результаты были сообщены в 1927—1931 гг. в докладах Парижской

[1] Поэтому новую теорию нельзя было трактовать как простое формальное обобщение теории функций одной переменной матрицы.

академии, а затем в более полном виде публиковались в Математическом сборнике [38.1] и после смерти автора (15 марта 1931 г.) в трудах Математического института им. Стеклова в 1934—1935 гг.

Первые публикации Лаппо-Данилевского в 1927 г. и содержали применения нового, развиваемого им метода к алгорифмическому решению фундаментальных проблем изучаемой теории — Пуанкаре и Римана.

Как известно, по теории Фукса решение уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0 \qquad (16.16)$$

И. А. Лаппо-Данилевский (1895—1931).

определялось формулой

$$y = (x-a)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \quad (a_0 \neq 0), \qquad (16.17)$$

первый множитель которой $(x-a)^{\rho}$ (где ρ — не целое) характеризовал многозначность функции y и выражал всю особенность решения в точке $x=a$. Таким образом, особыми точками решений уравнения (16.16) при известных ограничениях, установленных Фуксом, были регулярные точки. Однако в более общем случае, например при наличии существенно особой точки, решение будет иметь и более сложный вид.

Если взять n линейно независимых решений уравнения (16.16) $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то, по принципу аналитического продолжения, после обхода вокруг особой точки $x=a$ получим новые решения того же уравнения, которые выразятся в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами через решения первоначальной фундаментальной системы. Обход каждой особой точки a_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ приведет к линейной подстановке над фундаментальной системой, которая характеризуется матрицей V_k из n^2 элементов, соответствующих коэффициентам решений первоначальной системы. Для каждой особой точки a_k будет своя матрица V_k. Последовательному обходу двух особых точек соответствует подстановка, матрица которой получается по обычным правилам умножения матриц. Совокупности всех путей на плоскости переменного x, возвращающихся в исходную (не особую) точку, будет соответствовать группа подстановок, для которой производящими являются подстановки $V_1, V_2, \ldots, V_m$. Это фундаментальная группа уравнения; иначе можно сказать, что матрицы $V_1, V_2, \ldots, V_m$ образуют группу монодромии уравнения

(16.16). Очевидно, что они характеризуют многозначность взятого решения. Но последнее в особых точках a_i может иметь и однозначную существенную особенность. В выражении решения уравнения (16.16), построенном Пуанкаре

$$y = e^{\frac{\alpha}{x-a}} (x-a)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \qquad (16.18)$$

указанная особенность должна была заключаться в множителе $e^{\frac{\alpha}{x-a}}$, но ряд, входящий в выражение (16.18), будет вообще говоря расходящимся и при помощи его можно лишь изучить поведение некоторого y, когда x стремится к a по определенному направлению или в некотором секторе. Таким образом, это выражение не представит точной характеристики разветвления или существенной особенности решения вблизи особой точки.

В связи с этим встала проблема для уравнения вида (16.16) или для системы линейных уравнений первого порядка, т. е. при данной конфигурации особых точек и матрице коэффициентов системы, построить такое аналитическое выражение, которое представляло бы указанные решения во всей области их существования на плоскости аргумента и выявляло бы характер их зависимости от коэффициентов системы и конфигурации ее особых точек. Это так называемая основная прямая проблема. Но здесь возникает и вторая задача — указать полную аналитическую характеристику особенностей решений в каждой особой точке уравнения или системы. Частным ее случаем является построение явных аналитических выражений для матриц, производящих группу монодромии. Кроме того, напомним, что Пуанкаре поставил задачу об исследовании группы уравнения от параметров, входящих в его коэффициенты. Анализ прямых задач сводился в существенной части к исследованию зависимости матрицы решений, матриц, производящих группу монодромии, и так называемых характеристических матриц в каждой особой точке, связанных со второй задачей, от матриц коэффициентов данной системы уравнений. Задача вторая впервые четко сформулирована Лаппо-Данилевским.

К указанным прямым проблемам, которые до Лаппо-Данилевского полностью не были решены, следует добавить еще и основную обратную проблему, поставленную Риманом, где речь шла о построении дифференциального уравнения по заданной группе монодромии и при заданных особых точках. Она рассматривалась Лаппо-Данилевским в более общей форме как задача о построении матрицы функций рассматриваемого класса, имеющей особенности данного типа в данных точках, и о восстановлении системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, которой эта матрица удовлетворяет. Решение классической задачи сводилось к исследованию

зависимости матрицы решений регулярной системы дифференциальных уравнений и матрицы коэффициентов этой системы от заданных матриц, производящих группу монодромии. Анализ поставленной Лаппо-Данилевским общей задачи сводился к исследованию зависимости матрицы решений и матриц коэффициентов систем дифференциальных уравнений от данных характеристических матриц.

Указанные проблемы до работ Лаппо-Данилевского, как известно, уже рассматривались и решались, но далеко не полностью, а иногда и методами, зависящими от некоторых неаналитических функций — доказательство Гильбертом проблемы Римана и т. п. В последнем случае оставался не выясненным характер многозначности решений. Полное решение указанных проблем в алгорифмической форме было дано И. А. Лаппо-Данилевским.

Для большей симметрии и более широкого и удобного пользования матрицами вместо уравнения (16.16) можно рассматривать систему n уравнений первого порядка в нормальной форме

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}(x)\, y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16.19}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые, а $p_{ki}(x)$ — аналитические функции от x. Фундаментальная система для (16.19) представится квадратной матрицей $Y(x)$, построенной на элементах $y_{ik}(x)$, когда $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначая матрицу коэффициентов через $P(x)$, систему (16.19) можно записать в форме

$$\frac{dY(x)}{dx} = Y(x)\, P(x). \tag{16.20}$$

Как аппарат для исследования этой системы и применялась теория функций от матриц. Но в тот период эта теория только лишь зарождалась. Поэтому Лаппо-Данилевский должен был прежде всего построить все основные элементы этой теории, разработать схемы операций и т. д. Исходя из известных определений суммы матриц, произведения матрицы на число и на матрицу (последнее некоммутативно, что вело к ряду осложнений) и предела последовательности матриц, определялась аналитическая функция [1], например, от матриц $U_1, \ldots, U_m$ как ряд вида

$$\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu} U_{i_1} U_{i_2} \ldots U_{i_\nu} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}. \tag{16.21}$$

В частности, эта функция могла быть целой или мероморфной [2]. Рассматриваются также и функции от бесконечной последова-

[1] В более простом случае может быть рассмотрена функция от одной матрицы.

[2] Если эта функция мероморфна от U, то ее представление (16.21) изменится вне окрестности нулевых $U_1, U_2, \ldots, U_m$.

тельности матриц, что имело применение в теории бесконечных систем дифференциальных уравнений.

Степенные ряды могут строиться как по степеням матриц X, так и по степеням $(X-A)$, где A — постоянная матрица, в случае функции от одной матрицы, а также для случая нескольких матриц и для случая счетного множества матриц. Рассматриваются операции со степенными рядами от счетного множества матриц. Аппарат степенных рядов от матриц и построенные на его основании представления функций играют основную роль во всем изложении теории систем линейных дифференциальных уравнений.

Если, применяя аппарат функций от матриц для решения какой-либо задачи этой теории, можно было выразить искомую величину в форме сходящегося ряда, коэффициенты которого последовательно вычислялись, то по Лаппо-Данилевскому считалось, что решение задачи доведено до конца, и оно называлось алгорифмическим.

Построенный метод прилагался, прежде всего, к решению прямых задач. Впрочем, уже в 1927 г. И. А. Лаппо-Данилевский сообщил об алгорифмическом решении как проблемы Пуанкаре, так и проблемы Римана.

При этом рассматривалась так называемая регулярная система уравнений с рациональными коэффициентами

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a_j}, \tag{16.22}$$

где $U_j (j=1, 2, \ldots, m)$ — постоянные матрицы, называемые соответственно дифференциальными подстановками в точках a_j. Фундаментальная интегральная матрица системы (16.22) называется потом регулярной интегральной матрицей.

Задачу Пуанкаре Лаппо-Данилевский расчленяет на следующие три: а) представление регулярной матрицы $Y(x)$ по всей области ее существования; в) построение интегральных подстановок в точках a_j; с) полная аналитическая характеристика особенностей регулярной матрицы, относящаяся не только к ветвлению, но и к однозначным особенностям. Как известно, задача в) впервые рассмотрена Пуанкаре [237.9]. Он показал, что элементы группы монодромии системы (16.22) есть целые функции коэффициентов, но не дал, однако, явного выражения этих функций. Исследования Пуанкаре, как и работа Миттаг-Леффлера [218.2], касались скорее определения инвариантов групп линейных уравнений, коэффициенты которых — алгебраические (Пуанкаре) или однозначные аналитические функции с конечным числом особых точек в ограниченной области комплексной переменной (Миттаг-Леффлер).

Лаппо-Данилевский установил явные аналитические выражения элементов интегральных подстановок $(V_j)_{kl}$, откуда стано-

вился очевидным характер их зависимости от коэффициентов $(U_j)_{kl}$ и от конфигурации особых точек.

При алгорифмическом решении задачи Пуанкаре была введена система функций комплексного переменного x, названная гиперлогарифмами первого рода конфигурации особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ [1] и которые для начальной точки b, отличной от $a_1, a_2, \ldots, a_m$, определялись рекуррентными соотношениями

$$L_b(a_{j_1} \mid x) = \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \log \frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}}; \tag{16.23}$$

$$L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dx.$$

Гиперлогарифм можно рассматривать по Лаппо-Данилевскому как однозначную функцию на универсальной поверхности наложения с точками разветвления $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$ логарифмического типа. Функции (16.23) будут однозначны на плоскости с непересекающимися разрезами $(a_1, \infty); (a_2, \infty); \ldots; (a_m, \infty)$. Из рекуррентных соотношений (16.23) можно получить разложение гиперлогарифма по степеням $(x-b)$ внутри круга с центром b и радиусом, равным наименьшему из расстояний от точки b до точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Фиксируя точку b на одном из листов и обозначая через σ длину пути (bx) на поверхности $\mathfrak{C}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, соединяющего точки b и x, и через δ — минимальное расстояние от этого пути до точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, можно получить очевидные оценки

$$|L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)| < \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu.$$

Если обозначить через b_j точку с комплексной координатой b, которая расположена на другом листе поверхности $\mathfrak{C}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ и которая получается при обходе в положительном направлении точки a_j, пересекающем только один раз только один разрез, то значения гиперлогарифмов в точке b_j, представляемые интегралами

$$L_b(a_{j_1} \mid b_j) = \int_{(a_j)} \frac{dx}{x - a_{j_1}} = P_j(a_{j_1} \mid b); \tag{16.24}$$

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b_j) = P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dx,$$

называются параметрами конфигурации точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Если регулярная матрица в точке b обращается в единичную матрицу, то она называется нормированной в точке b.

[1] Функции такого вида упоминались в указанной работе Пуанкаре.

В этих символах решение системы (16.22) определяется теоремой 1 [38.6, 142]. Регулярная матрица, нормированная в точке b и имеющая дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, является целой функцией дифференциальных подстановок, представляемой разложением в ряд

$$Y_b(x) = \Phi_b \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| x \Big) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1}, \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | x), \qquad (16.25)$$

коэффициенты которого есть гиперлогарифмы конфигурации точек $a_1, \ldots, a_m$. Этот ряд сходится равномерно относительно x и представляет регулярную матрицу в каждой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри и на границе точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Дифференцируя этот ряд почленно и пользуясь соотношениями (16.24), получаем

$$\frac{dY_b}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x) U_j}{x - a_j}.$$

Отсюда видно, что ряд (16.25) представляет регулярную матрицу, имеющую дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Она, очевидно, нормирована в точке b. Результат теоремы 1 есть по существу не что иное, как результат решения системы дифференциальных уравнений (16.22) с помощью метода последовательных приближений. Благодаря матричному исчислению он представляется по Лаппо-Данилевскому в виде ряда композиций, причем этот вид является весьма наглядным и удобным для дальнейших исследований, ибо он дает алгорифмическое представление требуемых функций во всей области их существования и делает вполне очевидной природу их зависимости от переменной x, от дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и от конфигурации особых точек $a_1, a_2 \ldots, a_m$.

Из доказанной теоремы вытекали простые оценки регулярной нормированной матрицы, имеющей заданные дифференциальные подстановки, удобные способы для проведения вычислений, а также следовала теорема 2 об обратной матрице $Y_b^{-1}(x)$.

При подходе к построению интегральных подстановок автор отметил, что из их определения и из условия нормированности регулярной матрицы $Y_b(x)$ в точке b следовало, что интегральная подстановка V_j матрицы $Y_b(x)$ представлялась значением этой матрицы $Y_b(x)$ в точке b_j поверхности $\mathfrak{C}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ с комплексной координатой b, в которую можно прийти, отправляясь из b и обходя особую точку a_j вдоль простой петли. Следо-

вательно, полагая в разложении (16.25) $x=b_j$ и принимая во внимание соотношения (16.24), получаем фундаментальную теорему 3 [38.5, 147] о представлении интегральных подстановок рядом композиций дифференциальных подстановок. Интегральная подстановка в точке a_j регулярной матрицы, нормированной в точке b и имеющей дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, есть целая функция дифференциальных подстановок, представляемая разложением

$$V_j = \Omega_j \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b = \\ = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} P_j (a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b). \qquad (16.26)$$

Матрица V_j^{-1}, обратная интегральной подстановке, являлась также целой функцией дифференциальных подстановок, представляемой соответственным рядом.

Перейдя к непосредственному изучению особенностей регулярных матриц, Лаппо-Данилевский предположил сначала, что дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ находятся в окрестности нулевых матриц. Тогда соответствующие интегральные подстановки $V_1, V_2, \ldots, V_m$ принадлежат некоторой окрестности системы единичных матриц и введенные им так называемые «показательные подстановки» (нормированных матриц $Y_b(x)$ в особой точке a_j) матрицы W_j, связанные с V_j соотношениями

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} L_n V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^\nu, \qquad (16.27)$$

являются голоморфными [1] функциями подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в указанной окрестности.

Тогда полная аналитическая характеристика особенностей регулярной нормированной матрицы дается теоремой 4: если подстановки U_j находятся в окрестности нулевых матриц, то регулярная матрица $Y_b(x)$, нормированная в точке b и имеющая в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в качестве дифференциальных подстановок U_j, может быть представлена в виде

$$Y_b(x) = \Phi_b \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x = \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j} \widetilde{\Phi}_b^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x = \\ = \Phi_b \begin{pmatrix} W_j \\ a_j \end{pmatrix} x \widetilde{\Phi}^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x, \qquad (16.28)$$

[1] В окрестности нулевых матриц они будут мероморфными функциями.

где матрицы

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \widetilde{\Phi}_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} \quad (16.29)$$

и $\widetilde{Y}_b^{(j)-1}(x)$ — голоморфны по отношению к x в точке $x = a_j$; не существует других подстановок W_j, обладающих указанным свойством и отличных от суммы ряда (16.27).

Это представление вскрыло характер зависимости матрицы решений не только от аргумента, но и от коэффициентов системы и от конфигурации особых точек. Затем было показано, что матрицы $W_1, W_2, \ldots, W_m$ вполне определялись с помощью условий теоремы; они давали полную аналитическую характеристику регулярной нормированной матрицы (16.25) в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. После этого доказывается (теорема 5), что если дифференциальные подстановки регулярной матрицы $\Phi\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x\Big)$, определяемой начальным условием $\Phi\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b\Big) = C$, $D(C) \neq 0$, находятся в окрестности нулевых матриц, то существует одна и только одна система показательных подстановок $W_1, W_2, \ldots, W_m$, обладающая тем свойством, что имеет место представление

$$\Phi\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x\Big) = (x - a_j)^{W_j}\widetilde{\Phi}^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x\Big), \quad (16.30)$$

где матрицы

$$\widetilde{\Phi}^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x\Big) \text{ и } \widetilde{\Phi}^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x\Big)^{-1}$$

остаются голоморфными в точке $x = a_j$.

Большой интерес представляли понятия метаканонической матрицы $\Theta_j(x)$ и метаканонических показательных подстановок, на основе которых строилась регулярная матрица, не содержащая параметра точки нормирования b [66.6, 11].

Вышеуказанные задачи исследованы и в случае бесконечно удаленной точки. Существенные дополнения к теории регулярных систем (16.22) содержались в [38.2] и следующих мемуарах.

В этом же мемуаре и соответственно в статье четвертой [38.6] и в ряде последующих в широком аспекте изучается обратная задача, состоящая в выражении матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в виде рядов композиций матриц $W_1, \ldots, W_m$ и представлении затем матриц $Y_b(x)$, $\overline{\Theta}_j(x)$, $[\overline{\Theta}_j(x)]^{-1}$ как функций показательных подстановок $W_1, \ldots, W_m$, если эти подстановки принадлежат некоторой окрестности нулевых матриц. Задача решалась способом обращения найденных ранее рядов, представляющих показатель-

ные подстановки W_j матрицы $Y_b(x)$, как функций дифференциальных подстановок $U_1, \ldots, U_m$, и сходящихся, если U_j близки к нулевой матрице. Ранее было показано, что для каждой особой точки $x=a_j$ существует единственная подстановка H_j такая, что система (16.22) имеет интегральную матрицу вида

$$\Theta_j\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} = (x-a_j)^{H_j}\bar{\Theta}_j\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix}. \quad (16.31)$$

Полученный теперь основной результат для обратной задачи записывался в форме ряда

$$U_j(b) = H_j\begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b), \quad (16.32)$$

где коэффициенты $R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b)$ определялись рекуррентными соотношениями

$$R_j(a_j \mid b) = 1; \; R_j(a_{j_1} \mid b) = 0, \quad \text{если } j_1 \neq j;$$

$$R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = -\sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_{\mu-1}<\nu} \times$$

$$\times R_{h_1}(a_{j_1} \ldots a_{j_{k_1}} \mid b) R_{h_2}(a_{j_{k_1+1}} \ldots a_{j_{k_2}} \mid b) \ldots$$

$$\ldots R_{h_\mu}(a_{j_{k_{\mu-1}+1}}) \ldots a_{j_\nu} \mid b) \times Q_j(a_{h_1} \ldots a_{h_\mu} \mid b), \quad (16.33)$$

где

$$Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0<k_1<\ldots<k_{\mu-1}<\nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} \times$$

$$\times P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{k_1}} \mid b) \ldots P_j(a_{j_{k_{\mu-1}+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid b).$$

Ряды (16.32) представляли голоморфные функции подстановок $W_i, \ldots, W_m$ в окрестности нулевых подстановок и обозначались через $U_j(b)$, так как их коэффициенты зависели от точки нормирования b. Если подставить выражения (16.32) в ряд (16.25) и воспользоваться теоремой о подстановке рядов, то можно получить для интегральной нормированной матрицы выражение в виде ряда композиций по показательным матрицам.

Далее следовало изучить матрицы U_j как функции от матриц W_j и представить их во всей области существования [1]. Эта зада-

[1] В этом и заключалось полное решение проблемы Римана.

ча была решена Лаппо-Данилевским для случая системы Гаусса.

В той же работе [38.6] было получено интересное заключение о том, что регулярные интегральные матрицы можно рассматривать или как функции их дифференциальных подстановок, или как функции их показательных подстановок. Указанные две точки зрения приводят к соответствующим соотношениям.

В фундаментальной работе [38.3], которой соответствует в [38.6] статья пятая, рассматривался и решался тот же круг проблем, что и для регулярных систем (16.22), но для систем дифференциальных уравнений более общего вида — с произвольными рациональными коэффициентами, которые соответствующим преобразованием независимой переменной могли быть приведены к виду

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{YU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}, \tag{16.34}$$

где элементы $\{U_j^{(r)}\}_{kl}$ дифференциальных подстановок, как и параметры a_j, определяющие конфигурацию особых точек на конечном расстоянии, не зависят от x. Интегральная матрица $Y(x)$ системы (16.34) называлась матрицей рационального определения ранга $(s-1)$ с дифференциальными подстановками $U_j^{(1)}, \ldots, U_j^{(s)}$ в особых точках $a_j (j=1, 2, \ldots, m)$. Матрица рационального определения ранга нуль была, очевидно, регулярной. Как и в предыдущих работах, здесь четко сформулированы подлежащие решению проблемы и дана их исчерпывающая трактовка.

Решение проблемы Римана для системы Гаусса — предмет девятой статьи монографии [38.6]. Здесь для системы

$$\frac{dY}{dx} = Y\left(\frac{U_1}{x-a_1} - \frac{U_2}{x-a_2}\right) \tag{16.35}$$

определяются U_1, U_2 в виде ряда по заданным показательным подстановкам W_1 и W_2, которые считаются не лежащими в окрестности нулевой матрицы. Из явного решения задачи выясняется и подробно исследуется характер многозначности зависимости U_1, U_2 от W_1, W_2.

Вышеизложенный круг решенных Лаппо-Данилевским проблем и указанные здесь результаты, далеко не исчерпывающие всех его достижений, дают представление о том огромном вкладе, который он внес в математическую науку нашего века. Значение полученных им результатов, особенно создание нового аппарата функций от многих матриц и построенных методов, трудно переоценить. Оно вполне сравнимо с результатами и значением работ самых крупных математиков прошлого века.

После работ Лаппо-Данилевского намечается новый взлет и новое оживление в аналитической теории линейных дифферен-

циальных уравнений. Эпицентр ее дальнейшего развития перемещается, естественно, в то место, где зародились новые идеи и была построена новая столь плодотворная теория. В Ленинградской математической школе, такой богатой научными традициями, появилось новое, довольно мощное научное направление, у истоков которого стоял замечательный ученый и педагог, академик В. И. Смирнов. Лучшие ученики и сотрудники более поздней генерации — Н. Е. Кочин, Н. П. Еругин, Б. Л. Крылов, Л. М. Шифнер и др.— подхватили эстафету и, применяя методы Лаппо-Данилевского, получили ряд новых, очень важных результатов. Хотя обзор этих работ и не входит в нашу задачу, мы все же кратко напомним о некоторых дальнейших достижениях в этой области, в том числе и по изучаемой в данном параграфе проблеме.

Здесь прежде всего следует отметить существенное продвижение в ряде фундаментальных вопросов другого талантливого ученика В. И. Смирнова, активного участника ленинградского семинара по разработке идей Лаппо-Данилевского, академика АН БССР Н. П. Еругина (110). Если иметь в виду систему

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{k=-m}^{\infty} YP_k (x-a)^k, \tag{16.36}$$

где a — иррегулярная особая точка, то Лаппо-Данилевский строил матрицу показательных подстановок W в виде ряда композиций от матриц P_k, сходящегося в окрестности нулевых значений P_k. Этим самым была решена проблема Пуанкаре о представлении W как функции P_k в случае нулевой иррегулярной особой точки. Аналогичная проблема для случая произвольной иррегулярной особой точки оставалась нерешенной. Не были разъяснены и особенности показательных подстановок. Но уже в середине 30-х годов Н. П. Еругин [25.1.—2] построил в явном виде, опираясь на идеи и методы Лаппо-Данилевского, общее (генеральное) представление W, т. е. при всех значениях матриц P_k, а не только при малых. Было также доказано, что W в общем случае (в отличие от рассмотренного Лаппо-Данилевским) будет уже бесконечнозначной функцией от матриц P_k. Таким образом, была решена проблема Пуанкаре для иррегулярной особой точки a системы вида (16.36) и изучены в этом случае аналитические свойства функций W. Подробные выкладки выполнены для системы

$$Y' = Y\left[\frac{U_1}{(x-a_1)^{m_1}} + \frac{U_2}{(x-a_2)^{m_2}}\right],$$

где U_1, U_2 — постоянные матрицы второго порядка. Здесь же были просуммированы ряды композиций для Y, V, W.

Н. П. Еругин (род. 1907).

В то же время Н. Е. Кочин исследовал в [71.2] связь между различными системами характеристических подстановок в особой точке a_j одной и той же интегральной матрицы $Y(x)$, а также связь между двумя матрицами $Y(x)$ и $\overline{Y}(x)$, удовлетворяющими уравнениям типа (16.34) и имеющими во всякой особой точке, лежащей на конечном расстоянии, одни и те же характеристические подстановки. Она дается в форме установления необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты двух уравнений вида (16.34). Частный случай задачи Римана для двух особых точек a_1, a_2 на конечном расстоянии, когда матрицы W_1 и W_2 удовлетворяли условиям $[W_1[W_1W_2]]=0$, $[W_2[W_1W_2]]=0$, Кочин решил в конечном виде [33.1]. Решение задачи Римана для системы Гаусса при более общих предпосылках относительно U_1, U_2 впервые дано Н. П. Еругиным в 1939 г.

Дальнейшее развитие некоторых результатов Лаппо-Данилевского — более простое, полное и ясное решение проблемы Римана для системы Гаусса — находим в большом исследовании [34] Б. Л. Крылова (111), где отражены и использованы результаты его предыдущих работ.

Теория функций от матриц положена в основу фундаментальной работы Н. П. Еругина [25.3], где построена теория приводимых систем вида $\frac{dY}{dx}=Y\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^{-k}$ (A_k — постоянные матрицы) на основе идей Ляпунова, связанных с его известным первым методом [43.2]. При этом предложен метод построения интегральной матрицы Y в окрестности иррегулярной особой точки $t=\infty$ в виде рядов, равномерно сходящихся в области $t>0$. Эта работа продолжена и развита далее в трудах В. В. Хорошилова, Л. И. Донской, Ф. Ф. Гантмахера [25.6, 66—67].

В работе [88.1] Л. М. Шиффнер показал, что метод Лаппо-Данилевского для систем линейных уравнений может быть применим и для дифференциального уравнения n-го порядка (и фуксового класса), хотя здесь необходимо дополнительное исследование сходимости полученных рядов. В то же время он рассмотрел ряды Тейлора и Лорана в теории функций от элементов матриц, решая задачу Пуанкаре [88.2] для одного дифференциального уравнения второго порядка с особыми точками типа фуксовых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели, опираясь на значительный фактический материал, историю различных ветвей анализа, совокупность которых объединяется понятием аналитической теории дифференциальных уравнений. К концу прошлого и началу нынешнего века наряду с другими новыми течениями она заняла одно из центральных мест в общем потоке математических исследований.

Рассматриваемая теория развивалась в тесном контакте и на основе теории функций комплексного переменного. Эта ее особенность обусловила и широкий простор для исследований, и получение более общих результатов, и новые применения как в других отраслях науки, так и в различных прикладных вопросах, и, наконец, приток свежих творческих сил для решения новых назревших, более интересных и сложных задач. Уже в конце XVIII века ощущалась ограниченность теории функций действительных величин в одномерной области. И дальнейший переход к двумерной области комплексного переменного был существенным продвижением и качественным скачком, когда были вскрыты более глубокие закономерности, найдены новые важные связи и взаимоотношения, ответы на многие неясные ранее вопросы в действительной области. На фоне этого аналитическая теория дифференциальных уравнений может быть рассмотрена в определенном смысле как дальнейшая более высокая ступень абстракции по сравнению с тем, что имелось в классической теории раньше. При этом наблюдалось весьма характерное явление, состоящее в том, что проходило более глубокое изменение самого предмета исследования, а не только методов последнего. Этому способствовало и то, что были сформулированы и доказаны теоремы существования [1] решений (в форме аналитических функций) дифференциальных уравнений, в которых мы

[1] Н. Бурбаки [11, 36] отмечает центральную роль, которую сыграло понятие «существование» в различных философско-математических построениях в начале нашего века.

видим истоки новой теории. Дальнейший шаг состоял в исследовании тех случаев, когда метод Коши оказывался недостаточным. При этом выявлены случаи, когда и новый подход к решению задачи не был особенно эффективным, в частности при наличии в интегралах уравнений существенно особых точек. Таким образом, пришлось далее отказаться от локальной точки зрения, которая была еще характерна для трактата Форсайта и многих других современных ему работ, и соответственно расширить область исследования и перейти к изучению трансцендентных особенностей, расположенных во всей комплексной области, в том числе и на бесконечности. При этом оказалось, что аналитическая теория дифференциальных уравнений ставила новые задачи, новые вопросы, требовавшие основательного изучения, и влияла на развитие теории аналитических функций. Новые задачи и новый подход к изучению интегралов в расширенной плоскости комплексного переменного стимулировали развитие асимптотических и качественных методов и ряда других смежных дисциплин. Этот фактор является одним из важнейших результатов развития рассматриваемой теории. Именно аналитическая теория дифференциальных уравнений в идейном смысле послужила основой создания качественных методов исследования и качественной теории дифференциальных уравнений. Построение основ этой теории является заслугой А. Н. Ляпунова и А. Пуанкаре. Ляпунов поставил и в очень широком классе случаев с полной строгостью разрешил одну из важнейших задач этой теории — об устойчивости движения. Пуанкаре поставил общую задачу качественного исследования дифференциальных уравнений и их систем. Интенсивное развитие теории устойчивости движения проводилось затем в работах многих советских и зарубежных математиков.

Широко развивалась также и общая качественная теория дифференциальных уравнений в исследованиях главным образом Коттона, Перрона, Биркгоффа, Дюляка, Бендиксона, Брауэра, Кунина, а позже В. В. Степанова, В. В. Немыцкого, А. Я. Хинчина и многих других. Основы применения ее к колебательным явлениям физики стали разрабатываться с 1926 г. под руководством А. А. Андронова, возглавившего Горьковскую математическую школу.

В тесной связи с развитием качественных методов в анализе находилось зарождение и дальнейшее совершенствование аналогичных методов в геометрии. Мы имеем в виду топологию, творцом которой как новой области математики был Пуанкаре. Он рассматривал топологию как мощный инструмент для решения фундаментальных проблем, возникающих в теории функций комплексного переменного, в теории дифференциальных уравнений и в самой геометрии. Вместе с этим был открыт для математики и целый мир новых качественных проблем, по своему существу недоступный, как отметил П. С. Александров, не толь-

ко методам, но и самому мировоззрению классической математики, в центре внимания которой была формула и вычисление. Здесь же открывалась возможность не только применять новые методы исследования, но и, что особенно важно, новым способом рассматривать предмет. Качественная теория дифференциальных уравнений, как и собственно топологические работы Пуанкаре, свидетельствует о том, как совершенно по-новому он, выдающийся представитель классической математики, умел подчинить классические объекты математики новым проблемам.

В то же время им был получен на основе новых идей ряд фундаментальных результатов в аналитической теории дифференциальных уравнений. Весьма вероятно, что заметив плодотворность новых принципов в анализе, Пуанкаре решил распространить их и в область геометрии.

В исследованиях гипергеометрической функции, как упоминалось ранее, существенное место занимал вопрос о распределении ее корней. Выработанные здесь методы и найденные результаты в определенной степени содействовали развитию и решению известной проблемы Рауса—Гурвица, поставленной для одного частного случая Максвеллом в 1868 г. Существенный вклад в решение этой проблемы внесли Раус (1877 г.), Гурвиц (1895 г.) и другие математики.

Различные аспекты этой проблемы и ее обобщения для случая целых трансцендентных функций изложены в известной монографии Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана.

В тесной связи с аналитической теорией дифференциальных уравнений, как и с теорией функций комплексного переменного, находится операционное исчисление, истоки которого восходят еще к идеям Лейбница и его ближайших последователей. Здесь широко используется метод отображения и другие, имевшие место в указанных нами теориях.

О связи аналитической теории дифференциальных уравнений и алгебры у нас шла речь в гл. XIII и ряде других мест.

Ярким примером применения методов аналитической теории дифференциальных уравнений к решению классической задачи механики — о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки — была известная работа С. В. Ковалевской [29.2]. По-видимому здесь впервые столь четко были привлечены идеи теории аналитических функций к решению механической задачи. Кроме того, как отметил В. В. Голубев, и сама задача интегрирования уравнения получила совершенно новую и оригинальную постановку, характерную для аналитической теории дифференциальных уравнений. Как весьма замечательный факт отметим обобщение области разложения функции на всю комплексную плоскость переменного t, впервые примененное в задаче Ковалевской и представляющее собой замечательное чисто математическое обобщение первоначальной механической задачи, весьма характерное вообще для применений методов со-

временной теории функций в прикладных вопросах. Эта идея в дальнейшем была успешно использована Пуанкаре и позже Зундманом и другими в задаче трех тел, а также Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в задачах прикладной аэромеханики.

Таким образом открывался путь применения в механике методов современного анализа. Вместе с тем ставился и новый математический вопрос об исследовании условий, когда решение задачи имеет дополнительный первый интеграл, являющийся алгебраической и однозначной функцией своих аргументов.

У нас шла речь об асимптотическом представлении интегралов дифференциальных уравнений в главе XII. Общая теория асимптотических функций и асимптотических рядов получила особенно интенсивное развитие с 20-х годов нашего века. Здесь уместно напомнить о работах Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, давших новое оригинальное определение асимптотической последовательности, о развитии Н. Н. Боголюбовым и его учениками ряда ассимптотических методов и их важнейших применений для различных проблем математики, техники, нелинейной механики и динамической теории в статической физике. В трудах Ю. Д. Соколова дана разработка асимптотических решений дифференциальных уравнений и их приложений к задачам механики. В дальнейшем эта теория разрабатывалась в трудах многих советских и зарубежных математиков.

Развитие и новые задачи аналитической теории дифференциальных уравнений привели к весьма существенному расширению всей теории функций и новым взглядам на ее цели и задачи, к более глубокой постановке вопроса об объектах ее изучения. Определение функций их особыми точками, изучение тех классов функций, которые обладали одними и теми же довольно простыми видами особых точек, послужило основой открытия различных типов новых трансцендентных. В процессе изложения было показано, в какой тесной связи с теорией дифференциальных уравнений находятся эллиптические, гипергеометрические, абелевы, автоморфные функции. Это же касается и различных специальных функций математической физики. С аналитической теорией дифференциальных уравнений связаны также и важнейшие задачи теории конформного отображения.

Через теорию дифференциальных уравнений более отчетливо и прозрачно устанавливалась связь теории функций комплексного переменного с такими физическими дисциплинами, как гидродинамика, теория электричества, аэродинамика и др. Более того, некоторые закономерности, характерные для этих прикладных наук, существенно помогали и влияли на построение теории функций. Так, у Римана гидродинамические соображения стали эвристическим методом, позволившим наметить общие пути и методы математических исследований, а также придавшим его результатам исключительную наглядность.

Представляет интерес развитие теории инвариантов. Здесь

исследования начинались от рассмотрения формальных процессов для нахождения инвариантов; затем (80—90-е годы XIX века) после изучения инвариантов линейных дифференциальных уравнений наметилось распространение этой теории и на случай нелинейных дифференциальных уравнений. В последнее время эта теория испытывает новый качественный скачок в связи с расширением объектов ее изучения. Появилось особенно много работ по изучению инвариантов матриц и применении их к некоторым задачам качественной теории [63].

В процессе развития аналитической теории дифференциальных уравнений были выработаны различные общие методы, найдены весьма объединяющие принципы (применение теории групп, алгорифмический метод и т. д.) для исследования интегралов различных типов уравнений, но вместе с тем следует отметить, что стремление найти общее правило, пригодное для интегрирования всех дифференциальных уравнений в различных случаях, было бы столь же ошибочным, как, например, поиск универсального лекарства в медицине, годного для исцеления от всех болезней. И в дальнейшем развитии теории имеет место эффективность различных подходов при изучении того или иного принципиального вопроса. В этом выражалось диалектическое единство, взаимосвязь общего и частного, проявления общего в частном.

После работ Пенлеве, его учеников Бутру, Гарнье, Гамбье, Шази и других к началу 20-х годов нашего века сложилось впечатление, что в аналитической теории нелинейных уравнений наступило некоторое затишье, а теория уравнений Пенлеве считалась законченной. Работы в этой области в 20—30-е годы продолжали Петрович, Мальмквист, Гарнье и др. Значительное место в тот период стали занимать работы Хукугары, Иосиды, Зарембы, Шеффера, Бюро и др. Заметное оживление в этой области наметилось с 1950 г. благодаря работам Еругина и его выдающихся сотрудников по Минской математической школе. Уже в 1952 г. Н. П. Еругин высказал мнение, что теорию уравнений Пенлеве нельзя считать законченной, в частности относительно расположения их полюсов на комплексной плоскости; нерешенным оставался вопрос об общем представлении решений этих уравнений во всей области их существования и ряд других. К настоящему времени они решены [25.11, 482]. В работах Н. П. Еругина был построен новый метод исследования, давший возможность изучить характер особых точек некоторых классов систем более общего вида, чем системы, эквивалентные уравнениям (8.18). Были указаны классы таких систем вида (8.25), которые не имеют подвижных особых точек типа существенно особых, и дан метод исследования и построения решений в окрестности особых подвижных точек этих уравнений. Очень важным достижением было установление факта о том, что решения второго уравнения Пенлеве являются решениями некоторых

уравнений первого порядка. Н. П. Еругин, а также С. Г. Кондратеня указали классы систем вида (8.25), все подвижные особые точки которых алгебраические. Существенное дополнение теории уравнений Пенлеве предложил Н. А. Лукашевич [42]. Более глубокое изучение теории систем двух нелинейных уравнений первого порядка, в частности их классификацию, изучение подвижных особых точек их решений и др. провел в [92] А. И. Яблонский [25.9].

Замечательные исследования И. А. Лаппо-Данилевского в области аналитической теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений продолжали Н. Е. Кочин, Б. Д. Вержбицкий, Н. П. Еругин, Б. Л. Крылов, Л. М. Шифнер и др. С 1932 г. их усилия были объединены в ленинградском семинаре под руководством В. И. Смирнова. В начале 40-х годов особого успеха добился Н. П. Еругин благодаря синтезу метода Лаппо-Данилевского с идеями Ляпунова. В его монографии [25.4] весьма глубоко развивается метод Лаппо-Данилевского и аппарат аналитической теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в применении к теории систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими вещественными коэффициентами. Тут нашел дальнейшее развитие и ряд плодотворных идей А. М. Ляпунова. Позже в этом направлении научно-исследовательскую работу вели Ю. С. Богданов, В. П. Басов, В. В. Хорошилов, Л. И. Донская, А. П. Тузов, В. И. Зубов, В. А. Плисс и др. [25.10, 466 и след.]. С 1956 г. получила развитие под руководством Н. П. Еругина Минская математическая школа. С 1965 г. в Минске стал выходить широко известный журнал «Дифференциальные уравнения». Аналитическая теория линейных уравнений за рубежом была предметом исследований также Ольсена, Гронека, Литтенмейера, Хилле, Нагумо, Гарнье и многих других.

Как уже отмечалось во введении, аналитическая теория дифференциальных уравнений развивалась под влиянием двух основных факторов, под которыми понимается внутренняя логика развития предмета и внешних запросов, в данном случае со стороны механики, астрономии и теории специальных функций. Такое подразделение имеет, в известной степени, условный характер, так как совокупность факторов, охватываемых понятием внутренней логики, в большой мере также определяется (но в более опосредственной форме) внешними явлениями и в том числе материалистическими законами развития самой логики, глубоко пронизывающей всю математическую науку. К тому же так называемые внешние запросы могут быть рассматриваемы как внутренние по отношению к развитию всего научного познания. К указанным следует добавить такой источник развития нашей науки, как потребность ученого создавать и открывать новое, стремиться к совершенствованию познания и распространению его научным общением и преподаванием. Не случайно

поэтому, что улучшение и прогресс научной информации существенно ускорили интенсивность развития науки в целом, в том числе и рассматриваемой отрасли, и способствовали более широкому притоку научных кадров к занятиям ею.

Научные открытия следовали далеко неравномерно ни в смысле времени, ни в смысле территориального и национального распределения.

Видимо, Лаплас впервые высказал определенно суждение о том, что некоторые интегралы невозможно выразить в форме известных функций, т. е. в конечном виде. Но первые обоснованные результаты по проблеме неинтегрируемости функций в конечном виде были получены только в XIX веке, в частности в трудах Лиувилля и др. А уже в середине XIX века пошла речь о представлении функций в форме дифференциальных уравнений в работах Брио и Буке. При этом особую роль приобрели качественные методы исследования интегралов уравнений и численные, приближенные методы их выражения в известных функциях или таблицах. Эти методы стимулировались в большой степени развитием механики и техники.

Говоря о неравномерности развития нашей науки, отметим тот любопытный факт, что Брио и Буке, разобрав более трудный случай особенностей уравнения нелинейного, хотя и первого порядка, не занялись потом исследованием линейных уравнений, представив эту возможность Фуксу. После первых его фундаментальных работ в следующие два—три десятилетия было написано множество сочинений по теории линейных уравнений. В это время работы по нелинейным уравнениям появлялись лишь эпизодически и то для случая первого порядка, пока в начале 80-х годов Фуксом не был сделан в этой области новый небольшой, но очень важный по своей удачности шаг: о разыскании уравнений с неподвижными критическими точками. Эта идея была подхвачена Пуанкаре и Пикаром, но сравнительно цельная теория нелинейных уравнений была разработана лишь во вторую половину 90-х годов прошлого века, отстоя от основополагающих работ Брио и Буке примерно на четыре десятилетия. Новая вспышка интересных результатов после множества важных работ учеников Пенлеве в первые десятилетия нашего века появилась примерно через такое же время, хотя и в течение этого периода исследования по данной теории не прекращались.

Таким образом, в создании различных направлений и отраслей рассматриваемой нами теории принимали участие десятки крупных ученых и сотни менее известных деятелей науки, принадлежащих к различным научным школам из многих стран мира. Время от времени центр развития перемещался из одного места в другое, почти не выходя в течение рассматриваемого периода за пределы Европы.

Как помним, ряд фундаментальных идей, связанных с нашей теорией появился в работах Коши. Они плодотворно развивались

в работах Пюизё, Мерэ, Брио и Буке. Таким образом, Франция оказалась родиной новой теории. Здесь же получила плодотворное развитие аналитическая теория нелинейных уравнений в трудах Пикара, Пуанкаре, Пенлеве и его учеников. Наоборот, аналитическая теория линейных уравнений была сперва продуктом творчества преимущественно германских ученых — Римана, Фукса, Клейна. Отсюда она распространилась во Францию, Англию, Америку, в скандинавские и славянские страны (а несколько позже и в Японию и другие восточные страны) как через научную литературу, так и в результате выезда учеников. Последняя форма распространения математических идей в то время была чрезвычайно важной и часто практиковалась. В университеты Германии и Франции стекались способные ученики из многих стран. Живым общением и непосредственным контактом с выдающимися математиками того времени они более активно и быстро усваивали новые идеи, передовые взгляды и, возвращаясь в большинстве своем на родину, становились сами видными учеными и основателями новых научных школ, имели своих учеников.

Множество рассмотренных нами работ отмечены премиями Парижской, Берлинской, Шведской и других академий, научных обществ. Любопытно отметить, что примерно за треть века с 1876 г. Большой приз Парижской академии, назначавшийся раз в два года, был присужден за работы из рассмотренного нами цикла: Г. Дарбу, Альфену, Гурса, Пикару, Пенлеве, Бутру, Гарнье, Шази и другим, о чем более подробно шла речь в тексте.

В России первые работы по аналитической теории линейных уравнений стали появляться с конца 70-х годов прошлого века (А. В. Васильев, В. А. Анисимов, П. А. Некрасов, С. Е. Савич, Д. М. Синцов, В. П. Ермаков и др.). Ряд интересных результатов по изучению гипергеометрических функций в 80—90-е годы получил А. А. Марков. В тексте мы упоминали о работах того же периода А. В. Летникова и Л. К. Лахтина.

В начале 90-х годов русские ученые вышли на передний край по некоторым аспектам рассматриваемой теории. Мы имеем в виду работы А. М. Ляпунова и П. Г. Боля по теории устойчивости. О фундаментальных результатах в других областях речь шла в предыдущих главах.

Уже к началу нашего века в России сложилось три основных центра, где проводились интенсивные исследования по аналитической теории дифференциальных уравнений: Петербург, Москва, Казань. Она же была предметом внимания и математиков из других городов: Киева (В. П. Ермаков, К. Ф. Абрамович); Харькова (Д. Деларю, М. Лагутинский), Варшавы (В. А. Анисимов, И. Р. Брайцев и др.).

В Петербурге работали Н. М. Гюнтер, А. П. Поляков, В. И. Смирнов. В. И. Смирнов стал основателем нового направления и руководителем Ленинградской математической школы.

И. А. Лаппо-Данилевский был одним из первых его выдающихся учеников. Мы уже упоминали о работах другого известного ученика Н. М. Гюнтера и В. И. Смирнова — Н. П. Еругина, а также о результатах многих деятелей этой школы.

В Москве новое направление культивировалось в работах В. В. Голубева с 1912 г. Ему же принадлежит и первый курс по аналитической теории дифференциальных уравнений. Как следует из архивных материалов, хранящихся в музее им. Н. А. Жуковского (Москва), этот курс под названием «Основания аналитической теории дифференциальных уравнений» он читал уже в осеннем семестре 1915 г. Видимо, это был один из первых курсов, если не следующий за известным курсом Пенлеве. Но в отличие от курса Пенлеве, сюда входила и линейная теория. В дальнейшем этот курс Голубев периодически читал в МГУ на протяжении многих лет. В результате потом и появилась его известная книга [16.3]. В Ленинградском университете курс аналитической теории дифференциальных уравнений в конце 20-х годов и в 30—40-е годы читали Н. М. Гюнтер и Н. П. Еругин, а в последние более чем два десятилетия — проф. Н. М. Матвеев. Аналитическая теория линейных уравнений входит в третий том известного пятитомного курса высшей математики В. И. Смирнова.

Таким образом, с начала века центр исследований по линейной теории постепенно стал перемещаться в Россию, а в конце 20-х годов здесь были получены фундаментальные результаты в работах Лаппо-Данилевского, которыми завершалась в известной степени предыдущая теория и открывались благоприятные перспективы новых плодотворных исследований. А еще через 25—30 лет в работах Еругина и его учеников и сотрудников получены принципиально новые и важные результаты и в области нелинейной теории, в частности по исследованию уравнений Пенлеве и систем нелинейных уравнений.

С течением времени комплекс дисциплин, рассматриваемых нами ранее как отдельные ветви аналитической теории дифференциальных уравнений, несколько видоизменился, несколько сузился круг традиционных вопросов, принадлежащих к данной теории. Другие ее отрасли получили самостоятельное развитие. Исследования в данном направлении стали культивироваться во многих странах.

Обозревая огромное здание построенных глубоких и важных теорий рассматриваемой отрасли математики, хотелось бы отметить словом благодарности и почтения энергию, целеустремленность и огромный интеллектуальный вклад в развитие этой отрасли науки всех ее деятелей.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Так, в 1864 г. начало свою деятельность Московское математическое общество во главе с президентом Брашманом, а через год — Лондонское во главе с президентом Де Морганом. Наиболее старым из известных математических обществ было Гамбургское (основано в 1690 г), затем появились естественно-научные общества в Бордо (1712 г.), Лейпциге (1771 г.), Амстердаме (1778 г.), Флоренции (1782 г.), Париже (1788 г.) и др. В 1869 г. начала свою деятельность физико-математическая секция Казанского общества естествоиспытателей, через год — в 1870 г.— такая же секция Киевского общества, а в 1876 г.— математическое отделение Одесского общества естествоиспытателей. Как самостоятельные общества Киевское и Казанское оформились соответственно в 1889 и в 1890 гг. К этому времени стали функционировать математические общества: в Париже (1872 г.), в Харькове (1879 г.), в Эдинбурге (1873 г.); математический кружок в Палермо (1884 г.). Открытое в 1888 г. Нью-Йоркское математическое общество вскоре было переименовано в американское с секциями в Чикаго (1897 г.), Сан-Франциско (1902 г.) и др. В 1890 г. были оформлены Немецкое и Петербургское математические общества, а также математическая секция научного общества им. Шевченко (Львов). В начале столетия начали деятельность Индийское (1907 г.), Испанское (1911 г.) и многие другие математические общества.

2. Один из первых и наиболее распространенных из них — немецкий ежегодник [184], затем журнал Дарбу [114], позже — Центральный листок по математике и смежным областям [280] и др.

3. Первый всемирный конгресс математиков был созван в 1897 г. в Цюрихе. В конгрессе приняли участие 242 ученых из 16 стран. В 1966 г. в Москве проходил XIII Международный математический конгресс, в работе которого приняло участие около пяти тысяч человек из 53 стран. Здесь было сделано более 100 обзорных докладов и около 2100 сообщений на 15 секциях. Математический конгресс 1970 г. (Париж, Ницца) был менее представительным.

4. Приведем свидетельство Д. Я. Стройка о реакции Лапласа на работы Коши из этого цикла: «Рассказывают, что он (Коши— *В. Д.*) так взволновал Лапласа, когда прочел свою первую работу о сходимости рядов в Парижской академии, что этот великий ученый поспешил домой для того, чтобы проверить ряды в своей «Небесной механике». Кажется, он обнаружил, что там нет грубых ошибок» [73, 178].

5. Ковалевская Софья Васильевна (3(15).I. 1850—29.I(10.II) 1891) — одна из немногих знаменитых женщин-математиков прошлой эпохи, первая в мире женщина-профессор (Стокгольмского университета, 1884 г.) и чл.-корр. Петербургской академии наук (1889 г.), а также писатель и публицист. Легко усвоив основы высшей математики, занимаясь частным образом у известного московского педагога А. Страннолюбского, в 1869 г. она уехала учиться в Гейдельберг к Кенигсбергеру, а в 1870 г. переехала в Берлин и начала заниматься с Вейерштрассом. В 1874 г. С. Ковалевская получила степень доктора философии Геттингенского университета, а в 1883 г. стала преподавательницей Сток-

гольмского университета. Членом Московского математического общества С. В. Ковалевская избрана в 1881 г. О работах ее см. в [57. 2].

6. Несогласие с основой выше приведенного мнения Коркина высказал В. А. Анисимов, подчеркивавший в 1897 г. [24.3], что теория функций комплексного переменного с ее общими положениями и теоремами позволяет во многих случаях определить характеристические, в порядке идей Римана, свойства функций интегралов в области ее особых точек, способствуя (если не приводя к окончательному результату) решению вопроса о форме общего интеграла и его аналитическом представлении — основной задачи теории дифференциальных уравнений с точки зрения непосредственного вычисления их интегралов.

7. Недооценка Коркиным новых методов проявилась также в отсутствии изложения теоремы существования интегралов дифференциальных уравнений в его курсе [31.2].

8. Граве Дмитрий Александрович (6.IX 1863—19.XII 1939) — воспитанник Петербургской и основатель Киевской математической школы. По окончании Петербургского университета (1885 г.) защитил магистерскую (1889 г.) и докторскую (1897 г.) диссертации. Преподавал математику в различных высших учебных заведениях Петербурга (1889—1897 гг.), Харькова (1897—1899 гг.) и Киева (1899—1935 гг.). С 1934 г. он директор Института математики АН УССР. Д. А. Граве — член АН УССР с 1919 г., почетный член АН СССР с 1929 г. Работы его принадлежали теории дифференциальных уравнений, построению географических карт, алгебре, теории чисел и прикладным вопросам.

9. Риккати (Riccato) Якопо Франческо (1676—1754) — известный итальянский математик, родом из Венеции. Учился в иезуитском коллегиуме в Падуе (в 1693—1696), затем возвратился в Венецию. Основные труды Риккати относятся к интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям. Известен он также инженерной деятельностью, руководил постройкой речных плотин. Риккати состоял в оживленной переписке с учеными многих стран. В 1720—1722 гг. Николай II Бернулли был домашним учителем в одной аристократической семье в Венеции и возобновил знакомство с Риккати, которого знал еще с 1706 г. От Риккати от получил статью, чтобы передать ее отцу — Иогану I Бернулли на рассмотрение и отзыв. От этого зависела публикация. Отзыв был, вероятно, благоприятным, и статья появилась в печати [245] (1724 г.), но, очевидно, после того, как содержание ее стало хорошо известным, так как в том же журнале о ней уже упоминалось в ноябре 1723 г.

10. Лексель Андрей Иванович (24.XII. 1740—30.XI. 1784)—русский астроном, член Петербургской академии наук, по происхождению швед, приехал в Петербург в 1768 г. и начал работать под руководством Л. Эйлера.

11. Де Морган (De Morgan) Август (27.VI. 1806—18.III. 1871)—известный английский математик и логик, воспитанник Тринити-Колледжа в Кембридже. С 22 лет начал преподавание математики в университетском колледже Лондона и был известен затем как знаменитый лектор. Непосредственно и через своих учеников Де Морган сохранял решающее влияние на позднейшую Кембриджскую школу, был членом Лондонского Королевского общества и активно участвовал в работе королевского астрономического общества. Его учебники и математические работы значительно способствовали прогрессу английской науки. Еще более известен Де Морган как реформатор в области логики, где он стоит в одном ряду со своими предшественниками Гамильтоном и Георгом Булем как один из авторов, провозгласивших принципы исчисления предикатов. Он был и выдающимся английским историком математики.

12. В дискуссии Лейбница с И. Бернулли о природе логарифмов отрицательных величин первый считал их мнимыми, а И. Бернулли это отрицал. Вскоре Эйлер показал неправоту И. Бернулли, но против Эйлера выступил Даламбер. Возникла довольно бурная переписка 1747—1748 гг. В процессе ее Эйлер полностью решил вопрос о природе логарифмов отрицательных и мнимых величин и показал бесконечнозначность логарифма всякого числа, отличного от нуля. Он установил также, что среди значений логарифма положительного числа имеется одно действительное, а все значения логарифмов отрицательных и мнимых чисел являются мнимыми. Дальнейшее развитие эти идеи нашли в работах Фонсене (1759) и особенно Карстена (1782).

13. Это отчетливо видно в письме Гаусса к астроному и математику Бесселю (1811 г., опубликовано в 1880 г.). Здесь содержалась четкая интерпретация комплексных чисел, определение интеграла по комплексному переменному, представимость аналитической функции степенным рядом, интегральная теорема (известная теперь как теорема Коши). Здесь же было рассмотрено происхождение логарифмической функции из интеграла и основа ее многозначности.

14. Известный немецкий историк математики Ф. Мюллер в начале прошлого века опубликовал некоторые данные о числе и характере журналов, имеющих математическое содержание [220]. Как на первые журналы такого рода он указывает на орган Лондонского королевского общества (1665) и журнал ученых Парижа. До 1700 г. стало выходить 17 журналов математического содержания. За XVIII столетие к ним прибавилось 210 и притом 54 в первой половине, а в XIX столетии появилось еще около 950. При этом выход журнала под новым названием считался отдельно. Таким образом, к началу XX века было выпущено 1200 журналов математического содержания и из них продолжало выходить более половины

15. Муаньо (Moigno) Франсуа-Наполеон-Мари (20.VI 1804—13.XII. 1884) — французский математик, ученик Коши, затем аббат, жил в Париже, где в 1852 г. основал журнал «Космос», выходивший позже под другим названием до 1880 г. Автор двухтомного учебника по анализу [219] и других пособий.

16. Коши (Cauchy) Огюстен-Луи (21.VIII. 1789—23.V. 1857) один из самых выдающихся математиков-аналитиков прошлого века. Множество его новых результатов и открытий сыграли фундаментальную роль в развитии теоретической и прикладной математики XIX века и в известной степени, наряду с работами других выдающихся аналитиков, предопределили характер этого развития на ближайшие десятилетия. Несмотря на свой клерикализм, Коши в основном вопросе стоял на стихийно материалистических позициях и считал, например, «большим заблуждением допущение, что достоверность находится только в геометрических доказательствах, или в указаниях наших чувств». Развивая эту мысль дальше, он подчеркивал в [122·1], что «мы должны вполне сознавать, что существуют истины и кроме алгебраических и находятся действительности независимо от предметов познаваемых чувствами. Станем же усердно обрабатывать математические науки, не стремясь распространить их значение за естественные пределы, не увлекаясь тем, что можно решать исторические вопросы посредством формул и искать нравственных оснований в теоремах алгебры или интегрального исчисления» (Предисловие).

Коши окончил политехническую школу в 1807 г., Школу мостов и дорог в 1810 г. и до 1813 г. работал инженером. В 1816 г. он был назначен членом Парижской академии наук. В 1820—1830 гг. читал курс математики в политехнической школе.

17. Как известно, с августа 1883 г. О. Коши стал гувернером сына короля Карла X, покинувшего Францию и жившего с 1833 по 1836 год в Пражском замке. В 1833 г. Коши был избран членом Богемского научного общества, а в 1835 г. передал ему для публикации свое сочинение «Mémoire sur l'integration des équations différéntielles»[1] в форме тетради 13×18 объемом 72 страниц, в обложке. Имелось в виду напечатать этот мемуар отдельной брошюрой в трудах общества. Разногласие получилось из-за формата публикации. Коши желал осуществить его в $^1/_4$, а общество имело возможность на $^1/_8$. Но в 1836 г. Коши покинул Прагу, некому было обеспечить корректуру, и это издание, очевидно, не было осуществлено. В связи с этим К. Рыхлик пишет: «Мне не удалось найти литографию мемуара Коши в крупнейших библиотеках Праги» [252, 481]. Добавим к этому, что она не была нами обнаружена в каталогах крупнейших европейских библиотек.

18. Лиувилль (Loiuville) Жозеф (24.III. 1806—9.IX. 1882) — член Парижской академии с 1839 г. по классу астрономии, основатель и неутомимый сотрудник «Журнала чистой и прикладной математики», автор ряда важных

[1] «Мемуар об интегрировании дифференциальных уравнений».

открытий в математике. После блестящего окончания политехнической школы в 1827 г. перешел в Школу мостов и дорог. Преподавательскую деятельность он начал в 1831 г. профессором политехнической школы, а затем и Коллеж де Франс, где читал курс математики. На факультете наук читал рациональную механику. В 1862 г. избран действительным членом Бюро долгот. Ж. Лиувилль издал математические сочинения Галуа, геометрию Монжа, лекции Навье и другие важные сочинения.

19. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит, как известно, две произвольных константы, которые можно рассматривать как параметры. Кроме того, в уравнение могут входить еще k параметров. Таким образом, если рассматривать n любых решений этого дифференциального уравнения, то они будут содержать всего $k+2n$ параметров. Обозначая отрезки оси ox: a_1, b_1, a_2, b_2 ..., a_n, b_n, рассмотрим краевую задачу такого вида: можно ли и как определить множество значений этих $k+2n$ параметров, чтобы любое решение y_i ($i=1, 2, \ldots, n$) внутри отрезков a_ib_i менялось непрерывно вместе с его производной и в конечных точках a_i и b_i принимало бы наперед указанные значения. (Уравнение здесь предполагалось линейным и однородным). При этом различаются три случая: а) $n=1$, $k=0$; б) $n=k=1$; в) $n=k>1$. Граничные условия состояли в том, что отношение $y_1' : y'$ приближалось к любым заданным (может быть и бесконечным) значениям в конечных точках отрезков. Происхождение такой постановки вопроса обусловлено соответственными задачами математической физики. Случай б) был четко поставлен и рассмотрен Даламбером, когда требовалось определить параметр λ в уравнении $\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\varphi(x)y$ (где $\varphi(x)$ — данная положительная функция) таким образом, чтобы решение этого уравнения в точках a и b принимало нулевые значения, не будучи тождественным нулем. Далее этим вопросом занимался Штурм с 1833 г. и вместе с Лиувиллем он чуть позже (1836—1837 гг.) получил существенные результаты. В несколько ином направлении эти вопросы рассматривались ранее Лапласом, Лежандром, Ламе и др. [138.II А 7а, 441].

20. Лиувилль [205.4] рассмотрел краевую задачу и притом сразу для дифференциального уравнения любого порядка вида (1.10). Он доказал такую теорему колебаний: можно определить параметр r одним и только одним способом так, что указанное дифференциальное уравнение будет обладать решением, которое имеет в интервале ab любое заданное число n корней и удовлетворяет граничные условия в точке $ay=A$, $\frac{Ndy}{dx} = B, \ldots \frac{KdL \ldots dMdNdy}{dx^{n-1}} = D$ и в точке b $\alpha y + \beta\frac{Ndy}{dx} + \ldots + \nu\frac{KdL \ldots dMdNdy}{dx^{n-1}} = 0$, где A, B, ..., D, также как и α, β, ..., ν, обозначают положительные (или за исключением D, исчезающие) константы.

21. У Остроградского речь шла о тех членах, которые в небесной механике называются «вековыми». При возмущенном движении в них независимое переменное (как правило время t) входит вне знаков тригонометрических функций. Эти члены с течением времени могут неопределенно возрастать, вследствие чего найденное решение пригодно лишь для весьма малых значений t. С этим обстоятельством встретились математики XVIII века, когда они начали применять анализ к исследованию движения планет и их спутников в солнечной системе. Задачей об уничтожении вековых членов при применении метода последовательных приближений занимались многие астрономы. Известны также работы Лапласа и Лагранжа, в которых развивались довольно общие методы для устранения этого недостатка. Однако на пути применения этих способов стояли значительные технические трудности. Метод Остроградского давал простой прием избежать появления вековых членов при применении способа последовательных приближений. Такой метод значительно позже получил широкое распространение в работах Гюльдена, Линдштедта, Пуанкаре, Ляпунова. (О последних см. в книге И. Т. Малкина «Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний», М.— Л. 1949). В этой книге

рассмотрен и пример Остроградского. Некоторое обобщение и видоизменение приема Остроградского с подробной методической разработкой приведено А. Н. Крыловым в книге «Лекции о приближенных вычислениях» (М.— Л., 1950, стр. 273—278).

22. Понятие моногенности функции Коши положил в основу своей теории функций комплексного переменного. Несколько позже Вейерштрасс определил аналитические функции как такие, которые могут быть представлены рядом Тейлора в некоторой области комплексной плоскости и которые часто могут быть продолжены и за пределы этой области. После работ Вейерштрасса допускалось, что аналитичность может быть рассмотрена как следствие моногенности и что представление Вейерштрасса совпадает с тем же у Коши и дает более полную и более глубокую гамму свойств функций комплексного переменного. Известную ясность в этот вопрос внесли исследования Э. Бореля. В одном случае он показал, как отметил де-Бройль [9], что функция может быть моногенной в некоторой области комплексной плоскости, не будучи аналитической, и что этого достаточно для определения ее во всей области. Таким образом, существенной чертой функций комплексного переменного является не аналитичность, а моногенность, которая обеспечивает их единство. К этому выводу Борель пришел в результате более чем двадцатилетней работы по исследованию и сравнению понятий моногенности и аналитичности функций. Результаты ее были изложены в «Лекциях по однородным моногенным функциям комплексного переменного» (1917 г.).

23. Вейерштрасс (Weierstrass) Карл Теодор Вильгельм (31.X. 1815—19.II. 1897) — знаменитый немецкий математик. Изучал юридические науки в Бонне с 1834 г. и математику в Мюнстере с 1838 г. Здесь же в гимназии в 1841 г. он начал преподавать математику, а также заниматься собственными исследованиями. В 1842—1855 гг. та же деятельность проходила в других прусских городах. В 1856 г. вышла работа Вейерштрасса по теории абелевых функций, создавших автору всеобщую известность. Кенигсбергский университет присудил ему (в 1854 г.) почетную докторскую степень без защиты, через два года он получил экстраординатуру в Берлинском технологическом институте, а в 1864 г.— ординатуру в Берлинском университете. Членом Берлинской академии наук Вейерштрасс был избран 19.XI. 1856 г. Лекции и научные статьи его посвящены теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, линейной алгебре, отдельным вопросам математического анализа. Критические требования Вейерштрасса к работам по математическому анализу сыграли положительную роль в формировании современного анализа. Отметим роль Вейерштрасса как воспитателя талантливых учеников, среди которых были С. В. Ковалевская, Г. Миттаг-Леффлер, Шварц, Фукс и многие другие.

24. Липшиц (Lipshitz) Рудольф (14.V. 1832—7.X. 1903) — немецкий математик, сначала учитель гимназии, а затем профессор университетов в Бреславле (с 1862 г.) и Бонне (с 1864 г.). (В 1874 г. был избран ректором). Научные работы его как ученика Дирихле относятся к теории чисел, основам анализа, теории рядов, дифференциальным уравнениям и многомерной геометрии. Р. Липшиц был избран чл.-корр. Берлинской академии наук (1872 г.), а также чл.-корр. Парижской, Римской, Геттингенской и других академий.

25. Пенлеве (Painlevé) Поль (5.XII. 1863—29.X. 1933) — выдающийся французский математик и активный политический деятель буржуазного направления. Образование получил в Нормальной школе (Париж), которую окончил в 1877 г. Докторскую диссертацию защитил в 1887 г. и с 1895 г.— профессор Нормальной школы и Парижского университета и некоторое время политехнической школы. Научные интересы Пенлеве принадлежат теории функций, аналитической (нелинейной) теории дифференциальных уравнений, одним из основателей которой он был, а также различным прикладным вопросам (механике, астрономии, аэродинамике), где были получены существенные результаты. В 1900 г. Пенлеве избран членом Парижской академии. С 1910 г. по избрании в палату депутатов он почти отходит от научной работы и все больше внимания уделяет общественной деятельности. В 1915—1916 гг. он министр просвещения, в 1917 г.— министр обороны, некоторое время возглав-

лял кабинет министров, был президентом палаты депутатов (1924 г.), президентом совета республики, занимая и позже различные министерские посты, в том числе и министра авиации в 1930—1933 гг.

В 1924 г. П. Пенлеве избран чл.-корр. Академии наук СССР. До этого он был избран чл.-корр. академий в Болонье, Риме, Стокгольме, Христиании, иностранным членом Венгерской, Шведской, Норвежской академий, членом математических обществ Парижа, Лондона, Льежа, Харькова и др.

26. Пикар (Picard) Шарль Эмиль (24.VII. 1856 — 12.XII. 1941) — выдающийся французский математик, окончил Нормальную школу в Париже в 1877 г. и был оставлен здесь лаборантом. В следующем году начал исследования по теории аналитических функций и вскоре опубликовал известную теорему относительно поведения функции в окрестности существенно особой точки. В 1879 г. Пикару было поручено чтение курса дифференциального и интегрального исчисления на факультете наук Тулузы. В Париж он возвратился в октябре 1881 г., став профессором Нормальной школы, а также заместив Буке по кафедре физической и экспериментальной механики в Сорбонне, а затем в 1885 г. по кафедре анализа. В процессе этого им был составлен известный трактат по анализу. Только за 12 лет с 1877 г. Пикар опубликовал около 120 заметок и мемуаров и в 1889 г. был избран членом Парижской академии наук, а также чл.-корр. Петербургской (1895 г.), Туринской, Болонской, Берлинской и других академий, членом многих математических обществ. В дальнейшем литературно-исследовательская работа Пикара продолжалась весьма интенсивно. Он получил фундаментальные результаты в общей теории аналитических функций, теории дифференциальных уравнений, в области алгебраических функций двух переменных и ряде прикладных вопросов. Ему принадлежат интересные обзоры из области истории и философии математики.

33. Бендиксон (Bendixson) Ивар Отто (1.VIII. 1861—1935) — видный шведский математик, учился в 1879—1890 гг. в Упселе и Стокгольме, с 1890 г. приват-доцент, затем профессор математики высшей технической школы (1900—1905 гг.) и университета (1905—1927 гг.) в Стокгольме и его ректор (1911—1927 гг.), член городского муниципалитета (1903—1931 гг.). Работы его принадлежали теории множеств, алгебре, теории дифференциальных уравнений и др.

28. Синцов Дмитрий Матвеевич (8(20).XI. 1867—28.I. 1946) — известный советский математик, преимущественно геометр, член АН УССР. По окончании Казанского университета в 1890 г. Д. М. Синцов был оставлен при нем для дальнейшего совершенствования в науках. Магистерскую диссертацию [65.2] он защитил в 1895 г., докторскую [65.3] — в 1898 г. Педагогическая деятельность Д. М. Синцова проходила в Казанском университете (с 1894 г. приват-доцент); в Екатеринославе (Днепропетровске) (Горное училище с 1899 г.), в Харьковском университете (профессор с 1905 г.). В 1906 г. он был избран председателем Харьковского математического общества на смену В. А. Стеклову и занимал этот пост в дальнейшие 40 лет. Он отдавал много сил и времени научно-организационной деятельности и популяризации русской науки. С 1893 г. только в журнале [184] он поместил свыше 2000 рефератов. Кроме того, Д. М. Синцов был автором более ста научных работ по математике и около двухсот по педагогике, библиографии, научной информации, учебно-методической и т. д. Ему было присвоено звание Заслуженного деятеля науки, он был награжден орденом Трудового Красного Знамени, избирался депутатом Верховного республиканского и Городского Советов.

29. Брио (Briot)Шарль Август Альберт (19.VI. 1917 — 20.IX. 1880) после блестящего окончания колледжа Сан-Луи в Париже в 1838 г. был принят первым в Нормальную школу. По окончании образования в 1841 г. Брио в следующем году получил степень доктора и стал преподавать математику в колледжах Реймса, Орлеана, на факультете наук в Лионе, затем в 1848 г. в Париже, в лицее Фонтане и Сан-Луи и стал репетитором (с 1864 г. экзаменатором) политехнической школы. С 1855 г он преподавал механику и астрономию в Нормальной школе. В скором времени он получил кафедру математической физики в Сорбоне и оставил лицей Сан-Луи. Кроме рассмотренных в основном тексте работ, перу его принадлежали статьи по прикладным вопро-

сам и теории специальных функций, многочисленные курсы по отдельным предметам элементарной и высшей математики. За монографию по теории абелевых функций он получил премию Понселе от Французской академии.

30. Буке (Bouquet) Жан Клод (7.XII. 1819—9.IX. 1885) — известный французский математик, воспитанник Парижских политехнической и Нормальной школ (1839—1841 гг.), наряду с Брио один из основателей нелинейной аналитической теории дифференциальных уравнений. По Нормальной школе он был одним из позднейших учеников Коши и по окончании ее стал профессором математики в Марсельском лицее, затем с 1845 г. на факультете наук Лиона. Здесь он встретился со своим товарищем (по Нормальной школе) Брио и их дружба перешла в тесное и очень плодотворное многолетнее научное сотрудничество, весьма редкое для того времени. Из Лиона в 1852 г. Буке перешел на преподавательскую работу в Парижские лицеи (Бонапарта и др.), которую выполнял почти в продолжении 20 лет. Ученики его демонстрировали блестящие успехи на трудных вступительных экзаменах в политехническую школу. В 1973 г. Буке занял должность профессора математики в Сорбонне и профессора механики и астрономии в Нормальной школе. Курсы эти отличались большой теоретической глубиной и по форме своей весьма доступным изложением. В 1875 г. был избран членом Парижской академии.

31. Мерэ (Méray) Гуго Шарль Робеот (12.XI. 1935 — 2.II. 1911) — известный французский математик, воспитанник Парижской Нормальной школы (1854 г.), доктор (1858 г.), с 1857 г. преподаватель лицея, затем факультета наук в Лионе, с 1867 г.— профессор факультета наук Дижона и с 1899 г.— чл.-корр. французского института (академии). Довольно многочисленные труды его относились к теории дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, к теории специальных функций, алгебре, механике.

32. Жордан (Jordan) Мари Энмон Камилл (5.I. 1838—20.I. 1922) — выдающийся французский математик, воспитанник Парижской политехнической школы, а затем ее репетитор и профессор, читавший анализ в течение 36 лет. С 1883 г. он преемник Лиувилля по кафедре математики в Коллеж де Франс. С 1881 г. Жордан — член Парижской академии наук и ее президент в 1916 г., а также чл.-корр. Петербургской академии наук. Особую известность Жордан приобрел своими работами в области алгебры (особенно теории групп) и теории функций, а также топологии и кристаллографии. Именно ему принадлежит первый систематический курс по теории групп и теории Галуа (1870). В последние 36 лет жизни Жордан продолжал издание журнала Лиувилля.

33. Фукс (Fuchs) Иммануэль Лазарь (5.V. 1833—26.VI. 1902) — известный германский математик, доктор философии (1858 г.), с 1860 по 1867 год — учитель различных средних учебных заведений Берлина и с 1867—1869 гг.— преподаватель математики в Артиллерийской и Инженерной школе. Чтение лекций в Берлинском университете Фукс начал с 1865 г. как приват-доцент и с 1866 г. как профессор. В 1869 г. он перешел сперва в Грейфсвальдский, затем в Геттенгенский (1874 г.) и с 1875 г. в Гейдельбергский университет. С 1884 г. был профессором и некоторое время ректором Берлинского университета. С 1891 г., по смерти Кронекера, продолжил издание журнала Крелля. Действительным членом Берлинской академии наук Фукс избран 9.IV. 1884 г.

Л. Фукс был фактически родоначальником нового мощного направления в анализе, создал известную школу теории линейных дифференциальных уравнений, последователями которой стали ученые многих стран. Большинство работ Фукса относится к различным аспектам линейной аналитической теории дифференциальных уравнений. В других работах рассматривались отдельные вопросы теории функций (в том числе специальных), алгебры и др.

34. Форсайт (Forsyth) Андре Рассел (18.VI. 1858—2.VI. 1942) — известный шотландский математик, учился в Ливерпуле и Тринити-Колледже в Кэмбридже (1877—1881 гг.). С 1882 г. он профессор математики университетского колледжа в Ливерпуле, а с 1884 г.— Тринити-Колледжа и университета в Кэмбридже. В 1913—1923 гг. Форсайт был профессором математики в имперском Лондонском колледже наук и технологии. Научные работы его относились к теории аналитических и специальных функций, к теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, к теории инвариантов

и др. Он был издателем собрания сочинений Кэли и некоторое время известного английского журнала по чистой и прикладной математике.

35. Линделеф (Lindelöf) Ернст Леонард (7.III. 1870—4.VI. 1946) — финский математик, сын известного астронома Лоренца Леонарда Линделефа (1827—1908), чл.-корр. Петербургской АН с 1868 г. Ернст Линделеф учился в 1887—1890 гг. в Гельсингфорсе, в 1891 г.— в Стокгольме, в 1893—1894 и 1898 — 1899 гг.— в Париже и в 1901 г.— в Геттингене. В 1895 г. получил степень доктора, в 1902 г. он адьюнкт и с 1903 по 1938 год — профессор математики в Хельсинки. Основные работы Линделефа касались теории аналитических функций, теории рядов, теории дифференциальных уравнений.

36. Ляпунов Александр Михайлович (25.V (6.VI). 1857 — 3.XI. 1918) — выдающийся русский математик и механик, воспитанник известной Петербургской школы, ученик П. Л. Чебышева. По окончании Петербургского университета в 1880 г. Ляпунов защитил магистерскую (1885 г.) и докторскую (1892 г.) диссертации и с 1885 г.— доцент, с 1892 г.— профессор Харьковского университета. В 1900 г. был избран чл.-корр., а в 1901 г. действительным членом Петербургской академии наук и с 1902 г. работал в Петербурге почти все время. Работы Ляпунова сравнительно немногочисленны, но отличаются большой глубиной, оригинальностью и совершенной обработкой. Он является основоположником современной теории устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Характерным для специальных работ Ляпунова является создание в процессе их эффективных математических методов и совершение важных математических открытий. Это касалось прежде всего и некоторых вопросов рассматриваемой аналитической теории дифференциальных уравнений.

Ляпунов построил общий метод для решения задач об устойчивости, а также посвятил большой цикл исследований теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения. Работы Ляпунова были источником множества дальнейших исследований и началом ряда самостоятельных ветвей науки.

37. Кенигсбергер (Koenigsberger) Лео (15.X. 1837 — 15.XII. 1921) — известный математик из Германии, был старшим из 12 детей в небогатой купеческой семье. В начале гимназического курса по математике плохо успевал. В 1853 г. в старшем классе той же гимназии появился бедный, но талантливый ученик, сын учителя из Познанской области Л. Фукс. Он блестяще освоил гимназический курс и еще до его окончания стал, хотя и не надолго, домашним учителем Кенигсбергеров. Его влияние на Лео, как последний сам вспоминал, было огромно. Из праздного юноши без особых интересов и из последнего ученика он через год стал целеустремленным, прилежным и любознательным гимназистом и вторым учеником в следующем классе. За этот год Фукс научил его заниматься математикой самостоятельно по книгам и пробудил интерес к этой науке. Это влияние сохранялось и в студенческие годы. Фукс защитил диссертацию в 1858 г., а Кенигсбергер — через два года. Последний начал преподавать математику в Берлинском кадетском корпусе. Затем Кенигсбергер работал в Грейфсвальде, Гейдельберге (1869—1875 гг.), где одно время его лекции слушала С. В. Ковалевская. На семинаре она, как вспоминал Кенигсбергер, выступила с докладом о работах Гаусса по гипергеометрическому ряду, изложив предмет с большой ясностью и полностью освоив материал. После этого она отправилась в Берлин к Вейерштрассу.

Дальнейшая профессорская деятельность Кенигсбергера протекала в Дрездене, Вене и с 1884 г. опять в Гейдельберге, где он приложил немало сил для организации местной академии. Был дружен с русскими математиками (Деларю, Имшенецким и др.), знал хорошо их работы. Лекции читал до 1918 г.

38. Пункаре (Poincaré) Анри (29.VI. 1954—17.VII. 1912) — один из крупнейших математиков прошлого века, учился в Парижских политехнической (1873—1875 гг.), а потом и Горной школе. Докторскую диссертацию защитил в 1879 г. и в 1879—1881 гг. он лектор Канского университета, с 1881 г.— лектор и с 1885 г.— профессор Парижского университета по кафедре математической физики и теории вероятностей, а с 1895 г.— небесной механики. Он же читал

теоретические основы электротехники в Высшей школе связи, в 1904—1908 гг.— астрономию в политехнической школе. В 1887 г. А. Пуанкаре избирается членом Парижской академии наук, а в 1893 — членом Бюро долгот. Только за 7 лет с 1879 г. им было опубликовано свыше ста мемуаров и заметок.

Многочисленные научные работы А. Пуанкаре относятся ко многим отраслям анализа, алгебры, геометрии, прикладной математики, астрономии и физики. Здесь было предложено множество методов и получены фундаментальные результаты, открывающие пути к развитию новых отраслей математики. Пуанкаре является одним из основоположников изучаемой нами теории. В развитие ее многих ветвей он внес заметный вклад. Он является (наряду с А. М. Ляпуновым) основателем качественной теории дифференциальных уравнений. Исследования его о предельных циклах нашли применение в работах ряда советских ученых по радиотехнике. Изучение обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами привело Пуанкаре к изучению новых классов трансцендентных функций, получивших потом название автоморфных. При этом он существенно использовал основные результаты неэвклидовой геометрии. Пуанкаре принадлежит ряд курсов по небесной механике, а также ряд сочинений философско-психологического характера, в которых проявлялись идеи махизма и агностицизма, что было предметом критики со стороны В. И. Ленина.

39. Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler) (18.III. 1846—7.VII. 1927) — известный шведский математик, воспитанник Упсельского университета (окончил в 1872 г.) и один из выдающихся учеников Вейерштрасса. Был профессором университета в Гельсингфорсе (с 1877 г.) и Стокгольме (с 1881 г.). В 1882 г. он основал один из крупнейших математических журналов — Acta mathematica. Многочисленные научные работы Миттаг-Леффлера относятся главным образом к теории аналитических функций, дифференциальных уравнений и др. Он был чл.-корр. Петербургской академии наук с 1896 г.

40. Делассю (Delassus) Этьен (25.III. 1868 — 1926) — воспитанник высшей Нормальной школы, ученик Аппеля и Пикара, доктор математики (1895 г.), преподавал математику в лицее, в университете Тулузы, механику на факультете наук в Бордо. Работы главным образом по теории дифференциальных уравнений с частными производными, интегральному исчислению, механике и др., автор ряда курсов из указанных областей.

41. Гурса (Goursat) Эдуард Жан Баптист (21.V. 1858—25.XI. 1936) — видный французский математик, магистр Сорбонны (1879 г.), с 1881 г.— профессор анализа на факультете наук Тулузы. С 1885 г. он преподает анализ в Нормальной школе, а с 1897 г.— в университете Парижа, с 1919 г.— член Парижской академии наук. Долгое время Гурса был президентом Французского математического общества. Весьма многочисленные его работы принадлежат теории дифференциальных уравнений с частными производными, где им получены фундаментальные результаты, теории аналитических функций, теории гипергеометрических рядов и другим отраслям. Широко известен его трехтомный курс математического анализа.

42. Пюизё (Puiseux) Виктор Александр (16.IV. 1820 — 9.IX. 1883) — французский математик и астроном, воспитанник Нормальной школы. По ее окончании был профессором математики на безансонском факультете, а затем профессором Нормальной школы, адъюнкт-астрономом в Парижской обсерватории, профессором рациональной механики и астрономии на факультете наук Парижа, математики и астрономии в Сорбонне, членом Бюро долгот, а в 1871 г. избран в члены Парижской академии наук. Довольно многочисленные работы Пюизё после рассмотренных нами в основном тексте принадлежали преимущественно механике, астрономии и частично геометрии.

43. Риман (Riemann) Георг Фридрих Бернгард (17.IX. 1826—20.VII. 1866)— знаменитый немецкий математик. Уже в детстве он обнаружил большие математические способности. Весной 1846 г. Риман поступил в Геттингенский университет, проработав перед тем многие сочинения Эйлера и теорию чисел Лежандра, на филологический и богословский факультеты. Лекции по математике, в том числе и К. Гаусса, многие идеи которого были им развиты позже, Риман слушал особо. Но скоро (1847—1849 гг.) он занялся только изучением

математики и через год перешел в Берлинский университет, где слушал лекции Якоби, Л. Дирихле и Штейнера. Докторская диссертация Римана [246.1], защищенная в Геттингене в 1851 г., получила весьма высокую оценку Гаусса, работавшего, как он потом сообщил Риману, над аналогичным вопросом. После этого Риман стал ассистентом В. Вебера, через два с половиной года получил место приват-доцента, а в 1857 г.— профессора Геттингенского университета. Лекции его легли в основу курсов, изданных посмертно его учениками. В 1856 г. Риман был избран асессором, а в 1859 — действительным членом Геттингенского общества наук. В это же время он был избран чл.-корр. Берлинской академии по физико-математическому классу. Популярность Римана росла, заслуги его все более признавались и он был избран членом Баварской, Берлинской, чл.-корр. Парижской академий, иностранным членом Лондонского королевского общества. Но силы его оставляли и во время одной из поездок в Италию он умер от туберкулеза. Риман получил фундаментальные результаты во многих областях математики и некоторых прикладных вопросах. Работы его оказали большое влияние на развитие математики во второй половине XIX и в XX веке, в том числе и на ряд отраслей изучаемой нами теории.

44. Кэли (Cayley) Артур (16.VIII. 1821—26.I. 1895) — известный английский математик, член Кембриджского философского общества и Королевского общества, с 1863 г.— профессор Кембриджского университета, автор огромного количества работ главным образом по высшей алгебре, геометрии, теории чисел, теории дифференциальных уравнений, по теории эллиптических и других специальных функций, а также по сферической астрономии и астрофизике, где было получено много важных результатов. Кэли известен как основатель современной алгебраической геометрии. Он ввел проективное мероопределение, основанное на рассмотрении алгебраических квадратичных форм, и установил связь между теорией инвариантов и проективной геометрией, что имело важное значение для интерпретации (Кэли—Клейна) геометрии Лобачевского.

45. Фине (Fine) Генри Букхард (14.IX. 1858—22.XII. 1928) — известный американский математик. По окончании колледжа в Нью-Джерси в 1880 г. он был учителем математики (до 1884 г.), а затем уехал в Германию, где слушал лекции Клейна, Кронекера и других и уже в мае 1885 г. получил степень доктора философии Лейпцигского университета, став одним из выдающихся учеников Клейна. В 1889 г. Фине возвратился в Принстон и стал профессором университета. Работы его относились к анализу, алгебре и теории чисел. Ему же принадлежит и ряд учебников. Фине был одним из основателей американского математического общества и его президентом в 1911—1912 гг.

46. Дюляк (Dulac) Генри (3.X 1870 — 2.IX. 1955) — профессор математики Лионского университета, ученик Пенлеве, получил степень доктора математических наук в 1903 г. В 1890—1895 гг. учился в Парижской политехнической школе и в Парижском университете. С 1911 г. Дюляк профессор, а с 1927 г.— экзаменатор политехнической школы Лиона. Работы его принадлежат к теории дифференциальных уравнений и другим отраслям анализа.

47. Весьма важное значение в этом сыграло введение понятия области неопределенности особой точки, при котором характер ее определялся более полно. Происхождение самого понятия связано, видимо, с введенным Фуксом понятием точек неопределенности. Истоки нового понятия можно усмотреть уже в диссертации Пенлеве [228.1], когда для характеристики особой точки были привлечены понятия теории множеств. Однако и в этой работе, и в его лекциях само понятие области неопределенности еще отсутствует [1]. Оно было введено Пенлеве в 1900 г. в [228.18], затем попало в лекции Зоретти [282.3, 59—61] (1911 г.), на которые и ссылается Голубев [16.5, 46].

Из рассматриваемой особой точки однозначной функции z_0 как из центра описывается окружность C радиуса ϱ. Из точки внутри ее, где функция голоморфна, строятся все возможные продолжения L_ϱ, не выходя из окружности C. Если обозначить через M множество значений, принимаемых функцией в точ-

[1] Отметим в связи с этим, что ссылка авторов комментарий книги [16.5. 46] (примечания 11, 8 на стр. 432—433) на диссертацию Пенлеве [228.1] нам кажется недостаточно обоснованной.

ках, до которых можно дойти, и через M' его производное множество, то множество $F=M+M'$ есть континуум, ибо оно замкнутое и совершенное, так как любая точка M есть предельная; кроме того, это множество таково, что любые его две точки можно соединить непрерывной линией, все точки которой принадлежат к множеству: назовем его $F(\varrho)$, так как оно зависит от ϱ. Множество D всех точек, принадлежавших всем $F(\varrho)$, Пенлеве назвал областью неопределенности функции $\omega=f(z)$ в точке z_0. Можно доказать, что оно есть непрерывное множество или состоит из одной точки. Обособив полюсы, рассмотрим только трансцендентные точки. Если область неопределенности состоит из одной точки, то такая особая точка называется обыкновенной трансцендентной точкой; точки, для которых область неопределенности составляет некоторое непрерывное множество, называются существенно особыми. Если область неопределенности особой точки покрывает всю плоскость, то она называется точкой с полной областью неопределенности. В противном случае будут точки с неполной областью неопределенности. Дальнейшее уточнение понятия области неопределенности принадлежит В. В. Голубеву [16.5, 47].

48. Бутру (Boutroux) Пьер Леон (6.XII. 1880—25.VII. 1922) — сын известного французского философа Эмиля Бутру и племянник Анри Пуанкаре, окончил Нормальную школу и Парижский университет в 1900 г. и получил степень лиценциата наук Парижского университета. Начавшаяся вскоре весьма интенсивная научная деятельность его отличалась глубиной и оригинальностью. Работы его принадлежали теории функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, о чем речь идет в соответственных главах нашей книги, а также философии и истории математики. Им же было предпринято издание математических трудов Блеза Паскаля. Бутру читал различные курсы математики на факультете наук Пуатье (1908 г.), в университетах Нанси, Принстона (США — 1913—1914 гг.) и др. В 1920 г. он возвращается в Коллеж де-Франс и занимает кафедру общей истории наук.

49. Голубев Владимир Васильевич (3.XII. 1884—4.XII. 1954) — известный русский и советский математик и механик, воспитанник Московского университета (окончил в 1908 г.), один из выдающихся ученых и популяризаторов аналитической теории дифференциальных уравнений в России и СССР. В магистерской диссертации (Москва, 1916) он дал систематическое исследование поведения аналитических функций вблизи множества особых точек, ставшее классическим по теории граничных свойств аналитических функций. Он же прочел первый в России курс (в Московском университете в 1915—1916 гг.) по аналитической теории дифференциальных уравнений. С 1917 г. В. В. Голубев — профессор Саратовского университета, а с 1930 г.— старший инженер ЦАГИ и профессор Московского университета, с которым у него не прерывалась связь весь последующий период жизни. Одно время он был здесь деканом механико-математического факультета. С 1932 г. В. В. Голубев — начальник кафедры высшей математики в Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского. В 1934 г. он избирается чл.-корр. АН СССР, а в 1943 г. получает звание Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. Следующие после магистерской диссертации работы В. В. Голубева принадлежат к теории аналитических функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, а также к аэродинамике, где им были продолжены исследования С. А. Чаплыгина и создана теория машущего крыла. Голубеву принадлежит и один из лучших современных курсов по аналитической теории дифференциальных уравнений [16.3].

50. Для случая уравнения первого порядка можно было аналогично рассматривать [1]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{ax+by+\ldots}{a_1x+b_1y+\ldots}, \tag{1}$$

и если λ_1, λ_2 — два различных, отличных от нуля корня уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a & b-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

[1] Подробнее об этом см. в [72, гл. II § 2].

и $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то общий интеграл уравнения (1) мог быть представлен в форме Пуанкаре [237.22, 24] $K=\frac{Y(x, y)}{[X(x, y)]^{\lambda}}$, где X, Y — голоморфные функции для $x=0$, $y=0$. Чтобы привести уравнение (1) к форме Брио и Буке вида (5.6), достаточно положить $a_1=1$, $b_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_1=b$, $\lambda=b$. Тогда получим $x\frac{dy}{dx}=$ $=ax+\lambda y+\ldots$. Как помним, для исследования уравнения (5.6) существенное значение имел коэффициент при y (в тех символах при ζ), т. е. λ.

51. Дарбу (Darboux) Гастон (13.VIII. 1842—25.II. 1917) — один из крупнейших математиков второй половины прошлого века, работал главным образом в области дифференциальной геометрии, где применил новые методы и получил множество важных результатов, как и в различных областях анализа, алгебры и механики. Дарбу учился в лицее Монтпелье, политехнической и Нормальной школах. По защите докторской диссертации в 1866 г. он был профессором в лицее Сан-Луи, а затем в Нормальной школе в 1872—1880 гг. и в то же время в Сорбонне сначала по кафедре рациональной механики, а с 1880 г. по кафедре высшей геометрии, заместив Шаля. Научная репутация его быстро росла. В 1884 г. он был избран членом Парижской академии, а в 1900 г.— ее непременным секретарем. В 1895 г. Дарбу избран чл.-корр. Петербургской академии наук. В 1870 г. он стал издавать один из наиболее известных математических журналов [114].

52. Васильев Александр Васильевич (6.VIII. 1853—6.X. 1929) — известный русский математик, воспитанник Петербургского университета (окончил в 1874 г.), магистр (1880 г.), доктор (1884 г.) математических наук С 1875 г.— приват-доцент и с 1887 г.— ординарный профессор Казанского университета. Работы его относятся к алгебре, теории специальных функций, истории математики. Васильев много сделал для популяризации новых достижений научной мысли. Особое значение имела проводимая им широкая пропаганда геометрических идей Н. И. Лобачевского, создание по его инициативе международных конкурсов на соискание премии Лобачевского, участие в издании полного собрания сочинений последнего. А. В. Васильев был одним из основателей и активнейших участников Казанского физико-математического общества.

53. Лагутинский Михаил Николаевич (1871—17.I 1915) — воспитанник (1890—1894 гг.), а затем приват-доцент Харьковского университета (с 1902 г.) и преподаватель Харьковского технологического института, сдавший магистерские экзамены в 1902 г. Из опубликованных наиболее интересными были работы, посвященные распространению метода Дарбу на системы алгебраических дифференциальных уравнений и применению его к задаче Брио и Буке.

54. Отон (Autonne) Леон (28.VIII. 1859 — 12.I. 1916), уроженец Одессы, ученик Парижской политехнической школы (1878—1880 гг.), потом Школы мостов и дорог (1880—1883 гг.), с 1895 г.— лектор факультета наук Лиона. Исследования проводил главным образом в области дифференциальных уравнений и алгебры.

55. Ремундос (Remoundos) Георг (5.III. 1878 — 27.IV. 1928) — греческий математик, в 1896—1900 гг. учился в Афинах, в 1900—1904 гг.— в Париже. Доктор математики с 1902 г. Был сначала преподавателем в лицее, затем профессором в университете, политехнической школе и высшем торговом училище Афин. Основные работы относятся к теории аналитических функций и теории дифференциальных уравнений.

56. Рассмотрим выражение $\sigma(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)})$, каждый член которого — одночлен, целый по отношению к $x, y, y' \ldots, y^{(m)}$, и произведем его последовательное дифференцирование n раз. Если обозначить через ν наиболее высокий порядок членов, участвующих в полученном выражении, то разность $\nu-n$ будет называться силой данного выражения. Это понятие, по предложению Бореля, позже заменено понятием вес. Так, выражение вида x^n имеет силу, равную $-n$; сила любого выражения вида $x^p y^q$ равна $-p-q+1$, где p, q — целые; сила любого выражения P, не содержащего ни x, ни y, равна порядку наиболее высокой из производных, которая сюда входит. Если обо-

значить силу выражения P через f, то сила произведения $x^q P$ равна $f-q$. сила суммы равна наибольшей из сил слагаемых и т. д.

57. Эрмит (Hermite) Шарль (25.XII. 1822 — 14.I. 1901) — известный французский математик, член Парижской академии наук с 1856 г. С 1848 г. он работал в политехнической школе, став экзаменатором в 1863 г. В 1869 г. Эрмит заместил Дюамеля в Сорбонне по кафедре анализа. В 1878 г. он профессор политехнической школы, а с 1897 г.— почетный профессор Парижского университета. Эрмит выполнил исследования по различным вопросам классического анализа, алгебры, теории эллиптических функций и ее приложениям, теории чисел, теории специальных функций, теории алгебраических форм и их приложений.

58. Клейн (Klein) Феликс (25.IV. 1849—22.VI. 1925),— выдающийся германский ученый. В 1865 г. поступил в Боннский университет, став там через год ассистентом Плюкера. В 1866 г. он отправился в Геттинген к Клебшу, а осенью 1869 г.— в Берлин, где были Куммер и Вейерштрасс, и там подружился с Софусом Ли. Здесь он испытал непосредственное влияние работ Римана, а в Париже с 1870 г.—теории подстановок Жордана. Синтез этих двух течений дал возможность Клейну получить фундаментальные результаты, существенно повлиявшие на развитие математики конца XIX и начала XX веков. Работы его относились главным образом к римановым поверхностям, теории чисел, теории модулярных функций, неэвклидовой геометрии, алгебре, ряду прикладных вопросов. Аналитически изучаемые предметы у него тесно связывались с геометрией как по методу изучения, так и по характеру трактовки, что вело к более глубокому проникновению в сущность предмета. Докторскую диссертацию Клейн защитил в 1868 г., с 1872 г. он профессор в Эрлангене, с 1880 г.— в Лейпциге, затем в Мюнхене. Активную профессорскую деятельность проводил он с 1893 г., воспитав много учеников, а семинары его стали неиссякаемыми источниками новых идей. В них принимали участие ученые из многих стран. Клейн был одним из основателей известного журнала «Математические анналы», а также инициатором и активнейшим участником издания Энциклопедии математических наук, одним из основателей международных математических конгрессов. Он общался с известными русскими математиками. Чл.-корр. Петербургской академии наук он был с 1895 г.

59. Валленберг (Wallenberg) Георг (6.II. 1864—16.XI. 1924) — немецкий математик, воспитанник Геттингенского и Берлинского университетов. По окончании образования он преподавал математику в реальных училищах Берлина, а с 1906 г. стал приват-доцентом, с 1910 г.— доцентом, с 1917 г. — почетным профессором Высшей технической школы в Шарлотенбурге. Большинство его научных работ как ученика Л. Фукса принадлежат к теории дифференциальных уравнений, преимущественно линейной.

60. Петрович (Petrovich) Михаил (28.VI. 1868—8.VI. 1943) — выдающийся югославский математик, ученик Пенлеве, по окончании гимназии с 1885 по 1889 г. учился на естественно-математическом отделении философского факультета Белградской высшей школы, а затем в Париже, в Нормальной школе. В 1892 г. получил степень лиценциата, а в 1894 г. степень доктора математических наук и возвратился в Белград, заняв должность профессора математики Высшей школы, преобразованной в университет в 1905 г., где и протекала вся его дальнейшая научно-педагогическая деятельность. Исследования Петровича относились к области теории дифференциальных уравнений, теории функций (действительного и комплексного переменного), математической физике, алгебре, геометрии, механике, химии, философии. Ему удалось создать оригинальные методы и получить важные результаты во многих случаях. Он же автор ряда обзорных монографий и учебников. По его инициативе было организовано в 1932 г. издательство математического журнала Белградского университета.

61. Если общий интеграл принадлежит к указанному виду, существует класс алгебраических кривых одного и того же модуля, в который крывая (6.13) по y', y (x рассматривается как некоторый параметр) преобразуется рационально порядка n и жанр которой есть ω. В таком случае можно говорить о жанре соотношения между интегральными константами. Можно искать два первых интеграла, рациональных по $(y' y)$: $C=R(y', y, x)$, $c=r(y', y, x)$ таких,

что C и c удовлетворяют соотношению между интегральными константами и что все другие первые интегралы, рациональные по y', y (пусть $\gamma = \varrho(y', y, x)$), выражаются рационально по C, c. (Примечание Коэна).

62. Зоретти (Zoretti) Людовик (29.VI. 1880—1948) — уроженец Марселя, ученик Пенлеве по высшей Нормальной школе (1899—1904 гг.), доктор (1905 г.), профессор математики в Лионе, затем (с 1908 г.) в университете Гренобля. С 1911 г. он профессор математики и механики в университете Кана, и с 1914 г.— директор технического института в Нормандии. Основные работы в области теории аналитических функций и действительного переменного и прикладной математики.

63. Мальмквист (Malmquist) Аксель Иоганес (19.X. 1882—24.II. 1952) — скандинавский математик, ученик Миттаг-Леффлера, учился в Стокгольме, доктор философии (1909 г.), с 1910 г.— доцент математики университета и с 1913 по 1948 год—профессор высшей технической школы в Стокгольме. Мальмквист — один из видных исследователей в области аналитической теории нелинейных уравнений. Он брался за решение трудных вопросов и добивался успеха. Основные работы его относятся к теории дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного.

64. Имеется в виду оживленная переписка между рядом выдающихся математиков, в числе которых были члены семьи Бернулли: Даниил, Иоганн (его отец), Николай I (его двоюродный брат), Николай II (его родной брат), Х. Гольдбах, Л. Эйлер. Эта переписка была опубликована в 1843 г. П. Г. Фуссом, внуком Эйлера, непременным секретарем Петербургской академии наук (Correspondence mathématique et physique de quelques célebres géometres du XVIII siecle, t. I, II, St. Petersbourg, 1843).

65. Куммер (Kummer) Эрнст Эдуард (29.I. 1810—14.V. 1893) — известный немецкий математик, доктор (1831 г.), преподавательскую деятельность начал как учитель гимназии. В 1842 г. он получил профессуру по математике в Бреславльском университете. Через тринадцать лет Куммер заместил Дирихле как в Берлинском университете, так и в академии, чл.-корр. которой он был с 29 лет. Научную деятельность Куммер начал с 1832 г. и в последующие 48 лет опубликовал около ста работ, посвященных теории рядов, дифференциальных уравнений и другим разделам анализа, а также и механике. Особое значение имела созданная им около 1842 г. теория алгебраических чисел, методы которой оказали огромное влияние на последующее развитие теории чисел и алгебры. Изучение делимости алгебраических чисел привело его к введению понятия идеальных чисел. Дальнейшие важные результаты в этом направлении были получены в Петербургской математической школе.

66. $$y'' - y'^2 \frac{y(2xy^2 - x - 1)}{(1-y^2)(1-xy^2)} + y\left[\frac{y^2-1}{(1-x)(1-xy^2)} + \frac{1}{x}\right] - \frac{y(1-y^2)}{4x(1-x)(1-xy^2)} = A(x)\sqrt{(1-y^2)(1-xy^2)}.$$

Его оба интеграла могут быть записаны $y = sn_x[\varphi(x) + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2]$, где ω_1, ω_2— периоды функции sn, которые соответствуют модулю x, и $\varphi(x)$ — некоторый частный интеграл уравнения $\varphi'' + \frac{\varphi'(1-2x)}{x(1-x)} - \frac{\varphi}{4x(1-x)} = A(x)$.

Если $A=0$, получим уравнение, рассмотренное Пикаром [235.9, 165], которое обладает бесконечностью алгебраических интегралов.

67. Сущность этого соответствия, определенного интегралом $y(x)$ уравнения (E) Пенлеве объясняет следующим образом.

Пусть $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0')$ — интеграл уравнения (E), определенный начальными условиями x_0, y_0, y_0'. Функция $y(x)$, мероморфная во всей плоскости x, есть тождественно мероморфная функция от x_0, y_0, y_0' во всей плоскости каждого из этих переменных, но $x=\infty$, $y_0=\infty$, $y_0'=\infty$ есть существенно особые точки $\varphi(x, x_0, y_0, y_0')$. Равенства

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0'), \qquad y' = \varphi'(x, x_0, y_0, y_0') \tag{a}$$

можно также записать

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y, y'), \qquad y_0' = \Phi'(x_0, x, y, y'). \qquad \text{(в)}$$

Если придать x и x_0 числовые значения, равенства (а) и (в) определят биоднозначное(но не бирациональное) соответствие между парами (y, y') и (y_0, y_0'). Рассмотрим некоторым общим способом биоднозначное соответствие между плоскостями yoz и y_0oz_0, выражаемое равенствами

$$y = f(y_0, z_0), ; \quad y_0 = f_0(y, z);$$

$$z = \varphi(y_0, z_0); \quad z_0 = \varphi_0(y, z),$$

где f и φ, f_0 и φ_0 — мероморфные функции двух переменных. Такого рода соответствия были изучены Пенлеве в [228.11, 482—485; 501—509], где он, в частности, показал, что они подразделяются на два класса в зависимости от того, существует или нет семейство алгебраических кривых плоскости yoz, остающееся алгебраическим при преобразовании. В первом случае соответствие называется полутрансцендентным, во втором — существенно биоднозначным. Биоднозначное соответствие вида $y = y_0$, $z = z_0 e^{y_0}$, $y_0 = y$, $z_0 = ze^{-y}$ есть полутрансцендентное. Комбинация двух преобразований $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0 e^{y_0}$, $y = y_1 e^{z_1}$, $z = z_1$ ведет к преобразованию, существенно биоднозначному,

$$y = y_0 e^{(z_0 e^{y_0})}, \qquad z = z_0 e^{y_0}; \qquad y_0 = ye^{-z}, \qquad z_0 = ze^{-(ye^{-z})}.$$

Но Пенлеве показал также, что существуют биоднозначные соответствия, которые не являются результатом комбинаций полутрансцендентных преобразований. Затем показывается, что соответствия (а) и (в) есть существенно биоднозначные.

68. Ермаков Василий Петрович (27.II. 1845—16.III. 1922) — видный русский математик, воспитанник Киевского университета (1864—1868 гг.), магистр 1873 гг.), доктор (1877 г.) математических наук, в 1884 был избран чл.-корр. Петербургской академии наук. Научно-педагогическая деятельность В. П. Ермакова протекала в Киевском университете (с 1874 г.— доцент, затем профессор и с 1899 г.— заслуженный профессор), в Киевском политехническом институте (до конца жизни) и на Высших женских курсах. Основные работы его относились к теории дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, механике, анализу, геометрии и др. Он был автор многочисленных учебников, пособий и методических записок, издавал «Журнал элементарной математики».

69. Борель (Borel) Феликс Едуард Юстин Эмиль (7.I. 1871—3.II. 1956)— выдающийся французский математик и видный общественный деятель, воспитанник Нормальной школы Парижа (1889—1892 гг.), доктор 1894 г.). В 1893—1897 гг. был лектором математики в Лилльском университете, затем лектором и профессором по теории функций в Нормальной школе (до 1920 г.). Здесь в 1910 — 1920 гг. одновременно был заместителем ректора по научной части. В 1921 г. избран в члены Парижской академии наук и позже (с 1927 г.) был директором института Анри Пуанкаре. Во время первой мировой войны Э. Борель руководил на фронте комиссией по изучению пеленгации неприятельских пушек. Будучи депутатом парламента от Аверона, Борель в кабинете Пенлеве в 1925 г. занимал пост военно-морского министра.

Круг научных интересов Бореля весьма широк, но основные работы его касаются теории функций действительного и комплексного переменного, теории вероятностей, математической физики и др. Он был инициатором создания некоторых отраслей современного математического анализа (расходящихся рядов, меры множеств, диофантовых приближений и др.). Весьма полезной была организованная им серия «Собрание монографий по теории функций».

70. Фукс (Fuchs) Максимилиан Эрнст Рихард (5.XII. 1873—1945) — доктор философии (1897 г.), воспитанник Берлинского университета (1893—1898 гг.), сын Лазаря Фукса. Работал старшим учителем в гимназии Бисмарка с 1901 г.

в Вильмсдорфе и экстраординаторным профессором Высшей технической школы Шарлоттенбурга, затем (с 1922 г.) профессором Высшей технической школы Берлина. Имеет работы в области теории дифференциальных уравнений, преимущественно линейных, теории функций и прикладных вопросов.

71. Гамбье (Gambier) Бертран (31.VIII. 1879—2.II. 1954—французский математик, ученик Пенлеве, воспитанник Нормальной школы и препаратор там же в 1904—1907 гг. Затем был преподавателем математики на факультете наук Реньи с 1909 по 1922 год, потом получил кафедру дифференциального и интегрального исчисления в Лилле, занимая ее до 1948 г. Научные работы Гамбье весьма многочисленны. За некоторые из них он несколько раз получал премию Парижской академии. Основные его интересы принадлежали геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории функций и др.

72. Гарнье (Garnier) Эдуард Луи Рене (16.I. 1887)—ученик Пенлеве и Пикара, член Парижской академии наук. В 1903—1906 г. учился в Парижском университете, в 1911 г. получил степень доктора и стал преподавателем (с 1913 г.) и профессором (с 1920 г.) математики и астрономии в университете Пуатье. С 1932 г.— профессор, с 1936 г.— почетный профессор факультета наук Парижского университета, с 1943 г.— лектор в политехнической школе Гарнье, с 1952 г.— экзаменатор. Работы его относятся в основном к аналитической теории нелинейных уравнений (высших порядков), алгебре, теории функций комплексного переменного, специальным функциям и прикладным вопросам.

73. Характеристика определяется следующим образом. Пусть $|t_0|<1$ и η — положительное малое число. Положив $t=t_0e^{\tau}$ и предполагая неопределенное направление R плоскости T, точки которого имеют аргумент γ где $\frac{\pi}{2}+\eta<\gamma<\frac{3\pi}{2}-\eta$,, меняя немного понятие Бутру, Гарнье называет характеристикой уравнения VI любую ветвь интеграла вдоль прямолинейного направления R.

74. Аппель (Appel) Поль Эмиль (27.IX. 1855—24.X. 1930) — известный французский математик и механик, воспитанник Нормальной школы, доктор наук (1876 г.), лектор этой же школы в 1881—1885 гг., затем профессор рациональной механики, декан и ректор Парижского университета. В 1892 г. П. Аппель избирается членом Парижской академии наук и впоследствии много лет был ее президентом. С 1911 г он чл.-корр. Петербургской академии наук и позже — почетный член АН СССР. В 1970 г. П. Аппель сошелся с А. Пуанкаре, своим школьным товарищем, и этим было положено начало знаменитой триаде Аппель—Пуанкаре—Пикар, которая затем в течение десятилетий определяла основное направление развития французской математики. Научное наследие Аппеля весьма огромно — около трехсот названий. Основные его работы относились к механике, геометрии, теории аналитических функций и дифференциальных уравнений. Капитальный его трактат по теоретической механике в пяти томах дает в широком аспекте систематический обзор фактов и методов этой науки до начала XX века. Аппель был не только творцом науки и ученым, но и замечательным педагогом, автором ряда фундаментальных руководств.

75. Шази (Shazy) Жан Франсуа (15.VIII. 1882—9.III. 1955) — французский математик и астроном, член Парижской академии наук (с 1937 г.) и Бюро долгот (директор с 1952 г.), почетный профессор факультета наук Парижа и Центральной школы искусств и ремесел. Преподавательская деятельность его протекала в Гренобле, Лилле, откуда он в 1925 г. возвратился в Париж и заместил Пенлеве по кафедре аналитической механики. В этот период большая часть его трудов относилась к небесной механике, изучению движения планет, проблеме трех тел и др. Ему принадлежит большой двухтомный трактат по теории относительности и небесной механике и ряд курсов.

76. Соколов Юрий Дмитриевич (26.V. 1896—2.II. 1971) — выдающийся украинский математик и механик, воспитанник Киевского университета, доктор (1929 г.), чл.-корр. АН УССР с 1939 г. С 1921 г. стал работать в системе Академии наук УССР, где заведывал различными отделами, в последнее время — отделом дифференциальных уравнений Института математики. С 1930 г.

Ю. Д. Соколов — профессор, а позже заведующий кафедрой математики Киевского строительного института. Он был также профессором Киевского университета (1936—1949 гг.) и заведующим кафедрой математики Киевского политехнического института (1936—1941 гг.). Основные работы Ю. Д. Соколова (их более ста) относятся к небесной механике, гидромеханике, теории дифференциальных уравнений (в том числе аналитической) и другим, где автор получил ряд фундаментальных результатов, а для решения рассмотренных задач им построены весьма эффективные методы.

77. Биркгоф (Birkhoff) Георг Давид (21.III. 1884 — 12.XI. 1944) — известный американский математик, доктор философии (1907 г., Чикаго), учился в Кембридже и Чикаго. Преподавательская деятельность Биркгофа протекала в Принстонском, Висконсинском и более всего в Гарвардском университетах. Долгое время Биркгоф был председателем Американского математического общества, которое издало в 1950 г. собрание его математических трудов. Довольно многочисленные работы Биркгофа относились в основном к теории дифференциальных и разностных уравнений, в частности к общей теории динамических систем, к статистической механике (эргодическим теоремам), к теоретической механике (проблеме устойчивости) и другим прикладным вопросам, где широко применялись методы топологии и теории множеств.

78. Шлезингер (Schlesinger) Людвиг (1.XI. 1864—16.XII. 1933) — ученик и последователь Фукса, учился в 1882—1887 гг. в Гейдельберге и Берлине. Преподавательская деятельность его проходила в университетах Бонна, Клаузенберга, Гиссена. В последнем он руководил математическим семинаром. Шлезингер был членом Венгерской академии наук, Немецкой академии естествоиспытателей в Галле, членом ряда математических обществ, в том числе и Харьковского. Многие годы он был издателем известного журнала Крелля. Много сил и энергии Шлезингер вложил в издание собрания сочинений Гаусса и материалов к научной биографии последнего.

79. Вольтерра (Volterra) Вито (3.V. 1860 — 11.X. 1940) — известный итальянский математик, воспитанник Нормальной школы Пизы, доктор физики (1882 г.), затем почетный доктор многих университетов. С 1883 г. — профессор механики университета в Пизе, с 1893 г.— в Туринском университете, а с 1900 по 1932 год — профессор математической физики в Римском университете. Вольтерра был членом Римской и других академий, чл-корр. Петербургской академии с 1908 г. Многочисленные публикации Вольтерра относятся к области уравнений с частными производными математической физики, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и функционального анализа. Многие его результаты имеют широкие применения в теории упругости, электротехнике и других прикладных вопросах. Он был одним из основоположников математической биологии. Вольтерра первый предложил использовать гелий вместо водорода и организовал производство гелия после 1917 г. С 1932 г., после прихода фашизма, Вольтерра вынужден был оставить Италию и жить большей частью за границей.

80. Племель (Plemely) Иосип (11.XII. 1873 — 22.V. 1967) — выдающийся югославский математик, по окончанию гимназии в Любляне с 1894 по 1898 год изучал математику на философском факультете Венского университета, а немного позже (1899—1901 гг.) продолжил свое математическое образование в университетах Берлина и Геттингена. С 1907 г. И. Племель — профессор Черновицкого университета. В 1919 г. был организован университет в Любляне, и Племель занимал здесь ординатуру до 1957 г., будучи некоторое время и ректором университета. Его научные интересы принадлежали теории функций, теории потенциала, дифференциальным и интегральным уравнениям.

81. Томé (Thomé) Людвиг Вильгельм (13.III. 1841—1.X. 1910) — известный немецкий математик, ближайший друг Г. Кантора. Учился в университетах Бонна, Мюнхена, Берлина, доктор философии с 1856 г., с 1869 г.— приват-доцент, а через год — профессор Берлинского университета (на месте выехавшего Фукса). По выезде Фукса из Грейфсвальда (1874 г.) Томé получил здесь ординатуру и преподавал еще 36 лет. Томé был ближайшим последователем Л. Фукса и по научной работе. С 1871 г. стали появляться довольно многочисленные его исследования по линейным дифференциальным уравнениям и

некоторым их приложениям. Этой тематике он был верен всю жизнь и все свои работы печатал только в журнале Крелля.

82. Таннери (Tannery) Жюль (24.III. 1848 — 11.XI. 1910) — французский математик, ученик и последователь Фукса, доктор математики, с 1875 г.— профессор теоретической и экспериментальной механики в Сорбонне, с 1884 г.— вице-директор Нормальной школы. Ж. Таннери — основатель нового направления аналитической теории линейных дифференциальных уравнений во французской математике. Другие работы относились к теории функций, истории математики и методике.

83. Несущественно особая точка в работах других авторов, главным образом немецких, называлась также особой точкой по виду, особой точкой определенности, кажущейся особой точкой и т. д. и в известном смысле отличалась тогда от просто регулярной точки. Одно из характерных отличий состояло в том, что для несущественно особой точки линейного дифференциального уравнения определитель фундаментальной системы обращался в нуль, для регулярной — не обращался; второе — в существенном различии корней определяющего уравнения и др. Критерий Фукса в более компактной форме представлен Шлезингером. Подробней об этом см. в [254.1, 200—205; 171.1, 60—62; 2.1, 110]. О смысле дальнейшего употребления этих понятий см. в [222, т. II, 639].

111. Фробениус (Frobenius) Фердинанд Горг (26.X. 1849—3.VIII. 1917) — немецкий математик, воспитанник Берлинского университета (доктор с 1870 г.). Был профессором Цюрихского политехникума, затем Берлинского университета. В 1893 г. избран членом Берлинской академии наук. Основные работы Фробениуса относятся к алгебре, к теории алгебраических чисел, в частности к теории матриц, теории конечных групп и их представлений матрицами и в начале деятельности к линейным дифференциальным уравнениям.

85. Похгаммер (Pochhammer) Лео Август (25.VII. 1841—24.III. 1920)—немецкий математик, учился в Берлине с 1850 г., доктор философии (1863 г.) и с 1872 г.— приват-доцент математики в Берлине. С 1874 г. занял должность экстраординарного и с 1877 г. ординарного профессора математики в Киле. Основное направление научной работы — теория дифференциальных уравнений в различных аспектах, главным образом линейных, в частности гипергеометрических и их обобщений.

86. Кох (Koch) Нильс Фабиан Хельге Фон (25.I. 1870—11.III. 1924) — шведский математик, учился в 1887—1892 гг. в Стокгольме, в 1892—1893 гг.— в Лейпциге и Париже, доктор философии с 1892 г. (Упселе). Работал доцентом, с 1905 г.— профессором высшей технической школы Стокгольма, затем (с 1911 г.) там же профессором университета. Исследования проводил в области теории дифференциальных уравнений, теории чисел.

87. Буссинеск (Boussinesq) Валентин Иозеф (13III. 1842 — 19.II. 1929) — известный французский механик и математик, доктор с 1876 г., член Парижской академии наук с 1886 г. Преподавательская деятельность его проходила сначала в колледжах; с 1872 г.— профессор математики на факультете наук Лилля, а затем с 1886 по 1919 год — профессор Сорбонны, где читал курс математической физики, механики, теории вероятностей. Научная продукция Буссинеска огромна и относится к математической физике, оптике, гидродинамике и гидравлике, теории упругости и другим прикладным вопросам, философии и истории математики, методике.

88. Коттон (Cotton) Эмиль Клемент (5.II. 1872 — 14.II. 1950) — французский математик, доктор наук с 1899 г., ученик Дарбу и Гурса. Был сначала профессором лицея де-Бур, затем практически вся его деятельность прошла на факультете наук Гренобля, где он занимал кафедру рациональной и прикладной механики с 1901 по 1942 год. Автор весьма интересных работ по механике, дифференциальной геометрии и некоторым вопросам анализа.

89. Боль Пирс Георгиевич (23.X. 1865 — 25.XII. 1921) — известный латвийский математик, воспитанник Дерптского университета (1884—1887 гг.). Преподавательская деятельность Боля проходила сначала в учительской семинарии, а с 1895 г. в Рижском политехническом институте. В его магистерской диссертации (1893 г.) были заложены основы теории почти периодических

функций, а докторская (1900 г.) была одной из первых работ, посвященных развитию и систематическому применению качественных методов математического анализа. Боль известен и как первоклассный шахматист своего времени.

90. Бесселеву функцию $J_0(x)$ еще в 1923 г. [J. de l'Éc. Polyt., t. XII, Cah. 19, p. 350] Пуассон разложил в полусходящийся ряд, упорядоченный по убывающим степеням x. Данная им формула позже (1858, J. f. M., 66, 189) строго доказана Липшицем; результаты Кнезера позволяли решать такие вопросы для интегралов линейных дифференциальных уравнений более общего вида.

91. Горн (Horn) Якоб (14.II. 1867 — 24.II. 1946) — немецкий математик, учился в Гиссене и Берлине, доктор философии (1889 г., Гейдельберг). Преподавательская деятельность его проходила во Фрейбурге (приват-доцент университета с 1890 г.), в Берлине (Высшая техническая школа, с 1892 г.), в Гарце (профессор горной академии с 1900 г.), в Дармштадте (профессор математики высшей технической школы, с 1907 г.). Работы в области теории дифференциальных и интегральных уравнений и других отраслей анализа.

92. Рассматривается уравнение

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)\,y = 0,$$

коэффициенты которого — целые рациональные функции по x и притом $p_j(x)$ имеет степень $h+jk$ ($j=0, 1, \ldots, n$). Тогда согласно Пуанкаре [237.15, 305] $x=\infty$ называется точкой неопределенности ранга $k+1$.

93. Это была рукописная работа на конкурс медалей «Представление и применение инвариантов линейных дифференциальных уравнений», которая хранится в ЦГИА г. Тарту. В ней рассматривались инварианты уравнения вида (11.35), т. е. такие рациональные выражения от коэффициентов $p_i(x)$ и их производных, которые не изменяются при подстановке $y=\varphi(x)z$, где $\varphi(x)$ — заданная функция.

94. Анисимов Василий Афанасьевич (27.II. 1860 — 27.VIII. 1907) — выходец из крепостных крестьян, воспитанник Московского университета, ученик и последователь Фукса, профессор Варшавского университета (с 1890 г.) и Варшавского политехнического института (с 1898 г.). Магистерскую диссертацию Анисимов защитил в 1889 г., докторскую — в 1892 г. Несмотря на выполнение большой педагогической нагрузки (он был также и деканом механического отделения института в 1899—1903 гг.), В. А. Анисимов продолжал интенсивную научную деятельность. Наиболее ценны его работы по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, первые на русском языке.

95. Шварц (Schwarz) Герман Амандус (25.I. 1843—30.XI. 1921) — известный немецкий математик, ученик Вейерштрасса и Куммера, член Берлинской академии наук (с 1892 г.), чл.-корр. Парижской академии, один из основателей немецкого математического союза, которому он верно служил 60 лет. Учился Шварц в 1860—1866 гг. в ремесленном институте и Берлинском университете, получив степень доктора философии в 1864 г. Преподавательская деятельность его протекала в Берлинском университете (приват-доцент в 1866 г., профессор с начала девяностых годов), в университете Галле (с 1867 г. экстраординатура), политехнической школе Цюриха (с 1869 г.— профессор высшей математики), Геттингенском университете (с 1875 г., профессор). В Шварце сочетались черты творца науки и замечательного педагога, существенно повлиявшего на образование нескольких поколений немецких математиков. Его коллоквиумы стали источником многих интересных идей, разрабатываемых учениками. В идейном смысле Шварц был учеником также Римана и Штейнера. В своих исследованиях он выступал не только как остроумный аналитик, но и как геометр. Основные области его научных изысканий — проблема конформных отображений и теория минимальных поверхностей, в развитие которых он внес существенный вклад, в известной степени имели геометрическую природу. Они были поставлены Гауссом и Риманом и с достаточной строгостью решены Шварцем.

96. Гюнтер Николай Максимович (5.XII. 1871 — 4.V. 1941) — известный советский математик, заслуженный деятель науки РСФСР, чл.-корр. АН СССР, профессор Ленинградского университета. Н. М. Гюнтер — воспитанник Петербургского университета (окончил в 1894 г.), магистр (1904 г.), доктор (1915 г.). Его первые работы, написанные под влиянием А. А. Маркова, относились к аналитической теории линейных уравнений. В дальнейшем он обратился к математической физике и различным прикладным вопросам, главным образом гидродинамике, а также к общей теории интегральных уравнений. Н. М. Гюнтер работал в различное время и в других Ленинградских высших учебных заведениях. Был председателем Ленинградского математического общества.

97. Летников Алексей Васильевич (1.I 1837 — 27.II. 1888) — окончил в 1856 г. Московский Межевой институт, слушал лекции в Парижской политехнической школе и Сорбонне, доктор Лейпцигского университета (1867 г.), магистр (1868 г.), доктор (1874 г.), чл.-корр. Петербургской академии наук (1884 г.), профессор Московского технического училища и Межевого института, один из основателей Московского математического общества. Работы его относятся преимущественно к теории дифференцирования с произвольным указателем и некоторым ее приложениям, к интегральному исчислению и др.

98. Тóме (Thomae) Иоганес Карл (11.XII. 1840 — 2.IV. 1921) — немецкий математик, доктор философии Геттингенского университета (1864 г.), ученик Римана, с 1879 г.— ординарный профессор математики в Иенском университете. Работал в области теории специальных функций и функций комплексного переменного, алгебры, геометрии и других, автор ряда учебников.

99. Виртингер (Wirtinger) Вильгельм (19.VII. 1865 — 16.I. 1945) — австрийский математик, учился в 1884—1888 гг. в Вене и в 1889 г.— в Берлине и Геттингене, доктор философии (1887 г.). Научно-преподавательская деятельность его протекала в Вене (1890—1895 гг.), Инсбруке (профессор университета, Вене (1903—1935 гг., профессор математики университета). Научные работы принадлежали к области теории функций комплексного переменного, дифференциальным уравнениям, специальным функциям, дифференциальной геометрии, теории относительности.

100. Папперитц (Papperitz) Иоганес Эрвин (17.II. 1857 — 5.VIII. 1938) — немецкий математик, учился в 1875—1877 гг. в Лейпциге, затем Мюнхене и опять в Лейпциге, доктор философии (1883 г.). С 1886 г. он доцент, с 1889 г.— профессор Высшей технической школы в Дрездене, а с 1892 по 1927 год — профессор математики в Горной академии Фрейбурга. Исследования его принадлежат области геометрии, специальных (гипергеометрических) функций, истории математики.

101. Абрамович Казимир Федорович (4.III. 1889 — 10.IX. 1936) — воспитанник Киевского университета (1908—1912 гг.), доктор философии Варшавского университета (1922 г.), с 1921 г.— профессор математики Познаньского университета. Исследования его принадлежали области специальных, главным образом гипергеометрических, функций и общей теории функций комплексного переменного.

102. Как свидетельствует Фрике [150.3, 225], Гаусс начал заниматься теорией эллиптических функций еще в сентябре 1796 г., когда он рассматривал обратную функцию для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ и представлял ее степенным рядом. Уже в следующем году начались его глубокие исследования свойств лемнискаты. Он рассмотрел выражающий длину лемнискаты интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ и соответственную функцию обращения $x=\sin \operatorname{lemn} \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)$ — «синус лемнискатикус», период которой был обозначен через $\bar{\omega}$, и объяснил посредст-

вом уравнения $\frac{1}{2}\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. В 1797 г. он открыл уже и второй (мнимый) период лемнискатической функции, исходя из факта, что степень уравнения деления для деления дуги лемнискаты на n равных частей равна не n (как при круговых функциях), а n^2. Затем он представил эти функции как отношение некоторых функций, обозначенных символами P, Q, p, q.

103. Модулярные функции являются частным видом обращения функций Шварца и принадлежат к классу автоморфных функций. Если в уравнении Шварца (14.9) положить $\lambda=\mu=\nu=0$, то интеграл такого уравнения представит отношение двух периодов эллиптического интеграла, рассматриваемое как функция модуля x, равного k^2. Она будет удовлетворять условиям, когда обратная ей функция является однозначной. Поэтому $x=f(s)$ или $x=k^2(s)$ (где $s=\frac{\omega_1}{\omega_2}$) и называется модулярной [192.11, 408].

104. Группы, коэффициенты которых зависят от некоторых непрерывных параметров, называются непрерывными. В теории автоморфных функций имеют приложения прерывные, т. е. такие группы дробно-линейных преобразований, коэффициенты которых принимают дискретное множество значений, например группа подстановок $z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, где α, β, γ, δ — целые действительные числа при условии $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ (модулярная группа), или группа, где α, β, γ, δ— целые комплексные числа при $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ (группа Пикара). Имеется в виду, что эти группы не содержат бесконечно малых подстановок, т. е. таких

$$s_k(z)=\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k},\ \text{когда}\ \lim_{k\to\infty}\beta_k=0,\ \lim_{k\to\infty}\gamma_k=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k-\beta_k)=0,\ \alpha_k\delta_k-\beta_k\gamma_k=1.$$

105. Гильберт (Hilbert) Давид (23.I 1862 —14.II. 1943) — знаменитый германский математик, ученик Линдемана и Вебера, доктор философии Кенигсбергского университета (1884 г.), профессор Геттингенского (и некоторое время Берлинского) университета, директор с 1895 г. физико-математического семинара и института математики Геттингенского университета, член многих академий и научных обществ, чл.-корр. АН СССР с 1922 г. Научные исследования Гильберта оказали большое влияние на развитие математики нашего века, а его деятельность в Геттингене до начала 30-х годов привела к признанию этого города как одного из основных научных центров в области математической мысли. Основные направления его работ: теория инвариантов, теория алгебраических чисел, основания геометрии, принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений, интегральные уравнения, решение проблемы Варинга, математическая физика, логика и др.

106. Смирнов Владимир Иванович (29.V. 1887—11.II. 1974) — выдающийся советский математик, воспитанник Петербургского университета (окончил в 1910 г.), ученик В. А. Стеклова, с 1915 г.— профессор этого университета, в 1912 — 1930 гг. был также профессором Петербургского (Ленинградского) института инженеров путей сообщения, в 1929—1935 гг. работал в Сейсмологическом и Математическом институтах АН СССР. В 1917 — 1921 гг. В. И. Смирнов получил фундаментальные результаты в области аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, о чем речь идет в основном тексте. В 20-е годы научные интересы В. И. Смирнова были обращены к теории функций комплексного переменного, где он также получил весьма важные результаты, в частности в вопросах, связанных с предельными значениями аналитических функций и параметрическим представлением различных классов этих функций. В. И. Смирнов проводит большую научно-ор-

ганизационную работу, имеет многих выдающихся учеников. Чл.-корр. АН СССР избран в 1932 г., академиком — в 1943 г. Награжден двумя орденами Ленина и другими орденами, а в 1968 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда.

107. Идея принципа выбора основана на рассмотрении не одной частной функции с ее индивидуальными особенностями, а сразу целого их класса, обладающего общими свойствами. Решение задачи ищется в форме предела последовательности функций данного класса или семейства.

108. Но все же в конце первой части фрагмента Римана имеется интересное указание, что «интегралы от алгебраических функций могут считаться частным случаем рассмотренных здесь функций и что применение изложенных принципов к одному из интегралов такого рода приводит к рассмотрению функций, которые представляются Θ-рядами общего вида с произвольными модулями периодичности [246.4, 182].

109. Лаппо-Данилевский Иван Александрович (14.X. 1895—15.III. 1931) — выдающийся советский математик, воспитанник Ленинградского университета (окончил в 1925 г.). Вскоре написал статью об алгорифмическом определении алгебраической функции по заданному характеру ее разветвлений в указанных точках. Здесь задача приводилась к интегральным уравнениям, но работа не удовлетворила автора и осталась ненапечатанной. Через два года он занялся общей теорией функций, определяемых линейными дифференциальными уравнениями с рациональными коэффициентами. С 1927 г. в течение нескольких лет непрерывно появлялся ряд его работ, в которых была построена теория функций от матриц и дано ее применение к решению основных проблем теории линейных дифференциальных уравнений, выразившееся в получении ряда фундаментальных результатов, о которых идет речь в гл. XVI нашей работы. По первым основным результатам И. А. Лаппо-Данилевский в 1929 г. блестяще защитил докторскую диссертацию и с осени того же года стал читать в университете спецкурс по созданной им теории. Осенью 1930 г. он уехал за границу, получив Рокфеллеровскую стипендию, в январе 1931 г. избран чл.-корр. АН СССР и вскоре умер в Гиссене от тяжелой болезни сердца.

110. Еругин Николай Павлович (род. 14.V. 1907 г.) — известный советский математик, академик АН БССР, заслуженный деятель науки БССР, Герой Социалистического Труда, воспитанник Ленинградского университета, ученик акад. В. И. Смирнова. Педагогическая деятельность его протекала сначала в Ленинградском политехническом институте (1931—1933 гг.), затем в Ленинградском университете (с 1934 по 1956 год). Кандидатскую диссертацию Н. Еругин защитил в 1937 г. и с 1938 г. был старшим научным сотрудником ЛО МИАН. Вернувшись после тяжелого ранения с Ленинградского фронта в 1942 г., Н. П. Еругин в течение нескольких месяцев завершил большую работу по построению теории приводимых систем [25. 3] и в 1943 г. получил за нее степень доктора. В дальнейшем он продолжил интенсивную научную работу по основным направлениям теории обыкновенных дифференциальных уравнений: аналитической теории систем линейных и нелинейных уравнений, качественной теории, теории устойчивости, общей теории, а также по другим отраслям и смежным дисциплинам. В 1951 г. за работы по теории устойчивости и качественной теории Н. П. Еругину присуждена Государственная премия. С 1953 г. он был также директором Ленинградского отделения математического института АН СССР им. В. А. Стеклова. С 1956 г. деятельность Н. П. Еругина протекает в Минске, где он возглавляет Институт математики АН БССР и является главным редактором журнала «Дифференциальные уравнения», завоевавшего мировую известность. Среди учеников Н. П. Еругина много кандидатов и докторов наук. Участники возглавляемой им Минской школы теории дифференциальных уравнений получили много важных результатов.

111. Крылов Борис Леонидович (5.III (20.II). 1905—20.VII. 1965) — воспитанник Казанского университета (окончил в 1928 г.), кандидат (1936 г.), доктор физико-математических наук (1953 г.), профессор (1954 г.), в 1931—1944 гг. работал в Казанском университете, с 1944 г.— в Казанском авиационном институте. Основные работы связаны с определением группы системы Гаусса и решением проблемы Римана для системы Гаусса.

СПИСОК СОКРАЩЕННЫХ НАЗВАНИЙ ЖУРНАЛОВ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ИЗДАНИЙ[1]

Варш. ун. изв.— Варшавские университетские известия, Варшава.

Вест. АН СССР — Вестник Академии наук СССР, изд. АН СССР, М.

Диф. ур-ния — Дифференциальные уравнения, Минск.

ДАН БССР — Доклады Академии наук Белорусской ССР, Минск.

ДАН СССР — Доклады Академии наук СССР, М.

Журн. физ.-мат. об-ва, Л.— Журнал физико-математического общества, Л.

Зап. мат. отд. Новорос. об-ва естествоисп. — Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, Одесса.

Зап. Харьков. ун-та — Записки Харьковского университета, Харьков.

Изв. Ив. Возн. полит. ин-та — Известия Ивано-Вознесенского политехнического института, Петроград.

Изв. физ.-мат. об-ва, Каз.— Известия физико-математического общества, Казань.

Изв. физ.-мат. об-ва при Каз. ун-те — Известия физико-математического общества при Казанском университете, М.

ИМИ — Историко-математические исследования, М.

Истор. и методол. ест. н.— История и методология естественных наук, М., изд. МГУ.

Мат. сб.— Математический сборник, М.

Сб. трудов КИСИ — Сборник трудов Киевского инженерно-строительного института, К.

Собр. прот. физ.-мат. секции Каз. ун-та — Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при имп. Казанском университете, Казань.

Сообщ. ХМО — Сообщения и протоколы заседаний Харьковского математического общества, Харьков.

Тр. Ин-та физ. и мат. АН БССР — Труды Института физики и математики Академии наук Белорусской ССР, Минск.

Тр. Каз. авиаин-та — Труды Казанского авиационного института, Казань.

Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та — Труды Ленинградского кораблестроительного института, Л.

Тр. общ. теор. каф. УСХА — Труды общетеоретических кафедр Украинской сельскохозяйственной академии, К.

Тр. фіз.-мат. від. ВУАН — Труди фізико-математичного відділу Всеукраїнської Академії наук, К.

---

[1] Сокращенные названия городов, где выходило издание: М.— Москва, Л.— Ленинград, К.— Киев, СПб.— Санкт-Петербург, А.— Amsterdam, B.— Berlin, Bol.— Bologna, Brx.— Bruxelles, Bud.— Budapest, C.— Cambridge, E.— Edinburgh, G.— Göttingen, H.— Heidelberg, Kr.— Krakow, L.— London, Lpz.— Leipzig, Mil.— Milano, N.— Napoli, N. Y.— New York, O.— Oslo, P.— Paris, Pr.— Praha, R.— Roma, S.— Stockholm, T.— Toulouse, V.— Venezia, W.— Wien, War.— Warszawa, Z.— Zagreb.

Тр. физ.-мат. ин-та, отд. мат.— Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова, отдел математический, Л.

УМЖ — Украинский математический журнал, К.

УМН — Успехи математических наук, М.

Ун. изв., К.— Университетские известия, К.

Уч. зап. Каз. ун-та — Ученые записки Казанского университета, Казань.

Уч. зап. Костромс. пед. ин-та — Ученые записки Костромского государственного педагогического института, Ярославль.

Уч. зап. МГУ — Ученые записки Московского государственного университета, М.

Уч. зап. н.-и. к. Укр. — Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украины. Отдел Математический, Харьков.

Ac. Tokyo — Proceedings of the Imperial Academy of Tokyo.

Acta Er.— Acta Eruditorum publicata Lipsiae.

Acta M.— Acta Mathematica. S.

Acta Soc. Fen.— Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingforsae.

Amer. Ac. Proc.— Proceedings of the American Academy of arts and sciences, Boston.

Amer. J.— American Journal of Mathematics. Published under the auspices of the John Hopkins university, Baltimore.

Amer. M. Mont.— The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. Univers. of Buffalo. N. Y.

Amer. M. S. Bull.— Bulletin of the American mathematical society. A historical and critical review of mathematical science. N. Y.

Amer. M. S. Trans.— Transactions of the American Mathematical Society. Lancaster, N. Y.

Ann. de l'Ec. N.— Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. P.

Ann. di M.— Annali di matematica pura ed applicata. Mil.

Ann. of M.— Annals of Mathematics. The public office of Harvard university. Cambridge Mass., Princeton, N. Y.

Arch. d. M.— Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Lpz. und B.

Arch. f. M.— Archiv für Mathematik und Physik. Greifswald.

Ark. för M.— Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik utgivet af K. Svenska Vetenscaps-Akademien. S.

Batt G.— Geornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nello universita italiane. N.

Belg. Ac. Bull.— Bulletin de l'Academie Royale Belgique. (Classe science). Brx.

Belg. Mém. cour.— Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie R. des sciences, des lettres et des beau-arts de Belgique. Brx.

Belgr. Bull.— Bulletin de l'Academie des sciences mathematiques et naturelles. A. Sciences math. et phys. Belgrade.

Berl. Abh.— Abhandlungen der Königlichen Preusischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. B.

Berl. Ber.— Sitzungsberichte der Königlichen Preußichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. B.

Bömisch. Ber.— Sitzungsberichte der Kgl. Bömischen Gesellschaft der Wissenschaften. Pr.

Brux. S. sc.— Annales de la Societe scientifique de Bruxelles. Brx.

Bull. sc. m.— Bulletin des sciences mathématiques (et astron.) (Darboux Bull.). P.

Cambr. Trans.— Transactions of the Cambridge Philosophical Society. C.

Com. Ac. sci. Petr.— Commentarii Academie Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Petropoli.

C. r.— Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. P.

Deut. M. Ver.— Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Lpz.

Gött. Abh.— Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. G.

Gött. Nachr.— Nachrlehten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1906. G.

Gren. Ann.— Annales de l'University de Grenoble. Grenoble.

Heid. Ak. Ber.— Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. H.

J. de L'Ec. Pol.— Journal de l'Ecole Polytechnique, public par le conseil d'instruction de ces établissement. P.

J. de M.— Journal de Mathematiques pures et appliquées. (J. Liouville). P.

J. für M.— Journal für die reine und angewandte Mathematik (von Crelle). B.

J. of M.— Journal of pure and applied Mathematics. L.

Liége Mém.— Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Brx., P.

Lond. M. S. Proc.— Proceedings of the London Mathematical Society. L.

Lond. Phil. Trans.— Philosophical Transactions of the Royal Society of London. L.

Math. Ann.— Mathematische Annalen. Lpz.

Math. Z.— Mathematische Zeitschrift. B.

Memorial — Memorial des sciences mathematiques, publie de l'Académie des sciences de Paris. P.

Mem. Sav. Etr.— Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. P.

Mem. Soc. Ital.— Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle scienze. N., R.

Mem. Soc. R.— Memorie della Società Reale delle Scienze (detta dei XL). N.

Messenger — The Messenger of Mathematics. L. and C.

Monatsh. f. Math.— Monatshefte für Mathematik und Physik. W.

Münch. Abh.— Abhandlungen der Könniglichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

Natwiss.— Die Naturwissenschaften. B.

Nouv. Ann.— Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Ecoles spéciales à la licence et a l'agrégation. P.

Nova acta — Nova acta Academiae Scientiarum Petropolitanae.

Palermo Rend.— Rendiconti del Circolo Matematica di Palermo.

Periodico di M.— Periodico di Matematiche. Bol.

Pokroky mat.— Pokroky matematiky, fysiky a astronomie. Pr.

Prace mat.— Prace matematyczno-fizyczne. War.

Quart. J.— The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. L.

Reale Ist. M.— Reale Instituto lombardo di scienze e lettre. Rendiconti. Mil.

Rev. soc. sav.— Revue des sociétés savantes sciences mathematiques physiques et naturélles. P.

Rom. Acc. L. Rend.— Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, R.

S. M. F. Bull.— Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. P.

Stockh. Öfv.— Öfversigt af konglia Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. S.

Tids. for M.— Tidsskrift for Mathematik. Kopenhagen.

Torino Atti — Atti della Reale Academia di Torino. Torino.

Toulouse Ann.— Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathematiques et les sciences physiques. P.

Wiad. Mat.— Wiadomosci Matematyczne. War.

Zs. M. Ph.— Zeitschrift für Mathematik und Physik (Berg. O. Schlömilch). Organ für angewandte Mathematik. Lpz.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович К. Ф. 1. О гипергеометрических функциях с одной особенной по виду точкой.— Ун. изв., К., 1912, 32, № 10, 11, I—II, 1—118. 2. О распределении корней гипергеометрической функции на плоскости.— Ун. изв., К., 1915, 55, № 10, 81—82.

2. Анисимов В. А. Основания теории линейных дифференциальных уравнений, М., 1889, I—XIV, 1—200. 2. Предельный круг Фукса и его приложения, Варшава, 1892, 1—130. 3. Уравнение Риккати общего вида.— Варш. ун. изв., 1896, № 1, 2, 1—33. 4. О способах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые приложения способа дифференцирования.— Варш. ун. изв., 1897, № 4, 1—35.

3. Аппельрот Г. Г. 1. Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1893, 1—112. 2. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— Сборник памяти С. В. Ковалевской, Л.— М., Изд-во АН СССР, 1940, 61—156.

4. Баранецкий М. Г. О гипергеометрических функциях, М., 1873, 1—112.

5. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций, Ростов-на-Дону, Изд-во Ростов. ун-та, 1962, 1—312.

6. Бокштейн М. Ф. Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Уч. зап. МГУ, 1939, 15, математика, 3—70.

7. Боль П. Г. 1. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике, Юрьев, 1900, 1—114. 2. Избранные труды, Рига, Изд-во АН Латв.ССР, 1961, 1—237.

8. Брайцев И. Р. О некоторых дифференциальных и разностных линейных уравнениях, интегрируемых посредством определенных интегралов (по одному и многим независимым переменным), ч. 1, Варшава, 1901, I—XXIX, 1—304.

9. Бройль Луи де. По тропам науки, М., ИЛ, 1962, 1—408.

10. Бугаев П. В. 1. Алгебраические частные интегралы дифференциальных уравнений.— Мат. сб. 1894, 17, 3, 399—438. 2. Способ последовательных приближений. Его приложение к интегрированию дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1896, 19, 1—44.

11. Бурбаки Н. Очерки по истории математики, М., ИЛ, 1963, 1—292.

12. Васильев А. В. 1. Об особенных решениях в связи с новыми взглядами на задачу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, Казань, 1878, 1—34. 2. О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими.— Уч. зап. Каз. ун-та, 1880, 47, № 3-4, I—IV, 121—178. 3. Отзыв о сочинении Д. М. Синцова «Рациональные интегралы линейных уравнений».— Уч. зап. Каз. ун-та, 1898, 65, 12, 10—14.

13. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Изд. 2-е, М., «Наука», 1966, 1—508.

14. Выгодский М. Я. Математика и ее деятели в Московском университете во второй половине XIX в., ИМИ, 1948, 1, 141—183.

15. Гагаев Б. М. О росте интегралов дифференциальных уравнений первого порядка.— Изв. физ.-мат. об-ва при Каз. ун-те, 1925(2), 25, 15—19

16. Голубев В. В. 1. Об одном приложении теорем Пикара к теории дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1909, 27, 560—562. 2. К теории уравнений Пенлеве.— Мат. сб., 1912, 28, 323—349. 3. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, М.—Л., Гиз. ТТЛ, 1950, 1—436. 4. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., Гиз. ТТЛ, 1953, 1—288. 5. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916, 1—162; в кн.: [16.3], 13—196.

17. Гончаров В. Л. О научных работах Римана.— В кн.: [246.10], 7—46.

18. Граве Д. А. 1. Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения, К., 1912, 1—601. 2. Трактат по алгебраическому анализу. Т. II. Исторический обзор, К., 1939, 1—412. 3. Чи прогресує математика? — Нариси з історії техніки і природознавства, К., 1965, 6, 56—71.

19. Грудо Э. И. Замечания к уравнению Риккати.— Диф. ур-ния, 1966, 2, № 5, 714—715.

20. Гусев А. Н. Об истоках исследований Л. Эйлера по расходящимся рядам.— Уч. зап. Костром. пед. ин-та, 1965, 10, 10—23.

21. Гюнтер Н. М. О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений, С.-Пб., 1903, 1—216.

22. Деларю Д. М. 1. О разыскании особенных решений дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от двух переменных, Харьков, 1868, 1—82. 2. Об особых решениях дифференциальных уравнений какого бы ни было порядка.— Мат. сб., 1878, 9, 501—523.

23. Дзюбенко С. Т. Исторический очерк об асимптотических функциях и асимптотических рядах.— Труды общ. теор. каф. УСХА, К., 1963, 27—63.

24. Ермаков В. П. 1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с алгебраическими интегралами.— Мат. сб., 1894, 17, 500—529. 2. Об определении критических точек интегралов дифференциальных уравнений.— Ун. изв., К., 1902, № 9, 1—26.

25. Еругин Н. П. 1. Sur la substitution exposante pour quelques systemes irréguliers.— Мат. сб., 1935, 42, 6, 745—752. 2. Показательная подстановка иррегулярной системы линейных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1937, 17, № 5, 235—236. 3. Приводимые системы, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1946, 1—96. 4. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, Л., Изд. ЛГУ, 1956, 1—108. 5. К теории уравнения Риккати.— ДАН БССР, 1958, 2, 9, 359—362. 6. Работы советских математиков по аналитической теории дифференциальных уравнений (доклад).— Труды ин-та физ. и мат. АН БССР, 1959, 3, 62—71. 7. Первый метод Ляпунова.— Диф. ур-ния, 1967, 3, № 4, 531—578. 8. Асимптотические методы.— В кн.: [28.2], 372—378. 9. Аналитическая теория нелинейных уравнений.— В кн.: [28.2], 448—453. 10. (Соавт. Немыцкий В. В., Сологуб В. С., Стрыгин В. В.). Основные направления развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Научные коллективы и центры.— В кн.: [28.2], 453—479. 11. Итоги и перспективы.— В кн.: [28.2], 479—485.

26. Жуковский Н. Е. 1. Кинематика жидкого тела.— Мат. сб., 1876, 8, 1—79; 163—238. 2. О трудах С. В. Ковалевской по прикладной математике.— Мат. сб., 1891, 16, 10—20.

27. Журден Ф. Природа математики, Одесса, 1923, 1—177.

28. 1. История отечественной математики. Т. 2, К., «Наукова думка», 1967, 1—616. 2. История отечественной математики. Т. 4, кн. 1, К., «Наукова думка», 1970, 1—882.

29. Ковалевская С. В. 1. К теории дифференциальных уравнений в частных производных.— В кн.: [29.5], 7—50. 2. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки.— В кн.: [29.5], 153—220. 3. Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела.— В кн.: [29.5], 235—244. 4. Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твер-

дого тела около неподвижной точки.— В кн.: [29.5], 221—234. 5. Научные работы. Изд. 2-е, М., АН СССР, 1948, 1—368.

30. Колмогоров А. Н., Современная математика.— Сборник статей по философии математики, М., Учпедгиз, 1936, 7—13.

31. Коркин А. Н .1. Sur les équations différentielles ordinaires om premier ordre.— Math. Ann., 1896, 48, 317—364. 2. Интегрирование дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. Составлено по лекциям Коркина без его редакции З. Р. Беридзе. Издание студентов Гросвальда и Мрочека, СПб., 1903, 1—375.

32. Кочев В. А. Академик В. Г. Имшенецкий (жизнь и творческое наследие по математике и механике). Канд. дисс. МГУ (рук.), 1953, 1—406.

33. Кочин Н. Е. 1. Об одном частном случае задачи Римана.— ДАН СССР, 1937, 17, № 6, 287—289. 2. Sur la décomposition d'une matrice à définition rationnelle.— Мат. сб., 1937, 2(44), 5, 901—921.

34. Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса.— Труды Каз. авиа. ин-та, 1956, 31—203—445.

35. Кузнецов В. М., Из истории создания общей теории автоморфных функций.— Истор. и методол. ест. наук, 1966, V, 185—191.

36. Лаврентьев М. А. Sur une équation différentielle du premier ordre.— Math. Z., 1925, 23, 197—209.

37. Лагутинский М. Н. 1. Частные алгебраические интегралы, Харьков, 1908, 1—212. 2. Несколько слов о методе частных интегралов Г. Дарбу.— Зап. Харьков. ун-та, 1912, 2, 1—7.

38. Лаппо-Данилевский И. А. 1. Théorie algorithmique des corps de Riemann. Мат. сб., 1927, 34, 113—146. 2. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Vol. II. Mem quatr. Fonctions fondamentalles des substitutions exposantes dans un voisinago des substitutions nulles pour le systéme régulier.— Тр. физ.-мат. ин-та, отд. мат., 1935, 7, 5—31. 3. Memoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Vol. II. Mém. cinquième. Théorie des matrices satisfaisantes à des systèmes d'équations différentielles à coefficients rationnelles arbitraires.— Тр. физ.-мат. ин-та, отд. мат., 1935, 7, 32—99. 4. Memoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Vol. III. Mém. VIII—XIII, Varia.— Тр. физ.-мат. ин-та отд. мат., 1936, 8, 5—206. 5. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Volume I, II, III. Chelsea publishing company, USA, 1953, I—XIV, 1—254, 1—208, 1—204. 6. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Вступительная статья В. И. Смирнова, М., Гостехиздат, 1957, 1—456.

39. Лахтин Л. К. 1. Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях.— Мат. сб., 1892, 16, 597—812; 1893, 17, 1—216. 2. Дифференциальные резольвенты алгебраических уравнений высших родов.— Мат. сб., 1896, 19, 211—386, 393—638.

40. Летников А. В. 1. Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1866, 1, 297—350. 2. Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$.— Мат. сб., 1874, 7, 5—205. 3. Об определенных интегралах, содержащих функции, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению.— Мат. сб., 1883, 11, 327—414.

41. Лузин Н. Н. 1. Sur la reprŕsentation conforme. — Изв. Ив. Возн. полит. ин-та, 1919, 2, 77—80. 2. Работы по теории функций комплексного переменного.— УМН, 1952, 7, в. 2, 3—6.

42. Лукашевич Н. А. Некоторые задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. Автореф. докт. дисс., К., 1971, 1—16.

43. Ляпунов А. М. 1. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости.— Сообщ. ХМО, 1888, (2), 1, 7—60. 2. Общая задача об устойчивости движения. Изд. ХМО. 1892, 1—250. 3. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.— Сообщ. ХМО, 1895 (2), 4, 123—140. 4. Доказательство

двух теорем теории интегрирования дифференциальных уравнений (рук.). Архив АН СССР, Ленинградское отделение, фонд 257, опись 4, № 21, л. 1—7.

44. Максимович В. П. Разыскание общих дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирующихся в конечном виде и доказательство невозможности такого интегрирования для общего линейного уравнения второго порядка.— Казань, 1885, I—V, 1—37.

45. Марков А. А. 1. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда.— Сообщ. ХМО, 1886, 11, 51—62; 95—113. 2. Sur l'équation différentielle de la serie hypergéométrique. I, II, Math. Ann., 1887, 28, 586—593; 29, 247—258. 3. О целой функции, равной произведению двух гипергеометрических рядов.— Сообщ. ХМО, 1892, (2), 3, 252—256. 4. Sur la série hypergéometrique.— Math. Ann., 1892, 40, 313—316.

46. Маркуш И. И. Развитие асимптотических методов на Украине за годы Советской власти.— «Наука и техника», вып. 7, ч. 2, Л., 1972, с. 194.

47. Маркушевич А. И. 1. Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., ГИЗ ТТЛ, 1951, 1—127. 2. Работы Гаусса по математическому анализу.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс, М., Изд-во АН СССР, 1956, 147—216. 3. Математические труды В. В. Голубева (3.XII.1884—4.XII.1964).— В кн.: В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., Физматгиз, 1961, 5—9.

48. Математика, ее содержание, методы и значение, М., Изд-во АН СССР, 1956, т. 1, 1—296; т. 2, 1—395; т. 3, 1—336.

49. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости, М.—Л., ГИЗ ТТЛ, 1949, 1—663.

50. Мордухай-Болтовский Д. Д. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка.— Сообщ. ХМО, 1907, (2), 10, 34—64.

51. Назимов П. С. О сходимости рядов, служащих интегралами дифференциальных уравнений первого порядка.— Собр. прот. физ.-мат. секции Каз. ун-та, 1890, 8, 145—167.

52. Некрасов П. А. 1. О предельном круге Фукса.— Мат. сб. 1888, 14, 537—548. 2. Разъяснения по поводу статьи профессора Фукса, напечатанной в 108 томе журнала Крелля (стр. 181—198).— Мат. сб. 1891, 16, 219—227.

53. Парфентьев Н. Н. 1. Исследования по теории роста функций.— Казань, 1910, 1—192. 2. Отзыв о работе проф. Шлизингера из Гиссена...— Изв. физ.-мат. об-ва, Казань, 1912, (2), 18, № 4, 1—27.

54. Пергаменцева Э. Д. Об одном случае конформного отображения четырехугольника, ограниченного дугами окружностей.— УМН, 1957, 12, 2, 157—168.

55. Пиаджио Г. Интегрирование дифференциальных уравнений, М.—Л., ГТТИ, 1933, 1—347.

56. Покровский П. М. Исторический очерк теории ультра-эллиптических и абелевых функций, М., 1886, 1—29.

57. Полубаринова-Кочинова П. Я. 1. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1940, 157—186. 2. Научные работы С. В. Ковалевской.— УМН, 1950, 5, 4 (38), 3—14.

58. Поляков А. П. 1. Об обращении гипергеометрической функции и приведении ее к эллиптическим интегралам.— Мат. сб., 1911, 27, 424—432. 2. О приведении гипергеометрической функции к гиперэллиптическим интегралам.— Мат. сб., 1912, 28, 235—265.

59. Проблемы Гильберта. М., «Наука», 1969, 1—240.

60. Протасов А. М. О дифференциальном уравнении с четырьмя регулярными особыми точками.— Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1940.

61. Сабинин Е. Ф. 1. К мемуару Коши: «Об интегрировании дифференциальных уравнений».— Мат. сб., 1878, 9, 65—72. 2. Sur l'intégrations des équations différentielles par les séries. Bull. sc. m., 1878, (11), 2, Part 1, 284—292.

62. Савич С. Е. О линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами, СПб., 1892, 1—162.

63. Сибирский К .С. Метод инвариантов в качественной теории дифференциальных уравнений. Ротапринт, Кишинев, 1968, 1—184.

64. Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера, М., Гостехиздат, 1957, 1—168.

65. Синцов Д. М. 1. Распространение данного Э. Пикаром доказательства существования интеграла системы дифференциальных уравнений первого порядка на комплексные значения переменных.— Изв. физ.-мат. об-ва при Каз. ун-те, 1893, (2), 3, 138—146. 2. Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, Казань, 1895, 1—256. 3. Рациональные интегралы линейных уравнений.— Казань, 1889, 1—184. 4. Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек дифференциальных уравнений первого порядка.— Уч. зап. н. и. каф. Укр., 1924, I, 76—80.

66. Смирнов В. И. 1. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками, СПб., 1918, I—XVI, 1—307. 2. Приложения принципа сходимости к теории униформизации.—Сообщ. ХМО, 1918, (2), 16, 1—2, 39—54. 3. Sur les équatoins différentielles linéaires du second ordre et la théorie des fonctions automorphes.— Bull. sc. m., 1921, (2), 45, 93—120; 126—135. 4. О рациональных преобразованиях линейных дифференциальных уравнений второго порядка.— Мат. сб., 1927, 32, 2, 101—106. 5. Очерк научных трудов А. М. Ляпунова.— В кн.: А. М. Ляпунов, Избранные труды, М., Изд-во АН СССР, 1948, 341—450. 6. Работы И. А. Лаппо-Данилевского по теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: [38.6], 5—18.

67. Соболев С. Л. Краткая характеристика научной деятельности и основных трудов.— В кн.: Владимир Иванович Смирнов, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949, 5—31.

68. Соколов Ю. Д., 1. Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягаються за законом Ньютона.— Труди фіз.-мат. від. ВУАН, 1928, 9, 1, 1—62. 2. Об асимптотических решениях дифференциальных уравнений.— Сб. трудов КИСИ, 1948, 8, 62—74. 3. Особые траектории системы свободных материальных точек. К., Изд-во АН УССР, 1951, 1—126.

69. Сохоцкий Ю. В. Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями, С.Пб., 1868, 1—135.

70. Старков А. 1. Общий способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений.— Зап. мат. отд. Новорос. об-ва естествоисп., 1878, 1, 1—133. 2. К вопросу об интегрировании совокупных дифференциальных уравнений. Зап. мат. отд. Новорос. об-ва естествоисп., 1879, 2, 1—78.

71. Стеклов В. А. 1. Математика и ее значение для человечества. Государств. изд-во РСФСР, Берлин, 1923, 1—137. 2. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений.— Сообщ. ХМО, 1907, Изд-во Харьков. ун-та. 1956, 1—137.

72. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 7-е, М., Физматгиз, 1—427.

73. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики, М., «Наука», 1964, 1—234.

74. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917. I—VI, 1—308.

75. Тимченко И. Ю. Основания теории аналитических функций. Часть 1. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций, Одесса, 1899, 1—655.

76. Тихомандрицкий М. А. О гипергеометрических рядах. Магист. дисс., С.Пб., 1876, 1—218.

77. Тодоров П. Г. К теории уравнения Риккати.— УМЖ, 1966, 18, 1, 137—139.

78. Федоров Г. Ф. Проблема Фукса.— Мат. сб., 1924, 11 (53), в. 2, 97—120.

79. Фельдблюм М. Теория уравнения Риккати и свойства функций,

ему удовлетворяющих.— Варш. ун. изв., 1898, № 5, 1—40; № 7, 41—72; 1899, № 3, 73—104; № 4, 105—144.

80. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, К., «Наукова думка», 1966, 1—252.

81. Флоров П. С. Об уравнениях Риккати.— Сообщ. ХМО, 1884, 1, 5—35.

82. Фок В. А. О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на полуплоскости.— Журн. физ.-мат. об-ва, Л., 1927, 1, в. 2, 147—168.

83. Харди Г. Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951, 1—504.

84. Чеботарев Н. Г. «Многоугольник Ньютона» и его роль в современном развитии математики».— В кн.: Исаак Ньютон, М., 1943, 99—126.

85. Чебышев П. Л. Черчение географических карт.— Годичный торжественный акт в С. Петербургском университете, бывший 8 февраля 1856 г., С.Пб., 1856, 73—90.

86. Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов. — ИМИ, 1960, XIII, 441—472.

87. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3, М., «Наука», 1970, 1—352.

88. Шифнер Л. М. 1. О линейном дифференциальном уравнении n-го порядка.— Мат. сб., 1935, 42, № 5, 547—558. 2. Разложение интегралов системы дифференциальных уравнений с правильными особыми точками в ряды по степеням элементов дифференциальных подстановок.— Тр. физ.-мат. ин-та отд. мат., 1935, 9, 235—266.

89. Штокало И. З. Операционное исчисление (обобщения и приложения), К., «Наукова думка», 1972.

90. Эрдейи А. Асимптотические разложения, М., «Физматгиз», 1962, 1—127.

91. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года, М., «Наука»», 1968, 1—592.

92. Яблонский А. И., Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений, АН БССР, отд. физ.-мат. наук, Минск, 1971, 1—17.

93. Abel Niels. 1. Auflosung einer mechanischen Aufgabe.— J. für M., 1826, 1, 153—157. 2. Recherches sur les fonctions elliptiques.— J. für M., 1827, 2, 101—181; 1828, 3, 160—190.

94. Appel Paul. 1. Sur les invariants de quelques équations différentielles.— J. de M., 1889 (4), 5, 361—423. 2. Sur les intégrales de fonctions a multiplicateurs et leur application au développement des fonctions Abéliennes en séries trigonométriques.— Acta M.,1890, 13, 1—174. 3. Mémoire sur les équations différentielles linéaires.— Ann. de l'Ec. N., 1881 (2), 10, 391—424. 4. Sur les polynomes se rattachant à l'équation différentielle $y''=6y^2+x$.— S. M. F. Bull., 1917, 45, 150—153.

95. Autonne Leon. 1. Sur la nature des integrales algébriques de l'équation de Riccati.— C. r., 1883, 96, 1354—1356. 2. Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels (Second mém).— J. de l'Ec. Pol., 1885, Cah., 54, 1—30. 3. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre.— C. r., 1891, 113, 632—635. 4. Sur la theorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degre.— J. de l'Ec. Pol., 1891, Cah. 61, 35—122. 5. Sur la limitation du degre pour l'intégrale genérale algébrique de l'équation différentielle du premier ordre.— C. r., 1893, 116, 132—134. 6. Sur la limitation du degre pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre (premier mémoire).— J. de Ec. Pol., 1893, Cah., 63, 79—183; 1894, Cah. 64, 1—53. 7. Sur l'équation différentielle du premier ordre et sur les singularités de ses intégrales algébriques.— J. de L'Ec. Pol., 1896, (2), Cah. 2, 51—69; 1897, (2), Cah. 3, 1—74. 8. Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati.— J. de M., 1900 (5), 6, 157—214.

96. Becker O. et Hofmann I. E. Histoire des mathématiques., P., 1956, 1—377.

97. Bell E. T. The development of mathematics, 2-ed. N. Y.— L., 1945, 1—637.

98. Bendixson Ivar. 1. Sur le calcul des intégrales d'un systeme d'équations différentielles par des approximations successives.— Stockh. Öfv., 1893, 50, 599—612. 2. Sur le déevloppement des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier.— Stockh. Öfv., 1894, 51, 141—151. 3. Sur les points singuliers d'une équation différentielle linéaire.— Stockh. Öfv., 1895, 52, 81—93. 4. Sur la convergence uniforme des séries.— Stockh. Öfv., 1897, 54, 605—622. 5. Sur les Courbes définies pur des équations différentielles.— Acta M., 1900, 24, 1—88; так же, гл. 1 — УМН, 1941, 9, 191—211. 6. Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles.— Ark. för M., 1909, 5, 26, 1—18.

99. Bigiavi C. 1. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari reducibili.— Ann. di M., 1891, (2), 19, 97—143. 2. Sopra alcune equazioni differenziali lineari riducibili.— Ann. di M., 1904, (3), 10, 211—226.

100. Birkhoff George D. 1. Singular points of ordinary linear differential equations.— Amer. M. S. Trans., 1909, 10, 436—470. 2. A simplified treatment of the regular singular point.— Amer. M. S. Trans., 1910, 11, 199—202. 3. Quelques théorèmes sur le mouvement des système dynamiques.—S. M. F. Bull., 1912, 40, 305—323. 4. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.— Amer. Ac. Proc., 1913, 49, 521—568. 5. On a simple type of irregular singular point.— Amer. M. S. Trans., 1913, 14, 462—476.

101. Björling C. F. E. Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraichen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades.— Arch. d. M., 1886, Reihe 3, Teil 4, 358—384.

102. Bliss Gilbert Ames. Fundamental existence theorems American Mathematical Society Colloquium publications.— Vol. III, N. Y., 1913, Reprinted 1934, 1—107.

103. Blumenthal O. Über asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen mit Anwendung auf eine asymptotische Theorie der Kugelfunktionen.— Arch. d. M., 1912 (3), 19, 136—174.

104. Bocher Maxime. Linear differential equations.— Amer. M. S. Bull., 1897, (II), 3, 86—92.

105. Borel Emile. 1. Mémoire sur les séries divergentes.— Ann. de l'Ec. N., 1899 (3), 16, 9—136. 2. Jemarques sur les équations différentielles dont l'intégrale générale es une fonction entière.— C. r., 1904, 138, 337—339. 3. Lesons sur les séries divergentes. P., 1901, 1—183, Deux. éd., P., 1928, 1—250.

106. Bouquet Jean Claude. Sur l'intégration d'un systeme d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre.— Bull. sc. m., 1872, (1), 3, 265—274.

107. Bouquet J., Briot C. Recherches sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable imaginaire.— C. r., 1853, 36, 264.

108. Boussinesq Joseph. 1. Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale. Mémoires de la société des sciences de l'agriculture et des arts de Lille.— Paris — Lille, 1879, (4), 6, 25—257. 2. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles.— C. r., 1882, 94, 208—210.

109. Boutroux Pierre. 1. Sur quelques propriétes des fonctions entières.— Acta M., 1904, 28, 97—224. 2. Sur les intégrales de l'équation différentielle $y'+A_2y^2+A_3y^3=0$.— C. r., 1907, 145, 50—52. 3. Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du permier ordre professées au Collège de France. Avec une note de P. Painlevé, P., 1908, 1—190. 4. Equations différentielles et fonctions multiformes.— Palermo Rend., 1910, 29, 265—305. 5. Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré.— J. de M., 1910, (6), 6, 137—199. 6. Recherohes sur les transcendantes de M. Päinlevé et l'etude asymptotique des équations différentielles du second ordre.— Ann. de l'Ec. N., 1913, (3), 30, 255—375.

110. Brill A., Noether M. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älteren und neuerer Zeit.— Deut. M. Ver., 1894, 1892—93, 3, 107—566.

111. Brioschi Francisco. La théorie des formes dans l'intégration

des équations différentielles linéaires du second ordre.— Math. Ann., 1877, 11, 401—412.

112. Briot Ch. et Bouquet J. 1. Note sur le développement des fonctions en séries convergentes ordonées suivant les puissances croissantes de la variable.— C. r., 1853, 36, 334—335. 2. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.— C. r., 1854, 39, 368—371. 3. Note sur un théorème de Cauchy, relatif à l'intégration des équations différentielles.— C. r., 40, 123. 4. Recherches sur les fonctions doublements périodiques.— C. r., 1855, 40, 342—344. 5. Mémoire sur l'integration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.— C. r., 1855, 41, 1229—1239. 6. Etude des fonctions d'une variable imaginaire.— J. de l'Ec. Pol., 1856, 21, Cah. 36, 85—131. 7. Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.— J. de i'Ec. Pol., 1856, 21, Cah. 36, 133—198. 8. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.— J. de l'Ec. Pol., 1856, 21, Cah. 36, 199—254. 9. Théorie des fonctions doublement périodiques et en particular les fonctions elliptiques., P., 1859, 1—342. 10. Théorie des fonctions elliptiques. 2-ed. 1-Fasc., P., 1876, 1—700.

113. Brisson B. Mémoire sur l'intégrations des équations différentielles partielles.— J. de l'Ec. Pol., 1804, 7, Cah. 14, 191—261.

114. Bulletin des sciences mathematiques. G. V., P., 1870—1930.

115. Bureau Florent. Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degre.— Liége Mém., 1933, (3), 18, 25—53.

116. Burnside W. On the condition of reducibility of any group of linear substitutions.— Lond. M. S. Proc., 1905, (2), 3, 430—440.

117. Cahen A. 1. Sur les équations différentielles du premier ordre.— C. r., 1898, 127, 1196—1199. 2. Sur la formation explicite des équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale est une fonction à un nombre fini de branches.— Toulouse Ann., 1899 (2), 1, 239—329, Thése, P., 1899, 1—99.

118. Caque M. 1. Thèses présentées a la faculté des sciences de Paris pour le doctorat ès sciences mathematiques. I-re These: Methode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne contenant du'une variable indépendante. 2. Thése: Propositions de mécanique données par la Faculté, P., 1864, 1—38, 39.— J. de M., 1864, (2), 9, 185—222.

119. Carleman T. Développements asymptotiques des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires.— Acta M., 1922, 43, 319—336.

120. Casorati Felice. 1. Sulla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali.— Reale Ist., M., 1875, 8 (1—4). 2. Nouvelle théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables.— Bull. sc. m., 1879 (2), 3, 48—59. 3. Sur la distinction des intégrales des équations différentielles lineaires en sous-groupes.— C. r., 1881, 92, 175—178, 238—241.

121. Catalan E. Remarques sur une note de Mr. Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algebrique.— C. r., 1870, 71, 50—57.

122. Cauchy Augustin-Louis. 1. Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, I partie — Analyse algébrique, P., 1828, I—XIV, 1—576. 2. Résumé des leçons données a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, t. I, Avertisment, Calcul différentiel, Calcul Integral, P., 1823, I—XII, 1—260. 3. Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. P., 1825, 4°, 1—68; Bull. sc. m., 1874, 7, 2, 265—304; 1875, 8, 1, 43—55; 148—159. 4. Excercices de mathématiques (Ancies exercices). Avertissement P., 1826, I—II. 5. Extrait d'une Lettre à M. Coriolis.— C. r., 1837, 4, 216—219. 6. Première lettre sur la détérmination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque.— C. r., 1837, 4. 773—784. 7. Note sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planetaires. [122.31], 1, 27—32. 8. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles. [122.31], 1, 327—384. 9. Regles sur la convergence des series qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles. Application à la mecanique céleste.— C. r., 1840, 10, 939—941. 10. Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles.— C. r., 1840, 10, 957—969. 11. Applications diverses des thèorèmes relatifs a la convergence et à la trans-

formation des séries.— C. r., 1840, 11, 667—677. 12. Sur la convergence des series qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles.— C. r., 1840, 11, 730—746. 13. Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul apellé calcul des limites. [122.31], 2, 41—98. 14. Mémoire sur la nature et les propriètés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable. [122.31], 2, 109—136. 15. Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral.— C. r., 1842, 14, 1020—1026. 16. Sur un emploi légitime des séries divergentes.— C. r., 1843, 17, 370—376. 17. Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus et sur la théorie des integrales singulières.— C. r., 1844, 19, 1337—1344. 18. Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables.— J. de M., 1846, (I), 11, 313—340. 19. Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.— C. r., 1846, 23, 251—255. 20. Mémoire sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur.— C. r., 1846, 23, 557—563. 21. Considération nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires.— C. r., 1846, 23, 689—703. 22. Mémoire sur les diverses especes d'intégrales d'un système d'équations différentielles.— C. r., 1846, 23, 729—740. 23. Mémoire sur les fonctions discontinues.— C .r., 1849, 28, 277—282. 24. Mémoires sur les fonctions irrationelles.— C. r., 1851, 32, 68—75. 25. Note sur les conditions de convergence des séries, qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles.— C. r., 1855, 40, 330—335. 26. Addition à la Note insérée dans les dernier compte rendu.— C. r., 1855, 40, 373—376. 27.Sur la nature des integrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.— C. r., 1855, 40, 376—381. 28. Sur les rapports différentiels des quantités géométriques, et sur les intégrales synectiques des équations différentielles.— C. r., 1855, 40, 445—453. 29. Sur la recherche des intégrales monodromes et monogénes d'un système d'équations différentielles.— C. r., 1855, 40, 511—518. 30. Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. M. Briot et Bouquet et intitulé: Recherches sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.— C. r., 1855, 40, 557—567. 31. Exercises d'analyse et de physique mathématique, t. I, 11, P., 1840; 1841.

123. Cayley Arthur. 1. On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order.— Messenger, 1872, (2), 2, 6—12. 2. On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order.— Messenger, 1877, (2), 6, 23—27. 3. On linear differential equations.— Quart. J., 1886, 21, 321—331. 4. On Briot and Bouquet's theory of the differential equation $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$.— Lond. M. S. Proc., 1887, 18, 314—324.

124. Chazy Jean. 1. Sur les équations différentielles à points critiques fixes.— C. r., 1909, 148, 1582—1585. 2. Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur, dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.— Acta M., 1911, 34, 317—385. 3. Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles algébriques à points critiques fixes.— Acta M., 1916, 41, 29—69.

125. Chrystall. On the p-discriminant of a differential equation of the first order and on certain points in the general theory of enveloper connected therewith.— Trans. of the Soc. Edinb., 1897, 38, 803—824.

126. Clebsch Alfred. 1. Über ein neues Grundgebilde der analytische en Geometrie der Ebene.— Math. Ann., 1873, 3, 6, 203—215. 2. Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindeman. Mit einem Vorworte von F. Klein. I Bd., Teil 1—2, Teubner, Lpz., 1875—6, I—XII, 1—1050.

127. Coriolis G. Mémoire sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs diverses équations aux différences plus ou moins approchées.— J. de M., 1837, 2, 229—244.

128. Cotton Emile. 1. Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles.— Ann. de l'Ec. N., 1911, (3), 28, 473—521. 2. Approximations successives et équations différentielles.— Memorial, 1928, Fasc. 28, 1—48.

129. Curtiss D. R. Theorems converse to Riemann's on linear differential equations.— Amer. M. S. Trans., 1906, 7, 99—106.

130. Darboux Gaston. 1. Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.— C. r., 1870, 70, 1324—1333. 2. Réponse aux observations de M. Catalan du 4. Jullet dernier.— C. r., 1870, 71, 267—270. 3. Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.— Bull. sc. m., 1873, 4, 158—176. 4. Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelqonque di fonctions et de variables indépendantes.— C. r., 1875, 80, 101—104; 312—319. 5. Mémoire sur les fonctions discontinues.— Ann. de l'Ec. N., 1875, (2), 4, 57—112. 6. De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques.— C. r., 1878, 86, 1012—1014. 7. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré.— Bull. sc. m., 1878, (2), 2, 60—96; 123—144, 151—200.

131. Dedekind R. Schreiben an Herrn Borhardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen.— J. für M., 1877, 83, 265—292.

132. Delassus Etienne. Extension du théorème de Cauchy aux système les plus généraux d'équations aux derivées partielles.— Ann. de l'Ec. N., 1896, (3), 13, 421—467.

133. De Morgan Augustus. 1. On some points of the theory of differential equations.— Cambr. Trans., 1854, 9, 4, 515—554. 2. On some points of the integral calculus.— Cambr. Trans., 1851, 1856, 9, 11, 107—139.

134. Denjoy Arnaud. Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinu de singularités.— C. r., 1909, 148, 1154—1156.

135. Dixon A. C. On the singular solutions of simultaneous ordinary differential equations and the theory of congruencies.— Lond. Phil. Trans. (A), 1895, 186, 523—565.

136. Drach J. 1. Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes.— Ann. de l'Ec. N., 1898, (3), 15, 243—384; Thèse, G—V., P., 1898, 1—150. 2. Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé.— Bull. Sc. m., 1915, (2), 39, 149—166.

137. Dulac Henri. 1. Sur les cols des équations différentielles.— C. r., 1899, 129, 276—279. 2. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Thèse G—V. P., 1—125; J. de l'Ec. Pol., 1904, (2), Cah. 9, 5—125. 3. Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage de conditions initiales singulières quelconques.— Gren. Ann., 1905, 17, 1—51. 4. Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point dicritique.— C. r., 1906, 142, 504—505. 5. Sur les points dicritiques.—J. de M., 1906, (6), 2, 381—402. 6. Remarque sur les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes.— SMF Bull., 1908, 36, 125—128. 7. Points singuliers des équations différentielles.— Mémorial, Fasc. 61, 1934, 1—70.

138. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluss ihrer Anwendungen Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien. Zweiter Band, Teil 1—3, Teubner, Lpz., 1899—1927, 1—1415, 1—897, 1—1648.

139. Encyclopédie des sciences mathematiques pures et appliquées. Edition française, Tome II, Vol. 1—6, P.— Lpz., 1909—1913.

140. Engel F. Wilhelm Thomé.— Deut. M. Ver., 1911, 20, 261—278.

141. Eulero Leonhardo. 1. De fractionibus continuis observationes.— Com. Ac. Sci. Petr., 1739 (1750), XI, 32—81. 2. Institutionum calculi Integralis, Volumen primum. Petropoli, 1768, 1—463 (перевод с латинского), M., 1956, 1—415. 3. Institutionum calculi Integralis. Volumen secundum, Petropoli, 1769, 1—526 (перевод с латинского), M., 1957, 1—386.

142. Fano G. Über lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen.— Math. Ann., 1900, 53, 493—590.

143. Fejer. Sur le calcul des limites.— C. r., 1906, 143, 957—959.

144. Fine H. B. 1. On the functions defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations.— Amer. J.,

1889, 11, 317—328. 2. Singular solutions of ordinary differential equations.— Amer. J., 1890, 12, 295—322.

145. Fiorentini P. Sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.— Batt. J., 1906, 44, /(2), 13/, 25—88, 291—313.

146. Floridia G. Sulla teoria delle équazioni differenziali lineari.— Batt. G., 1893, 31, 354—367; 1894, 32, 86—132; 1895, 33, 13—29; 145—156; 242—258; 327—328; 379—380.

147. Forsyth Andrew Russell. Theory of differential equations. Part II. Ordinary equations, not linear. Vol. II, Vol. III, C., 1900, 1—XI, I—X, 1—344, 1—391.

148. Fouret G. Sur les points singuliers des équations differentielles à deux variables du premier ordre et du premier degré.— SMF Bull., 1891, 19, 128—132.

149. Fransen A. E. Nagra aumärkningar om differentialekvationen $y''=$ $=Ay^3+By^2+Cy+D+(Ey+F)y'$ och dermed analoga ekvationer.— Stockh. Öfv., 1895, 52, 223—241.

150. Fricke Robert. 1. Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie.— Math. Ann., 1894, 44, 565—599. 2. Automorphe Functionen mit einschluss der elliptischen modulfunctionen. [138], t. 2, Heft 2/3, Lpz., 1913, 349—470. 3. Elliptische funktionen. [138], t. 2, Lpz., 1901—1921, 177—348.

151. Frobenius Georg. 1. Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen.— J. für M., 1873, 76, 214—235. 2. Über algebreisch integrirbare lineare Differentialgleichungen.— J. für M., 1875, 80, 183—193. 3. Über die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen.— J. für M., 1875, 80, 317—333.

152. Frommer M. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen.— Math. Ann., 1928, 222—272; УМН, 1941, В. 9, 212—253.

153. Fuchs Lasar. 1. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.— J. für M., 1866, 66, 121—160. 2. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Ergänzung zu der im 66-sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung).— J. für M., 1868, 68, 354—385. 3. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst.— J. für M., 1870, 71, 91—127. 4. Sur le développement en séries des intégrales des équations differentielles linéaires.— Ann. di M., 1870/71, (2), 4, 36—49. 5. Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden.— J. für M., 1873, 76, 177—213. 6. Über die Darstellung der Funktionen complexer Variablen, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen.— J. für M., 1873, 75, 177—223, 175—176. 7. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraiche Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Gött. Nachr., 1875, 568—581, 612—613; J. für M., 1876, 81, 97—142. 8. Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen.— (Zweite Abh.), J. für M., 1878, 85, 1—25. 9. Auszug aus einem Schreiben an Herrn Borchardt.— J. für M., 1880, 90, 71—73. 10. Über differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen.— Berl. Ber., 1884, 699—710. 11. Über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen lässt, wenn das selbe algebreisch ist.— Berl. Ber., 1884, 1171—1177. 12. Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variablen.— Berl. Ber., 1885, 5—12. 13. Über die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können.— Berl. Ber., 1886, 279—300. 14. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.— Berl. Ber., 1888, 1115—1126, 1273—1290; 1889, 713—726, 1890; 21—38. 15. Über eine Abbildung durch eine rationale Function.— J. für M., 1891, 108, 181—192. 16. Über lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen.— Berl. Ber., 1892, 57—176. 17. Über einige Tatsachen in der mathematischen Forschung des neunzehnten Jahrhunderts. Rede. B., 1900, 1—23. 18. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.— Berl. Ber., 1901, 34—48.

154. Fuchs Richard. 1. Über lineare homogene Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Programmabh. Bismark-Gymnasium Dt. Wilmersdorf, 1902, 1—23. 2. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre.— C. r., 1905, 141, 555—558. 3. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen.— Math. Ann., 1907, 63, 301—321.

155. Fujiwara Matsusaburo. The Method of successive Approximation in the old Japanese Mathematics.— Ac. Tokyo, 1939, XV, 5, 114—115.

156. Gambier Bertrand. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.— Acta M., 1909, 33, 1—55.

157. Garnier Rene. 1. Sur une classe d'équations différentielles dont les intégrales générales ont leurs points critiques fixes.— C. r., 1910, 151, 205—208. 2. Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. P., 1911, I—VI, 1—127; Ann. de l'Ec., N., 1912, (3), 29, 1—126. 3. Etude de l'intégrale générale de l'équation (VI) de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendantes.— Ann. de l'Ec., N., 1917, (3), 34, 239—353. 4. Solution du problème de Riemann pour les systèmes différentiel's linèaires du second ordre.— Ann. de l'Ec.., N., 1926, (3), 43, 177—307. 5. Sur un système differential à points critiques fixes. Comptes rendus du congrès des Sociétés savantes de Paris et des départements. Section des sciences. P., 1926(1927), 58—67. 6. Sur les systèmes différentiels Σ, a points critiques fixes, associés au problème de Riemann pour les systèmes linéaires d'ordre $\geqslant 2$.— Palermo Rend., 1956 (2), 5, No. 1, 73—92.

158. Garreston W. van N. On the asymptotic solution of the nonhomogeneous linear differential equation of the n-th order. A particular solution.— Amer. J., 1918, 40, 341—350.

159. Gauß Carl Friedrich. Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

usw mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung übersetzt von H. Simon. B., 1887, I—V, 1—86.

160. Genocchi A. Sur y'équation de Riccati.— C. r., 1877, 85, 391—394.

161. Gerstenmeier C. Beitrage zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit 4 und 5 singulären Stellen. Diss. Erlangen, 1910—1—88.

162. Goldbach Chr. De casibus quibus integrari potest aequatio differentialis $ax^m dx+byx^p dx+cy^2 dx=dy$ observationes quaedam.— Com. Ac. sci. Petr., 1726, 1, Petropoli, 1728, 185—197.

163. Goursat Edouard. 1. Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique.— Ann. de L'Ec. N., 1881, (2), 10, Suppl. 3—142. 2. Recherches sur l'équation de Kummer.— Acta Soc. Fen., 1888, 15, 45—128. 3. Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées.— Amer. J., 1889, 11, 329—372. 4. Sur les séries entières et les approximations successives.— S. M. F. Bull., 1907, 35, 81—91. 5. Lesons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent. I. Propriétés générales de l'Equation d'Euler et de Gauss. P., 1936, 1—93, II. Intégrales algébriques. Problème d'inversion. P., 1938, 1—100.

164. Gross W. Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten.— Math. Ann., 1917, 78, 332—342.

165. Günther P. 1. Über eine Methode, die zu einem singulären Punkte einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige Fundamentalgleichung zu bestimmen.— J. für M., 1890, 106, 330—336. 2. Über die Bestimmung der Fundametalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— J. für M., 1891, 107, 298—318.

166. Hadamard Jacques. 1. Sur l'intégration et les solutions asympto-

tiques des équations différentielles.— S. M. F. Bull., 1901, 29, 224—228. 2. Sur une classe d'équations différentielles.— S. M. F. Bull., 1902, 30, 208—220.

167. Halphen G. H. 1. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques.— J. de l'Ec. Pol., 1882, Cah. 52, 1—200. 2. Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires.— J. de M., 1885, (4), 1, 11—85. 3. Sur la reduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.— Mem. Sav. Etr., 28, 2, 1, (1884), 1—301.

168. Hamburger A. Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.— Diss. B., 1905, 1—59.

169. Hamburger M. 1. Bemerkungen über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.— J. für M., 1873, 76, 113—126. 2. Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltnes mehrdeutiger Functionen einer complexen Variablen, insbesondere Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte.— J. für M., 1877, 83, 185—209. 3. Über die Wurzeln der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung gehört.— J. für M., 1877, 84, 264—267. 4. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.— J. für M., 1893, 112, 205—246.

170. Haupt O. 1. Zur Theorie der Prymschen Funktionen erster und N-ter Ordnung.— Math. Ann., 1915, 77, 24—64. 2. Zur Parametrixmethode.— Math. Ann., 1922, 88, 136—150.

171. Heffter Lothar. 1. Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen variablen.— Lpz., 1894, I—XV, 1—258. 2. Über gemeinsame Vielfache Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse.— J. für M., 1896, 116, 157—166.

172. Hilb E. 1. Zur Theorie linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit drei singulären Stellen. [257.2], 1914, 98—115. 2. Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet. [138], t. 2, 1915, 473—565. 3. Nicht lineare Differentialgleichungen. [138], t. 2, 1921, 566—603.

173. Hilbert David. 1. Mathematische Probleme.— Gött. Nachr., 1900, 253—297, Arch. d. Math. u. Phys., 1901, (3), 1, 44—63, 213—237, Amer. M. S. Bull., 1902, 8, 10, 437—479. Перевод на русский [59, 11—64]. 2. Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verhandl. III intern. Math. Kongr. in Heidelberg, 1904, Lpz., 1905, 233—240. 3. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Lpz. und B., 1912, I—XXVI, 1—282.

174. Hill C. J. De radicibus rationalibus aequationis Riccatianae ubi a, b, c functiones sunt rationales ipsius X.— J. für M., 1843, 25, 22—37.

175. Hill M. G. M. On the c- and p-discriminants of ordinary integrable differential equations of the first order.— Lond. M. S. Proc., 1889, 19, 561—589.

176. Hill M. G. M. and Berry Arthur. On differential equations with fixed branch points.— Lond. M. S. Proc., 1911, (2), 231—234.

177. Horn J. 1. Über Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen. B. Habit. Schrift (Freiburg), B., 1890, 1—123. 2. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen.— Acta M., 1890/91, 14, 337—347. 3. Über die Reiheneniwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen.— J. für M., 1896, 116, 265—306, 1897, 117, 104—128, 254—266. 4. Über das Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle.— J. für M., 1897, 118, 257—274. 5. Sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires.— C. r., 1898, 126, 205—208. 6. Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtsheitstelle vermittelst sukzessiver Annäherungen.— Arch. d. M., 1903, (3), 4, 213—230. 7. Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle.— J. für M., 1913, 143, 212—240. 8. Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Losungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen.— Deut. M. Ver., 1916, 25, 301—435.

178. Hukuhara M., Kimura T., M-me Matuda T. Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe.— The mathematical society of Japan, Tokyo, 1961, I—VIII, 1—155.
179. Ihlenburg W. Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke.— Leop. Nava Acta, 1909, 91, 5—79.
180. Ince E. L. Ordinary differential equations. L., 1927, I—VIII, 1—558. Русский перевод: X., 1939, 1—718.
181, Itard J. Analyse mathématique et Théorie des nombres.— Histoire générale des sciences. Tome III. La science comtemporaine. Vol. 1, le XIX-e seècle. Presses universitaires de France. P., 1961, 49—76.
182. Iversen Felix. Quelques propriétes des fonctions monogénes au voisinage d'une singularité essentielle.— Verh. des V. Skand. Math. Kongr. in Helsingfors, 1922, Helsingfors, 1923, 254—259.
183. Jahnke E. Zur Integration der binomischen Differentialgleichung dritter Ordnung.— Zs. M. Ph., 1890, 35, 376—380.
184. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 1—68, (1868—1942), B., 1871—1944.
185. Jecklin L. Historisch Kritische Untersuchung über die Theorie der hypergeometrischen Reihe bis zu den Entdeckungen von E. E. Kummer, Diss. Bern., 1900, 1—87.
186. Jordan C. 1. Sur résolution des équations différentielles linéaires.— C. r., 1871, 73, 787—791. 2. Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires.— C. r., 1874, 78, 741—743. 3. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique. t. III, Calcul intégral.— Equations differentielles, P., 1887, I—XIV, 1—615.
187. Juel C. Picard's Bewis for at en Differentialligning har et Integral.— Nyt Tidsskr., 1893, 4, 10—12.
188. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen 7 Aufl. Lpz., 1961, 1—166.
189. Kampe de Feriet J. La fonction hypergéometrique.— Mémorial, Fasc. 85, P., 1937, 1—85.
190. Kapteyn W. 1. Note sur les solutions singulieres des équations différentielles du premier ordre.— Bull. sc. m., 1888, (2), 12, 135—143. 2. Over eene stelling van Painlevé.— Amst. Ak. Wet., 1908, 17, 521—535.
191. Karapandjitch G. Conditions d'intégrabilité de l'équation de Riccati.— Belg. Ac. Bull., 1941, (5), 26, 305—313.
192. Klein Felix. 1. Über lineare Differentialgleichungen.— Math. Ann. 1877, 11, 115—119. 2. Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflosung der Gleichungen fünften Grades.— Math. Ann., 1878, 14, 11—172. 3. Über Lamésche Funktionen.— Math. Ann., 1881, 18, 237—246. 4. Vorlessungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften grade. Lpz., 1884, I—VIII, 1—260. 5. Zur Theorie der Laméschen Funktionen.— Gött. Nachr., 1890, 85—95. 6. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.— Math. Ann., 1890, 37, 573—590. 7. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen Ausgearb. und Vervollständigt von Robert Fricke. Bd. 1, Grundlegung der Theorie. Lpz., 1890, I—XIX, 1—764, Bd. 2, Fortbildung und Anwendung der Theorie, Lpz., 1892, I—XV, 1—712. 8. Vorlessungen über die hypergeometrische funktionen. (Geh. 1893/4), B., 1933, 1—344. 9. Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Autogr. Vorlesungen. G., 1894, 1—524 (Ausgearbeitet von Ernst Ritter, Neudruck 1906). 10. Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.— Math. Ann., 1907, 64, 175—196. 11. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I, Berlin, I—VIII, 1—385.
193. Koch Helge von. 1. Sur une application der déterminants, infinig à la théorie des équations différentielles linéaires.— Acta M., 1891, 15, 53—63. 2. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires.— Acta M., 1892/93, 16, 217—295. 3. Sur systèmes d'ordre infini d'équations différentielles.— Stockh. Öfv., 1899, 56, 395—411. 4. Un théoreme sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires et son application du problème de l'integration.— Ark. för M., 1918, 13, No. 15, 1—18.

194. Koebe Paul. Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche.— Deut. M. Ver., 1907, 16, 116—130.

195. Königsberger Leo. 1. Über die Irreductibilität der linearen Differentialgleichungen.— J. für M., 1884, 96, 123—152. 2. Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Lpz., 1889, I—XV, 1—485. 3. Über die Integrale partieller Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung.— J. für M., 1892, 109, 261—340. 4. Über die von Poincaré gegebene Erweiterung des Cauchy'schen Satzes von der Existenz der Integrale gewohnlicher Differentialgleichungssysteme.— J. für M., 1894, 113, 115—127. 5. Über die algebraischen Integrale der erweiteren Riccatischen Differentialgleichung.— Heid. Ak. Ber., 1915, 12, 1—23.

196. Krause August. Über Fuchs'sche Differentialgleichungen vierten Grades. Diss. B., 1897, 1—58.

197. Krause M. Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Grösse. 2. Band., Lpz., 1897, I—XII, 1—306.

198. Kummer E. E. 1. Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies.— J. für M., 12, 1834, 12, 144—147. 2. Über die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

J. für M., 1835, 15, 39—83, 127—172. 3. De integralibus definetis et seriebus infinitis.— J für M., 1837, 17, 210—227.

199. Landay E. 1. Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzibele Faktoren.— J. für M., 1901, 124, 115—120. 2. Über ein Satz von Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— Arch. d. M., 1906, (3), 10, 45—50.

200. De Laplace le Marquis. Mémoire sur les suites. Mémoire de l'Académie Royale des Sc. Année, 1779, (1782), Oeuvres complètes de Laplace, G. V., P., 1894, t. X, 1—92.

201. Laurent P. 1. Extension du théoreme de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable.— C. r., 1843, 17, 348—349. 2. Méray Ch.,— Nouvean Précis d'Analyse infinitésimale, P., 1872.— Bull. sc. m., 1873, 4, 24—28.

202. Lerch Matiach. Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles. Bömisch. Ber., 1889, 180—182.

203. Lindeberg K. M. Historisk öf versigt af theoriezna för singulärna solutioner till ordinära differential equationer. S. Diss. Upsala, 1875, 1—44.

204. Lindelöf Ernest. 1. Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre.— C. r., P., 1894, 118, 454—457. 2. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales reélles des équations différentielles ordinaires.— J. de M., 1894, (4), 10, 117—128. 3. Démostration élémentaire de l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.— Acta Soc. Fen., 1896, 21, 7, 1—13. 4. Sur la forme des intégrales des équations différentielles au voisinage des points singuliers.— Acta Soc. Fen., 1897, 22, 7, 1—26. 5. Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algebraiques du premier ordre.— S. M. F. Bull., 1899, 27, 205—215.

205. Liouville Joseph. 1. Mémoire sur l'équation de Riccati.— J. de l'Ec. Fol., 1833, Cah. 22, 1—19. 2. Note sur la détermination des intégrales, dont la valeur est algébrique.— J. für M., 1833, 10, 347—359. 3. Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.— J. de M., 1837, 2, 16—35. 4. Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles et sur le développement des fonctions en séries.— J. de M., 1838, 3, 561—614. 5. Sur les conditions de convergence d'une classe générale de séries.— C. r., 1840, 11, 615—618. 6. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati.— J. de M., 1841, 6, 1—13.

206. Liouville R. 1. Sur les équations différentielles du second ordre à point critiques fixes.— C. r., 1902, 135, 392—395.

207. Lipschitz Rudolf. 1. Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie.— Ann. di M., 1868/1869, (2), 2, 288—302. 2. Sur la possibilité d'intégrer complément un système donnĕ d'equations différentielles.— Bull. sc. m., 1876, 101, 149—159. 3. Lehrbuch der Analysis. Bd. 2, Differential- und Integralrechnung. Bonn, 1880, I—735.

208. Longley W. R. 1. Proof of a theorem due to Picard.— Amer. M. S. Bull., 1912, 2, 18, 493—496. 2. Existence theorem for a certain differential equation of the n-th order.— Amer. M. S. Trans., 1914, 15, 328—334.

209. Love C. E. On the asymtotic solutions of linear differential equations.— Amer. J., 1914, 36, 151—166.

210. Maddisson Isabel. On singular solutions of differential equations of the first order and the geometrical properties of certain invariants and covariants of their complete primitives.— Quart. J., 1896, 28, 311—374.

211. Malmquist Johannes. 1. Sur les équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale générale admet un nombre fini de branches permutables autour des points critiques mobiles. Diss. Upsala, 1909, 1—54. 2. Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre.— Acta M., 1913, 36, 297—343. 3. Sur les functions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre.— Acta M., 1920, 42, 317—325. 4. Sur les points singuliers des équations différentielles I, 11.— Ark. för M., 1921, 15, 3, 1—80, 27, 1—78. 5. Sur les équations différentielles à points critiques fixes.— 5 Kongr. Skand Math. in Helsingfors, 1922, Helsingfors, 1923, 233—253.

212. Mansion P. Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre.— Belg. Ac. Bull., 1872, 34, 149—169.

213. Mayer A. 1. Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearen partieller Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1872, 5, 448—470. 2. Über die Ableitung der Singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst.— Math. Ann., 1883, 22, 368—392.

214. Méray Charles. 1. Mémoire sur les fonctions doublement périodiques, monogenes et monodromes.— C. r., 1855, 40, 787—788. 2. Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries.— Rev. Soc. Sav., 1868, (2), 133—138. 3. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. P., 1872, I—XXIII, 1—310. 4. Domonstration générale de l'existence des integrales des equations aux dérivées partielles.— J. de M., 1830, (3), 6, 235—266. 5. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géometriques. Premiére partie. Principes généraux, P., 1894, I—XXXIII, 1—405.

215. Meray et Riquier. Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles.— Ann. de l'Ec. N., 1890, (3), 7, 23—88.

216. Mie Gustav. 1. Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen.— Zs. M., Ph., 1892, 37, 151—171; 193—212. 2. Beweis der Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano.— Math. Ann., L., 1893, 43, 553—568.

217. Mitrinovitch Dragoslav S. 1. Théoreme sur l'équation de Riccati.— C. r., 1939, 208, 156—157. 2. Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati.— Belgr. Bull., 1939, 6, 121—156.

218. Mittag-Leffler G. 1. Integration utaf en klass af lineara differentialeqvationer.— Stockh. Öfv., 1879, 36, 3, 17—40. 2. Sur le représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogéne.— Acta M., 1891, 15, 1—32. 3. Sur l'intégration de l'équation différentielle $y''=Ay^3+By^2+Cy+D+(Ey+F)y'$.— Acta M., 1894, 18, 233—245. 4. Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique.— C. r., 1899, 128, 1212—1215. 5. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.— Acta M., 1899, 23, 43—62.

219. Moigno F. Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées de M. A.— L. Cauchy et étandues aux travaux les plus récents des géomètres. Tome 2, Calcul integral, P., 1844, 1—783.

220. Müller Felix. Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts.— Deut. M. Ver., 1903, 12, 427—444.

221. Müller Max. Neuere Untersuchungen über den Fundamental Satz in der Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen.— Deut. M., Ver., 1928, 37, 33—48.

222. Naas I., Schmid H. L. Mathematisches Wörterbuch, Bd. 1 (A—K), 1—1043, Bd. II (L—Z), 1—953, 8, Lpz., 1961.

223. Nevanlinna F. Zur Theorie der asymtotischen Potenzreihen.— Acta Soc. Fenn. (A), 1916, 12, No. 3, 1—81.

224. Noaillon P. Développements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramétre variable.— Liége Mem., 1912, (3), 9, No. 15, 1—200.

225. Oliver I. E. On the general linear differential equation.— Ann. of M., 1887, 3, 109—111.

226. Osgood W. F. Allgemeine Theorie der analytischen Functionen a) einer und b) mehrerer komplexen Grössen. [138], T. 2, H. 1, Lpz., 1901, 1—114.

227. Ostrogradski M. W. Note sur la méthode des approximations succes sives.— Ac. St. Pbg. Mém., 1838, (VI), 1, 233—238; Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St. Pbg., 1836, t. 1.

228. Painleve Paul. 1. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.— Toulouse Ann., 1888, 2, 1—130, Thése P., 1887, 1—130. 2. Sur les équations différentielles du premier ordre.— C. r., 1888, 107, 221—224, 320—323, 724—726. 3. Sur les intégrales rationelles des équations du premier ordre.— C. r., 1890, 110, 34—36. 4. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre.— C. r., 1891, 112, 1190—1193. 5. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre.— Ann. de l'Ec. N., 1891, (3), 8, 9—58, 103—140, 201—226, 267—284; 1892, (3), 9, 9—30, 101—144, 283—308. 6. Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre possédant un nombre limité de valeurs.— C. r., 1892, 114. 107—109. 7. Sur les intégrales du premier ordre qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs.— C. r., 1892, 114, 280—283. 8. Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur.— C. r., 1893, 116, 362—365. 9. Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre.— C. r., 1893, 116, 566—569. 10. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale est de la forme $h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}[y-g_2(x)]^{\lambda_2}\ \ldots$ $\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}=p_0$.— Toulouse Ann., 1896, 10, G., 1—37. 11. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (lith. 1895), P., 1897, 1—19, 1—6, 1—589. 12. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes.— C. r., 1898, 126, 1185—1188, 1697—1700, 127, 541—544, 945—948. 13. Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy — Lipschitz. C. r., 1899, 128, 1505—1508. 14. Sur les équations du second ordre à points critiques fixes.— C. r., 1899, 129, 750—753, 949—952. 15. Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de Cauchy — Lipschitz.— S. M. F. Bull., 1899, 27, 149—152. 16. Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes.— C. r., 1900, 130, 767—770. 17. Sur une relation entre la théorie des groupes continus et les équations différentielles à points critiques fixes.— C. r., 1900, 130, 1171—1173. 18. Sur les singularités des fonctions analytiques et en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles.— C. r., 1900, 131, 489—492. 19. Sur les systèmes différentielles à intégrale générale uniforme.— C. r., 1900, 131, 497—499. 20. De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy.— S. M. F. Bull., 1900, 28, 191—196. 21. Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. [138], t. 1, 1900, 190—229. 22. Mrmoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.— S. M. F. Bull., 1900, 28, 201—261. 23. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme.— Acta M., 1902, 25, 1—85. 24. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes.—

C. r., 1906, 143, 1111—1117. 25. Sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches. [109.3], 141—187. 26. Observations au sujet de la communication précédents.— C. r., 1909, 148, 1156—1157. 27. Existence de l'intégrale générale. Détermination d'une intégrale particiluère par des valeurs initiales. [139], Vol. 3, Fasc. 1, P., Lpz., 1910, 1—57. 28. Grand prix des sciences mathematiques.— C. r., 1912, 155, 1284—1291.

229. Papperitz Erwin. 1. Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen. Habilitationsschrift, Dresden, Lpz.— Math. Ann., 1886, 27, 315—357. 2. Über die historische Entwicklung der hypergeometrischen Functionen.— Sitzungsber. Gesellschaft — Isis in Dresden, 1889, 4, 61—73.

230. Pascal Ernst. Su di una classe di equazioni di Riccati integrabili algebicamente.— Reale Ist. M., 1903 (2), 36, 322—333.

231. Pastori Maria. Le serie divergenti.— Periodica di M., 1927, (4), 7, No. 5, 302—320.

232. Peano Giuseppe. 1. Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine.— Torino Atti, 1886, 21, 677—685. 2. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentialles ordinaires.— Math. Ann., 1890, 37, 182—228. 3. Sur le théorème général relatif a l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.— Nouv. Ann., 1892, (3), 11, 79—82 4. Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie.— Torino Atti, 1897, 33, 9—18.

233. Pepin Theophile. Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre.— Rom. Acc. L. Rend., 1888, 34, 243—389.

234. Petrovitch Michal. 1. Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et ds genre zéro.— C. r., 1894, 118, 1190—1193. 2. Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algebriques. Thése P., 1894, 1—109. 3. Sur l'équation différentielle binome du premier ordre.— C. r., 1895, 121, 632—635.

235. Picard Emile. 1. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques.— C. r., 1878, 87, 430—432, 743—745. 2. Sur les fonctions entiéres.— C. r., 1879, 89, 662—665. 3. Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques.— S. M. F. Bull., 1884, 12, 48—51. 4. Sur un point de la théorie générale des équations différentielles.— Bull. sc. m., 1887, (2), 11, 194—198. 5. Sur la limité de convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles.— C. r., 1888, 106, 1466—1467. 6. Sur une preposition générale concernant les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.— C. r., 1888, 107, 939—941. 7. Sur la convergenze des séries représentant les intégrales des équations différentielles.— Bull. Sc. m., 1888, (2), 12(1), 148—156. 8. Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour.— C. r., 1889, 109, 499—501. 9. Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.— J. de M., 1889, (4), 5, 135—319. 10. Sur l'emploi des approximations successives dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.— C. r., 1890, 110, 61—67. 11. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.— J. de M., 1890, (4), 6, 145—210. 12. Remarque sur la Communigation présédente.— C. r., 1893, 116, 365. 13. Remarques sur les équations différentielles. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler.— Acta M., 1893, 17, 297—300. 14. Sur la communication précédente.— C. r., 1894, 118, 457—458. 15. Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre.— Math. Ann., 1895, 46, 521—528. 16. Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. [288.12], 4, 1896, 353—367. 17. Traité d'analyse. Tome III, (1, 2, 3, ed.), P., 1894, 1908, 1927, 1—568. 18. Remarques au sujet d'une communication récente de M. J. Bendixson.— S. M. F. Bull., 1897, 25, 35. 19. Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy.— C. r., 1899, 128, 1363—1366. 20. Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles.— Lond. M. S. Proc., 1903, 35, 39—40. 21. Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires.— Ann. de l'Ec. N.,

1904, (3), 21, 141—151. 22. Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique, P., 1905, 1—168. 23. La vie et l'oeuvre de Gaston Darboux.— Ann. d. l'Ec. N., 1917, (3), 34, 81—93.

236. Plemelj Josip. 1. Riemannsche Functionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe.— Monatsch., 1908, 19, 211—246. 2. Über Schlesingers «Beweis» des Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe.— Deut. M. Ver., 1909, **18**, 15—20, 340—343. 3. Der Existenzbeweis Lösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen insbesondere an einer Fuchsschen singulären Stelle.— Monatsch., 1911, 22, 339—344. 4. Zur Theorie der linearen Differentialgleichung der Zweiten Ordnung mit vier Fuchschen singulären Punkten.— Monatsch., 1936, 43, 321—340. 5. Problems in the sence of Riemann and Klein. Edited and translated by J. R. M. Radok. New York, London, Sydney. 1964, 1—175.

237. Poincare Henri. 1. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.— J. de l'Ec. Pol., 1878, Cah. 45, 13—26. 2. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. P., 1879, 1—95, Thèses présentes à la Faculte des Sciences de Paris. 3. Sur les fonctions fuchsiennes.— C. r., 1881, 92, 333—336, 395—398, 859—861, 957—958, 1198—1200, 1274—1276, 1484—1487, 93, 301—303, 581—582. 4. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielles.— J. de M., 1881, (3), 7, 375—422. 5. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.— J. de M., 1882, (3), 8, 251—296. 6. Sur les groupes des équations linéaires.— C. r., 1883, 96, 691—694, 1302—1304. 7. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires.— C. r., 1883, 97, 984—985, 1189—1191. 8. Sur un théorème de M. Fuchs.— C. r., 1884, 99, 75—77. 9. Sur les groupes des équations linéaires.— Acta M., 1884, 4, 201—312. 10. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes.— Acta M., 1884, 5, 209—278. 11. Sur les intégrales irrégulières les équations linéaires.— C. r., 1885, 101, 939—941, 990—992. 12. Sur les courbes définies par les équations différentielles.— J. de M., 1885, (4), 1, 167—244. 13. Sur un théorème de M. Fuchs.— Acta M., 1885, 7, 1—32. 14. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies.— Amer. J., 1885, 7, 203—258. 15. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.— Acta M., 1886, 8, 295—344. 16. Sur les courbes définies par les équations différentielles.— J. de M., 1886, (4), 2, 151—211. 17. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.— Acta M., 1840, 13, 1—270. 18. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.— Palermo Rend., 1891, 5, 161—191, 1897, 11, 193—239. 19. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.— C. r., 1891, 112, 761—764. 20. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. t. 1. P., 1892, 1—385. 21. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes.— J. de M., 1903, (5), 9, 139—212. 22. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Перев. с франц. М.—Л., 1947, 1—392.

238. Pompeiu D. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Thèse. P., 1905.— Toulouse Ann., 1905, (2), 7, 264—315.

239. Prym F. und Rost G. Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemanns. Lpz., 1911, Teil 1, I—XI, 1—250, Teil II, I—VI, 1—300.

240. Puiseux Victor. 1. Recherches sur les fonctions algébriques.— J. de M., 1850, 15, 365—480. 2. Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.— J. de M., 1851, 16, 228—240.

241. Radelfinger G. Linear différential equations.— Bull. of the Philos. Soc. of Washington, 1901, 14, 21—35.

242. Rao P. R. P., Ukidave V. H. Some separable forms of the Riccati equation.— Amer. M. Mont., 1968, 75, No. 1, 38—39.

243. Reiff R. Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889, 1—212.

244. Remoundos Georges. 1. Sur quelques transformations des équations différentielles du premier ordre.— J. für M., 1908, 134, 308—312. 2. Sur les singularités des équations différentielles. Proc. 5 int. Math. Kongr. im Cambridge, 1912, C, 1913, 1, 372—374. 3. Sur les séries de fonctions et les singularités des équations différentielles.— C. r., 1914, 159, 21—23.

245. Riccato Jacobo. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus.— Acta Er., 1724, 8, 66—73.

246. Riemann Bernhard. 1. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Gröse. Inanguraldissertation. G., 1851, 2. Aufl., 1867, 1—32, [246.8, 3—45]; [246.10, 49—87]. 2. Theorie der Abelschen Funktionen.— J. für M., 1857, 54, 115—155, [246.8, 81—135], [246.10, 88—138]. 3. Beitrage zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen.— Gött. Abh. 185, (7), 7, [246.8, 62—78]; [246.10, 159—175]. 4. Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. (1857), [246.8, 357—369]; [246.10, 176—186]. 5. Sulle svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita. (1863), [246.8, 400—406]; [246.10, 187—193]. 6. Die Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Verzweigungspunkt (Aus einer Vorlesung Wintersemester 1856/57). [246.9, II, 67—68]; [246.10, 194—195]. 7. Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe (Wintersemester 1858/59). [246.9, III, 69—93]; [246.10, 196—215]. 8. Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Hrsg. unter Mitwirkung von R. Dedekind. von H. Weber, Lpz., 1876, I—VIII, 1—526, 2 Aufl. Lpz., 1892, I—X, 1—558; N. Y. Dover, 1953, I—X, 1—558. 9. Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge Herausgegeben von M. Nöether und W. Wirtinger, Lpz., 1902, I—VIII, 1—116. 10. Сочинения (перев. с немецкого), М.—Л., 1948, 1—543.

247. Riquier Charles. Sur les principes de la théorie générale des fonctions.— Ann. de l'Ec., N., 1891, (3), 8, 59—86, 141—172.

248. Ritter Ernst. Über Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde.— Math. Ann., 1896, 47, 157—221.

249. Röhrl H. Das Riemann-Hilebrtsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1957, 133, 1—25.

250. Rosenblatt A. 1. Über singuläre Punkte der Differentialgleichungen erster Ordnung. G., 1908, 1—8. 2. Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen.— Ark. för M., 1908, 5, No. 2, 1—4.

251. Rothenberg Siegfried. Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der Singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei Variablen Größen. Abh. zur Gesch. der Math. Wiss. mik einschluss ihrer Anwend. Heft XX, Lpz.— B., 1908, 315—404.

252. Rychlik Karel. 1. Cauchyho rukopis v archivu československé akademie věd. Pokroky mat., 1957, 11, 5, 633—637. 2. Un manuscrit de Cauchy aux archives de l'académie Tchéchoslovaque des sciences. — Чехословацкий матем. журнал, Прага, 1957, 7 (82), № 3, 479—481.

253. Sauvage L. Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes.— Toulouse Ann., 1894, 8, 1—29; 1895, 9, 25—100.

254. Schlesinger Ludwig. 1. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Lpz., Bd. 1—1895, I—XX, 1—486, Bd. 11, Teil 1, 1897, I—XVIII, 1—532, Bd. 11, Teil 2, 1898, I—XIII, 1—446. 2. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem.— J. für M., 1902, 124, 292—319. 3. Über das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschließende neuere Arbeiten. Verhandl. 3 intern. Math. Kongr., Lpz., 1905, 219—228. 4. Beitrage zur Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen.— J. für M., 1905, 128, 263—297. 5. Über die Losungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte.— J. für M., 1905, 129, 287—294. 6. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem. (III) J. für M., 1905, 130, 26—46. 7. Über asymptotische Darstellung der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters.— Math. Ann., 1907, 63, 277—300. 8. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Lpz., 1908, 1—X, 1—333. 9. Bemerkungen zum Kontinuitätsbeweise für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems.— Deut. M. Ver., 1909, 18, 21—25. 10. Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865.— Deut. M. Ver., 1909, 18, 3—4, 133—266. 11. Über eine Klasse von Differentialsystem beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten.— J. für M., 1912, 141, 96—145. 12. Einführung in die

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage, 3, Aufl., B.— Lpz., 1922, I—VIII, 1—326.

255. Schmidt Carl. Ueber die Singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Diss. Giesen, 1885, 1—42.

256. Schottky F. Über die Konvergenz einer Reihe, die zur Integration linearer Differentialgleichungen dient.— Berl. Ber., 1905, 808—815.

257. Schwarz Herman Amandus. 1. Über diejenigen Fälle, in welchen die Gause'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt.— J. für M., 1872, 75, 292—335. 2. Mathematische Abhandlungen zu seinem fünfzigjährligen Doktorjubiläum, B., 1914, I—VIII, 1—451.

258. Sergescu Pierre. Les sciences mathématiques. Tableau du XX siécle (1900—1933), P., 1933, 5—182.

259. Staeckel Paul. 1. Sur la convergence des séries representant les intégrales des équations différentielles.— C. r., 1898, 126, 203—205. 2. Über die Existenz von Integralen bei Systemen partieller Differentialgleichungen.— J. für M., 1898, 119, 339—346.

260. Sternberg W. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1920, 81, 119—186.

261. Stickelberger Ludwig. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Antrittsrede, Lpz., 1881, 1—17.

262. Stieltjes T. J. Recherches sur quelques séries semiconvergentes.— Ann. de l'Ec. N., 1886, (3), 3, 201—258.

263. Tannery Jules. Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables.— Ann. de l'Ec. N., 1875, (2), 4, 113—182.

264. Thomae Johanes. Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Gauss'sche Reihen.— Zs. M. Ph., 1874, 19, 273—286.

265. Thome L. W. 1. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.— J. für M., 1872, 74, 193—218. 2. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.— J. für M., 1873, 75, 265—291, 76, 273—291. 3. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (übersicht über die Abhandlungen des Verfassers in den Bdn. 74 bis 95 dieses Journals).— J. für M., 1884, 96, 185—281.

266. Trjitzinsky W. J. 1. Analytic theory of linear differential equations.— Acta M., 1934, 62, 167—226. 2. Theory of linear differential equations containing a parameter.— Acta M., 1936, 67, 1—2, 1—50.

267. Vaccaro A. Integrazione di equazioni differenziali.— Torino Atti, 1900/1901, 36, 708—720.

268. De la Valee Poussin Ch. J. 1. Sur l'intégration des équations différentielles.— Brux. S. sc., 1893, 17, 1, 8—12. 2. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles.— Belg. Mém. cour., 1893, 47, 1—82. 3. Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre, Existence et continuité de leurs dérivées par rapport au paramètre.— Brux. S. sc., 1906, 30, 11, 288—294.

269. Valson C.-A. La vie et les travaux du baron Cauchy, membre de l'Academie des sciences. Avec une preface de M. Hermite, t. 1—2, P., 1868, t. 1, 1—290, t. 2, 1—178.

270. Veltmann W. Kriterién der singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung.— Arch. f. M., 1876, 58, 337—341.

271. Volterra Vito. 1. Sui principii del calcolo integrale.— Batt. G., 1881, (1), 19, 33—372. 2. Sulla teorie delle equazioni differenziali lineari.— Palermo Rend., 1888, 2, 69—75. 3. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Parte prima.— Mem. Soc. Ital., 1887, (3), 6, No. 8, 1—107. 4. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. (parte seconda).— Mem. Soc. R., 1899, (3), 12, 1—69.

272. Wallenberg G. I. Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale feste verzweigungs punkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum dritten Grade enthalten.— Zs. M. Ph., 1890, 35, 193—218, 257—271, 321—353. 2. Anwendung der Theorie der Differentialgleichungen auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen.— J. für M., 1894, 113, 1—41. 3. Zur Theorie der algebreischen Differentialgleichungen erster Ordnung.—

J. für M., 1896, 116, 1—9. 4. Über nichtlineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.— J. für M., 1898, 119, 87—113.

273. Watson G. N. A theory of asymptotics series.— Lond. Phil. Trans., ser. A, 1911, 211, 279—313.

274. Weber H. Zur Theorie der Transformation algebraischer Functionen.— J. für M., 1873, 76, 345—348.

275. Weierstrass Karl. 1. Darstellung einer analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Beitrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. [275.9, 1, 51—66]. 2. Zur Theorie der Potenzreihen. [275.9, 1, 67—74]. 3. Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen. (Auszug aus einer im Jahre 1842 verfassten bisher nicht veröffentlichten Abhandlung). [275.9, 1, 75—84] 4. Über die Theorie der analytischen Facultäten.— J. für M., 1856, 51, 1—60. [275.9, 1, 153—221]. 5. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.— Monatsber. der K. Preussischen Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1868, 310—338. 6. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.— Berl. Abh., 1876, 11—60; Ann. de l'Ec. N., 1879, 9, 8, 111—150. 7. Untersuchungen über die 2.r — fach periodischen Functionen von r Veränderlichen.— J. für M., 1880, 89, 1—8. 8. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer veränderlichen sich beziehende Sätze. [275.9, 2, 135—188]. 9. Mathematische Werke. Br. 1—7, Berlin, 1894—1927.

276. Weyr Eduard. Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales.— Bull. sc. m., 1887, (2), 11, 205—215.

277. Wirtinger W. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung. Verh. 3 intern. Math. Kongr., Lpz., 1905, 128—139.

278. Witwinski Romuald. Sur la Théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre.— Prace mat., 1923/4, 33, 1—10.

279. Young W. H On the fundamental theorem of differential equations.— Lond. M. S. Proc., 1902, 34, 233—245.

280. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, B. 1931—1941, 1948—1970.

281. Zeuthen H. G. Bevis for at Ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldständigt Integral.— Tids. för M., 1880, (4), 4, 161—167.

282. Zoretti Ludovic. I. Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent en ensemble parfait discontinu de points singuliers.— J. de M., 1905, (6), 1, 1—51. 2. Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques.— Bull. sc. m., 1905, (2), 29, 276—277. 3. Leçons sur le prolongement analytique, professées au collège de France. P., 1911, I—VI, 1—117.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 7

Часть первая. **Общие вопросы и развитие теории нелинейных уравнений**

Глава I. У истоков теории. Первые работы по теоремам существования и единственности решений дифференциальных уравнений . . . 28

§ 1. Постановка вопроса у Коши (28). § 2. Первый метод Коши (33). § 3. Метод последовательных приближений (35). § 4. Метод пределов Коши (40). § 5. Эволюция идей Коши (44). § 6. Метод мажорантных функций Вейерштрасса (46).

Глава II. Дальнейшее развитие первого метода Коши и метода последовательных приближений и применение их к уравнениям с комплексными переменными 50

§ 1. Исследования Липшица и других ученых по первому методу Коши (50). § 2. Применение метода Коши—Липшица к комплексной области (54). § 3. Развитие метода последовательных приближений (57). § 4. Метод последовательных приближений в комплексной области (61).

Глава III. Развитие метода мажорантных функций и его применение к уравнениям различных типов 64

§ 1. Работы Брио и Буке по усовершенствованию метода (64). § 2. Развитие идей Коши, Брио и Буке в работах Мерэ (71). § 3. Уточнение теоремы единственности (Жордан, Фукс) (73). § 4. Теорема единственности в трактовке Пикара и Пенлеве (76). § 5. Развитие метода мажорантных функций в работах Линделефа, Ляпунова, Пуанкаре и других ученых (80). § 6. Применение метода мажорантных функций к доказательству существования интегралов уравнений в полных дифференциалах и с частными производными. Теорема С. В. Ковалевской (87).

Глава IV. Развитие учения об особых точках и их классификации . . 94

§ 1. Постановка вопроса. Понятие особых точек и их исследование у Коши (94). § 2. Изучение особых точек в работах Пюизё и Римана (98). § 3. Классификация особых точек и функций в работах Вейерштрасса и Фукса (106). § 4. Особые точки дифференциальных уравнений (Брио и Буке, Жуковский, Пуанкаре и др.) (109). § 5. Классификация особых точек Пенлеве, Голубева и ее дополнения (114).

Глава V. Изучение уравнений первого порядка. Уравнения с неподвижными особыми точками. 120

§ 1. Простейшие виды особенностей. Исследования Брио и Буке (120) § 2. Представление неголоморфных интегралов. Связь с теорией устойчивости (Пуанкаре, Ляпунов, Пикар и др.) (125). § 3. Из истории теории особых решений (132). § 4. Алгебраические интегралы уравнений первого порядка. Геометрическая теория Отона. Дальнейшее развитие идей Брио и Буке (139). § 5. Уравнения с неподвижными критическими точками. Условия Фукса и Пуанкаре. Однозначные интегралы (147). § 6. Неподвижность нулей и полюсов интегралов алгебраических дифференциальных уравнений. Исследования Петровича, Ремундоса и Голубева (155). § 7. Неподвижность трансцендентных и существенно особых точек. Теорема Пенлеве (158).

Глава VI. Уравнения с подвижными критическими точками 161

§ 1. Постановка вопроса. Ограниченность числа значений интегралов около подвижных критических точек. Алгебраические интегралы. Монография Пенлеве (161). § 2. Дальнейшее развитие проблемы Пенлеве (168). § 3. Интегралы с особыми точками, в окрестности которых они обладают бесконечным числом ветвей (исследования Бутру) (174).

Глава VII. Изучение отдельных видов уравнений первого порядка . . 179

§ 1. Уравнение Риккати (179). § 2. Уравнение Брио и Буке. Исследование общего случая (186). § 3. Теорема Эрмита. Дальнейшие исследования уравнения Брио и Буке (188). § 4. Биномиальное уравнение. Результаты Брио и Буке и их дополнение (191).

Глава VIII. Уравнения второго порядка 196

§ 1. Постановка задачи и первые подходы к ее решению. Геометрическая теория в работах Пикара. Уравнения с однозначными интегралами (196). § 2. Уравнения с неподвижными критическими точками. Метод исследования Пенлеве (205). § 3. Дальнейшее развитие метода. Исследование уравнения $y''=R(x, y, y')$. Уравнения с неподвижными критическими точками (211). § 4. Дополнения результатов Пенлеве в работах других ученых. Новые виды неприводимых уравнений второго порядка (218). § 5. Асимптотический метод изучения дифференциальных уравнений второго порядка. Монография Бутру (222). § 6. Изучение отдельных видов уравнений. Связь с линейными уравнениями. Дополнения Мальмквиста (224).

Глава IX. Уравнения третьего и высших порядков. Применения теории 228

§ 1. Уравнения третьего порядка с неподвижными критическими точками. Подход Пенлеве (228). § 2. Дальнейшие исследования уравнений третьего порядка. Работы Шази и Гарнье (230). § 3. Уравнения высших порядков (239). § 4. Некоторые приложения теории нелинейных уравнений. (240).

Часть вторая. **Развитие аналитической теории линейных дифференциальных уравнений**

Глава X. Теорема существования решений линейных уравнений . . 245

§ 1. Постановка вопроса. Диссертация Каке и другие работы (245). § 2. Теорема Фукса (248). § 3. Развитие вопроса в работах других ученых (Гюнтер, Шлезингер, Племель) (253).

Глава XI. Аналитическое выражение интегралов 261

§ 1. Вводные замечания. Постановка задачи. Идеи Римана (261). § 2. Разложение интегралов в области особых точек. Теория Фукса (265). § 3. Случай регулярной особой точки (268). § 4. Развитие идей Фукса в трудах других ученых (273). § 5. Разложение интегралов в области других особых точек. Нормальные интегралы. Работы Томе и других ученых (278). § 6. Разложение интегралов в кольце (283).

Глава XII. Асимптотическое представление интегралов линейных уравнений 286

§ 1. Асимптотическое представление величин. Асимптотические и расходящиеся ряды. Вводные замечания (286). § 2. Теория асимптотических рядов Стилтьеса и Пуанкаре и применение их к представлению интегралов уравнений (290). § 3. Учение об асимптотических рядах и их применении к представлению интегралов дифференциальных уравнений в 90-е годы XIX и в начале XX веков (связь с теорией устойчивости) (294). § 4. Дальнейшие исследования по асимптотическому представлению интегралов дифференциальных уравнений в начале XX века (304).

Глава XIII. Связь теории линейных дифференциальных уравнений с теорией алгебраических уравнений 312

§ 1. Инварианты. Группа преобразований. Группа монодромии (312). § 2. Проблема Фукса; связь линейной и нелинейной теории в работах Р. Фукса и Л. Шлезингера (317). § 3. Приводимость и неприводимость уравнений (321). § 4. Классификация линейных дифференциальных уравнений. Понятие класса, вида и семейства (323). § 5. Алгебраическая интегрируемость линейных дифференциальных уравнений (326).

Глава XIV. Изучение уравнений отдельных видов 336

§ 1. Уравнения класса Фукса (336). § 2. Уравнение Лапласа (338). § 3. Гипергеометрическое уравнение (339). § 4. Уравнение Ламе (347).

Глава XV. Проблема обращения решений дифференциальных уравнений 350

§ 1. Вводные замечания. Задачи обращения в теории эллиптических и абелевых интегралов (350). § 2. Проблема обращения в теории дифференциальных уравнений (Риман, Фукс, Клейн) (354). § 3. Построение основ теории автоморфных функций (359). § 4. Задача обращения для дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя особыми точками (А. Пуанкаре, Ф. Клейн, В. Смирнов) (363).

Глава XVI. Определение дифференциального уравнения по заданным свойствам (проблема Римана) 371

§ 1. Постановка вопроса у Римана и первые подходы к его решению (371). § 2. Применение метода интегральных уравнений к изучению проблемы (Гильберт, Племель) (376). § 3. Другие методы исследования проблемы (379). § 4. Алгорифмический метод решения основных проблем аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (И. А. Лаппо-Данилевский) (381).

Заключение 397

Примечания 406

Список сокращенных названий журналов, периодических и повторяющихся изданий 428

Литература . 431