

ROBERT D. RICHTMYER

PRINCIPLES OF ADVANCED MATHEMATICAL PHYSICS

Volume 1

Springer-Verlag
New York Heidelberg Berlin
1978

Р. РИХТМАЙЕР

ПРИНЦИПЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Перевод с английского

В. Е. Кондрашова, В. Ф. Курякина, В. Г. Подвального

под редакцией

И. Д. Софронова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1982

ББК 22.162

Р 56

УДК 517.43:519.53+519.2

Рихтмайер Р.

Р 56 Принципы современной математической физики: Пер. с англ.— М.: Мир, 1982.
488 с., ил.

В книге известного американского ученого, знакомого советскому читателю по переводу его трудов, излагается математический аппарат современной теоретической физики (некоторые разделы функционального анализа, теория вероятностей, эволюционные задачи и т. д.) и показываются его применения к квантовой механике и гидродинамике. В отличие от многотомника М. Рида и Б. Саймона книга рассчитана на первоначальное изучение предмета.

Для физиков и математиков-прикладников.

Р $\frac{20203-012}{041(01)-82}$ 12-82, ч. 1

1702050000

ББК 22.162

517.2 530.1

Редакция литературы по математическим наукам

© 1978 by Springer-Verlag New York Inc.

All Rights Reserved

Authorized translation from English language published by Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York

© Перевод на русский язык, «Мир», 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Автор этой книги — видный американский ученый, один из ближайших сотрудников Дж. фон Неймана, посвятивший много лет разработке численных методов решения сложных физических задач и внесший существенный вклад в эту отрасль науки. Он известен советским специалистам как по его многочисленным работам на английском языке, так и по переводам двух изданий книги «Разностные методы решения краевых задач» (второе издание совместно с К. В. Мортонем), выпущенных издательством «Мир» в 1960 и 1972 гг., а также ряда статей. В течение многих лет он уделял большое внимание и педагогической деятельности, обучая будущих физиков основам современной математики. Одним из результатов этой многолетней педагогической работы является предлагаемая вниманию читателей книга — первый том задуманного автором двухтомного курса.

В данном томе излагаются (прежде всего для физиков) некоторые разделы функционального анализа, теория дифференциальных операторов, теория вероятностей, эволюционные задачи и т. д. (изложение многих вопросов в значительной степени основывается на теории распределений) и показывается их применение к таким разделам физики, как квантовая механика и гидродинамика. При этом основное внимание уделяется разъяснению сущности сравнительно новых для физики математических идей и понятий и демонстрации их полезности в физике. Простота и ясность изложения удачно сочетаются с высоким научным уровнем, широтой охвата материала и большой продуманностью курса в целом. Многочисленные упражнения различной степени трудности удачно дополняют основной текст.

В своем предисловии автор подробно останавливается на мотивах, определивших стиль и содержание книги, и поэтому здесь нет необходимости затрагивать эти вопросы. В целом же книга отражает постепенную переоценку ведущими специалистами того математического аппарата, которым в настоящее время должны владеть выпускники физических факультетов. Необходимость такой переоценки диктуется уровнем современных

теоретических и прикладных исследований, результаты которых подчас просто нельзя понять без знания основных положений современной математики. Включение этих положений в курсы математической физики приводит к сокращению или даже полному отказу от традиционных разделов математики в этих курсах. Помимо необходимости по существу, такая перестройка оправдывается еще и тем, что самостоятельно усвоить традиционные разделы гораздо проще, чем новые. Книга Рихтмайера представляет собой яркий и оригинальный пример обновления и развития методов преподавания математической физики и явится ценным руководством по данному предмету.

И. Д. Софронов

ПРЕДИСЛОВИЕ

О ПРИРОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Математические построения и рассуждения весьма отличны от физических. Математика зиждется на близкодействующих силах, которые связывают каждый шаг дедукции непосредственно с предшествующими шагами, тогда как в физике властвуют более далекодействующие силы интуиции и аналогии, опирающиеся на разного рода вспомогательные данные. Сравнение физической науки с анализом криптограмм («разгадка тайн природы» и т. п.) несколько преувеличено, но в общем справедливо. Когда найден шифр и выяснился смысл загадочного манускрипта, не обращаются к математику за доказательством единственности, даже если мыслимо существование другого решения, т. е. другого варианта прочтения. В физике доказательства существования и единственности на многие десятилетия отстают от проводимых исследований (из-за сложности изучаемых явлений). К тому же зачастую представляется, что эти доказательства не так уж нужны, ибо они не более убедительны, чем гипотезы, на которых они основаны и которые в свою очередь являются предметом физики; в то же время обилие косвенных данных часто оказывается вполне убедительным. Напротив, в математике интуиция и аналогия не совсем правомерны: хотя они довольно часто и приводят к полезным догадкам, эти догадки никогда не становятся частью теории, пока не будут доказаны. При доказательстве теоремы в математике не разрешается использовать никаких условий, кроме тех, которые входят в ее формулировку.

Первым следствием такого различия должно быть наше отношение к некоторым исследованиям в так называемой прикладной математике (а возможно, к большинству таких исследований), по крайней мере в тех разделах математики, которые применимы в физике. Мы имеем в виду, что эти исследования нужно рассматривать как чисто математические и оценивать их как таковые. Например, некоторые из моих коллег-математиков работали в последние годы над приближенным методом Хартри—Фока для определения структур многоэлектронных атомов и ионов. Этот метод появился почти пятьдесят лет назад, и физики делали все возможное для его обоснования, используя вариационные принципы, интуицию и другие средства в рамках физического подхода. В настоящее время данный метод занял прочное место в физике.

Те теоремы, которые здесь можно доказать (большей частью относящиеся к двух- и трехэлектронным системам и поэтому не представляющие особого интереса для физики), следует рассматривать как чисто математические теоремы. Если они отвечают уровню математических требований (а я полагаю, что это так), то они в достаточной мере обосновывают метод. Если же они не выдерживают критики с математической точки зрения, то следует признать, что в этом направлении нужная для физики работа не выполнена. В этом смысле прикладная математика не играет роли в современной физике. При существующем разделении труда задача математика заключается в том, чтобы создавать различные математические теории без особых размышлений о том, где эти теории будут применяться, — это покажут будущие физические исследования.

Специализация, конечно, зашла чересчур далеко, но даже и при меньшей ее степени не могло бы быть и речи о том, чтобы непосредственное перенесение методов современной математики в современную физику сразу позволило бы получить существенные результаты — слишком велико различие между этими областями науки. Современные физики знают, как использовать математику, — они умеют формулировать задачи, отыскивать методы решения, проводить пространные выкладки и вычисления, но не могут создавать математические теории. Опыт показывает, что формулировка и кристаллизация абстрактных понятий и принципов в большей степени принадлежат сфере математики. Такое разделение труда весьма важно и должно восприниматься всерьез.

Разумеется, нет возражений против работы математика в тех областях, которые можно отнести к прикладной математике. Очень хорошо, если он как математик вдохновляется миром физических явлений, но ценность таких результатов для физики определяется их чисто математическим качеством.

Нет также возражений против работы математика в физике, если он, конечно, обладает нужной квалификацией. Замечательный пример этого дал нам фон Нейман. Когда он работал над физическими вопросами, он говорил, думал и вычислял подобно физикам (только быстрее). Он разбирался во всех разделах физики (включая тогдашний уровень теории элементарных частиц), знал химию и астрономию, а кроме того, обладал талантом порождать те и только те математические идеи, которые были необходимы для изучаемых им физических явлений. Нужно всячески поощрять любого, кто независимо от своей профессиональной принадлежности может сделать хотя бы немного для физики, но следует помнить, что цели и методы последней сильно отличаются от целей и методов прикладной математики, основное назначение которой состоит в создании математических теорий.

Здесь, по-видимому, уместно привести несколько цитат из книги Харди «Апология математика»¹⁾:

1. Я утверждал, что математик — творец идей, а красота и глубина — вот критерий, при помощи которого эти идеи оцениваются (с. 98).

2. Жизнь любого истинно профессионального математика нельзя оценивать только на основании «полезности» его работы (с. 119).

3. Возникает довольно любопытный вывод: чистая математика в целом ощутимо полезнее прикладной (с. 134).

4. Надеюсь, нет нужды говорить о том, что я не пытался приписать значение математической физики, этого великолепного предмета с громадными задачами, где можно дать полную волю самому изощренному воображению (с. 135).

Второе следствие отличия математических построений от физических касается слова «строгость», которое неправильно трактуют как математики, так и физики и которое, наверное, нужно изгнать из нашего лексикона. Физики уверены, что математики тратят уйму времени на то, чтобы расставить все точки над i , а математики, покачивая головами, поражаются, как эти небрежные физики все-таки получают правильные результаты. И то, и другое отношение возникает из-за недостаточного понимания методологических различий между этими двумя дисциплинами. Ситуация немного проясняется, когда начинаешь обучать физиков математике, поскольку оказывается, что физики, не боясь привычных и успешных путей исследования физического мира, от математики, тем не менее, требуют строгости. Физики хотят точно знать, что верно, а что неверно и почему именно (хотя стремятся обсуждать дополнительные факты без доказательств); они желают иметь множество примеров и контрпримеров, чтобы очертить область применения предлагаемых им теорем.

В одной из областей физики, а именно в квантовой теории поля, методологическое различие, о котором мы говорили, почти исчезло из-за несостоятельности традиционных методов. В 1900 г. Макс Планк предложил: «Давайте проквантуем электромагнитное поле», и показал, что в таком случае получаются замечательные вещи; еще большее показал Эйнштейн. До некоторой степени вся современная физика базируется на этом предложении, но задача оказалась гораздо труднее, чем первоначально представлялось. В течение первой половины нашего века во многих попытках, основанных на использовании интуитивных методов, столь плодотворных в других областях квантовой механики, успешно вычислялись интенсивность испускания и поглощения,

¹⁾ Hardy G. H. A mathematician's apology,

а также ширина спектральных линий. Однако это оказалось возможным лишь благодаря произвольному устранению бесконечностей и несоответствий и большей частью относилось к случаям, в которых искомые результаты уже были известны из экспериментов или из более грубых теорий. В пятидесятые годы группа физиков более серьезно занялась устранением бесконечностей, используя совершенно новые аксиомы («техника перенормировок»), и хлынул целый поток новых захватывающих результатов (сдвиг Лэмба, точные магнитные моменты и т. д.). Однако мы еще не имеем вполне обоснованной теории, и каждая новая попытка преодолеть возникающие трудности сопровождается введением все более точных и более мощных математических средств. Теперь создается впечатление, что в квантовой теории поля интуитивные методы так же ненадежны, как и в чистой математике, и современной теории поля присущи многие черты чистой математики: здесь так и чувствуется — определение, лемма, доказательство, теорема, доказательство и т. д., даже если эти слова и не упоминаются. По-видимому, окончательный успех в этой области будет достигнут в результате взаимодействия физической интуиции и вновь обретенной математической строгости.

В результате в математической физике все возрастает потребность глубокого изучения операторов, распределений, банаховых алгебр, функций нескольких комплексных переменных, представлений некомпактных групп и т. д.

Неспециалисты обычно плохо представляют себе, насколько широко используется в физике математика. Им кажется, что физики интересуются лишь математическим анализом и в особенности той его частью, которая соответствует физике девятнадцатого века и изложена в книге Куранта и Гильберта. Большинство книг (включая и вышедшие сравнительно недавно), посвященных «математическим методам для физиков» и т. п., не содержит теорию групп, которая играет существенную роль в физике с середины двадцатых годов, и их авторы даже не упоминают, что когда-либо слышали о математических принципах и концептуальной основе современной квантовой механики, теории относительности, космологии, теории рассеяния, квантовой теории поля, статистической механики, теории топологических динамических систем и т. д. Не говорится там ничего и о тех концепциях и принципах, которые еще не вошли в обиход физики, но, вероятно, войдут в ближайшем будущем и, по всей видимости, будут заимствованы из таких областей, как алгебра, логика, теория множеств и топология. Нет, пожалуй, такого раздела математики, который не представлял бы потенциального интереса для физики.

Для наших целей математические концепции и принципы более важны, чем методы, поскольку основным назначением кур-

сов по математической физике, по моему мнению, является такое объяснение этих концепций и принципов, чтобы была видна их приемлемость для физики. Приведем конкретный пример.

Многообразие в релятивистской теории поля. В 1916 г. Карл Шварцшильд получил статическое сферическое решение уравнений Эйнштейна для поля в виде, который носит теперь его имя. Сначала казалось, что эта формула дает некоторую особенность при радиусе, получившем название «радиуса Шварцшильда». Прошло сорок четыре года замешательства по поводу этой «особенности Шварцшильда», и стало постепенно выясняться, что формула Шварцшильда описывает только часть соответствующей физической пространственно-временной области. В 1960 г. Мартин Крускал дал описание геодезически полного многообразия, часть которого определяет формула Шварцшильда, и было установлено, что хотя некоторые интересные явления связаны с радиусом Шварцшильда, никакой особенности там нет. Те, кто занимается релятивистской теорией поля, знают теперь, что под решением уравнений Эйнштейна следует понимать не формулу для элемента дуги $ds^2 = \dots$, а полное многообразие и что глобальная топология этого многообразия может иметь космологическую значимость. Введение в релятивистскую теорию поля геометрического понятия *многообразия* дает превосходный пример математической физики. Теория многообразий будет изложена во втором томе.

Другой, более ранний пример — введение в квантовую механику теории абстрактных гильбертовых пространств, что было сделано главным образом фон Нейманом и дало возможность построить серьезную теорию на основе мощных интуитивных идей Дирака и других физиков. Не менее важным событием было применение групп и представлений групп (это заслуга в основном Вигнера и Вейля).

Наконец, свежий пример — Рюэль и Такенс использовали топологическую теорию дифференцируемых динамических систем в исследовании возникновения турбулентности. Эти идеи, вероятно, должны играть определенную роль и в других разделах физики, где появляются нелинейные дифференциальные уравнения.

Основные математические вопросы физики входят в курсы физики. Надлежащая формулировка граничных задач, асимптотические разложения, следствия симметрии и т. п. — все это дело физики. Хотя эти представления шлифуются и анализируются в курсах математической физики, первоначально они должны появляться как часть физики. Преподаватель физики никогда не должен говорить студентам, что они научатся применять эти представления, когда прослушают математические курсы. Физику и математику так разделять нельзя, и курсы математической физики не снимают с преподавателей физики ответственности

за объяснение своего предмета. Однако практически даже в лучших курсах физики не удастся изложить на высоком уровне все затронутые там вопросы. Например, в большинстве книг по квантовой механике много неясностей, связанных с гильбертовыми пространствами и операторами, и студентам нужно изучать эти понятия лишь после изучения квантовой механики на интуитивном уровне. И это не только вопрос «строгости». Имеет ли данный симметрический оператор самосопряженные расширения, а если имеет, то сколько, — это вопрос физики, ибо самосопряженные операторы соответствуют наблюдаемым. Вероятностная интерпретация спектрального семейства самосопряженных операторов дает физическую интерпретацию наблюдаемой даже для состояний, не принадлежащих области определения оператора, и т. д. На мой взгляд, математическая физика должна содержать объяснение подобных вопросов.

Многие хорошие идеи оказываются простыми, и я полагаю, что их так и надо представлять — без излишних отступлений. По моему мнению, теорию распределений, например, следует основывать (вполне строго, конечно) на понятии интеграла Римана и современном анализе, а теория пространств L^2 и теория дифференциальных операторов должны базироваться на теории распределений. О теории меры и топологических векторных пространствах студенты смогут узнать позднее. В своей книге я стремился представить фундаментальные идеи на максимально возможном «заземленном» уровне. Но в то же время я решился изложить и некоторые идеи и представления, имеющие самостоятельный интерес, например понятие кардинального числа в главе о гильбертовом пространстве.

Роберт Д. Рихтмайер

*Боулдер
Декабрь 1978г.*

Глава 1

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Связь с конечномерными пространствами; аксомы гильбертова пространства; неравенство Шварца и неравенство треугольника; правило параллелограмма и связь с общими банаховыми пространствами; полнота l^2 ; трансфинитные кардинальные числа; эквивалентность сепарабельных гильбертовых пространств; гильбертовы пространства больших размерностей; сепарабельность пространств Фока; критерий полноты ортонормированных последовательностей; линейные функционалы; теоремы Рисса—Фишера и Рисса—Фреше; сильная и слабая сходимость; поляризация квадратичных функционалов.

Предварительные сведения: линейная алгебра.

В этой главе рассматривается в основном геометрия гильбертовых пространств (главным образом абстрактных). В гл. 5 теория гильбертовых пространств совместно с теорией распределений используется для построения теории пространств L^2 , на которой в значительной мере основывается современный функциональный анализ.

1.1. ОБЗОР НЕОБХОДИМЫХ СВЕДЕНИЙ О МАТРИЦАХ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Предполагается, что читатель знаком со следующим материалом. Вещественная или комплексная матрица A размера $n \times n$ определяет линейное преобразование n -мерного вещественного или комплексного пространства V^n : $x \rightarrow x' = Ax$, в координатной

записи $x'_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k$. Если x рассматривать как вектор-столбец, т. е. как $(n \times 1)$ -матрицу (и в этом случае опускать индекс столбца), то Ax оказывается просто произведением матриц. Транспонированная и эрмитово сопряженная матрицы для матрицы M (не обязательно квадратной) обозначаются через M^T и M^* , т. е. $(M^T)_{jk} = M_{kj}$, $(M^*)_{jk} = \overline{M_{kj}}$; в частности, x^T и x^* — векторы-строки. Если x и y — любые векторы из V^n , то их эрмитово скалярное произведение является матрицей размера 1×1 , т. е. числом $x^* y = \sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j$, обозначаемым также через (x, y) . В вещественном слу-

чае получаем просто $x^T y = \sum x_j y_j$, а эту величину обозначают часто и через $x \cdot y$. [Заметим, что xy^* — не число, а $(n \times n)$ -матрица (ранга 1); возможно, это объясняет, почему в (x, y) второй сомножитель взят линейным, первый же полулинейным¹⁾, как обычно делается в физике, а не наоборот, как обычно принято в математике, т. е. $(x, ay) = a(x, y)$, тогда как $(ax, y) = \bar{a}(x, y)$.] Говорят, что векторы x и y ортогональны, если $(x, y) = 0$. Длина вектора x — число $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, которое иногда обозначают просто $|x|$.

Основные геометрические понятия V^n связаны, во-первых, с линейной зависимостью и, во-вторых, с ортогональностью. Векторы $x^1, \dots, x^k$ линейно зависимы, если найдутся такие числа $a_1, \dots, a_k$, не все равные нулю, что $\sum_{j=1}^k a_j x^j$ — нулевой вектор (при $k > n$ векторы всегда линейно зависимы). Множество всех линейных комбинаций $\sum a_j x^j$ k данных векторов называется (линейным) подпространством пространства V^n , порожденным векторами $x^1, \dots, x^k$ (или линейной оболочкой этих векторов). Если эти векторы линейно независимы, то порожденное ими подпространство k -мерно; в линейной алгебре доказывается, что если $y^1, \dots, y^k$ — другие линейно независимые векторы, лежащие в этом подпространстве, то их линейная оболочка оказывается тем же самым подпространством. Для вещественного пространства V^n числа $a_1, a_2, \dots$ — произвольные вещественные, для комплексного V^n эти числа — комплексные. Множество вещественных или комплексных чисел (обозначаемое соответственно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется полем скаляров; никакие другие поля использоваться не будут. Иногда говорят, что комплексное пространство V^n имеет $2n$ вещественных измерений.

Множество $\{v^j\}_1^k$ векторов из V^n называется ортонормированным²⁾, если $(v^i, v^j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Ясно, что тогда $k \leq n$. Если $k = n$, то любой вектор x можно записать как $\sum_{j=1}^n a_j v^j$, где $a_j = (v^j, x)$.

Если S — некоторое подпространство пространства V^n , то $S^\perp$ обозначает ортогональное дополнение S , которое определяется как

$$S^\perp = \{x: (x, y) = 0 \text{ для всех } y \text{ из } S\}; \quad (1.1.1)$$

иначе говоря, $S^\perp$ состоит из всех тех x , которые ортогональны всем y из S ; кроме того, $(S^\perp)^\perp = S$ и $\dim S + \dim S^\perp = n$. Тео-

¹⁾ По другой терминологии — сопряженно линейным или антилинейным. — Прим. перев.

²⁾ По другой терминологии — ортогональным нормированным или ортонормальным. — Прим. перев.

тема о проекции, доказываемая в линейной алгебре, утверждает, что для любого вектора x из V^n существует единственное разложение $x = y + z$, где y и z принадлежат S и $S^\perp$ соответственно.

В этой главе изложенные выше идеи обобщаются на случай определенных бесконечномерных пространств, называемых *гильбертовыми*. Бесконечномерность порождает несколько новых понятий. Например, в отличие от конечномерных пространств, где скалярное произведение всегда имеет смысл, в некоторых бесконечномерных пространствах (см. гл. 15) длина $\|x\|$ определена для всех x , однако скалярного произведения нет, причем его и нельзя определить никаким разумным образом. Мы начнем с гильбертовых пространств, в которых скалярное произведение определено и которые поэтому являются естественным обобщением хорошо знакомых евклидовых пространств.

В главах 7—12 изучаются обобщения матриц, точнее соответствующих им линейных преобразований. Этими обобщениями являются линейные преобразования или операторы в гильбертовых пространствах. Необходимо обобщить несколько определений и утверждений, а именно следующие. Если A — матрица размера $n \times n$, вектор $v \neq 0$ и λ — число, то λ называется *собственным значением* A , если $Av = \lambda v$, причем v называется соответствующим ему *собственным вектором*. Преобразование $x \rightarrow x' = Ax$ имеет обратное преобразование $x' \rightarrow x = A^{-1}x'$ тогда и только тогда, когда нуль не является собственным значением A . [Поскольку собственные значения λ являются нулями многочлена $\det(\lambda I - A)$ и матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Для теоретических целей обратная матрица получается при помощи алгебраических дополнений, для практических нужд — при помощи метода исключения Гаусса; эти методы не обобщаются.] Если A — эрмитова матрица, т. е. $A^* = A$, то все ее собственные значения вещественны и у нее есть полное ортонормированное множество собственных векторов $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$. Если U — матрица размера $n \times n$, имеющая эти векторы своими столбцами* (она *унитарна*: $UU^* = U^*U = I$), то U^*AU — диагональная матрица D с собственными значениями матрицы A на главной диагонали и $A = UDU^*$. Для такой диагонализуемости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы она была *нормальной*, т. е. чтобы $AA^* = A^*A$. Коммутирующие нормальные матрицы A и B можно диагонализировать одновременно одной и той же унитарной матрицей U . Матрица A называется *положительно определенной* (полуопределенной), если $x^*Ax > 0$ (≥ 0) для всех $x \neq 0$. В этом случае A обязательно эрмитова. [Тензор момента инерции — положительно определенная вещественная (и, следовательно, симметрическая) матрица.] Все эти представления можно перенести на гильбертовы пространства, хотя такие обобщения не всегда непосредственны и очевидны.

1.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. НОРМИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Хотя выше вектор был определен как набор n чисел, векторные пространства (называемые также *линейными пространствами*) можно определить аксиоматически, как это обычно делается в курсах линейной алгебры. В бесконечномерном случае такой подход предпочтительнее, поскольку имеется много конкретных как будто различных реализаций этих пространств. Аксиомы линейного пространства V над полем F ($=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) таковы:

1. Если u и v принадлежат V , то при любых a и b из F и $au + bv$ принадлежит V ;
2. $u + v = v + u$, $u + (v + w) = (u + v) + w$;
3. $a(bu) = (ab)u$;
4. $a(u + v) = au + av$, $(a + b)u = au + bu$;
5. Имеется единственный нулевой вектор 0 , такой, что $u + 0 = u$ для всех u ;
6. $1u = u$, $0u = 0$.

Обычно $(-1)u$ записывают как $-u$, а $u + (-1)v$ — как $u - v$; кроме того, часто пишут 0 вместо 0 , например, $u - u = 0$. В конечномерном случае далее предполагается, что в V найдется n (но не $n + 1$) линейно независимых векторов; если в таком пространстве V выбрать базис, то оно будет в точности эквивалентно описанному выше пространству V^n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $u - u = 0$ для всех u .
2. Покажите, что единственность нулевого вектора 0 следует из других аксиом, т. е. если $u + 0_1 = u$ и $u + 0_2 = u$ для всех u , то $0_1 = 0_2$.
3. Докажите, что при заданных u и w уравнение $u + v = w$ имеет единственное решение $v = w + (-1)u$.

Линейное пространство V называется *нормированным*, если для любого u из V определено вещественное число $\|u\|$, называемое *нормой* вектора u , так, что

7. $\|u\| > 0$ при $u \neq 0$;
8. $\|0\| = 0$;
9. $\|au\| = |a| \|u\|$;
10. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

[В пространстве V^n в качестве нормы $\|u\|$ берется обычно длина вектора u : $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^n |u_j|^2$.]

УПРАЖНЕНИЕ

4. Покажите, что аксиома 6 линейного пространства может быть получена из других аксиом (включая аксиомы нормы). *Указание.* Доказывайте последовательно, что для любого u $0 \cdot u = 0$, $u - u = 0$, $1 \cdot u - u = 0$, $1 \cdot u = u$. С другой стороны, если оставить аксиому $0 \cdot u = 0$, то аксиому 8, $\|0\| = 0$, можно опустить.

1.3. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО: АКСИОМЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Гильбертово пространство H (вещественное или комплексное) — это полное пространство со скалярным произведением. Это означает, во-первых, что H — линейное пространство, определенное как в предыдущем параграфе; во-вторых, что для всех u и v из H определено скалярное произведение (u, v) — функция со значениями в поле скаляров $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которая линейна по v и эрмитово симметрична $((u, v) = \overline{(v, u)})$, а значит, полулинейна по u , причем соответствующая квадратичная форма положительно определена: $(u, u) \geq 0$ для всех u и $(u, u) = 0$ лишь при $u = 0$; в-третьих, что H полно относительно нормы $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, т. е. любая последовательность Коши имеет предел в H . Важность полноты для квантовой механики обсуждается в гл. 14.

В определении гильбертова пространства не требуется, чтобы оно было бесконечномерным, хотя это обычно предполагается, если только не оговорено противное. Вопрос о размерности обсуждается в § 1.5.

Вещественное гильбертово пространство — просто бесконечномерный аналог обычного n -мерного евклидова пространства; скалярное произведение (u, v) (которое здесь симметрично, $(u, v) = (v, u)$, и линейно по каждому сомножителю) — аналог скалярного произведения $u \cdot v$. В комплексном случае (u, v) аналогично эрмитову скалярному произведению $\sum \bar{u}_i v_i$.

Положительная определенность нормы и равенство $\|au\| = |a| \|u\|$ следуют непосредственно из свойств скалярного произведения и определения нормы, $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Докажем теперь неравенство треугольника.

Для любого числа a и любых u и v из H имеем

$$0 \leq (u + av, u + av) = (u, u) + (u, av) + (av, u) + (av, av);$$

поскольку (av, u) комплексно сопряженно к (u, av) , то

$$-2 \operatorname{Re} (u, av) \leq \|u\|^2 + |a|^2 \|v\|^2. \quad (1.3.1)$$

Возьмем

$$a = - \frac{\overline{(u, v)} \|u\|}{|(u, v)| \|v\|};$$

тогда из (1.3.1) с учетом равенства $(u, av) = a(u, v)$ получим

$$2 |(u, v)| \frac{\|u\|}{\|v\|} \leq 2 \|u\|^2,$$

или

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|; \quad (1.3.2)$$

это *неравенство Шварца* (которое в русской литературе называют *неравенством Буняковского*). Отсюда следует *непрерывность* скалярного произведения по каждому сомножителю. В самом деле, если $v_n \rightarrow v$ (т. е. если $\|v_n - v\| \rightarrow 0$), то $|(u, v_n - v)| \leq \|u\| \|v_n - v\| \rightarrow 0$; следовательно, $(u, v_n) \rightarrow (u, v)$. Наконец,

$$\begin{aligned}(u + v, u + v) &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,\end{aligned}$$

а отсюда следует *неравенство треугольника*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.3.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите непрерывность скалярного произведения по обоим сомножителям одновременно: если $u_n \rightarrow u$ и $v_n \rightarrow v$, то $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$. *Указание.* Докажите сначала, что $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ и $\|v_n\| \rightarrow \|v\|$.

Напоминание. Функция $f(x, y)$ может быть непрерывной по каждому аргументу в отдельности (т. е. непрерывной по x при каждом фиксированном y и по y при каждом фиксированном x), но не быть непрерывной по совокупности переменных. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0, 0)$ и по x , и по y в отдельности, но не совместно, что можно увидеть, устремляя x и y к нулю по прямой, проходящей под углом 45° к оси x .

Можно получить две другие формы неравенства треугольника. Для этого заменим в (1.3.3) v на $w - u$, а потом поменяем местами w и u . После переименования переменных окончательный результат можно представить в следующем виде:

$$\|u\| - \|v\| \leq \begin{cases} \|u + v\| \\ \text{или} \\ \|u - v\| \end{cases} \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.3.4)$$

Из определения нормы через скалярное произведение получаем тождество

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \quad (1.3.5)$$

которое называют *правилом параллелограмма*. Так как u , v , $u + v$, $u - v$ принадлежат двумерному подпространству, неравенства треугольника и правило параллелограмма выражают элементарные теоремы евклидовой геометрии на плоскости.

Замечание. Банахово пространство B (см. гл. 15) — это полное нормированное линейное пространство, однако его норма не обязательно порождается скалярным произведением. Йордан и фон Нейман [1935] доказали, что если для всех u и v из B выполняется правило параллелограмма, то можно определить скалярное произведение так, что B станет гильбертовым пространством. В этом случае скалярное произведение определяется через норму посредством так называемой процедуры поляризации:

$$(u, v) = (1/4) \sum_{(\alpha=1, i, -1, -i)} \alpha \| \alpha u + v \|^2. \quad (1.3.6)$$

Это равенство легко доказать, если известно, что скалярное произведение существует; труднее, однако, доказать, что равенство (1.3.6) определяет скалярное произведение со всеми его свойствами. (Равенство (1.3.6) обобщается в § 1.11.) Имеется много банаховых пространств, для которых правило параллелограмма неверно. Рассмотрим, например, пространство $L^1(\mathbb{R})$, состоящее из всех функций (точнее, распределений) $f(x)$ таких,

что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\| < \infty$; если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции с непересекающимися носителями (т. е. для любого x либо $f(x) = 0$, либо $g(x) = 0$), то ясно, что

$$\|f \pm g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \|f\| + \|g\|,$$

так что

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\| + \|g\|)^2$$

и, следовательно, (1.3.5) не выполняется. И вообще так называемая L^p -норма функции или распределения f на $\mathbb{R}$ определяется для $p \geq 1$ как $\left\{ \int |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$, но лишь для $p = 2$ можно определить скалярное произведение так, что $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Проверьте тождество (1.3.6), предполагая, что скалярное произведение существует.

1.4. ПРИМЕРЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пространства $L^2(a, b)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ и т. д. квадратично интегрируемых функций (вернее, распределений), которые рассматриваются в гл. 5, являются гильбертовыми пространствами. Для этих пространств скалярное произведение задается формулами типа

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$$

или

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) d^n x.$$

В качестве другого примера рассмотрим пространство l^2 , состоящее из всех таких последовательностей $\xi = \{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, комплексных чисел, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty. \quad (1.4.1)$$

Числа x_n можно интерпретировать как координаты точки ξ ; если $\xi = \{x_n\}$ и $\eta = \{y_n\}$, то $\alpha\xi + \beta\eta$ определяется как последовательность

$$\alpha\xi + \beta\eta = \{\alpha x_n + \beta y_n\}, \quad (1.4.2)$$

а скалярное произведение — формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n. \quad (1.4.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ принадлежат l^2 , то и $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ принадлежит l^2 ; покажите также, что ряд в (1.4.3) сходится, причем сходится абсолютно. Указание. Используйте неравенство Коши

$$\left| \sum_{n=1}^N u_n v_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N |v_n|^2}, \quad (1.4.4)$$

которое является просто дискретным вариантом неравенства Шварца и может быть доказано точно так же, как (1.3.2).

Утверждение. Пространство l^2 полно. Чтобы доказать это, возьмем последовательность Коши $\{\xi^j\}$ элементов l^2 , т. е. такую последовательность, что $\|\xi^j - \xi^k\| \rightarrow 0$ при $j, k \rightarrow \infty$, где для каждого j $\xi^j = \{x_n^j\}$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность комплексных чисел. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое K , что

$$\|\xi^j - \xi^k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^j - x_n^k|^2 < \varepsilon \quad \text{для } j, k \geq K;$$

следовательно, $|x_n^j - x_n^k| < \varepsilon$ для любого n . Но тогда для фиксированного n $\{x_n^j\}$, $j = 1, 2, \dots$, является числовой последовательностью Коши, а, значит, для любого n существует предел $y_n = \lim_{j \rightarrow \infty} x_n^j$.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Завершите это доказательство, показав, что $\eta = \{y_n\}$ принадлежит l^2 и $\|\eta - \xi^j\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, т. е. что $\xi^j \rightarrow \eta$ в пространстве l^2 . *Указание.* Сначала покажите, что сходится (и, следовательно, является ограниченной числовой последовательностью) $\{\|\xi^j\|\}$.

Замечание. Интуитивно может показаться, что эти гильбертовы пространства в каком-то смысле являются пространствами разных размеров а именно что l^2 имеет какую-то меньшую бесконечную размерность, чем $L^2(a, b)$, а $L^2(a, b)$ — пространство меньшей размерности, чем $L^2(\mathbb{R}^n)$. Мы увидим, что это не так: эти пространства — просто разные представления одного и того же абстрактного гильбертова пространства и изометрически изоморфны друг другу. Последнее означает, что между всеми элементами этих трех пространств существуют взаимно однозначные соответствия, сохраняющие все свойства (скалярное произведение, норму и т. д.).

1.5. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ. РАЗМЕРНОСТЬ

Кардинальное число (конечное или трансфинитное) множества (конечного или бесконечного) указывает, сколько элементов содержит это множество. Если имеется взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow B$ между элементами множеств A и B , то говорят, что эти множества имеют одно и то же кардинальное число, и пишут так: $\overline{A} = \overline{B}$. Если A — конечное множество из n элементов, то $\overline{A} = n$. Трансфинитные кардинальные числа определяются присвоением имен (символов) кардинальным числам конкретных бесконечных множеств, а тем самым и других множеств с тем же самым кардинальным числом. Например, если имеется взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow \{1, 2, \dots\}$ между элементами A и множества всех положительных целых чисел, множество A называют *счетно* бесконечным и пишут $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \aleph_0$ («алеф нуль»). Элементы такого множества можно выстроить в последовательность.

ПРИМЕРЫ

Множество $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ всех целых чисел, множество положительных четных целых чисел $\{2, 4, 6, \dots\}$, множество $\{2, 3, 5, \dots\}$ всех простых целых чисел являются счетно бесконечными.

Утверждение. Счетное объединение счетных множеств счетно. [Замечание: слово «счетное» означает конечное или счетно бесконечное, однако утверждение нетривиально только для случая бесконечного числа бесконечных множеств.] Чтобы доказать это утверждение, запишем последовательно элементы каждого мно-

жества по горизонталям, а полученные последовательности — по вертикали сверху вниз. Тогда взаимно однозначное соответствие с элементами множества $\{1, 2, 3, \dots\}$ устанавливается путем перечисления элементов следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 4 & 7 & \dots & & \\
 3 & 5 & 8 & & \dots & & \\
 6 & 9 & & & \dots & & \\
 10 & \text{и т. д.} & & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & &
 \end{array} \quad (1.5.1)$$

Именно так доказывается счетность множества рациональных чисел:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & & \\
 \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \dots & & \\
 \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \dots & & \\
 \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \dots & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & &
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите, что подмножество счетного множества счетно. Этот принцип неявно используется в предыдущем примере, потому что данное там перечисление рациональных чисел содержит много повторений, таких, как $\frac{2}{4}$ для $\frac{1}{2}$, или $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{3}$ для 1, а их нужно исключить перед тем, как устанавливать взаимно однозначное соответствие между рациональными и положительными целыми числами.

В теории функциональных пространств играет важную роль счетное множество всех полиномов от n переменных с рациональными коэффициентами: для каждого N множество всех полиномов $p(x_1, \dots, x_n)$ степени $\leq N$ и с коэффициентами вида r/s , где $|r| \leq N$, а $1 \leq s \leq N$, является конечным, поэтому объединение всех таких множеств счетно.

Хорошо известно, что множество всех вещественных чисел отрезка $[0, 1]$ несчетно. Кардинальное число этого множества называется *мощностью континуума* и обозначается через c . (Кардинальное число множества иногда называется его *мощностью*.)

Отображение $x \rightarrow \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th} x)$ показывает, что мощность $\bar{\mathbb{R}}$ всей вещественной оси также равна c . При помощи кривой Пеано, которая отображает $[0, 1]$ на весь единичный квадрат ($0 \leq x \leq 1$,

$0 \leq y \leq 1$), и аналогичных кривых в пространстве можно показывать, что все множества $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и т. д. имеют ту же самую мощность c .

Следующая процедура дает бесконечную последовательность кардинальных чисел. Пусть A и B — некоторые множества, а C — множество всех отображений B в A ; если $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — кардинальные числа A и B , то обозначим мощность множества C через $\bar{A}^{\bar{B}}$, т. е. $\bar{C} = \bar{A}^{\bar{B}}$. [Читателю следует проверить, что это обозначение корректно для конечных множеств A и B и что $\bar{A}^{\bar{B}}$ определяется однозначно в том смысле, что если имеются взаимно однозначные соответствия $A \leftrightarrow A_1$ и $B \leftrightarrow B_1$, то имеется и взаимно однозначное соответствие между двумя множествами отображений B в A и B_1 в A_1 .] Например, если мы представим каждое вещественное число из $[0, 1]$ в виде его десятичного представления $x = 0.a_1a_2a_3\dots$, то соответствие $j \rightarrow a_j$, взятое для данного числа x , представляет собой отображение множества B всех положительных целых чисел $j = 1, 2, \dots$ в множество $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ десяти цифр; следовательно, каждое такое число x соответствует элементу множества всех таких отображений. Это соответствие взаимно однозначно, за исключением случая представлений типа $0.1999\dots$ и $0.2000\dots$, порождающих одно и то же x ; пренебрегая этим несущественным усложнением вопроса, мы приходим к выводу, что c , мощность континуума, равна $10^{\aleph_0}$. Если взять двоичное или n -ичное представление числа x , то получим, что $c = 2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$; если же взять разложение числа на непрерывные дроби, то увидим, что $c = \aleph_0^{\aleph_0}$.

При сравнении кардинальных чисел говорят, что $\bar{A} < \bar{B}$, если есть взаимно однозначное отображение A в B , но отобразить B в A взаимно однозначно нельзя. Например, несчетность континуума выражают так: $c > \aleph_0$. Можно показать (используя лемму Цорна в соответствующей форме¹⁾), что для произвольных множеств A и B либо A отображается взаимно однозначно в B , либо B в A , либо каждое из них в другое. Если имеются взаимно однозначные отображения каждого из двух множеств в другое, то, согласно так называемой *теореме Бернштейна* (или *Шрёдера—Бернштейна*), существует взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств. Отсюда следует, что в любом случае либо $\bar{A} < \bar{B}$, либо $\bar{A} = \bar{B}$, либо $\bar{A} > \bar{B}$. Можно показать, что если A имеет по меньшей мере два элемента ($\bar{A} \geq 2$) и B не

¹⁾ То есть в форме теоремы *Цермело*: любое множество может быть вполне упорядочено. Доказательство сравнимости вполне упорядоченных множеств см. в книге Колмогорова и Фомина [1972]. — Прим. перев.

пусто ($\bar{B} \geq 1$), то $\bar{A}\bar{B} > \bar{B}$. Следовательно, трансфинитных кардинальных чисел бесконечно много.

Любая вещественнозначная функция вещественного аргумента является отображением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, следовательно, множество всех таких функций (на которые не накладывается никаких ограничений типа непрерывности, измеримости и т. п.) имеет мощность c^c , т. е. больше c ; иначе говоря, таких функций больше, чем точек на прямой. С другой стороны, множество всех непрерывных функций вещественного аргумента имеет мощность всего лишь $c^{\aleph_0}$, которая равна c . Чтобы убедиться в этом, выстроим вначале все рациональные числа в последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$, затем поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f(x)$ последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots$ вещественных чисел. Каждой такой последовательности соответствует только одна непрерывная функция, поэтому мощность множества непрерывных функций не больше мощности всех таких последовательностей, равной, очевидно, $c^{\aleph_0}$. Чтобы показать, что $c^{\aleph_0} = c$, возьмем последовательность $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ вещественных чисел и запишем их десятичные разложения:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.a_1a_2a_3\dots, \\ \beta &= 0.b_1b_2b_3\dots, \\ \gamma &= 0.c_1c_2c_3\dots \\ &\text{и т. д.}\end{aligned}\tag{1.5.2}$$

[Предполагается, что $0 \leq f(x) < 1$ для всех x ; в общем случае используется отображение $f(x) \leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}\{1 + \text{th } f(x)\}$.] Такую последовательность можно тогда поставить в соответствие всего лишь одному числу ω , имеющему вид

$$\omega = 0.a_1a_2b_1a_3b_2c_1a_4b_3c_2d_1\dots\tag{1.5.3}$$

и получающемуся по шаблону (1.5.1); это соответствие последовательностей $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ вещественным числам ω взаимно однозначно, за исключением чисел вида 0.1999... и 0.2000... и т. д., равных друг другу; данная трудность легко преодолевается предположением, что (1.5.3) является, например, двенадцатеричным представлением (при неизменности интерпретации (1.5.2)): тогда 0.1999... и 0.2000... становятся разными числами и множество всех последовательностей $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ отображается в $[0, 1)$ взаимно однозначно. Поэтому непрерывных функций не больше, чем вещественных чисел. Но их по крайней мере столько же (а значит, в точности столько), потому что кардинальное число множества функций-констант уже равно c .

Гильбертово пространство называется *сепарабельным* (термин неудачен), если оно содержит счетное плотное¹⁾ подмножество. [Тогда, как будет показано в § 1.6, оно содержит полную ортонормированную последовательность, при помощи которой любой элемент H может быть представлен в виде обобщенного ряда Фурье.] Пространство l^2 сепарабельно, потому что оно содержит в качестве плотного подмножества множество всех элементов $\xi = \{x_1, x_2, \dots\}$, таких, что (а) x_i рациональны, и (б) лишь конечное число x_i отлично от нуля. Пространство $L^2(a, b)$ сепарабельно по той причине, что любую непрерывную функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать на $[a, b]$ полиномом с рациональными коэффициентами, а любой элемент L^2 можно сколь угодно точно аппроксимировать непрерывной функцией (см. гл. 5). Таким образом, множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, очевидно счетное, плотно в $L^2(a, b)$. Аналогичным образом доказывается сепарабельность $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$, только в этом случае полиномы нужно изменять при больших значениях аргументов для того, чтобы сделать аппроксимирующие функции квадратично интегрируемыми. Несепарабельные гильбертовы пространства появляются в теории почти периодических функций, но, насколько мне известно, не встречаются в обычных физических приложениях. В следующем параграфе будет показано, что все бесконечномерные сепарабельные вещественные гильбертовы пространства (равно как и все комплексные) совпадают в смысле изоморфизма.

Пример

Пусть H состоит из всех таких функций $f(x)$, определенных на $\mathbb{R}$, которые равны нулю всюду, за исключением счетного числа точек x , причем $\sum |f(x)|^2 < \infty$; если f и g — две любые такие функции, положим

$$(f, g) = \sum \overline{f(x)} g(x),$$

где суммирование осуществляется по всем тем значениям x , для которых слагаемые отличны от нуля. Это гильбертово пространство H несепарабельно. Если $\mathbb{R}$ заменить на множество большей мощности $\aleph > \aleph_0$, то размерность такого гильбертова пространства оказывается еще больше и т. д. Размерность гильбертова пространства определяется в конце следующего параграфа.

Упражнения

1. Докажите, что пространство H , определенное в предыдущем примере, является гильбертовым и несепарабельным.

2. Пусть для каждого $n=0, 1, 2, \dots$ $\varphi_n(\cdot, \dots, \cdot)$ означает элемент (распределение) из $L^2(\mathbb{R}^n)$, для $n=0$ φ_0 можно интерпретировать просто как

¹⁾ Множество A называется *плотным* (в H), если любой элемент H является пределом последовательности элементов из A . — Прим. перев.

одно комплексное число; пусть Φ обозначает бесконечный вектор-столбец:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(\cdot) \\ \varphi_2(\cdot, \cdot) \\ \vdots \\ \varphi_n(\cdot, \dots, \cdot) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех таких векторов-столбцов, для которых

$$|\varphi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 < \infty$$

[в n -м члене суммы $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$]; определим в $\mathcal{F}$ скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi) = \overline{\varphi_0} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n).$$

Покажите, что $\mathcal{F}$ — сепарабельное гильбертово пространство. (В квантовой механике подобные пространства называются *пространствами Фока*.)

1.6. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Два элемента f и g гильбертова пространства H называются *ортгональными* (что записывается как $f \perp g$), если $(f, g) = 0$. Последовательность $\{\varphi_i\}$ называется *ортонормированной*, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$. Такими последовательностями в пространствах L^2 являются, например, системы ортгональных функций. Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $c_1, c_2, \dots$ — такие числа, что $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$, то частные суммы ряда $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ образуют последовательность Коши и ряд сходится к некоторому элементу из H . Для $f \in H$ числа (φ_i, f) называются (*обобщенными*) *коэффициентами Фурье* f относительно ортонормированной последовательности $\{\varphi_i\}$. Поскольку

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(f - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, f) \varphi_i, f - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, f) \varphi_i \right) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2 + \sum_{i,j=1}^n \overline{(\varphi_i, f)} (\varphi_j, f) (\varphi_i, \varphi_j) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2, \end{aligned}$$

мы имеем $\sum_{i=1}^n |(\varphi_i, f)|^2 \leq \|f\|^2$ для всех n , следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{неравенство Бесселя}). \quad (1.6.1)$$

Отсюда также следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) \varphi_i$ всегда сходится (хотя и не обязательно к f).

Ортонормированная последовательность $\{\varphi_i\}$ называется *полной*, если в H нет ненулевых элементов, ортогональных всем φ_i .

Теорема 1. Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированная последовательность, то следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\{\varphi_i\}$ полна,

(2) $f = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) \varphi_i$ для любого $f \in H$,

(3) $(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) (\varphi_i, g)$ для любых f и g из H ,

(4) $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2$ для любого $f \in H$. [Два последних со-

отношения называются *равенствами Парсеваля*.]

Доказательство. Мы докажем последовательно следующие импликации: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$. Для любого $f \in H$ элемент $f - \sum (\varphi_i, f) \varphi_i$ ортогонален любому φ_j , а значит, равен нулю по условию (1).

$(2) \Rightarrow (3)$. Подставляя $\sum (\varphi_i, f) \varphi_i$ вместо f в (f, g) и используя непрерывность скалярного произведения (неравенство Шварца) для доказательства сходимости ряда, убеждаемся в справедливости (3).

$(3) \Rightarrow (4)$. Возьмем $g = f$ в (3).

$(4) \Rightarrow (1)$. Если какой-либо f ортогонален всем φ_j , то $\|f\| = 0$ по (4), а значит, $f = 0$.

Теорема 2. Гильбертово пространство H сепарабельно в том и только в том случае, когда оно содержит полную ортонормированную последовательность.

Доказательство. Если H сепарабельно, то оно содержит счетное множество $\{\psi_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$), плотное в H . Из этого множества можно построить полную ортонормированную последовательность при помощи *процедуры Грама—Шмидта*:

1. Пусть ψ — первый ненулевой элемент $\{\psi_i\}$; положим

$$\varphi_1 = \frac{1}{\|\psi\|} \psi \quad \left(\text{будем писать } \frac{\psi}{\|\psi\|} \right).$$

2. Пусть ψ' — первый элемент $\{\psi_i\}$, который не является произведением φ_i на число; положим

$$\varphi_2 = \frac{\psi' - (\varphi_1, \psi') \varphi_1}{\|\psi' - (\varphi_1, \psi') \varphi_1\|}.$$

⋮

$n+1$. Пусть $\psi^{(n)}$ — первый элемент $\{\psi_i\}$, который не является линейной комбинацией $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; положим

$$\varphi_{n+1} = \frac{\psi^{(n)} - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, \psi^{(n)}) \varphi_i}{\left\| \psi^{(n)} - \sum_{i=1}^n (\varphi_i, \psi^{(n)}) \varphi_i \right\|}.$$

Очевидно, что $\{\varphi_i\}$ — ортонормированное множество (оно может быть конечным, поскольку возможно, что на некотором шаге процедуры все ψ_i окажутся линейными комбинациями $\varphi_1, \dots, \varphi_k$; в этом случае H конечномерно). Для доказательства полноты $\{\varphi_i\}$ предположим, что ξ — такой элемент H , что $\xi \perp \varphi_i$ для всех i ; покажем, что тогда $\xi = 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такой элемент ψ из $\{\psi_i\}$, что $\|\psi - \xi\| < \varepsilon$. Из построений Грама — Шмидта ясно, что ψ — конечная сумма $\sum c_i \varphi_i$. Поскольку $\xi \perp \varphi_i$ для всех i , ξ ортогонален и ψ ; поэтому¹⁾

$$(\psi - \xi, \psi - \xi) = \|\psi\|^2 + \|\xi\|^2 < \varepsilon^2,$$

$$\therefore \|\xi\|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0,$$

$$\therefore \|\xi\| = 0,$$

$$\therefore \xi = 0.$$

Обратно, если H содержит полную ортонормированную последовательность $\{\varphi_i\}$, то множество всех линейных конечных комбинаций φ_i с рациональными коэффициентами является счетным плотным множеством; следовательно, H сепарабельно.

Следствие. Сепарабельное гильбертово пространство изоморфно либо конечномерному евклидову пространству V^n , либо гильбертову пространству l^2 (все пространства рассматриваются над одним полем скаляров — $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Под изоморфизмом здесь понимается не только взаимно однозначное соответствие с сохранением операций сложения и умножения на скаляр, но и изометрия (сохранение нормы), так что свойства изоморфных пространств полностью совпадают. [Сохранение нормы подразумевает непрерывность и самого отображения, и его обратного в топологиях H и l^2 , так что это отображение (помимо всего прочего) является гомеоморфизмом, если пользоваться терминологией топологии.]

¹⁾ Используемый ниже символ $\therefore$ означает «следовательно». — Прим. перев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (для бесконечномерного случая). Пусть $\{\varphi_i\}$ — полная ортонормированная последовательность в H . Для любого $f \in H$ последовательность чисел $\{(\varphi_i, f)\}$ (коэффициентов Фурье) является, согласно неравенству Бесселя, элементом l^2 . Обратно, если $\{x_i\} \in l^2$, то $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i \in H$. По теореме 1 отображение $H \rightarrow l^2$, задаваемое соответствием $f \rightarrow \{(\varphi_i, f)\}$, и обратное отображение $l^2 \rightarrow H$, определяемое соответствием $\{x_i\} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i$, являются изометрическими изоморфными отображениями.

Если $\{x_i\}$ — любая последовательность вещественных или комплексных чисел, таких, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится, т. е. если $\{x_i\} \in l^2$, то ряд $\sum x_i \varphi_i$ сходится к некоторому элементу из H . Это утверждение — один из вариантов *теоремы Рисса—Фишера*.

Теорему 2 и ее следствие можно следующим образом обобщить на несепарабельные гильбертовы пространства (см. Халмош [1951]). Назовем множество векторов $S = \{\varphi_a: a \in A\}$ гильбертова пространства H ортонормированным, если

$$(\varphi_a, \varphi_b) = \begin{cases} 1 & \text{при } a=b, \\ 0 & \text{при } a \neq b \end{cases}$$

(A — так называемое *множество индексов*, не обязательно счетное, элементы которого помечают векторы S для того, чтобы отличать их один от другого). Если утверждение

$$(\varphi_a, \psi) = 0 \quad \text{для всех } a \in A$$

означает, что $\psi = 0$, то S — *полное ортонормированное множество*, или *базис* в H . Можно показать, что если $\{\varphi_a: a \in A\}$ и $\{\psi_b: b \in B\}$ — два любых базиса в H , то множества индексов A и B равномощны: $\overline{A} = \overline{B}$; их кардинальное число называется *размерностью H* . Если H сепарабельно, то его размерность либо конечна, либо равна $\aleph_0$. Размерность гильбертова пространства, определенного в примере предыдущего параграфа, равна c , мощности континуума. Обобщение следствия теоремы 2 состоит в том, что два гильбертовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

1.7. ПОДПРОСТРАНСТВА. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ

Замкнутое линейное многообразие или подпространство M в H — это замкнутое линейное множество элементов H ; M само является гильбертовым пространством. [Пусть S — произвольное подмножество H (или вообще любого метрического пространства).

Если $\{u_i\}_1^\infty$ — любая сходящаяся последовательность точек S , то ее предел $\lim u_i$ (не обязательно принадлежащий S) называется *предельной точкой* S ; если S содержит все свои предельные точки, то оно *замкнуто*.]

УПРАЖНЕНИЯ

Выясните, какие из следующих линейных многообразий в l^2 замкнуты.

1. Множество всех таких точек $\xi = \{x_n\}_1^\infty$, что $x_n = 0$ для $n > 10$.
2. Множество всех таких ξ , что $x_n = 0$ при $n > n_0$, где n_0 может зависеть от ξ .
3. Множество всех ξ , у которых $x_n = 0$ при четных n .
4. Множество всех таких ξ , что $\sum_{n=1}^{\infty} n |x_n|^2 < \infty$.
5. Множество всех таких ξ , что $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) x_n = 0$.
6. Множество всех ξ , для которых $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$.

Пусть M — подпространство H ; его *ортogonalное дополнение* $M^\perp$ определяется как

$$M^\perp = \{\varphi \in H: (\varphi, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in M\}; \quad (1.7.1)$$

$M^\perp$ — замкнутое линейное множество и, значит, тоже подпространство H . Линейность $M^\perp$ следует из линейности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ по второму сомножителю: если $(\psi, \varphi_1) = 0$ и $(\psi, \varphi_2) = 0$ для всех $\psi \in M$, то $(\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = 0$ для всех $\psi \in M$. Замкнутость $M^\perp$ вытекает из непрерывности $(\cdot, \cdot)$: если $\varphi_i \in M^\perp$ и $\varphi_i \rightarrow \tilde{\varphi} \in H$, то $(\psi, \tilde{\varphi}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\psi, \varphi_i) = 0$ для всех $\psi \in M$; следовательно, $\tilde{\varphi} \in M^\perp$.

Теорема о проекции. Если M — подпространство пространства H , то любой элемент ξ пространства H можно единственным образом представить как $\xi = \varphi + \psi$, где $\varphi \in M$, а $\psi \in M^\perp$.

Замечания. (1) Отсюда следует, что $(M^\perp)^\perp = M$. (2) Если M в определении (1.7.1) заменить на произвольное подмножество S , то $S^\perp$ по-прежнему останется замкнутым линейным многообразием, а $(S^\perp)^\perp$ будет наименьшим замкнутым линейным многообразием, содержащим S ; оно называется *замкнутой линейной оболочкой* множества S . В следующем параграфе приводится одно важное применение теоремы о проекции.

Доказательство. Как и в конечномерном случае, φ является тем элементом из M , для которого расстояние $\|\xi - \varphi\|$ минимально. Докажем сначала, что минимум действительно существует. Обозначим

$$d = \inf \{\|\xi - \varphi\|: \varphi \in M\}.$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ — последовательность элементов M , такая, что $\|\xi - \varphi_i\| \rightarrow d$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и столь большие i и j , что

$$\|\xi - \varphi_i\|^2 \leq d^2 + \varepsilon,$$

$$\|\xi - \varphi_j\|^2 \leq d^2 + \varepsilon.$$

По правилу параллелограмма

$$2\|\xi - \varphi_i\|^2 + 2\|\xi - \varphi_j\|^2 = \left\| 2\left(\xi - \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}\right) \right\|^2 + \|\varphi_i - \varphi_j\|^2.$$

Левая часть этого равенства $\leq 4d^2 + 4\varepsilon$, первый член правой части $\geq 4d^2$, потому что $\frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_j) \in M$; поэтому $\|\varphi_i - \varphi_j\|^2 \leq 4\varepsilon$, так что $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши. Пусть $\varphi = \lim \varphi_i$ и $\psi = \xi - \varphi$. Ясно, что $\varphi \in M$, поскольку M замкнуто; покажем теперь, что $\psi \in M^\perp$. Для этого воспользуемся тем, что φ минимизирует $\|\xi - \varphi\|$; значит, для любого $\varphi' \in M$ и любого положительного числа a

$$(\psi, \psi) \leq (\psi \pm a\varphi', \psi \pm a\varphi'),$$

или

$$0 \leq \pm 2a \operatorname{Re}(\psi, \varphi') + a^2(\varphi', \varphi'),$$

поэтому

$$|\operatorname{Re}(\psi, \varphi')| \leq \frac{a}{2}(\varphi', \varphi').$$

Устремив a к нулю, получим, что $\operatorname{Re}(\psi, \varphi') = 0$ для всех $\varphi' \in M$. Заменяя φ' на $i\varphi'$, из тех же выкладок получим, что и $\operatorname{Im}(\psi, \varphi') = 0$ для всех $\varphi' \in M$; следовательно, $\psi \in M^\perp$, что и требовалось доказать. Единственность разложения получается легко; если $\varphi_1 + \psi_1$ и $\varphi_2 + \psi_2$ — два разных представления ξ , то элемент $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi_2 - \psi_1$ принадлежит и M , и $M^\perp$, следовательно он ортогонален самому себе, т. е. равен нулю.

1.8. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ.

ТЕОРЕМА РИССА—ФРЕШЕ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Линейный функционал на H — это функция $l(\varphi)$ со значениями в поле скаляров, определенная для всех $\varphi \in H$ и такая, что $l(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha l(\varphi) + \beta l(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in H$ и любых скаляров α и β . Линейный функционал ограничен, если найдется такая константа K , что $|l(\varphi)| \leq K\|\varphi\|$ для всех $\varphi \in H$. При фиксированном φ_0 (φ_0, φ) — линейный ограниченный функционал; оказывается, такой вид имеют все линейные ограниченные функционалы.

Теорема Рисса—Фреше о представлении. Для любого линейного ограниченного функционала $l(\varphi)$ на H найдется единственный элемент $\psi_0 \in H$, такой, что $l(\varphi) = (\psi_0, \varphi)$ для всех φ .

Доказательство. Очевидно, что подмножество

$$M = \{\xi \in H: l(\xi) = 0\}$$

линейно и благодаря ограниченности $l(\cdot)$ замкнуто; поэтому оно является подпространством. [Если $\xi_i \in M$ и $\xi_i \rightarrow \omega \in H$, то $|l(\omega) - l(\xi_i)| = |l(\omega - \xi_i)| \leq$

$\leq K \|\omega - \xi_i\| \rightarrow 0$; поэтому $l(\omega) = 0$, т. е. $\omega \in M$.] Предполагая, что $M \neq H$ (если $l(\varphi) \equiv 0$, возьмем $\psi_0 = 0$), возьмем любой ненулевой элемент $\psi \in M^\perp$; тогда если ψ_1 — любой другой элемент $M^\perp$, то $l(\psi - a\psi_1) = 0$ для $a = l(\psi)/l(\psi_1)$; следовательно, элемент $\psi - a\psi_1$ принадлежит и M , и $M^\perp$, и поэтому он равен нулю, так что $M^\perp$ — одномерное подпространство. Теперь очевидно, что если

$$\psi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l(\psi_1)}{\|\psi_1\|^2} \psi_1,$$

то $l(\eta) = (\psi_0, \eta)$ для всех η , что и требовалось доказать; это видно из разложения элемента η на его ортогональные составляющие из M и $M^\perp$, если применить $l(\cdot)$ к каждой составляющей по отдельности; очевидно, что элемент ψ_0 является единственным.

1.9. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

В конечномерном векторном пространстве по теореме Больца — Вейерштрасса любая ограниченная последовательность векторов $\{u_k\}$ ($\|u_k\| \leq c$ для всех k) содержит сходящуюся подпоследовательность. Иначе говоря, замкнутый шар $\{u: \|u\| \leq c\}$ — компактное множество. Фактически здесь компактно любое замкнутое ограниченное множество, а про такое пространство говорят, что оно *локально компактно*. Бесконечномерное гильбертово пространство не является локально компактным: например, бесконечная ортонормированная последовательность $\{u_k\}$ ограничена ($\|u_k\| = 1$ для всех k), но не содержит сходящейся подпоследовательности.

До сих пор сходимость $\{u_k\}$ к u означала, что $\|u - u_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Такая сходимость называется *сильной*. Обобщая это понятие, скажем, что $\{u_k\}$ сходится к u *слабо*, если $(v, u_k) \rightarrow (v, u)$ для всех $v \in H$. [Если говорится просто «сходимость», то обычно подразумевается сильная сходимость.]

Мы приведем здесь без доказательства две теоремы (их доказательство использует принцип равномерной ограниченности).

Теорема 1. *Слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Теорема 2. *H слабо полно в том смысле, что если $\{u_n\}$ такова, что $(u_k - u_l, v) \rightarrow 0$ при $k, l \rightarrow \infty$ для всех v , то найдется такой элемент u , что $(u_n - u, v) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех v .*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из сильной сходимости следует слабая.
2. В конечномерном пространстве слабая сходимость эквивалентна сильной.
3. Любая бесконечная ортонормированная последовательность слабо сходится.
4. Любая ограниченная последовательность в гильбертовом пространстве содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (т. е. гильбертово пространство слабо локально компактно). *Указание.* Если $\{u_n\}$ — ограниченная по-

следовательность, то в ней найдется такая подпоследовательность $\{u_{1n}\}$, что $\{u_1, u_{1n}\}$ сходится, а в $\{u_{1n}\}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{2n}\}$, что сходится (u_2, u_{2n}) , и т.д. Возьмите диагональную подпоследовательность $\{u_{nn}\}$. Пусть M — линейное многообразие, порожденное $\{u_n\}$, т. е. множество всех конечных линейных комбинаций элементов $\{u_n\}$. Покажите, что $\{(u_{nn}, v)\}$ — сходящаяся числовая последовательность, причем сначала докажите, что это верно для всех $v \in M$, затем — для всех v из $\bar{M}$ (замыкания M), наконец — для всех $v \in M^\perp$. После этого используйте приведенную теорему 2.

5. Если $u_n \rightarrow u$ слабо и $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, то $u_n \rightarrow u$ сильно.

1.10. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хотя все сепарабельные гильбертовы пространства структурно совпадают, существует много различных конкретных их реализаций. В некоторых приложениях появляются пространства, элементы которых представляют собой функции, аналитические в области Ω комплексной плоскости. Пусть Ω — единичный круг; определим гильбертово пространство H так:

$$H = \left\{ f(z) \text{ аналитична при } |z| < 1: \sup_{a < 1} \int_{|z|=a} |f(z)|^2 ds < \infty \right\},$$

$$(f, g) = \lim_{a \uparrow 1} \int_{|z|=a} \overline{f(z)} g(z) ds.$$

Легко видеть, что если $c_n (n=0, 1, \dots)$ — коэффициенты разложения $f(z)$ в степенной ряд, то $\|f\| = \text{const} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2}$, так что изоморфность этого пространства пространству l^2 очевидна.

Приложения подобных пространств к теории функций для случая, когда Ω — полуплоскость, приведены в гл. 19 книги Хилле [1962].

1.11. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Во многих вычислениях (см. гл. 9) полезно следующее обобщение равенства (1.3.6). Пусть $f(u, v)$ — *полуторалинейная* форма (иногда менее аккуратно называемая билинейной), т. е. функция с числовыми значениями, определенная для всех u и v из H , линейная по v и полулинейная по u . [Из теоремы Рисса — Фреше следует, что любую такую форму можно представить в виде (Au, v) или (u, Bv) , где A и B — линейные операторы; здесь этот факт бесполезен.] Пусть $q(u)$ — соответствующая квадратичная форма, $q(u) = f(u, u)$. Тогда $f(u, v)$ можно вычислить по значениям $q(u)$ при помощи *формулы поляризации*:

$$f(u, v) = (1/4) \sum_{\alpha=1, \beta=-1, -\alpha} \alpha q(\alpha u + v). \quad (1.11.1)$$

Чтобы проверить эту формулу, заметим, что

$$\begin{aligned}\alpha q(\alpha u + v) &= \alpha f(\alpha u + v, \alpha u + v) = \\ &= \alpha |\alpha|^2 f(u, u) + |\alpha|^2 f(u, v) + \alpha^2 f(v, u) + \alpha f(v, v); \\ &\hspace{15em} (1.11.2)\end{aligned}$$

после подстановки (1.11.2) в (1.11.1) справа получается шестнадцать членов, которые попарно уничтожаются, за исключением члена $f(u, v)$, повторяющегося четыре раза с коэффициентом $|\alpha|^2 = 1$.

Для $q(u)$ часто имеется оценка типа $|q(u)| \leq M \|u\|^2$ для всех u . В этом случае поляризацию можно объединить со следующим приемом получения оценок $f(u, v)$ типа неравенства Шварца. Сначала получим при $|\alpha| = 1$

$$|\alpha q(\alpha u + v)| \leq M \|\alpha u + v\|^2 \leq M (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Затем заменим в $f(u, v)$ u и v на βu и $\beta^{-1}v$, где $\beta = \sqrt{\|v\|/\|u\|}$; это не меняет значения $f(u, v)$, но заменяет $\|u\| + \|v\|$ на $2\sqrt{\|u\|\|v\|}$; следовательно,

$$|f(u, v)| \leq 4M \|u\| \|v\|. \quad (1.11.3)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Линейные функционалы; пробные функции на пространствах R и R^n ; билинейные формы; сходимость пробных функций; непрерывные функционалы; вещественные и комплексные распределения; дифференцирование и интегрирование; замена независимых переменных; сходимость распределений; операторы сглаживания; регуляризация особенностей.

Предварительные сведения: математический анализ.

Для функционального анализа и его приложений к физике желательно обобщить классическое понятие функции так, как это было сделано Дираком и обосновано Лораном Шварцем в его теории «распределений» (в советской литературе распределения обычно называются обобщенными функциями). При написании этой и нескольких последующих глав автор придерживался той точки зрения, что теория распределений в основе своей элементарна и вытекает из классического математического анализа. Полное представление о распределениях можно получить при помощи интеграла Римана — такой подход хорошо подчеркивает тесную связь между распределениями и обычными функциями. С этой точки зрения пространства L^2 и их применение в теории дифференциальных операторов также элементарны, если основываться на теории распределений, и именно в таком смысле они будут рассматриваться в гл. 5, 6, 7, 10 и 11.

2.1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Еще в период становления квантовой механики Дирак ввел «функцию» $\delta(x)$, положив ее равной нулю при $x \neq 0$ и равной $+\infty$ при $x=0$ и приняв интеграл от нее равным единице; следовательно, предполагается, что

$$\left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx \right\rangle\right\rangle = \varphi(0), \quad (2.1.1)$$

а в более общем случае

$$\left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx \right\rangle\right\rangle = \varphi(a); \quad (2.1.2)$$

при этом функция $\delta'(x)$ вводится таким образом, чтобы было возможно интегрирование по частям:

$$\left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a) \varphi(x) dx \right\rangle\right\rangle = -\varphi'(a) \quad (2.1.3)$$

для любой дифференцируемой функции $\varphi(x)$. Производные более высокого порядка от $\delta(x)$ определяются аналогичным образом. Далее, если $f(x)$ — любая, например кусочно непрерывная, функция (не обязательно дифференцируемая в обычном смысле), то ее производная в обобщенном смысле определяется как такая «функция» $f'(x)$, что

$$\left\langle\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \right\rangle\right\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \quad (2.1.4)$$

по крайней мере для любой функции $\varphi(x)$, которая непрерывно дифференцируема при всех x и тождественно обращается в нуль вне некоторого конечного интервала. Дирак назвал $\delta(x)$, $\delta'(x)$ и $f'(x)$ «несобственными» функциями, указав при этом, что хотя иногда и нельзя говорить о значениях самой функции в отдельных точках, часто удается придать точный смысл интегралу, содержащему такую несобственную функцию в качестве множителя (Дирак [1947, с. 59]). Это замечание послужило основой для теории распределений Л. Шварца [1950]. Объекты, обозначенные выше через $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $f'(x)$, определяются не заданием их значений для каждого значения аргумента x , а заданием значений взятых в кавычки интегралов для всех функций $\varphi(x)$ из некоторого класса. Поскольку каждое из этих выражений линейно зависит от $\varphi(x)$, обобщенная функция или распределение тем самым представляет собой линейный функционал, определенный на выбранном надлежащим образом классе «пробных» функций $\varphi(x)$.

Аналогия между распределением и функцией весьма наглядна. Если $f(x)$ является обычной функцией, то каждому значению аргумента x соответствует некоторое число; если же $f(x)$ является распределением, то каждой пробной функции $\varphi(x)$ соответствует некоторое число. Для распределения нельзя взять x в точности равным x_0 , но можно взять пробную функцию, которая имеет очень резкий пик в точке x_0 и равна нулю всюду вне узкого интервала, содержащего x_0 . Для многих физических ситуаций это соответствует возможности знать x только с конечной точностью.

Обычную непрерывную функцию $f(x)$ можно рассматривать как частный случай распределения: тогда линейный функционал

задается в виде интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.1.5)$$

Этот и обычный способы задания такой функции эквивалентны согласно следующей теореме, доказательство которой мы предоставляем читателю:

Теорема. *Непрерывная функция $f(x)$ с областью определения $(-\infty, \infty)$ полностью определена, если значение интеграла (2.1.5) известно для каждой непрерывной функции $\varphi(x)$, отличной от нуля только на некотором конечном интервале, своем для каждой $\varphi(x)$.*

В дальнейшем и некоторые другие обычные функции (уже не являющиеся непрерывными) будут аналогичным образом идентифицированы с соответствующими им распределениями.

Многие операции, которые могут быть применены к обычным функциям (например, дифференцирование, интегрирование и преобразование Фурье), применимы и к распределениям, причем применимы при самых общих предположениях.

Если f и g — два распределения, то хотя и нельзя сказать, что $f(x_0) = g(x_0)$ или $f(x_0) \geq g(x_0)$ для конкретного x_0 , но можно придать смысл тому, что $f = g$ на (a, b) или $f \geq g$ на (a, b) , где (a, b) — любой открытый интервал (см. гл. 3). Более того, такие утверждения можно сделать для любого открытого множества, но не для множества с лебеговой мерой нуль. Множества меры нуль обычно нефизичны, потому что для решения вопроса о принадлежности точки x такому множеству нужно знать x с бесконечным числом десятичных знаков. Сущность теории распределений состоит в том, что, отказываясь от знания функций на множествах лебеговой меры нуль, мы получаем возможность определить широкий класс обобщенных функций, включая различные δ -функции и их производные.

В силу упомянутой выше наглядной аналогии распределение является в некотором смысле столь же конкретным объектом, как и функция. Например, элементы пространств L^2 (см. гл. 5) представляют собой распределения. В ранних математических работах элемент такого пространства рассматривался как бесконечный класс эквивалентности функций, любые две из которых могут произвольным образом отличаться друг от друга на произвольном множестве меры нуль. Чтобы конкретно применить так определенный элемент пространства L^2 по крайней мере для некоторых целей, обычно достаточно вообразить себе какую-либо одну функцию из такого класса. На наш взгляд, любая такая функция неизбежно содержит элемент недоопределенности и произвола, тогда как распределение в этом смысле определено вполне

четко. Распределения такого рода, как и обычные функции, могут рассматриваться, например, в качестве волновых функций в квантовой механике.

Во многих физических приложениях, особенно при наличии дифференциальных операторов, использование распределений позволяет избавиться от части выкладок, необходимых при обычном подходе, вероятно, потому, что пренебрежение множествами меры нуль делает распределения наиболее удобными для таких приложений.

Вполне очевидно, что проведенные выше рассуждения могут быть без каких-либо существенных изменений применены для случая нескольких независимых переменных.

2.2. КЛАССЫ ПРОБНЫХ ФУНКЦИЙ. ФУНКЦИИ КЛАССА C_0^∞

Различные классы пробных функций порождают различные классы распределений. Чтобы охватить все примеры предыдущего параграфа ($\delta(x)$ и все ее производные и все обобщенные производные произвольной непрерывной функции $f(x)$), пробные функции $\varphi(x)$ должны быть бесконечно дифференцируемыми и каждая из них должна тождественно обращаться в нуль вне некоторого конечного интервала. Все такие функции образуют класс C_0^∞ или $C_0^\infty(\mathbb{R})$; соответствующие функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ от n независимых переменных образуют класс $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; при желании различать пробные функции с вещественными и комплексными значениями пишут $\text{real}C_0^\infty$ и $\text{cpx}C_0^\infty$ (независимые переменные $x_1, \dots, x_n$ всегда вещественны). Обычно через C^k обозначают класс непрерывных функций с непрерывными производными порядка $\leq k$ (включая смешанные частные производные для случая $n > 1$). Носителем функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех точек x , для которых $\varphi(x) \neq 0$; нижний индекс 0 у C_0^∞ или C_0^k показывает, что каждая функция из такого класса имеет ограниченный носитель. Часто используются векторнозначные пробные функции.

Пример

Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp \{-1/(1-x^2)\}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Упражнения

1. Покажите, что все производные функции (2.2.1) непрерывны при любом x .

2. Постройте в C_0^∞ функцию, которая равна 1 при $|x| \leq 1$ и равна нулю при $|x| \geq 2$. *Указание.* Рассмотрите свойства интеграла $\int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$, где функция φ задана в виде (2.2.1).

3. Постройте сферически симметричную пробную функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, положительную при $x=0$.

Любой линейный функционал, который определен для всех φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет так называемому условию непрерывности, сформулированному ниже в § 2.4, является распределением на (или в) $\mathbb{R}^n$.

В гл. 4 рассматривается более широкий класс $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций (так называемый класс Шварца). Функция $\varphi(x)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ не обязательно является тождественным нулем вне ограниченной области или «носителя», но должна очень быстро стремиться к нулю при $|x| \rightarrow \infty$; соответствующие функционалы называются распределениями медленного роста. Ясно, что любая пробная функция из C_0^∞ автоматически принадлежит $\mathcal{S}$ (т. е. $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$), так что любое распределение медленного роста является распределением.

Гельфанд и др. ([1959] и следующие выпуски) рассмотрели подкласс Z класса $\mathcal{S}$, состоящий из некоторых целых аналитических функций. Подкласс Z не содержит C_0^∞ и не содержится в последнем, поскольку аналитическая функция не может иметь компактный носитель, если она отлична от тождественного нуля. Определенные на Z функционалы являются обобщенными функциями, включающими в себя распределения медленного роста, но мы не будем в дальнейшем рассматривать эти функционалы (исключением является краткое замечание в § 4.5).

2.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА

Напомним, что линейный функционал F на функциональном пространстве, например на $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, представляет собой соответствие, по которому для каждой функции $\varphi(x)$ из C_0^∞ указывается число, обозначаемое через $F[\varphi]$, причем

$$F[a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2] = a_1F[\varphi_1] + a_2F[\varphi_2] \quad (2.3.1)$$

для любых φ_1 и φ_2 из C_0^∞ и любых констант a_1 и a_2 . Распределение на $\mathbb{R}^n$ является таким линейным функционалом. В то же время выражения вида $\langle\langle \int f(x)\varphi(x)dx \rangle\rangle$ в равенствах (2.1.1)–(2.1.4) очевидным образом линейны относительно тех обобщенных функций f , которые определяются при их помощи, и поэтому мы можем использовать принятые для билинейных форм обозна-

чения. Линейный функционал, который определяет конкретное распределение f , обозначим через $\langle f, \cdot \rangle$, а через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать значение функционала, примененного к конкретной пробной функции φ . Здесь f можно считать произвольным символом, используемым для обозначения распределения (функционала). Будем считать в дальнейшем, что если f и g — два таких символа, а a и b — числа, то выражение $af + bg$ обозначает распределение, определенное как

$$\langle af + bg, \varphi \rangle = a \langle f, \varphi \rangle + b \langle g, \varphi \rangle. \quad (2.3.2)$$

Например, если δ и δ' суть «функция» Дирака и ее «первая производная», то

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad (2.3.3)$$

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0) \quad (2.3.4)$$

для всех φ , а $a\delta + b\delta'$ является распределением (функционалом), для которого

$$\langle a\delta + b\delta', \varphi \rangle = a\varphi(0) - b\varphi'(0).$$

В комплексном случае, когда $C_0^\infty = {}^{\text{срх}}C_0^\infty$, комплексно сопряженное к f распределение $\bar{f}$ представляет собой линейный функционал, для которого

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle} \quad \text{при любой } \varphi \in C_0^\infty. \quad (2.3.5)$$

Интерпретация этого определения такова: если $\varphi(x)$ — пробная функция, то $\bar{\varphi}(x)$ — также пробная функция, так что $\langle f, \bar{\varphi} \rangle$ является при заданном f точно известным комплексным числом, а $\langle \bar{f}, \varphi \rangle$ — его комплексно сопряженное, которое, очевидно, зависит линейно от φ ; тем самым значение $\langle \bar{f}, \varphi \rangle$ определено для каждой φ . Распределение f вещественно, если $f = \bar{f}$ (т. е. если f и $\bar{f}$ — это одно и то же распределение), или, что то же самое, если значения $\langle f, \varphi \rangle$ вещественны для всех вещественных φ .

Часто бывает удобно указывать независимое переменное x явным образом — тогда запись распределений будет такой же, как и запись обычных функций, например $f(x)$, $g(x)$, $\delta(x)$. Если известен смысл некоторого распределения, например $\delta(x)$, то нетрудно придать смысл такому распределению при замене x другим аргументом (это будет сделано ниже в § 2.8), так что, например, для $\delta(x-a)$ или $\delta(x^3 + x + 1)$ не нужно вводить специальных обозначений.

В некоторых математических рассуждениях представляется возможным обозначать функцию через $f(\cdot)$, а ее значение при выбранном значении x ее аргумента — через $f(x)$. Но на прак-

тике последовательное применение такого подхода быстро становится неприемлемым: обозначение функции x^x как $\cdot^{\cdot}$ или функции $\sin(x^2 + y^3)$ от двух переменных как $\sin(\cdot^2 + \cdot^3)$ приводит к путанице; следовательно, обозначения $f(x)$, x^x , $\sin(x^2 + y^3)$ должны служить для обеих целей. Но если говорится о *какой-то* (или о *конкретной*) функции $f(x)$, то ясно, что допустимы всевозможные функциональные соотношения. Так, $J_v(z)$ в зависимости от контекста может обозначать число, функцию от z или функцию от двух переменных v и z . Поэтому мы считаем, что такие обозначения, как $f(x)$ и $\delta(x)$, являются вполне допустимыми для обобщенных функций или распределений, а наличие символа x не должно порождать мысль о значении обобщенной функции (и даже о его существовании) для конкретного значения x .

Для заданного распределения $f(x)$ его значение $\langle f, \varphi \rangle$ на конкретной пробной функции φ можно символически записать как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad (2.3.6)$$

опуская применявшиеся в § 2.1 кавычки, если из контекста вполне ясен смысл каждой величины. Это позволяет использовать такие равенства, как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x-6) \varphi(x) dx = \frac{1}{3} \varphi(2),$$

которое получается путем замены независимого переменного на новое, $y = 3x - 6$, согласно § 2.8. Но в основном в этой и в следующих двух главах используются билинейные обозначения, чтобы подчеркнуть, что распределение — это прежде всего линейный функционал: его применение к пробной функции дает число.

2.4. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ

Как уже отмечалось выше, определенный на классе пробных функций линейный функционал будет *распределением* только в том случае, когда он удовлетворяет определенному условию непрерывности, которое мы теперь и собираемся рассмотреть. В большей части элементарной теории условие непрерывности не играет никакой роли, однако в некоторых случаях оно является существенным. В конце этого параграфа и в нескольких следующих мы постараемся объяснить, когда это условие действительно необходимо, а когда его следует *иметь* в виду лишь для *возможного* использования в дальнейшем,

Начнем с того, что если определена сходимость $\varphi_j \rightarrow \psi$ пробных функций, то функционал $\langle f, \cdot \rangle$ будет непрерывным относительно этой сходимости, если

$$\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle \quad \text{при} \quad \varphi_j \rightarrow \psi. \quad (2.4.1)$$

Усиление сходимости пробных функций расширяет класс непрерывных функционалов. Следующее определение сходимости, обозначаемой через $\xrightarrow{\mathcal{D}}$, является наиболее сильным.

Определение. Если функции ψ и φ_j принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$, если (1) в $\mathbb{R}^n$ найдется ограниченное множество, содержащее носители всех φ_j ; (2) при $j \rightarrow \infty$ функции $\varphi_j(x)$ сходятся к $\psi(x)$ равномерно относительно x из $\mathbb{R}^n$; (3) аналогично этому каждая частная производная от $\varphi_j(x)$ (любого порядка, смешанная или нет) сходится равномерно на $\mathbb{R}^n$ к соответствующей производной от $\psi(x)$.

Теперь (2.4.1) — это условие, выделяющее распределения из множества всех линейных функционалов $(f, \cdot)$. Опыт показывает, что это условие всегда выполняется в тех случаях, которые возникают на практике, однако пример разрывного линейного функционала на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, приведенный в приложении к этой главе, показывает, что это условие не лишнее. Заметим, что для построения такого примера приходится использовать аксиому выбора.

Исходя из сформулированного выше определения сходимости, Лоран Шварц рассматривал $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ как топологическое пространство и обозначал его через $\mathcal{D}$. Пространство $\mathcal{D}'$, сопряженное к $\mathcal{D}$, т. е. множество всех распределений на $\mathbb{R}^n$, также можно различными способами превращать в топологическое пространство. Для ознакомления с топологическим аспектом теории мы рекомендуем читателю книги Шварца или Гельфанда и др.

Более слабая сходимость в C_0^∞ порождает более ограниченные или более «слабые» классы распределений. Чуть более слабое определение сходимости, обсуждаемое в гл. 4, приводит к так называемым распределениям медленного роста. Наиболее слабой является среднеквадратичная сходимость в C_0^∞ , которая порождает элементы пространств L^2 , рассматриваемые в гл. 5: элементы эти настолько «слабы», что часто их называют просто «функциями».

Пример 1

В § 2.1 отмечалось, что непрерывная функция $f(x)$ имеет обобщенные производные всех порядков. Частичное обращение этого результата было доказано Шварцем: для любого распределения g на $\mathbb{R}$ и любого конечного интервала (a, b) существуют такие непрерывная функция $f(x)$ и целое $k \geq 0$, что g равно $f^{(k)}(x)$ на (a, b) , т. е. $\langle g, \varphi \rangle = \langle f^{(k)}, \varphi \rangle$ для любой пробной функции φ с лежащим в (a, b) носителем. Для справедливости этого результата необходима непрерывность функционала $\langle g, \cdot \rangle$.

Следующие два упражнения содержат основной результат относительно интегрирования и дифференцирования по параметру. В обоих случаях непрерывность функционала $\langle f, \cdot \rangle$ необходима.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Предположим, что для каждого y , принадлежащего конечному отрезку $[a, b]$, $\varphi(x, y)$ как функция от x является пробной (т. е. принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$) и тем самым при каждом y все производные $\partial_x^k \varphi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) непрерывны и обращаются в нуль вне некоторого интервала $|x| < c = c(y)$. Предположим к тому же, что зависимость от параметра y «разумна» в том смысле, что σ может быть выбрано не зависящим от y , а производные $\partial_y \partial_x^k \varphi$ также непрерывны при всех x из $\mathbb{R}$ и всех y из $[a, b]$ и также обращаются в нуль вне интервала $|x| < c$. Покажите, что если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то

$$\int_a^b \langle f, \varphi \rangle dy = \left\langle f, \int_a^b \varphi dy \right\rangle. \quad (2.4.2)$$

Указание. Покажите, что $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \varphi(x, y) dy$ — пробная функция, а сумма

Римана для $\int_a^b \varphi dy$ сходится к $\psi(x)$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}$.

Замечания. 1) Этот результат остается верным при несколько более слабых предположениях, которые читатель при желании может установить сам. 2) Если $\langle f, \varphi \rangle$ записать символически как интеграл (2.3.6), то вместо (2.4.2) будем иметь

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_a^b \varphi(x, y) dy dx. \quad (2.4.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ

2. Предположим дополнительно, что производные $\partial_y^2 \partial_x^k \varphi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) непрерывны и обращаются в нуль вне интервала $|x| < c$. Покажите, что

$$\partial_y \langle f, \varphi \rangle = \langle f, \partial_y \varphi \rangle.$$

Это утверждение верно также при более слабых предположениях.

Мы еще вернемся к этим результатам в § 2.6 в связи с рассмотрением операторов сглаживания.

2.5. ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

ПРИМЕР 1

Пример функционала (2.1.5) можно обобщить на n -мерный случай. Если $f(x)$ — любая непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция, то ее можно отождествить с распределением, определенным как

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d^n x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.5.1)$$

Легко доказать непрерывность функционала $\langle f, \cdot \rangle$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — последовательность пробных функций и $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$ в смысле определения предыдущего параграфа. Пусть $\mathcal{K}$ — достаточно большой n -мерный куб, в котором содержатся носители ψ и всех φ_j ; тогда

$$\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathcal{K}} f(x) [\varphi_j(x) - \psi(x)] d^n x.$$

Равномерная сходимость $\varphi_j(x)$ к $\psi(x)$ означает, что

$$M_j = \max_x |\varphi_j(x) - \psi(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Так как

$$|\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \psi \rangle| \leq \int_{\mathcal{K}} |f(x)| d^n x M_j,$$

мы имеем

$$\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle,$$

что и требовалось установить.

Непрерывность функции $f(x)$ в действительности не является необходимой. Приведенные выше рассуждения остаются верными, если $f(x)$ — любая интегрируемая функция, для которой интеграл от $|f(x)|$ по каждому ограниченному кубу $\mathcal{K}$ конечен. (Такие функции образуют класс $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — см. также приведенное ниже замечание.) Функция $f(x)$ может иметь разрывы первого рода, а также может обладать интегрируемыми особенностями. Например, при $n \geq 2$ равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1/\|x\|) \varphi(x) d^n x \quad (2.5.2)$$

определяет распределение f , которое может быть отождествлено с функцией $f(x) = 1/\|x\|$.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной, то соответствие между такими функциями и распределениями нельзя считать совершенно однозначным, так как изменение значения $f(x)$ в точке разрыва не меняет соответствующего распределения. Если $f(x)$ имеет неинтегрируемые особенности, это соответствие также становится неоднозначным, но уже в другом смысле: только что приведенное соображение представляется совершенно несущественным по сравнению с тем, что такие функции, как $f(x) = 1/x$ в одномерном случае, могут соответствовать многим различным распределениям, порождаемым различными регуляризациями, как это будет объяснено ниже в § 2.10.

Замечание. Ниже в § 2.9 будет разъяснено, почему мы предпочли ограничить определение (2.5.1) функциями, интегрируемыми в смысле Римана: при использовании интеграла Лебега могут возникнуть некоторые несоответствия.

Следующие три примера относятся к теории потенциала, в которой $\rho(\mathbf{x})$ обычно обозначает пространственную плотность заряда. Для так называемого объемного распределения заряда $\rho(\mathbf{x})$ — обычная и, как правило, кусочно непрерывная функция, но для поверхностного, линейного или точечного распределения заряда пространственная плотность бесконечна, и $\rho(\mathbf{x})$ следует рассматривать как обобщенную функцию, т. е. как распределение в принятом здесь смысле.

ПРИМЕР 2. Заряд простого слоя

Пусть S — замкнутая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $\sigma(\mathbf{x})$ — непрерывная на S функция. Тогда распределение $\rho(\mathbf{x})$ определяется на $\mathbb{R}^3$ равенством

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int_S \sigma(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathcal{A} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad (2.5.3)$$

где $d\mathcal{A}$ — элемент площади на S . Это распределение напоминает δ -функцию Дирака в каждой точке поверхности S .

ПРИМЕР 3. Заряд двойного слоя

Возьмем те же самые S и $\sigma(\mathbf{x})$ и обозначим через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке $\mathbf{x}$. Тогда распределение $\rho(\mathbf{x})$ определяется равенством

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int_S \sigma(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\mathcal{A} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (2.5.4)$$

Это распределение напоминает производную от δ -функции в каждой точке поверхности S .

ПРИМЕР 4. Монопольный и мультипольный точечные заряды

Распределение $\rho(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^3$, задаваемое равенством $\langle \rho, \varphi \rangle = \varphi(0)$ для любой φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, представляет плотность точечного заряда в нуле. Согласно излагающимся ниже соображениям, оно может быть записано как $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \delta(y) \delta(z)$, хотя такое выражение и не отражает явным образом сферической симметрии $\rho(\mathbf{x})$ — см. § 2.8. Точно так же распределение

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \partial_x^p \partial_y^q \partial_z^r \varphi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0} \quad \forall \varphi \quad (2.5.5)$$

представляет плотность мультиполя порядка $2p+q+r$ в нуле. Это распределение можно записать также в виде

$$(-1)^{p+q+r} \delta^{(p)}(x) \delta^{(q)}(y) \delta^{(r)}(z), \quad (2.5.6)$$

ПРИМЕР 5.

Одна из инвариантных относительно преобразований Лоренца δ -функций, применяемая в квантовой электродинамике и определенная Дираком [1947] как

$$\delta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2), \quad (2.5.7)$$

или, что то же самое, как

$$\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|} [\delta(t - \|\mathbf{x}\|) + \delta(t + \|\mathbf{x}\|)] \quad (2.5.8)$$

(здесь $\mathbf{x}$ — трехмерный вектор, а скорость света считается равной единице), представляет собой распределение на $\mathbb{R}^4$, обозначаемое через D или $D(t, \mathbf{x})$

и задаваемое равенством

$$\langle D, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|} [\varphi(\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x}) + \varphi(-\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} \quad \forall \varphi(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4). \quad (2.5.9)$$

Это распределение сосредоточено на световом конусе

$$|t| = \|\mathbf{x}\|,$$

т. е. $\langle D, \varphi \rangle = 0$ для любой функции $\varphi(t, \mathbf{x})$, носитель которой не пересекается с этим конусом. Инвариантность $D(t, \mathbf{x})$ относительно преобразований Лоренца рассматривается в § 2.8.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что (2.5.9) можно формально получить либо из (2.5.7), либо из (2.5.8), записав $\langle D, \varphi \rangle$ символически как интеграл $\int_{\mathbb{R}^4} D \varphi dt d^3\mathbf{x}$ и выполнив интегрирование по t .

ПРИМЕР 6. Меры

Если функция $\sigma(x)$ вещественной переменной x имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, то определяемый интегралом Стильтьеса функционал

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\sigma(x) \quad (2.5.10)$$

является распределением; распределения такого типа называют *мерами* — см. гл. 13.

ПРИМЕР 7. Произведение

В общем случае нельзя определить произведение двух распределений (хотя в § 6.5 определяется так называемое прямое произведение распределений $f(x)$ и $g(y)$, имеющих различные независимые переменные). Однако если f — любое распределение на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha(x)$ — любая функция класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$ (не обязательно с ограниченным носителем), то обозначаемое через $f\alpha$ или αf распределение определяется как

$$\langle f\alpha, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \alpha\varphi \rangle. \quad (2.5.11)$$

Отметим, что если $\varphi(x)$ — любая пробная функция, то $\alpha(x)\varphi(x)$ — также пробная функция, так что определение (2.5.11) корректно.

2.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ. СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Распределение $\delta(x)$ можно рассматривать как предел последовательности $\{f_n(x)\}$ функций, где

$$f_n(x) = (n/\sqrt{\pi}) e^{-n^2 x^2}, \quad (2.6.1)$$

потому что если $\varphi(x)$ — любая пробная (или даже любая ограниченная непрерывная) функция, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (2.6.2)$$

Это записывается как

$$(n/\sqrt{\pi}) e^{-n^2 x^2} \rightarrow \delta(x). \quad (2.6.3)$$

Обобщая этот факт, последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, для которой существует предел интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx$ при каждой пробной функции $\varphi(x)$, назовем сходящейся к распределению f , определяемому как

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \quad (2.6.4)$$

(см. замечание, приведенное несколько ниже).

Наконец, если $\{f_n\}$ — любая последовательность распределений, например на $\mathbb{R}^n$, и f — такое распределение на $\mathbb{R}^n$, что $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ для каждой пробной функции φ , то будем говорить, что распределения f_n *сходятся* к распределению f . Это записывается или как $f_n \rightarrow f$, или как $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$, или даже как $f_n(x) \rightarrow f(x)$, но при использовании последней формы записи не следует забывать, что при этом вовсе не имеется в виду поточечная сходимость.

Достаточно простой иллюстрацией введенного понятия является равномерная сходимость непрерывных функций $f_n(x)$ к $f(x)$ — тогда они сходятся к $f(x)$ и как распределения, одной лишь поточечной сходимости для этого оказывается недостаточно.

Замечание. Шварц показал, что если f_n — распределения (т. е. непрерывные линейные функционалы) и для каждой пробной функции φ существует предел последовательности $\langle f_n, \varphi \rangle$, то этот предел, являющийся, очевидно, линейным функционалом на пространстве пробных функций, всегда непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение.

Упражнение

1. Проверьте (2.6.3), т. е. (2.6.2), если f_n заданы в виде (2.6.1).
2. Аналогично проверьте, что

$$\frac{1 - \cos nx}{n! x^2} \rightarrow \delta(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.6.5)$$

3 (сравните с упражнением 2 из § 2.4). Пусть f — распределение на $\mathbb{R}^n$ и $\varphi(x, y)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Будем рассматривать компоненты вектора y как параметры и писать $\varphi(x, y) = \varphi_y(x)$. Покажите, что $\langle f, \varphi_y \rangle$ — функция класса C_0^∞ по переменным $y_1, \dots, y_n$. Покажите, что если $\varphi_y(x) = \psi(x - y)$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\langle f, \varphi_y \rangle$ — функция класса C^∞ по $y_1, \dots, y_n$.

Этот результат можно применить к задаче о *сглаживании*. Пусть $\rho(x)$ — сферически симметричная неотрицательная функ-

ция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с принадлежащим единичному шару носителем и нормированная так, что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) d^n x = 1$. Для любого $\delta > 0$ положим

$$\rho_\delta(x) = \rho\left(\frac{1}{\delta}(x-y)\right) \left(\frac{1}{\delta}\right)^n.$$

Тогда функция

$$f_\delta(y) = \langle f, \rho_\delta \rangle$$

называется результатом *сглаживания* распределения f усреднением по радиусу δ . Будем записывать это как $f_\delta = J_\delta f$; оператор J_δ называется *оператором сглаживания* или *сглаживателем*.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Покажите, что при $\delta \rightarrow 0$ функции f_δ сходятся к f в смысле сходимости распределений, т. е.

$$J_\delta f \rightarrow f. \quad (2.6.6)$$

Более того, если D — любая частная производная $\partial/\partial x_j$, то

$$D J_\delta f = J_\delta D f. \quad (2.6.7)$$

Следовательно, производные от f_δ сходятся к производным от f . *Указание.* Сначала покажите, что

$$\langle J_\delta f, \varphi \rangle = \langle f, J_\delta \varphi \rangle, \quad (2.6.8)$$

используя результат упражнения 1 из § 2.4 об интегрировании по параметру. Затем покажите, что если φ — любая пробная функция из C_0^∞ , то $J_\delta \varphi \rightarrow \varphi$ в смысле сходимости пробных функций. Для этой цели лучше всего доказать, что $J_\delta D \varphi = D J_\delta \varphi$, откуда и будет следовать (2.6.7).

Заметим также, что если $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, то $J_{\delta_1} J_{\delta_2} = J_{\delta_2} J_{\delta_1}$.

5. Покажите, что если $f_j \rightarrow f$ в смысле сходимости распределений, то $J_\delta f_j \rightarrow J_\delta f$ в том же смысле.

Эти упражнения показывают, что любое распределение можно приближать функциями из класса C^∞ . Примерами таких приближений для δ -функции являются соотношения (2.6.3) и (2.6.5).

Результат сглаживания можно рассматривать как свертку распределения с пробной функцией $\rho(x/\delta)(1/\delta)^n$, поскольку символически его можно записать как

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \left(\frac{1}{\delta}\right)^n d^n y.$$

Свертка двух распределений определяется и изучается в гл. 6.

2.7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то распределение f' , называемое *производной* от f , определяется как

$$\langle f', \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle f, \varphi' \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty. \quad (2.7.1)$$

Если $\varphi = \varphi(x)$ — любая пробная функция, то $\varphi' = \varphi'(x)$ — также пробная функция, так что (2.7.1) представляет собой определение функционала $\langle f', \cdot \rangle$. Если f и f' — обычные функции, то (2.7.1) есть в точности интегрирование по частям ($\varphi(x)$ тождественно обращается в нуль для тех положительных и отрицательных x , которые лежат вне носителя φ).

Производные высших порядков определяются аналогично путем дальнейшего формального интегрирования по частям. Таким же образом определяются и частные производные: например, если $f = f(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то распределение $\partial_x \partial_y f$ определяется как

$$\langle \partial_x \partial_y f, \varphi \rangle = \langle f, \partial_x \partial_y \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty. \quad (2.7.2)$$

Замечания о непрерывности функционалов.

(1) Прежде всего, если $f(x)$ — обычная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, то

$$\frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \rightarrow f'(x) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (2.7.3)$$

Это верно и для любого распределения f на $\mathbb{R}$ (распределение f' определяется при помощи (2.7.1), а не (2.7.3)), но для доказательства этого факта необходима непрерывность функционала $\langle f, \cdot \rangle$ в смысле § 2.4. А именно, определим распределение $f(x+h)$ как

$$\langle f(x+h), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x-h) \rangle; \quad (2.7.4)$$

следовательно, (2.7.3) будет иметь место, если нам удастся показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle f, \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \right\rangle = \left\langle f, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \right\rangle. \quad (2.7.5)$$

Это соотношение будет следовать из непрерывности функционала $\langle f, \cdot \rangle$, если мы сможем показать, что

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\varphi'(x) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (2.7.6)$$

(см. упражнение 1 этого параграфа).

(2) Все это обязывает нас доказать, что если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то линейный функционал f' , определенный в (2.7.1), непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение (см. упражнение 2 этого параграфа).

(3) Если распределение f инвариантно относительно сдвигов, т. е. распределение $f(x+h)$ совпадает с распределением $f(x)$ при всех h , то из предыдущего следует, что f' есть функция $f'(x) \equiv 0$, так что f — тоже функция $f(x) = \text{const}$. Для справедливости этого рассуждения следует заранее предположить непрерывность функ-

ционала $\langle f, \cdot \rangle$. Однако в 1971 г. Майстерс довольно сложным путем показал, что инвариантный относительно сдвигов линейный функционал на $\mathbb{R}$ *обязательно* непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение.

(4) Аналогично для распределения f на $\mathbb{R}^2$ из его непрерывности следует, что если $\partial_x f = 0$, то f не зависит от x в том смысле, что $f(x+h, y) = f(x, y)$ при любом y , поскольку $\varphi(x-h, y) - \varphi(x, y)$ всегда можно представить как $\partial_x \psi$ для некоторой пробной функции ψ , и поэтому $f(x+h, y)$ и $f(x, y)$ — это одно и то же распределение на $\mathbb{R}^2$.

Интегрирование

Теперь покажем, что для любого распределения g на $\mathbb{R}$ существует такое распределение f , называемое *первообразной* от g или *неопределенным интегралом* от g , что $f' = g$. Более того, f определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной. Для доказательства этого будем строить линейный функционал $\langle f, \cdot \rangle$ таким образом, что если $\psi = -\varphi'$ для некоторой пробной функции φ , то было бы $\langle f, \psi \rangle = \langle f, -\varphi' \rangle = \langle g, \varphi \rangle$. Для любой функции ψ из C_0^∞ положим

$$\varphi(x) = - \int_{-\infty}^x \psi(x') dx'.$$

Тогда φ всегда принадлежит C^∞ и $\varphi' = -\psi$. Ясно, что φ принадлежит также и C_0^∞ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') dx' = 0$,

и в этом случае положим $\langle f, \psi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$, как это и требуется. Чтобы теперь определить $\langle f, \psi \rangle$ для произвольной функции ψ из C_0^∞ , выберем такую пробную функцию ψ_1 , для которой

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x) dx = 1$; произвольную постоянную c также зафиксируем и положим $\langle f, \psi_1 \rangle$ равным c . Это полностью определяет функционал $\langle f, \cdot \rangle$, потому что любая функция ψ может быть представлена в виде $\psi = \psi_0 + a\psi_1$, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) dx = 0, \quad a = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx;$$

тогда

$$\begin{aligned} \langle f, \psi \rangle &= \langle f, \psi_0 \rangle + \langle f, a\psi_1 \rangle = \\ &= \langle f, \psi_0 \rangle + a \langle f, \psi_1 \rangle = \langle f, \psi_0 \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \cdot c = \\ &= \langle f, \psi_0 \rangle + \langle c, \psi \rangle, \end{aligned}$$

где последний член представляет собой аддитивную постоянную функцию c .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите (2.7.6), проверив условия сходимости в $\mathcal{D}$, сформулированные в § 2.4.

2. Докажите непрерывность определенного в (2.7.1) функционала $\langle f', \cdot \rangle$, проверив, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi$, то $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$.

Если f — неопределенный интеграл от g , то символически это записывается как

$$f = \int^x g \quad \text{или} \quad \int g dx$$

или даже как

$$f(x) = \int g(x) dx,$$

но, конечно, при этом не нужно забывать, что f и g являются распределениями.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Пусть функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$, а именно $f(x) = |x|$, рассматривается как распределение. Найдите распределения f' и f'' , используя определение (2.7.1).

4. Пусть f — любое распределение на $\mathbb{R}$ и функция α принадлежит C^∞ , а произведение αf определяется равенством (2.5.11). Покажите, что $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$.

5. Пусть $f = f(x)$ — неубывающая функция (не обязательно дифференцируемая или даже непрерывная). Тогда она интегрируема по Риману на любом конечном интервале, и поэтому к ней применим результат примера 1 из § 2.5. Покажите, что $f' \geq 0$ на всем $\mathbb{R}$; это означает, согласно следующей главе, что $\langle f', \varphi \rangle \geq 0$ для каждой пробной функции $\varphi(x)$, которая неотрицательна при всех x . *Указание.* Покажите, что $\int f \varphi' dx$ можно приблизить суммами Римана

$$\text{вида } \sum_{j=1}^N f(x_j) [\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})].$$

6. Покажите, что если $g = g(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то найдется такое распределение $f = f(x, y)$, что $\partial_x f = g$. Покажите, что f определяется однозначно с точностью до аддитивного распределения h , которое не зависит от x в смысле замечания 4 этого параграфа.

7. Покажите, что если распределение $f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$ не зависит от x , то найдется такое распределение $g(y)$ на $\mathbb{R}$, что для любой пробной функции вида $\varphi(x, y) = \psi(x) \chi(y)$

$$\langle f, \varphi \rangle = a \langle g, \chi \rangle, \quad (2.7.7)$$

где

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx. \quad (2.7.8)$$

Замечание. Этот результат получается формально, если положить $f(x, y) = g(y)$ и затем выполнить интегрирование по x в правой части равенства

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \int f(x, y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (2.7.9)$$

8. Покажите, что если $g = g(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то найдется такое распределение $f = f(x, y)$, что $\partial_x \partial_y f = g$; покажите, что f определяется однозначно с точностью до аддитивного распределения вида $h_1 + h_2$, где h_1 не зависит от x , а h_2 не зависит от y .

2.8. ЗАМЕНА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. СИММЕТРИИ

Выражениям вида $f(\alpha(x))$ можно придать смысл только при выполнении определенных условий. Если α — вещественная функция из C^∞ на $\mathbb{R}$ и уравнение $y = \alpha(x)$ имеет единственное решение $x = \beta(y)$, также принадлежащее C^∞ , то для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha(x)) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(\beta(y)) |\beta'(y)| dy. \quad (2.8.1)$$

Замечание. Функция $\beta'(y)$ не может изменить знака, так что $|\beta'(y)|$ при всех y равен либо $\beta'(y)$, либо $-\beta'(y)$.

Это равенство верно и для любого распределения $f(x)$ на $\mathbb{R}$, если определить распределение $g(x) = f(\alpha(x))$ на $\mathbb{R}$ как

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \quad (2.8.2)$$

где

$$\psi(y) = \varphi(\beta(y)) |\beta'(y)| \quad (2.8.3)$$

($\psi(y)$ является пробной функцией, если таковой является $\varphi(x)$).

Простейшим примером является распределение $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$, где $\alpha(x) = ax$, $\beta(y) = y/a$ ($a \neq 0$).

Замечание. Если $x \rightarrow \alpha(x)$ — взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на себя класса C^∞ , то обратное ему отображение $y \rightarrow \beta(y)$ не обязательно принадлежит C^∞ , как показывает пример $\alpha(x) = x^3$.

Обратимые преобразования переменных класса C^∞ могут быть точно так же применены к распределениям, заданным на $\mathbb{R}^n$. Вместо $|\beta'|$ в (2.8.3) появляется $|J|$, где J — якобиан обратного преобразования. Если преобразование линейно, т. е. $\alpha(x) = Ax + x_0$, и матрица A невырожденная, то

$$\langle f(\alpha(x)), \varphi(x) \rangle = |\det A|^{-1} \langle f(y), \varphi(A^{-1}(y - x_0)) \rangle. \quad (2.8.4)$$

Для нас важны два следующих случая.

(1) $n=2$ или 3 , $x_0=0$, а A является матрицей вращения (следовательно, $\det A = 1$). Тогда

$$\langle f(Ax), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \varphi(A^{-1}x) \rangle. \quad (2.8.5)$$

Распределение $f(Ax)$ получается из $f(x)$ путем вращения в пространстве. Если $f(x) = \rho(x)$, где $\rho(x)$ — плотность точечного заряда

в нуле, определенная в примере 4 из § 2.5, а именно

$$\rho(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

т. е.

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \varphi(0, 0, 0), \quad (2.8.6)$$

то, как видно из последнего равенства, $\rho(Ax) = \rho(x)$, т. е. это распределение сферически симметрично относительно нуля. Но нельзя утверждать, что любое сосредоточенное в нуле распределение обладает такой симметрией: ее нет, например, у мультипольного распределения (2.5.5).

(2) $n=4$, $x_0=0$, а A —матрица преобразования Лоренца (снова $\det A=1$). В этом случае $f(Ax)$ получается из $f(x)$ при помощи однородного преобразования Лоренца.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что распределение $D(t, x)$, определенное в (2.5.9), инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Если подстановка $x \rightarrow \alpha(x)$ не взаимно однозначна, или не определена на всем $\mathbb{R}$, или не отображает на все $\mathbb{R}$, то часто оказывается возможным дать специальные определения таким образом, чтобы при этом сохранились формальные правила действий. Например, Дирак определяет $\delta(x^2 - a^2)$ при $a \neq 0$ как

$$\delta(x^2 - a^2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2|a|} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]. \quad (2.8.7)$$

Если учесть, что при изменении x от $-\infty$ до ∞ величина $y = x^2 - a^2$ изменяется от ∞ до $-a^2$ и затем проходит обратный путь до ∞ , то формальная подстановка y в $\int \delta(x^2 - a^2) \varphi(x) dx$ дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) \varphi(x) dx &= \\ &= \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) [\varphi(\sqrt{y+a^2}) + \varphi(-\sqrt{y+a^2})] \frac{dy}{2\sqrt{y+a^2}}, \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

что согласуется с (2.8.7).

2.9. ОГРАНИЧЕНИЯ И ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЯ

Распределения во многих отношениях напоминают обычные функции и подчиняются многим из обычных правил выполнения операций. В действительности для распределений многие огра-

ничения на эти правила отпадают. Например, каждое распределение можно дифференцировать и интегрировать, а интегрирование всегда есть обращение дифференцирования (обратное также верно)—в этом заключается основная теорема анализа распределений. Для распределений на $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^n$ операторы ∂_x и ∂_y всегда перестановочны (см. пример ниже). Как мы увидим чуть позже, для каждого распределения медленного роста существует преобразование Фурье, а для любых распределений f и g , одно из которых имеет компактный носитель, всегда существует свертка $f * g$; преобразования Фурье и свертки удовлетворяют всем обычным правилам. Уравнение Пуассона $\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho$ на $\mathbb{R}^3$ или в ограниченной области Ω всегда может быть решено при помощи функции Грина для любого распределения ρ с компактным носителем и т. д.

Еще более важно то, что теория распределений представляет собой очень естественный аппарат для изучения используемых в физике дифференциальных операторов, как мы увидим в гл. 10 и 11.

В то же время теория распределений имеет определенные ограничения. Некоторые из них обсуждаются в этом параграфе. Необдуманная манипуляция формулами здесь не менее опасна, чем в любом другом разделе математики или физики.

Ограничения на $\langle f, g \rangle$

Если f —распределение, то значение $\langle f, g \rangle$ не всегда определяется: его можно определить как для пробной функции g , так и для некоторых функций или распределений g из более широких классов, чем C_0^∞ . Здесь в некотором смысле предельным является тот случай, когда f и g принадлежат одному из пространств L^2 , рассматриваемых в гл. 5: тогда $\langle f, g \rangle$ определено, а $\langle \bar{f}, g \rangle$ —скалярное произведение, которое превращает L^2 в гильбертово пространство.

Ограничения на произведение $f(x)g(x)$

Если f —распределение, а g —функция класса C^∞ , то произведение $fg (= gf)$ было определено в § 2.5: см. там пример 7. Для распределений f из некоторых классов произведение fg имеет смысл, если функции или распределения g принадлежат более широкому классу, чем C^∞ . Здесь в некотором смысле предельным является тот случай, когда f и g принадлежат пространству L^2 : тогда произведение fg вполне определено как распределение (в общем случае оно принадлежит L^1 , а не L^2). Если f, g, f' и g' все принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то верна формула интегрирования по частям—см. гл. 5. Выражение $(\delta(x))^2$ не имеет смысла.

Ограничения на $f(g(x))$

Мы определили в § 2.5 $f(g(x))$ в том случае, когда функция $g(x)$ и обратная ей принадлежат классу C^∞ . Обобщения в этом направлении почти невозможны, за исключением тех случаев, когда g и f — обычные функции или f линейна. Такие выражения, как $\delta(x^2)$ и $e^{\delta(x)}$, не имеют смысла.

Нелинейные задачи

В силу указанных выше ограничений распределения используются главным образом в линейном анализе, например при исследовании линейных дифференциальных уравнений или линейных аспектов квантовой механики; их применение к нелинейным задачам может приводить к некоторой неопределенности. Дифференциальное уравнение

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (2.9.1)$$

для функции $u(t, x)$ часто изучается как простейший прототип уравнений гидродинамики. Его решение за конечное время может стать из гладкого разрывным при образовании ударной волны. Для изучения таких решений уравнение (2.9.1) сначала переписывается в так называемой форме закона сохранения

$$\partial_t u + \partial_x (1/2 u^2) = 0; \quad (2.9.2)$$

назовем теперь функцию $u(t, x)$ *слабым решением* этого уравнения, если

$$\iint (u \partial_t \varphi + 1/2 u^2 \partial_x \varphi) dt dx = 0 \quad (2.9.3)$$

для всех пробных функций $\varphi(t, x)$. [Тогда $u(t, x)$ — такая функция, что обобщенная производная от u по t и обобщенная производная от u^2 по x удовлетворяют (2.9.2).] Известно, что слабые решения записанных в виде соответствующих законов сохранения уравнений гидродинамики отражают физическую реальность: в частности, в точках разрыва эти решения удовлетворяют так называемым условиям Ренкина — Гюгонио на фронте ударной волны. Однако правильная форма закона сохранения определяется физическими соображениями: действительно, (2.9.1) можно записать также в виде

$$\partial_t (1/2 u^2) + \partial_x (1/3 u^3) = 0, \quad (2.9.4)$$

но слабые решения этого уравнения не совпадают со слабыми решениями уравнения (2.9.2). Нет никаких математических аргументов в пользу того, слабые решения какого из этих двух уравнений следует называть обобщенными решениями исходного

уравнения (2.9.1). Слабое решение уравнения (2.9.2) может совпадать со слабым решением уравнения (2.9.4) до появления разрывов (т. е. до тех пор, пока они остаются обычными решениями) и отличаться от него после этого.

Смешанные частные производные

Следующий пример иллюстрирует то положение, согласно которому в общем случае не следует стремиться придать распределению значение в отдельной точке. Рассмотрим непрерывную функцию на $\mathbb{R}^2$, определенную следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \quad (2.9.5)$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Первые и вторые частные производные существуют в обычном смысле для всех x и всех y . В частности,

$$\partial_x f = -y \quad \text{при } x=0 \text{ и всех } y,$$

$$\partial_y f = +x \quad \text{при } y=0 \text{ и всех } x$$

и поэтому

$$\partial_y \partial_x f = -1 \quad \text{при } x=y=0,$$

$$\partial_x \partial_y f = +1 \quad \text{при } x=y=0,$$

тогда как *распределения* $\partial_y \partial_x f$ и $\partial_x \partial_y f$ равны (они являются одним и тем же распределением просто потому, что $\partial_x \partial_y \varphi = \partial_y \partial_x \varphi$ в обычном смысле для любой пробной функции). Распределению $\partial_y \partial_x f$ нельзя приписать никакого значения (ни $+1$, ни -1) при $x=y=0$, и это оказывается разумным для большинства приложений, потому что поведение функции $\partial_y \partial_x f$ крайне сингулярно при стремлении точки (x, y) к точке $(0, 0)$ по любой прямой, отличной от координатных осей x и y .

Идентификация функций с распределениями

В § 2.5 функция $f(x)$ отождествлялась с распределением f , определенным как

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

только тогда, когда существует интеграл в смысле Римана. Пусть теперь $f(x)$ — функция Кантора, которая будет описана в гл. 13: $f(x)$ непрерывна и возрастает от $f(0)=0$ до $f(1)=1$ таким образом, что ее производная $f'(x)$ существует почти при всех x

(т. е. везде, кроме множества меры нуль) и равна нулю там, где она существует. Положим $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = 1$ при $x > 0$. Тогда функция $f'(x)$ будет интегрируемой по Лебегу и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Следовательно, если использовать интегралы Лебега, то распределение, отождествленное с $f'(x)$, не будет совпадать с производной от распределения, отождествленного с $f(x)$.

Не впадайте в мистику

(1) В книге Дирака есть формула

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} - i\pi \delta(x),$$

которую он использует в теории столкновений. Эта формула, несомненно, должна рассматриваться при некоторых специальных ограничениях — иначе непонятен выбор коэффициента при $\delta(x)$.

(2) В одной из книг по теории распределений говорится, что для любых распределений f и g (заданных, например, на $\mathbb{R}$) можно определить свертку $f * g$, рассматривая ее как распределение. Это неверно уже для функций: если $f(x) = g(x) = 1$ при всех x , то $f * g$ обратится в ∞ при всех x , так что эту свертку нельзя отождествить ни с функцией, ни с распределением, ни с какой-либо другой из известных до сих пор обобщенных функций.

(3) Гельфанд и Шиллов приводят формулу для $\delta(x)$ при комплексных значениях x . Они основывают свою формулу на определениях, выходящих за рамки теории распределений Шварца, и поэтому она не имеет смысла в любом контексте, не содержащем этих определений.

Операторнозначные распределения

В квантовой теории поля часто определяют операторнозначное распределение $T(x)$, говоря, что для каждой пробной функции $\varphi(x)$ величина $\langle T, \varphi \rangle$ является ограниченным линейным оператором на некотором гильбертовом пространстве. Под линейностью функционала $\langle T, \cdot \rangle$ понимается то же самое, что и выше, а его непрерывность требует дополнительного разъяснения. А именно, если последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, как в § 2.4, то непрерывность означает, что $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, и следует лишь решить, какая сходимость операторов здесь подразумевается: слабая, сильная или равномерная (см. гл. 7).

Сходимость функций

Как отмечалось в § 2.6, поточечная сходимость функций $f_n(x)$ к $f(x)$ ни необходима, ни достаточна для сходимости $f_n \rightarrow f$ как распределений. В этом нет ничего удивительного: уже из элементарной теории рядов Фурье и ортогональных систем функций видно, что в физике обычно существенна не поточечная сходимость, а сходимость в среднем (т. е. в L^2). Сходимость в среднем представляет собой частный случай сходимости в смысле теории распределений, причем поточечная сходимость не является для нее ни необходимой, ни достаточной.

Если $f_n \rightarrow f$ в смысле распределений, то точно так же и $f'_n \rightarrow f'$ и т. д.

2.10. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

До сих пор у нас еще не было метода для сопоставления распределений с такими функциями, как $f(x) = 1/x$ или $1/x^2$, которые имеют неинтегрируемые особенности. В общем случае, если функция $f(x)$ имеет особенность некоторого типа в точке $x = x_0$ и непрерывна при $x \neq x_0$, будем искать распределение f , называемое *регуляризацией* $f(x)$, такое, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.10.1)$$

для каждой пробной функции φ , носитель которой не содержит точки x_0 . Так как значение $\langle f, \varphi \rangle$ должно быть определено для всех пробных функций (хотя и не обязательно с помощью этого интеграла), регуляризация не единственна.

Положим для удобства $x_0 = 0$. Если функция $x^m f(x)$ при некотором целом положительном m ограничена в некоторой окрестности нуля (тогда говорят, что особенность в точке $x = 0$ алгебраическая¹⁾), то одна из возможных регуляризаций определяется как

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle = & \int_{|x| > a} f(x) \varphi(x) dx + \\ & + \int_{|x| < a} f(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{1}{m!} x^m \varphi^{(m)}(0) \right] dx, \\ & \forall \varphi \in C_0^\infty, \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

¹⁾ Обычно такая особенность называется степенной. — Прим. перев.

для некоторого фиксированного заданного $a > 0$, потому что, во-первых, это, очевидно, линейный функционал на C_0^∞ и, во-вторых, если носитель функции φ не содержит нуля, то $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^m = 0$, так что (2.10.2) согласуется с (2.10.1).

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что функционал (2.10.2) непрерывен в смысле § 2.4.

Неединственность

Если f — указанная выше регуляризация, то другие регуляризации могут быть получены путем прибавления к f любого распределения g , которое сосредоточено в нуле, т. е. дает нуль при действии на любую пробную функцию, носитель которой не содержит нуля. В качестве g можно взять, например, распределение вида

$$g(x) = \sum_{j=0}^k a_j \delta^{(j)}(x),$$

что эквивалентно прибавлению к (2.10.2) линейного функционала

$$\sum_{j=0}^k a_j (-1)^j \varphi^{(j)}(0).$$

Любая функция $f(x)$, имеющая не более чем конечное число алгебраических особенностей в любом конечном интервале, может быть регуляризована аналогичным образом. Неединственность порождает вопрос о том, какую регуляризацию из всех возможных лучше всего выбрать. Для указанного выше класса функций этот вопрос был рассмотрен Гельфандом и Шиловым. Они показали, что для каждой функции из этого класса можно выбрать каноническую регуляризацию¹⁾, обладающую следующими свойствами: (1) регуляризация суммы $f(x) + g(x)$ есть сумма регуляризаций $f(x)$ и $g(x)$; (2) регуляризация обычной производной от $f(x)$ есть производная в смысле распределений от регуляризации $f(x)$ и (3) если $\alpha(x)$ — любая функция из C^∞ на $\mathbb{R}$, то регуляризация $\alpha(x)f(x)$ есть произведение $\alpha(x)$ на регуляризацию $f(x)$.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Пусть функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

отождествлена с распределением f . Найдите f' и f'' и сравните их с регуляризациями функций $f'(x)$ и $f''(x)$, получающимися согласно (2.10.2).

¹⁾ Они показали также, что каноническая регуляризация определяется единственным образом. — *Прим. перев.*

Приложение к главе 2.

РАЗРЫВНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Здесь на пространстве $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ пробных функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}$ будет построен линейный функционал, который не является непрерывным в смысле § 2.4 и тем самым не является распределением в смысле Шварца.

Возьмем некоторую функцию $\rho(x)$ из C_0^∞ и зафиксируем ее для всех дальнейших построений, предполагая лишь, что носитель функции ρ содержится в некотором интервале (a, b) . Положим

$$X = \{\psi(x): \exists \varphi \in C_0^\infty, \psi(x) = \rho(x) \varphi(x)\}; \quad (2.A.1)$$

X — это линейное пространство. Сначала определим разрывный линейный функционал на пространстве X . В X , как и во всяком линейном пространстве, можно выбрать базис Хамеля (см. книгу Данфорда и Шварца [1958]), т. е. множество $B = \{\psi_a: a \in A\}$ элементов из X , где A — несчетное множество индексов, так что любой элемент ψ из X имеет единственное представление

$$\psi = c\psi_a + c'\psi_{a'} + \dots + c^{(m)}\psi_{a^{(m)}} \quad (2.A.2)$$

в виде конечной линейной комбинации элементов базиса B (m зависит от ψ). Можно определить $\langle f, \psi_a \rangle$ произвольно для каждого элемента ψ_a базиса B , после чего для элемента ψ , имеющего вид (2.A.2), $\langle f, \psi \rangle$ определится как

$$\langle f, \psi \rangle = c\langle f, \psi_a \rangle + c'\langle f, \psi_{a'} \rangle + \dots + c^{(m)}\langle f, \psi_{a^{(m)}} \rangle. \quad (2.A.3)$$

Произвольно выберем счетную последовательность $\{\psi_{a_k}\}_{k=1}^\infty$ различных элементов базиса B . Для каждого k выберем такую функцию $\varphi_k \in C_0^\infty$, что (1) $\psi_{a_k}(x) = \rho(x) \varphi_k(x)$ и (2) носитель $\varphi_k \subset (a, b)$. Ясно, что это всегда возможно, потому что носитель функции ρ — это замкнутое множество внутри (a, b) , а условие (1) фиксирует значения φ_k только на носителе ρ . Положим

$$N_k = \sup \left\{ \left| \psi_{a_k}^{(j)}(x) \right|, \left| \varphi_k^{(j)}(x) \right| : x \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, k \right\}.$$

Определим теперь функционал $\langle f, \cdot \rangle$ на элементах базиса B следующим образом:

$$\langle f, \psi_{a_k} \rangle = k N_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\langle f, \psi_a \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \psi_a \notin \{\psi_{a_k}\}.$$

Пусть

$$\tilde{\psi}_k = \frac{1}{k N_k} \psi_{a_k}, \quad \tilde{\varphi}_k = \frac{1}{k N_k} \varphi_k;$$

тогда

$$\tilde{\psi}_k \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi}_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

в смысле сходимости пробных функций (сходимости в $\mathcal{D}$). Но

$$\langle f, \tilde{\psi}_k \rangle = 1 \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \dots$$

и поэтому функционал $\langle f, \cdot \rangle$ не является непрерывным. Наконец, определим функционал g на C_0^∞ как

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, \rho \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Так как $\langle g, \tilde{\psi}_k \rangle = \langle f, \tilde{\psi}_k \rangle = 1$, функционал g также разрывен.

Пояснение. Понятие базиса Хамеля в бесконечномерном пространстве многие считают слишком абстрактным, потому что оно опирается на несчетную аксиому выбора и пока еще не найден способ построения такого базиса. Однако эта аксиома в ее несчетной форме входит в классическую систему аксиом Цермело—Френкеля, на которой основывается современная математика, и оказалась очень полезной во многих разделах математики. До тех пор пока мы исходим из этой системы аксиом, непрерывность различных линейных функционалов, вводимых в качестве распределений, не может считаться заранее верной, а должна доказываться, если мы собираемся опираться на эту непрерывность (а часто это совершенно необходимо). Недавно была предложена другая система аксиом как возможное альтернативное логическое основание математики. Она обсуждается в деталях у Соловья [1970] и в других работах. В ее основе лежит модель теории множеств, которая содержит среди прочего систему Цермело—Френкеля, модифицированную путем включения только счетной аксиомы выбора, т. е. аксиомы, применяемой лишь к счетному набору множеств. В этой модели отсутствуют многие из так называемых патологических особенностей, присущих принятым в настоящее время основаниям теории: каждое множество в $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу; линейный оператор, определенный на всем гильбертовом пространстве, всегда ограничен и т. д. Из теоремы Райта [1973] следует, что в этой модели каждый линейный функционал на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций (и на других пространствах тоже) автоматически будет непрерывным в смысле § 2.4.

В модели Соловья используются сложные методы современной теории множеств, и она не может быть здесь рассмотрена. Пока еще неизвестно, к чему приведет в различных приложениях замена несчетности на счетность в аксиоме выбора, и поэтому в настоящее время не следует спешить с окончательными выводами относительно модели Соловья.

Топология открытых и замкнутых множеств в евклидовом пространстве; покрытия; теоремы Больцано—Вейерштрасса и Гейне—Бореля; принцип стягивания; разбиения единицы; сравнение распределений на произвольном открытом множестве; принцип составления из частей; носитель распределения; производная как локальное свойство.

Предварительные сведения: гл. 2.

Хотя распределение не имеет определенного значения при конкретном значении x своего аргумента, можно рассматривать свойства распределения в любой произвольно малой окрестности x . Такие *локальные* свойства и обсуждаются в этой главе.

3.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$

Точка $x \in S$ называется *внутренней* точкой множества S , если при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ шар $B = \{y: \|y - x\| < \varepsilon\}$ с центром в точке x и радиусом ε лежит в S (т. е. если каждая точка y шара B принадлежит S). Множество S называется *открытым*, если оно состоит из внутренних точек. Например, сам шар B является открытым множеством, потому что если y — любая точка B и $\varepsilon' = \varepsilon - \|y - x\|$, то шар $B' = \{z: \|z - y\| < \varepsilon'\}$ лежит в B (см. рис. 3.1).

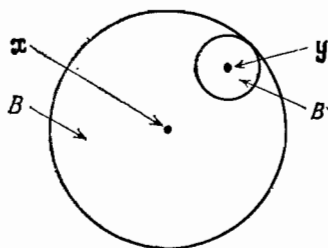


Рис. 3.1. Открытые множества (см. текст).

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Замкнутый шар $B = \{y: \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ является замкнутым множеством (в него включены и точки поверхности). Множество S замкнуто, если его дополнение $\mathbb{R}^n - S$ открыто,

и наоборот. Множество S вместе со всеми своими предельными точками образует замкнутое множество, которое называется *замыканием* S и обозначается через $\bar{S}$. Если S само замкнуто, то $\bar{S} = S$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что если $f(x)$ — непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$, то множества

$$\{x: f(x) > 0\}, \quad \{x: f(x) \neq 0\}, \quad \{x: a < f(x) < b\}$$

являются открытыми, тогда как множества

$$\{x: f(x) \geq 0\}, \quad \{x: f(x) = 0\}, \quad \{x: a \leq f(x) \leq b\}$$

замкнуты.

Объединение произвольной совокупности открытых множеств открыто, так же как и пересечение конечного числа открытых множеств. В соответствующих утверждениях о замкнутых множествах слова «произвольная» и «конечное» должны быть переставлены.

2. Докажите предыдущие утверждения и рассмотрите объединения и пересечения следующих совокупностей интервалов на $\mathbb{R}$ (в каждом случае $k=1, 2, \dots$):

$$(1) |x| < 1 - 1/k, \quad (2) |x| \leq 1 - 1/k, \quad (3) |x| < 1 + 1/k, \quad (4) |x| \leq 1 + 1/k.$$

Для любой функции f замыкание множества $\{x: f(x) \neq 0\}$ называется *носителем* f и обозначается через $\text{supp } f$.

Согласно *теореме Больцано — Вейерштрасса*, из любой последовательности $\{x_i\}_1^\infty$, принадлежащей ограниченному множеству S из $\mathbb{R}^n$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; если S к тому же замкнуто, то предел этой подпоследовательности принадлежит S .

Для любого множества S совокупность открытых множеств $\{\Omega, \Omega', \Omega'', \dots\}$ (она может быть бесконечной или даже несчетной) называется *открытым покрытием* S , если каждая точка x из S принадлежит хотя бы одному из множеств этой совокупности. Далее, если S — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то, согласно *теореме Гейне — Бореля*, из каждого покрытия можно выделить конечную совокупность, которая также покрывает S и которую мы обозначим как $\{\Omega_i: i=1, \dots, N\}$; это означает, что каждая точка из S принадлежит хотя бы одному из множеств Ω_i ($i=1, \dots, N$). (Число N в общем случае зависит для данного множества S от выбранного открытого покрытия.) По поводу сказанного выше см. книгу Натансона [1950], где, однако, последняя теорема называется *теоремой Бореля о покрытиях*.

[В любом топологическом пространстве множество K называется *компактным*, если оно обладает указанным выше свойством, а именно если из каждого открытого покрытия K можно выделить конечное его покрытие; множество K называется *секвенциально компактным*, если каждая последовательность из K содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принад-

лежит K . Для любого метрического пространства оба эти понятия эквивалентны. В $\mathbb{R}^n$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.]

Лемма 1. Если K — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, входящее в открытое множество Ω , то расстояние d от K до дополнения Ω положительно, т. е. в Ω вокруг K имеется окаймление, ширина которого нигде не меньше d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расстояние d определяется так:

$$d = \inf \{ \|x - y\| : x \in K, y \notin \Omega \}. \quad (3.1.1)$$

Предположим, что $d = 0$. Тогда найдется такая последовательность $\{x_j\}$ из K , для которой расстояние между K и дополнением к Ω стремится к нулю. Согласно теореме Больцано—Вейерштрасса, из $\{x_j\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит K и тем самым Ω , но не является внутренней точкой для Ω , однако это противоречит предположению о том, что Ω — открытое множество.

Лемма 2. Если ограниченное замкнутое множество K лежит в открытом множестве Ω , то всегда найдется такое промежуточное открытое множество Ω' , которое также содержит K и замыкание $\bar{\Omega}'$ которого содержится в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество

$$\Omega' = \{x: \text{расстояние}(x, K) < 1/2 d\},$$

где d определено согласно (3.1.1), обладает нужным свойством.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Если f и g — обычные функции на $\mathbb{R}^n$ и S — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то утверждение « $f = g$ на S », очевидно, означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого x из S . Если f и g — распределения, то для произвольного множества S такое утверждение сделать нельзя (в частности, нельзя, когда S состоит всего из одной точки), но для открытого множества этому утверждению можно придать вполне определенный смысл.

Определение 1. Если f и g — распределения на $\mathbb{R}^n$ и Ω — любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то утверждение « $f = g$ на Ω » означает, что $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ для каждой пробной функции φ , носитель которой лежит в Ω .

Определение 2. Если f и g — вещественные распределения, то утверждение « $f \geq g$ на Ω » означает, что $\langle f, \varphi \rangle \geq \langle g, \varphi \rangle$ для каждой неотрицательной пробной функции φ , носитель которой лежит в Ω .

Заметим, что так как носитель любой такой заданной функции φ является замкнутым множеством, а Ω — открытое множество, то, согласно лемме 1 из предыдущего параграфа, в Ω всегда имеется окаймление, отделяющее носитель φ от границы Ω . В предыдущих утверждениях ничего не говорится об f и g на окаймлении, однако каждая точка окаймления принадлежит носителю некоторой другой пробной функции φ , лежащему в Ω .

Уместность приведенных выше определений будет ясна из теорем этой главы; в частности, их согласованность с привычными представлениями об обычных функциях видна из теорем 1 и 2 (см. ниже).

Теорема 1. Если f и g — непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, рассматриваемые как распределения, то $f = g$ на Ω в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$ при всех x из Ω .

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим противное, а именно что $f(x_0) \neq g(x_0)$ при некотором x_0 из Ω ; тогда либо $\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} g(x_0)$, либо $\operatorname{Im} f(x_0) \neq \operatorname{Im} g(x_0)$; мы будем считать, что верно первое. В этом случае в некоторой окрестности Ω_0 точки x_0 разность $\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} g(x)$ не меняет знака; пусть $\varphi(x)$ — пробная функция, которая неотрицательна при всех x , больше нуля при $x = x_0$ и имеет носитель, лежащий в Ω_0 ; тогда величина

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, f - g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \operatorname{Re} [f(x) - g(x)] dx_1 \dots dx_n$$

отлична от нуля, но это противоречит предположению о том, что $f = g$ на Ω .

Теорема 2 (ее доказательство теперь очевидно). Если f и g — непрерывные вещественные функции, то $f \geq g$ на Ω в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда $f(x) \geq g(x)$ для всех x из Ω .

Примеры

Распределение $\delta(x - x_0)$ (а также $\delta'(x - x_0)$, $\delta''(x - x_0)$ и т. д.) на $\mathbb{R}$ равно нулю на любом открытом интервале, не содержащем точку x_0 . Далее, $\delta(x - x_0) \geq 0$ на любом интервале, тогда как $\delta'(x - x_0)$, $\delta''(x - x_0)$ и т. д. не обладают этим свойством на интервале, содержащем точку x_0 .

Чтобы показать, что эти определения имеют действительно локальный характер, нужно доказать, что если Ω — объединение двух или более открытых множеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots$, то $f = g$ на Ω (или $f \geq g$ на Ω) тогда и только тогда, когда $f = g$ (или $f \geq g$) на каждом Ω_i в отдельности. То, что это не совсем тривиально, видно из рассмотрения двух перекрывающихся множеств Ω_1 и Ω_2 . Если φ — пробная функция, носитель которой лежит в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, но не лежит целиком только в одном из множеств Ω_i (см. рис. 3.2), то для получения равенства $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ из предположения о том, что $f = g$ на каждом Ω_i , необходимо представить φ как $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — пробные функции, носители которых целиком лежат соответственно в Ω_1 и в Ω_2 . Тогда равенство $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ будет следовать из того, что $\langle f, \varphi_i \rangle = \langle g, \varphi_i \rangle$ ($i = 1, 2$), в силу ли-

нейности функционалов $\langle f, \cdot \rangle$ и $\langle g, \cdot \rangle$. Такие разложения пробных функций и связанные с этим обстоятельства рассматриваются в следующих двух параграфах.

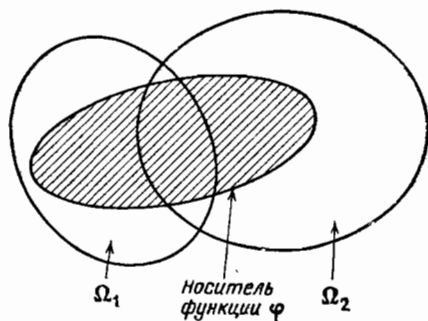


Рис. 3.2. Покрытие компактного множества двумя открытыми множествами.

3.3. ТЕОРЕМА ОБ ОТКРЫТЫХ ПОКРЫТИЯХ

Очевидно, если два открытых множества перекрываются, то они перекрываются краями и эти края всегда можно слегка стянуть без изменения объединения этих множеств: см. рис. 3.3. Это утверждение, обобщенное подходящим образом, будет сейчас доказано.

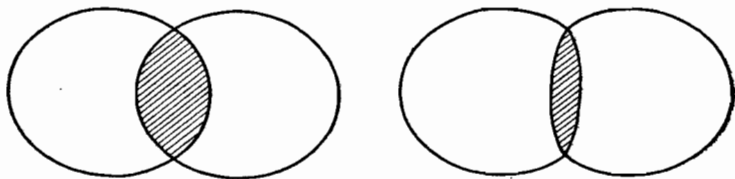


Рис. 3.3. Уменьшение перекрытия. Слева — исходные множества, справа — множества после уменьшения перекрытия.

Теорема 1 (принцип стягивания). Пусть Z — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ (возможно, все $\mathbb{R}^n$). Пусть $\{\Omega_i\}$ — счетная (т. е. конечная или счетно бесконечная) совокупность открытых ограниченных множеств, которая покрывает Z , т. е. такая, что $Z \subset \bigcup_i \Omega_i$ (см. рис. 3.4). Тогда можно слегка стянуть все множества без того, чтобы получившаяся при этом совокупность перестала быть покрытием Z . Точнее, найдется такая совокупность $\{\Omega'_i\}$ открытых множеств, что замыкание $\bar{\Omega}'_i$ множества Ω'_i содержится в соответствующем Ω_i при каждом i , и при этом $Z \subset \bigcup_i \Omega'_i$.

Доказательство. Сначала заметим, что пересечение Z с дополнением множества $\bigcup_{i=2}^{\infty} \Omega_i$ (здесь отброшено Ω_1) представляет собой ограниченное замкнутое множество K_1 , лежащее в Ω_1 . [Множество K_1 — это та часть Z , которая покрывается множеством Ω_1 и только им из всех Ω_i ; см. рис. 3.5.] Согласно лемме 2 из § 3.1, найдется открытое множество Ω'_1 , которое содержит K_1 и замыкание которого лежит в Ω_1 . Ясно, что в покрытии Ω_1 можно заменить на Ω'_1 .

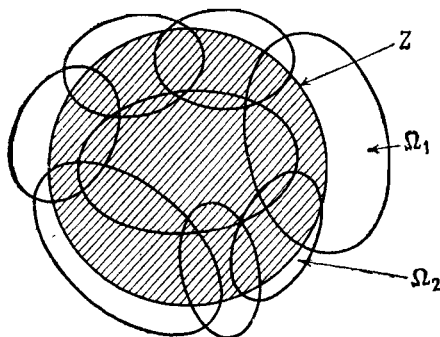


Рис. 3.4. Покрытие компактного множества открытыми множествами.

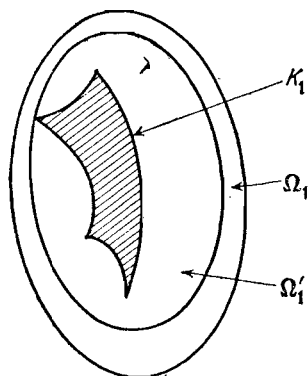


Рис. 3.5. Стягивание Ω_1 .

Теперь предположим, что $\{\Omega'_1, \dots, \Omega'_{k-1}, \Omega_k, \dots\}$ — это покрытие, получившееся после стягивания первых $k-1$ открытых множеств. Тогда пересечение Z с дополнением множества $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{k-1} \cup \Omega_{k+1} \cup \dots$ (теперь отброшено Ω_k) есть ограниченное замкнутое множество K_k , лежащее в Ω_k ; множество Ω'_k строится так же, как и Ω'_1 ; индукция по k завершает доказательство.

3.4. ТЕОРЕМЫ О ПРОБНЫХ ФУНКЦИЯХ. РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЦЫ

[Теоремы этого параграфа применяются во многих разделах анализа.]

Теорема 1. Если K — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащееся в открытом множестве Ω , то найдется такая пробная функция φ (функция из C_0^∞), что (1) $\varphi(x) = 1$ при $x \in K$, (2) носитель φ лежит в Ω и (3) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при всех x ; см. рис. 3.6. [Это вариант для C^∞ специального случая леммы Урысона — см. книги Келли [1955] или Трона [1966].]

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \delta &= 1/3 \cdot (\text{расстояние от } K \text{ до дополнения к } \Omega) = \\ &= 1/3 \inf \{ \|x - y\| : x \in K, y \notin \Omega \}. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 из § 3.1 $\delta > 0$. Пусть $d(x)$ для любого x представляет собой расстояние от x до дополнения к Ω . Определим функцию f так:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } d(x) \leq \delta, \\ [d(x) - \delta]/\delta & \text{при } \delta \leq d(x) \leq 2\delta, \\ 1 & \text{при } 2\delta \leq d(x) \end{cases}$$

(см. рис. 3.7).

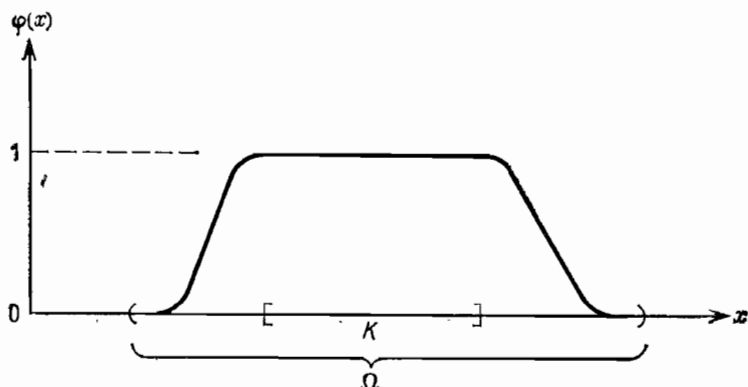


Рис. 3.6. Функция $\varphi(x)$.

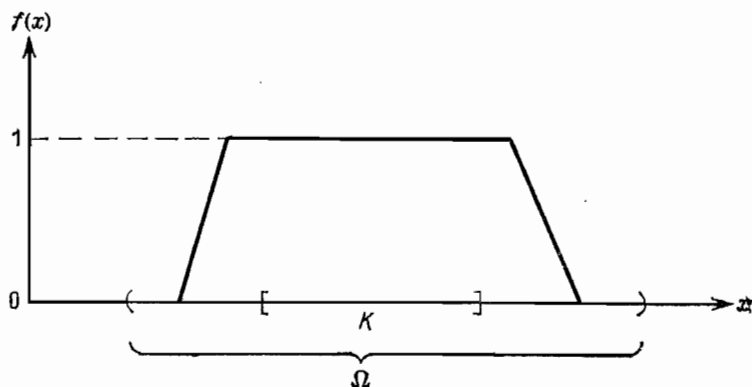


Рис. 3.7. Функция $f(x)$.

Интуитивно ясно, что функция $f(x)$ непрерывна, и доказательство этого является хорошим упражнением. Ясно, что $f(x)$ обладает всеми свойствами, требуемыми от $\varphi(x)$, за исключением того, что ее необходимо сгладить, чтобы она стала функцией класса C^∞ . Множитель $1/3$ в определении δ распределяет поля в области между K и дополнением к Ω так, чтобы сглаживание было возможно без потери других свойств. Проведем сглаживание с помощью сглаживающей функции $\alpha(x)$ из C^∞ , выбранной так, что

1) носитель $\alpha(x)$ лежит в шаре $\|x\| < \delta$,

2) $\int \dots \int \alpha(x) dx_1 \dots dx_n = 1$,

3) $\alpha(x) \geq 0$ при всех x .

Тогда функция

$$\varphi(x) = \int \dots \int f(y) \alpha(x-y) dy_1 \dots dy_n$$

обладает всеми свойствами, указанными в теореме (см. § 2.6).

Теорема 2. Пусть $\{\Omega_i\}$ — счетное покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ ограниченными открытыми множествами. Предположим, что любая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ пересекает только конечное число множеств покрытия $\{\Omega_i\}$. [Данное предположение может быть ослаблено, но для наших целей это не дает ничего нового.] Тогда найдется последовательность $\{\alpha_i(x)\}$ таких функций класса C^∞ , что (1) при каждом i носитель α_i лежит в Ω_i и (2) при всех x имеет место равенство $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) = 1$. Такая последовательность функций называется разбиением единицы.

Доказательство. Пусть $\{\Omega'_i\}$ — покрытие, полученное из $\{\Omega_i\}$ стягиванием согласно теореме из предыдущего параграфа. На основании теоремы 1 при каждом i построим функцию $\varphi_i(x)$, которая принадлежит классу C^∞ , равна единице на Ω'_i , имеет носитель, лежащий в Ω_i , и всюду неотрицательна. Положим

$$\alpha_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\sum_i \varphi_i(x)}.$$

Знаменатель не может обратиться в нуль, потому что $\{\Omega'_i\}$ является покрытием $\mathbb{R}^n$; он содержит только конечное число ненулевых слагаемых в любой ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, и поэтому $\alpha_i(x)$ принадлежит классу C^∞ . Наконец, $\sum \alpha_i(x) = 1$ при всех x по построению.

Теорема 2'. Пусть $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ — конечное покрытие компактного (т. е. замкнутого ограниченного) множества K в $\mathbb{R}^n$ открытыми множествами. Тогда найдется конечная последовательность $\{\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x)\}$ таких функций класса C^∞ , что (1) при каждом i носитель $\alpha_i(x)$ лежит в Ω_i и (2) при всех $x \in K$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x) = 1$.

Это простое следствие теоремы 2, получающееся из первоначального предположения об ограниченности множеств Ω_i (что не приводит к потере общности, так как множество K ограничено) и последующего очевидного расширения совокупности $\{\Omega_i\}$ путем добавления ограниченных открытых множеств так, чтобы покрыть все пространство $\mathbb{R}^n$, после чего остается применить теорему 2.

3.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ

Теорема 1. Если f и g — распределения на $\mathbb{R}^n$, а Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $f = g$ на Ω (в смысле определения 1 из § 3.2) тогда и только тогда, когда $f = g$ в некоторой окрестности (т. е. на открытом множестве) каждой точки из Ω .

Доказательство. Необходимость очевидна. Поэтому остается только доказать, что если $f = g$ в окрестности каждой точки и ψ — любая пробная функция, носитель K которой содержится в объединении всех этих окрестностей, то $\langle f, \psi \rangle = \langle g, \psi \rangle$. По теореме Гейне — Бореля K покрывается конечным подмножеством $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ таких окрестностей. Пусть $\{\Omega'_1, \dots, \Omega'_N\}$ — покрытие K стянутыми окрестностями, как в теореме 2 из § 3.4, а $\{\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x)\}$ — соответствующее разбиение единицы. Тогда при каждом i функция $\alpha_i(x)\psi(x)$ является пробной, а ее носитель лежит в Ω_i . Поэтому

$$\langle f - g, \alpha_i \psi \rangle = 0 \quad \forall i;$$

следовательно,

$$\sum_i \langle f - g, \alpha_i \psi \rangle = \langle f - g, \sum_i \alpha_i \psi \rangle = \langle f - g, \psi \rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 $f \geq g$ на Ω тогда и только тогда, когда $f \geq g$ в некоторой окрестности каждой точки из Ω .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. При этом используется неотрицательность $\alpha_i(x)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя аналогичным образом разбиение единицы, обоснуйте принцип составления из частей:

Пусть $\{\Omega_i\}$ — некоторое семейство открытых множеств, объединение которых есть Ω , и пусть $\{f_i\}$ — соответствующее семейство распределений, обладающих тем свойством, что если пересечение Ω_j и Ω_k непусто, то $f_j = f_k$ на $\Omega_j \cap \Omega_k$. Тогда найдется единственное распределение f , такое, что при каждом i будет $f = f_i$ на Ω_i . [Единственность здесь означает, что если f и g — любые два таких распределения, то $f = g$ на Ω . Конечно, в качестве Ω можно взять все $\mathbb{R}^n$.]

2. Если $f = f(x)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha = \alpha(x)$ — любая функция класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$, то распределение αf было определено в § 2.5. Покажите, что если $\alpha f = 0$ (в смысле распределений), а Ω — любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, на котором функция $\alpha(x)$ отлична от нуля, то $f = 0$ на Ω .

Этот результат используется в следующей главе в связи с преобразованием Фурье от периодического распределения.

УПРАЖНЕНИЕ

3. Покажите, что если f и g — распределения на $\mathbb{R}$, Ω — открытое множество и $f = g$ на Ω , то $f' = g'$ на Ω . (Это показывает, что дифференцирование является локальной операцией.) Как будет выглядеть обратное утверждение?

3.6. НОСИТЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Носитель распределения f на $\mathbb{R}^n$, как и носитель непрерывной функции является дополнением наибольшего из всех открытых множеств, на которых $f = 0$. Это означает следующее. Рассмотрим объединение $\{\Omega_\alpha\}$ всех открытых множеств (если они существуют), таких, что $f = 0$ на каждом Ω_α . Это объединение представляет собой открытое множество Ω , такое, что $f = 0$ на Ω , а $\mathbb{R}^n - \Omega$ — носитель f .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Предположим, что носитель распределения f на вещественной прямой $\mathbb{R}$ состоит всего из одной точки, за которую можно принять $x=0$. Согласно теореме Шварца, приведенной без доказательства в примере 1 из § 2.4, f на интервале $-1 < x < 1$ равняется k -й производной (при некотором k) от непрерывной функции g . Так как $g^{(k)}=0$ на $(-1,0)$ и на $(0,1)$, мы имеем

$$g(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{при } x > 0, \\ p_2(x) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (3.6.1)$$

где p_1 и p_2 — полиномы степени не выше $k-1$ с одинаковыми свободными членами, равными $g(0)$. (Нетрудно видеть, что f является k -й производной от функции (3.6.1) не только на $(-1,1)$, но и на всей прямой $\mathbb{R}$.) Исходя из этого, покажите, что f равняется конечной линейной комбинации функции $\delta(x)$ и некоторых ее производных.

Глава 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДЛЕННОГО РОСТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Класс $\mathcal{S}$ быстро убывающих на бесконечности пробных функций; распределения медленного роста; рост на бесконечности; распределение медленного роста как производная некоторого порядка от медленно растущей непрерывной функции; преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{S}$; обращение методом Фейера; преобразование Фурье распределений медленного роста; энергетический спектр бесконечно осциллирующей функции.

Предварительные сведения: гл. 2 и 3; понятие интеграла Фурье.

Распределения медленного роста как функционалы непрерывны относительно чуть более слабой сходимости, чем та, которая описана в § 2.4, и поэтому несколько слабее как класс по сравнению с классом всех распределений Шварца. Эта слабость не носит локального характера (δ -функция и все ее производные — это распределения медленного роста), а отражается в поведении функционалов при $|x| \rightarrow \infty$. Преобразование Фурье распределения медленного роста определяется без труда и также является распределением медленного роста.

4.1. ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{S}$

Если ограничиться классом распределений, имеющих определенную степень слабости (непрерывность относительно вполне определенного типа сходимости в пространстве пробных функций), то область определения функционалов $\langle f, \cdot \rangle$ и т. п. можно без потери непрерывности функционалов расширить до более широкого класса пробных функций. Ослабление распределений расширяет класс допустимых пробных функций. Для распределений медленного роста на $\mathbb{R}$ соответствующий класс пробных функций — это пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, определяемое следующим образом: функции из $\mathcal{S}$ принадлежат классу C^∞ , но не обязательно имеют ограниченный носитель, а вместо этого должны стремиться к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени x , причем таким же свойством обладают все их производные. Это означает, что функция φ из C^∞ принадлежит $\mathcal{S}$, если существуют такие постоянные K_{pk} , что

$$|x^p \varphi^{(k)}| < K_{pk} \quad \text{при } p, k = 0, 1, \dots \text{ и при всех } x. \quad (4.1.1)$$

Другими словами, при любых p и k

$$\sup_x |x^p \varphi^{(k)}(x)| < \infty. \quad (4.1.2)$$

Для распределений медленного роста на $\mathbb{R}^n$ пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ определяется аналогично: последнее неравенство должно быть заменено на следующее:

$$\sup_x \left\{ \|x\|^p \left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \varphi(x) \right| \right\} < \infty \quad (4.1.3)$$

при всех p и k . [В обоих случаях супремум в действительности является максимумом: из ограниченности функции $x^{p+1}\varphi^{(k)}$ следует, что $x^p\varphi^{(k)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.]

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Теперь определим распределения медленного роста на $\mathbb{R}$ (обобщение на случай $\mathbb{R}^n$ будет очевидным).

Определение 1 (сходимость в $\mathcal{S}'$). Если ψ и φ_j ($j=1, 2, \dots$) — пробные функции (из C_0^∞ или из $\mathcal{S}$), то $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \psi$, если для всех p и k

$$\sup_x |x^p \{\varphi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)\}| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (4.2.1)$$

Нетрудно видеть, что это эквивалентно следующим двум условиям: (1) существуют такие постоянные K_{pk}^0 , что

$$|x^p \varphi_j^{(k)}(x)| < K_{pk}^0 \quad \text{при } p, k=0, 1, \dots \text{ и при всех } x, \quad (4.2.2)$$

причем K_{pk}^0 не зависит от j , и (2) при $j \rightarrow \infty$ функции $\varphi_j^{(k)}(x)$ сходятся к $\psi^{(k)}(x)$ равномерно по x на $\mathbb{R}$ для каждого k .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что эти условия эквивалентны (4.2.1).

Замечание. Легко проверить, что при любых p и k функция

$$\|\varphi\|_{pk} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x |x^p \varphi^{(k)}(x)| \quad (4.2.3)$$

обладает всеми свойствами нормы. Такие нормы определяют топологию в пространстве $\mathcal{S}'$, и (4.2.1) показывает, что сходимость $\xrightarrow{\mathcal{S}'}$ является сходимостью относительно этой топологии, т. е. (4.2.1) эквивалентно тому, что

$$\|\varphi_j - \psi\|_{pk} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty \text{ для всех } p, k. \quad (4.2.4)$$

Пространство C_0^∞ плотно в $\mathcal{S}'$, т. е. для $\psi \in \mathcal{S}'$ найдется такая последовательность $\{\varphi_j\}$ из C_0^∞ , что $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \psi$.

Определение 2. Распределение медленного роста f на $\mathbb{R}$ является линейным функционалом на $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, непрерывным относительно только что указанной сходимости: это означает, что $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$, если $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$.

Из сходимости $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ для функций из C_0^∞ следует, что $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, и поэтому если f — распределение медленного роста, то ограничение $\langle f, \cdot \rangle$ на C_0^∞ представляет собой распределение в смысле гл. 2. Приведенное ниже упражнение показывает, что если два распределения медленного роста совпадают на C_0^∞ , то они совпадают и на всем $\mathcal{S}$. Поэтому распределение медленного роста f можно идентифицировать с его ограничением на C_0^∞ , а распределение f в смысле гл. 2 можно назвать «медленно растущим», если функционал $\langle f, \cdot \rangle$ допускает расширение на $\mathcal{S}$, непрерывное относительно сходимости в $\mathcal{S}$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Пусть φ — любая функция из $\mathcal{S}$, а ψ — такая функция из C_0^∞ , что $\psi(0) = 1$, и пусть $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \psi(\varepsilon x)$. Тогда $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty$. Покажите, что $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и тем самым покажите, что если f — распределение медленного роста, то

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \varphi_\varepsilon \rangle.$$

4.3. РОСТ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Распределения медленного роста характеризуются тем, что они имеют медленный рост на бесконечности. Говорят, что вещественная функция $f(x)$ имеет медленный рост, если существуют такие положительные постоянные X и p , что

$$-|x|^p \leq f(x) \leq |x|^p \quad \text{при } x < -X \text{ и при } x > X.$$

Это утверждение (в котором говорится только, что $|f(x)| \leq |x|^p$ при $|x| > X$) сформулировано так, чтобы его обобщение для распределений было вполне понятным, хотя пока в этом утверждении и нет ничего такого, что ассоциировалось бы с распределениями медленного роста. Чтобы сделать такое обобщение, введем f_δ — результат сглаживания распределения f на расстоянии δ под действием оператора сглаживания, как было объяснено в § 2.5. Тогда результат Шварца состоит в том, что f будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда функция $f_\delta(x)$ имеет медленный рост на $\pm \infty$ при каждом положительном δ .

Далее [Шварц, с. 95], f будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда найдутся такие целые положительные p и k , что f является производной порядка p от непрерывной функции $g(x)$, которая есть $O(|x|^k)$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

ПРИМЕР 1

Функция e^x не является распределением медленного роста, потому что она слишком быстро возрастает на $+\infty$ и сглаживание не может подавить этот рост. Однако $e^x \cos(e^x)$ — распределение медленного роста. Хотя эта функция и не имеет медленного роста, но ее сглаживание (пусть сколь угодно малое) путем усреднения уменьшает порядок роста из-за взаимного уничтожения положительных и отрицательных вариаций функции при больших положительных x ; отметим, что эта функция является производной от ограниченной функции $\sin(e^x)$.

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ НА $\mathcal{S}$

Пусть функция φ принадлежит множеству $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. [Здесь также будет ясно, как получается обобщение для пробных функций на $\mathbb{R}^n$.] Так как $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$ быстрее любой отрицательной степени x , ясно, что преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx \quad (4.4.1)$$

существует для всех вещественных y . Аналогично для любого целого $q \geq 0$ интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^q \varphi(x) e^{-iyx} dx = \left(\frac{d}{dy}\right)^q \hat{\varphi}(y) \quad (4.4.2)$$

существует для всех вещественных y . [Указанное дифференцирование функции (4.4.1) может быть выполнено под знаком интеграла, потому что получающаяся при этом подынтегральная функция, которая стоит в (4.4.2), непрерывна и быстро стремится к нулю на бесконечности.] Поэтому функция $\hat{\varphi}(y)$ принадлежит C^∞ по y . Точно так же для любого целого $p \geq 0$

$$\begin{aligned} |(iy)^p \hat{\varphi}(y)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(p)}(x) e^{-iyx} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(p)}(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

т. е. $\hat{\varphi}(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$ быстрее любой отрицательной степени y . Наконец,

$$|y^p \hat{\varphi}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x^q \varphi^{(p)}(x)| dx < \infty;$$

следовательно, преобразование Фурье любой функции из $\mathcal{S}$ является функцией из $\mathcal{S}$.

Теперь обоснуем известную формулу обращения (4.4.1), а именно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) e^{iyx} dy, \quad (4.4.3)$$

путем модификации метода Фейера (1904 г.) для рядов Фурье. Правая часть последнего равенства равна

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{\varphi}(y) e^{iyx} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') e^{-iyx'} dx' \right] e^{iyx} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy. \end{aligned}$$

Здесь можно изменить порядок интегрирования, потому что модуль подынтегрального выражения интегрируем на указанных интервалах и результат такого интегрирования конечен. Далее

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{iy(x-x')} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy = \frac{1 - \cos n(x-x')}{\pi n(x-x')^2}. \quad (4.4.4)$$

Согласно (2.6.5), эти функции сходятся к $\delta(x-x')$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и следует (4.4.3).

Итак, преобразование Фурье функций φ , рассматриваемое как оператор, отображает пространство $\mathcal{S}$ пробных функций на себя. Это отображение непрерывно:

Теорема. Если $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, то $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\psi}$.

Доказательство. Без потери общности можно положить $\psi = \hat{\psi} \equiv 0$. Тогда доказательство сводится к следующему:

Утверждение 1. Если последовательность $\{\chi_n\}$ такова, что $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, то $\sup_y |\hat{\chi}_n(y)| \rightarrow 0$.

Для доказательства этого вспомним, что, согласно определению сходимости в $\mathcal{S}$, $\sup_x |x^p \chi_n^{(k)}(x)| \rightarrow 0$. Положив $k=0$, а $p=0$ и 2, получим, что

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x |(1+x^2) \chi_n(x)| \rightarrow 0;$$

поэтому

$$|\hat{\chi}_n(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \chi_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1+x^2} dx \rightarrow 0.$$

Третий член этой цепочки не зависит от y , откуда и следует утверждение 1.

Утверждение 2. Из предположения $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ вытекает, что при любых p и k также и $x^p \varphi^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$.

Чтобы показать это, продифференцируем l раз функцию $x^p \varphi^{(k)}(x)$ и умножим результат на x^r , считая при этом l и r любыми; тогда получится конечная линейная комбинация членов, равномерно стремящихся к нулю, что и доказывает наше утверждение. Теперь заметим, что $y^k \hat{\varphi}_n^{(p)}(y)$ представляет собой (за исключением множителя i в некоторой степени) преобразование Фурье функции $\chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^p \varphi^{(k)}(x)$, а последовательность этих функций всегда сходится к нулю в $\mathcal{S}$ согласно утверждению 2. Тогда в силу утверждения 1 $\sup_y |y^k \hat{\varphi}_n^{(p)}(y)| \rightarrow 0$, т. е. $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, что и требовалось доказать.

4.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Пусть сначала $f(x)$ будет непрерывной функцией, преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ которой существует в обычном смысле и непрерывно (например, f можно взять из $\mathcal{S}$). Рассматриваемые как распределения f и $\hat{f}$ являются функционалами $\langle f, \varphi \rangle$ и $\langle \hat{f}, \varphi \rangle$ соответственно; связь между ними устанавливается с помощью равенства Парсеваля, одна из форм которого имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) e^{iyx} dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iyx} dx \hat{\varphi}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{\varphi}(y) dy = \\ &= \langle f, \hat{\varphi} \rangle. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

По аналогии с этим определим и преобразование Фурье распределения медленного роста:

Определение. Если f — любое распределение медленного роста, то его преобразование Фурье $\hat{f}$ представляет собой распределение (функционал), определяемое как $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ для всех φ из $\mathcal{S}$.

Если φ_n ($n=1, 2, \dots$) и ψ — пробные функции и $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, то $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\psi}$, и наоборот согласно теореме из предыдущего параграфа. Но тогда $\langle f, \hat{\varphi}_n \rangle \rightarrow \langle f, \hat{\psi} \rangle$, поскольку f — распределение медленного роста, и поэтому $\langle \hat{f}, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \hat{f}, \psi \rangle$, откуда следует, что преобразование Фурье распределения медленного роста является распределением медленного роста.

Если преобразование Фурье применить к распределению медленного роста f дважды, то в результате получится распределение $\hat{\hat{f}}$, для которого $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$, так как ясно, что $\hat{\hat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$, и поэтому

$$\langle \hat{\hat{f}}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle,$$

а последнее выражение равно $\langle f(-x), \varphi(x) \rangle$ согласно правилу замены независимой переменной в распределении — см. § 2.8.

Из приведенного выше определения следует, что если $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ в смысле сходимости распределений, то $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ в том же смысле. Иначе говоря, преобразование Фурье является непрерывным отображением в $\mathcal{S}'$.

Полная картина для n -мерного случая получается путем очевидного обобщения, начиная с пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций, описанного в конце § 4.1. Функция $f(x)$ имеет медленный рост, если она ограничена постоянной плюс $\|x\|^p$ при некотором p . Приведенные в § 4.3 результаты Шварца обобщаются следующим образом:

1. Распределение f на $\mathbb{R}^n$ будет медленно растущим тогда и только тогда, когда $J_\delta f$ — функция медленного роста при каждом $\delta > 0$.
2. Распределение f будет медленно растущим тогда и только тогда, когда оно является частной производной (чистой или смешанной) от некоторой непрерывной функции медленного роста.

Следствие. Если $D^\alpha f$ — любая производная от распределения f , то $D^\alpha f$ будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда этим свойством обладает f .

Вместо (4.4.1) для преобразования Фурье пробной функции будем иметь

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iy \cdot x} dx_1 \dots dx_n.$$

Переменная y в преобразованиях Фурье часто обозначается через k .

Напомним, что для обычных интегралов Фурье порядок, с которым $\hat{f} \rightarrow 0$ на бесконечности, зависит от гладкости f , и обратно. То же самое верно и для распределений, как это видно на примере следующей теоремы:

Теорема. Если f — распределение медленного роста с ограниченным носителем в $\mathbb{R}^n$, то $\hat{f}$ есть целая аналитическая функция $f(k)$, т. е. аналитическая по каждой компоненте k_j вектора k во всей комплексной плоскости переменной k_j .

Доказательство. Так как f имеет ограниченный носитель, то функционал $\langle f, \varphi \rangle$ вполне определен на любом элементе φ из C^∞ независимо от носителя последнего. Положим

$$e_k(x) = e^{-ik \cdot x}, \quad F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle f, e_k \rangle$$

и покажем, что $\hat{f}$ — это функция $F(k)$, которая, очевидно, аналитична по каждой компоненте вектора k согласно упражнению 2 из § 2.4 о дифференцировании по параметру. Действительно, для любого элемента φ из C_0^∞

$$\int F(k) \varphi(k) d^n k = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \langle f, e_k \rangle \varphi(k) d^n k.$$

Согласно упражнению 1 об интегрировании по параметру из того же § 2.4, это есть $\langle f, \hat{\varphi} \rangle$, так что $\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, и поэтому $F = \hat{f}$, что и требовалось доказать.

Преобразование Фурье на распределениях, не обязательно имеющих медленный рост, определяется у Гельфанда и Шилова в гл. 2 выпуска 1. Результатом преобразования является в общем случае не распределение в смысле Лорана Шварца, а непрерывный линейный функционал на пространстве Z пробных функций, упомянутом в конце § 2.2. Кратко опишем ситуацию для распределений на $\mathbb{R}$ (по поводу распределений на $\mathbb{R}^n$ и других подробностей см. книгу Гельфанда и Шилова). Напомним, что преобразование Фурье отображает класс пробных функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ на себя, а $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ лежит в $\mathcal{S}$. Поэтому C_0^∞ отображается на некоторое другое подмножество в $\mathcal{S}$, а именно на пространство $Z = Z(\mathbb{R})$, определяемое следующим образом: функция $\varphi(y) \in Z$, если

- (1) она является целой аналитической функцией от y ;
 (2) найдутся также положительные постоянные $a, C_0, C_1, \dots$,
 что

$$|y^q \varphi(y)| \leq C_q e^{a|Im y|}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \forall y \in \mathbb{C}.$$

УПРАЖНЕНИЕ.

1. Покажите, что если функция $\varphi(x) \in C_0^\infty$ и носитель $\varphi(x)$ содержится в $[-a, a]$, то ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}(y)$ удовлетворяет условиям (1) и (2) при постоянных C_q , выбранных надлежащим образом. Это показывает, что преобразование Фурье отображает C_0^∞ в Z ; то, что при этом Z отображается в C_0^∞ , доказано у Гельфанда и Шилова.

Сходимость $\xrightarrow{Z}$ пробных функций в Z определяется так, что $\hat{\varphi}_j \xrightarrow{Z} \hat{\varphi}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, после чего класс обобщенных функций определяется как класс непрерывных линейных функционалов на Z , т. е. элементов сопряженного пространства Z' . Теперь при помощи обобщенного равенства Парсеваля $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle$, которое было использовано для определения преобразования Фурье от распределения, можно установить, что элементы пространства Z' представляют собой преобразования Фурье от элементов пространства $\mathcal{D}'$, т. е. от распределений в смысле Шварца.

Элементы пространства Z' определены на всей комплексной плоскости, тогда как элементы пространства $\mathcal{D}'$, рассматриваемые как обобщенные функции, определены только на $\mathbb{R}$. Гельфанд и Шиллов показывают, например, что преобразование Фурье от функции $f(x) = e^x$ (которая, как отмечалось выше, не является распределением *медленного роста*) есть $2\pi \delta(y - i)$, т. е. функционал на Z , определяемый для любой функции $\varphi(y)$ как

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = 2\pi \varphi(i)$$

(он вполне определен, потому что φ — целая функция). Дальнейшие детали см. у Гельфанда и Шилова.

Примеры нахождения преобразования Фурье от распределений

ПРИМЕР 1

$$f(x) = \delta(x - x_0); \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-iyx_0}.$$

Доказательство. Для любой пробной функции φ

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iyx_0} dy = \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iyx_0}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2

$$f(x) = \delta'(x - x_0); \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} i y e^{-i y x_0}.$$

ПРИМЕР 3

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n; \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi} [a_0 \delta(y) + i a_1 \delta'(y) + \dots + i^n a_n \delta^{(n)}(y)].$$

ПРИМЕР 4

Пусть $f(x)$ — периодическая функция, заданная сходящимся рядом Фурье $\sum_p c_p e^{i p x}$; тогда $\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi} \sum_p c_p \delta(y - p)$.

ПРИМЕР 5

Пусть $f(x)$ — распределение с периодом 2π , т. е. $f(x)$ и $f(x + 2\pi)$ — это одно и то же распределение. [В этом случае $f(x)$ автоматически имеет медленный рост согласно теореме Шварца о порядке роста — см. § 4.3.] Тогда для любой пробной функции φ

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(y), \varphi(y) \rangle &= \langle f(x), \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle f(x + 2\pi), \hat{\varphi}(x) \rangle = \\ &= \langle f(x), \hat{\varphi}(x - 2\pi) \rangle; \end{aligned}$$

но $\hat{\varphi}(x - 2\pi)$ — преобразование Фурье от $e^{2\pi i y} \varphi(y)$, так что

$$\langle \hat{f}(y), \varphi(y) \rangle = \langle \hat{f}(y), e^{2\pi i y} \varphi(y) \rangle$$

для всех φ из $\mathcal{S}$, т. е. $(1 - e^{2\pi i y}) \hat{f}(y)$ обращается в нуль как распределение. Тогда в силу упражнения 2 из § 3.5 $\hat{f} = 0$ в области Ω , где Ω — вещественная ось с выколотыми точками $y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. распределение $\hat{f}$ сосредоточено в целых точках. Поэтому, согласно упражнению из § 3.6, $\hat{f}$ в такой точке k является линейной комбинацией $\delta(x - k)$ и некоторых ее производных. Однако приведенное ниже упражнение 2 показывает, что в действительности производные не входят в эту комбинацию, и поэтому $\hat{f}$ записывается как

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(y - k), \quad (4.5.2)$$

Таков общий вид преобразования Фурье от периодического распределения.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Используя упражнение из § 3.6, сначала представьте $\hat{f}(y)$ как

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{J_k} e_{kj} \delta^{(j)}(y - k),$$

затем покажите, что так как $\hat{f}(y)$ — распределение медленного роста, то найдется такое целое p , для которого $J_k \leq p$ при всех k . Наконец, используя периодичность f , покажите, что $p = 0$.

3. Покажите, что, так как $\hat{f}(y)$ — распределение медленного роста, коэффициенты c_k в (4.5.2) не могут расти быстрее, чем некоторая степень $|k|$ при $k \rightarrow \pm \infty$.

4. Найдите распределение, преобразованием Фурье которого является

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) \delta'(y - k),$$

и обобщите этот результат.

4.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Пусть $f(t)$ — ограниченная непрерывная функция, которая осциллирует более или менее нерегулярно при всех t , $t \in (-\infty, \infty)$; ее можно представить себе как одну из компонент электрического поля в некоторой точке пространства при прохождении излучения от источника света или как компоненту скорости в некоторой точке турбулентного течения. (Тогда $f(t)$ имеет вещественные значения, но это обстоятельство несущественно.) Ясно, что функцию $f(t)$ нельзя представить ни в виде классического ряда Фурье, поскольку она не является периодической, ни в виде классического интеграла Фурье, поскольку она не является квадратично интегрируемой, но она представляет собой распределение медленного роста и поэтому имеет преобразование Фурье $\hat{f} = \hat{f}(\omega)$, которое, как нетрудно увидеть, является второй производной $F''(\omega)$ в смысле распределений от непрерывной функции

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{t^2} \left(-e^{-i\omega t} + \frac{1-i\omega t}{1+t^2} \right) dt. \quad (4.6.1)$$

Действительно, сначала можно элементарно проверить, что функция $F(\omega)$ даже непрерывна по Липшицу; далее, для любой пробной функции φ

$$\langle F'', \varphi \rangle = \langle F, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \varphi''(\omega) d\omega;$$

подставляя (4.6.1) вместо F и дважды интегрируя по частям относительно ω , получаем $\langle f, \hat{\varphi} \rangle$, но это и означает, что $F'' = \hat{f}$.

Мы хотим определить, как интенсивность или энергия, связанная с функцией $f(t)$, распределяется по частоте ω , т. е. определить спектр $f(t)$. Чтобы это понятие имело смысл, мы должны предположить, что статистические свойства $f(t)$ на больших временных интервалах вполне определены. В частности, предположим, что автоковариационная функция

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f(t+\tau)} f(t) dt \quad (4.6.2)$$

существует для всех τ (тогда отношение $R(\tau)/R(0)$ есть автокорреляция $f(t)$ для временной разности τ).

Предположим далее, что сходимости в (4.6.2) равномерна по τ в любом конечном интервале, т. е. что $R(\tau)$ — непрерывная функция. Некоторые следствия из этих предположений указываются в приводимых ниже примерах. Нетрудно показать, что $R(\tau)$

может быть представлена также как

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{\tau} \overline{f(t+s+\tau)} f(t+s) dt \quad (4.6.3)$$

при любом вещественном s ; иначе говоря, если статистические свойства на больших временных интервалах вполне определены в целом, то они не меняются при сдвиге функции $f(t)$ вперед или назад по времени. Отметим, что $R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$. Из неравенства Шварца следует, что $|R(\tau)| \leq R(0)$.

Если мы предположим, что $f(t)$ — это приложенное к нагрузке с единичным сопротивлением напряжение, то $R(0)$ будет усредненным по времени выделением энергии на нагрузке. Будем искать неубывающую функцию $S(\omega)$, называемую *энергетическим спектром* $f(t)$, такую, что при $\omega_2 > \omega_1$ разность $S(\omega_2) - S(\omega_1)$ есть энергия, относящаяся к частотам из интервала (ω_1, ω_2) . Если такую функцию удастся найти, то ее скачки соответствуют спектральным линиям, а значение $S'(\omega)$ там, где эта производная существует в обычном смысле, является интенсивностью непрерывного спектра на частоте ω .

Образно говоря, $S(\omega)$ получается путем включения электрического фильтра между источником и нагрузкой, как показано схематически на рис. 4.1. (Предполагается, что источник имеет

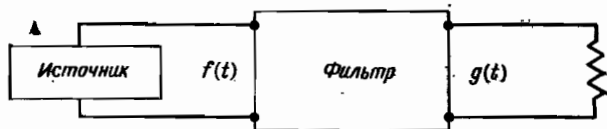


Рис. 4.1. Схема контура.

бесконечный импеданс, вследствие чего сигнал $f(t)$ не должен меняться из-за наличия фильтра.) Пусть передаточная характеристика фильтра задается (в общем случае комплекснозначной) функцией $\psi(\omega)$: если на вход фильтра подано единичное синусоидальное напряжение с частотой ω , то $\psi(\omega)$ дает амплитуду и фазу на выходе. Для идеального полосового фильтра, т. е. когда $|\psi(\omega)| = 1$ при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ и $\psi(\omega) = 0$ в противном случае, выделение энергии на нагрузке должно равняться $S(\omega_2) - S(\omega_1)$. С другой стороны, эта величина равна интегралу Стильеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 dS(\omega), \quad (4.6.4)$$

потому что $|\psi(\omega)|^2$ — коэффициент затухания энергии для фильтра на частоте ω . Следовательно, $S(\omega)$ нужно выбрать так, чтобы для любой пробной функции $\psi(\omega)$ последний интеграл был равен

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt. \quad (4.6.5)$$

где $g(t)$ — напряжение на выходе фильтра (см. рис. 4.1).

Мы утверждаем, что $S(\omega)$ имеет вид

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{2\pi i \tau} d\tau. \quad (4.6.6)$$

Это основная формула для энергетического спектра функции $f(t)$. Она широко используется в гидродинамике, эргодической теории, статистической физике и теории динамических систем. В теории турбулентности она применяется, например, для выражения зависимости компоненты скорости от декартовой координаты при заданном значении времени, и компонента эта обозначается тогда через $v(x)$ вместо $f(t)$; в этом случае $R(\tau)$ является уже пространственной, а не временной корреляцией.

Функция $R(\tau)$ хотя и ограничена, но в общем случае не стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, как показывают простые примеры $f(t) = c$ и $f(t) = \sin t$; следовательно, сходимость последнего интеграла априори не очевидна; она была установлена Норбертом Винером в 1926 г. при очень общих предположениях (Винер [1930]). Иногда, как в приводимом ниже примере 3 (когда одна из частот ω_n оказывается равной нулю), равенство (4.6.6) можно интерпретировать как

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{2\pi i \tau} d\tau. \quad (4.6.7)$$

В дальнейшем будем считать выражение в правой части (4.6.7) обычной функцией.

Чтобы вывести формулу для $S(\omega)$ из (4.6.4) и (4.6.5), нам нужно знать напряжение $g(t)$ на выходе фильтра. Ясно, что $g(t)$ — это функция, преобразование Фурье которой представляет собой $\hat{f}(\omega) \psi(\omega)$. Поэтому

$$\langle \hat{g}, \varphi \rangle = \langle \hat{f} \psi, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \psi \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\psi \varphi} \rangle$$

для любой пробной функции φ . Преобразование Фурье от произведения $\psi \varphi$ является сверткой преобразований Фурье $\hat{\psi}$ и $\hat{\varphi}$, т. е.

$$(\widehat{\psi \varphi})(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(s-t) \hat{\varphi}(t) dt. \quad (4.6.8)$$

Поэтому

$$\langle g, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{g}, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(s-t) \hat{\psi}(t) dt ds,$$

откуда видно, что

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(s) \hat{\psi}(s-t) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t+s) \hat{\psi}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Эта формула показывает, как фильтр преобразует сигнал $f(t)$ в $g(t)$; интерпретация функции $\hat{\psi}(t)$, которая входит в (4.6.9), будет рассмотрена ниже.

Из формулы для $g(t)$ находим, что

$$\int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t+s')} \overline{\hat{\psi}(s')} ds' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t+s) \hat{\psi}(s) ds.$$

При фиксированном s в качестве новой переменной вместо s' возьмем $\tau = s' - s$, разделим обе части равенства на 2π и устремим T к бесконечности; равномерная сходимость выражения (4.6.3) для автоковариационной функции позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла, и поэтому

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \overline{\hat{\psi}(s+\tau)} \hat{\psi}(s) ds d\tau.$$

Снова используем связь между преобразованием Фурье и сверткой в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(s+\tau)} \hat{\psi}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega$$

и получим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 d\omega \left(\frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 dS(\omega) \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

в предположении, что сходимость в (4.6.7) равномерна относительно ω .

Наконец, из неотрицательности левой части (4.6.10) видно, что $S(\omega)$ — неубывающая вещественная функция.

ПРИМЕРЫ

В некоторых из этих примеров удобно считать функцию $f(t)$ лишь кусочно непрерывной; на теории это не отражается, а на самом деле Винер рассматривал еще более широкий класс функций. Читатель при желании может без труда сгладить разрывы $f(t)$.

ПРИМЕР 1

Пусть $f(t) = 1$ при $1 \leq |t| \leq 2$, $4 \leq |t| \leq 8$, $16 \leq |t| \leq 32$ и т. д. и обращается в нуль в противном случае. Тогда величина

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+\tau) f(t) dt$$

при $T \rightarrow \infty$ осциллирует между $\approx \frac{1}{3}$ и $\approx \frac{2}{3}$; поэтому при $T \rightarrow \infty$ и любом τ предел в (4.6.2) не существует. Статистические свойства $f(t)$ на больших временных интервалах не являются вполне определенными.

ПРИМЕР 2

Пусть $f(t) = e^{it^2}$. Здесь $R(0) = 1$, тогда как $R(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$. Таким образом, $R(\tau)$ не является непрерывной, как это нам требуется, и $S(\omega) \equiv 0$. Грубо говоря, вследствие быстрых осцилляций функции e^{it^2} при больших t здесь вся энергия приходится на бесконечные частоты. Аналогично ведут себя функции $\sin t^2$ и $\cos t^2$.

ПРИМЕР 3

Пусть $f(t)$ — почти периодическая функция. Тогда ее можно представить в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (4.6.11)$$

где ω_n — вещественные, а c_n — комплексные постоянные; этот ряд сходится к $f(t)$ по норме $\|f\|$, порождаемой скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f(t)} g(t) dt; \quad (4.6.12)$$

коэффициенты c_n удовлетворяют равенству Парсеваля

$$\sum |c_n|^2 = \|f\|^2 = R(0)$$

(Рисс и Секефальви-Надь [1953]). Отметим, что $\|f\|$ — это не обычная L^2 -норма на $\mathbb{R}$ из-за множителя $1/(2T)$ в (4.6.12). Для простоты будем считать $f(t)$ таковой, что ряд (4.6.11) сходится абсолютно. Тогда

$$R(\tau) = \sum |c_n|^2 e^{i\omega_n \tau} \quad (4.6.13)$$

и из (4.6.7) нетрудно видеть, что

$$S(\omega) = \text{const} + \sum_{\omega_n < \omega} |c_n|^2. \quad (4.6.14)$$

(При этом предполагается, что ω отличается от всех ω_n ; если $\omega = \omega_m$ при некотором m , то к правой части (4.6.14) нужно прибавить $1/2 |c_m|^2$.) Следовательно, функция $f(t)$ имеет чисто линейчатый спектр; линия с частотой ω_n имеет интенсивность $|c_n|^2$.

Этот пример включает случай периодической функции, когда ω_n являются целыми кратными некоторой основной частоты и (4.6.11) представляет собой обычный ряд Фурье.

ПРИМЕР 4

Предположим, что функция $f(t)$ задана в виде обычного интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где f и $\hat{f}$ — квадратично интегрируемые обычные функции. Нетрудно видеть, что в этом случае $R(0) = 0$, так что $R(\tau) \equiv 0$. Функция $f(t)$ соответствует конечной энергии, но когда эта энергия усредняется по всем значениям времени, средняя энергия оказывается равной нулю.

ПРИМЕР 5

Можно предположить, что интеграл Фурье — Стильбеса

$$f(t) = \int e^{i\omega t} d\sigma(\omega), \quad (4.6.15)$$

где $\sigma(\omega)$ — функция ограниченной вариации, будет подходящим обобщением рядов Фурье и интегралов Фурье, но и здесь опять получается лишь линейчатый спектр с линиями на тех частотах ω (если они существуют), где $\sigma(\omega)$ имеет разрывы. Преобразование Фурье от (4.6.15) — это первая производная от обычной функции $\sigma(\omega)$, и мы уже видели, что преобразование от интересующей нас функции есть *вторая* производная в смысле распределений от обычной функции $F(\omega)$, определенной в (4.6.1).

ПРИМЕР 6

Теперь опишем функцию $f(t)$, предложенную Винером, которая имеет непрерывный спектр. Она принимает только значения ± 1 и постоянна на каждом интервале между двумя последовательными целыми точками. На любой цепочке из m таких интервалов $f(t)$ может быть описана последовательностью m знаков «+» или «-», которую мы назовем *шаблоном* длины m . Функция строится так, что если число N_1 показывает, сколько раз данный такой шаблон встретится на интервале длины N (считается, что $N \gg m$), то

$$\frac{N_1}{N} \rightarrow 2^{-m} \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Можно сказать, что асимптотически появление любого из 2^m шаблонов длины m равновероятно. Теперь рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+\tau) f(t) dt,$$

где τ — отличное от нуля целое число. Вклад интервала $n < t < n+1$ в этот интеграл равен ± 1 в зависимости от того, одинаковые или противоположные знаки имеет шаблон длины $\tau+1$ для $f(t)$ на концах своего интервала $n < t < n+\tau+1$. Так как оба эти случая равновероятны, мы видим, полагая $T \rightarrow \infty$,

что $R(\tau) = 0$, если τ — отличное от нуля целое число. Ясно, что $R(0) = 1$, и нетрудно видеть, что $R(\tau)$ меняется линейно при изменении τ между последовательными целыми числами. Поэтому

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{при } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{при всех прочих } \tau, \end{cases} \quad (4.6.16)$$

откуда с учетом (4.6.6) находим, что

$$S(\omega) = \int_0^1 (1 - \tau) \frac{\sin \omega \tau}{\pi \tau} d\tau. \quad (4.6.17)$$

Таким образом, в этом случае спектр непрерывен и плотность спектра равна

$$S'(\omega) = \frac{1 - \cos \omega}{\pi \omega^2}. \quad (4.6.18)$$

Осталось построить функцию $f(t)$, что мы и сделаем для $t > 0$, имея в виду, что $f(-t) = f(t)$. Последовательность знаков для $f(t)$ при $t > 0$ такова:

+, —;
 ++, +—, —+, — (этот набор повторяется 2 раза);
 +++, ++—, +—+, +—, —++, —++ (этот набор повторяется 4 раза);
 ++++, +++— и т. д. (этот набор повторяется 8 раз);
 (4.6.19)

Запятые здесь служат лишь для разделения групп знаков с целью облегчить понимание дальнейшего. Теперь рассмотрим шаблоны длины m и возьмем строку указанной схемы, в которой расстояние между запятыми много больше m ; среди шаблонов, внутрь которых не попадает запятая, все шаблоны длины m встречаются одинаково часто, а вероятность встретить такой шаблон с запятой внутри стремится к нулю с ростом расстояния между запятыми. Далее, вследствие повторений каждая строка схемы мажорирует все предыдущие строки, откуда и видно, что $f(t)$ обладает требуемыми свойствами.

Значение этого примера не зависит от некоторой искусственности схемы (4.6.19). Если последовательность знаков «+» и «—» определяется некоторым физическим процессом, т. е. полностью случайным образом, то получается тот же самый непрерывный спектр (4.6.17) с плотностью (4.6.18). По-видимому, излучение нагретого тела и белый шум имеют такой общий характер.

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [1930] со ссылкой на К. Малера, в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр (мы опускаем его описание, поскольку оно довольно длинное). Напомним, что неубывающая функция $S(\omega)$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора, о которой пойдет речь в гл. 13. Первое слагаемое дает линейчатый спектр, второе — непрерывный спектр в обычном физическом смысле, а третье — сингулярный непрерыв-

ный спектр, который обычно не встречается в физических задачах, хотя пример Малера и показывает, что в принципе он возможен.

Входящая в (4.6.9) функция $\hat{\psi}(t)$ представляет собой отклик фильтра на единичный импульс $\delta(t)$, поданный в момент $t=0$. Независимо от принципа работы фильтра по соображениям причинности функция $\hat{\psi}(t)$ должна обращаться в нуль при $t < 0$. Однако это не накладывает существенного ограничения на наши рассуждения. Если $\hat{\psi}_1$ — любая функция из C_0^∞ , являющаяся преобразованием Фурье от функции $\psi_1(\omega)$, то для некоторого вещественного a преобразование Фурье от функции $\psi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\omega a} \psi_1(\omega)$ имеет носитель на полуоси $t \geq 0$ и поэтому удовлетворяет условию причинности. Следовательно, так как $|\psi(\omega)|^2 = |\psi_1(\omega)|^2$, функцию $|\psi(\omega)|^2$ в (4.6.4) можно рассматривать как произвольную неотрицательную пробную функцию, преобразование Фурье которой принадлежит C_0^∞ .

Глава 5

ПРОСТРАНСТВА L^2

Сходимость в среднем; квадратично интегрируемые функции и распределения и их свойства; пространства типа L^2 , L^1 , L^p , L^∞ , L^2_0 ; преобразования Фурье и операторы сглаживания в пространствах L^2 ; пространства Соболева; граничные значения в пространствах Соболева,

Предварительные сведения: гл. 1—4.

Сочетание понятий гильбертова пространства, распределения и сходимости в среднем приводит к построению функциональных пространств, удобных для исследования дифференциальных операторов. С точки зрения квантовой механики элементы или «точки» таких пространств являются волновыми функциями, которые представляют состояния физической системы.

5.1. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ. ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Сначала мы опишем несколько известных примеров сходимости в среднем. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Ее коэффициентами Фурье являются

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (5.1.1)$$

обозначим через $S_m(x)$ m -ю частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$:

$$S_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}. \quad (5.1.2)$$

Функции $S_m(x)$ сходятся к $f(x)$ в L^2 , или в среднем; это означает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (5.1.3)$$

Позднее в этой главе мы увидим, что это верно и для значительно более широкого класса периодических функций $f(x)$, в то время как если даже $f(x)$ непрерывна, поточечная сходимость $S_m(x) \rightarrow f(x)$ при каждом x не может быть доказана без некоторых дополнительных предположений об $f(x)$, например, таких, как требование ограниченной вариации.

Рассмотрим более общий случай. Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, периодическая по каждой переменной $x_1, \dots, x_n$ с периодом 2π , и пусть k — вектор с целыми компонентами $k_1, \dots, k_n$; тогда коэффициентами Фурье функции $f(x)$ являются числа

$$c_k = (2\pi)^{-n} \int f(x) e^{-ik \cdot x} d^n x; \quad (5.1.4)$$

интегрирование здесь осуществляется по кубу

$$K = \{x: |x_i| \leq \pi, i = 1, \dots, n\}. \quad (5.1.5)$$

Обозначим m -ю частную сумму многомерного ряда Фурье функции $f(x)$ через

$$S_m(x) = \sum_{k \in L_m} c_k e^{ik \cdot x}, \quad (5.1.6)$$

где L_m — множество узлов целочисленной решетки куба с длиной ребра $2m$ в n -мерном пространстве векторов k

$$L_m = \{k: k_i = -m, \dots, +m, i = 1, \dots, n\}; \quad (5.1.7)$$

тогда

$$\int_K |S_m(x) - f(x)|^2 d^n x \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (5.1.8)$$

Более общие разложения по ортогональным системам функций (частным случаем которых являются разложения в ряды Фурье) также сходятся в среднем. Рассмотрим системы полиномов одной переменной. Пусть $\rho(x)$ — положительная непрерывная весовая функция на конечном интервале $[a, b]$; предположим, что $\{\rho_k(x)\}_{k=0}^\infty$ — соответствующая ортонормированная система полиномов, т. е.

$$\int_a^b \rho_k(x) \rho_l(x) \rho(x) dx = \delta_{kl}, \quad (5.1.9)$$

и для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ $\rho_k(x)$ — полином степени k .

[Напоминаем, что $\rho_k(x)$ можно построить с помощью ортонормирующей процедуры Грама—Шмидта (§ 1.6) из семейства полиномов $1, x, x^2, \dots$, используя при этом скалярное произведение (ρ_k, ρ_l) , задаваемое левой частью равенства (5.1.9). Это построение можно выполнять и в случае открытого или даже

бесконечного интервала (a, b) , если только $\int_a^b \rho(x) dx$ конечен.

Именно так можно получить известные семейства полиномов Лежандра, Эрмита, Лагерра, Чебышева и т. д. В дальнейшем, однако, мы ограничимся случаем непрерывной весовой функции $\rho(x)$ на конечном замкнутом интервале $[a, b]$.

В этом случае обобщенные коэффициенты Фурье выглядят так:

$$c_k = \int_a^b p_k(x) f(x) \rho(x) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (5.1.10)$$

а частные суммы обобщенного ряда Фурье — так:

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k p_k(x); \quad (5.1.11)$$

тогда

$$\int_a^b |S_m(x) - f(x)|^2 \rho(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (5.1.12)$$

Наметим доказательство сходимости в среднем обобщенного ряда Фурье непрерывной функции. В нашем распоряжении сейчас R — компактная область изменения независимой переменной x или $\mathbf{x}$ (интервал или куб), весовая функция ρ , скалярное произведение вида

$$(f, g) = \int_R \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (5.1.13)$$

и соответствующая норма $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ функционального пространства, а также ортонормированная система $\{\varphi_k\}$. В полиномиальном случае $\varphi_k(x) = p_k(x)$; в случае ряда Фурье весовая функция $\rho(x) = (2\pi)^{-n}$, а $\varphi_k(x)$ соответствует одной из функций $e^{ik \cdot x}$ после надлежащей их нумерации. Сходимость в среднем означает сходимость по норме $\|f\|$; следовательно, нужно доказать, что ортонормированное семейство $\{\varphi_k\}$ полно в смысле § 1.6.

Прежде всего покажем, что произвольную непрерывную функцию $f(x)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать равномерно на области R конечной линейной комбинацией функций φ_k . Для этого используется *аппроксимационная теорема Вейерштрасса* (см. Курант и Гильберт, т. 1): если функция $F(\mathbf{X})$ непрерывна на компактном (т. е. замкнутом ограниченном) множестве S в N -мерном пространстве, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином $P(\mathbf{X})$, что

$$|F(\mathbf{X}) - P(\mathbf{X})| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{X} \in S.$$

Рассмотрим сначала задачу о разложении по ортогональным полиномам $\{\varphi_k(x)\}$; здесь S — интервал $[a, b]$ вещественной оси, $X = x$, а $F(X) = f(x)$. Полином $P(x)$ является линейной комбинацией $1, x, x^2, \dots, x^q$, где q — степень $P(x)$; каждое x^k можно записать как линейную комбинацию функций $\varphi_0(x), \dots, \varphi_k(x)$ и поэтому $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{j=0}^q a_j \varphi_j(x).$$

Рассмотрим теперь одномерные ряды Фурье; положим $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Равенство $F(X, Y) = f(x)$ определяет функцию F на единичной окружности $S = \{X, Y: X^2 + Y^2 = 1\}$; S — компактное множество в плоскости X, Y . Соответствующий полином $P(X, Y)$ является полиномом по $\cos x$ и $\sin x$, а значит, и по e^{ix} и e^{-ix} , т. е. является линейной комбинацией e^{ikx} :

$$P(X, Y) = \sum_{k=-q}^q a_k e^{ikx}.$$

Наконец, в случае n -мерных рядов Фурье единичную окружность нужно заменить n -мерным тором, а именно если записать

$$e^{ix_k} = X_{2k-1} + iX_{2k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

то равенство $f(x) = F(X)$, где X есть $2n$ -мерный вектор, определит функцию F на торе

$$S = \{X: X_1^2 + X_2^2 = 1, \dots, X_{2n-1}^2 + X_{2n}^2 = 1\},$$

который является компактным множеством в $\mathbb{R}^{2n}$. Соответствующий полином $P(X)$ или $P(X_1, \dots, X_{2n})$ представляет собой полином по $e^{\pm ix_1}$, $e^{\pm ix_2}$ и т. д.; следовательно, его можно записать в виде

$$\sum_{k \in L_q} a_k e^{i k \cdot x}$$

для некоторого целого q .

Итак, в каждом случае было показано, что если $f(x)$ непрерывна на области $R \subset \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$, то для некоторого q и некоторых коэффициентов a_j

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^q a_j \varphi_j(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \text{ из } R. \quad (5.1.14)$$

Поэтому

$$\int_R \left| f(x) - \sum_{j=0}^q a_j \varphi_j(x) \right|^2 \rho(x) d^n x \leq \varepsilon^2 M,$$

где

$$M = \int_R \rho(x) d^n x;$$

иначе говоря,

$$\|f - \sum a_j \varphi_j\| \leq \varepsilon \sqrt{M}, \quad (5.1.15)$$

где $\|\cdot\|$ означает норму, соответствующую скалярному произведению (5.1.13), относительно которого φ_j образуют ортонормированную систему.

Числа a_j не обязательно равны обобщенным коэффициентам Фурье

$$c_j = (\varphi_j, f), \quad (5.1.16)$$

однако можно показать, что наилучшее приближение в среднем функции f выражениями вида $\sum_{j=0}^q a_j \varphi_j$ для данного q получается при $a_j = c_j$ ($j=0, \dots, q$). Действительно, если мы минимизируем

$$\|f - \sum a_j \varphi_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum (\bar{a}_j c_j + a_j \bar{c}_j) + \sum |a_j|^2$$

относительно $\operatorname{Re} a_j$ и $\operatorname{Im} a_j$, то получим $\operatorname{Re} a_j = \operatorname{Re} c_j$ и $\operatorname{Im} a_j = \operatorname{Im} c_j$ ($j=0, \dots, q$). Замена a_j на c_j улучшает аппроксимацию в среднем (5.1.15) (возможно, ценой ухудшения равномерной аппроксимации (5.1.14)). Следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ достаточно большого q

$$\left\| f - \sum_{j=0}^q c_j \varphi_j \right\| \leq \varepsilon \sqrt{M};$$

значит, обобщенный ряд Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x)$ сходится в среднем, т. е. по норме L^2 , к $f(x)$.

Замечания о поточечной сходимости. (1) Из проведенных выше рассуждений нельзя сделать вывод, что $f(x)$ — поточечный предел рядов вида $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(x)$, потому что каждый коэффициент a_j в (5.1.14) в общем случае зависит от q и не обязательно имеет предел при $q \rightarrow \infty$.

(2) Известно, что если последовательность функций $S_m(x)$ сходится в L^2 к $f(x)$, то найдется такая подпоследовательность этих функций, которая сходится к $f(x)$ почти всюду, т. е. для почти всех x .

(3) Для частного случая одномерных рядов Фурье Карлесон [1966] доказал, что частные суммы $S_m(x)$ из (5.1.2) сходятся к $f(x)$ почти всюду, т. е. в этом случае нет необходимости выбирать подпоследовательность.

(4) Для многомерных рядов Фурье Феферман [1971] доказал, что $S_m(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду при условии, что ряды суммируются в том порядке, который указан в (5.1.6), однако сходимости почти всюду может и не быть, если суммировать, например, так:

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} (\dots) \right) c_k e^{i k \cdot x}.$$

Фактически Феферман дал пример такой функции $f(x, y)$ из $L^2((-\pi, \pi)^2)$, для которой ряды Фурье, суммируемые таким образом, не сходятся ни в одной точке x, y .

Следует заметить, что n -мерный тор не случайно выбран в качестве множества S для многомерных рядов Фурье, поскольку он имеет топологически естественную структуру для множества значений мультипериодической непрерывной функции. В случае $n=2$ не следует, например, пытаться представить $f(x, y)$ на сфере при помощи подстановки $x=2\theta-\pi$, $y=\varphi$, где θ и φ — углы сферической системы координат, так как тогда все значения $f(\pm\pi, y)$ «слипались» бы на северном и южном полюсах.

В общем случае для доказательства полноты разных видов ортонормированных систем функций необходимы разные методы. Системы, получающиеся в задачах Штурма — Лиувилля, рассматриваются в гл. 10.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что последовательность функций

$$g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

сходится поточечно к функции $f(x)=0$ для всех $x \geq 0$, однако не сходится в $L^2(0, 1)$.

2. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — числовая последовательность

$$1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, 1/16, \dots$$

Покажите, что последовательность функций

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - (n/4) |x - \xi_n| & \text{при } |x - \xi_n| < 4/n, \\ 0 & \text{при } |x - \xi_n| \geq 4/n \end{cases}$$

сходится к функции $f(x)=0$ в $L^2(0, 1)$, но не сходится поточечно ни при каком x из $(0, 1)$. *Указание.* Рассмотрите графики функций $g_n(x)$.

5.2. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР АППРОКСИМАЦИИ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим идеализированный электрический контур, изображенный на рис. 5.1. На клеммах A и B — периодическое напряжение $f(t)$ с неизвестной формой волны; при должном выборе единицы измерения времени период можно взять равным 2π . Необходимо как можно точнее аппроксимировать $f(t)$ генерируемой волной вида

$$g(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k(t + \alpha_k), \quad (5.2.1)$$

имеющей ту же самую частоту, при помощи настройки регуляторов генератора гармоник (для того, чтобы подобрать значения a_k и α_k) до тех пор, пока не будут минимизированы показания

вольтметра. (На практике к источнику необходимо подсоединять осциллятор для обеспечения синхронизации.) Поскольку идеальный вольтметр переменного тока показывает значения корня квадратного из усредненного напряжения, приложенного к нему

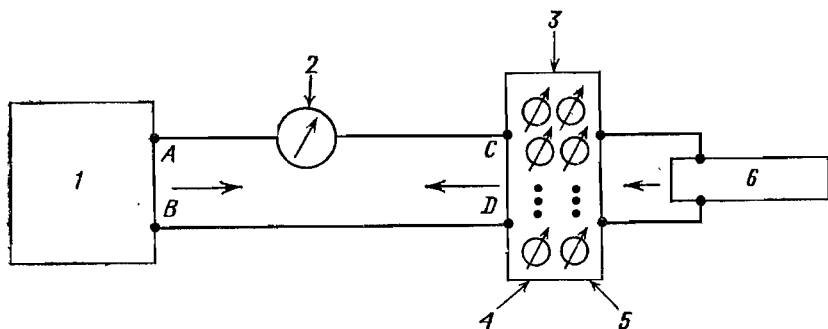


Рис. 5.1. Принципиальная схема среднеквадратичного фурье-анализа. 1 — источник неизвестного периодического сигнала; 2 — вольтметр; 3 — генератор гармоник; 4 — регуляторы амплитуды; 5 — регуляторы фазы; 6 — осциллятор.

(равного здесь $f(t) - g(t)$), указанная настройка такова, что минимизируется интеграл

$$\int |f(t) - g(t)|^2 dt,$$

в котором интегрирование осуществляется на интервале, равном периоду, т. е. $f(t)$ аппроксимируется в среднем функцией (5.2.1).

Аппроксимация и сходимость в среднем уместны для многих физических приложений, потому что (как и в данном примере) энергия или мощность являются квадратичными выражениями от некоторых функций, выражающих основные переменные.

5.3. ПРОСТРАНСТВА $L^2(\mathbb{R}^n)$ И $L^2(\Omega)$

Определим на пространстве всех пробных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int \dots \int \overline{\varphi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n \quad (5.3.1)$$

и норму $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$, называемую L^2 -нормой. Для дальнейшего заметим, что интеграл (5.3.1) сходится, если φ и ψ — произвольные квадратично интегрируемые непрерывные функции (потому что в этом случае выполняется неравенство Шварца), и что так определенное выражение (φ, ψ) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

С этим скалярным произведением и с этой нормой C_0^∞ является так называемым *пространством со скалярным произведением* или *предгильбертовым пространством*, и мы хотим добавить к нему достаточное количество функций и других распределений с тем, чтобы сделать его полным, а значит, гильбертовым пространством.

Мы увидим (см. ниже теорему 2), что в результате получится пространство, содержащее, в частности, все квадратично интегрируемые непрерывные функции и потому подходящее для квантовой механики в качестве гильбертова пространства волновых функций.

Замечание о пополнении метрических пространств. Пространство C_0^∞ с определенной на нем L^2 -нормой $\|\cdot\|$ служит примером линейного нормированного пространства, а любое линейное нормированное пространство представляет собой пример метрического пространства. В метрическом пространстве имеется определенная на нем функция расстояния или *метрика* $d(x, y)$, такая, что для всех точек x, y, z (1) $d(x, y) = d(y, x)$; (2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; (3) $d(x, y) > 0$ для $x \neq y$; (4) $d(x, x) = 0$. В нормированном линейном пространстве $d(x, y) = \|x - y\|$.

Последовательность $\{x_j\}$ точек метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $d(x_j, y_k) \rightarrow 0$ при независимом стремлении j и k к ∞ ; она называется *сходящейся*, если найдется такая точка y (*предел последовательности*), что $d(x_j, y) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Пространство *полно*, если любая последовательность Коши сходится, т. е. имеет предел. Одна очень общая теорема утверждает, что любое метрическое пространство S можно сделать полным путем добавления к нему некоторых так называемых идеальных элементов или точек (в точности так, как иррациональные числа добавляются к рациональным для получения системы вещественных чисел). Каждая идеальная точка определяется как класс эквивалентности последовательностей Коши точек из S , в результате же получается полное пространство S_1 , в которое S вложено плотно. Более того, такое пополнение единственно в том смысле, что если S_2 — другое полное пространство, в которое плотно вложено S , то S_1 и S_2 изоморфны.

Аналогичным образом могут быть пополнены некоторые более общие топологические пространства, так называемые равномерные пространства (см. Трон [1966]).

В рассматриваемой нами ситуации нет необходимости для пополнения C_0^∞ строить идеальные элементы, потому что нужные объекты уже имеются — это распределения. Однако некоторые приемы, связанные с обычной теоремой о пополнении, все же используются в доказательстве теоремы 1 этого параграфа.

[В этой главе все функции комплекснозначны. Соответствующая модификация теории на случай вещественнозначных функ-

ций, при помощи которой получаются пространства L^2 вещественных распределений, очевидна.]

Как и в любом нормированном пространстве (не обязательно полном), из неравенства треугольника, записанного в виде $\|\varphi_k\| - \|\varphi_l\| \leq \|\varphi_k - \varphi_l\|$, следует, что если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши, то $\{\|\varphi_k\|\}$ — числовая последовательность Коши, а значит, имеет предел, несмотря на то, что $\{\varphi_k\}$ может и не иметь предела в данном пространстве по L^2 -норме, если пространство не является полным. Кроме того, если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши в C_0^∞ , то $\lim_{k \rightarrow \infty} (\psi, \varphi_k)$ существует для всех пробных функций ψ (независимо от того, имеет ли последовательность $\{\varphi_k\}$ предел в C_0^∞ или нет), потому что при любой заданной ψ

$$|(\psi, \varphi_k) - (\psi, \varphi_l)| = |(\psi, \varphi_k - \varphi_l)| \leq \|\psi\| \|\varphi_k - \varphi_l\| \rightarrow 0,$$

когда $k, l \rightarrow \infty$; следовательно, $\{(\psi, \varphi_k)\}$ — числовая последовательность Коши. Очевидно, что ее предел полулинеен по ψ и поэтому определяет распределение f уравнением

$$\langle f, \psi \rangle = \lim (\bar{\psi}, \varphi_k) \quad \text{для всех } \psi \text{ из } C_0^\infty. \quad (5.3.2)$$

Лемма. Две последовательности Коши $\{\varphi_k\}$ и $\{\tilde{\varphi}_k\}$ определяют одно и то же распределение тогда и только тогда, когда они эквивалентны. [Последовательности называются эквивалентными, если $\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.]

Доказательство. Для эквивалентных последовательностей

$$|(\psi, \varphi_k) - (\psi, \tilde{\varphi}_k)| \leq \|\psi\| \|\varphi_k - \tilde{\varphi}_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

и поэтому они определяют одно и то же распределение. Обратно, если $(\psi, \chi_k) \rightarrow 0$ для любого ψ и $\chi_k = \varphi_k - \tilde{\varphi}_k$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\chi_k\|^2 = \lim (\chi_k, \chi_k) = \lim (\chi_k - \psi, \chi_k) \leq \lim \|\chi_k - \psi\| \|\chi_k\|.$$

Последовательность $\{\|\chi_k\|\}$ — имеет предел, потому что $\{\chi_k\}$ — последовательность Коши, $\{\chi_k - \psi\}$ — также последовательность Коши, так что и $\{\|\chi_k - \psi\|\}$ имеет предел. Поэтому

$$(\lim \|\chi_k\|)^2 \leq (\lim \|\chi_k - \psi\|) (\lim \|\chi_k\|)$$

и, следовательно,

$$\lim \|\chi_k\| \leq \lim \|\chi_k - \psi\|.$$

Однако правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой, взяв $\psi = \chi_{k_0}$ с достаточно большим k_0 . Поэтому $\chi_k \rightarrow 0$ по норме, т. е. эти две последовательности эквивалентны.

Определение. Пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ есть множество всех распределений, определяемых последовательностями Коши из C_0^∞ , со скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k, \psi_k), \quad (5.3.3)$$

где $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ — последовательности Коши, определяющие рас-
пределения f и g соответственно.

Из непрерывности скалярного произведения (неравенства Шварца) с очевидностью следует, что этот предел всегда существует и не меняется при замене последовательностей Коши эквивалентными им последовательностями. Как следствие (5.3.3) получается

$$\|f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|. \quad (5.3.4)$$

Очевидно, что так определенное скалярное произведение (f, g) линейно по g , эрмитово симметрично и положительно определено, т. е. $L^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство со скалярным произведением. Так как элементы этого пространства являются распределениями, они имеют интегралы, производные и те локальные свойства, которые описаны в гл. 2 и 3.

Ясно, что если $f \in L^2$ и φ — пробная функция, то $\langle f, \varphi \rangle = (\bar{f}, \varphi)$. Тогда из непрерывности скалярного произведения следует, что если $f_j \rightarrow f$ по L^2 -норме, то $f_j \rightarrow f$ и в смысле сходимости распределений.

Интуитивно ясно, что элементы $L^2(\mathbb{R}^n)$ являются распределениями медленного роста, потому что их рост на бесконечности в некотором смысле ограничен квадратичной интегрируемостью. Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что для $f \in L^2$ определение распределения $\langle f, \varphi \rangle$ можно распространить на все $\varphi \in \mathcal{S}$, просто полагая его равным $(\bar{f}, \varphi)$. Следовательно, мы должны показать, что если φ_k сходится к ψ в смысле сходимости в $\mathcal{S}$, то $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \psi)$, но это очевидно, потому что

$$\sup |x|^l |\varphi_k(x) - \psi(x)| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$ для любого l , а значит,

$$\int |\varphi_k(x) - \psi(x)|^2 d^n x \rightarrow 0,$$

т. е. φ_k сходится к ψ в L^2 ; следовательно, $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \psi)$, поскольку скалярное произведение непрерывно в L^2 . Таким образом, f является распределением медленного роста.

Замечания. Если f и g оба оказались элементами исходного пространства C_0^∞ , то новое скалярное произведение, определенное равенством (5.3.3), совпадает со старым скалярным произведением в C_0^∞ , потому что в этом случае можно взять $\{\varphi_k\} = \{f, f, f, \dots\}$ и $\{\psi_k\} = \{g, g, g, \dots\}$, так что величина (φ_k, ψ_k) равна старому скалярному произведению для всех k . Аналогичное замечание справедливо и по отношению к новой норме, определенной формулой (5.3.4).

Теорема 1. Пространство $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ полно (т.е. гильбертово).

Замечание. Если f определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$, то $f - \varphi_m$ для любого m определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k - \varphi_m: k = 1, 2, \dots\}$. Тогда в силу (5.3.4)

$$\|f - \varphi_m\| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

т.е. последовательность Коши $\{\varphi_k\}$ имеет предел в L^2 (равный f). Теперь нужно показать, что *любая* последовательность Коши $\{f_k\}$ из L^2 , не обязательно из C_0^∞ , также имеет предел в L^2 .

Доказательство. Предположим, что $\{f_k\}$ — последовательность Коши элементов пространства L^2 . Найдем (фактически построим) такой элемент $g \in L^2$, что $\|f_k - g\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Возьмем сначала

$$\delta_j = \sup_{k > j} \|f_k - f_j\| \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (5.3.5)$$

и заметим, что $\delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Каждое f_j — распределение, определяемое последовательностью Коши $\{\varphi_l: l = 1, 2, \dots\}$ функций из C_0^∞ . Пусть $N(j)$ для каждого j таково, что

$$\|\varphi_l - \varphi_m\| < \delta_j \text{ если } l, m \geq N(j), \quad (5.3.6)$$

и, кроме того, $N(j+1) \geq N(j)$. Из (5.3.6) следует, что в пределе при $m \rightarrow \infty$

$$\|\varphi_l - f_j\| \leq \delta_j \text{ если } l \geq N(j), \quad (5.3.7)$$

потому что $\varphi_l \rightarrow f_j$ по приведенному выше замечанию. Теперь покажем, что если положить $\psi_j = \varphi_{N(j)}$, то $\{\psi_j\}$ — последовательность Коши (элементов C_0^∞), определяющая искомым элемент $g \in L^2$. В самом деле, для $k > j$

$$\|\psi_k - \psi_j\| \leq \|\varphi_{N(k)} - \varphi_{N(j)}\| + \|\varphi_{N(j)} - f_j\|; \quad (5.3.8)$$

второе слагаемое справа меньше δ_j в силу (5.3.6), так как $N(k) \geq N(j)$, а первое слагаемое не превышает величины

$$\|\varphi_{N(k)} - f_k\| + \|\varphi_{N(k)} - f_j\| + \|f_j - f_k\|,$$

меньшей $\delta_k + \delta_j + \delta_j$ по дважды примененному условию (5.3.7) и по (5.3.5). Поэтому

$$\|\psi_k - \psi_j\| \leq 3\delta_j + \delta_k \rightarrow 0 \text{ при } j, k \rightarrow \infty,$$

так что $\{\psi_k\}$ — последовательность Коши в C_0^∞ . Если g — элемент пространства L^2 , определяемый этой последовательностью, то

$$\|f_k - g\| \leq \|f_k - \varphi_{N(k)}\| + \|\psi_k - g\|$$

(потому что $\varphi_{N(k)} = \psi_k$); при $k \rightarrow \infty$ первый член в правой части этого неравенства стремится к нулю по (5.3.7), а второй член стремится к нулю согласно замечанию. Поэтому $f_k \rightarrow g$, что и требовалось доказать; следовательно, $L^2(\mathbb{R}^n)$ — полное пространство.

Теорема 2. Любая квадратично интегрируемая непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ непрерывна и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (5.3.9)$$

Этот интеграл мы, как обычно, обозначим через $\|f\|^2$. Согласно замечанию (после теоремы 1) и определению L^2 , распределение f принадлежит пространству L^2 , если оно определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$ функций из C_0^∞ , а в этом случае $\varphi_k \rightarrow f$ по L^2 -норме. Значит, чтобы показать, что $f(x) \in L^2$, нужно найти такую последовательность $\{\varphi_k\}$, что $\|f - \varphi_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (см. замечание 2 ниже), т. е. нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in C_0^\infty$, что

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon. \quad (5.3.10)$$

Пусть функция $f_R(x) = f(x)$ при $|x| \leq R$ и $f_R(x) = 0$ при $|x| > R$. Если R достаточно велико, то $\|f - f_R\| < 1/2\varepsilon$, потому что $\|f - f_R\|^2$ означает вклад области $|x| > R$ в сходящийся интеграл (5.3.9). Обозначим через $f_{R,\delta}$ результат сглаживания функции f_R оператором сглаживания J_δ ширины δ (см. § 2.6). Так как $f(x)$ непрерывна на компактном множестве $|x| \leq R$, величина

$$M_\delta = \sup \{ |f(x) - f(x+y)| : |x| \leq R - \delta, |y| \leq \delta \}$$

стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому

$$|f_{R,\delta}(x) - f_R(x)| \leq M_\delta \quad \text{при } |x| \leq R - \delta,$$

$$f_{R,\delta}(x) = f_R(x) = 0 \quad \text{при } |x| > R + \delta.$$

Поскольку, кроме того, $f_{R,\delta}$ и f_R обе ограничены на тонкой сферической оболочке $R - \delta < |x| < R + \delta$, ясно, что для достаточно малого δ получим $\|f_{R,\delta} - f_R\| < 1/2\varepsilon$. Если взять

$$\varphi(x) = f_{R,\delta}(x),$$

то (5.3.10) будет выполнено, т. е. $f \in L^2$, как и утверждалось.

Замечание 1. Скалярное произведение квадратично интегрируемых функций f и g как элементов пространства L^2 было определено при помощи аппроксимирующих пробных функций формулой (5.3.3), однако ясно, что оно может быть задано также и при помощи знакомого выражения

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) d^n x,$$

потому что из (5.3.1) и неравенства Шварца (примененного к функциям) следует, что (φ_k, ψ_k) сходится к этому интегралу при $k \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Если $\{\varphi_k\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся в L^2 к непрерывной функции f , то она является последовательностью Коши, потому что для интегралов от непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$ выполняются неравенство Шварца и неравенство треугольника, и, следовательно, $\|\varphi_k - \varphi_l\| \leq \|\varphi_k - f\| + \|\varphi_l - f\|$.

Если обозначить через $C^{(2)}$ пространство непрерывных квадратично интегрируемых функций, то доказанное можно выразить так:

$$C_0^\infty \subset C^{(2)} \subset L^2,$$

причем оба вложения плотны, потому что любое f из L^2 можно сколь угодно точно аппроксимировать (в L^2) пробными функциями.

Замечание 3. Нетрудно убедиться в том, что если бы элементы последовательности Коши $\{\varphi_k\}$, определяющей распределение f из L^2 , принадлежали только $\mathcal{S}$, а не обязательно C_0^∞ , то в результате получилось бы то же самое пространство L^2 ; вообще в качестве φ_k можно было бы взять любые квадратично интегрируемые непрерывные функции. Следовательно, L^2 можно рассматривать как пополнение относительно L^2 -нормы любого из пространств C_0^∞ , $\mathcal{S}$, $C^{(2)}$, т. е. как наименьшее полное пространство, содержащее C_0^∞ , $\mathcal{S}$ или $C^{(2)}$.

Замечание 4. Если квадратично интегрируемые непрерывные функции $f_k(x)$ сходятся в L^2 при $k \rightarrow \infty$, а также сходятся равномерно, то оба предела совпадают, т. е. предел в L^2 — это такое распределение, которое отождествляется с непрерывной функцией $\lim f_k(x)$.

[В L^2 есть и другие функции, такие, например, как $|x|^{-1/2}e^{-|x|}$ в одномерном случае. Если, как и во многих книгах, используется интеграл Лебега, то L^2 содержит все измеримые и квадратично интегрируемые по Лебегу функции, однако взаимно однозначное соответствие между функциями и элементами L^2 теряется, и каждый элемент из L^2 является бесконечным классом эквивалентности таких функций, любые две из которых (из одного класса) различаются только на произвольном множестве меры нуль. Тем не менее элементы пространства L^2 обычно называют просто функциями, хотя, с нашей точки зрения, они являются в действительности распределениями.]

Во многих приложениях появляются функции или распределения, квадратично интегрируемые на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $C_0^\infty(\Omega)$ — множество функций $\varphi(x)$ класса C^∞ с лежащим в Ω носителем. Тогда *распределение на Ω* определяется как линейный непрерывный в смысле § 2.4 функционал на $C_0^\infty(\Omega)$. Теория пространства $L^2(\Omega)$ совпадает с теорией пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, только $\mathbb{R}^n$ всюду заменяется на Ω . В частности, скалярное произведение (φ, ψ) двух функций из $C_0^\infty(\Omega)$ задается, как и ранее, равенством (5.3.1), где интеграл формально берется по всему $\mathbb{R}^n$, однако при этом подынтегральная функция равна нулю вне Ω .

Элемент u из $L^2(\Omega)$ можно также рассматривать как элемент u_0 из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Именно, если u определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, то u_0 задается равенством

$$(u_0, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k \psi d^n x \quad (5.3.11)$$

для всех ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а не просто из $C_0^\infty(\Omega)$. Норма u в $L^2(\Omega)$ равна норме u_0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Если $\text{supp } \psi$ целиком лежит вне Ω , то (5.3.11) дает нуль, следовательно, $\text{supp } u_0 \subset \bar{\Omega}$. Обратно, можно показать (по крайней мере для областей Ω с разумно выбранными границами), что если элемент u_0 принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$, а его носитель лежит в $\bar{\Omega}$, то его можно рассматривать как элемент u из $L^2(\Omega)$, т. е. найдется такая последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, для которой (5.3.11) выполняется для всех ψ .

Вообще любое распределение u_0 на $\mathbb{R}^n$ имеет единственное ограничение u на Ω , получаемое путем рассмотрения пробных функций только из $C_0^\infty(\Omega)$. Если, кроме того, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то $u \in L^2(\Omega)$ и $\|u\| \leq \|u_0\|$. Фактически выше было показано, что отображение ограничения, обычно многозначное, оказывается взаимно однозначным для элементов L^2 и является изоморфизмом подпространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящего из распределений с носителями в $\bar{\Omega}$.

В связи с дифференцированием между u и u_0 необходимо проводить различие. Если $u \in L^2(\Omega)$ и D обозначает $\partial/\partial x_k$, то Du — распределение на Ω , определяемое так:

$$\langle Du, \varphi \rangle = - \langle u, D\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогда может получиться так, что $Du \in L^2(\Omega)$, тогда как $Du_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n)$, потому что вклады, подобные δ -функциям, сосредоточены на границе Ω , например, когда u_0 равно ненулевой константе на Ω и равно нулю вне Ω . Если Du расширить, как описано выше, до распределения $(Du)_0$ из $L^2(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $\bar{\Omega}$, то Du_0 и $(Du)_0$ совпадают на Ω и на $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$ (где они оба равны нулю), однако в общем случае не совпадают на любом открытом множестве, пересекающемся с границей $\partial\Omega$. [В связи с этим следует заметить, что если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши, представляющая u , то последовательность $\{D\varphi_k\}$ представляет Du в смысле определения (5.3.11), однако в общем случае не является последовательностью Коши.]

Простейшим пространством такого рода является $L^2(a, b)$, для которого $n=1$, а Ω — открытый интервал (a, b) на $\mathbb{R}$.

Любая непрерывная на Ω функция $f(x)$, такая, что

$$\int \dots \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n < \infty, \quad (5.3.12)$$

определяет распределение u в $L^2(\Omega)$ посредством обычной формулы

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx_1 \dots dx_n \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В большинстве случаев (например, если Ω — интервал, куб или шар) очевидно, что понимается под интегралом (Римана) (5.3.12) по Ω ; с другой стороны, его можно было бы взять как

$$\sup \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n$$

по всем непрерывным функциям $\psi(x)$ с носителем в Ω и со значениями в $[0, 1]$. Если область Ω ограничена, то (5.3.12) выполняется для *любой* непрерывных на Ω функций $f(x)$.

Для любой разумно выбранной m -мерной поверхности S в $\mathbb{R}^n$ (например, для сферы, цилиндра или тора) можно очевидным образом определить пространство $L^2(S)$. Пусть, например, S — двумерная сфера, т. е. поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$. Говорят, что функция f на S является функцией класса $C^\infty(S)$, если функция f бесконечно дифференцируема в окрестности любой точки на S , где $z \neq 0$ (т. е. любой точки не на экваторе) как функция от x и y , бесконечно дифференцируема как функция от x и z вблизи любой точки, где $y \neq 0$, и бесконечно дифференцируема как функция от y и z вблизи любой точки, где $x \neq 0$. Иначе говоря, f должна быть бесконечно дифференцируемой как функция сферических координат ϑ и φ при $0 < \vartheta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$, причем в двух системах сферических координат, расположенных так, что особые точки каждой системы покрываются неособыми частями другой. *Распределение* на S определяется как линейный функционал на $C^\infty(S)$; скалярное произведение двух функций из $C^\infty(S)$ есть величина

$$(\chi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \overline{\chi(\vartheta, \varphi)} \psi(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi;$$

далее проводятся те же построения, что и для описанных выше пространств L^2 .

Пространства L^2 такого рода появляются в теории представлений групп; там S — это групповое многообразие или так называемое однородное пространство (см. том 2). Будет показано, что $L^2(M)$, где M — любое определенное в этой теории многообразие, может быть определено аналогично.

Если Ω — область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, то граничные значения распределения f из $L^2(\Omega)$ можно иногда рассматривать как распределение из $L^2(\partial\Omega)$.

Очевидным образом определяются и пространство L^2 периодических распределений. Если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ такова, что $f(x + p) = f(x)$ для всех x , где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — фиксированный вектор, не равный нулю, то она называется *периодической*, а p — ее *периодом*. Рассмотрим функции и распределения

с периодами вида $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 2\pi, 0, \dots, 0)$, т. е. предположим, что для $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 2\pi, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Ясно, что для любого вектора $\mathbf{p}$, все компоненты которого представляют собой целочисленные кратные 2π , $f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = f(\mathbf{x})$.

Пусть $C_{\text{пер}}^\infty$ — пространство бесконечно дифференцируемых периодических в смысле (5.3.13) функций, наделенное скалярным произведением вида

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n.$$

Соответствующее полное пространство, которое будет обозначаться как $L^2(\mathbb{R}^n, 2\pi)$, определяется следующим образом. Если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши из $C_{\text{пер}}^\infty$, то распределение $\langle f, \cdot \rangle$ определяется равенством

$$\langle f, \psi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n \quad \text{для любых } \psi \in C_0^\infty.$$

Множество всех таких распределений и есть пространство $L^2(\mathbb{R}^n, 2\pi)$, скалярное произведение в котором определяется формулой (5.3.3).

5.4. УМНОЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2

Для элементов f и g пространства L^2 , являющихся пределами последовательностей Коши $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ из C_0^∞ , произведение fg определяется как распределение (не обязательно принадлежащее L^2) следующим образом: если $\chi(\mathbf{x})$ — произвольная пробная функция, то $\{\chi\varphi_k\}$ — также последовательность Коши, поэтому $(\chi\bar{\varphi}_k, \psi_k)$ имеет предел при $k \rightarrow \infty$ и можно определить функционал $\langle fg, \cdot \rangle$ равенством

$$\langle fg, \chi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (\chi\bar{\varphi}_k, \psi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k \psi_k \chi d^n x, \quad (5.4.1)$$

что определяет и произведение fg . В следующем параграфе будет показано, что интеграл от $\bar{f}g$ по всему пространству равен скалярному произведению (f, g) . Ясно, что если f и g — обычные функции, то fg — их обычное произведение.

С другой стороны, если $h = h(\mathbf{x})$ — ограниченная непрерывная функция и $\varphi_k \rightarrow f$, как было указано выше, то последовательность $\{h(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})\}$ оказывается последовательностью Коши в L^2 ,

предел которой определяется как распределение hf , принадлежащее L^2 .

Для функции $h(x)$ из C^m (m — неотрицательное целое число) и распределения f из $L^2(\mathbb{R})$ распределение $hf^{(m)}$, не обязательно принадлежащее L^2 , определяется равенством

$$\langle hf^{(m)}, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^m ((\bar{\psi}h)^{(m)}, f) \quad \forall \psi \in C_0^\infty; \quad (5.4.2)$$

производная $(\bar{\psi}h)^{(m)}$ представляет собой сумму, каждое слагаемое которой, очевидно, принадлежит L^2 , поэтому скалярное произведение в правой части (5.4.2) является линейным функционалом, определенным для всех пробных функций ψ , т. е. распределением. Такое произведение полезно при рассмотрении области определения дифференциального оператора вида

$$Af = \sum_m h_m f^{(m)},$$

где коэффициенты $h_m(x)$ дифференцируемы лишь конечное число раз, а именно столько, сколько это необходимо. В самом деле, эта область определения включает только те распределения f из L^2 , для которых Af как распределение также принадлежит L^2 .

Пусть, наконец, $h(x)$ непрерывна, но не обязательно ограничена. Если $\psi(x)$ — пробная функция, то $\psi(x)h(x) \in L^2$; следовательно, $(\bar{\psi}h, f)$ существует для всех $f \in L^2$, а распределение hf определяется как функционал

$$\langle hf, \psi \rangle = (\bar{\psi}h, f) \quad \text{для всех } \psi \text{ из } C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Резюме. 1. Произведение двух распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой распределение, в общем случае не принадлежащее L^2 (в действительности оно принадлежит L^1 — см. § 5.7). 2. Произведение распределения из $L^2(\mathbb{R}^n)$ на произвольную непрерывную функцию h является распределением; оно принадлежит L^2 , если h ограничена. 3. В случае одной переменной произведение производной m -го порядка от любого распределения из $L^2(\mathbb{R})$ и любой функции из C^m есть распределение. [Первые два утверждения в классических терминах выглядят так:

1. Произведение двух функций из L^2 (т. е. двух измеримых и квадратично интегрируемых функций) является измеримой функцией, абсолютное значение которой интегрируемо.

2. Произведение функции из L^2 на ограниченную непрерывную функцию принадлежит L^2 .

Изменение сомножителей на множествах меры нуль меняет произведение только на множестве меры нуль, следовательно, это произведение принадлежит однозначно определенному классу эквивалентности (элементу пространств L^1 или L^2). Очевидно, что третье утверждение не имеет аналога в классическом анализе, потому что оно затрагивает производную распределения.]

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что любое распределение f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать по норме пространства L^2 произведениями вида ψf , $\psi \in C_0^\infty$, т. е. распределениями с ограниченным носителем.

5.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2 .

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Сначала рассмотрим случай одной независимой переменной. Здесь будет доказано, что для любых f и g из L^2 неопределенные интегралы $\int f dx$ и $\int fg dx$ являются непрерывными функциями. Далее будут следовать неравенство Шварца и обычная формула интегрирования по частям.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящаяся (по L^2 -норме) к элементу $f \in L^2(\mathbb{R})$. Поскольку неравенство Шварца выполняется для функций на любом интервале, мы имеем

$$\left| \int_0^x [\varphi_k(y) - \varphi_l(y)] \cdot 1 dy \right|^2 \leq \int_0^x |\varphi_k(y) - \varphi_l(y)|^2 dy \cdot \int_0^x 1 dy \leq \|\varphi_k - \varphi_l\|^2 |x| \quad (5.5.1)$$

(заметим, что при $x < 0$ в обоих сомножителях в средней части следует изменить знак), а отсюда следует, что последовательность

$\int_0^x \varphi_k(y) dy$ сходится равномерно на любом конечном интервале к непрерывной функции $F(x)$. Неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ от распределения был определен в § 2.7 как распределение, производная которого равна f . Итак,

$$\begin{aligned} -\langle f, \psi \rangle &= -\lim \langle \varphi_k, \psi \rangle = \lim \left\langle \int \varphi_k(x) dx, \psi' \right\rangle = \\ &= \lim \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_k(y) dy \psi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \psi'(x) dx = \langle F, \psi' \rangle. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Здесь предел можно переносить под первый знак интеграла потому, что внутренний интеграл сходится равномерно к $F(x)$ на носителе функции ψ . Отсюда в соответствии с § 2.7

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const.} \quad (5.5.3)$$

Тем самым мы доказали первую часть следующего утверждения:

Теорема. Для распределения f из $L^2(\mathbb{R})$ неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ является непрерывной функцией. Если последователь-

ность $\{f_n\} \subset L^2$ сходится в L^2 к распределению $f \in L^2$, то

$$\int_a^x f_n dx \rightarrow \int_a^x f dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

равномерно (в смысле поточечной сходимости) на любом конечном интервале x .

Доказательство второй части предоставляется читателю.

При большем числе измерений для непрерывности распределения (как функции) необходимо, чтобы пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$ принадлежали также некоторые частные производные более высокого порядка; см. § 5.13.

Аналогично, если f и g являются пределами последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, то

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^x [\varphi_k(y) \psi_k(y) - \varphi_l(y) \psi_l(y)] dy \right| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^x [\varphi_k \psi_k - \varphi_k \psi_l + \varphi_k \psi_l - \varphi_l \psi_l] dy \right| \leq \\ & \leq \left\{ \int_{-\infty}^x |\varphi_k|^2 dy \int_{-\infty}^x |\psi_k - \psi_l|^2 dy \right\}^{1/2} + \\ & + \left\{ \int_{-\infty}^x |\varphi_k - \varphi_l|^2 dy \int_{-\infty}^x |\psi_l|^2 dy \right\}^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k, l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Следовательно, последовательность $\int_{-\infty}^x \varphi_k(y) \psi_k(y) dy$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и, значит, сходится к непрерывной функции $G(x)$. Выкладки, подобные (5.5.2), показывают, что

$$\int f(x) g(x) dx = G(x) + \text{const}. \quad (5.5.5)$$

Вообще для распределений определяются только неопределенные интегралы или первообразные, однако для распределений из L^2 (а также из L^p) могут быть определены и некоторые определенные интегралы. Для распределений из $L^2(\mathbb{R})$ (поскольку неопределенные интегралы $\int_a^x f dx = F(x)$ и $\int_a^x fg dx = H(x)$ являются непрерывными функциями) мы можем положить

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a), \quad \int_a^b fg dx = H(b) - H(a).$$

Ниже обсуждаются некоторые многомерные случаи.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что неравенство Шварца

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx \quad (5.5.6)$$

выполняется для любых элементов f и g из L^2 (если $f = \lim \varphi_k$, то $\bar{f} = \lim \bar{\varphi}_k$ и $|f|^2 = \overline{f f}$), а также что

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx, \quad (5.5.7)$$

2. Докажите, что если f , g и их первые производные принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b (f'g + fg') dx = f(x) g(x) \Big|_a^b. \quad (5.5.8)$$

[Прежде всего заметьте, что все члены здесь вполне определены, в частности определена правая часть равенства, потому что $f', g' \in L^2$ и, значит, f и g — обычные непрерывные функции.]

Из того что $\int_a^b \varphi_k \psi_k dx$ сходится к $\int_a^b fg dx$ и, значит, $\int_a^b |\varphi_k|^2 dx$ сходится к $\int_a^b |f|^2 dx$, следует, что любое распределение $f(x)$ из

$L^2(\mathbb{R})$ принадлежит также и $L^2(a, b)$ для любого интервала (a, b) . Иначе говоря, ограничение $f(x)$ на интервал (a, b) , а именно линейный функционал (ψ, f) , определенный для всех пробных функций ψ с носителем в (a, b) , представляет собой распределение из $L^2(a, b)$.

Заметим, что если f и g принадлежат $L^2(a, b)$, где (a, b) — конечный интервал, то функции $\int f dx$ и $\int fg dx$ непрерывны на замкнутом интервале $[a, b]$.

Для квантовой механики, где элементы f и g пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ являются волновыми функциями, а $\mathbb{R}^n$ — пространство конфигураций (n равно утроенному числу частиц), представляют интерес интегралы вида $\int_{\Omega} |f(x)|^2 d^n x$ или $\int_{\Omega} g(x) \times f(x) d^n x$, где Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Первый интеграл является вероятностью того, что точка x , представляющая конфигурацию системы, лежит в Ω (предполагается, что волновая функция нормирована так, что этот интеграл равен единице, когда Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$). Если f и g — пределы последовательностей $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то выкладки (5.5.4) все еще справедливы с заменой интегрирования на интервале

$(-\infty, x)$ интегрированием по области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} \psi_k(y) \varphi_k(y) dy_1 \dots dy_n \quad (5.5.9)$$

имеет предел при $k \rightarrow \infty$ для любой области Ω ; этот предел обозначается как

$$\int_{\Omega} g(y) f(y) dy_1 \dots dy_n. \quad (5.5.10)$$

Если Ω — прямоугольная ячейка, задаваемая неравенствами $y_i < x_i < x_i$ ($i = 1, \dots, n$), то сходимость (5.5.9) к (5.5.10) равномерна по x из любой ограниченной области квадранта $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$); следовательно, пределом служит непрерывная функция, скажем $G(x)$. Для распределений дифференцирование и интегрирование всегда являются взаимно обратными операциями, поэтому

$$g(x) f(x) = \frac{\partial^n G(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \quad (5.5.11)$$

а это — обобщение одномерного результата (5.5.5), который можно переписать как $g(x) f(x) = dG(x)/dx$. Распространение формулы (5.5.11), полученной для положительного квадранта, на другие квадранты в $\mathbb{R}^n$ получается путем очевидного переопределения прямоугольной ячейки и соответствующих изменений знака.

Если $g(x) = \overline{f(x)}$, то легко видеть, что $G(x)$ не убывает в смысле теории вероятностей (см. § 13.3); следовательно,

$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n$ можно интерпретировать как вероятность.

С другой стороны, интеграл от $|f(x)|^2$ обладает очевидными свойствами

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} \quad \text{для непересекающихся } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2, \quad (5.5.12)$$

$$\int_{\Omega_1} \leq \int_{\Omega_2} \quad \text{для } \Omega_1 \subset \Omega_2, \quad (5.5.13)$$

необходимыми для такой вероятностной интерпретации.

Если распределения f и g являются непрерывными функциями, а область Ω ограничена, то выражение (5.5.10) оказывается обычным интегралом Римана; если Ω не ограничена, то это выражение представляет собой несобственный интеграл Римана, который, однако, сходится для любых f и g из L^2 . В любом

случае обобщение результата, полученного в упражнении 1, дает для распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx_1 \dots dx_n, \quad (5.5.14)$$

а для распределений из $L^2(\Omega)$ —

$$(f, g) = \int_{\Omega} \overline{f(x)} g(x) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.5.15)$$

Следующее утверждение является простым следствием неотрицательности интеграла $\int_{\Omega} |f|^2 d^n x$:

Лемма. Если $f \in L^2$, а h_1 и h_2 — такие непрерывные ограниченные функции, что $|h_1(x)| \leq |h_2(x)|$ для всех x , то

$$\|h_1 f\| \leq \|h_2 f\|,$$

где норма берется в $L^2(\Omega)$ или в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

5.6. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. I

Иногда говорят, что квадратично интегрируемая функция $f(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$. То, что это неверно, показывают примеры функций $f(x) = \exp\{-x^4 \sin^2 x\}$ и $f(x) = x^2 \exp\{-x^8 \sin^2 x\}$, во втором из которых $f(x)$ даже не ограничена. Однако если f и ее производная f' принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ (в этом случае f оказывается непрерывной функцией), то $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Доказательство. Согласно (5.5.6), для распределений из L^2 выполняется неравенство Шварца; следовательно,

$$\left| \int_a^b f(x) f'(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Если a и b стремятся независимо к $+\infty$ (обратите внимание на знак «+»), то величина в правой части этого неравенства стремится к нулю, потому что соответствующие интегралы по всему $\mathbb{R}$ сходятся. Согласно (5.5.8), величина в левой части неравенства равна

$$\frac{1}{2} |f(b)^2 - f(a)^2|,$$

поэтому $f(x)^2$ при $x \rightarrow +\infty$ стремится к некоторой постоянной, однако эта постоянная должна быть нулем, ибо в противном случае f не принадлежала бы $L^2(\mathbb{R})$; с помощью аналогичных рассуждений мы получаем, что предел $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ также равен нулю.

Обращение в нуль на бесконечности для функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ обсуждается в § 5.13; там требуется, чтобы L^2 принадлежали также и производные более высокого порядка.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Найдите такую функцию $f(x, y, z)$, что $f, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$ и тем не менее $f \not\rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

5.7. ПРОСТРАНСТВА ТИПА L^1, L^p, L^∞

Хотя для физики, несомненно, наиболее важен случай $p=2$, представляется целесообразным кратко изложить и свойства общих пространств L^p . Пусть p — любое вещественное число, $1 \leq p < \infty$. Линейное пространство, состоящее из элементов класса C_0^∞ и наделенное нормой

$$\|\varphi(\cdot)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (5.7.1)$$

оказывается неполным нормированным пространством, которое можно пополнить путем добавления определенных «слабых» распределений, в большей части литературы снова называемых просто «функциями». За исключением случая $p=2$, указанную норму нельзя получить из какого-либо скалярного произведения, потому что для нее не выполняется правило параллелограмма (1.3.5).

Основные результаты для пространств L^p будут представлены без доказательства. Большинство из них можно найти у Рисса и Секефальви-Надя [1953], где эти результаты выражаются в терминах теории Лебега. Эти и другие результаты были получены и при помощи методов теории распределений (Вернер [1969]).

Пусть p и q — такие вещественные числа, что $1 \leq p, q < \infty$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad (5.7.2)$$

тогда, взяв один элемент из L^p , а другой — из L^q , для них можно определить аналог скалярного произведения. *Неравенство Гёльдера*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q, \quad (5.7.3)$$

где φ и ψ принадлежат C_0^∞ , является обобщением неравенства Шварца; воспользовавшись им, можно получить неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p, \quad (5.7.4)$$

которое, будучи примененным к функциям, называется иногда *неравенством Минковского*.

Из неравенства Гёльдера непосредственно следует, что если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши функций из C_0^∞ относительно L^p -нормы, то

$$\text{существует } \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \psi(x) dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty; \quad (5.7.5)$$

этот предел порождает линейный функционал на C_0^∞ , т. е. распределение, обозначаемое далее через f ; таким образом, этот предел представляет собой $\langle f, \psi \rangle$. Согласно терминологии теории распределений, $\varphi_i \rightarrow f$. Как и в случае $p=2$, имеет место следующая лемма:

Лемма. Две последовательности Коши $\{\varphi_i\}$ и $\{\tilde{\varphi}_i\}$ из C_0^∞ (относительно L^p -нормы) определяют одно и то же распределение тогда и только тогда, когда они эквивалентны, т. е. когда $\|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_p \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Автор не знает простого доказательства этой леммы, подобного соответствующему доказательству в § 5.3 для случая $p=2$; изящное, но слишком длинное доказательство сообщил автору Норман Ренер, позднее же аналогичное доказательство появилось в обширной статье Вернера [1969], уже упоминавшейся выше.

В любом нормированном пространстве (не обязательно полном) $\{\|\varphi_i\|\}$ имеет предел при $i \rightarrow \infty$, если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши. Это следует из неравенства треугольника, записанного в виде

$$|\|\varphi_i\| - \|\varphi_j\|| \leq \|\varphi_i - \varphi_j\|, \quad (5.7.6)$$

поскольку оно показывает, что $\{\|\varphi_i\|\}$ — последовательность Коши вещественных чисел. Если $\varphi_i \in C_0^\infty$ и $f = \lim \varphi_i$, то норма распределения f определяется как

$$\|f\|_p = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i\|_p. \quad (5.7.7)$$

Пространство $L^p = L^p(\mathbb{R})$ — это множество всех таких распределений:

$$L^p = \{f = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i: \{\varphi_i\} \text{ — последовательность Коши по } L^p\text{-норме}\}. \quad (5.7.8)$$

Теорема 1. Пространство L^p с нормой $\|\cdot\|_p$ является полным и, значит, банаховым пространством, а C_0^∞ — плотным в L^p множеством (доказательство опускается).

Если f — предел в L^p последовательности Коши $\{\varphi_i\}$, а g — предел в L^q последовательности Коши $\{\psi_i\}$ (здесь и далее в этом параграфе предполагается, что $(1/p) + (1/q) = 1$), то неравенство Гёльдера показывает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \psi_i(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, g \rangle \quad (5.7.9)$$

существует и что

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (5.7.10)$$

Это неравенство представляет собой общее неравенство Гёльдера. Тем самым область определения линейного функционала $\langle \cdot, g \rangle$ расширена с C_0^∞ до L^p .

Для данного $g \in L^q$ $\langle \cdot, g \rangle$ —ограниченный линейный функционал на L^p . Следующая теорема Ф. Рисса (1910 г.) обобщает теорему Рисса —Фреше (1907 г.):

Теорема 2. Для любого ограниченного линейного функционала $F(\cdot)$ на L^p найдется единственный элемент $g \in L^q$, такой, что $F(f) = \langle f, g \rangle$ для всех $f \in L^p$; кроме того, норма функционала $F(\cdot)$, определяемая как

$$\|F(\cdot)\| = \sup_{f \neq 0} [F(f) / \|f\|_p], \quad (5.7.11)$$

равна $\|g\|_q$.

Множество всех ограниченных линейных функционалов на банаховом пространстве образует сопряженное (двойственное) пространство, которое также является банаховым. Теорема Рисса показывает, что сопряженное к L^p пространство изоморфно пространству L^q .

В предельном случае $p = 1$ норма в C_0^∞ берется равной $\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$; при этом пространство L^1 определяется в точности так же, как L^p при $p > 1$, хотя для доказательства приведенных выше леммы и теоремы 1 необходимы другие средства; см. Вернер [1969].

При любом $p \geq 1$ имеет место аналог теоремы 2 из § 5.3: любая непрерывная функция $f(x)$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx$ конечен, принадлежит L^p .

В другом предельном случае, $p = \infty$, тот факт, что L^p сопряжено к L^q и $p \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow 1$ по (5.7.2), наводит на мысль о соответствующем методе определения L^∞ . Действительно, пространство L^p можно охарактеризовать иначе (как это сделал Вернер): распределение f принадлежит L^p тогда и только тогда, когда существует такая постоянная M , что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq M \|\varphi\|_q \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty. \quad (5.7.12)$$

Определение. L^∞ —пространство всех таких распределений f , что для некоторой постоянной $M = M(f)$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq M \|\varphi\|_1 \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty; \quad (5.7.13)$$

норма $\|f\|_\infty$ —это наименьшее из возможных значений $M(f)$, обладающее, очевидно, всеми свойствами нормы.

С такой нормой L^∞ оказывается полным и, значит, банаховым пространством (Вернер).

Покажем теперь, что распределение $f \in L^\infty$ тогда и только тогда, когда оно ограничено (поточечно). Рассмотрим сначала вещественный случай. Если φ — неотрицательная пробная функция, то $\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$, где через 1 обозначена функ-

ция, тождественно равная единице. Поэтому из (5.7.13) следует, что $\langle M \pm f, \varphi \rangle \geq 0$, т. е. распределения $M + f$ и $M - f$ неотрицательны на $\mathbb{R}$, а $\|f\|_\infty$ — это наименьшее такое M , для которого это условие верно. В комплексном случае $\|f\|_\infty$ — наименьшее из таких M , что

$$M - \operatorname{Re}(f e^{i\alpha}) \geq 0 \quad \text{на } \mathbb{R} \text{ для всех вещественных } \alpha. \quad (5.7.14)$$

Любая ограниченная непрерывная функция $f(x)$ принадлежит L^∞ , и для нее $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Пространство L^∞ представляет собой пространство, сопряженное к L^1 , что почти очевидно из определения L^∞ , однако L^1 не является сопряженным к L^∞ пространством. Если сопряженное пространство обозначить, как и в § 2.8, штрихом, то банахово пространство B называется *рефлексивным*, если $(B')' = B$. Поэтому L^p рефлексивно для $p > 1$, но нерефлексивно для $p = 1$. Сопряженным к L^∞ является пространство мер; см. § 13.9.

В точности так же можно изложить и теорию пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p(a, b)$ и $L^p(\Omega)$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что для любого распределения f из $L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < \infty$) неопределенный интеграл $\int f dx$ является непрерывной функцией (ср. с § 5.5).

5.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В L^1 .

ЛЕММА РИМАНА — ЛЕБЕГА.

ТЕОРЕМА ЛУЗИНА

Поскольку элементы пространств L^1 являются распределениями медленного роста, они имеют преобразования Фурье. Лемма Римана — Лебега, доказываемая ниже, утверждает, что в этом случае преобразования Фурье оказываются непрерывными функциями, стремящимися к нулю (возможно, очень медленно) на бесконечности. Первоначально эта лемма выглядела так: если $f(x)$

измерима на $(0, 2\pi)$ и $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$, то коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \pm \infty$. (Для практических целей эта лемма представляет меньший интерес, чем утверждение о том, что если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$, то ее коэффициенты Фурье $c_n \rightarrow 0$ по меньшей мере как c/n , однако у нее много теоретических применений.)

Согласно идеям § 5.7, пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом. Если $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — последовательность Коши пробных функций по L^1 -норме, т. е. если

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| d^n x \rightarrow 0 \quad \text{при } j, k \rightarrow \infty, \quad (5.8.1)$$

то эта последовательность определяет распределение f посредством равенства

$$\langle f, \psi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) \psi(x) d^n x \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

а $L^1(\mathbb{R}^n)$ является множеством всех таких распределений f .

Лемма (Риман — Лебег). Для распределения $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ его преобразование Фурье $\hat{f}$ является непрерывной функцией $\hat{f}(y)$, стремящейся к нулю при $|y| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\hat{f}$ — непрерывная функция. Для последовательности $\{\varphi_j\}$, указанной выше, по формуле для преобразования Фурье от пробной функции следует, что для любого y

$$|\hat{\varphi}_j(y) - \hat{\varphi}_k(y)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| d^n x,$$

потому что $|e^{ix \cdot y}| = 1$. Так как правая часть неравенства не зависит от y и стремится к нулю при $j, k \rightarrow \infty$, последовательность $\{\hat{\varphi}_j(y)\}$ сходится равномерно при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, ее предел

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) e^{-ix \cdot y} d^n x$$

является непрерывной функцией. Так как $e^{i\pi} = -1$, то $\hat{f}(y)$ можно представить и в виде

$$\hat{f}(y) = -(2\pi)^{-n/2} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) e^{-iy \cdot (x + \pi y / |y|^2)} d^n x.$$

Среднее арифметическое этих двух выражений таково:

$$\hat{f}(y) = (1/2) (2\pi)^{-n/2} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_j(x) - \varphi_j(x - \pi y / |y|^2)] e^{-iy \cdot x} d^n x;$$

поэтому

$$|\hat{f}(y)| \leq (1/2) (2\pi)^{-n/2} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x - \pi y / |y|^2)| d^n x,$$

и нам осталось показать, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. Сначала выберем K , такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi_k(x)| d^n x < \varepsilon \quad \text{для } j, k \geq K, \quad (5.8.2)$$

а затем выберем R так, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_K(x) - \varphi_K(x - \pi y / |y|^2)| d^n x < \varepsilon \quad \text{для } |y| > R.$$

Если мы объединим это неравенство с неравенством (5.8.2) (последнее нужно брать для $k=K$ дважды: в том виде, как оно записано, и после сдвига по x на $\pi y / |y|^2$), то увидим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x - \pi y / |y|^2)| d^n x < 3\varepsilon \quad \text{для } j > K \text{ и } |y| > R.$$

Поэтому $|\hat{f}(y)| \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Распределение из L^1 не обязательно принадлежит L^2 , а распределение из L^2 не обязано принадлежать L^1 . Ниже (см. § 5.10) рассматриваются преобразования Фурье элементов пространства L^2 ; эти преобразования в общем случае не являются обычными функциями.

Приведенный ниже несколько упрощенный вариант *теоремы Лузина* показывает, в какой степени распределения из L^1 (и из L^2 , см. замечание 2) являются обычными функциями. В исходном варианте теоремы (см. Натансон [1950]) f является измеримой по Лебегу функцией.

УПРАЖНЕНИЕ (теорема Лузина)

Предположим, что распределение $f \in L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что для любого $\delta > 0$ найдутся открытое множество $\Omega_\delta \subset \Omega$, объем которого меньше δ , и непрерывная функция $g_\delta(x)$, определенная на $\Omega - \Omega_\delta$ и такая, что

$$f = g_\delta \quad \text{внутри } \Omega - \Omega_\delta.$$

Указание. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность пробных функций, сходящаяся в $L^1(\Omega)$ к f . Покажите, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие целые числа $k_1, k_2, \dots$ (зависящие от δ), что

$$\text{Объем} \left\{ x: |\varphi_k(x) - \varphi_l(x)| > \frac{1}{n^2} \right\} < \frac{6\delta}{\pi^2 n^2} \quad \text{для всех } k, l \geq k_n;$$

после этого возьмите

$$\Omega_\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x: |\varphi_{k_n}(x) - \varphi_{k_{n-1}}(x)| > 1/n^2 \right\}$$

и рассмотрите последовательность $\{\varphi_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Если f — распределение на $\mathbb{R}^n$, принадлежащее $L^1(\Omega)$ при любой ограниченной $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то говорят, что f принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$ локально. Распределение, принадлежащее локально

L^2 , принадлежит локально и L^1 , потому что для элементов L^2 выполняется неравенство Шварца, и, следовательно,

$$\int_{\Omega} |f| \cdot 1 \, d^n x \leq \int_{\Omega} |f|^2 \, d^n x \cdot \text{Объем}(\Omega),$$

значит, теорема Лузина применима и к $f \in L^2$.

5.9. ПРОСТРАНСТВА ТИПА L^2_{σ}

Пространства, описываемые в этом параграфе, возникают при рассмотрении спектрального разложения самосопряженных операторов. Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция вещественной переменной x . Для любых двух функций φ и ψ из $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ определим

$$(\varphi, \psi)_{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)} \psi(x) \, d\sigma(x) \quad (5.9.1)$$

и

$$\|\varphi\|_{\sigma} = \sqrt{(\varphi, \varphi)_{\sigma}}.$$

Функционал $\|\cdot\|_{\sigma}$, как правило, всего лишь положительно *полуопределен* на пространстве C_0^{∞} , поскольку если $\varphi(x)$ равна нулю вне интервала постоянства $\sigma(x)$, то $\|\varphi\|_{\sigma} = \sqrt{\int |\varphi(x)|^2 \, d\sigma(x)} = 0$, даже в случае когда $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю; $\|\cdot\|_{\sigma}$ называется *полунормой*. Для нее все еще выполняются неравенство Шварца и неравенство треугольника. [Доказательства этих и других утверждений данного параграфа почти совпадают с доказательствами соответствующих утверждений в § 5.3 и потому опускаются.]

Если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши относительно этой полунормы, то предел $(\psi, \varphi_i)_{\sigma}$ при $i \rightarrow \infty$ существует для всех пробных функций ψ ; распределение f определяется как функционал

$$\langle f, \psi \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} (\overline{\varphi_i}, \psi)_{\sigma} \quad \text{для всех } \psi \in C_0^{\infty}.$$

Две последовательности Коши $\{\varphi_i\}$ и $\{\tilde{\varphi}_i\}$ определяют одно и то же распределение в том и только в том случае, когда они эквивалентны, т. е. когда $\|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_{\sigma} \rightarrow 0$.

Пространство $L^2_{\sigma} = L^2_{\sigma}(\mathbb{R})$ определяется как множество всех таких распределений (определяемых последовательностями Коши). Скалярное произведение в $L^2_{\sigma}(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$(f, g)_{\sigma} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\varphi_i, \psi_i)_{\sigma},$$

где $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ — последовательности Коши, определяющие f и g соответственно, а норма определяется формулой

$$\|f\|_{\sigma} = \sqrt{(f, f)_{\sigma}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i\|_{\sigma}.$$

Пространство $L_{\sigma}^2(\mathbb{R})$ является полным и, следовательно, гильбертовым пространством.

Следующие замечания касаются некоторых новых, хотя и второстепенных, свойств этих пространств.

1. Если (a, b) — произвольный интервал, на котором $\sigma(x)$ постоянна, а $f \in L_{\sigma}^2$, то $f=0$ на (a, b) . [О смысле выражения «распределение $f=0$ на (a, b) » см. гл. 3.]

2. C_0^{∞} не обязательно содержится в L_{σ}^2 ; в действительности непрерывная функция $f(x)$ принадлежит L_{σ}^2 тогда и только тогда, когда

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 d\sigma(x) < \infty \text{ и}$$

(б) $f(x)=0$ на каждом интервале постоянства $\sigma(\cdot)$.

3. Хотя $\|\cdot\|_{\sigma}$ на C_0^{∞} всего лишь полуопределенна, на L_{σ}^2 она положительно определена. Иначе говоря, если $\|\varphi_i\|_{\sigma} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, так что $\|f\|_{\sigma} = 0$, то последовательность Коши $\{\varphi_i\}$, определяет нулевое распределение: $f=0$. Поэтому $\|\cdot\|_{\sigma}$ определяет в L_{σ}^2 норму, а не просто полунорму.

Пространства $L_{\sigma}^2(\mathbb{R}^n)$ исследуются аналогично, только в них σ — неубывающая функция нескольких вещественных переменных в смысле § 13.3 и используется многомерный интеграл Стильтеса.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Выясните вид пространства $L_{\sigma}^2(\mathbb{R})$ в следующих случаях: (1) $\sigma(\cdot)$ — ступенчатая функция; 2) $\sigma'(x) > 0$ для всех x ; (3) $\sigma(x) = x$.

5.10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ОПЕРАТОРЫ СГЛАЖИВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2

Так как любой элемент f , принадлежащий $L^2(\mathbb{R}^n)$, представляет собой распределение медленного роста, для него существует преобразование Фурье $\hat{f}$, которое также является распределением медленного роста; более того, $\hat{f}$ также принадлежит L^2 . В самом деле, предположим, что $\varphi_k \rightarrow f$ в L^2 при $k \rightarrow \infty$; тогда $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши. По равенству Парсеваля $\|\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_j\|^2 = \|\varphi_k - \varphi_j\|^2$; следовательно, $\{\hat{\varphi}_k\}$ — также последовательность Коши. Для любого ψ из $\mathcal{S}$

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k, \hat{\psi} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \hat{\varphi}_k, \psi \rangle.$$

Иначе говоря, $\hat{f}$ равно распределению, определяемому последовательностью $\{\hat{\varphi}_i\}$ в смысле § 5.3, и поэтому $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Точно так же, используя последовательность $\{\psi_k\}$, сходящуюся в L^2 к g , легко увидеть, что $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$. Поэтому отображение $f \rightarrow \hat{f}$ называется изоморфизмом (иногда называемым изометрическим изоморфизмом, поскольку оно сохраняет не только линейность, но и норму, и скалярное произведение) гильбертова пространства L^2 на себя, т. е. данное отображение является унитарным преобразованием этого пространства.

В терминах квантовой механики это выражается следующим образом: если f изображает некоторое состояние системы N частиц в координатном представлении (в этом случае $n = 3N$ и спин не учитывается), то $\hat{f}$ изображает то же самое состояние в импульсном представлении, а из того, что отображение $f \rightarrow \hat{f}$ является изометрическим изоморфизмом, следует, что эти два представления совершенно эквивалентны.

В гл. 2 было показано, что если f — распределение, а J_δ — оператор сглаживания (§ 2.6), то $J_\delta f$ и f как распределения близки для малого δ , т. е. $J_\delta f \rightarrow f$ при $\delta \rightarrow 0$ в смысле сходимости распределений. Мы покажем, что если $f \in L^2$, то $J_\delta f$ и f близки и по L^2 -норме.

Теорема 1. Для любого распределения f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ с ограниченным носителем

$$\|J_\delta f\| \leq \|f\| \quad (5.10.1)$$

для всех δ .

Следствие. Это верно, даже если носитель f не ограничен.

Доказательство теоремы. Поскольку f имеет ограниченный носитель, его преобразование Фурье $\hat{f}$ является непрерывной (в действительности даже аналитической) функцией, что следует из теоремы в § 4.5; следовательно,

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 = \int |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 d^n \mathbf{k}.$$

Пусть g является функцией $J_\delta f$, т. е.

$$g(\mathbf{y}) = \langle f, \rho_{\mathbf{y}, \delta} \rangle, \quad (5.10.2)$$

где $\rho_{\mathbf{y}, \delta}(\mathbf{x})$ — пробная функция, введенная в определении оператора сглаживания J_δ в § 2.6. Чтобы получить $\hat{g}(\mathbf{k})$, умножим последнее уравнение на $(2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}$ и проинтегрируем его по $\mathbb{R}^n$ относительно $\mathbf{y}$. Используя упражнение 1 из § 2.4 об интегрировании по параметру, находим, что

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \langle f, e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rangle \hat{\rho}(\delta \mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{\rho}(\delta \mathbf{k})$$

(что и следовало ожидать, потому что (5.10.2) является сверткой). Но $\rho(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция, интеграл от которой равен единице, поэтому

$$|\hat{\rho}(\mathbf{k})| \leq |\hat{\rho}(0)| = 1,$$

и, следовательно, $\|\hat{g}\|^2 \leq \|\hat{f}\|^2$, откуда мы получаем (5.10.1).

Доказательство следствия. Пусть $\{f_j\}$ — последовательность распределений с ограниченными носителями, сходящаяся в L^2 к f (см. упражнение в § 5.4); тогда для каждого j выполняется неравенство

$$\|J_\delta f_j\| \leq \|f_j\|. \quad (5.10.3)$$

Очевидно, что $\{J_\delta f_j\}$ — последовательность Коши и $J_\delta f$ — ее предел (потому что, согласно упражнению 5 из § 2.6, $J_\delta f$ — ее предел в смысле сходимости распределений, а такой предел совпадает с пределом в L^2 каждый раз, когда последний существует). Но тогда в пределе при $j \rightarrow \infty$ из (5.10.3) следует

Теорема 2. Если $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|J_\delta f - f\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (5.10.4)$$

Доказательство. Возьмем такие $\varepsilon > 0$ и $\psi \in C_0^\infty$, что

$$\|f - \psi\| < \varepsilon.$$

Тогда по теореме 1

$$\|J_\delta f - J_\delta \psi\| < \varepsilon$$

для любого δ . Так как ψ является гладкой функцией, интуитивно ясно, что $J_\delta \psi$ мало отличается от ψ при достаточно малом δ ; доказательство того, что δ можно выбрать так, что

$$\|J_\delta \psi - \psi\| < \varepsilon,$$

оставляется читателю в качестве упражнения. Вместе эти три неравенства показывают, что $\|J_\delta f - f\| < 3\varepsilon$ для произвольного ε , а отсюда следует (5.10.4).

5.11. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. ПРОСТРАНСТВО W^1

В задачах квантовой механики физически уместными часто оказываются такие гильбертовы пространства, элементы которых $\psi(\mathbf{x})$ или $\psi(\mathbf{x}, t)$ — волновые функции — и их частные производные первого порядка принадлежат L^2 , так что, например, математическое ожидание кинетической энергии, которое при должном выборе единиц равно

$$(1/2) \int |\nabla \psi|^2 d^3x,$$

является конечной величиной. Такие пространства называются *пространствами Соболева*; они полезны при изучении дифференциальных операторов с частными производными. Функции, принадлежащие им, имеют в некотором смысле вполне определенные граничные значения на гиперповерхностях. Напоминаем: если f — распределение f (от одной переменной), и его производная f'

принадлежат L^2 , то f является обычной непрерывной функцией $f(x)$ и, следовательно, имеет вполне определенные значения для всех $x \in [a, b]$. (В частности, $f(x) \rightarrow 0$ на бесконечности, если (a, b) — неограниченный интервал.) Хотя в многомерном случае распределение $f(x)$, принадлежащее соответствующему пространству Соболева, не является, вообще говоря, обычной функцией, его «значения» на простой замкнутой поверхности S образуют распределение на S , как это будет выяснено в следующем параграфе.

Пусть Ω — либо все $\mathbb{R}^n$, либо область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой простой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, и пусть L^2 — гильбертово пространство $L^2(\Omega)$, скалярное произведение и норма которого будут обозначаться через $(u, v)_0$ и $\|u\|_0$ соответственно. Обозначим через $W^1 = W^1(\Omega)$ линейное многообразие

$$W^1 = \{u \in L^2: \partial_m u \in L^2 \quad (m=1, \dots, n)\}, \quad (5.11.1)$$

где

$$\partial_m = \partial / \partial x_m \quad (m=1, \dots, n). \quad (5.11.2)$$

Многообразие W^1 не замкнуто в L^2 и, следовательно, не является подпространством L^2 , однако мы покажем, что оно является полным (а значит, гильбертовым) пространством относительно скалярного произведения и нормы, определяемых равенствами

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + (\nabla u, \nabla v)_0, \quad (5.11.3)$$

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2, \quad (5.11.4)$$

где

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = \sum_{m=1}^n (\partial_m u, \partial_m v)_0, \quad (5.11.5)$$

$$\|\nabla u\|_0^2 = \sum_{m=1}^n \|\partial_m u\|_0^2. \quad (5.11.6)$$

Теорема. W^1 — полное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ пространство.

Доказательство. Предположим, что $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность Коши в W^1 , т. е.

$$\|u_j - u_k\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } j, k \rightarrow \infty; \quad (5.11.7)$$

мы должны показать, что найдется такое распределение $v \in W^1$, что

$$\|u_j - v\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (5.11.8)$$

Утверждение (5.11.7) и формула (5.11.4), в которой u заменено на $u_j - u_k$, показывают, что $\{u_j\}$ и $\{\partial_m u_j\}$ ($m=1, \dots, n$) являются последовательностями Коши в L^2 . Пусть v и w_m ($m=1, \dots, n$) — соответствующие пределы этих последовательностей в L^2 . Для любой пробной функции φ из $C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} (w_m, \varphi)_0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\partial_m u_j, \varphi)_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} (u_j, -\partial_m \varphi)_0 = \\ &= (v, -\partial_m \varphi)_0 = \langle \partial_m \bar{v}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

(здесь использовалось определение производной распределения $\partial_m \bar{v}$). Поэтому w_m и $\partial_m v$ как распределения на Ω совпадают, а отсюда следует, что (1) $\partial_m v \in L^2$ для каждого m и, следовательно, $v \in W^1$ и (2) $\partial_m v$ — предел в L^2 последовательности $\{\partial_m u_j\}$ для каждого m и поэтому в силу (5.11.6)

$$\|u_j - v\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Поэтому W^1 — полное пространство.

Часто используют и другие пространства Соболева. Так, в $W^{l,p}$ L^2 -норма заменяется L^p -нормой, применяемой к функции u и к ее частным производным порядка не выше l (см. Фридман [1969]). Мы будем иметь дело только с пространством $W^1 = W^{1,2}$.

5.12. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В W^1 .

ПОДПРОСТРАНСТВО W_0^1

Пусть $u \in W^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей, и пусть $\psi(x)$ — любая функция из $C^2(\bar{\Omega})$. Рассмотрим $u_\delta(x) = J_\delta u$, где J_δ — оператор сглаживания, определенный в § 2.6; функция u_δ может иметь и ненулевые значения вне области Ω , однако она непрерывна на $\bar{\Omega}$ и как таковая принадлежит $L^2(\Omega)$. Интегрирование по частям (формула Грина) дает

$$(\nabla \psi, \nabla u_\delta)_0 = \int_{\Omega} \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla u_\delta d^n x = \int_{\partial \Omega} \nabla \bar{\psi} \cdot n u_\delta dA - \int_{\Omega} (\nabla^2 \bar{\psi}) u_\delta d^n x.$$

Оператор J_δ перестановочен с ∇ , т. е. $\nabla(u_\delta) = (\nabla u)_\delta$; кроме того, $f_\delta \rightarrow f$ (при $\delta \rightarrow 0$) для любой $f \in L^2(\Omega)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а следовательно, и в $L^2(\Omega)$; поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega} u_\delta \nabla \bar{\psi} \cdot n dA = (\nabla \psi, \nabla u)_0 + (\nabla^2 \bar{\psi}, u)_0. \quad (5.12.1)$$

Этот предел зависит от значений $\nabla \bar{\psi}$ на $\partial \Omega$, в остальном же от ψ не зависит. Определим функцию χ на $\partial \Omega$ следующим образом:

$$\chi(x) = \nabla \bar{\psi} \cdot n, \quad x \in \partial \Omega, \quad (5.12.2)$$

и будем рассматривать χ как пробную функцию. Тогда равенство

$$\langle \bar{u}, \chi \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega} u_\delta \chi dA$$

определяет линейный функционал $\langle \bar{u}, \cdot \rangle$ на пространстве пробных функций χ , т. е. распределение $\bar{u}$ на $\partial \Omega$; можно считать, что это распределение образовано граничными значениями функции u из $W^1(\Omega)$.

Можно доказать, что $\bar{u}$ принадлежит пространству $L^2(\partial \Omega)$, определенному на поверхности $\partial \Omega$ (см. § 5.3); это частный случай

более общей теоремы Соболева (см. Соболев [1950]). Если u — обычная функция из W^1 , непрерывная на $\bar{\Omega}$, то $\tilde{u}$ — такое распределение на $\partial\Omega$, которое следует отождествлять с функцией $u(x)$ при $x \in \partial\Omega$ и которое задается формулой

$$\langle \tilde{u}, \chi \rangle = \int_{\partial\Omega} u(x) \chi(x) d\mathcal{M}.$$

Рассмотрим случай, когда граничные значения $\tilde{u}$ обращаются в нуль. Тогда в силу (5.12.1)

$$(\nabla\psi, \nabla u)_0 + (\nabla^2\psi, u)_0 = 0; \quad (5.12.3)$$

это равенство оказывается формулой интегрирования по частям на Ω , когда граничные значения функции u равняются нулю. Определим

$$W_0^1 = \{u \in W^1: (5.12.3) \text{ выполняется для всех } \psi \in C^2(\bar{\Omega})\}. \quad (5.12.4)$$

Вследствие непрерывности скалярного произведения из (5.12.3) следует, что W_0^1 — замкнутое линейное многообразие, т. е. подпространство в W^1 .

В следующей главе W_0^1 будет играть роль гильбертова пространства, содержащего собственные функции оператора Лапласа на Ω при нулевых граничных условиях на $\partial\Omega$.

Формула интегрирования по частям (5.12.3) справедлива и в несколько более общей ситуации. Пусть функция v , ее частные производные первого порядка и $\nabla^2 v$ принадлежат $L^2(\Omega)$. Возьмем вместо ψ функцию $v_\delta = J_\delta v$. Поскольку оператор J_δ коммутирует с дифференцированием, (5.12.3) даст

$$(J_\delta \nabla u, \nabla u)_0 + (J_\delta \nabla^2 v, u)_0 = 0.$$

Так как для любого $w \in L^2$ $J_\delta w \rightarrow w$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в $L^2(\Omega)$, мы получаем

$$(\nabla v, \nabla u)_0 + (\nabla^2 v, u)_0 = 0 \quad \text{для } u \in W_0^1, v \in W^1, \nabla^2 v \in L^2. \quad (5.12.5)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $C^\infty(\bar{\Omega})$ — плотное в $W^1(\Omega)$ множество. Указание. Примените оператор сглаживания J_δ к элементам $W^1(\Omega)$.

2. Пусть Ω — единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что найдется такая постоянная K , что $\|\nabla\varphi\| \geq K\|\varphi\|$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и что отсюда следует, что $C_0^\infty(\Omega)$ не плотно в $W^1(\Omega)$.

5.13. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. II

Обсуждение данного вопроса, начатое в § 5.6, теперь можно продолжить для случая пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. Если распределение f и все его частные производные порядка l ($l > n/2$) принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$, то $f(x)$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что l — четное число; тогда

$$\left[f + \left(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \right)^{l/2} f \right] \in L^2.$$

При помощи преобразования Фурье получаем, что

$$\chi \hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g} \in L^2,$$

где

$$\chi(y) = 1 + |y|^l = 1 + (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{l/2}.$$

(Отсюда, между прочим, следует, что каждая частная производная порядка $< l$ также принадлежит L^2 , потому что ее преобразование Фурье равно $q(y_1, \dots, y_n) \hat{f}$, где q — многочлен степени $< l$; следовательно, это преобразование можно записать как $(q/\chi) \hat{g}$, где q/χ — непрерывная ограниченная функция.) Пусть теперь $\hat{\psi}_j$ — пробные функции, сходящиеся в L^2 к $\hat{g}$. Тогда пробные функции

$$\hat{\phi}_j(y) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(y)^{-1} \hat{\psi}_j(y)$$

сходятся в L^2 к $\hat{f}$. В силу неравенства Шварца мы имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}_j(y) - \hat{\phi}_k(y)|^2 d^n y \right)^2 \leq \int \chi(y)^{-2} d^n y \int |\hat{\psi}_j(y) - \hat{\psi}_k(y)|^2 d^n y.$$

Первый интеграл в правой части неравенства конечен, потому что его подынтегральная функция стремится к нулю на бесконечности по меньшей мере как $|y|^{-n-1}$; поэтому

$$\|\hat{\phi}_j - \hat{\phi}_k\|_{L^1} \leq \text{const} \cdot \|\hat{\psi}_j - \hat{\psi}_k\|_{L^2}.$$

Таким образом, $\{\phi_j\}$ сходится в L^1 и $\hat{f} \in L^1$; следовательно, согласно лемме Римана — Лебега из § 5.8, $f(x)$ является непрерывной функцией, стремящейся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть теперь l — нечетное число. В этом случае распределение $\chi \hat{f}$, определенное выше, все еще принадлежит L^2 , потому что (1) если y_j — любая компонента переменной y и $y_j \hat{h} \in L^2$ для любого $\hat{h} \in L^2$, то $|y_j| \hat{h}$ также принадлежит L^2 , и (2)

$$(y_1^2 + \dots + y_n^2)^{l/2} \leq (|y_1| + \dots + |y_n|)^l;$$

следовательно, теорема справедлива и в этом случае.

Замечание. Для $n=2$ и $n=3$ из доказательства теоремы следует, что если f и $\nabla^2 f$ принадлежат L^2 ($l=2$), то f — непрерывная функция и $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ЛАПЛАСИАНОМ

Собственные функции для задач колебаний в ограниченной области; вариационные методы; интеграл Дирихле; потенциал, обусловленный заданным распределением заряда; уравнение Пуассона; свертки; прямое произведение; теорема Шварца о ядре; уравнения Коши—Римана; гармонические функции.

Предварительные сведения: гл. 5.

Лапласиан во многих отношениях имеет более классический характер, чем многие из дифференциальных операторов, которые будут рассмотрены в гл. 10 и 11. Одной из основных задач является определение собственных функций $u(x)$ уравнения $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ в области Ω n -мерного пространства при граничном условии $u(x) = 0$ на границе $\partial\Omega$. При $n=2$ это классическая задача о колебаниях мембраны. При $n=2$ и $n=3$ эти собственные функции и вариационные методы, которыми они определяются, оказываются полезными в задачах колебаний, теплопроводности, электромагнитных полей, гидродинамической устойчивости. Именно собственные функции и методы их нахождения составляют главное содержание настоящей главы.

При помощи некоторых других задач будет проиллюстрирована универсальность методов теории распределений. Во-первых, будет установлена справедливость уравнения Пуассона для потенциала $V(x)$, обусловленного зарядом с плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ —произвольное распределение с ограниченным носителем в $\mathbb{R}^3$. Во-вторых, будет показано, что если производные в уравнениях Коши—Римана интерпретировать в смысле теории распределений, то из этих уравнений для распределений u и v на $\mathbb{R}^2$ следует более общая, чем в классической теории, аналитичность $u+iv$. В этой связи доказывается, что любое гармоническое распределение в $\mathbb{R}^n$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n$.

Кратко обсуждаются свертки распределений, так как они необходимы при рассмотрении уравнений Пуассона, а затем обсуждается теорема Шварца о ядре, что нужно для полного понимания свертки.

6.1. ПОТЕНЦИАЛ. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Вспомним, что в электростатике потенциал $V(x)$, обусловленный распределенным зарядом с плотностью $\rho(x)$, задается в виде

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) d^3y \quad (6.1.1)$$

и что этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho. \quad (6.1.2)$$

(В этой главе одинарные вертикальные черточки используются для обозначения длины вектора, а двойные вертикальные черточки обозначают норму вектора в L^2 , когда он рассматривается как элемент банахова или гильбертова пространства.)

В следующих двух параграфах эти уравнения будут обобщены на случай, когда ρ — любое распределение с ограниченным носителем на $\mathbb{R}^3$. Мы кратко обсудим также модифицированную задачу, в которой заряд содержится в области Ω , ограниченной простой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, на которой $V(x) = 0$. Затем первый множитель в подынтегральном выражении в (6.1.1) будет заменен функцией Грина $G(x, y)$.

6.2. СВЕРТКИ

В соответствии с (6.1.1) $V(x)$ является трехмерной сверткой функций $1/|x|$ и $\rho(x)$, и поэтому прежде всего нужно определить свертку $f * g$ двух распределений f и g на $\mathbb{R}^n$. Если f и g — обычные функции, причем g имеет ограниченный носитель, то свертка является также функцией $(f * g)(x)$; как распределение она задается формулой

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \iint f(x-y) g(y) d^n y \varphi(x) d^n x = \\ &= \iint f(w) g(y) \varphi(y+w) d^n y d^n w, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

и в дальнейшем мы будем использовать непосредственную интерпретацию этой формулы. Если g — распределение с ограниченным носителем, то внутреннее интегрирование в последнем члене (6.2.1) (интегрирование по y) следует рассматривать как

$$\langle g, \varphi_w \rangle, \quad (6.2.2)$$

где

$$\varphi_w(y) = \varphi(w+y). \quad (6.2.3)$$

Из упражнения 3 § 2.6 и последующего обсуждения операторов сглаживания следует, что $\langle g, \varphi_w \rangle$ является функцией w класса C^∞ . Равенство (6.2.3) показывает, что при достаточно большом $|w|$ носители g и φ_w не перекрываются, а значит, $\langle g, \varphi_w \rangle = 0$, т. е. функция $\langle g, \varphi_w \rangle$ имеет ограниченный носитель и поэтому является пробной функцией. Внешнее интегрирование в (6.2.1) можно рассматривать как результат подстановки этой пробной функции в $\langle f, \cdot \rangle$. Таким образом, мы вводим определение

$$\langle f * g, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \langle g, \varphi_w \rangle \rangle. \quad (6.2.4)$$

Из этого определения и правила дифференцирования по параметру (см. упражнение 2 § 2.4) очевидно следует, что если ∂_j обозначает $\partial/\partial\omega_j$, где ω_j — одна из компонент $\mathbf{w}$ ($j = 1, \dots, n$), то

$$\partial_j (f * g) = (\partial_j f) * g = f * (\partial_j g) \quad (6.2.5)$$

и аналогично для производных высших порядков, т. е. точно так же, как и для обычных функций.

Рассмотрим случай, в котором одно из распределений f, g является $\delta_n(\mathbf{x})$, т. е. n -мерной δ -функцией, определяемой равенством

$$\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (6.2.6)$$

Если $f = \delta_n$, то величина в правой части (6.2.4) равна

$$\langle \delta_n, \langle g, \varphi_{\mathbf{w}} \rangle \rangle = \langle g, \varphi_0 \rangle = \langle g, \varphi \rangle,$$

и значит,

$$\delta_n * g = g; \quad (6.2.7)$$

аналогичным образом

$$f * \delta_n = f. \quad (6.2.8)$$

Эти результаты можно записать в виде символического соотношения между функциями g и распределениями g :

$$\int \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = g(\mathbf{y}).$$

Дальнейшие свойства свертки указываются в § 6.5.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, как нужно изменить рассуждения, проведенные в этом параграфе, для распределений f и g на $\mathbb{R}$, носители которых ограничены снизу (или сверху). Что можно сказать в этом случае о носителе $f * g$?

2. Покажите, что для пробных функций φ и ψ на $\mathbb{R}^n$ преобразование Фурье от $\varphi * \psi$ представляет собой умноженное на $(2\pi)^{n/2}$ произведение $\hat{\varphi}\hat{\psi}$ в обычном смысле.

3. Пусть f и g — распределения медленного роста на $\mathbb{R}^n$, причем g имеет компактный носитель. Покажите, что преобразование Фурье от $f * g$ представляет собой умноженное на $(2\pi)^{n/2}$ обычное произведение $\hat{f}\hat{g}$, предварительно заметив, что это произведение вполне определено, поскольку $\hat{g}$ является функцией класса C^∞ (см. теорему § 4.5).

4. Пусть f и g — распределения медленного роста на $\mathbb{R}$, носители которых ограничены снизу (или сверху). Для каких (комплексных) значений переменной преобразования k распределения $\hat{f}$ и $\hat{g}$ являются обычными функциями? Покажите, что для таких значений переменной k выполняется равенство $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$, где $h = f * g$.

Это упражнение имеет отношение к преобразованию Лапласа, которое будет обсуждаться в § 9.5.

6.3. ОБОСНОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Пусть $k = k(\mathbf{x})$ обозначает распределение $k(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1}$ (первый пример в § 2.5, см. формулу (2.5.2)). Тогда потенциал $V = V(\mathbf{x})$ можно определить как распределение

$$V = k * \rho, \quad (6.3.1)$$

которое совпадает с (6.1.1).

Покажем теперь, что лапласиан от распределения k имеет вид

$$\nabla_y^2 k(x-y) = \nabla_x^2 k(x-y) = -4\pi\delta_3(x-y); \quad (6.3.2)$$

тогда отсюда и из правила дифференцирования свертки (6.2.5) последует уравнение

$$\nabla^2 V = (\nabla^2 k) * \rho = -4\pi\delta_3 * \rho = -4\pi\rho,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы установить справедливость (6.3.2), положим, что $\varphi(x)$ — любая пробная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x^2 k(x-y), \varphi(y) \rangle &= \langle k(x-y), \nabla^2 \varphi(y) \rangle = \\ &= \int \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 \varphi(y) d^3y = \int \frac{1}{|w|} \nabla_w^2 \varphi(x-w) d^3w = \\ &= \nabla_x^2 \int \frac{1}{|w|} \varphi(x-w) d^3w = \\ &= \nabla_x^2 \int \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) d^3y = -4\pi\varphi(x), \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из уравнений классической теории потенциала (6.1.1) и (6.1.2), в которых $\varphi(x)$ заменяет $\rho(x)$. Отсюда следует справедливость (6.3.2).

Этот же метод можно использовать и для больших размерностей. В этом случае классические уравнения (6.1.1) и (6.1.2) нужно заменить уравнениями

$$V(x) = \int \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \rho(y) d^n y, \quad (6.3.3)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \rho \stackrel{\text{def}}{=} -c_n \rho. \quad (6.3.4)$$

Постоянная c_n равна площади поверхности единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, умноженной на $(n-2)$;

$$\text{Площадь } (S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (6.3.5)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Получите (6.3.5) путем вычисления интеграла от $\exp\{-x_1^2 - \dots - x_n^2\}$ по $\mathbb{R}^n$ сначала в полярных координатах, а затем как повторного интеграла в декартовых координатах.

2. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = |x|^{-n+2}$ в $\mathbb{R}^n$ путем преобразования уравнения $\nabla^2 (f * \rho) = -c_n \rho$, где ρ — пробная функция.

6.4. ЗАДАЧИ ПУАССОНА, ДИРИХЛЕ, ГРИНА И НЕЙМАНА ИЗ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть электрический заряд содержится в области, принадлежащей Ω из $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой простой замкнутой границей $\partial\Omega$ (заземленная проводящая гиперповерхность), на которой $V(x) = 0$.

Тогда классическая задача Пуассона заключается в следующем: при заданной «достаточно хорошей» функции $\rho(x)$, скажем непрерывной в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, найти функцию $V(x)$ из класса C^2 в Ω , непрерывную в $\bar{\Omega}$ и такую, что

$$\nabla^2 V = -c_n \rho \quad (\text{задана}) \text{ в } \Omega, \quad (6.4.1)$$

$$V(x) = 0 \quad \text{для } x \text{ на } \partial\Omega. \quad (6.4.2)$$

В классической задаче Дирихле на границе появляется неоднородность:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.4.3)$$

$$V(x) = f(x) \quad (\text{задана}) \text{ на } \partial\Omega. \quad (6.4.4)$$

Третья классическая задача состоит в нахождении так называемой функции Грина $G(x, y)$ для области Ω . Эта функция имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}} + g(x, y), \quad (6.4.5)$$

где для каждого фиксированного y из Ω g является решением частной задачи Дирихле

$$\nabla^2 g = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (6.4.6)$$

(∇^2 обозначает лапласиан относительно компонент вектора x) и

$$g(x, y) = -\frac{1}{|x-y|^{n-2}}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6.4.7)$$

Следовательно, при фиксированном y из Ω функция $G(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, за исключением точки $x=y$ (где, как следует из (6.4.7), имеется особенность), и обращается в нуль при $x \in \partial\Omega$.

Мы утверждаем (без доказательства), что если Ω — область с достаточно хорошей границей $\partial\Omega$ (см. ниже), то все три классические задачи имеют решения. Эти решения связаны следующим образом: если задача Дирихле (6.4.3), (6.4.4) имеет решение для любой данной непрерывной $f(x)$ на $\partial\Omega$, то задача (6.4.6), (6.4.7) имеет решение, и, следовательно, функция Грина имеет вид (6.4.5). При заданном y $G(x, y)$ является решением некоторого частного случая задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2), в котором точечный единичный заряд локализован в точке $x=y$, так что $\rho(x)$ равна n -мерной δ -функции от $x-y$. Тогда решение общей задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2) описывается интегралом

$$V(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \rho(y) d^n y. \quad (6.4.8)$$

Наконец, если $f(\mathbf{x})$ — любая подходящая функция, заданная на $\partial\Omega$, скажем функция класса C^1 , а $\tilde{f}(\mathbf{x})$ — любая функция класса C^2 в Ω и класса C^1 в $\bar{\Omega}$, принимающая заданные значения на $\partial\Omega$, т. е.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{на } \partial\Omega,$$

то решение задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4) имеет вид $V(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) + V_1(\mathbf{x})$, где $V_1(\mathbf{x})$ — решение задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2) с

$$\rho = (1/c_n) \nabla^2 \tilde{f}. \quad (6.4.9)$$

Для практических целей достаточным условием разрешимости классических задач является так называемое *условие внешнего конуса*: можно найти такие числа $\epsilon > 0$ и $h > 0$, что для каждой точки $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ существует круговой конус с углом раствора ϵ , высотой h и вершиной в точке $\mathbf{x}$, лежащий вне Ω ; см. рис. 6.1. Это условие гарантирует, что граница $\partial\Omega$ не имеет бесконечно заостренных входящих ребер, углов и пиков. Для трехмерного случая подробности можно найти в книге Куранта и Гильберта [1962].

Классическая *задача Неймана* аналогична задаче Дирихле, но в ее формулировку входит нормальная компонента градиента функции $V(\mathbf{x})$ на границе, а не само $V(\mathbf{x})$, т. е.

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.4.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla V = h(\mathbf{x}) \quad (\text{задана}) \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (6.4.11)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Из теоремы Гаусса для векторного поля ∇V следует, что необходимым условием того, что данная задача имеет решение, является равенство

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathcal{A} = 0. \quad (6.4.12)$$

Если это условие выполняется, то условие внешнего конуса достаточно для существования решения. Соответствующая *задача Пуассона — Неймана* такова:

$$\nabla^2 V = \rho \quad (\text{задана}) \quad \text{в } \Omega, \quad (6.4.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla V = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (6.4.14)$$

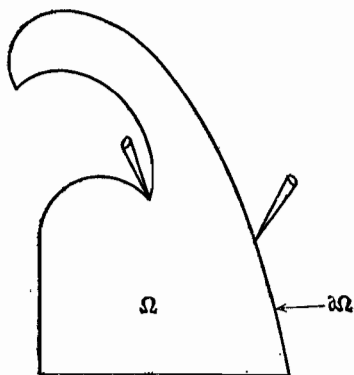


Рис. 6.1. Условие внешнего конуса.

В этом случае необходимым условием существования решения является равенство

$$\int_{\Omega} \rho(x) d^n x = 0. \quad (6.4.15)$$

Относительно некоторого аналога функции Грина см. ниже упражнение 7; сведения о «функции Неймана» для родственного оператора $\nabla^2 - \text{const}$ приведены в книге Гарабедяна [1964].

Решения задач Неймана (6.4.10), (6.4.11) и (6.4.13), (6.4.14) не являются единственными, поскольку к $V(x)$ можно прибавить произвольную постоянную.

Мы утверждаем (без доказательства), что если ρ является произвольным распределением с носителем в Ω , то уравнения (6.4.1), (6.4.2) и (6.4.8) справедливы в следующем смысле. Мы запишем (6.4.5) в следующем виде:

$$G(x, y) = k_{n-2}(x-y) + g_x(y), \quad (6.4.16)$$

где $k_{n-2}(x) = |x|^{-(n-2)}$ и $g_x(y) = g(x, y)$. Тогда (6.4.8) можно интерпретировать как

$$V = k_{n-2} * \rho + \langle \rho, g_x \rangle \quad \text{в } \Omega \quad (6.4.17)$$

по следующим соображениям: (1) в n -мерном случае особенность $k_{n-2}(x)$ интегрируема, и поэтому k_{n-2} можно отождествить с распределением, описываемым формулой

$$\langle k_{n-2}, \varphi \rangle = \int k_{n-2}(x) \varphi(x) d^n x;$$

(2) определение функционала $\langle \rho, \cdot \rangle$ можно непрерывно распространить на любую функцию $g(x)$, принадлежащую классу C^∞ на носителе функции ρ , но при этом не обязательно имеющую ограниченный носитель; (3) уравнение Пуассона справедливо в смысле теории распределений; (4) $V(x)$ является непрерывной функцией вне носителя функции ρ и удовлетворяет граничному условию (6.4.2).

Если носитель ρ не ограничен областью Ω , но заведомо ограничен $\bar{\Omega}$, то потребуется лишь одно изменение, заключающееся в том, что граничное условие (6.4.2) выполняется только в слабом смысле § 5.12.

Упражнения

1. Пусть Ω представляет собой шар $|x| < a$ в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{(|y|/a)x - (a/|y|)y|^{n-2}}, \quad (6.4.18)$$

и проверьте, что G симметрична, $G(x, y) = G(y, x)$, в соответствии с общим случаем, рассматриваемом в упражнении 3.

2. Получите формулу Грина

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d^n x = \int_{\partial \Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} \quad (6.4.19)$$

путем применения теоремы Гаусса к векторному полю $u \nabla v - v \nabla u$; здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x} \in \partial \Omega$.

3. Покажите, что функция Грина в области Ω симметрична, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, сначала положив $u(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ для фиксированных $\mathbf{y}$ и $\mathbf{w}$ в Ω ($\mathbf{y} \neq \mathbf{w}$), затем применив формулу Грина к области

$$\Omega' = \{\mathbf{x} \in \Omega: |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \varepsilon, |\mathbf{x} - \mathbf{w}| > \varepsilon\}$$

(см. рис. 6.2) и, наконец, устремив ε к нулю.

4. Покажите, что решение задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4) дается интегральной формулой Пуассона

$$V(\mathbf{x}) = (1/c_n) \int_{\partial \Omega} f(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\mathcal{A}(\mathbf{y}) \quad (6.4.20)$$

при условии, что все указанные действия имеют смысл.

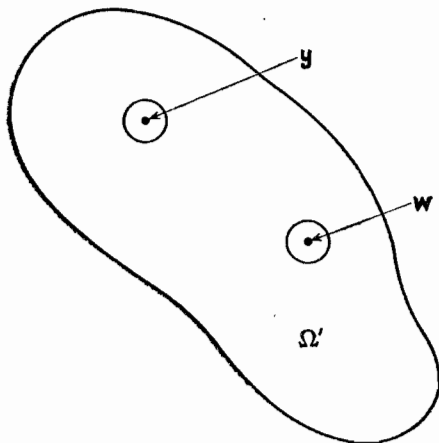


Рис. 6.2. Симметрия функции Грина.

5. Покажите, что действия, включенные в предыдущее упражнение, могут утратить смысл, если $\partial \Omega$ имеет входящее ребро или угол. Для этого рассмотрите задачу, в которой проекция поверхности заряда имеет вид, изображенный на рис. 6.3, и покажите, что в вершине угла $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ напряженность поля $\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ бесконечна.

6. Покажите, что если Ω является шаром $|\mathbf{x}| < a$ в $\mathbb{R}^3$, то интегральная формула Пуассона принимает вид

$$V(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{4\pi a} \int_{\partial \Omega} \frac{f(\mathbf{y}) d\mathcal{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad (6.4.21)$$

а в полярных координатах—вид

$$V(\mathbf{x}) = \frac{a^3 - ar^2}{4\pi} \iint \frac{f(\mathbf{y}) \sin \theta d\theta d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}}, \quad (6.4.22)$$

где $r = |\mathbf{x}| < a$, а θ —угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (т. е. полярная ось для переменной $\mathbf{y}$ на сфере $|\mathbf{y}| = a$ взята в направлении $\mathbf{x}$).

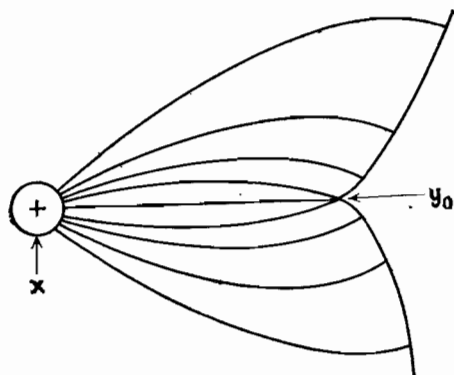


Рис. 6.3. Особенность поля.

7. Рассмотрите задачу Пуассона—Неймана (6.4.13), (6.4.14), в которой распределение заряда $\rho(\mathbf{x})$ состоит из положительного точечного заряда в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и отрицательного точечного заряда в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y}'$. Так как решение $V(\mathbf{x})$ содержит произвольную аддитивную постоянную, рассмотрим разность $V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}')$ для двух точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ и обозначим ее через

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}'). \quad (6.4.23)$$

Найдите характерное представление этой функции, аналогичное (6.4.5) для функции Грина.

Функцию $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ можно интерпретировать как *электрическое сопротивление* в предположении, что область Ω запол-



Рис. 6.4. Идеализированный резистор.

нена однородным веществом с единичным удельным сопротивлением и с изоляцией на границе $\partial\Omega$, что единичный ток подводится к точке $\mathbf{y}$ и выводится в точке $\mathbf{y}'$ и что разность потенциалов

между этими точками y и y' измерима. Тогда электрическое сопротивление представляется четырехточечной функцией. По этой причине в классической электроизмерительной практике точные стандартные резисторы низкого сопротивления выполняются с отдельными выходами тока и напряжения, как показано на рис. 6.4. Если мы положим $x=y$ или $x'=y'$, то G обратится в бесконечность; интерпретировать это можно так: если конечный ток вводится в тело конечного удельного сопротивления в некоторой геометрической точке, то результирующее «контактное» сопротивление бесконечно (оно расходится логарифмически, когда радиус этой «точки» стремится к нулю).

УПРАЖНЕНИЕ

8. Покажите, что

$$G(x, x', y, y') = G(y, y', x, x').$$

(Это одно из многих так называемых соотношений взаимности в электромагнитной теории.)

6.5. ТЕОРЕМА ШВАРЦА О ЯДРЕ.**ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $f(x)g(y)$**

Свертка обычных функций коммутативна, $f*g = g*f$, но из определения (6.2.4) не очевидно, что это верно для распределений. (В предыдущих рассуждениях эта коммутативность не использовалась). Допустим, что оба распределения f и g на $\mathbb{R}^n$ имеют ограниченные носители (это допущение иногда может быть ослаблено). Тогда вопрос о справедливости равенства $f*g = g*f$ переходит в следующий: даны линейные функционалы $\langle f, \cdot \rangle$ и $\langle g, \cdot \rangle$; верно ли, что

$$\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \quad \text{для всех } \varphi \text{ в } C_0^\infty(\mathbb{R}^n)? \quad (6.5.1)$$

Этот вопрос имеет смысл благодаря тому, что величины после первой запятой в каждом члене являются пробными функциями из-за допущенной ограниченности носителей f и g . Сначала мы несколько обобщим вопрос: верно ли, что

$$\langle f(x), \langle g(y), \psi(x, y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \psi(x, y) \rangle \rangle \quad \text{для всех } \psi \text{ в } C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})? \quad (6.5.2)$$

[Может показаться, что (6.5.2) не перекрывает (6.5.1), поскольку носитель $\varphi(x+y)$ обязательно стремится к бесконечности в $\mathbb{R}^{2n}$ в направлениях $x+y = \text{const}$. Однако для того, чтобы согласовать эти уравнения, нужно всего лишь, чтобы $\psi(x, y)$ совпадала с $\varphi(x+y)$ в некоторой прямоугольной области в $\mathbb{R}^{2n}$, определенной носителями $f(x)$ и $g(y)$, а вне этой области ψ можно положить равной нулю.]

Этот вопрос в такой общей форме связан с так называемым прямым произведением двух распределений. Левая часть (6.5.2) как линейный функционал, определенный для всех ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, описывает распределение на $\mathbb{R}^{2n}$, которое мы обозначим через $f(x)g(y)$ и назовем *прямым произведением* f и g . Аналогично правая часть (6.5.2) определяет $g(y)f(x)$. Таким образом, рассматриваемый вопрос заключается в следующем: является ли прямое произведение коммутативным?

[В некоторых простых случаях мы уже использовали прямое произведение, например $\delta(x)\delta(y)$, где равенство (6.5.2) очевидно.]

Тот же вопрос возникает, когда f является распределением на $\mathbb{R}^n$, а g — на $\mathbb{R}^m$; тогда $f(x)g(y)$ и $g(y)f(x)$ представляют собой распределения на $\mathbb{R}^{n+m}$. Можно поставить также вопрос об ассоциативности: верно ли, что

$$f(x)[g(y)h(z)] = [f(x)g(y)]h(z)? \quad (6.5.3)$$

На все эти вопросы отвечает (утвердительно) *теорема Л. Шварца о ядре*. Сначала заметим, что (6.5.2), очевидно, справедливо в частном случае $\psi(x, y) = \psi(x)\chi(y)$, ибо тогда обе части суть просто

$$\langle f, \psi \rangle \langle g, \chi \rangle, \quad (6.5.4)$$

т. е. *билинейный* функционал от ψ и χ . Мы сформулируем теорему Шварца без доказательства.

Теорема о ядре. Пусть $B[\psi, \chi]$ — билинейный функционал, определенный для пробных функций ψ и χ на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и непрерывный по каждому аргументу относительно сходимости типа $\xrightarrow{\mathcal{D}}$. Тогда существует единственный линейный функционал $L(\varphi)$, определенный для пробных функций $\varphi(x, y)$ на $\mathbb{R}^{n+m}$, также непрерывный относительно $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ и такой, что

$$L[\psi(x)\chi(y)] = B[\psi, \chi] \quad \forall \psi, \chi. \quad (6.5.5)$$

Это утверждение остается в силе при замене C_0^∞ на $\mathcal{S}$ и $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ на $\xrightarrow{\mathcal{S}}$, а также для других типов непрерывности функционалов.

Если $B[\psi, \chi]$ взят в виде (6.5.4), мы выводим коммутативность прямого произведения из единственности L , потому что, как указано выше, билинейные функционалы, соответствующие обеим частям (6.5.2), одинаковы.

Повторно применяя теорему, мы заключаем, что мультилинейный функционал $M[\psi_1, \dots, \psi_k]$ определяет единственный линейный функционал $L(\varphi)$, такой, что

$$L[\psi_1(x_1) \dots \psi_k(x_k)] = M[\psi_1, \dots, \psi_k] \quad \forall \psi_1, \dots, \psi_k. \quad (6.5.6)$$

Трилинейный случай показывает ассоциативность прямого произведения.

Возвращаясь к (6.5.1), мы непосредственно выводим коммутативность и ассоциативность для свертки распределений с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$:

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h. \quad (6.5.7)$$

Некоторые авторы записывают прямое произведение в виде $f(x) \times g(y)$, но нет уверенности в необходимости этого, поскольку для обычных функций так не делают.

Дальнейшее обсуждение и обобщение этой теоремы см. в книге Гельфанда и Виленкина [1961] (Обобщенные функции, вып. 4).

Для распределений с некомпактным носителем свертка, если она существует, может не быть ассоциативной. Это верно уже для функций. Положим, что

$$f(x) \equiv 1, \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = xe^{-x^2}, \quad (6.5.8)$$

тогда непосредственные вычисления дают $f * (g * h) = \text{const} \neq 0$, $(f * g) * h \equiv 0$. Однако ассоциативность имеет место, когда два распределения из f, g, h имеют компактный носитель или, в более общем случае, когда эти носители связаны надлежащим образом.

Для того чтобы определить свертку через прямое произведение, т. е.

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) g(y), \varphi(x+y) \rangle \quad (6.5.9)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, должно быть возможным найти пробную функцию $\psi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ такую, что $\varphi(x+y) = \psi(x, y)$ для всех точек x, y носителя прямого произведения, т. е. для всех точек множества

$$\text{supp}(f) \times \text{supp}(g). \quad (6.5.10)$$

Это требование состоит в следующем: если R — любая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемая как носитель φ , то пересечение множества (6.5.10) с множеством, задаваемым условием $x+y \in R$ («слой» под углом 45° к осям), должно быть ограниченным множеством. Тогда мы можем выбрать $\psi(x, y) = \varphi(x+y)$ на этом множестве и положить $\psi \rightarrow 0$ гладким образом вне множества.

Для распределений на $\mathbb{R}$ (см. упражнение 1 § 6.2) данное условие выполняется, если носители обоих распределений f и g ограничены снизу (или сверху) на $\mathbb{R}$. Обобщение для распределений на $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что оба распределения f и g должны иметь носители (которые могут простирались до бесконечности), лежащие в круговом конусе в $\mathbb{R}^n$ с полууглом раствора меньше $\pi/2$. Если носители трех распределений f, g и h лежат в таком конусе, то $f * (g * h) = (f * g) * h$.

6.6. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАПЛАСИАНА

На основании многих классических примеров, в которых может быть использовано разделение переменных, естественно ожидать, что для задачи

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

в Ω с граничным условием $u = 0$ на $\partial\Omega$ всегда существует полная ортонормированная система $\{u_j\}_1^\infty$ собственных функций с соответствующими собственными значениями $\{\lambda_j\}$, такими, что $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ и $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Классический вариационный метод для этой задачи, не связанный с разделением переменных, основан на последовательной минимизации интеграла Дирихле

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d^n \mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d^n \mathbf{x} \quad (6.6.1)$$

при различных ограничениях на функцию u . Например, основная собственная функция $u_1(\mathbf{x})$ (соответствующая наименьшему собственному значению λ_1) получается минимизацией $D(u)$ при следующих ограничениях:

$$(1) \quad \int_{\Omega} u^2 d^n \mathbf{x} = 1, \quad (6.6.2)$$

$$(2) \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (6.6.3)$$

при допущении, что такая минимизирующая функция $u_1(\mathbf{x})$ существует и достаточное число раз дифференцируема. А именно, пусть $u_1 + \delta u$ — любая близкая функция, которая также обращается в нуль на границе. Ограничиваясь первым порядком малости, из (6.6.1) и (6.6.2) получаем

$$\int \nabla u_1 \cdot \nabla (\delta u) d^n \mathbf{x} = 0, \quad (6.6.4)$$

$$\int u_1 \delta u d^n \mathbf{x} = 0. \quad (6.6.5)$$

Поскольку $\delta u = 0$ на $\partial\Omega$, интегрирование по частям в (6.6.4) дает

$$-\int (\nabla^2 u_1) \delta u d^n \mathbf{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_1 + \lambda u_1) \delta u d^n \mathbf{x} = 0 \quad (6.6.6)$$

для любого значения так называемого множителя Лагранжа λ . Уравнение (6.6.5) показывает, что функция δu должна быть ортогональна u_1 , но в остальном она является произвольной

гладкой функцией, которая обращается в нуль на $\partial\Omega$. Однако если λ выбрано так, что $\nabla^2 u_1 + \lambda u_1$ ортогонально u_1 , т. е. если λ определяется из условия

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u_1 + \lambda u_1) u_1 d^n x = 0, \quad (6.6.7)$$

то (6.6.6) имеет силу независимо от того, ортогональна δu к u_1 или нет. Следовательно,

$$\nabla^2 u_1 + \lambda u_1 = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (6.6.8)$$

это и есть требуемое уравнение для собственной функции (если положить $\lambda_1 = \lambda$) — *уравнение Эйлера—Лагранжа* данной вариационной задачи.

Следующие собственные функции получаются подобным образом. Например, после того как собственные функции $u_1, \dots, u_{j-1}$ найдены, u_j будет той функцией u , которая минимизирует интеграл Дирихле (6.6.1) при условиях

$$\int_{\Omega} u^2 d^n x = 1, \quad \int_{\Omega} u_k u d^n x = 0, \quad k = 1, \dots, j-1,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Вычисления, используемые в вариационном методе, подробно проводятся в § 6.8, где доказывается существование минимизирующих функций.

Аналогично решение $V(x)$ задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4), когда оно существует, является функцией u , которая минимизирует интеграл (6.6.1) при условии, что $u(x) = f(x)$ на границе $\partial\Omega$.

Существование функции $u(x)$, минимизирующей (6.6.1) при различных условиях, известно как *принцип Дирихле* и считалось очевидным до конца девятнадцатого столетия, когда были найдены противоречащие примеры для некоторых специальных форм границы $\partial\Omega$. При подходящих ограничениях на границу, таких, как условие внешнего конуса, приведенное в § 6.4, существование минимизирующих функций доказывалось различными математиками, начиная с Гильберта в 1899 г. (см. книгу Куранта [1950]).

Если условие конуса нарушено, то минимизирующей функции может и не быть. Например, если достаточно острая игла, диаметр которой равен, скажем, $ae^{-b/z}$, где z — расстояние от некоторой точки, вонзается в область, то, вообще говоря, не существует решения задачи Дирихле. Простейший пример такого случая, когда игла одномерна, рассмотрен в следующем упражнении.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Рассмотрим область Ω , изображенную на рис. 6.5, для которой частью границы $\partial\Omega$ является прямолинейный отрезок вдоль оси очень длинного замкнутого цилиндра. Допустим, что граничная функция $f(x)$ равна нулю на этом

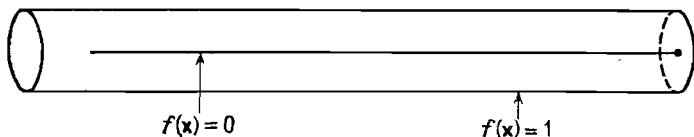


Рис. 6.5. Задача Дирихле, не имеющая решения.

отрезке и равна единице на остальной части границы. Предположим, что «пробная функция» $u(x)$ в интеграле Дирихле (6.6.1) взята в виде функции, зависящей лишь от радиуса r (исключая окрестности концов), а именно

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ \frac{\ln(r/\varepsilon)}{\ln(a/\varepsilon)} & \text{при } \varepsilon \leq r \leq a, \end{cases}$$

где a — радиус цилиндра, а ε — параметр из $(0, a)$. Покажите, что интеграл (6.6.1) $\rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если пренебречь концевыми эффектами. Отсюда следует, что если бы существовала минимизирующая функция u , то она удовлетворяла бы уравнению $\nabla u = 0$, т. е. была бы постоянной, а значит, не могла бы одновременно удовлетворить граничным условиям и на оси, и на цилиндре.

6.7. ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА W^1

Классическая теорема Арцела (или Асколи — Арцела) утверждает, что любая равномерно ограниченная и равномерно непрерывная последовательность функций на компактной области в $\mathbb{R}^n$ содержит сходящуюся (фактически равномерно сходящуюся) подпоследовательность (см. книгу Куранта и Гильберта [1953]) или книгу Данфорда и Шварца [1958]). В частности, эта теорема применима к функциям, имеющим первые производные, которые тоже ограничены общей гранью K , ибо тогда функции равномерно непрерывны. Эта теорема используется для доказательства существования решения некоторых вариационных задач. Для вариационной задачи лапласиана, описанной в предыдущем параграфе, нужна аналогичная теорема, известная как лемма Реллиха, в которой функция и ее первые производные ограничиваются не поточечно, а по L^2 -норме и подпоследовательность сходится не поточечно, а в пространстве L^2 .

Говорят, что функции u образуют равномерно непрерывное семейство, если разности $u(x+y) - u(x)$ ограничены для данного y величиной $\varepsilon(y)$, одинаковой для всех функций семейства и всех x , и эта величина стремится к нулю, когда y стре-

мится к нулю. В настоящей теореме мы используем границу для разностей $u(x+y) - u(x)$ в смысле L^2 ; а не просто границу, равномерную по x , как будет показано в приведенной ниже лемме 1.

Пусть $W^1 = W^1(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева, рассмотренное в § 5.11, а именно гильбертово пространство, состоящее из всех $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, которые имеют конечные значения нормы $\|u\|_1$, задаваемой в виде

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2, \quad (6.7.1)$$

где $\|u\|$ — норма в L^2 , а $\|\nabla u\|^2$ определяется так:

$$\|\nabla u\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \|\partial u / \partial x_k\|^2. \quad (6.7.2)$$

Пусть $K > 0$. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество элементов u из W^1 , для которых $\|u\|_1 \leq K$. Для любого такого u $\|u\| \leq K$ и $\|\nabla u\| \leq K$.

Лемма 1. Пусть $u \in \mathcal{K}$. Тогда для любого y и любого $\delta > 0$

$$\|T_y u - u\| < K |2y|^{1/2}, \quad (6.7.3)$$

где T_y — оператор сдвига: $(T_y f)(x) = f(x - y)$.

Доказательство. Пусть $u_\delta = J_\delta u$, где J_δ — оператор сглаживания, описанный в § 2.6. Так как $\|J_\delta f\| \leq \|f\|$ для любого f в L^2 (§ 5.10) и $\nabla J_\delta f = J_\delta \nabla f$ (§ 2.6), видно, что u_δ также принадлежит классу $\mathcal{K}$; тогда

$$\|T_y u_\delta - u_\delta\|^2 = \|T_y u_\delta\|^2 - 2 \operatorname{Re} (u_\delta, T_y u_\delta) + \|u_\delta\|^2.$$

Первый и третий члены в правой части не зависят от y (фактически они равны). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (u_\delta, T_{sy} u_\delta) &= \frac{d}{ds} \int \overline{u_\delta(x)} u_\delta(x - sy) d^n x = \\ &= - \int \overline{u_\delta(x)} y \cdot \nabla u_\delta(x - sy) d^n x. \end{aligned}$$

В силу неравенства Шварца

$$\left| \frac{d}{ds} 2 \operatorname{Re} (u_\delta, T_{sy} u_\delta) \right| \leq |2y| \|u_\delta\| \|\nabla u_\delta\| \leq |2y| K^2$$

и поэтому

$$\|T_y u_\delta - u_\delta\|^2 = \int_0^1 \frac{d}{ds} \|T_{sy} u_\delta - u_\delta\|^2 ds \leq |2y| K^2,$$

откуда следует (6.7.3), так как

$$T_y u_\delta - u_\delta = J_\delta (T_y u - u) \xrightarrow{L^2} T_y u - u \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

В § 5.10 было показано, что $u_\delta \rightarrow u$ в L^2 при $\delta \rightarrow 0$ и любом фиксированном u . Но нам сейчас нужно несколько большее.

Лемма 2. Сходимость $u_\delta \rightarrow u$ является равномерной в классе $\mathcal{K}$. То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$, не зависящее от u , такое, что

$$\|u_\delta - u\| < \varepsilon \quad \text{для } u \in \mathcal{K}, \delta \leq \delta_0$$

или, точнее,

$$\|u_\delta - u\|^2 \leq 2\delta K^2 \quad \text{для } u \in \mathcal{K}. \quad (6.7.4)$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что (6.7.4) справедливо, если u является C_0^∞ -функцией ψ из $\mathcal{K}$. Ясно, что

$$|\psi_\delta(x) - \psi(x)| \leq \int |\psi(x + \delta y) - \psi(x)| \rho(y) d^n y.$$

Квадрат этого выражения можно выразить в виде произведения двух интегралов, скажем по y_1 и y_2 . Сначала проинтегрируем это произведение по x , т. е., рассмотрим интеграл

$$\int |\psi(x + \delta y_1) - \psi(x)| \cdot |\psi(x + \delta y_2) - \psi(x)| d^n x.$$

Используем неравенство Шварца и лемму 1. Так как носитель ρ имеет конечный радиус, необходимо лишь рассмотреть $|y_1| \leq 1$ и $|y_2| \leq 1$. Следовательно, по лемме 1 последнее выражение не превышает $2\delta K^2$. Далее, интегрирование функций $\rho(y_1)$ и $\rho(y_2)$ даст единицу, и этим устанавливается, что (6.7.4) справедливо для $u = \psi$. Теперь для данного u из $\mathcal{K}$ мы полагаем $\psi = J_{\delta_1} u$. Функция ψ также принадлежит $\mathcal{K}$, так как, согласно (5.10.1),

$$\|\psi\| = \|J_{\delta_1} u\| \leq \|u\|$$

и

$$\|\nabla \psi\| = \|\nabla J_{\delta_1} u\| = \|J_{\delta_1} \nabla u\| \leq \|\nabla u\|.$$

Кроме того, $\psi_\delta - \psi = J_{\delta_1}(u_\delta - u)$, поскольку $J_\delta J_{\delta_1} = J_{\delta_1} J_\delta$. Следовательно, $\psi_\delta - \psi \rightarrow u_\delta - u$ при $\delta_1 \rightarrow 0$, откуда следует (6.7.4).

Пусть теперь $\mathcal{K}(\Omega)$ обозначает множество тех элементов класса $\mathcal{K}$, носители которых принадлежат ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема (лемма Реллиха). Множество $\mathcal{K}(\Omega)$ условно компактно по L^2 -норме, т. е. любая последовательность $\{u_k\}$ элементов из $\mathcal{K}(\Omega)$ содержит подпоследовательность $\{\tilde{u}_k\}$, которая сходится в L^2 .

Замечание. Слово «условно» указывает на то, что предел последовательности $\{\tilde{u}_k\}$ не обязательно содержится в $\mathcal{K}$ и даже в W^1 .

Доказательство. Сначала мы покажем, что элементы $\mathcal{K}(\Omega)$, будучи подходящим образом сглажены, равномерно непрерывны. Для любого $u \in \mathcal{K}(\Omega)$ $u_\delta = J_\delta u$ определено в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет уравнению

$$u_\delta(x - y) - u_\delta(x) = J_\delta(T_y u - u) = \langle T_y u - u, \rho_{x, \delta} \rangle$$

(см. § 2.6). Поэтому

$$|u_\delta(x - y) - u_\delta(x)| \leq \|T_y u - u\| \|\rho_{x, \delta}\|,$$

но

$$\|\rho_{x, \delta}\|^2 = \int \left| \rho \left(\frac{z}{\delta} \right) \left(\frac{1}{\delta} \right)^n \right|^2 d^n z = \frac{\text{const}}{\delta^n},$$

т. е.

$$|u_\delta(x-y) - u_\delta(x)| \leq K |2y|^{1/2} \frac{\text{const}}{\delta^{n/2}}.$$

Таким образом, функции $J_\delta u = u_\delta(x)$, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, равномерно непрерывны для любого $\delta > 0$. Легко показать, что они также равномерно ограничены для любого $\delta > 0$. Наконец, они отличны от нуля только в ограниченной области $\Omega(\delta)$, которая расширена вне Ω на расстояние δ . Следовательно, к этим функциям может быть применена теорема Арцела. Пусть $\{u_k\}$ — произвольная последовательность элементов в $\mathcal{H}(\Omega)$. Нам нужно показать, что существует подпоследовательность, которая сходится в L^2 . Используем индукцию:

(1) Возьмем $\delta=1$, $J_\delta = J_1$ и допустим, что $\{u_k^1\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k\}$, что $\{J_1 u_k^1\}$ сходится.

(2) Возьмем $\delta=1/2$, $J_\delta = J_{1/2}$ и допустим, что $\{u_k^2\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k^1\}$, что $\{J_{1/2} u_k^2\}$ сходится.

.....
(q) Возьмем $\delta=1/q$, $J_\delta = J_{1/q}$ и допустим, что $\{u_k^q\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k^{q-1}\}$, что $\{J_{1/q} u_k^q\}$ сходится. Тогда диагональная подпоследовательность $\{u_k^k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $\{J_\delta u_k^k\}$ сходится для любого $\delta=1, 1/2, \dots$, и мы хотим показать, что и сама $\{u_k^k\}$ сходится. Задав $\varepsilon > 0$, мы выберем такое $\delta=1/q$, что $\|J_\delta u - u\| < \varepsilon$ для всех $u \in \mathcal{H}$ в силу леммы 2, и для такого δ мы выберем L , такое, что

$$\|J_\delta(u_k^k - u_l^l)\| < \varepsilon \quad \text{при } k, l > L.$$

Тогда

$$\|u_k^k - u_l^l\| < 2\varepsilon \quad \text{при } k, l > L,$$

а отсюда следует, что подпоследовательность $\{u_k^k\}$, содержащаяся в $\{u_k\}$, сходится по L^2 -норме, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если $u \in W^1(\mathbb{R}^n)$, то $J_\delta u \rightarrow u$ по норме $\|\cdot\|_1$, и что это справедливо относительно ограничения $J_\delta u$ областью Ω , если $u \in W^1(\Omega)$.

6.8. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Сейчас мы установим существование и другие свойства решений вариационной задачи из § 6.6. Как и в двух предыдущих параграфах, Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой гиперповерхностью $\partial\Omega$, $L^2(\Omega)$ — основное гильбертово пространство, а W^1 — соответствующее пространство Соболева, причем подпространство W_0^1 пространства W^1 состоит из элементов, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Согласно определению (6.7.2), интеграл Дирихле $D(u)$ означает $\|\nabla u\|^2$. Мы будем действовать по индукции и допустим, что первые $j-1$ собственные функции u_α и соот-

ветствующие собственные значения λ_k уже найдены ($k = 1, \dots, j-1$) и что каждая u_k принадлежит W_0^1 и удовлетворяет уравнению $\nabla^2 u_k + \lambda_k u_k = 0$ в Ω . В качестве элементов из $L^2(\mathbb{R}^n)$ функции u_k считаются имеющими носитель в $\bar{\Omega}$, т. е. обращающимися в нуль вне Ω . Наше построение таково, что каждая новая собственная функция нормирована и ортогональна к предыдущим, т. е. мы полагаем, что $u_1, \dots, u_{j-1}$ образуют ортонормированную систему. Согласно § 6.6, нужно найти новую собственную функцию, т. е. функцию, которая минимизирует $\|\nabla u\|^2$ при только что упомянутых условиях. Поэтому мы определяем M как соответствующее подпространство из W_0^1 :

$$M = \{u \in W_0^1: (u_k, u) = 0 \ (k = 1, \dots, j-1)\}. \quad (6.8.1)$$

Положим

$$\lambda = \inf \{\|\nabla u\|^2: u \in M, \|u\| = 1\} \quad (6.8.2)$$

и покажем, что эта нижняя грань действительно достигается.

Теорема. *Существует элемент $\tilde{u} \in M$, такой, что $\|\tilde{u}\| = 1$, $\|\nabla \tilde{u}\|^2 = \lambda$ и $\nabla^2 \tilde{u} + \lambda \tilde{u} = 0$ в Ω .*

Доказательство. По определению нижней грани существует последовательность элементов $u \in M$ с нормой $\|u\| = 1$, на которых $\|\nabla u\|^2$ сходится к λ (сверху). Если $K > \sqrt{1 + \lambda}$, то члены этой последовательности, начиная с некоторого элемента, принадлежат множеству $\mathcal{H}$, описанному в предыдущем параграфе. Поэтому, согласно теореме компактности, существует сходящаяся в L^2 подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{v^{(l)}\}_{l=1}^\infty$. Иначе говоря, каждая функция $v^{(l)}$ принадлежит M и $\|\nabla v^{(l)}\|^2 \rightarrow \lambda$, $v^{(l)} \rightarrow \tilde{u} \in L^2(\Omega)$ при $l \rightarrow \infty$. В силу непрерывности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $L^2(\Omega)$ элемент $\tilde{u}$ удовлетворяет условиям

$$\|\tilde{u}\| = 1, \quad (u_k, \tilde{u}) = 0 \quad (k = 1, \dots, j-1), \quad (6.8.3)$$

так как каждая $v^{(l)}$ удовлетворяет им. Пусть w — произвольный элемент из M . Поскольку λ можно характеризовать как нижнюю грань $\|\nabla u\|^2 / \|u\|^2$ для $u \in M$, имеем

$$\|\nabla v^{(l)} + \varepsilon \nabla w\|^2 - \lambda \|v^{(l)} + \varepsilon w\|^2 \geq 0 \quad (6.8.4)$$

для любого ε и любого $l = 1, 2, \dots$; отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla v^{(l)}\|^2 - \lambda \|v^{(l)}\|^2 + 2 \operatorname{Re} [\varepsilon (\nabla v^{(l)}, \nabla w) - \lambda \varepsilon (v^{(l)}, w)] + \\ & + |\varepsilon|^2 [\|\nabla w\|^2 - \lambda \|w\|^2] \geq 0. \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

При $l \rightarrow \infty$ нижний предел левой части этого неравенства неотрицателен. Более того, первый член в квадратных скобках стремится к нулю и $(v^{(l)}, w) \rightarrow (\tilde{u}, w)$. Таким образом,

$$\liminf 2 \operatorname{Re} \varepsilon (\nabla v^{(l)}, \nabla w) - 2\lambda \operatorname{Re} \varepsilon (\tilde{u}, w) + |\varepsilon|^2 [\|\nabla w\|^2 - \lambda \|w\|^2] \geq 0.$$

Далее, последовательно полагая ε равным ε_0 , $-\varepsilon_0$, $i\varepsilon_0$, $-i\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$, мы достигаем верхнего и нижнего пределов на вещественной и мнимой частях $(\nabla v^{(l)}, \nabla w)$. В пределе $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ имеем

$$(\nabla v^{(l)}, \nabla w) \rightarrow \lambda (\tilde{u}, w) \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (6.8.6)$$

Мы используем этот результат дважды. Сначала отметим, что для любой функции φ в C_0^∞ (φ принадлежит W_0^1) функция

$$w = \varphi - \sum_{k=1}^{j-1} (u_k, \varphi) u_k$$

принадлежит M . Кроме того,

$$\nabla^2 w = \nabla^2 \varphi + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k (u_k, \varphi) u_k.$$

Поскольку w и все ее первые частные производные принадлежат $L^2(\Omega)$, а $v^{(j)} \in W_0^1$, можно использовать формулу интегрирования по частям (5.12.5) для преобразования выражения в левой части (6.8.6) в $-(v^{(j)}, \nabla^2 w)$. Именно здесь мы используем граничное условие $v^{(j)} = 0$ на $\partial\Omega$ или принадлежность $v^{(j)}$ подпространству W_0^1 . Таким образом, поскольку $v^{(j)}$ и $\tilde{u}$ ортогональны $u_1, \dots, u_{j-1}$, соотношение (6.8.6) дает

$$-(v^{(j)}, \nabla^2 \varphi) \rightarrow \lambda(\tilde{u}, \varphi).$$

Следовательно, $(\tilde{u}, \nabla^2 \varphi + \lambda \varphi) = 0$, а значит, по определению производной распределения

$$\nabla^2 \tilde{u} + \lambda \tilde{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.8.7)$$

что является одним из искоемых результатов. Теперь возьмем в качестве w в (6.8.6) любую функцию $v^{(k)}$. Тогда

$$(\nabla v^{(l)}, \nabla v^{(k)}) \rightarrow \lambda(\tilde{u}, v^{(k)}) \quad \text{при } l \rightarrow \infty,$$

иначе говоря, если k также устремить к бесконечности, то

$$(\nabla v^{(l)}, \nabla v^{(k)}) \rightarrow \lambda \|\tilde{u}\|^2 = \lambda \quad \text{при } k, l \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что $\{\nabla v^{(l)}\}$ является последовательностью Коши в L^2 . (Это значит, что $\{(\partial/\partial x_q) v^{(l)}\}_{l=1}^\infty$ при каждом q является последовательностью Коши.) По определению производной распределения предел $\nabla v^{(l)}$ равен $\nabla \tilde{u}$, и мы заключаем, что $\nabla \tilde{u} \in L^2$, т. е. $\tilde{u}$ принадлежит пространству Соболева W^1 , а $v^{(l)} \rightarrow \tilde{u}$ по норме $\|\cdot\|_1$ пространства W^1 , и что $\|\nabla \tilde{u}\|^2 = \lambda$. Поскольку каждая функция $v^{(l)} \in W_0^1$, которое представляет собой замкнутое многообразие в W^1 , то $\tilde{u} \in W_0^1$. Итак, $\tilde{u}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Нетрудно видеть, что собственные функции, полученные таким путем, образуют полную систему в $L^2(\Omega)$. Во-первых, они ортонормированы по построению. Во-вторых, после того как получена любая их совокупность $\{u_1, u_2, \dots\}$, путем указанного построения можно получать дальнейшие собственные функции, если размерность многообразия M , ортогонального этим функциям, отлична от нуля, тогда как при $\dim M = 0$ в W_0^1 не найдется функции, ортогональной всем собственным функциям. Относительно L^2 -нормы W_0^1 плотно в $L^2(\Omega)$, а значит, система собственных функций является полной.

6.9. ЗАДАЧА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В статье Сэттинджера [1970] сформулирована следующая задача: пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$; найти гладкое векторное поле $u(x)$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовле-

творяющее уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \nabla p \quad \text{в } \Omega, \quad (6.9.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.9.2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (6.9.3)$$

для некоторого числа λ и некоторого скалярного поля $p(\mathbf{x})$; тогда λ называется *собственным значением* данной задачи, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — *собственной функцией*.

В полной задаче устойчивости в (6.9.1) к оператору Лапласа добавлены члены низшего порядка, состоящие из произведений первых производных на функции и описывающие основное течение, устойчивость которого должна быть определена. В методе Сэттинджера решения получаются путем соответствующего возмущения решений данной задачи.

Кажется естественным ожидать, что сформулированная задача должна иметь полную систему собственных функций, основываясь на сравнении с задачей электромагнитных колебаний резонатора Ω , для которого граница $\partial\Omega$ — идеальный проводник, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — электрическое поле. Известно, что эта задача является самосопряженной и имеет полную ортонормированную систему собственных функций. Эта задача отличается от рассматриваемой, во-первых, тем, что $\nabla p = 0$, а это ограничивает свободу выбора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, а во-вторых, тем, что единственным граничным условием является обращение в нуль на $\partial\Omega$ тангенциальной составляющей $\mathbf{u}$, что увеличивает свободу выбора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Мы таким образом как бы обмениваем одну функцию на $\partial\Omega$ (p удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому полностью определяется своими значениями на $\partial\Omega$) на другую такую функцию — нормальную составляющую $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на $\partial\Omega$.

Сначала мы формально проведем вычисления, а затем покажем, как эти действия могут быть обоснованы теорией распределений. Интеграл Дирихле обобщается при помощи введения кроме скалярного произведения векторов

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d^3\mathbf{x} \quad (6.9.4)$$

скалярного произведения, включающего диадики,

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{v} \, d^3\mathbf{x}, \quad (6.9.5)$$

где двоеточие указывает на двойное скалярное произведение

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{k, l=1}^3 (\partial_j \bar{u}_k) (\partial_j v_k). \quad (6.9.6)$$

Обобщенный интеграл Дирихле имеет вид

$$D(\mathbf{u}) = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}). \quad (6.9.7)$$

Наименьшее собственное значение λ является минимумом $D(\mathbf{u})$ при дополнительном и граничном условиях (6.9.2), (6.9.3) и при ограничении $\|\mathbf{u}\|=1$, где $\|\mathbf{u}\|$ — норма, определенная при помощи (6.9.4). Собственная j -я функция строится так, чтобы она была ортогональна предыдущим $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}$ и нормирована, т. е. мы предполагаем, что все уже построенные функции образуют ортонормированную систему. Обозначим через M соответствующее пространство векторных полей

$$M = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}): (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = 0 \ (k=1, \dots, j-1), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}. \quad (6.9.8)$$

(В дальнейшем мы определим это пространство более точно.) Допустим, что минимум $D(\mathbf{u})$ для $\mathbf{u} \in M$ и $\|\mathbf{u}\|=1$ получен при $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. Тогда, полагая $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{w}$ и рассматривая $\mathbf{w} \in M$ как малую вариацию, при помощи того же вариационного метода, как в § 6.6, получаем

$$\int_{\Omega} [\nabla \tilde{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{w} - \lambda \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}] d^3x = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in M,$$

где λ — множитель Лагранжа. Переходя к составляющим векторов, имеем

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} [\nabla \tilde{u}_j \cdot \nabla w_j - \lambda \tilde{u}_j w_j] d^3x = 0.$$

Так как каждая компонента $\mathbf{w}$ равна нулю на $\partial\Omega$, мы можем проинтегрировать по частям и найти, что

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{w} d^3x = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in M. \quad (6.9.9)$$

В этом уравнении можно отбросить ограничение, заключающееся в том, что $\mathbf{w}$ должна быть ортогональна найденным собственным функциям, ибо если $\mathbf{u}_k$ — одна из таких функций, то

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{u}_k d^3x = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot [\nabla^2 \mathbf{u}_k + \lambda \mathbf{u}_k] d^3x = (\lambda - \lambda_k) \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_k d^3x,$$

а последний интеграл равен нулю из-за ортогональности $\tilde{\mathbf{u}}$ функциям $\mathbf{u}_k$. Поэтому (6.9.9) выполняется для произвольного соленоидального поля $\mathbf{w}$, которое обращается в нуль на границе. В частности, если $\mathbf{w} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — произвольное векторное поле с носителем в Ω , то интегрирование по частям показывает, что $\nabla \times (\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}})$ ортогонально любому такому $\boldsymbol{\varphi}$ и поэтому равно нулю, откуда следует, что $\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}$ является градиентом, т. е.

удовлетворяет (6.9.1). (Напомним, что область Ω предполагается односвязной.)

Наоборот, пусть $\tilde{\mathbf{u}}$ удовлетворяет уравнению (6.9.1), является соленоидальным полем и обращается в нуль на границе. Тогда мы можем подставить в формулу (6.9.9) $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{u}}$ и интегрированием по частям получить, что

$$D(\tilde{\mathbf{u}}) = \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2.$$

Для того чтобы обосновать все шаги проведенных выше вычислений, мы сначала будем интерпретировать (6.9.4), (6.9.5) с помощью обычного скалярного произведения в $L^2(\Omega)$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^3 (u_j, v_j), \quad (6.9.10)$$

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \sum_{j,k=1}^3 (\partial_j u_k, \partial_j v_k). \quad (6.9.11)$$

Обозначим через H гильбертово пространство всех векторных полей в Ω с конечной нормой $\|\mathbf{u}\|$, а через H^* — соответствующее пространство Соболева полей с конечными значениями нормы $\|\mathbf{u}\|_1$, определяемой следующим равенством:

$$\|\mathbf{u}\|_1^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2. \quad (6.9.12)$$

Элемент $\mathbf{u}$ из H принадлежит H^* , если все девять частных производных $\partial_j u_k$ принадлежат $L^2(\Omega)$.

Согласно векторному анализу, любое достаточно гладкое векторное поле может быть представлено в виде суммы *соленоидального* (бездивергентного) поля и *безвихревого* (потенциального) поля. В силу условия (6.9.2) нам желательно найти подпространство пространств H и H^* , состоящие из соленоидальных полей. Однако классическое разложение неоднозначно: можно добавить к одной части и вычесть из другой градиент любой гармонической функции — если $\nabla^2 \psi = 0$, то $\nabla \psi$ одновременно и соленоидально, и потенциально. Для однозначности разложения нужно использовать граничное условие на $\partial\Omega$ (или на бесконечности). В некоторой степени произвольно мы выбираем условие, состоящее в том, что нормальная составляющая соленоидальной части обращается в нуль на $\partial\Omega$, поскольку это условие подразумевается в (6.9.3). Итак, мы хотим определить подпространство H_σ^* пространства H^* (индекс σ означает «соленоидальный») со следующим свойством: гладкое поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ принадлежит H_σ^* тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

Для гладкого поля $\mathbf{u}$ условия (6.9.13) эквивалентны условию

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, d^3x = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad (6.9.14)$$

что легко получить интегрированием по частям. (Сначала нужно рассмотреть φ , обращающуюся в нуль на $\partial\Omega$, и установить, что если (6.9.14) справедливо, то $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ в Ω . Затем, рассматривая произвольную φ , можно установить, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$.) Итак, мы определяем

$$H_0 = \{\mathbf{u} \in H: (\nabla \varphi, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})\}. \quad (6.9.15)$$

H_0 является замкнутым линейным многообразием в H , а значит, подпространством, потому что оно представляет собой ортогональное дополнение. H_0 — соответствующее подпространство H^1 .

Можно рассматривать подпространство (6.9.8) как

$$M = \{\mathbf{u} \in H_0: (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = 0 \quad (k = 1, \dots, j-1),$$

каждая компонента $\mathbf{u}$ принадлежит $W_0^1\} \quad (6.9.16)$

и положить

$$\lambda = \inf \{\|\nabla \mathbf{u}\|^2: \mathbf{u} \in M, \|\mathbf{u}\| = 1\}.$$

Теорема. Эта нижняя грань достигается, т. е. существует элемент $\tilde{\mathbf{u}} \in M$, такой, что $\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda$, $\|\tilde{\mathbf{u}}\| = 1$. Кроме того,

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}} = \nabla p \quad \text{в } \Omega \quad (6.9.17)$$

для некоторого скалярного поля p .

Доказательство (аналогичное доказательству в предыдущем параграфе). Рассмотрим такую последовательность элементов $\mathbf{u}$ в M с $\|\mathbf{u}\| = 1$, что $\|\nabla \mathbf{u}\|^2 \rightarrow \lambda$. Пусть $K > \sqrt{1 + \lambda}$; тогда, начиная с некоторого элемента последовательности, каждый $\mathbf{u}$ принадлежит множеству $\mathcal{K}$, фигурирующему в теореме компактности § 6.7. Следовательно, существует сходящаяся в L^2 подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{v^{(l)}\}_1^\infty$. В силу непрерывности скалярного произведения предел $\tilde{\mathbf{u}}$ этой подпоследовательности удовлетворяет условиям

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\| = 1, \quad (\mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (k = 1, \dots, j-1), \quad (6.9.18)$$

поскольку каждый элемент $v^{(l)}$ удовлетворяет им. С помощью того же рассуждения, что и в предыдущем параграфе (см. (6.8.5), (6.8.6)), мы заключаем, что если $\mathbf{w}$ — произвольный элемент M , то

$$(\nabla v^{(l)}, \nabla \mathbf{w}) \rightarrow \lambda (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (6.9.19)$$

Этот результат мы используем тремя способами. Во-первых, положив $\mathbf{w} = v^{(m)}$, мы установим, что $\{\nabla v^{(l)}\}$ является последовательностью Коши, и отсюда, как прежде, следует, что ее предел равен $\tilde{\mathbf{u}}$ и поэтому $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1$, а $v^{(l)} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ в H^1 . Но M является подпространством H^1 (т. е. замкнутым линейным многообразием), откуда вытекает, что $\tilde{\mathbf{u}} \in M$. Из (6.9.19) тогда следует, что

$$(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{w}) = \lambda (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) \quad (6.9.20)$$

для $\mathbf{w} \in M$ и, в частности, что

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda. \quad (6.9.21)$$

Во-вторых, положим $\mathbf{w}$ в (6.9.20) равным $\mathbf{u}_k$ ($1 \leq k \leq j-1$). Так как $(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k) = 0$, видно, что $(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}_k) = 0$. В-третьих, допустим, что φ — любое векторное поле в $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\mathbf{w} = \nabla \times \varphi - \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{u}_k, \nabla \times \varphi) \mathbf{u}_k$$

принадлежит M , и мы видим из (6.9.13), что

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla^2 \nabla \times \varphi + \lambda \nabla \times \varphi) = 0,$$

а потому, используя определение производной распределения, получаем

$$\nabla \times (\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6.9.22)$$

Из приведенной ниже леммы следует, что

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}} = \nabla p \quad \text{в } \Omega$$

для некоторого скалярного поля p .

Полнота системы собственных функций доказывается так же, как в предыдущем параграфе.

Лемма. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из кусочно гладких замкнутых поверхностей и удовлетворяющей условию внешнего конуса. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле, каждая компонента которого является распределением в $L^2(\Omega)$, причем $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ в Ω . Тогда существует (скалярное) распределение p в Ω , такое, что $\mathbf{v} = \nabla p$ в Ω .

Доказательство. Мы покажем, что для каждого $\delta > 0$ существует распределение $p = p^\delta$, такое, что $\mathbf{v} = \nabla p$ в области Ω_δ , состоящей из точек в Ω , находящихся от $\partial\Omega$ на расстоянии, большем δ . Кроме того, при аккуратном выборе произвольных аддитивных постоянных в p^δ оказывается, что если $0 < \delta' < \delta$, то $p^\delta = p^{\delta'}$ в Ω_δ . Тогда искомое распределение p получается из p^δ при использовании принципа § 3.5. Пусть ψ_0 — фиксированная пробная функция с носителем в некоторой области Ω_{δ_0} , причем $\int_{\Omega} \psi_0 d^3x = 1$. Рассмотрим

значения $\delta \leq \delta_0$. Для произвольной пробной функции ψ с носителем в Ω_{δ_0} обозначим через $\chi(\mathbf{x})$ решение задачи Пуассона — Неймана

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= \psi - c\psi_0 & \text{в } \Omega_\delta, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \chi &= 0 & \text{на } \partial\Omega_\delta, \\ \chi(0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.9.23)$$

где

$$c = \int_{\Omega} \psi d^3x$$

и декартова система координат выбрана так, что начало координат расположено в некоторой точке Ω_{δ_0} . Эта задача имеет решение, так как интеграл от $\psi - c\psi_0$ равен нулю. Затем мы определим

$$\langle p, \psi \rangle = - \sum_{j=1}^3 (\bar{\psi}_j, \partial_j \chi)_{\Omega_\delta} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} J_\epsilon \mathbf{v} \cdot \nabla \chi d^3x. \quad (6.9.24)$$

Этот предел существует, поскольку $J_\varepsilon v \rightarrow v$ в $L^2(\Omega_\delta)$. При $0 < \varepsilon < \delta$ мы имеем $\nabla \times J_\varepsilon v = 0$ в Ω_δ . В таком случае из классического векторного анализа известно, что найдется потенциал $q^\varepsilon(x)$, для которого $J_\varepsilon v = \nabla q^\varepsilon$ в Ω_δ . Мы выбираем аддитивную постоянную в q^ε из условия $\int q^\varepsilon \psi_0 d^2x = 0$; тогда

$$\begin{aligned} \langle p, \psi \rangle &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} \nabla q^\varepsilon \cdot \nabla \chi d^2x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} q^\varepsilon \nabla^2 \chi d^2x = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} q^\varepsilon (\psi - c\psi_0) d^2x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle q^\varepsilon, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Значит, $q^\varepsilon \rightarrow p$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (сходимость распределений), и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \nabla p, \psi \rangle &= - \langle p, \nabla \psi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle q^\varepsilon, \nabla \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \nabla q^\varepsilon, \psi \rangle = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle J_\varepsilon v, \psi \rangle = \langle v, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Заключение. Для каждого δ существует распределение $p = p^\delta$, такое, что

$$\nabla p = v \quad \text{в } \Omega_\delta, \quad \langle p, \psi_0 \rangle = 0.$$

Отсюда следует, что при $0 < \delta' < \delta$

$$p^{\delta'} = p^\delta \quad \text{в } \Omega_{\delta'},$$

что и требовалось доказать.

6.10. УРАВНЕНИЯ КОШИ — РИМАНА. ГАРМОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Из теории функций комплексной переменной известно, что если функция $f(z)$ комплексной переменной имеет производную $f'(z)$ для всех z в области Ω , то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана в Ω . Обратное утверждение верно только в том случае, когда частные производные $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ относительно $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ являются непрерывными, как показывает пример

$$f(z) = e^{-1/z^4} \quad \text{при } z \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad (6.10.1)$$

в котором уравнения Коши — Римана справедливы на всей z -плоскости. Если уравнения Коши — Римана имеют силу *в смысле распределений*, то, как отмечает П. Д. Лакс (частное сообщение), $f'(z)$ существует; тогда автоматически имеет место непрерывность частных производных и нет необходимости предполагать ее заранее. Необязательно даже допускать, что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются функциями. Если u и v — любые распределения на $\mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют уравнениям Коши — Римана в Ω , то они в действительности являются вещественными аналитическими функциями и удовлетворяют этим уравнениям в обычном смысле.

Эквивалентное утверждение гласит, что если некоторое распределение на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω , т. е. является гармоническим распределением в Ω , то оно представляет собой гармоническую функцию $u(x, y)$ в Ω . В таком виде данное утверждение справедливо для $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Распределение f в $\mathbb{R}^n$, которое является гармоническим в области Ω , совпадает в Ω с некоторой гармонической функцией.

Доказательство. Обозначим через f_δ результат сглаживания f по расстоянию δ при помощи сферически симметричного оператора сглаживания $\rho_\delta(x) = \rho(x/\delta)(1/\delta)^n$, как описано в § 2.6, т. е. положим

$$f_\delta = f * \rho_\delta = \langle f(y), \rho_\delta(x-y) \rangle. \quad (6.10.2)$$

Тогда $f_\delta = f_\delta(x)$ принадлежит классу C^∞ для любого $\delta > 0$ и стремится к f в смысле сходимости распределений, когда $\delta \rightarrow 0$. По условию теоремы $\nabla^2 f$ в Ω равно нулевому распределению. Обозначим через Ω_δ несколько меньшую область:

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}. \quad (6.10.3)$$

Если $x \in \Omega_\delta$, то $\rho_\delta(x-y)$ как функция y имеет носитель в Ω . Поэтому по правилу дифференцирования свертки

$$\nabla^2 f_\delta = (\nabla^2 f) * \rho_\delta = 0 \quad \text{в } \Omega_\delta. \quad (6.10.4)$$

Значит, f_δ — гармоническая функция в Ω_δ .

Теперь допустим, что $u(x)$ — гармоническая функция в некоторой области Ω' . Мы утверждаем тогда, что

$$u_\delta(x) \equiv u(x) \quad \text{в } \Omega'_\delta. \quad (6.10.5)$$

По теореме о среднем значении из классической теории потенциала для $x \in \Omega'_\delta$ функция $u(x)$ равна среднему своих значений на любой сфере

$$\{y: |x-y| = \text{const} \leq \delta\}. \quad (6.10.6)$$

Поскольку оператор сглаживания ρ обладает сферической симметрией, (6.10.5) справедливо.

Наконец, используя эти два результата, покажем, что f_δ не зависит от δ для достаточно малых δ . В самом деле, пусть δ и δ' — любые положительные числа, причем $\delta + \delta' \leq \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$; тогда

$$f * \rho_\delta * \rho_{\delta'} = f * \rho_{\delta+\delta'}.$$

Согласно (6.10.5), выражение в левой части равно $f * \rho_\delta = f_\delta$, а в правой — равно $f * \rho_{\delta'} = f_{\delta'}$, т. е. $f_\delta = f_{\delta'}$. Поэтому f_δ — гармоническая функция, не зависящая от δ ; таким образом, и ее предел f при $\delta \rightarrow 0$ является той же самой гармонической функцией. Это справедливо в Ω_{δ_0} , а в силу произвольности δ_0 и в Ω , что и требовалось доказать.

Глава 7

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейные операторы или преобразования в гильбертовом пространстве; область определения и область значений оператора; норма оператора; теорема о расширении; банаховы алгебры; сопряженность; симметрические, самосопряженные и унитарные операторы; интегральные и дифференциальные операторы; симметрические операторы без самосопряженного расширения и со многими самосопряженными расширениями; простые операторы Штурма—Лиувилля; замкнутые и замыкаемые операторы; график оператора; операторы радиального импульса.

Предварительные сведения: гл. 1—5.

7.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Понятие линейного оператора (т. е. преобразования) в гильбертовом пространстве H (или в банаховом пространстве) является непосредственным обобщением понятия линейного преобразования в конечномерном пространстве. Однако следует подчеркнуть один момент (главным образом потому, что им иногда пренебрегают, особенно в книгах по квантовой механике), а именно: оператор A нельзя считать полностью определенным, пока не выяснена его область определения (т. е. множество x из H , для которых Ax имеет смысл); операторы с несовпадающими областями определения следует рассматривать как разные операторы. Обычно требуется, чтобы область определения была линейным множеством (многообразием) в H , поскольку очевидно, что если оператор A линеен и Ax определен для всех $x \in S$, то в силу линейности можно однозначно определить Ay для любой конечной линейной комбинации y элементов S . Однако дальнейшее расширение оператора является обычно не единственным (за исключением частных случаев).

Формальные определения таковы: линейный оператор или преобразование A представляет собой линейное отображение линейного подмножества $D(A)$ пространства H , называемого *областью определения* A , на подмножество $R(A)$, *область значений* A . Области определения и значений являются линейными многообразиями. Оператор A' называется *расширением* оператора A (символически $A \subset A'$), если, во-первых, $D(A) \subset D(A')$ и, во-вторых, $Au = A'u$ для всех u из $D(A)$. Оператор A называют *ограниченным*, если существует такая постоянная K , что $\|Au\| \leq K\|u\|$ для всех $u \in D(A)$; *норма* оператора $\|A\|$ есть наименьшее из

таких K . Согласно теореме о расширении, доказываемой ниже, ограниченный линейный оператор A имеет единственное ограниченное расширение $\bar{A}$, область определения которого является замыканием $D(A)$, а $\|\bar{A}\| = \|A\|$; в частности, если $D(A)$ — плотное в H множество, то $D(\bar{A}) = H$. Если $D(B) \subset D(A)$, то определен оператор BA ; в этом случае, если A и B ограничены, то $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$. Если $u = 0$ — единственное решение уравнения $Au = 0$, оператор A имеет обратный оператор A^{-1} , областями определения и значений которого являются соответственно области значений и определения A ; кроме того, $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. *Замечание.* В этой книге символ $\subset$ включает равенство; если $A \subset A'$, но $A \neq A'$, то говорят, что A' есть собственное расширение A .

Все приведенные выше определения применимы и для любого банахова пространства. В гильбертовом пространстве, однако, норму $\|A\|$ можно выразить через скалярное произведение, а именно

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ v \neq 0}} \frac{|(Au, v)|}{\|u\| \|v\|} = \sup \frac{\operatorname{Re} (Au, v)}{\|u\| \|v\|}. \quad (7.1.1)$$

Доказательство. В силу неравенства Шварца и определения нормы оператора

$$\operatorname{Re} (Au, v) \leq |(Au, v)| \leq \|Au\| \|v\| \leq \|A\| \|u\| \|v\|$$

для всех u и v . С другой стороны, u можно выбрать так, что $\|Au\|/\|u\|$ сколь угодно мало отличается от $\|A\|$; следовательно, если в качестве v взять Au , то (Au, v) вещественно и равно $\|Au\|^2$, так что $(Au, v)/(\|u\| \|v\|)$ равно $\|Au\|/\|u\|$ и, значит, сколь угодно близко к $\|A\|$. Отсюда теперь следует (7.1.1).

Теорема о расширении. Если A — ограниченный оператор, то A имеет единственное расширение $\bar{A}$ на замыкание $D(A)$, такое, что $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Доказательство. Прежде всего докажем существование $\bar{A}$. Пусть $\bar{D}$ — замыкание $D(A)$ и u — любой вектор из $\bar{D}$, а $\{u_n\}$ — последовательность элементов $D(A)$, сходящаяся к u . Элементы Au_n определены для всех n и $\{Au_n\}$ является последовательностью Коши, поскольку $\|Au_n - Au_m\| \leq \|A\| \|u_n - u_m\| \rightarrow 0$ и, следовательно, $\|Au_n - Au_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, так как $\{u_n\}$ является последовательностью Коши. Если теперь для каждого такого u определить $\bar{A}u$ как предел Au_n при $n \rightarrow \infty$, то становится ясно, что, во-первых, $\|\bar{A}\| \leq \|A\|$, так как $\|\bar{A}u\| = \lim \|Au_n\| \leq \lim \|A\| \|u_n\| = \|A\| \|u\|$, а во-вторых, $\bar{A}u = Au$, если $u \in D(A)$, так что $\bar{A}$ — расширение A и $\|\bar{A}\| = \|A\|$ ¹⁾.

Чтобы доказать единственность, предположим, что $\bar{A}'$ — любое другое ограниченное расширение A на $\bar{D}$. Если $\{u_n\}$ и u те же, что и выше, то

$$\|\bar{A}'u - Au_n\| = \|\bar{A}'u - \bar{A}'u_n\| \leq \|\bar{A}'\| \|u - u_n\|$$

и, значит, $\bar{A}'u = \lim Au_n$, т. е. $\bar{A}' = \bar{A}$.

¹⁾ Неравенство $\|A\| \leq \|A'\|$ справедливо при любом расширении A . — *Прим. перев.*

Применение этой теоремы к интегральным уравнениям дается в § 7.4.

Важным классом операторов, используемых в квантовой статистике и других разделах физики и математики, является множество $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ограниченных операторов, определенных на всем пространстве $\mathbf{H}$. Важность этих операторов вытекает из того факта, что $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ представляет собой *алгебру*, т. е. не только линейное пространство, содержащее $c_1 A_1 + c_2 A_2$ для любых A_1, A_2 из $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и любых c_1, c_2 из $\mathbb{C}$, но и множество, содержащее произведение BA для любых $A, B \in \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Более того, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ оказывается полным линейным нормированным пространством (т. е. банаховым пространством — см. гл. 15 и замечание в § 1.2) с нормой A , определенной выше, поскольку она обладает обычными свойствами нормы, включая неравенство треугольника $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, и, кроме того, удовлетворяет неравенству $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$. Такая алгебра называется *банаховой алгеброй*. Более подробное описание ограниченных операторов приводится в гл. 9 и § 14.6. Хотя многие наблюдаемые квантовой механики являются неограниченными операторами, ту же самую информацию можно в принципе получить и при помощи ограниченных операторов (ограниченных наблюдаемых, т. е. таких наблюдаемых, возможные измеренные значения которых составляют ограниченные множества вещественных чисел), и это имеет смысл делать для некоторых целей; см. § 14.5 и 14.6.

Замечание. Ранее такие алгебры называли «операторными кольцами», а в советской литературе часто называли «нормированными кольцами».

7.2. СОПРЯЖЕННОСТЬ. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Наблюдаемые представляются в квантовой механике самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Эти операторы аналогичны эрмитовым матрицам, однако бесконечномерность $\mathbf{H}$ приводит к одному существенному отличию. Если A — матрица размера $n \times n$, такая, что $(Au, v) = (u, Av)$ для всех u, v из V^n (в этом случае A называется *эрмитовой*¹⁾), то A имеет полную ортонормированную систему собственных векторов. Это же верно (в некотором смысле) и для *ограниченного* оператора A в $\mathbf{H}$; именно, если $(Au, v) = (u, Av)$ для всех u, v из $\mathbf{H}$, то A имеет полную систему собственных векторов в смысле теоремы о спектральном разложении из гл. 9. Однако многие из операторов квантовой механики неограниченны, следовательно, опре-

¹⁾ Иногда такую матрицу называют *самосопряженной*. — Прим. перев.

делены не на всем H , а лишь на некоторой своей области определения $D(A)$. Если $(Au, v) = (u, Av)$ для всех u, v из $D(A)$, которая плотна в H (в этом случае физики называют A *эрмитовым*, а математики — *симметрическим*), то A может иметь, а может и не иметь полную систему собственных векторов (в указанном выше смысле); если A имеет полную систему собственных векторов, то физики его называют *наблюдаемой*, а математики — *самосопряженным оператором* (точное определение дается ниже).

Иногда возникают недоразумения, поскольку в некоторых книгах по квантовой механике и обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторами, являющимися всего лишь симметрическими, обращаются как с самосопряженными.

Сущность самосопряженности симметрического оператора — в наличии соответствующей области определения $D(A)$ (которая, конечно, обычно имеется в нашем распоряжении, когда определяется A). Если область определения максимальна в определенном смысле и A симметричен на этой области, то A самосопряжен. Однако имеются симметрические операторы, такие, как операторы радиального импульса, описываемые ниже в § 7.8, которые не могут быть сделаны самосопряженными ни при каком выборе области определения. С другой стороны, имеются операторы (некоторые даже с плотной в H областью определения), которые могут иметь много самосопряженных расширений при должных расширениях области определения; пример дается в § 7.5, см. также § 8.6 об индексах дефекта.

Доказательство самосопряженности обычно считается математически слишком сложным для изложения в книгах по квантовой механике (см., например, Мессиа [1958, с. 188]). Однако, по моему мнению, дело обстоит не так. Обсуждаемые операторы в основном являются дифференциальными операторами; если использовать теорию распределений, то большинство трудностей исчезнет, а остающиеся окажутся связанными в основном с граничными условиями, следовательно имеют физическую природу.

Теорема. Если A — ограниченный оператор, определенный на всем H (т. е. $D(A) = H$), то имеется единственный ограниченный линейный оператор A^* , сопряженный к A , т. е. такой, что $D(A^*) = H$ и $(A^*u, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in H$; кроме того, $\|A^*\| = \|A\|$; более того, если A и B удовлетворяют условиям теоремы, то $(AB)^* = B^*A^*$ и $(A^*)^*$ (обычно записывается просто как A^{**}) совпадает с A .

Доказательство. При любом фиксированном u скалярное произведение (u, Av) является ограниченным линейным функционалом $l(v)$; возьмем в качестве A^*u единственный элемент, существование которого гарантируется теоремой Рисса — Фреше о представлении линейного функционала (см. § 1.8), такой, что $l(v) = (A^*u, v)$ для всех v ; A^*u линейно зависит от u , значит A^* — линей-

ный оператор в H . Чтобы найти норму A^* , сначала выпишем следующие неравенства:

$$|(A^*u, v)| = |(u, Av)| \leq \|u\| \|Av\| \leq \|u\| \|A\| \|v\|,$$

а затем положим $v = A^*u$, что даст

$$\|A^*u\|^2 \leq \|u\| \|A\| \|A^*u\|, \quad \text{т. е. } \|A^*u\| \leq \|A\| \|u\| \quad \forall u;$$

поэтому $\|A^*\| \leq \|A\|$. Поменяв местами A и A^* , из тех же рассуждений получим, что $\|A\| \leq \|A^*\|$; следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$. Доказательства остальных утверждений теоремы предоставляются читателю в качестве упражнения.

Дадим теперь более общее определение сопряженности, при котором от A уже не требуется, чтобы он был ограниченным или был определен на всем H , и требуется только, чтобы он был линейным оператором с плотной в H областью определения $D(A)$. Определим сначала линейное подмножество $D^* \subset H$: $v \in D^*$ тогда и только тогда, когда имеется $w \in H$, такой, что

$$(w, u) = (v, Au) \quad \text{для всех } u \in D(A). \quad (7.2.1)$$

Это $w = w(v)$ единственно для любого заданного v . *Доказательство.* Если w_1 и w_2 — два элемента с таким свойством, то мы получаем, что $(w_1 - w_2, u) = 0$ для всех $u \in D(A)$ и тем самым для всех $u \in H$ (поскольку скалярное произведение непрерывно, а $D(A)$ плотна в H); это верно, в частности, для $u = w_1 - w_2$, так что $\|w_1 - w_2\|^2 = 0$, т. е. $w_1 = w_2$. Ясно, что w линейно зависит от v , поэтому мы полагаем $D(A^*) = D^*$, $A^*v = w(v)$ для любого $v \in D^*$. Следовательно, чтобы получить A^* , нужно найти все пары $\{v, w\}$, которые удовлетворяют (7.2.1).

Предупреждение. Оператор A^{**} может не существовать, так как $D(A^*)$ может быть неплотным в H , но даже если A^{**} существует, то он может не совпадать с A .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если A^{**} существует, то $A \subseteq A^*$.

Сумма $A + B$ двух операторов определяется равенством $(A + B)v = Av + Bv$ для всех v из области определения

$$D(A + B) \stackrel{\text{def}}{=} D(A) \cap D(B).$$

УПРАЖНЕНИЕ

2. Предположим, что $A + B$ определен на плотном в H множестве, так что A^* , B^* и $(A + B)^*$ существуют. Покажите, что $(A + B)^* \supseteq A^* + B^*$. На примере покажите, что $(A + B)^*$ может быть собственным расширением $A^* + B^*$, т. е. $(A + B)^* \neq A^* + B^*$. Докажите, однако, что если B — ограниченный оператор, определенный на всем H , то всегда $(A + B)^* = A^* + B^*$. *Указание.* Согласно общему определению, для того чтобы определить $(A + B)^*$, нужно найти все пары $\{v, w\}$, такие, что

$$(v, (A + B)u) = (w, u) \quad \text{для всех } u \text{ из } D(A) \cap D(B).$$

Следует отметить, что операторное сложение, как оно определено выше, имеет ряд несомненных недостатков. Область определения $A+B$ может быть пустой (за исключением нуля). Более того, сложение в общем случае не ассоциативно, и в частности $(A+B)-B$ не обязательно равен A . В некоторых работах сложение определяется только для операторов, имеющих одну и ту же область определения, например в качестве области определения берут C_0^∞ или $\mathcal{S}$, когда имеют дело с операторами в L^2 .

При любом определении сопряженности A называется *самосопряженным*, если $A^*=A$. Если $A^*=A$, то $(Au, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in D(A)$, однако этого условия недостаточно для самосопряженности A . Если просто $(Au, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in D(A)$ и если $D(A)$ плотна в H , т. е. если $A \subset A^*$, то A называется *симметрическим* (или *эрмитовым*) оператором; $D(A^*)$ может быть больше $D(A)$ — в этом случае A^* является собственным расширением A . Если A^* в свою очередь симметричен (что необязательно), то A^* самосопряжен, т. е. $A^{**} = A^*$; но вообще говоря, A^{**} может не существовать или может быть только $A^{**} \subset A^*$ (см. примеры ниже, в § 7.5). Другое определение самосопряженности дается в § 8.6.

Если A имеет единственное самосопряженное расширение $\bar{A}$, то A называют *существенно самосопряженным*. На практике чаще имеют дело с A , чем с $\bar{A}$: часто A легче описать, чем $\bar{A}$. В гл. 11 рассматривается лапласиан; сначала определяется оператор, который обозначается A_0 , область определения которого есть $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и который задается равенством $A_0\varphi = \nabla^2\varphi$ для всех φ из этой области определения. Это гарантирует существование самосопряженности A_0 . Область определения $\bar{A}_0$ состоит из определенных распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$, но ее нелегко описать.

Если U — линейный обратимый оператор и $D(U) = D(U^{-1}) = H$, то следующие условия эквивалентны:

$$(Uv, Uv) = (v, v) \quad \text{для всех } v \in H, \quad (7.2.2)$$

$$(Uv, Uw) = (v, w) \quad \text{для всех } v, w \in H, \quad (7.2.3)$$

$$U^{-1} = U^* \quad (\text{т. е. } UU^* = U^*U = I). \quad (7.2.4)$$

(условие (7.2.3) получается из условия (7.2.2) по формуле поляризации (1.11.1), все же остальное очевидно). Оператор, удовлетворяющий этим условиям, называется *унитарным*; ясно, что $\|U\| = 1$. [Заметим, что здесь нет необходимости использовать более общее определение сопряженности, так как U и U^{-1} ограничены и определены на всем H .]

7.3. ПРИМЕРЫ В l^2

(См. § 1.4.)

1. Пусть $\xi = (x_1, x_2, \dots)$ — любой элемент из l^2 , и пусть $A\xi = (x_2, x_3, \dots)$ (x_1 опускается, $(n+1)$ -я координата заменяет n -ю, $n=1, 2, \dots$); $D(A) = l^2$. Очевидно, что для любого $\eta = (y_1, y_2, \dots)$ $A^*\eta = (0, y_1, y_2, \dots)$. Хотя $D(A^*) = l^2 = H$ и $\|A^*\eta\| = \|\eta\|$ для всех η , оператор A^* не унитарен, так как его нельзя обратить на всем H ; возможен случай, когда $\|A\xi\| < \|\xi\|$.

2. Пусть $\xi = (x_1, x_2, \dots)$, и пусть¹⁾

$$A\xi = (x_2, x_4, x_1, x_6, x_3, x_8, \dots, x_{2n+2}, x_{2n-1}, \dots).$$

Тогда A — унитарный оператор.

3. Пусть M — произвольная матрица размера $n \times n$, и пусть $\xi = (x_1, x_2, \dots)$ и $A\xi = (w_1, w_2, \dots)$, где

$$w_j = \sum_{k=1}^n M_{jk} x_k \quad \text{при } j=1, 2, \dots, n,$$

$$w_j = x_j \quad \text{при } j > n,$$

а $D(A) = l^2 = H$. Если M — эрмитова матрица, то оператор A самосопряжен, если M унитарна, то и A унитарен.

4. $D(A)$ — множество всех таких $\xi = (x_1, x_2, \dots)$, для которых лишь конечное число $x_j \neq 0$. Если $\xi \in D(A)$, то $A\xi = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots)$. Оператор A симметричен, $D(A)$ плотно в l^2 , а A^* является расширением A с областью определения

$$D(A^*) = \left\{ \xi = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |x_j|^2 < \infty \right\};$$

A^* самосопряжен: $A^{**} = A^*$.

7.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $L^2(a, b)$

Пусть $K(x, y)$ — непрерывная по x и y функция (при $a \leq x, y \leq b$), и пусть $D(A) = C[a, b]$, т. е. $D(A)$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций $\varphi(x)$; для любой такой функции φ определим $A\varphi$ равенством

$$A\varphi = [A\varphi](x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy. \quad (7.4.1)$$

В силу неравенства Шварца при любом фиксированном x

$$\left| \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right|^2 \leq \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy;$$

¹⁾ Здесь $2n$ -я координата элемента $A\xi$ принимает значение x_{2n+2} , а $(2n+1)$ -я — значение x_{2n-1} (кроме первой). — Прим. перев.

интегрирование по x этого неравенства дает

$$\|A\varphi\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy \|\varphi\|^2. \quad (7.4.2)$$

Поэтому A — ограниченный оператор с плотной в $H = L^2(a, b)$ областью определения. Согласно теореме о расширении, A имеет единственное ограниченное линейное расширение $\bar{A}$ с $D(\bar{A}) = H$. Если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$, то A симметричен, а $\bar{A}$ самосопряжен.

Интегральные операторы такого вида допускают обобщения в разных направлениях (бесконечный интервал (a, b) , неограниченность ядра $K(x, y)$, несколько независимых переменных). Если интеграл в (7.4.2) конечен, то говорят, что это оператор Гильберта — Шмидта (см. § 12.4). Однако интегральный оператор не обязан удовлетворять этому условию, чтобы быть ограниченным. Оператор преобразования Фурье F , заданный в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равенствами

$$D(F) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$(F\varphi)(x) = (2n)^{-n/2} \int \dots \int e^{ix \cdot y} \varphi(y) dy_1 \dots dy_n,$$

имеет всюду плотную область определения и норму $\|F\| = 1$, однако не является оператором Гильберта — Шмидта. Его расширение $\bar{F}$ на все L^2 представляет собой унитарное отображение всего L^2 на себя (см. § 5.10).

7.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Сначала рассмотрим оператор T , определенный в $H = L^2(a, b)$ равенствами

$$D(\bar{T}) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(a) = f(b) = 0\}, \quad (7.5.1)$$

$$Tf = -if',$$

где f' понимается как производная f в смысле теории распределений. Оператор T симметричен, потому что интегрирование по частям допустимо для распределений из L^2 , а внеинтегральный член обращается в нуль в силу граничных условий, т. е.

$$(Tf, g) = \int_a^b -\overline{if'} g dx = i\overline{f}g \Big|_a^b - i \int_a^b \bar{f} g' dx = (f, Tg). \quad (7.5.2)$$

Чтобы определить сопряженный оператор T^* , найдем такие пары $\{g, h\}$ элементов L^2 , что

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= (f, h) \quad \text{для всех } f \in D(T), \\ \text{т. е.} \quad i(f', g) &= (f, h) \quad \text{для всех } f \in D(T). \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Множество всех таких g образует $D(T^*)$, и $T^*g = h$ для любой такой пары $\{g, h\}$. В частности,

$$i(\bar{\varphi}', g) = (\bar{\varphi}, h) \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty,$$

т. е. для всех пробных функций, потому что если $\varphi \in C_0^\infty$, то $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}' \in L^2$. В обозначениях гл. 2 это выглядит так: $i\langle g, \varphi' \rangle = \langle h, \varphi \rangle$, однако $\langle g, \varphi' \rangle = \langle -g', \varphi \rangle$, следовательно

$$\langle -ig', \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty,$$

так что h и $-ig'$ — одно и то же распределение, т. е. один и тот же элемент $L^2(a, b)$. Таким образом, необходимым условием того, чтобы пара $\{g, h\}$ удовлетворяла (7.5.3), является равенство $h = -ig'$, однако это условие является и достаточным в силу (7.5.2). Поскольку $f(a) = f(b) = 0$, на g не нужно накладывать никаких граничных условий.

Вывод.

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{g \in L^2: g' \in L^2\}, \\ T^*g &= -ig. \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Оператор T^* является несимметрическим расширением T , и ни T , ни T^* не являются самосопряженными.

Если бы $D(T)$ ограничивалась функциями класса C^1 , или C^k ($k > 0$), или C^∞ , или аналитическими на $[a, b]$ функциями, или даже многочленами (граничные условия, конечно, в любом случае сохраняются), то $D(T)$ была бы все еще плотным в $L^2(a, b)$ множеством и T^* по-прежнему задавался бы формулами (7.5.4). T^{**} был бы еще старым T , заданным равенством (7.5.1), поэтому теперь $T \subset T^{**}$.

Другие примеры в $L^2(a, b)$ таковы:

$$(1) \quad D(T_1) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(a) = 0\}, \quad T_1 f = -if';$$

тогда

$$D(T_1^*) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(b) = 0\}, \quad T_1^* f = -if';$$

(2) (периодические граничные условия)

$$D(A) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(a) = f(b)\}, \quad Af = -if';$$

A самосопряжен: $A^* = A$.

Замечание. В классической теории, где f и f' рассматриваются как обычные функции (хотя, вообще говоря, f' недоопределена на множестве меры нуль), необходимо ограничивать $D(A)$ функциями класса

$$\{f(x) \in L^2: f(x) \text{ абсолютно непрерывна, } f'(x) \in L^2\},$$

где принадлежность $f'(x) \in L^2$ означает, что $f'(x)$ существует почти всюду, измерима по мере Лебега и интеграл Лебега $\int_a^b |f'(x)|^2 dx$

конечен. При нашем подходе нет необходимости использовать теорию Лебега и вводить понятие абсолютной непрерывности, т. е. $f(x)$ автоматически абсолютно непрерывна, если f' как распределение принадлежит L^2 .

Оператор T^* , заданный в (7.5.4), характеризуется тем, что имеет наибольшую для оператора в $L^2(a, b)$ область определения, если его действие задается операцией $-i(d/dx)$ в смысле теории распределений. Операторы T_i , T_i^* и A являются промежуточными между оператором T , определенным в (7.5.1), и T^* . В частности, A — самосопряженный оператор, такой, что $T \subset A \subset T^*$. Однако A — не единственное самосопряженное расширение T ; имеется бесконечно много других, определенных следующим образом: пусть θ — любое вещественное число из $[0, 2\pi)$; определим A_θ равенствами

$$\begin{aligned} D(A_\theta) &= \{f \in L^2: f' \in L^2, f(b) = e^{i\theta} f(a)\}, \\ A_\theta f &= -if'. \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. (а) Покажите, что A_θ при любом θ — самосопряженный оператор и что $T \subset A_\theta \subset T^*$. (б) Найдите собственные значения и собственные функции A_θ . (в) Докажите, что эти собственные функции образуют полную систему. [Указание. Возьмите $(a, b) = (0, 2\pi)$, затем, если $f(x)$ — произвольная гладкая функция, разложите $e^{-i\theta x/(2\pi)} f(x)$ в обычный ряд Фурье.] (г) Покажите, что граничное условие нельзя заменить условием $f(b) = \alpha f(a)$, $|\alpha| \neq 1$.

2. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции, принадлежащие C^∞ , причем $p(x) > 0$, $a \leq x \leq b$. Докажите, что регулярный оператор Штурма—Лиувилля A , определенный равенствами

$$D(A) = \{f \in L^2(a, b): -(pf')' + qf \in L^2, f(a) = f(b) = 0\}, \quad (7.5.6)$$

$$Af = -(pf')' + qf$$

(здесь штрих означает дифференцирование), самосопряжен.

Рассмотрим теперь частный случай оператора Штурма—Лиувилля с одной особой концевой точкой и с $p(x) \equiv 1$. Пусть $q(x)$ — вещественная непрерывная неотрицательная функция,

определенная при $0 \leq x < \infty$. Определим в гильбертовом пространстве $H = L^2 = L^2(0, \infty)$ оператор A :

$$D(A) = \{f \in L^2: -f''(x) + q(x)f(x) \in L^2, f(0) = 0\}, \quad (7.5.7)$$

$$Af = -f'' + qf \quad \text{для } f \in D(A).$$

(Более общие операторы такого типа рассматриваются в гл. 10.) Так как f и Af принадлежат $L^2(0, b)$ при любом конечном b , то qf , а потому и f'' принадлежат $L^2(0, b)$; следовательно, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \leq x < \infty$, значит, в определении $D(A)$ граничное условие $f(0) = 0$ существенно. [Из этих рассуждений не следует, что f' , f'' или qf принадлежат $L^2(0, \infty)$, однако далее будет показано, что f' и $\sqrt{q}f$ принадлежат $L^2(0, \infty)$.]

Так как $f'' \in L^2(0, b)$, интегрированием по частям можно получить следующее:

$$\begin{aligned} (f, -f'' + qf) &= \int_0^\infty \bar{f}(x) [-f''(x) + q(x)f(x)] dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \bar{f}(x) [-f''(x) + q(x)f(x)] dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\bar{f}(x)f'(x) \Big|_0^b + \int_0^b (|f'(x)|^2 + q(x)|f(x)|^2) dx \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что последний интеграл может стремиться только либо к положительному значению, либо к $+\infty$. Во втором случае $\operatorname{Re} \bar{f}f'$ стремилась бы к $+\infty$, т. е. $d|f|^2/dx \rightarrow \infty$, что противоречит квадратичной интегрируемости $f(x)$; поэтому

$$\int_0^\infty |f'(x)|^2 dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty q(x)|f(x)|^2 dx < \infty,$$

т. е. $f, \sqrt{q}f \in L^2(0, \infty)$. Заметим, что в этих рассуждениях не использовалось граничное условие $f(0) = 0$ (это нам потребуется в дальнейшем).

Найдем теперь сопряженный оператор A^* и покажем, что $A^* = A$. Для этого найдем все возможные пары элементов $\{g, h\}$ из $L^2(0, \infty)$, такие, что

$$\{(-f'' + qf, g) = (f, h) \quad \text{для всех } f \in D(A). \quad (7.5.8)$$

Множество всех таких g образуют $D(A^*)$ и $A^*g = h$ для любой такой пары $\{g, h\}$. В частности, для такой пары $\{g, h\}$

$$(-\bar{\varphi}'' + q\bar{\varphi}, g) = (\bar{\varphi}, h) \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(0, \infty), \quad (7.5.9)$$

т. е.

$$\langle g, -\varphi'' + q\varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi.$$

По определению дифференцирования распределений $\langle g, -\varphi'' \rangle = \langle -g'', \varphi \rangle$ и, кроме того, $\langle g, q\varphi \rangle = \langle qg, \varphi \rangle$. [Отметим, что здесь не утверждается, что $qg \in L^2(0, \infty)$.] Поэтому $\langle -g'' + qg, \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle$ для всех пробных функций; следовательно,

$$h = -g'' + qg. \quad (7.5.10)$$

Это условие является необходимым для того, чтобы пара $\{g, h\}$ была требуемого типа, но не является достаточным, поскольку (7.5.8) не следует из (7.5.9).

Чтобы найти дополнительное условие, предположим, что g и h удовлетворяют (7.5.10). Используя для g те же рассуждения, что и для f , получаем, что g и g' также непрерывны и что g' и $\sqrt{q}g \in L^2(0, \infty)$. Для любого $f \in \mathbf{D}(A)$

$$\langle -f'' + qf, g \rangle = \lim_{b \rightarrow 0} \left[-\bar{f}'g \Big|_0^b + \int_0^b (\bar{f}'g' + q\bar{f}g) dx \right];$$

интеграл здесь стремится к конечному пределу, потому что $f', g', \sqrt{q}f$ и $\sqrt{q}g$ принадлежат $L^2(0, \infty)$. Поэтому предел $\bar{f}'(b)g(b)$ существует, причем он должен быть равен нулю: ведь $\int_0^\infty f'(x)g(x)dx$ конечен. Еще одно интегрирование по частям дает

$$\langle -f'' + qf, g \rangle = \bar{f}'(0)g(0) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\bar{f}g' \Big|_0^b + \int_0^b \bar{f}(-g'' + qg) dx \right];$$

снова интеграл стремится к конечному пределу, значит, $\bar{f}(b)g'(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, что следует из аналогичных рассуждений. Поскольку $f(0) = 0$, то и $\bar{f}(0)g'(0) = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle -f'' + qf, g \rangle &= \bar{f}'(0)g(0) + \langle f, -g'' + qg \rangle = \\ &= \bar{f}'(0)g(0) + \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому, для того чтобы $\langle Af, g \rangle = \langle f, h \rangle$ для всех $f \in \mathbf{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы помимо (7.5.10) выполнялось условие $g(0) = 0$. Следовательно, $\mathbf{D}(A^*) = \mathbf{D}(A)$ и A самосопряжен.

Аналогичный оператор Штурма—Лиувилля $Af = -f'' + qf$ можно определить и на $\mathbb{R}$ (с двумя особыми концевыми точками $\pm \infty$). В этом случае граничное условие $f(0) = 0$ уже не нужно и $A^* = A$ для $q \geq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Покажите, что если $q(x) = x^2$ (A в этом случае является гамильтонианом осциллятора), то $f'', xf', x^2f \in L^2(\mathbb{R})$. Указание. Рассмотрите скалярное произведение элемента $-f'' + x^2f$ на себя.

В гл. 10 будет рассмотрен спектр этих и более общих операторов Штурма — Лиувилля и будут получены некоторые теоремы о разложении по системе собственных функций.

4. Рассмотрите оператор T , определенный на $H=L^2(a, b)$ следующими условиями:

$$D(T) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\}, \\ Tf = f'.$$

Найдите T^* . Покажите, что T симметричен, но не является существенно самосопряженным, для чего найдите семейство (зависящее от двух комплексных параметров) различных самосопряженных расширений T .

Рассмотрим, наконец, оператор умножения на заданную функцию, хотя он и не является дифференциальным. Это вполне уместно, поскольку такой оператор часто появляется при исследовании дифференциальных уравнений. Пусть $\xi(x)$ — произвольная вещественная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Согласно § 5.4, произведение ξf определено как распределение для всех $f \in L^2$; определим оператор A равенствами

$$D(A) = \{f \in L^2: \xi f \in L^2\} \quad (\text{здесь } L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)), \\ Af = \xi f. \quad (7.5.11)$$

Покажем, что A самосопряжен. Для этого рассмотрим все пары $\{g, h\}$, такие, что

$$(Af, g) = (\xi f, g) = (f, h) \quad \text{для всех } f \in L^2; \quad (7.5.12)$$

тогда для любой такой пары

$$(\xi \bar{f}, g) = (\bar{f}, h) \quad \text{для всех пробных функций } f,$$

т. е.

$$\langle g, \xi \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi.$$

Согласно § 5.4, левая часть является функционалом, который определяет произведение ξ и g , поэтому

$$\langle \xi g, \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi,$$

т. е. g должно принадлежать $D(A)$ и $h (= A^*g) = \xi g = Ag$. Но этого также достаточно для выполнения (7.5.12), так как если $\{\varphi_n\}$ — последовательность Коши, сходящаяся в L^2 к f , то $(\xi g, \varphi_n) = (h, \varphi_n)$; тогда в пределе получаем (7.5.12) в силу непрерывности скалярного произведения. Поэтому $A^* = A$. Если заданная функция $\xi(x)$ ограничена, то A — ограниченный оператор и $D(A) = L^2$; в противном случае A неограничен.

7.6. ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть A — линейный оператор, область определения которого $D(A)$ не замкнута, и пусть ξ — точка из замыкания $\overline{D(A)}$, которая, однако, не принадлежит $D(A)$; можем ли мы каким-ни-

будь разумным способом определить $A\xi$? Это всегда возможно, если A — ограниченный оператор, что следует из теоремы о расширении из § 7.1. Именно, если $\{u_n\}$ — такая последовательность точек из $D(A)$, что $u_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$, то $\{Au_n\}$ является последовательностью Коши и $A\xi$ можно определить как предел Au_n при $n \rightarrow \infty$.

Если A — неограниченный оператор, то только что описанная процедура может и не привести к успеху, так как $\{Au_n\}$ может не иметь предела, даже если последовательность $\{u_n\}$ является сходящейся; например, $\|Au_n\|$ может стремиться к ∞ . [Даже если $\{Au_n\}$ имеет предел, может получиться так, что для некоторой другой последовательности $\{u'_n\}$, также сходящейся к ξ , $\{Au'_n\}$ имеет другой предел, не совпадающий с пределом $\{Au_n\}$; см. пример 3 ниже.]

Предположим, однако, что для любой последовательности $\{u_n\}$, такой, что

- (i) $u_n \in D(A)$ при всех n ,
- (ii) $\lim u_n$ существует (при $n \rightarrow \infty$),
- (iii) $\lim Au_n$ существует (при $n \rightarrow \infty$),

оказалось, что $\lim u_n \in D(A)$ и $A(\lim u_n) = \lim (Au_n)$. В этом случае A называется *замкнутым* оператором.

Неограниченный незамкнутый оператор может иметь замкнутое расширение, а может и не иметь его. Если он имеет замкнутое расширение, то его называют *замыкаемым*, а наименьшее такое расширение называют *замыканием* оператора A и обозначают $\bar{A}$. Ясно, что A замыкаем тогда и только тогда, когда он обладает следующим свойством: если две последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу $\xi \in H$, а $\{Au_n\}$ и $\{Av_n\}$ — также сходящиеся последовательности, то они также имеют один и тот же предел, скажем η . Если A обладает этим свойством, то его замыкание получается так: полагается $\bar{A}\xi = \eta$ для любой такой пары ξ, η . Ясно, что $\bar{A}$ — наименьшее (относительно области определения) или *минимальное* замкнутое расширение A , а именно если A_1 — любое другое замкнутое расширение A , то A_1 — расширение $\bar{A}$. Если A сам по себе замкнут, то $\bar{A} = A$.

ПРИМЕР 1

Оператор A , приведенный в примере 4 § 7.3, замыкаем; его замыкание совпадает с сопряженным оператором: $\bar{A} = A^*$. Заметим, что $\bar{D}(A) \neq H$.

ПРИМЕР 2

Пусть, как и в § 7.5, $H = L^2(a, b)$, и пусть $A = d/dx$ с одним из граничных условий, рассмотренных в этом параграфе. В качестве $D(A)$ можно взять различные классы функций (и, возможно, распределений). Пусть сначала $D(A)$ совпадает с классом $C^1(a, b)$ (непрерывных функций с непрерывными произ-

водными). В этом случае A не замкнут, но замыкаем, причем становится замкнутым, если его область определения дополнить семью непрерывными функциями f , такими, что их производные f' как *распределения* принадлежат $L^2(a, b)$. *Доказательство.* Покажем, что если только последовательность $\{f_n(x)\}$ такова, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ и $\|f'_n - g\| \rightarrow 0$, где $f_n(x)$ и $f'_n(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, то отсюда следует, что $g = f'$, следовательно, f принадлежит дополненной области определения и $g = Af$, т. е. расширение A замкнуто. Чтобы показать это, воспользуемся интегрированием по частям:

$$(-\varphi', f_n) = (\varphi, f'_n) \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

(напомним, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ для любой пробной функции). Если теперь $n \rightarrow \infty$, то

$$(-\varphi', f) = (\varphi, g) \quad \text{для всех } \varphi,$$

а по определению производной от распределения отсюда следует, что $g = f'$.

Чтобы построить незамыкаемый оператор, мы будем действовать в духе теории Лебега.

Пример 3

Пусть снова $H = L^2(a, b)$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (тогда $f(x) \in L^2(a, b)$), а $f'(x)$ определена (в обычном смысле) почти всюду на $[a, b]$ и почти всюду на $[a, b]$ равна непрерывной функции $g(x)$ (тогда $g(x) \in L^2$), то будем считать, что $f(x) \in D(A)$ и $Af(x) = g(x)$. Это определяет линейный оператор A (доказательство того, что $g(x)$ однозначно определяется по $f(x)$ и что $g(x)$ линейно зависит от $f(x)$, оставляется в качестве упражнения). Этот оператор имеет большую область определения, чем любой из соответствующих операторов предыдущего параграфа.

Оператор A не замыкаем, поскольку мы можем построить последовательность функций $f_n(x)$ из $D(A)$, которая сходится по норме (а в связи с этим и равномерно поточечно на $[a, b]$) к функции $f(x) \equiv x$, тогда как $Af_n(x) \equiv 0$

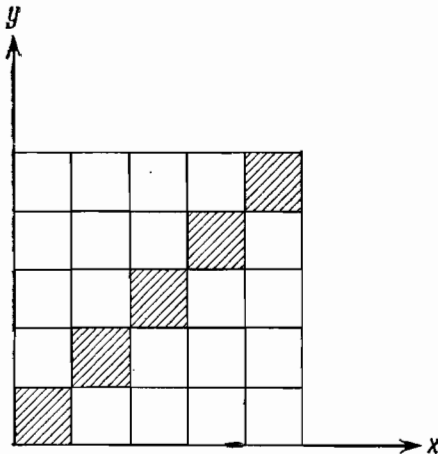


Рис. 7.1. Построение последовательности $\{f_1(x)\}$.

для всех n . [Значит, если $\{g_n(x)\}$ — другая последовательность, такая, что $g_n(x) = x$ для всех n , то $\lim f_n = \lim g_n$, в то время как $\lim A f_n \neq \lim A g_n$. Чтобы получить замкнутый оператор из этого A , нужно *удалять* функции из $D(A)$ вместо того, чтобы добавлять их.] Чтобы построить $f_n(x)$, возьмем $[a, b] = [0, 1]$ и разобьем единичный квадрат в плоскости (x, y) на n^2 клеток (или ячеек) горизонтальными и вертикальными прямыми. В каждой из диагональных ячеек (см. рис. 7.1) определим $y = f_n(x)$ как уменьшенную копию функции Кантора, описанной в § 13.1. Тогда $f'_n(x) = 0$ почти всюду, $f_n(x)$ непрерывна и $f_n(x) \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому A не замыкаем.

Замечание. Как видно из этих примеров, даже если A замкнут, его область определения $D(A)$ не обязательно замкнута; в действительности, по знаменитой *теореме о замкнутом графике* если оператор A замкнут и имеет замкнутую область определения, то A ограничен. В частности, если A замкнут и определен на всем H , то A ограничен. Более общую формулировку теоремы о замкнутом графике и ее доказательство см. у Като [1966]¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что для любого оператора A , если A^* существует (т. е. если $D(A)$ плотна в H), то A^* замкнут. Отсюда следует, что симметрический оператор замыкаем, а самосопряженный замкнут.

2. Выясните, какой из следующих операторов A замыкаем, и для каждого замыкаемого оператора найдите область определения его замыкания.

(а) $H = l^2$, $D(A)$ — множество таких последовательностей $\xi = \{x_1, x_2, \dots\}$, для которых лишь конечное число $x_n \neq 0$, а $A\xi = \{2x_1, 4x_2, 8x_3, \dots, 2^n x_n, \dots\}$.

(б) Для тех же H и $D(A)$ $A\xi = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \dots \right\}$.

(в) Для тех же H и $D(A)$ $A\xi = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) x_n, 0, 0, \dots \right\}$.

(г) $H = L^2(0, 1)$, $D(A)$ — множество непрерывных на $[0, 1]$ функций; Af для любой $f(x) \in D(A)$ определяется как функция $[Af](x) = f^{(1/2)} \sin \pi x$.

д) Для тех же H и $D(A)$ теперь Af определяется как $[Af](x) = \int_0^1 f(x') dx' \sin \pi x$.

7.7. ГРАФИК ОПЕРАТОРА. ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ И НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВО

Замкнутость и другие свойства оператора допускают геометрическую интерпретацию с использованием его графика, который определяется следующим образом. Множество всех упорядоченных пар $\{u, v\}$ элементов H образует гильбертово пространство,

¹⁾ Линейный оператор A из X в Y , определенный на всем X , замкнут тогда и только тогда, когда он ограничен. Теорема верна для любых банаховых пространств X и Y . — Прим. перев.

обозначаемое $H \times H$, если все операции над его элементами определяются «покомпонентно», а скалярное произведение определяется равенством

$$(\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

где в правой части используется исходное скалярное произведение в H . Графиком оператора, обозначаемым $\Gamma(A)$, является по определению подмножество $H \times H$, состоящее из всех пар вида $\{u, Au\}$, где $u \in D(A)$. Это линейное многообразие в $H \times H$ (если A — линейный оператор). График является замкнутым линейным многообразием, или подпространством $H \times H$, тогда и только тогда, когда A является замкнутым линейным оператором. Линейное многообразие в $H \times H$ представляет собой график некоторого линейного оператора A тогда и только тогда, когда оно не содержит элементов вида $\{0, v\}$, $v \neq 0$. [Если бы оно содержало такие элементы, то оно содержало бы вместе с $\{u, w\}$ и $\{u, w + \alpha v\}$ с произвольным числом α , так что Au нельзя было бы однозначно определить по u .] Если A' — расширение A , то $\Gamma(A')$ содержит $\Gamma(A)$.

В частном случае, когда H — одномерное вещественное пространство $\mathbb{R}$, оператор (линейный или нелинейный) является функцией $f(x)$, отображающей $\mathbb{R}$ в себя; $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — евклидова плоскость (x, y) , а график $f(x)$ — множество точек $(x, f(x))$ на этой плоскости. [Это и оправдывает термин «график» для $\Gamma(A)$.] Линейный оператор в $\mathbb{R}$ является однородной линейной функцией $f(x) = ax$, а его график — прямая, проходящая через начало координат, т. е. одномерное подпространство. (В конечномерном случае любое линейное многообразие замкнуто, так что вопрос о замыкании здесь не стоит.)

Упражнения

1. Линейное многообразие $\hat{\Gamma}(A)$, определенное как множество элементов вида $\{Av, -v\}$ в $H \times H$ при $v \in D(A)$, называется повернутым графиком A , потому что в одномерном случае он получается в результате поворота графика в плоскости x, y вокруг начала координат на 90° . Воспользовавшись определением сопряженности, покажите, что если A определен на всюду плотном множестве, то A^* является оператором, график которого представляет собой ортогональное дополнение (в $H \times H$) к $\hat{\Gamma}(A)$, т. е.

$$\Gamma(A^*) = \hat{\Gamma}(A)^\perp \quad (7.7.1)$$

(тогда как если A определен не на плотном множестве, $\hat{\Gamma}(A)^\perp$ вообще не может быть графиком какого-либо оператора). Отсюда получается второе решение упражнения 1 предыдущего параграфа, потому что ортогональное дополнение множества — всегда замкнутое линейное многообразие вне зависимости от того, замкнуто множество или нет. [Если A замкнут, то и $\hat{\Gamma}(A)$ и $\Gamma(A^*)$ — замкнутые линейные многообразия, а пространство $H \times H$ — их ортогональная прямая сумма.]

2. Покажите, что если A — линейный оператор с плотной областью определения, то его нуль-пространство $N(A) = \{u \in H: Au = 0\}$ является ортогональным дополнением области значений A^* :

$$N(A) = R(A^*)^\perp. \quad (7.7.2)$$

[Замечания. (1). Здесь $\perp$ обозначает ортогональное дополнение в исходном пространстве H . (2) $N(A)$ — всегда замкнутое линейное многообразие, но это неверно для $R(A^*)$, так что если обратить приведенное выше утверждение, оно будет выглядеть так: $\bar{R}(A^*) = N(A)^\perp$.]

3. Докажите, что если $\bar{A}$ замыкаем и A^* существует, то A^{**} существует и совпадает с замыканием $\bar{A}$ оператора A .

Пояснение. Для замкнутого A представление $H \times H$ в виде ортогональной прямой суммы (см. § 1.6) выглядит так:

$$H \times H = \hat{\Gamma}(A) \oplus \Gamma(A^*).$$

Символы $\times$ и $\oplus$ имеют близкие, хотя слегка и отличающиеся значения. Если мы определяем подпространства H_1 и H_2 пространства $H \times H$ как множества всех пар $\{u, 0\}$ и $\{0, u\}$ соответственно, то и H_1 , и H_2 изоморфны H , тогда как

$$H \times H = H_1 \oplus H_2.$$

Отличие между этими символами состоит в том, что знак $\oplus$ используется для того, чтобы связать подмножества данного пространства, а при помощи знака $\times$ строится из старого пространства новое. В соответствии с этим знак $\oplus$ не имел бы смысла, если бы он стоял по обе стороны равенства.

7.8. ОПЕРАТОРЫ РАДИАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Согласно общим представлениям квантовой механики, оператор импульса, соответствующий координате x , представляет собой $-i(\partial/\partial x)$ (предполагая использование таких единиц измерения, при которых $\hbar = 1$). Если в качестве x взять радиальную координату r , то область ее значений будет $0 < r < \infty$.

Прежде всего заметим, что оператор $-i(\partial/\partial r)$ нельзя сделать самосопряженным в гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$ при любом выборе его области определения. Например, если оператор A определяется равенствами

$$D(A) = \{f \in L^2(0, \infty): f' \in L^2\}, \quad Af = -if',$$

где штрих означает дифференцирование в смысле теории распределений, то A^* (как легко проверить) задается равенствами

$$D(A^*) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(0) = 0\}, \quad A^*f = -if'.$$

Кроме того, сопряженным к A^* оператором является просто A , но ни A , ни A^* самосопряженны. Оператор A^* симметричен,

потому что $A^* \subset A$, но не имеет самосопряженного расширения (см. § 8.4).

Более подходящим в данном случае гильбертовым пространством является пространство L^2 распределений f, g , в котором скалярное произведение определяется равенством

$$(f, g) = \int_0^\infty \overline{f(r)} g(r) r^k dr, \quad (7.8.1)$$

где r рассматривается как радиальная координата в полярной системе координат в $(k+1)$ -мерном пространстве. В § 5.9 гильбертово пространство такого типа обозначалось через L^2_σ , где

$$\sigma(r) = \begin{cases} r^{k+1}/(k+1) & \text{при } r \geq 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Чтобы сделать оператор хотя бы формально самосопряженным в этом гильбертовом пространстве, необходимо заменить $-i(\partial/\partial r)$ на $-i(\partial/\partial r) + k/(2r)$. Это предполагает рассмотрение оператора A_k , определенного следующим образом:

$$D(A_k) = \{f \in L^2_\sigma: f' + (k/(2r))f \in L^2_\sigma\}, \quad (7.8.2)$$

$$A_k f = -i(f' + (k/(2r))f) = -ir^{-k/2}(r^{k/2}f)'. \quad (7.8.2)$$

[Отметим следующий любопытный факт: в трехмерном случае ($k=2$) A_k^* совпадает (со знаком минус) с зависящей от r частью лапласиана, $-r^{-2}(\partial/\partial r)r^2(\partial/\partial r)$, в то время как при $k \neq 2$ появляется дополнительный член

$$A_k^* = -r^{-k} \frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{r} \right)^2.]$$

Чтобы найти A_k^* , возьмем f и g из области определения A_k . Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{A_k f} g r^k dr &= i \int_a^b (r^{k/2} \overline{f})' (r^{k/2} g) dr = \\ &= i [r^k \overline{f} g]_a^b - i \int_a^b (r^{k/2} \overline{f}) (r^{k/2} g)' dr. \end{aligned} \quad (7.8.3)$$

Поэтому

$$(A_k f, g) = i \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} [r^k \overline{f(r)} g(r)]_a^b + (f, A_k g), \quad (7.8.4)$$

если такой предел существует. Из (7.8.3) при $f=g$ и неравен-

ства Шварца следует, что

$$\begin{aligned} [r^k |f(r)|^2]_a^b &= 2 \operatorname{Im} \int_a^b \overline{A_k f} f r^k dr \leq \\ &\leq 2 \left\{ \int_a^b |A_k f|^2 r^k dr \int_a^b |f|^2 r^k dr \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Оба интеграла в фигурных скобках имеют конечные пределы при $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, потому что $A_k f$ и f принадлежат L^2_σ . Следовательно как и в § 5.6, если a и b оба стремятся к бесконечности или к нулю, то выражение в фигурных скобках стремится к нулю, значит, $r^k |f(r)|^2$ имеет определенные пределы как при $r \rightarrow \infty$, так и при $r \rightarrow 0$. Предел при $r \rightarrow \infty$ равен нулю, так как в противном случае f не могло бы принадлежать L^2_σ , однако предел при $r \rightarrow 0$ не обязательно равен нулю. [Например, если $f(r) = r^{-k/2} e^{-r}$, то f и $A_k f$ принадлежат L^2_σ , но $r^k |f(r)|^2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 0$.] Поэтому (7.8.4) показывает, что сопряженный к A_k оператор A_k^* определяется так:

$$\begin{aligned} D(A_k^*) &= \{g \in L^2_\sigma: g' + (k/(2r))g \in L^2_\sigma, \lim_{r \rightarrow 0} r^{k/2} |g(r)| = 0\}, \\ A_k^* g &= -i(g' + (k/(2r))g). \end{aligned}$$

Таким образом, снова $A_k \neq A_k^*$, хотя $A_k^* \subset A_k$.

Несамосопряженность A_k и A_k^* — не просто математическое явление. Для любого комплексного α с $\operatorname{Im} \alpha > 0$ функция $f(r) = r^{-k/2} e^{i\alpha r}$ является собственной функцией оператора A_k с собственным числом α , в то время как собственные числа *самосопряженного* оператора все вещественны. С другой стороны, A_k^* не имеет даже непрерывного спектра. Симметрические операторы, которые, подобно A_k^* , не имеют самосопряженных расширений, характеризуются их так называемыми индексами дефекта, определение которых будет дано в § 8.6.

7.9. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ

Значительную информацию об операторе A можно получить из значений формы (v, Av) . Если A определен на плотном множестве, то A симметричен тогда и только тогда, когда (v, Av) вещественны для всех $v \in D(A)$, потому что поляризация (см. § 1.11) уравнения $(v, Av) = (Av, v)$ дает $(u, Av) = (Au, v)$. Симметрический оператор называется *положительным*, если $(v, Av) > 0$ для всех $v \in D(A)$, $v \neq 0$; он называется *неотрицательным*, если $(v, Av) \geq 0$ для всех $v \in D(A)$; кратко пишут $A > 0$ или $A \geq 0$. Используют также термины *положительно*

определенный¹⁾ и положительно полуопределенный. Отрицательные и неположительные операторы определяются аналогично. Пишут $A \geq B$, если $A - B \geq 0$, и $A > B$, если $A - B > 0$. Если A — любой ограниченный оператор, то самосопряженные операторы A^*A и AA^* неотрицательны, потому что $(v, A^*Av) = (Av, Av) \geq 0$ и $(v, AA^*v) = (A^*v, A^*v) \geq 0$.

Если A неограничен, то A^*A не обязательно самосопряжен, но фон Нейман (см. Като [1966]) доказал, что если A замкнут и имеет всюду плотную область определения, то оператор A^*A самосопряжен (см. замечание ниже). По утверждению упражнения 3 § 7.7 A^* также имеет плотную область определения, так как A^* замкнут, поэтому $A^{**} = A$; следовательно, AA^* также определен и самосопряжен. Очевидно, что AA^* и A^*A неотрицательны.

Числовой областью значений (или полем значений) оператора A называют множество комплексных чисел (v, Av) , получающееся, когда v пробегает все такие элементы из $D(A)$, для которых $\|v\| = 1$. Ясно, что собственные значения оператора A , если они существуют, принадлежат числовой области значений. Непрерывный спектр (см. следующую главу) лежит в замыкании числовой области значений, там же находится и весь спектр, если A ограничен (Като). Любой оператор A с плотной областью определения замыкаем, если его числовая область значений не совпадает со всей комплексной плоскостью (Като).

Замечание. При изложении теоремы фон Неймана (в § 8.6) нам будет необходимо понятие произведения операторов AB : область определения этого оператора $D(AB) = \{v \in D(B) : Bv \in D(A)\}$, а $(AB)v$ определяется как $A(Bv)$. Следовательно, $D(A^*A)$ может быть меньше $D(A)$, однако фон Нейман доказал, что $D(A^*A)$ является по крайней мере так называемым *ядром* оператора A , т. е. если A_1 представляет собой ограничение A на $D(A^*A)$, то замыкание A_1 совпадает с A .

¹⁾ Обычно положительно определенным оператором называют такой оператор A , для которого $(Av, v) \geq \gamma \|v\|$, $\gamma = \text{const} > 0$. — Прим. перев.

Глава 8

СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Непрерывный, точечный и остаточный спектр; собственные векторы и приближенные собственные векторы; резольвента; аналитичность резольвенты; преобразование Кэли; теория фон Неймана расширений симметрических операторов; индексы дефекта симметрического оператора; второе определение самосопряженного оператора.

Предварительные сведения: гл. 1—5 и 7.

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Собственные значения $(n \times n)$ -матрицы M образуют (конечное) множество точек на комплексной плоскости, называемое *спектром* M . Аналогично, если A — любой линейный оператор в гильбертовом пространстве H , комплексная плоскость $\mathbb{C}$ разбивается на две части: спектр оператора A , обозначаемый через $\sigma(A)$, и резольвентное множество, обозначаемое через $\rho(A)$. Спектр $\sigma(A)$ далее разбивается на точечный спектр $P\sigma(A)$, непрерывный спектр $C\sigma(A)$ и остаточный спектр $R\sigma(A)$.

Эта классификация связана с существованием и свойствами оператора $(A - \lambda)^{-1}$ (упрощенное обозначение для $(A - \lambda I)^{-1}$, где I — единичный оператор). Напомним, что линейный оператор

$$T: D(T) \rightarrow R(T)$$

имеет обратный

$$T^{-1}: D(T) \leftarrow R(T)$$

тогда и только тогда, когда преобразование $u \rightarrow Tu$ является взаимно однозначным, т. е. из $Tu_1 = Tu_2$ должно следовать $u_1 = u_2$ или из $Tu = 0$ следует $u = 0$; иначе говоря, когда нуль не является собственным значением T .

Точечным спектром $P\sigma(A)$ называют множество собственных значений оператора A , т. е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}, \quad (8.1.1)$$

или, иначе говоря,

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda \text{ не имеет обратного оператора}\}. \quad (8.1.2)$$

Число λ принадлежит $C\sigma(A)$ (или, возможно, $R\sigma(A)$), если нет такого $u \neq 0$, что $Au - \lambda u = 0$, но для любого заданного $\epsilon > 0$ найдется «приближенный собственный вектор» $u = u(\epsilon)$

с нормой $\|u\| = 1$, такой, что $\|Au - \lambda u\| < \varepsilon$. В этом случае $(A - \lambda)^{-1}$ существует, но неограничен. Дальнейшая классификация спектра делается в соответствии с тем, является ли область определения $D((A - \lambda)^{-1})$ (т. е. $R(A - \lambda)$) плотной в H или нет.

Непрерывным спектром $\sigma(A)$ оператора A называется множество

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}, \quad (8.1.3)$

а *остаточным спектром* $R\sigma(A)$ — множество

$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}. \quad (8.1.4)$

[Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких λ , для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором.]

Наконец, *резольвентное множество* $\rho(A)$ представляет собой остальную часть комплексной плоскости:

$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ имеет ограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}. \quad (8.1.5)$

Если $\lambda \in \rho(A)$, то нет даже соответствующих приближенных собственных векторов, поскольку

$$\|Au - \lambda u\| \geq (\|(A - \lambda)^{-1}\|)^{-1} \|u\|.$$

[Это неравенство получается из неравенства $\|(A - \lambda)^{-1} v\| \leq \|(A - \lambda)^{-1}\| \|v\|$ при помощи замены v на $Au - \lambda u$.]

Если λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, то оператор $(A - \lambda)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A и обозначается через R_λ или $R_\lambda(A)$. Резольвенту можно рассматривать как семейство операторов, зависящих от комплексного параметра λ для λ из $\rho(A)$, т. е. как операторнозначную функцию одной комплексной переменной λ , определенную на $\rho(A)$. Ее свойства играют важную роль при анализе самосопряженных и родственных им операторов. Согласно определению $\rho(A)$, резольвента R_λ является для каждого λ ограниченным оператором с плотной в H областью определения.

8.2. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ

Читателю следует по возможности проверить утверждения, приведенные ниже. Чтобы показать, что данное λ принадлежит $R\sigma(A)$, найдите собственный вектор; чтобы показать, что λ принадлежит

$\sigma(A)$, постройте последовательность приближенных собственных векторов; чтобы доказать, что λ принадлежит $\rho(A)$, решите уравнение $Au - \lambda u = v$ для произвольного v и покажите, что значения $\|u\|$ ограничены, если $\|v\| = 1$.

1. Пусть H — пространство $L^2(\mathbb{R})$, и пусть A — самосопряженный оператор $i(d/dx)$ с областью определения, состоящей из всех $f \in L^2$, таких, что f' (как распределение) также принадлежит L^2 . Оператор A имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью. *Указание.* Приближенные собственные функции можно найти (для всех вещественных λ) в виде волновых пакетов $\alpha(x) \exp\{i\lambda x\}$, где $\alpha(x)$ подбирается соответствующим образом.

2. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$, и пусть A — оператор умножения на x , определяемый следующим образом:

$$D(A) = \{f(x) \in L^2: xf(x) \in L^2\}, \quad Af(x) = xf(x).$$

A имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью.

3. Оператор $-(d/dx)^2$ с выбранной должным образом областью определения в $L^2(\mathbb{R})$ — см. § 7.5 — имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с неотрицательной вещественной полуосью (отрицательная вещественная полуось лежит в резольвентном множестве).

4. Оператор $-(d/dx)^2 + x^2$ с выбранной должным образом областью определения в $L^2(\mathbb{R})$ имеет чисто точечный спектр, состоящий из положительных целых нечетных чисел, каждое из которых является простым собственным значением. *Указание.* Собственные функции (полиномы Эрмита) образуют полное семейство.

5. Пусть M — заданная $(n \times n)$ -матрица, и пусть A — оператор в $H = l^2$, который представляется бесконечной матрицей

$$A_{np+j, np+k} = M_{jk}, \quad (j, k = 1, \dots, n, \quad p = 0, 1, 2, \dots), \\ A_{rs} = 0 \text{ для остальных } r, s$$

(см. рис. 8.1). A имеет чисто точечный спектр, состоящий из конечного числа собственных значений, каждое из которых имеет бесконечную кратность.

6. Пусть A — самосопряженный оператор в $H = l^2$, матрица которого имеет вид (см. рис. 8.2)

$$A_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k + 1, \\ 1 & \text{при } j = k - 1, \\ 0 & \text{при } j \neq k \pm 1. \end{cases}$$

Отрезок $-2 \leq \lambda \leq 2$ является непрерывным спектром этого оператора, остальная часть вещественной оси лежит в резольвентном множестве.

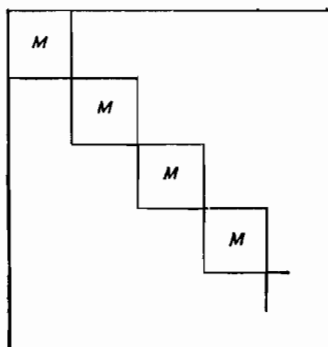


Рис. 8.1. Бесконечная матрица.

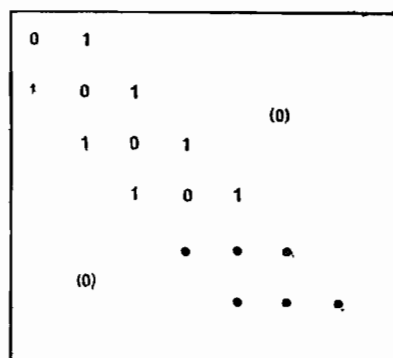


Рис. 8.2. Другая бесконечная матрица.

7. Рассмотрим в $H = l^2$ унитарный оператор A , описанный в § 7.3 и отображающий

$$\xi = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}, \dots)$$

в

$$A\xi = (x_2, x_4, x_1, x_6, x_3, \dots, x_{2n+2}, x_{2n-1}, \dots).$$

Этот оператор не имеет точечного спектра, а его непрерывный спектр совпадает с единичной окружностью на плоскости λ .

8. Операторы уничтожения и рождения в $H = l^2$, обозначаемые через a и a^* , определяются следующим образом. Они имеют общую область определения

$$D_1 = D(a) = D(a^*) = \{\xi = (x_0, x_1, x_2, \dots) : \sum n |x_n|^2 < \infty\}. \quad (8.2.1)$$

Значения $a\xi$ и $a^*\xi$ определяются так:

$$a(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \dots),$$

$$a^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, \dots).$$

Физическая интерпретация в простейшем случае состоит в том, что вектор

$$\varphi_n = (0, 0, \dots, x_n = 1, 0, 0, \dots)$$

представляет состояние физической системы из n частиц; в частности, φ_0 дает состояние вакуума. Действие операторов a и a^* на эти состояния выглядят так:

$$a\varphi_n = \sqrt{n}\varphi_{n-1}, \quad a^*\varphi_n = \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}.$$

Покажите, что a^* — сопряженный a в соответствии с определением § 7.2 (см. уравнение (7.2.1)). Покажите, что

$$a^*a - aa^* = -1$$

в том смысле, что для всех ξ в некоторой области определения $D_2 (\subset D_1)$ (которую следует найти)

$$a^*a\xi - aa^*\xi = -\xi.$$

Оператор $N = a^*a$ с областью определения D_2 называется *оператором числа частиц*. Его действие на состояние φ_n оказывается таким: $N\varphi_n = n\varphi_n$. Докажите, что точечный спектр оператора a совпадает со всей комплексной плоскостью. Для этого найдите решение ξ_λ уравнения

$$a\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$$

при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и проверьте, что $\xi_\lambda \in l^2$. Проверьте также, что точечный спектр a^* пуст, показав, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ из уравнения $a^*\xi = \lambda\xi$ следует $\xi = 0$. Наконец, покажите (пользуясь соотношением (7.7.2) между нуль-пространством и областью значений оператора), что остаточным спектром a^* является вся комплексная плоскость.

8.3. СПЕКТР СИММЕТРИЧЕСКОГО, САМОСОПРЯЖЕННОГО И УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРОВ

Сначала предположим, что A симметричен, т. е. что $D(A)$ плотна в H и $(u, Aw) = (Au, w)$ для всех $u, w \in D(A)$ (тогда (u, Au) всегда вещественно), и рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda u = v. \quad (8.3.1)$$

Мнимая часть уравнения $(u, Au) - \lambda(u, u) = (u, v)$ есть

$$-\operatorname{Im} \lambda \|u\|^2 = \operatorname{Im}(u, v). \quad (8.3.2)$$

Отсюда следует, что если λ невещественно, то обязательно $v \neq 0$, если взять $u \neq 0$; следовательно, такое λ не может быть собственным значением A и оператор $A - \lambda$ имеет обратный. В силу неравенства Шварца

$$|\operatorname{Im} \lambda| \|u\|^2 = |\operatorname{Im}(u, v)| \leq |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|,$$

но поскольку $u = (A - \lambda)^{-1}v$, мы получаем

$$\|(A - \lambda)^{-1}v\| \leq (1/|\operatorname{Im} \lambda|) \|v\|. \quad (8.3.3)$$

Следовательно, для любого симметрического оператора A любое невещественное λ принадлежит либо резольвентному множеству, либо остаточному спектру.

Предположим теперь, что A самосопряжен. Напоминаем (см. § 7.8), что если T —оператор с плотной областью определения, то замыкание $\bar{R}(T)$ его области значений совпадает с $N(T^*)^\perp$, ортогональным дополнением нуль-пространства T^* . Поэтому для не вещественного λ

$$\bar{R}(A - \lambda) = N(A^* - \bar{\lambda})^\perp,$$

но $A^* = A$, а $\bar{\lambda}$ не является собственным значением; следовательно, нуль-пространство оказывается пустым (за исключением нулевого элемента), а его ортогональное дополнение совпадает с H . Это означает, что область значений $A - \lambda$, которая совпадает с областью определения $(A - \lambda)^{-1}$, плотна в H и что *любое не вещественное λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$* , поскольку из (8.3.3) следует, что $(A - \lambda)^{-1}$ ограничен. Кроме того, оператор $(A - \lambda)^{-1}$ замкнут, поскольку A замкнут (и, следовательно, $A - \lambda$ замкнут), а график $(A - \lambda)^{-1}$ —повернутый график оператора $-A + \lambda$ и, значит, —замкнутый график. Поэтому для $\lambda \in \rho(A)$ резольвента $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ определена на всем H . Действительно, при любом λ , не являющимся собственным значением, $(A - \lambda)^{-1}$ существует и имеет плотную область определения, т. е. остаточного спектра нет. Суммируем эти результаты:

Теорема 1. Пусть A самосопряжен. Тогда спектр $\sigma(A)$ лежит на вещественной оси; верхняя и нижняя полуплоскости находятся в резольвентном множестве $\rho(A)$; остаточный спектр пуст; для любого $\lambda \in \rho(A)$ область определения $R_\lambda = R_\lambda(A)$ совпадает с H ; для не вещественного λ

$$\|R_\lambda\| \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda|. \quad (8.3.4)$$

Рассуждения, при помощи которых была получена эта теорема, можно почти без изменений перенести на случай унитарного оператора U . Если

$$Uv - \lambda v = w,$$

так что $v = R_\lambda w$, то

$$\|v\|^2 = \|Uv\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda v, w) + \|w\|^2.$$

Остальные рассуждения оставляются в качестве упражнения. [Чтобы получить оценку для $\|v\|/\|w\|$, нужно решить квадратное уравнение.] В результате получается следующая теорема:

Теорема 2. Пусть U унитарен. Тогда спектр $\sigma(U)$ лежит на единичной окружности $|\lambda| = 1$; внутренность и внешность единичного круга находятся в резольвентном множестве $\rho(A)$; остаточный спектр пуст; если $\lambda \in \rho(U)$, то область определения $R_\lambda = R_\lambda(A)$ совпадает с H ; для $|\lambda| \neq 1$

$$\|R_\lambda\| \leq 1/|1 - \lambda|. \quad (8.3.5)$$

Неравенства (8.3.4) и (8.3.5) превращаются в равенства при замене знаменателя расстоянием от точки λ до спектра; в таком виде эти оценки можно обобщить на случай нормального оператора. Оператор T называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным (в строгом смысле: необходимо, чтобы не только $T^*Tx = TT^*x$ для всех x , для которых определены обе части равенства, но чтобы T^*T и TT^* имели одну и ту же область определения, так что если определено T^*Tx , то TT^*x также определено, и обратно). Самосопряженные и унитарные операторы нормальны. Для $\lambda \in \rho(T)$ положим

$$d(\lambda, \sigma(T)) = \inf \{ |\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(T) \}$$

(вместо $\inf$ можно поставить $\min$, потому что спектр $\sigma(T)$ является замкнутым подмножеством комплексной плоскости; см. § 8.5 ниже).

Теорема 3. Если T — нормальный оператор и R_λ — его резольвента, то для $\lambda \in \rho(T)$

$$\|R_\lambda\| = 1/d(\lambda, \sigma(T)). \quad (8.3.6)$$

Доказательство приводится, например, в книге Като [1966].

В § 8.5 будет доказано, что для любого оператора A вместе с $\lambda \in \rho(A)$ в резольвентном множестве $\rho(A)$ лежит и внутренность круга радиуса $\|R_\lambda\|^{-1}$ с центром в λ , т. е. множество комплексных чисел μ , таких, что $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$. Следовательно,

$$\|R_\lambda\| \geq 1/d(\lambda, \sigma(A)) \quad (8.3.7)$$

для любого оператора A вне зависимости от того, является он нормальным или нет.

8.4. ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ПРИ РАСШИРЕНИИ ОПЕРАТОРА

Если заменить линейный оператор A его расширением A' , то подмножества $P\sigma(A)$, $C\sigma(A)$, $R\sigma(A)$, $\rho(A)$ комплексной плоскости изменятся. Например, хотя точечный спектр $P\sigma(A)$ не может уменьшиться, он может увеличиться, потому что собственный вектор оператора A' может и не принадлежать $\mathcal{D}(A)$. Остаточный спектр $R\sigma(A)$ не может увеличиться (поскольку $\mathcal{D}((A - \lambda)^{-1})$ содержится в $\mathcal{D}((A' - \lambda)^{-1})$, и если последняя область не плотна, то и первая не может быть плотной), но может уменьшиться. Различные возможности изменений указанных множеств изображены на рис. 8.3, что легко проверить. На этой диаграмме $S_1 \rightarrow S_2$ означает, что данная точка λ комплексной плоскости, которая ранее была в S_1 , может оказаться принадлежащей множеству S_2 после того, как A заменено на A' .

Действие стрелки внизу диаграммы можно проиллюстрировать на примере оператора A радиального импульса квантовой меха-

ники (см. § 7.8). Именно, пусть $H = L^2(0, \infty)$, и пусть A определяется следующим образом:

$$D(A) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(0) = 0\},$$

$$Af = -if'.$$

[Поскольку $f' \in L^2$, функция f является непрерывной на $[0, \infty)$; значит, граничное условие $f(0) = 0$ существенно.] Сопряженный

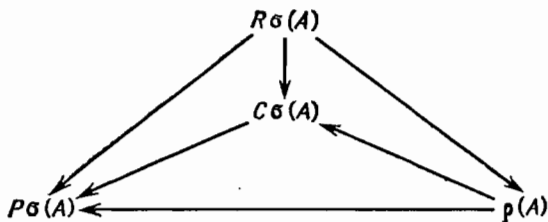


Рис. 8.3. Изменение спектра при расширении оператора.

оператор A^* является расширением A , его область определения включает элементы L^2 , которые не удовлетворяют граничному условию, а именно:

$$D(A^*) = \{f \in L^2: f' \in L^2\},$$

$$A^*f = -if'.$$

Легко видеть, что A симметричен, т. е. что $(Af, g) = (f, Ag)$ для всех $f, g \in D(A)$. Он, однако, несамосопряжен, и не имеет самосопряженного расширения; A^* несимметричен, потому что $(A^*f, g) = -(f, A^*g) = -if(0)g(0)$. Пусть λ принадлежит верхней полуплоскости; если λ — собственное значение A или A^* , то собственная функция является решением уравнения

$$-if'(x) = \lambda f(x);$$

следовательно,

$$f(x) = ce^{i\lambda x}, \quad c = \text{const.}$$

Эта функция является собственной функцией A^* при $\text{Im } \lambda > 0$, но не является таковой для A , поскольку она не принадлежит $D(A)$, если константа отлична от нуля, в противном же случае получаем $f(x) \equiv 0$. Однако λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A , в чем можно убедиться, решив уравнение

$$-if'(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

при заданном $g \in L^2$. Это решение есть

$$f(x) = i \int_0^x e^{i\lambda(x-y)} g(y) dy;$$

оно единственно вследствие граничного условия $f(0) = 0$. Функция f непрерывна; более того, если g имеет ограниченный носитель и $\operatorname{Im} \lambda > 0$, то $f(x)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$ и, следовательно, принадлежит $L^2(0, \infty)$. Функции с ограниченным носителем плотны в L^2 , поэтому $(A - \lambda)^{-1}$ существует и имеет всюду плотную область определения. Неравенство (8.3.3) здесь применимо, поскольку A симметричен; поэтому $(A - \lambda)^{-1}$ ограничен. Отсюда следует вывод о том, что верхняя полуплоскость, с одной стороны, лежит в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A , а с другой стороны — в точечном спектре $P\sigma(A^*)$ оператора A^* .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Выясните, как связана остальная часть комплексной плоскости ($\operatorname{Im} \lambda \leq 0$) со спектрами операторов A и A^* .

Замечание. Оператор A радиального импульса не имеет самосопряженного расширения. Если бы оператор B был таким расширением, то A^* был бы расширением $B^* = B$, следовательно, были бы верны соотношения

$$D(A) \subset D(B) = D(B^*) \subset D(A^*),$$

где включения $\subset$ являются собственными. Однако $D(A^*)$ является линейной оболочкой $D(A)$ и одномерного множества, содержащего, например, функции se^{-x} . Поэтому между $D(A)$ и $D(A^*)$ нет места для $D(B)$, т. е. если бы $D(B)$ содержала хоть один элемент, не принадлежащий $D(A)$, то она содержала бы и всю $D(A^*)$, значит, тогда бы $B = A^*$, но A^* не самосопряжен и даже несимметричен. Дополнительные сведения по этому вопросу см. в § 8.6 об индексах дефекта.

Важным случаем расширения оператора является простая замена замыкаемого оператора A его замыканием $\bar{A}$. В этом случае большинство стрелок в приведенной выше диаграмме исчезает. Легко проверить, что в этом случае резольвентное множество не изменяется (однако область определения резольвенты R_λ , вообще говоря, увеличивается: из плотного в H множества она переходит во все H) и что общая диаграмма сводится к следующей:

$$C\sigma(A) \rightarrow P\sigma(A) \leftarrow R\sigma(A).$$

Если замыкание $\bar{A}$ замыкаемого оператора A является самосопряженным, то A называют *существенно самосопряженным*. В этом случае $\bar{A}$ является единственным самосопряженным рас-

ширением A . Действительно, всегда если $A \subset B$, то $A^* \supset B^*$ (докажите!); поэтому другое самосопряженное расширение A_1 , будучи замкнутым, является расширением оператора $\bar{A}$ (напомним, что $\bar{A}$ — минимальное замкнутое расширение A), но тогда из $\bar{A} \subset A_1$ следует $\bar{A}^* \supset A_1^*$, а поскольку $A_1^* = A_1$ и $\bar{A}^* = \bar{A}$, то $\bar{A} \supset A_1$, т. е. $\bar{A} = A_1$. Замена существенно самосопряженного оператора его замыканием оставляет все части спектра без изменения; единственное следствие этой замены состоит в том, что при $\lambda \in \rho(A)$ $D(R_\lambda)$ увеличивается до всего H .

8.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОЛВЕНТЫ

Как и в конечномерном случае, резольвента R_λ любого замкнутого оператора A удовлетворяет резольвентному уравнению

$$(R_\lambda - R_\mu)/(\lambda - \mu) = R_\lambda R_\mu \quad (8.5.1)$$

при $\lambda, \mu \in \rho(A)$; это равенство можно проверить, умножив обе его части слева на $(A - \lambda)$, что допустимо потому, что, во-первых, если любая часть применяется к произвольному $v \in H$, то результат принадлежит $D(A)$, и, во-вторых, оператор $(A - \lambda)$ имеет обратный. [Замечание. Для любого $v \in D(A)$ $R_\lambda(A - \lambda)v = v = (A - \lambda)R_\lambda v$, однако R_λ и $(A - \lambda)$ не коммутируют в строгом смысле, потому что область определения $(A - \lambda)R_\lambda$ больше (а именно совпадает со всем H), чем область определения $R_\lambda(A - \lambda)$. Таким образом,

$$R_\lambda(A - \lambda) \subset (A - \lambda)R_\lambda = I. \quad (8.5.2)$$

Однако $A - \lambda$ коммутирует с $A - \mu$, а R_λ — с R_μ !

Пусть теперь A — произвольный замкнутый оператор, а λ — произвольное фиксированное комплексное число из $\rho(A)$. Мы покажем сейчас, что открытый круг радиуса $\|R_\lambda\|^{-1}$ с центром в λ также находится в $\rho(A)$. Это означает, что $\rho(A)$ — открытое множество и неравенство (8.3.7) справедливо. Мы найдем также разложение R_μ в ряд по μ для μ из этого круга. Именно, пусть μ таково, что

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} |\mu - \lambda| \|R_\lambda\| < 1. \quad (8.5.3)$$

Определим последовательность операторов $B_n = B_n(\mu)$ равенством

$$B_n = R_\lambda + (\mu - \lambda) R_\lambda^2 + \dots + (\mu - \lambda)^n R_\lambda^{n+1} \quad (8.5.4)$$

и покажем, что $B_n \rightarrow R_\mu$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого $u \in H$ и для $n > l$

$$\|B_n u - B_l u\| \leq (\alpha^{l+1} + \alpha^{l+2} + \dots + \alpha^n) \|R_\lambda u\|, \quad (8.5.5)$$

поэтому $\{B_n u\}$ является последовательностью Коши и при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, который линейно зависит от u . Это определяет оператор, который мы обозначим через B :

$$Bu = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n u \quad (\forall u \in H).$$

Более того, поскольку выражение в скобках в (8.5.5) представляет собой сумму геометрической прогрессии, нетрудно убедиться в том, что

$$\|Bu\| = \lim \|B_n u\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|R_\lambda\| \|u\|, \quad (8.5.6)$$

так что B является ограниченным оператором. Если умножить левую часть (8.5.4) на $A - \mu$, правую часть (8.5.4) — на $A - \mu = (A - \lambda) - (\mu - \lambda)$, а затем просуммировать правую часть, то в результате получится

$$(A - \mu) B_n = I - (\mu - \lambda)^{n+1} R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому для любого $u \in H$

$$(A - \mu) B_n u \rightarrow u \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а мы видели, что

$$B_n u \rightarrow Bu \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и поскольку $(A - \mu)$ — замкнутый оператор, получаем, что $Bu \in \mathcal{D}(A)$, $\mu \in \rho(A)$ и

$$B = (A - \mu)^{-1} = R_\mu,$$

что и требовалось доказать. Более того, из (8.5.6) и (8.5.3) следует, что

$$\|R_\mu\| \leq \frac{\|R_\lambda\|}{1 - |\mu - \lambda| \|R_\lambda\|}. \quad (8.5.7)$$

[Из (8.5.5) следует, что $\|B_n - B_l\| \rightarrow 0$ при $n, l \rightarrow \infty$; значит, $\|B - B_l\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Говорят, что B_n сходится по норме к B . Различные типы сходимости операторов будут рассматриваться в следующей главе.]

Из (8.5.4) следует, что для $\lambda \in \rho(A)$, $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$ и для любых $u, v \in H$ $(u, R_\mu v)$ является суммой сходящегося степенного ряда,

$$(u, R_\mu v) = \sum_{l=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^l (u, R_\lambda^{l+1} v);$$

следовательно, $(u, R_\mu v)$ является аналитической функцией аргумента μ . В частности,

$$d(u, R_\mu v)/d\mu|_{\mu=\lambda} = (u, R_\lambda^2 v);$$

интересно, что резольвентное уравнение (8.5.1) дает тот же самый результат, потому что

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{(u, R_\mu v) - (u, R_\lambda v)}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} (u, R_\mu R_\lambda v),$$

так что справа получается $(u, R_\lambda^2 v)$, если предположить, что $(u, R_\mu R_\lambda v)$ непрерывно по μ .

В § 9.7 будет показано, что $R_\lambda(A)$ можно саму по себе рассматривать как операторнозначную аналитическую функцию от λ и что, например, $dR_\lambda/d\lambda = R_\lambda^2$.

Примеры явных выражений резольвенты $R_\lambda(A)$ для некоторых операторов A будут приведены в гл. 10 и 11.

8.6. РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ.

ИНДЕКСЫ ДЕФЕКТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЭЛИ.

ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

В 1929 г. фон Нейман разработал довольно полную теорию возможных симметрических расширений симметрического оператора (т. е. оператора A , определенного на всюду плотном множестве, такого, что $(Au, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in D(A)$). Примеры, приведенные в гл. 7, показывают, что такие операторы могут не иметь самосопряженных расширений, могут быть самосопряженными или, более общо, могут иметь единственное самосопряженное расширение (в этом случае они называются существенно самосопряженными) или много различных самосопряженных расширений. В этой связи важную роль играют индексы дефекта, которые мы сейчас определим. Прежде всего если M — какое-либо линейное многообразие, то его *коразмерность*, обозначаемая $\text{codim } M$, определяется как размерность его ортогонального дополнения $M^\perp$. Это либо неотрицательное целое число, либо трансфинитное кардинальное число — мощность (которая в сепарабельном гильбертовом пространстве может быть только $\aleph_0$). Если A — симметрический оператор, то его *индексами дефекта* называют числа (m, n) , где $m = \text{codim } R(A + i)$, а $n = \text{codim } R(A - i)$; ясно, что m и n описывают размеры того, чего не хватает областям значений операторов $A \pm i$ (точнее, замыканиям этих областей) для пополнения до гильбертова пространства H . В § 8.3 было показано, что $A - \lambda$ имеет ограниченный обратный оператор при $\text{Im } \lambda \neq 0$; следовательно, число i (или $-i$) принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, если $m = 0$ (или $n = 0$), и остаточному спектру $R\sigma(A)$, если $m > 0$ (или $n > 0$).

Следующая лемма показывает, что числа $\pm i$ в определении индексов дефекта взяты произвольно: их можно заменить любыми числами λ_1 и λ_2 , из которых первое лежит в верхней полуплоскости, а второе — в нижней.

Лемма. Если T — любой линейный оператор, определенный на плотном в H множестве, то $\text{codim } R(T - \lambda)$ не зависит от λ (т. е. является константой) в любой связной области плоскости λ , в которой $T - \lambda$ имеет ограниченный обратный оператор.

(Доказательство см. у Ахизера и Глазмана [1950, § 78].)

Следствие. Если T симметричен, то $\text{codim } R(T - \lambda)$ имеет постоянные значения m и n в нижней и верхней полуплоскостях. Более того, если $T - \lambda$ имеет ограниченный обратный оператор при некотором вещественном λ , то $m = n$.

Теперь допустим, что T — симметрический оператор с индексами дефекта (m, n) и мы хотим найти все самосопряженные расширения A оператора T , если таковые существуют. Если такие расширения существуют, то T по меньшей мере замыкаем и без потери общности можно предположить, что он замкнут. [Доказательство. Если оператор A — самосопряженное расширение T (и, значит, замкнут) и если последовательности Коши $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ с $u_n \in D(T)$ имеют пределы v и w , то $u_n \notin D(A)$ и $Tu_n = Au_n$ ($n = 1, 2, \dots$); следовательно, $w = Av$, так что предел $\lim Tu_n$ зависит только от $\lim u_n$, значит, T замыкаем.] Кроме того, предположим пока, что $m = n$ и даже что $m = n < \infty$. (Мы увидим потом, что T не имеет самосопряженных расширений, если $m \neq n$.) Очевидно, что $T + i$ — также замкнутый оператор, а это указывает на то, что область значений $T + i$ является замкнутым линейным многообразием. Чтобы убедиться в этом, возьмем последовательность Коши $\{u_n\}$ элементов $R(T + i)$; поскольку $(T + i)^{-1}$ ограничен, элементы $w_n = (T + i)^{-1}u_n$ образуют последовательность Коши и $u_n = (T + i)w_n$; оператор $T + i$ замкнут, следовательно, $\lim w_n \in D(T + i)$, а $\lim u_n \in R(T + i)$, поэтому $R(T + i)$ замкнута.

Преобразование Кэли V симметрического оператора T определяется аналогично преобразованию Кэли эрмитовой матрицы, именно

$$D(V) = R(T + i), \quad Vw = (T - i)(T + i)^{-1}w \quad \text{для всех } w \in D(V). \quad (8.6.1)$$

Если $(T + i)^{-1}w = u$, т. е. $w = (T + i)u$, то $Vw = Tu - iu$; следовательно, $\|Vw\|^2 = (Tu - iu, Tu - iu) = \|Tu\|^2 + \|u\|^2 = \|w\|^2$, потому что $(Tu, u) = (u, Tu)$, т. е. $(Tu, iu) = -(iu, Tu)$. Таким образом, преобразование $w \rightarrow Vw$ является взаимно однозначным изометрическим отображением $R(T + i)$ на $R(T - i)$ или просто (для краткости) — *изометрией*. [Заметим, что если $\|Vw\| = \|w\|$ для всех $w \in D(V)$, то $(Vu, Vw) = (u, w)$ для всех $u, w \in D(V)$. Это можно показать с помощью процедуры поляризации, использованной и для вывода уравнения (7.2.3) из (7.2.2).] Если T самосопряжен, то $R(T + i) = R(T - i) = H$ (по теореме 1 § 8.3) и V унитарен; обратно, если V — унитарный оператор, то T самосопряжен.

Следующая лемма описывает обращение преобразования Кэли.

Лемма. Пусть T — симметрический оператор, и пусть V — его преобразование Кэли. Тогда оператор $V-1$ обратим и T можно выразить через V при помощи равенств

$$D(T) = R(V-1), \quad T = -i(V+1)(V-1)^{-1}. \quad (8.6.2)$$

Обратно, если V — произвольная изометрия, такая, что $R(V-1)$ плотна в H , то $V-1$ обратим, оператор T , определенный в (8.6.2), симметричен, а V является его преобразованием Кэли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв u и w , определенные выше для произвольного $u \in D(T)$, получим

$$w = (T+i)u, \quad Vw = (T-i)u, \quad (V-1)w = -2iu. \quad (8.6.3)$$

Следовательно, $(V-1)w = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow w = 0$; значит, $V-1$ обратим. Из тех же уравнений легко вывести, что $u \in D(T)$, если $u \in R(V-1)$, и что $Tu = -i(V+1)(V-1)^{-1}u$, что и требовалось доказать. Обратно, пусть V — любая изометрия, для которой $R(V-1)$ плотна в H . Покажем, что $V-1$ обратим. Именно, предположим, что $(V-1)w = 0$ для некоторого w . Поскольку $(w, z) = (Vw, Vz)$, для любого $z \in D(V)$

$$0 = (Vw - w, z) = (Vw, z) - (w, z) = -(Vw, Vz - z).$$

Так как элементы вида $Vz - z$ плотны в H , отсюда следует, что $Vw = 0$ и, следовательно, $w = 0$. Поэтому $V-1$ обратим. Пусть теперь T определен равенствами (8.6.2). Для любых $u, v \in D(T)$ мы можем тогда написать $u = (V-1)x$, $v = (V-1)y$ и затем $Tu = -i(V+1)x$ и $Tv = -i(V+1)y$. Поэтому

$$(u, Tv) = ((Vx - x), -i(Vy + y)),$$

$$(Tu, v) = (-i(Vx + x), (Vy - y)),$$

откуда видно, что левые части равны, потому что $(Vx, Vy) = (x, y)$; следовательно, оператор T симметричен. Дополнительные выкладки показывают, что преобразование Кэли оператора T совпадает с V .

Теперь можно сформулировать первую теорему о расширениях симметрических операторов.

Теорема (фон Нейман). Пусть T — замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта (m, m) ($m < \infty$), и пусть V — его преобразование Кэли. Тогда (1) если A — любое самосопряженное расширение оператора T и U — его преобразование Кэли, то U является расширением V , изометрически отображающим $N(T^* - i)$ на $N(T^* + i)$; (2) любое изометрическое отображение V' $N(T^* - i)$ на $N(T^* + i)$ определяет единственное самосопряженное расширение A оператора T , задаваемое уравнениями (8.6.4) (см. ниже). Так как V' можно представить унитарной матрицей размера $m \times m$, имеется m^2 -параметрическое семейство самосопряженных расширений T . (Эти m^2 параметров вещественны.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме о связи нуль-пространства и области значений (см. упражнение 2 § 7.7), гильбертово пространство может быть представлено в виде ортогональной прямой суммы двумя способами:

$$H = R(T+i) \oplus N(T^* - i),$$

$$H = R(T-i) \oplus N(T^* + i).$$

[Замечание. $R(T \pm i)$ — замкнутые линейные многообразия, поскольку $(T \pm i)^{-1}$ — ограниченные замкнутые операторы.] (1) Так как A — расширение T , U является расширением V . Следовательно, по определению V оператор U изометрически отображает $R(T+i)$ на $R(T-i)$. Так как U сохраняет ортогональность, оно изометрически отображает и $N(T^*-i)$ на $N(T^*+i)$, что и утверждалось. (2) Пусть V' — произвольное изометрическое отображение $N(T^*-i)$ на $N(T^*+i)$, и пусть унитарный оператор U определен следующим образом:

$$\begin{aligned} Uv &= Vv \quad \text{для } v \in R(T+i), \\ Uv &= V'v \quad \text{для } v \in N(T^*-i), \end{aligned}$$

а затем расширяется по линейности на все H . Так как $V-1$ имеет плотную в H область значений, $U-1$ обладает таким же свойством. Поэтому, согласно вышеприведенной лемме, оператор A можно определить так:

$$D(A) = R(U-1), \quad Av = -i(U+1)(U-1)^{-1}v, \quad (8.6.4)$$

а тогда U есть преобразование Кэли оператора A . Так как U унитарен, A самосопряжен.

В качестве примера рассмотрим оператор T , описанный в § 7.5 и заданный в $L^2(-1, 1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D(T) &= \{f \in L^2: f' \in L^2, f(-1) = f(1) = 0\}, \\ Tf &= -if'. \end{aligned}$$

Мы получили, что T^* совпадает с T , если исключить то, что у него отсутствуют граничные условия. Теперь мы найдем самосопряженные расширения T . Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $(T^* - \lambda)f = 0$ имеет решение $f(x) = e^{i\lambda x}$, которое всегда принадлежит $L^2(-1, 1)$; следовательно, индексы дефекта T есть $(1, 1)$. Нуль-пространства $N(T^*+i)$, $N(T^*-i)$ состоят из функций, кратных e^x , e^{-x} соответственно; следовательно, общее изометрическое отображение $N(T^*-i)$ на $N(T^*+i)$ есть $V^2 = V'_\alpha: e^{-x} \rightarrow e^{i\alpha}e^x$, где α — фиксированное вещественное число. Область определения самосопряженного оператора A , соответствующего такому выбору V^2 , есть область значений $U-1$, согласно (8.6.4), где U — унитарный оператор, определенный, как и выше, через V^2 и преобразование Кэли $V = (T-i)(T+i)^{-1}$ оператора T . Область определения V совпадает с областью значений $T+i$. Разложение H показывает, что области значений операторов $T+i$ и $T-i$ состоят из всех таких $f \in L^2$, для которых $\int_{-1}^1 e^{-x} f(x) dx = 0$ и $\int_{-1}^1 e^x f(x) dx = 0$ соответственно, что можно показать и непосредственно, вычисляя все f вида $(T+i)g$ с $g \in D(T)$. Непосредственные вычисления показывают, что для любого $f_1 \in R(T+i)$

функция $Vf_1 = (T - i)(T + i)^{-1}f_1$ получается из уравнения

$$(Vf_1)(x) = 2e^x \int_{-1}^x e^{-y} f_1(y) dy + f_1(x).$$

Поэтому если произвольное $f \in L^2(-1, 1)$ записать как $f_1(x) + ce^{-x}$, где $f_1 \in \mathcal{R}(T + i)$ и $ce^{-x} \in \mathcal{N}(T^* - i)$, то

$$((U - 1)f)(x) = 2e^x \int_{-1}^x e^{-y} f_1(y) dy + c(e^{x+i\alpha} - e^{-x})$$

или, короче,

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x).$$

Теперь $g_1(x)$ обращается в нуль при $x = \pm 1$ и является фактически общим элементом $\mathcal{D}(T)$. Влияние члена $g_2(x) = c(e^{x+i\alpha} - e^{-x})$ сказывается в том, что $\mathcal{D}(T)$ расширяется до $\mathcal{D}(A)$ ослаблением граничных условий $g(\pm 1) = 0$ до условия

$$g(1) = \frac{e^{1+i\alpha} - e^{-1}}{e^{-1+i\alpha} - e^1} g(-1) = e^{i\theta} g(-1),$$

где константа $e^{i\theta}$ определяется выражением

$$e^{i\theta} = \frac{e^{1+(1/2)\alpha} - e^{-1-(1/2)\alpha}}{e^{-1+(1/2)\alpha} - e^{1-(1/2)\alpha}}$$

и, значит, имеет модуль, равный единице. Отсюда следует вывод, что самосопряженные расширения T точно те же, что были найдены ранее и задавались с помощью (7.5.5) для каждого $\theta \in [0, 2\pi)$; в § 7.5 они были обозначены через A_θ .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверьте, что уравнение (8.6.4) дает для данного примера $A_\theta f = -if'$ для $f \in \mathcal{D}(A_\theta)$. *Указание.* Достаточно рассмотреть $f(x) = e^{x+i\alpha} - e^{-x}$.

2. Проведите аналогичное исследование для оператора T , определяемого следующим образом:

$$\mathcal{D}(T) = \{f: f^{(m)} \in L^2, f^{(p)}(-1) = f^{(p)}(1) = 0 \ (p = 0, 1, \dots, m-1)\},$$

$$Tf = (-i)^m f^{(m)},$$

где для любого целого $p \geq 0$ $f^{(p)}$ означает p -ю производную распределения f .

Метод, использованный для доказательства предыдущей теоремы, делает очевидной общую ситуацию. Пусть T — произвольный замкнутый симметрический оператор, и пусть (m, n) — его индексы дефекта. Далее, пусть F и G — замкнутые линейные многообразия, содержащиеся в $\mathcal{N}(T^* - i)$ и $\mathcal{N}(T^* + i)$ соответственно, оба имеющие размерность $m_0 \leq \min(m, n)$, и пусть V' — любая изометрия F на G . Линейное преобразование U , определяемое так:

$$Uw = Vw \quad \text{для } w \in \mathcal{R}(T + i),$$

$$Uw = V'w \quad \text{для } w \in F,$$

является изометрией $R(T+i) \oplus F$ на $R(T-i) \oplus G$. Тогда оператор A , определяемый в (8.6.4), является симметрическим расширением T , и все симметрические расширения могут быть получены таким образом. Оператор A оказывается *максимальным* (т. е. не допускает дальнейших расширений) тогда и только тогда, когда его индексы дефекта либо $(0, 1)$, либо $(1, 0)$. Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда его индексы дефекта есть $(0, 0)$, а для этого требуется, чтобы индексы дефекта оператора T имели вид (m, m) . Если индексы дефекта оператора T есть (∞, ∞) , то оператор T имеет как самосопряженные, так и несамопряженные максимальные расширения.

Операторы радиального импульса (§ 7.8) имеют индексы дефекта $(1, 0)$ и, следовательно, являются максимальными, но не самосопряженными операторами.

Второе определение самосопряженности, эквивалентное первому, данному в предыдущей главе, но более удобное для некоторых целей, выглядит так: симметрический оператор (или замкнутый симметрический оператор) *существенно самосопряжен* (или *самосопряжен*), если $+i$ и $-i$ принадлежат его резольвентному множеству.

Следовательно, чтобы показать, что данный оператор A с плотной областью определения, такой, что $(Au, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in D(A)$, существенно самосопряжен, т. е. является наблюдаемой, достаточно показать, что уравнения $Af \pm if = g$ имеют единственное решение f для любого g из плотного в H множества. Примеры можно найти в § 8.2, а также в гл. 10 и 11.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Применения методов теории функций комплексной переменной в теории матриц; проекторы; разложение единицы; каноническое представление матрицы; форма Жордана; нильпотентная часть матрицы; обобщенные собственные векторы и собственные подпространства; теорема Шура о триангуляции; функции и распределения как граничные значения аналитических функций; преобразование Лапласа; каноническое представление самосопряженных и унитарных операторов; слабая, сильная и равномерная сходимости ограниченных операторов; спектр оператора A как множество таких t , для которых E_t — не константа; функции операторов; ограниченные наблюдаемые; полярное разложение оператора.

Предварительные сведения: в основном гл. 1, 7, 8.

Основное содержание данной главы основывается на аналогии (для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве) с задачей диагонализации эрмитовой матрицы и тем самым с задачей представления матрицы через ее собственные значения и собственные векторы.

9.1. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭРМИТОВОЙ МАТРИЦЫ

Пусть A — эрмитова $(n \times n)$ -матрица. Преобразование $x \rightarrow Ax$ в $\mathbb{C}^n$ можно описать геометрически через собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и ортонормированное семейство собственных векторов $v_1, \dots, v_n$ этой матрицы. Собственные векторы определяют инвариантные направления, а собственные значения описывают соответствующие растяжения и сжатия, которые осуществляют данное преобразование по этим направлениям. Однако такое описание весьма неоднозначно: любой вектор v_k можно умножить на любую константу α , такую, что $|\alpha| = 1$; более того, если все векторы $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ соответствуют одному собственному значению, то их можно подвергнуть любому унитарному преобразованию в r -мерном (собственном) подпространстве, порожденном этими векторами. С другой стороны, *фиксация* различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ (скажем, в порядке возрастания) и соответствующих собственных *подпространств* $E_1, \dots, E_q$ приводит к однозначному описанию преобразования — к такому представлению преобразования, которое можно обобщить на бесконечномерный случай.

Поскольку A — эрмитова матрица, собственные подпространства взаимно ортогональны и в сумме дают $\mathbb{C}^n$. Любой вектор

$x \in \mathbb{C}^n$ имеет единственное представление вида $x_1 + x_2 + \dots + x_q$, где $x_j \in E_j$; иначе говоря, $\mathbb{C}^n$ является ортогональной прямой суммой:

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_q. \quad (9.1.1)$$

При фиксированном j и произвольном x отображение $x \rightarrow x_j$ является линейным преобразованием $\mathbb{C}^n$ на E_j , называемым *проектированием*; матрицу P_j этого преобразования называют *проектором*, в частности *проектором на j -е собственное подпространство*: $P_j x = x_j$. Разложение самого x_j имеет вид $0 + \dots + x_j + 0 + \dots + 0$, потому что x_j уже принадлежит E_j ; следовательно, $P_j x_j = x_j$, тогда как $P_k x_j = 0$ при $k \neq j$. Но тогда $P_j^2 x = P_j x$ для любого x , в то время как $P_k P_j x = 0$ при $k \neq j$; значит,

$$P_j^2 = P_j, \quad (9.1.2)$$

$$P_k P_j = 0 \quad (k \neq j). \quad (9.1.3)$$

Так как любой вектор из E_j является собственным вектором, соответствующим λ_j , мы получаем, что $Ax = A \sum_j x_j = \sum_j \lambda_j x_j$; следовательно, для исходной матрицы A имеет место следующее представление:

$$A = \sum_{j=1}^q \lambda_j P_j. \quad (9.1.4)$$

Поскольку, как указывалось выше, разложение $x = x_1 + \dots + x_q$, где $x_j = P_j x$, для любого x единственно, мы получаем также, что

$$I = \sum_{j=1}^q P_j, \quad (9.1.5)$$

и если $f(\lambda)$ — произвольный многочлен (или любая функция соответствующего типа, область определения которой включает все собственные значения λ_j), то

$$f(A) = \sum_{j=1}^q f(\lambda_j) P_j. \quad (9.1.6)$$

На основании равенства (9.1.5) говорят, что проекторы P_j образуют *разложение единицы*.

Основная цель данной главы состоит в том, чтобы обобщить приведенные выше формулы на случай произвольного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. В общем случае возможен континуум «собственных значений» (т. е. непрерывный спектр); следовательно, суммирование нужно будет

заменить интегрированием. Конечно, возможны также и дискретные собственные значения, так что ясно: здесь должен быть интеграл Стильеса, с тем чтобы были допустимы оба случая.

9.2. ПРОЕКТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ H

Если оператор P ограничен, определен на всем H и идемпотентен (т. е. $P^2 = P$), то он называется *проектором*; очевидно, что $I - P$ также является проектором, потому что $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$. Пусть M и N — области значений P и $I - P$ соответственно. Если $u \in M$, то $Pu = u$, тогда как если $u \in N$, то $Pu = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. M — область значений P , так что если $u \in M$, то $u = Pv$ для некоторого $v \in H$; но тогда $Pu = P^2v = Pv = u$. Если $u \in N$, то тогда из тех же рассуждений получаем, что $(I - P)u = u$, поэтому $Pu = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите, что линейные многообразия M и N замкнуты.

Замечание. M и N не обязательно ортогональны — см. ниже.

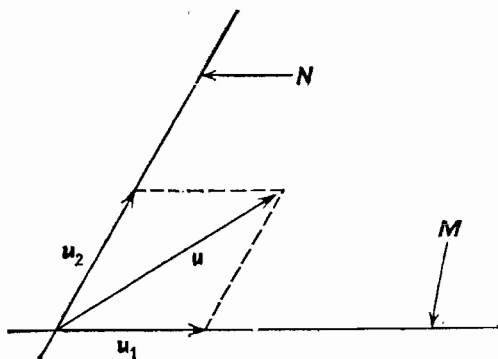


Рис. 9.1. Проекция вектора.

Утверждение. Любое $u \in H$ можно однозначно представить как $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in M$, $u_2 \in N$ (u_1 и u_2 не обязательно ортогональны); см. рис. 9.1. Действительно, $u_1 = Pu$, $u_2 = (I - P)u$, так что $u_1 + u_2 = u$. Чтобы доказать единственность, предположим, что $u'_1 + u'_2$ — другое такое разложение u ; но тогда $u_1 - u'_1 (= u'_2 - u_2)$ принадлежало бы одновременно и M , и N , значит, во-первых, $u_1 - u'_1 = P(u_1 - u'_1)$ и, во-вторых, аналогично

$$u_1 - u'_1 = (I - P)(u_1 - u'_1) = (I - P)P(u_1 - u'_1) = (P - P^2)(u_1 - u'_1) = 0.$$

Поэтому $u_1 = u'_1$ и $u_2 = u'_2$. Это и доказывает утверждение. Единственным вектором, принадлежащим как M , так и N , является

нулевой элемент пространства H . Элементы u_1 и u_2 называются *проекциями* u на (или в) M и N соответственно.

Обратно, если M и N — любые замкнутые линейные многообразия, такие, что их линейная оболочка совпадает с H и любой элемент $u \in H$ имеет *единственное* разложение $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in M$, $u_2 \in N$, то соответствующий оператор P может быть определен равенством $Pu = u_1$; легко проверить, что так определенный оператор P является проектором с областью значений M и нуль-пространством N (нуль-пространством любого оператора A — это множество $u \in H$, таких, что $Au = 0$).

В общем случае M и N не ортогональны, но если проектор P также и самосопряжен, то для любого $u \in M$ и любого $v \in N$

$$(u, v) = (Pu, (I - P)v) = (u, P(I - P)v) = (u, (P - P^2)v) = 0,$$

т. е. в этом случае M и N ортогональны (символически $M \perp N$) и P называется *ортогональным проектором*.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Если P — ортогональный проектор, то $\|P\| = 1$.

9.3. ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ ДЛЯ МАТРИЦЫ

В конечномерном случае проекторы P_j можно построить либо непосредственно, исходя из полной ортонормированной системы собственных векторов, либо при помощи методов теории функций, однако при этом только последний подход пригоден для распространения на бесконечномерный случай, и именно он будет сейчас описан.

Пусть A — произвольная матрица размера $n \times n$ (не обязательно эрмитова). Если λ не равно какому-либо собственному значению, то матрица $(A - \lambda I)$ обратима, причем обратная ей матрица — резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Согласно правилу Крамера, элементы обратной матрицы выражаются через определитель и миноры исходной матрицы; следовательно, элементы матрицы R_λ являются рациональными функциями λ с полюсами в собственных значениях $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ матрицы A . Для $|\lambda| \geq a$, где a — произвольная константа, которая больше всех $|\lambda_i|$, резольвенту можно разложить в ряд:

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \left(I + \frac{1}{\lambda} A + \frac{1}{\lambda^2} A^2 + \dots \right). \quad (9.3.1)$$

Поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} R_\lambda d\lambda = I, \quad (9.3.2)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} \lambda R_\lambda d\lambda = A \quad (9.3.3)$$

и вообще

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} \lambda^m R_\lambda d\lambda = A^m, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Во всех этих случаях под интегралом в левой части понимается матрица, (j, k) -й элемент которой является интегралом от $\lambda^m (R_\lambda)_{jk}$. Более того, если $f(\lambda)$ — любая функция, определенная степенным рядом для $|\lambda| \leq a$, то

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} f(\lambda) R_\lambda d\lambda = f(A), \quad (9.3.4)$$

в чем можно убедиться, умножив степенной ряд для $f(\lambda)$ на разложение (9.3.1) перед нахождением вычета. [Это последнее соотношение, если его записать как

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=a} f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = f(A), \quad (9.3.5)$$

является обобщением интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(\lambda) (\lambda - z)^{-1} d\lambda = f(z).]$$

Стянем теперь контур интегрирования настолько, насколько это возможно, а именно настолько, чтобы он превратился в набор малых контуров, каждый из которых окружает только одно собственное значение, как показано на рис. 9.2. Тогда (9.3.2) дает

$$\sum_{j=1}^q P_j = I, \quad (9.3.6)$$

где

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(\lambda_j^-)} R_\lambda d\lambda. \quad (9.3.7)$$

[Символ (λ_j^-) означает, что контур охватывает λ_j , обход контура делается в отрицательном направлении (по часовой стрелке), но при этом он не окружает никаких других особых точек подынтегральной функции.]

Чтобы показать, что P_j является проектором, нужно вычислить

$$P_j^2 = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint^{(\lambda_j^-)} \oint^{(\lambda_j^-)} R_\lambda R_\mu d\mu d\lambda. \quad (9.3.8)$$

Нет необходимости использовать для интегрирования один и тот же контур для обоих интегралов; в действительности достаточно предположить, что контур для интегрирования по μ лежит внутри области, охватываемой контуром интегрирования по λ ,

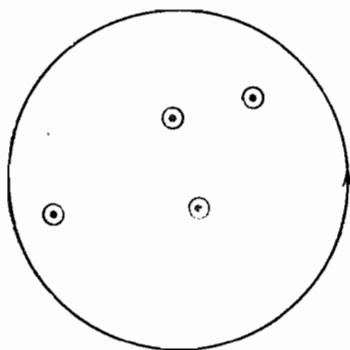


Рис. 9.2. Изменение контура интегрирования.

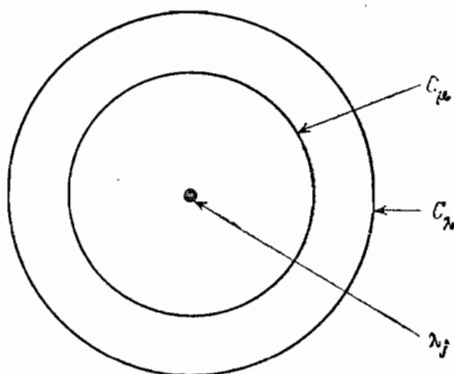


Рис. 9.3. Контур C_μ и C_λ .

как показано на рис. 9.3. Обозначим эти контуры C_μ и C_λ соответственно. Резольвента R_λ удовлетворяет резольвентному уравнению (8.5.1), поэтому

$$P_j^2 = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_\lambda} \int_{C_\mu} \left[\frac{R_\lambda}{\lambda - \mu} - \frac{R_\mu}{\lambda - \mu} \right] d\mu d\lambda.$$

Если первый член проинтегрировать сначала по μ , то результат будет равен нулю, потому что λ лежит вне C_μ ; если второй член проинтегрировать сначала по λ , то интеграл по λ даст $2\pi i R_\mu$ (напомним, что C_λ обходится по часовой стрелке); следовательно,

$$P_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\mu} R_\mu d\mu = P_j. \quad (9.3.9)$$

Таким образом, P_j — проектор. С помощью таких же рассуждений можно показать, что $P_j P_k = 0$ при $j \neq k$, поскольку в этом случае оба контура лежат вне друг друга. Таким образом,

$$P_j P_k = P_k P_j = \delta_{jk} P_j. \quad (9.3.10)$$

Чтобы выразить A через эти проекторы при помощи формулы (9.3.3), прежде всего определим следующие матрицы D_j :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint^{(\lambda_j^-)} \lambda R_\lambda d\lambda &= \lambda_j P_j + \frac{1}{2\pi i} \oint^{(\lambda_j^-)} (\lambda - \lambda_j) R_\lambda d\lambda = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j P_j + D_j; \end{aligned}$$

тогда

$$A = \sum_j [\lambda_j P_j + D_j]. \quad (9.3.11)$$

Это каноническое представление произвольной матрицы A . Его связь с другими каноническими представлениями будет прослежена в приведенных ниже упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя контуры C_λ и C_μ , описанные выше, и применяя индукцию по m , покажите, что

$$D_j^m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\mu} (\mu - \lambda_j)^m R_\mu d\mu,$$

и в силу того, что R_μ имеет только полюсы, заключите, что D_j нильпотентна ($D_j^m = 0$ для некоторого m).

2. При помощи аналогичных рассуждений выведите следующие уравнения:

$$D_j P_k = P_k D_j = \delta_{jk} D_j, \quad A P_k = P_k A = \lambda_k P_k + D_k$$

и докажите, что (1) D_j отображает область значений оператора P_j в себя (эта область значений — обобщенное собственное подпространство E_j , соответствующее собственному значению λ_j), следовательно, A отображает E_j в себя, и что (2) если v — любой ненулевой вектор из E_j , то $(A - \lambda_j)^m v = 0$ для некоторого положительного целого числа m . Если m — наименьшее такое число, то v называют обобщенным собственным вектором порядка m матрицы A ¹⁾.

Исходя из формулы (9.3.11) и нильпотентности соответствующих матриц, можно показать (мы опускаем детали этих рассуждений), что любая матрица A размера $n \times n$ может быть представлена в жордановой нормальной форме при помощи преобразования подобия; иначе говоря, существует такая невырожденная матрица T , что

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & (0) \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (9.3.12)$$

где ненулевые элементы J локализованы в квадратные жордановы блоки $J_1, J_2, \dots$, расположенные по главной диагонали; любой

¹⁾ Подпространство E_j часто называют *корневым подпространством*, а ненулевые векторы из E_j — *корневыми векторами*. — Прим. перев.

жорданов блок имеет вид

$$J_r = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

где λ — одно из собственных значений матрицы A . Столбцы T — обычные и обобщенные (соответствующего порядка) собственные векторы матрицы A . Разные жордановы блоки не обязательно содержат разные собственные значения, т. е. некоторые блоки могут соответствовать подпространствам одного собственного подпространства E_j .

УПРАЖНЕНИЯ

3. Используя неравенство (8.3.3), покажите, что для эрмитовой матрицы A резольвента R_λ имеет только простые полюсы; следовательно, $D_j = 0$ для всех j и A задается формулой

$$A = \sum_{j=1}^q \lambda_j P_j;$$

в этом случае P_j — также эрмитовы матрицы, T можно считать унитарной матрицей, а жорданова форма матрицы является диагональной.

4. Применяя процедуру ортогонализации Грама—Шмидта к столбцам T в (9.3.12), докажите *теорему Шура*: любую матрицу A можно при помощи унитарного преобразования привести к верхней треугольной форме (т. е. к матрице, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю).

Если A — оператор (не обязательно самосопряженный) в H и если формулы, подобные (9.3.6), (9.3.10) и (9.3.11), справедливы (естественно, с заменой суммирования интегрированием по Стильесу), то A называют *спектральным оператором*. В бесконечномерном случае нелегко выяснить, когда оператор спектрален. (В общем случае невозможно свести контур интегрирования к множеству контуров вокруг дискретных точек; более того, необходимо даже искать контур, который бы окружал спектр.) Используя это понятие, можно сказать, что главный результат данной главы состоит в том, что любой самосопряженный оператор является спектральным. Спектральный оператор, нильпотентная часть которого тождественно равна нулю, называется *оператором скалярного типа*. Именно таким является самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H (как и эрмитова матрица).

УПРАЖНЕНИЕ

5. Пусть A — любая невырожденная $(n \times n)$ -матрица, а $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ — ее резольвента. Пусть C — простая замкнутая кривая на плоскости λ , которая обходит все собственные значения A против часовой стрелки, но не охватывает начала координат. На C многозначная функция $\ln \lambda$ расщепляется на независимые однозначные непрерывные ветви; обозначим одну из них через $\ln \lambda$ и определим $\ln A$ следующим образом:

$$\ln A = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C R_\lambda \ln \lambda d\lambda.$$

Докажите, что

$$(\ln A)^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C R_\lambda (\ln \lambda)^n d\lambda \quad (n=2, 3, \dots)$$

и что $\exp(\ln A) = A$. Покажите также, что если взять другую ветвь $\ln \lambda$, то $\ln A$ получится из первой добавлением матрицы $2\pi i I$, умноженной на некоторое целое число.

9.4. СВЯЗЬ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть A — самосопряженный оператор, а $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ — его резольвента. Как и в конечномерном случае, спектральные проекторы имеют вид $(2\pi i)^{-1} \oint R_\lambda d\lambda$, где интегрирование осуществляется вдоль замкнутого контура, окружающего часть спектра A (спектр лежит на вещественной оси). Для λ из резольвентного множества R_λ — аналитическая операторнозначная функция от λ (см. упражнение 4 в § 9.9), которую удобнее всего изучать при помощи обычной аналитической функции

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda; v) = (v, R_\lambda v) = (v, u),$$

где v — произвольный элемент H . Процедура поляризации, использованная ниже, показывает, что R_λ для заданного λ полностью определяется заданием $\varphi(\lambda; v)$ для всех v .

Согласно § 8.5 $\varphi(\lambda)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях. Как было указано в § 8.3, мнимая часть равенства

$$(v, u) = (Au, u) - \bar{\lambda}(u, u)$$

имеет вид

$$\operatorname{Im}(v, u) = \operatorname{Im} \lambda \|u\|^2,$$

так что $\operatorname{Im} \varphi(\lambda)$ имеет тот же знак, что и $\operatorname{Im} \lambda$. Более того, на основании неравенства Шварца и оценки нормы резольвенты (8.3.4) получаем, что

$$|(v, u)| \leq \|v\|^2 / |\operatorname{Im} \lambda|.$$

Поэтому $\varphi(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \varphi(\lambda) \text{ аналитична,} \\ \text{(ii) } |\varphi(\lambda)| \leq \|v\|^2 / \operatorname{Im} \lambda, \\ \text{(iii) } \operatorname{Im} \varphi(\lambda) > 0 \end{array} \right\} \text{ для } \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (9.4.1)$$

[Подобные же утверждения имеют место и для нижней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$.]

Теорема. Функцию с указанными выше свойствами можно записать в виде

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t)/(t-\lambda) \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0), \quad (9.4.2)$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция с конечными пределами при $t \rightarrow \pm \infty$; более того, если положить $\sigma(-\infty) = 0$, то $\sigma(t)$ выражается через $\varphi(\lambda)$ формулой

$$\sigma(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} (1/\pi) \int_{-\infty}^t \operatorname{Im} \varphi(s + i\epsilon) ds, \quad (9.4.3)$$

которая справедлива в точках непрерывности $\sigma(t)$. В точках разрыва $\sigma(t)$ мы произвольно накладываем условие нормализации

$$\sigma(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sigma(t + \delta), \quad (9.4.4)$$

т. е. условие непрерывности справа.

Доказательство можно найти в книге Ахиезера и Глазмана [1950, § 59].

Свойство (ii), приведенное выше, показывает, что полная вариация $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty)$ пропорциональна $\|v\|^2$. На самом деле оказывается, что

$$\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = \|v\|^2. \quad (9.4.5)$$

9.5. ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формулы (9.4.2) и (9.4.3), которые используются в спектральной теории, излагаемой ниже (§ 9.6), можно переписать на языке теории распределений следующим образом. Пусть f — производная σ' (в смысле теории распределений) функции $\sigma(t)$; тогда

$$(1/\pi) \operatorname{Im} \varphi(t + i\epsilon) \rightarrow f(t) \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0 \quad (9.5.1)$$

в смысле сходимости распределений, а

$$\varphi(\lambda) = \langle f(t), 1/(t-\lambda) \rangle \quad \text{для } \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (9.5.2)$$

Хотя функция $\psi_\lambda(t) = 1/(t - \lambda)$ не является пробной (она принадлежит C^∞ , но не C_0^∞ и не $\mathcal{S}$), эта формула все еще допускает разумную интерпретацию, потому что $\sigma(t)$ имеет ограниченную полную вариацию (она не убывает и имеет конечные пределы при $t \rightarrow \pm\infty$). А именно, если мы положим

$$\sigma_T(t) = \begin{cases} \sigma(-T) & \text{при } t < -T, \\ \sigma(t) & \text{при } -T \leq t < T, \\ \sigma(T) & \text{при } t \geq T, \end{cases}$$

то распределение $f_T = \sigma'_T$ имеет ограниченный носитель, следовательно, $\langle f_T, \psi \rangle$ определено для любого $\psi \in C^\infty$, а выражение в правой части (9.5.2) является пределом $\langle f_T, \psi_\lambda \rangle$ при $T \rightarrow \infty$.

Свойство (9.5.1) указывает на то, что $f(t)$ как распределение является граничным значением (или *следом*) гармонической функции $(1/\pi) \operatorname{Im} \varphi(\lambda)$ на вещественной оси. След $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$ тоже является распределением, но имеет несколько более сложный вид, поскольку $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$ не обязательно неотрицательна в верхней полуплоскости; в действительности эта функция является *второй* производной от непрерывной функции (в смысле теории распределений).

УПРАЖНЕНИЕ

1. Исходя из равенства

$$\operatorname{Re} \varphi(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} d\sigma(t), \quad (9.5.3)$$

которое следует из (9.4.2), покажите, что

$$\operatorname{Re} \varphi(x + iy) \rightarrow \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (t - x) \ln \frac{|t - x|}{\sqrt{t^2 + 1}} d\sigma(t) \quad (9.5.4)$$

при $y \rightarrow 0$ ($y > 0$); здесь предел и производная берутся в смысле теории распределений. Сначала проверьте, что интеграл в (9.5.4) сходится и является непрерывной по x функцией.

Граничные значения аналитических функций хорошо изучены; см. Джонсон [1968] и цитированную там литературу, где приводятся некоторые последние достижения. Из старых результатов известна следующая теорема: если $\varphi(z)$ аналитична в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$) и если для некоторого $p \geq 1$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + iy)|^p dx < \infty \quad (9.5.5)$$

(тогда говорят, что $\varphi(z)$ принадлежит классу Харди H_p), то граничные значения $\varphi(z)$ на вещественной оси представляют собой элемент пространства $L^p(\mathbb{R})$. Иначе говоря, найдется такая функ-

ция или распределение f из $L^p(\mathbb{R})$, что $\varphi(x+iy)$, рассматриваемые при каждом фиксированном $y > 0$ как функции x , сходятся по L^p -норме к $f(x)$ при $y \rightarrow 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0.$$

L^p -норма f равна $M^{1/p}$; см. Хилле [1962, т. 2, гл. 19].

Для того чтобы привести другие примеры, отображим полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ при помощи преобразования $w = (z-i)/(z+i)$ и тем самым устраним основные трудности, возникающие при $z \rightarrow \infty$; детали см. у Джонсона [1968] и Баернштейна [1971]. Если $\varphi(w)$ аналитична для $|w| < 1$, обозначим

$$\varphi_r(\theta) = \varphi(re^{i\theta}), \quad 0 \leq r < 1. \quad (9.5.6)$$

Аналогами класса Харди H_p и пространства $L^p(\mathbb{R})$ является класс $\tilde{H}_p$ функций $\varphi(w)$, таких, что

$$\|\varphi\| = \sup_{r < 1} \left\{ \int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p} < \infty, \quad (9.5.7)$$

и пространство $L^p(S^1)$ (S^1 — единичная окружность или одномерная сфера) функций и распределений с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p}. \quad (9.5.8)$$

При $p=2$ $\tilde{H}_p = \tilde{H}_2$ является гильбертовым пространством, рассмотренным в § 1.10.

Приведем без доказательства (см. Джонсон [1968]) следующий результат: если $\varphi(w)$ аналитична при $|w| < 1$ и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(w)| < \frac{C}{(1-|w|)^k} \quad (9.5.9)$$

для некоторой постоянной C и некоторого целого числа k , то граничное значение $\varphi(w)$ на окружности $|w|=1$ является распределением. Распределение на S^1 — непрерывный линейный функционал на пространстве $C^\infty(S^1)$ бесконечно дифференцируемых функций $\psi(\theta)$ с периодом 2π по θ . [Сходимости последовательности в $C^\infty(S^1)$ та же, что и в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, только ограничений на носители элементов последовательности не требуется, потому что S^1 компактна.] Таким образом, найдется такое распределение f на S^1 , что

$$\varphi_r(\theta) \rightarrow f(\theta) \quad \text{при } r \rightarrow 1$$

в смысле сходимости распределений. Более того, f является $(k+1)$ -й производной (в смысле теории распределений) непрерывной на S^1 функции, где k — то целое число, которое входит в неравенство (9.5.9).

Следующий пример показывает, что функция $\varphi(w)$, аналитическая в единичном круге, не обязательно удовлетворяет неравенству (9.5.9): пусть

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} w^n \quad (a = \text{const} > 1).$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1, а

$$\varphi_r(0) = \sum a^{\sqrt{n}} r^n \quad (0 \leq r < 1).$$

При r , близком к 1, наибольшим членом этого ряда является

$$\max a^{\sqrt{n}} r^n \approx \exp \left\{ \frac{(\ln a)^2}{4|1-r|} \right\},$$

который при $r \rightarrow 1$ ни при каких c и k нельзя оценить выражением $c/|1-r|^k$.

Если $\varphi(w)$ не удовлетворяет неравенству типа (9.5.9), то ее граничные значения на окружности $|w|=1$ являются не распределением, а *аналитическим функционалом*. Пусть $\mathcal{A}$ — класс пробных функций $\psi(w)$, аналитических на единичной окружности; точнее, пусть каждая $\psi(w)$ из $\mathcal{A}$ аналитична на некотором кольце $1-\varepsilon < |w| < 1+\varepsilon$, которое содержит единичную окружность. Последовательность $\{\psi_n\}$ из $\mathcal{A}$ *сходится* к ψ , если найдется такое кольцо $1-\varepsilon_0 < |w| < 1+\varepsilon_0$, на котором все $\psi_n(w)$ аналитичны и на котором они сходятся равномерно к $\psi(w)$. *Аналитическим функционалом* f на единичной окружности называют непрерывный линейный функционал $\langle f, \cdot \rangle$ на $\mathcal{A}$; это обобщение понятия распределения на единичной окружности. Последовательность аналитических функционалов $\{f_n\}$ *сходится* к f , если $\langle f_n, \psi \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$ для любой $\psi \in \mathcal{A}$. Основной результат этой теории состоит в том, что если $\varphi(w)$ аналитична на круге $|w| < 1$, то найдется такой аналитический функционал f , что

$$\varphi_r(\theta) \rightarrow f(\theta) \quad \text{при } r \rightarrow 1$$

в смысле определенной выше сходимости аналитических функционалов. Более подробное изложение теории см. у Джонсона [1968].

В настоящее время неясно, в какой степени аналитические функционалы могут заменить распределения в задачах математического анализа и в физических приложениях. Теория локальных свойств является, по-видимому, более трудной, потому что носитель пробной функции $\psi \in \mathcal{A}$ обязательно содержит всю единичную окружность, если только $\psi \neq 0$.

В связи с обращением утверждения, что граничные значения аналитической функции $\varphi(\omega)$ являются распределением или аналитическим функционалом f , мы должны учитывать, что вещественная и мнимая части f не независимы, поскольку, они являются следами на $|\omega|=1$ соответственно функций $\operatorname{Re} \varphi$ и $\operatorname{Im} \varphi$, которые при $|\omega| < 1$ удовлетворяют уравнениям Коши—Римана, т. е. являются сопряженными гармоническими функциями. В частном случае, когда $\varphi(\omega)$ непрерывна при $|\omega| \leq 1$, оказывается, что $f(\theta) = \varphi(e^{i\theta}) = \varphi_1(\theta)$, и функция φ получается из f при помощи интеграла Пуассона:

$$\varphi_r(\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt, \quad (9.5.10)$$

где

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r \cos t + r^2)}. \quad (9.5.11)$$

Выражение в правой части уравнения (9.5.10) представляет собой свертку, поэтому мы можем записать

$$\varphi_r = P_r * f; \quad (9.5.12)$$

в таком виде эта формула справедлива вообще для любой функции $\varphi(\omega)$, аналитической при $|\omega| < 1$, где f — след этой функции на $|\omega|=1$ (аналитический функционал) и где свертка аналитических функционалов определяется так же, как и свертка распределений.

Поскольку ядро P_r вещественно, вещественная и мнимая части $\varphi(\omega)$ и f в (9.5.10) и (9.5.12) разделяются, и в действительности (9.5.12) устанавливает взаимно однозначное соответствие между вещественными гармоническими функциями $\varphi(r, \theta)$ и вещественными аналитическими функционалами f и в связи с этим между комплексными гармоническими функциями (которые не предполагаются аналитическими, т. е. вещественные и мнимые части которых не обязательно являются сопряженными) и комплексными аналитическими функционалами. Если f — распределение, то $\varphi(\omega)$ удовлетворяет неравенству (9.5.9) для некоторых C и k .

В качестве последнего примера рассмотрим преобразование Лапласа медленно растущих распределений на $\mathbb{R}$ с носителями в $[0, \infty)$. Напоминаем, что если $f(t)$ — непрерывная функция, определенная для $t \geq 0$ и при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяющая неравенству $|f(t)| < \text{const} \cdot e^{\alpha t}$, то ее преобразование Лапласа

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$. Если $f(t)$ — функция медленного роста на бесконечности, то можно взять $\alpha = 0$.

Пусть $f = f(t)$ — любое медленно растущее распределение на $\mathbb{R}$ с носителем в $[0, \infty)$. Пусть $\chi(t)$ — функция класса C^∞ , такая, что она равна единице при $t \geq 0$ и нулю при $t \leq -1$; см. рис.

9.4. Для любого z с $\operatorname{Re} z > 0$ функция $\varphi_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(t) e^{-zt}$ принадлежит $\mathcal{S}$. Более того, $(1/\alpha)(\varphi_{z+\alpha} - \varphi_z) \xrightarrow{\mathcal{S}} d\varphi_z/dz$ (при $\alpha \rightarrow 0$); поэтому функция

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \varphi_z \rangle \quad (9.5.13)$$

аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Она называется преобразованием Лапласа от f . Так как $\hat{f} = 0$ на $(-\infty, 0)$, $F(z)$

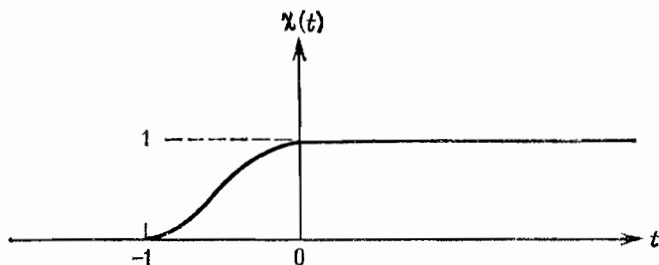


Рис. 9.4. Функция $\chi(t)$.

не зависит от поведения функции $\chi(t)$ на $(-1, 0)$. Пусть теперь $\psi(y)$ — любая пробная функция из $\mathcal{S}$. Для любого $x > 0$

$$\int_a^b F(x+iy) \psi(y) dy = \langle f, \Psi \rangle,$$

где

$$\Psi(t) = \chi(t) \int_a^b e^{-(x+iy)t} \psi(y) dy.$$

Ясно, что

$$\Psi(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \sqrt{2\pi} \chi(t) \hat{\psi}(t)$$

при $x \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, $a \rightarrow -\infty$. Поэтому при $x \rightarrow 0$

$$(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy) \psi(y) dy \rightarrow \langle f, \chi \hat{\psi} \rangle = \langle f \chi, \hat{\psi} \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{f}, \psi \rangle.$$

Таким образом, граничные значения функции $(2\pi)^{-1/2} F(x+iy)$ на мнимой оси, полученные при $x \downarrow 0$, являются распределением $\hat{f}$, которое представляет собой преобразование Фурье данного распределения f .

9.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе мы покажем, что из теоремы § 9.4 следует существование семейства операторов E_t ($-\infty < t < \infty$), которое называется *разложением единицы* для оператора A , и используем операторы E_t для упрощения формул (9.4.2) и (9.4.3).

Чтобы подтвердить зависимость от элемента v из H , перепишем формулу (9.4.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma(t) = \sigma(t; v) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^t \operatorname{Im} (v, R_{s+i\varepsilon} v) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^t [(v, R_{s+i\varepsilon} v) - (v, R_{s-i\varepsilon} v)] ds\end{aligned}\quad (9.6.1)$$

(здесь было использовано свойство $R_{s-i\varepsilon} = R_{s+i\varepsilon}^*$). Последний интеграл равен интегралу от $(v, R_{\lambda} v)$ по контуру на плоскости λ , состоящему из двух полупрямых C_1 и C_2 , параллельных вещественной оси и проходящих на расстоянии ε выше и ниже ее, как показано на рис. 9.5. Заменяем C_1 и C_2 эквивалентными контурами C'_1 и C'_2 , изображенными на рис. 9.6, а затем устремим ε к нулю. В результате получим

$$\sigma(t; v) = (1/(2\pi i)) \int_{C(t)} (v, R_{\lambda} v) d\lambda, \quad (9.6.2)$$

где $C(t)$ — контур, проходящий от точки $-\infty + i\varepsilon$ по прямой в верхней полуплоскости, пересекающей вещественную ось при $\lambda = t$, а затем идущий к $-\infty - i\varepsilon$ по прямой в нижней полу-

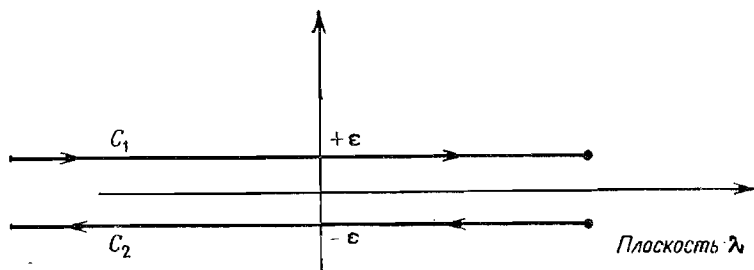


Рис. 9.5. Исходные контуры.

плоскости, и где интеграл понимается в смысле главного значения Коши, т. е. как предел при $\varepsilon \downarrow 0$. Из формул (9.4.2) и (9.4.3) легко видеть, что этот предел существует в любой точке непрерывности $\sigma(t)$. Точки разрыва $\sigma(t)$ (их множество не более чем счетно) требуют особой процедуры, при которой удовлетворяется

условие нормализации (9.4.4): интеграл (9.6.2) вычисляется при $t' = t + \delta > t$, затем t' устремляется к t по точкам непрерывности σ . На эту процедуру будет указывать обозначение $C(t+)$ для контура интегрирования.

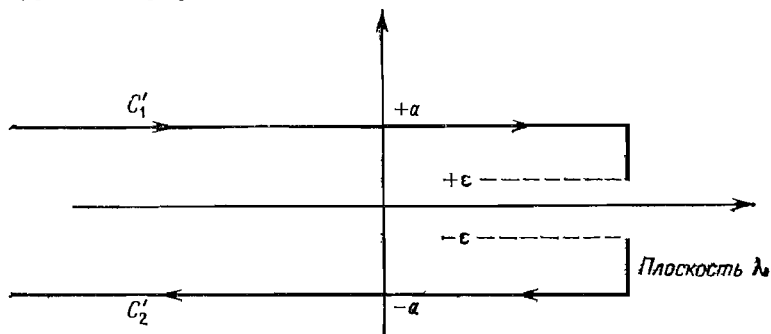


Рис. 9.6. Измененные контуры.

Функция $\sigma(t; u, v)$, зависящая от вещественной переменной t и для элементов u и v из H , определяется путем поляризации $\sigma(t; v)$:

$$\sigma(t; u, v) = (1/4) \sum_{k=0}^3 i^{-k} \sigma(t; u + i^k v). \quad (9.6.3)$$

Поскольку поляризация $(v, R_\lambda v)$ дает $(u, R_\lambda v)$, мы имеем

$$\sigma(t; u, v) = (1/(2\pi i)) \int_{C(t+)} (u, R_\lambda v) d\lambda. \quad (9.6.4)$$

При фиксированных t и v в правой части стоит полулинейный по u функционал, и поэтому он равен (u, w) для некоторого однозначно определенного фиксированного $w \in H$, что следует из теоремы Рисса — Фреше о представлении; очевидно, что получающийся таким образом w линейно зависит от v , так что $w = E_t v$, где E_t — линейный оператор, определенный при любом вещественном t , т. е. $\sigma(t; u, v) = (u, E_t v)$; следовательно,

$$(u, E_t v) = (1/(2\pi i)) \int_{C(t+)} (u, R_\lambda v) d\lambda. \quad (9.6.5)$$

Семейство операторов $\{E_t\}$ ($-\infty < t < \infty$) называется *разложением единицы* для самосопряженного оператора A .

Замечание. В конечномерном случае, когда A — эрмитова матрица, а $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, выражение (9.6.5) дает $E_t = \sum P_j$, где суммирование осуществляется по тем значениям j , для которых $\lambda_j < t$, т. е. λ_j окружены контуром $C(t+)$. В этом случае E_t

является (матричнозначной) ступенчатой функцией, а выражение $A = \sum \lambda_j P_j$ можно записать как интеграл Стильеса $A = \int t dE_t$; это и есть в точности та формула, которая будет получена для произвольного самосопряженного оператора A в H (формула (9.8.2) ниже). Равенство (9.6.5) часто записывают просто как

$$E_t = (1/(2\pi i)) \int_{C(t+)} R_\lambda d\lambda, \quad (9.6.6)$$

что в конечномерном случае верно всегда, а в бесконечномерном случае тогда, когда интеграл берется с использованием подходящего типа сходимости операторов (см. § 9.9).

Из теоремы § 9.4 следует обращение этого соотношения, которое выглядит так:

$$(v, R_\lambda v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} d(v, E_t v)$$

при $\text{Im } \lambda \neq 0$. Поляризация этого равенства дает формулу

$$(u, R_\lambda v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} d(u, E_t v) \quad \forall u, v, \quad (9.6.7)$$

или

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} dE_t, \quad (9.6.8)$$

где в определении интеграла снова используется подходящий вид сходимости операторов.

9.7. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ E_t

В приложении А, в конце данной главы, доказывается, что семейство операторов $\{E_t\}$ обладает следующими свойствами.

1. Для любого вещественного значения параметра t оператор E_t — ограниченный, самосопряженный и идемпотентный оператор и, следовательно, — ортогональный проектор.

2. Если $s < t$, то $E_t E_s = E_s E_t = E_s$. Отсюда следует, что если для каждого t M_t — область значений оператора E_t , то $M_s \subset M_t$, когда $s < t$; кроме того, отсюда следует, что $(E_t - E_s)^2 = E_t - E_s$, так что $E_t - E_s$ — ортогональный проектор; фактически $E_t - E_s$ — ортогональный проектор на ортогональное дополнение $M_s^\perp$ в M_t , а именно на многообразие, обозначаемое через $M_t \ominus M_s$ и состоящее из всех тех v из M_t , которые ортогональны всем u из M_s . Проектор $E_t - E_s$ соотносится с интервалом $\Delta = (s, t]$

вещественной оси и обозначается $E(\Delta)$; его область значений — многообразие $M(\Delta) = M_t \ominus M_s$. Если Δ_1 и Δ_2 — непересекающиеся интервалы, то $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0$, поэтому $M(\Delta_1) \perp M(\Delta_2)$. Мы увидим далее, что проекторы $E(\Delta)$ в определенном смысле аналогичны проекторам P_j для конечномерного случая, а $M(\Delta)$ аналогичны соответствующим собственным подпространствам E_j , по крайней мере когда интервалы Δ достаточно малы.

3. $E_{-\infty} = 0$, $E_{\infty} = I$ в том смысле, что для любого $v \in H$ $E_t v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и $E_t v \rightarrow v$ при $t \rightarrow +\infty$. С увеличением t от $-\infty$ до $+\infty$ многообразие M_t постоянно расширяется от нулевого многообразия до (в конце концов) всего H . Если

$$-\infty = t_0 < t_1 < \dots < t_N = +\infty \quad (9.7.1)$$

— разбиение вещественной прямой на интервалы $\Delta_j = (t_{j-1}, t_j]$, то

$$I = E(\Delta_1) + E(\Delta_2) + \dots + E(\Delta_N) \quad (9.7.2)$$

и

$$H = M(\Delta_1) \oplus \dots \oplus M(\Delta_N). \quad (9.7.3)$$

Это очень напоминает разложение C^n на ортогональную прямую сумму собственных подпространств E_j эрмитовой матрицы, однако разложение (9.7.3) обычно можно бесконечно уточнять простым измелением разбиения (9.7.1) прямой $\mathbb{R}$.

4. Проекторнозначная функция E_t непрерывна справа в том смысле, что для любого $v \in H$ $E_{t+\varepsilon} v \rightarrow E_t v$ при $\varepsilon \downarrow 0$, т. е. многообразие $M_{t+\varepsilon} \ominus M_t$ стягивается к нулю. При данном t E_t не обязательно непрерывна слева. Если E_t разрывна слева при данном t , то $M_t \ominus M_{t-\varepsilon}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ стягивается, как будет видно, к собственному (в строгом смысле) подпространству оператора A , соответствующему собственному значению t . В действительности непрерывность E_t справа несущественна, потому что все утверждения можно сформулировать без использования этого свойства. Например, только что упомянутое собственное подпространство можно описать как предел, к которому стягивается многообразие $M_{t+\varepsilon} \ominus M_{t-\varepsilon}$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

9.8. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Мы видели, что каждый самосопряженный оператор A при помощи своей резольвенты и формулы (9.6.5) или (9.6.6) порождает единственное разложение единицы, т. е. единственное семейство проекторов $\{E_t\}$, которое обладает свойствами 1—4 предыдущего параграфа. Обратно, $\{E_t\}$ посредством равенств (9.8.5)—(9.8.7), приведенных ниже, однозначно определяет оператор A , а это

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех самосопряженных операторов A и множеством всех разложений единицы $\{E_t\}$.

Идея, лежащая в основе формулы, выражающей A через $\{E_t\}$, связана с формулой $A = \sum \lambda_j P_j$ для эрмитовой матрицы (см. § 9.1). Если Δ_j ($j=1, \dots, N$) — интервалы разбиения $\mathbb{R}$, как было определено в (9.7.1), то для каждого j проектор $E(\Delta_j) = E_{t_j} - E_{t_{j-1}}$ в какой-то мере аналогичен проектору P_j , а соответствующее собственное значение можно грубо приблизить некоторым числом λ_j из интервала Δ_j . Следовательно, можно предположить, что

$$A \approx \sum \lambda_j (E_{t_j} - E_{t_{j-1}}), \quad (9.8.1)$$

и, значит, можно ожидать, что в пределе при бесконечном измельчении разбиения $\mathbb{R}$ оператор A будет получаться как интеграл Стильеса,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t, \quad (9.8.2)$$

хотя пока еще не ясен смысл сходимости интегральных сумм Римана—Стильеса (и, следовательно, не определено значение интеграла самого по себе), потому что справа в (9.8.1) стоит ограниченный оператор, определенный на всем H , тогда как A в общем случае — неограниченный оператор, определенный только на некоторой области $D(A) \neq H$.

Если формула (9.8.2) верна хоть в каком-то смысле, то, по-видимому,

$$(u, Av) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(u, E_t v) \quad (9.8.3)$$

для всех $u, v \in D(A)$. Это уже обычный интеграл Стильеса, который, однако, может расходиться из-за бесконечности интервала изменения t . Однако для любого $n=1, 2, \dots$ можно определить оператор A_n (ограниченный и определенный на всем H) при помощи уравнения

$$(u, A_n v) = \int_{-n}^n t d(u, E_t v). \quad (9.8.4)$$

Для данного v последовательность $A_n v$ может иметь предел при $n \rightarrow \infty$, а может и не иметь его, и разумно предположить, что если такой предел существует, то $v \in D(A)$ и $Av = \lim A_n v$. Это действительно так, согласно приложению Б к данной главе, посвященному доказательству приведенной ниже теоремы. Для того чтобы это было справедливо, необходимо (и, как оказывается, также достаточно), чтобы последовательность $\{\|A_n v\|\}$

имела предел, а это будет тогда и только тогда, когда $\int t^2 d(v, E_t v)$ сходится. Результатом подобных рассуждений, подробно изложенных в приложении, является следующая теорема.

Теорема. Любое разложение единицы $\{E_t\}$ (т. е. любое семейство операторов, обладающее свойствами 1—4 из § 9.7) однозначно определяет самосопряженный оператор A , и обратно. Оператор A определяется по $\{E_t\}$ следующим образом:

$$D(A) = \left\{ v: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v) < \infty \right\}; \quad (9.8.5)$$

тогда

$$\|Av\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v) \quad (9.8.6)$$

и для таких v и для всех $u \in H$

$$(u, Av) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(u, E_t v). \quad (9.8.7)$$

Такое построение часто символически обозначают формулой (9.8.2) и называют спектральным разложением оператора A .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если A ограничен, то E_t постоянна для $t < -\|A\|$ и $t \geq \|A\|$, точнее, что $E_t = 0$ для $t < -\|A\|$ и $E_t = I$ для $t > \|A\|$. Указание. Если предположить противное, то можно найти вектор v , такой, что правая часть (9.8.6) больше $\|A\|^2 \|v\|^2$.

9.9. ТИПЫ СХОДИМОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. СВЯЗЬ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ E_t И СПЕКТРОМ A

Пусть B, B_n ($n = 1, 2, \dots$) — ограниченные операторы. Если $(u, B_n v) \rightarrow (u, Bv)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u, v \in H$, то говорят, что последовательность $\{B_n\}$ сходится слабо к B . Если $\|B_n v - Bv\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $v \in H$, то говорят, что $\{B_n\}$ сильно сходится к B . Наконец, если $\|B_n - B\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность называют сходящейся к B равномерно или по норме. Очевидно, что из сходимости по норме следует сильная сходимость (к тому же самому пределу), потому что $\|B_n v - Bv\| \leq \|B_n - B\| \|v\|$, а из сильной сходимости следует слабая, поскольку

$$|(u, B_n v) - (u, Bv)| \leq \|u\| \|B_n v - Bv\|.$$

Таким образом, чтобы говорить о сильной (или слабой) сходимости B_n к оператору B , следует доказать, что векторы $B_n v$ сходятся сильно (слабо) к вектору Bv , как определено в § 1.9, при любом $v \in H$.

[Эти понятия используются в любом банаховом пространстве H , только слабая сходимость здесь определяется так. Линейный функционал $l(v)$, определенный на всем B , называется *ограниченным*, как и в § 1.8, если найдется такая константа K , что $|l(v)| \leq K \|v\|$ для всех $v \in B$; тогда о *слабой* сходимости B_n к B говорят в том случае, когда $l(B_n v) \rightarrow l(Bv)$ для всех $v \in B$ и любого ограниченного линейного функционала $l(\cdot)$. В случае гильбертова пространства это определение согласуется с данным выше, потому что, согласно теореме Рисса — Фреше о представлении (§ 1.8), ограниченный линейный функционал $l(v)$ всегда можно записать как (u, v) . С понятиями сильной сходимости и сходимости по норме для операторов в банаховом пространстве мы еще встретимся в связи с изучением корректно поставленных задач с начальными данными в гл. 15 и 16.]

Примеры в $L^2(\mathbb{R})$

ПРИМЕР 1

Пусть B_n — оператор сдвига:

$$(B_n f)(x) = f(x + 2n);$$

тогда

$$(g, B_n f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x + 2n) dx.$$

Этот интеграл разбивается на две части, $\int_{-\infty}^{-n}$ и $\int_{-n}^{\infty}$, и во втором интеграле вводится новая переменная $y = x + 2n$:

$$(g, B_n f) = \int_{-\infty}^{-n} \overline{g(x)} f(x + 2n) dx + \int_n^{\infty} \overline{g(y - 2n)} f(y) dy = I_1 + I_2.$$

В силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} |I_1|^2 &\leq \|f\|^2 \int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2 dx, \\ |I_2|^2 &\leq \|g\|^2 \int_n^{\infty} |f(y)|^2 dy; \end{aligned}$$

интегралы в этих неравенствах стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, потому что $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ квадратично интегрируемы. Поэтому B_n слабо сходятся к нулевому оператору; однако B_n не сходятся сильно ни к какому оператору, потому что если бы они сходились, то пределом был бы нуль, в то время как для любого f $\|B_n f\| = \|f\|$ не стремится к нулю.

ПРИМЕР 2

Пусть B_n — операторы усечения:

$$(B_n f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x| < n, \\ 0 & \text{при } |x| > n. \end{cases}$$

(Отметим, что B_n — проектор, потому что $B_n^2 = B_n$.) Очевидно, что $\|B_n f - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; следовательно, B_n сходится сильно к единичному оператору I . Однако B_n не сходится по норме к I , потому, что $\|B_n - I\| = 1$ для любого n ; это можно установить, применив $B_n - I$ к функции, носитель которой находится вне интервала $(-n, n)$.

ПРИМЕР 3

Пусть B и B_n — интегральные операторы Гильберта — Шмидта

$$(B_n f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, y) f(y) dy,$$

$$(B f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y) dy,$$

ядра которых таковы, что

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(x, y) - K(x, y)|^2 dx dy \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(т. е. $K_n \rightarrow K$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$). Применив неравенство Шварца, получим, что

$$\|(B_n - B)f\|^2 \leq M_n \|f\|^2 \quad \forall f,$$

так что $\|B_n - B\| \leq M_n$; поэтому B_n сходится по норме к B .

Каждому типу сходимости соответствует свой тип непрерывности. Говорят, что однопараметрическое семейство ограниченных операторов $B(t)$ *слабо* или *сильно непрерывно*, или *непрерывно по норме* в точке t , если $B(t + \delta)$ сходится слабо, сильно или по норме к $B(t)$, когда $\delta \rightarrow 0$. Односторонняя непрерывность (слева или справа) каждого типа определяется аналогично.

Если $B(t)$ — разложение единицы E_t , заданное формулой (9.6.5) или (9.6.6), то $B(t)$ автоматически слабо непрерывно справа. Более того, для разложения единицы слабая непрерывность (справа, слева, двусторонняя) автоматически означает сильную непрерывность (того же вида), потому что если

$$(u, (E_{t+\delta} - E_t)v) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0$$

для любых u и v , то это верно и для $u = v$. Так как $E_{t+\delta} - E_t$ — проектор, выписанная выше величина равна

$$(v, (E_{t+\delta} - E_t)^2 v),$$

а поскольку проектор самосопряжен, эта величина равна также и

$$((E_{t+\delta} - E_t)v, (E_{t+\delta} - E_t)v) = \|(E_{t+\delta} - E_t)v\|^2.$$

Поэтому в данном частном случае слабая непрерывность эквивалентна сильной. В силу этого для любого вещественного t_0 нужно рассмотреть следующие возможности:

- (а) E_t разрывна (имеется в виду слева) в точке t_0 ,
- (б) E_t сильно непрерывна (но не по норме) в t_0 ,
- (в) E_t непрерывна по норме в t_0 .

Мы покажем, что в случае (а) точка t_0 принадлежит точечному спектру A , в случае (б) — непрерывному спектру, а в случае (в) — резольвентному множеству. [Можно также рассмотреть и другие случаи, например непрерывность по норме с одной стороны t_0 и просто сильную непрерывность — с другой, однако значение такого поведения E_t для характеристики спектра выяснится только после того, как будут проанализированы перечисленные выше случаи.]

Непрерывность E_t справа (одновременно слабая и сильная, но, вообще говоря, не по норме) была получена в § 9.6 при определении E_t формулой

$$(u, E_t v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{C(t+\delta)} (u, R_\lambda v) d\lambda,$$

где $C(s)$ — контур, который идет от $-\infty$ выше вещественной оси на плоскости λ , пересекает эту ось в точке s , а затем возвращается к $-\infty$ ниже вещественной оси. Очевидно, что подобным же образом можно определить оператор (который мы обозначим через E_{t-}) и в случае, когда δ приближается к нулю снизу, а не сверху. Тогда E_{t-} будет семейством проекторов, обладающим всеми свойствами E_t , за исключением того, что оно непрерывно слева, а не справа. При помощи методов § 9.6 нетрудно убедиться в том, что оператор

$$P_t \stackrel{\text{def}}{=} E_t - E_{t-} \quad (9.9.1)$$

является проектором; в точке непрерывности E_t оператор P_t равен нулевому проектору (нулевому оператору, который отображает все H в нулевой элемент), однако в точке разрыва E_t оператор P_t не равен нулю. Многообразие, на которое проектирует P_t , т. е. его область значений $R(P_t)$, состоит из тех векторов из области значений E_t , которые ортогональны области значений E_s для любого $s < t$. Это выражается уравнениями

$$P_t E_s = E_s P_t = \begin{cases} P_t & \text{при } s \geq t, \\ 0 & \text{при } s < t, \end{cases} \quad (9.9.2)$$

которые легко получить при помощи методов приложения А.

Предположим теперь, что для данного вещественного числа t_0 имеет место случай (а), так что $P_{t_0} \neq 0$. Для $v (\neq 0)$ из $R(P_{t_0})$ мы имеем

$$(u, Av) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(u, E_t v) \quad \forall u. \quad (9.9.3)$$

Так как $v = P_t v$, функция $(u, E_t v)$, согласно (9.9.2), постоянна всюду, кроме скачка величины (u, v) при $t = t_0$. Поэтому

$$(u, Av) = t_0(u, v) \quad \text{для всех } u \in H,$$

т. е. $Av = t_0 v$; следовательно, t_0 принадлежит точечному спектру A , а v — собственный вектор; подпространство

$$E_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} R(P_{t_0}) \quad (9.9.4)$$

является собственным подпространством, соответствующим собственному значению t_0 ; см. пояснение ниже.

Следующим рассмотрим случай (б). В § 9.8 мы выяснили, что если v принадлежит области определения самосопряженного оператора A , то

$$\|Av\|^2 = (Av, Av) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v). \quad (9.9.5)$$

Предположим теперь, что E_t сильно (но не по норме) непрерывно при $t = t_0$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется ненулевой элемент $v = v_\delta$ из области значений $E_{t_0+\delta} - E_{t_0-\delta}$; для такого v функция $(v, E_t v)$ постоянна при $|t - t_0| > \delta$; поэтому

$$(Av - t_0 v, Av - t_0 v) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (t - t_0)^2 d(v, E_t v). \quad (9.9.6)$$

[Здесь наряду с формулой (9.9.5) следует использовать формулы $\int t d(v, E_t v) = (v, Av)$ и $\int d(v, E_t v) = (v, v)$.] На интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ функция $(v, E_t v)$ возрастает от нуля до $\|v\|^2$, поэтому

$$\|Av - t_0 v\|^2 \leq \delta^2 \|v\|^2.$$

Отсюда следует, что вектор v_δ является приближенным собственным вектором в смысле § 8.1, и, значит, t_0 принадлежит непрерывному спектру.

Чтобы исследовать случай (в), возьмем точку t_0 непрерывности по норме функции E_t . Тогда $\|E_t - E_{t_0}\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Однако $\|E_t - E_{t_0}\|$ всегда равна либо 1, либо 0, так как $E_t - E_{t_0}$ — либо ортогональный проектор, либо нулевой оператор, если $t \geq t_0$; это же верно и для $E_{t_0} - E_t$ при $t \leq t_0$ (см. упражнение 2 в § 9.2). Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что $E_t = E_{t_0}$ на интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. На этом интервале функция $(u, E_t v)$ постоянна для лю-

бых u и v из H . Вместо (9.9.6) мы получаем

$$(Av - t_0 v, Av - t_0 v) = \left(\int_{-\infty}^{t_0 - \varepsilon} + \int_{t_0 + \varepsilon}^{\infty} \right) (t - t_0)^2 d(v, E_t v),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \|Av - t_0 v\|^2 &\geq \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{t_0 - \varepsilon} + \int_{t_0 + \varepsilon}^{\infty} \right) d(v, E_t v) = \\ &= \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(v, E_t v) = \varepsilon^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

для любого $v \in H$. Отсюда следует, что $(A - t_0 I)^{-1}$ ограничен, более того, $\|(A - t_0 I)^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$; следовательно, t_0 находится в резольвентном множестве оператора A .

Пояснение. Выше было установлено, что любой вектор v из $R(P_{t_0})$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению t_0 . Заметим теперь, что таким образом получаются все собственные векторы. Возьмем произвольный ненулевой вектор v , такой, что $Av = t_0 v$ для некоторого t_0 ; тогда

$$0 = \|Av - t_0 v\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 d(v, E_t v).$$

Здесь $(v, E_t v)$ — неубывающая функция, а функция $(t - t_0)^2$ положительна всюду, кроме точки $t = t_0$. Из того, что интеграл равен нулю, следует, что $(v, E_t v)$ постоянна и лишь при $t = t_0$ имеет скачок. Поскольку $E_t \rightarrow 0$ и I при $t \rightarrow -\infty$ и $+\infty$ соответственно, величина этого скачка равна (v, v) , но, кроме того, равна и $(v, P_{t_0} v)$ по определению P_{t_0} . Следовательно, $(v, (I - P_{t_0})v) = 0$, но $I - P_{t_0}$ — проектор, значит, он самосопряжен и $I - P_{t_0} = (I - P_{t_0})^2$, так что

$$(v - P_{t_0} v, v - P_{t_0} v) = 0$$

и, значит, $v = P_{t_0} v$; поэтому $v \in R(P_{t_0})$, что и утверждалось.

Резюме. Разрыв E_t при $t = t_0$ означает, что $t_0 \in P\sigma(A)$. Сильная непрерывность (но без непрерывности по норме) означает, что $t_0 \in C\sigma(A)$. Из непрерывности по норме следует, что $t_0 \in \rho(A)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть A_n ($n = 1, 2, \dots$) — операторы, введенные в § 9.8 как аппроксимации самосопряженного оператора A . Покажите, что если $v \in D(A)$, то $A_n v \rightarrow Av$ сильно. **Указание.** Используйте упражнение 5 из § 1.9. **Докажите,**

что если A ограничен, то $A_n \rightarrow A$ сильно. Из упражнения § 9.8, конечно, следует, что если A ограничен, то $A_n = A$ при достаточно большом n , так что $A_n \rightarrow A$ также и по норме. Если A неограничен, то A_n не сходится к A ни в каком смысле (имея в виду три типа сходимости, введенные в данном параграфе¹).

2. Если A ограничен, то в каком смысле сходится к A сумма Римана—Стилтьеса (9.8.1)? *Указание.* Эту сумму можно записать как $\int f(t) dE_t$, где $f(t)$ —ступенчатая функция.

3. Если A неограничен, то в каком смысле $E_n - E_{-n}$ сходятся к I при $n \rightarrow \infty$?

4. При помощи неравенства (8.5.7) и резольвентного уравнения (8.5.1) покажите, что R_λ дифференцируема по λ как функция комплексной переменной в любой точке λ резольвентного множества, причем разностное отношение $(R_{\lambda+\alpha} - R_\lambda)/\alpha$ стремится к производной по норме, а эта производная равна R_λ^2 в соответствии с формальными правилами дифференцирования $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$. Поэтому говорят, что R_λ является аналитической или голоморфной операторнозначной функцией комплексной переменной λ на резольвентном множестве $\rho(A)$.

5. Предположим, что $F(\lambda)$ —ограниченный оператор при любом λ из некоторой области Ω и что функция $F(\lambda)$ дифференцируема по λ в области Ω в смысле упражнения 4. Покажите, что для $F(\lambda)$ справедливы теорема Коши и интегральная формула Коши, как только решено, в каком смысле рассматривается интеграл $\oint F(\lambda) d\lambda$.

6. Если R_λ —резольвента самосопряженного оператора A и λ_0 —изолированное собственное значение A , то какого рода особенность имеет R_λ при $\lambda = \lambda_0$ и чему равен вычет в этой точке?

9.10. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ.

ОГРАНИЧЕННЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ. ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Преобразование Кэли $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ самосопряженного оператора A было введено в § 8.6 в связи с расширениями симметрического оператора. Пусть $\{E_t\}$ —разложение единицы, соответствующее A . Тогда утверждается, что

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [(t - i)/(t + i)] dE_t. \quad (9.10.1)$$

Эту формулу можно интерпретировать либо в смысле сильной сходимости (фактически сходимости по норме) соответствующих сумм Римана—Стилтьеса (см. упражнение 1 ниже), либо как сокращенную запись формулы

$$(u, Uv) = \int_{-\infty}^{\infty} [(t - i)/(t + i)] d(u, E_t v). \quad (9.10.2)$$

¹) Напоминаем, что в определении слабой и сильной сходимости операторов требовалась сходимость для всех $v \in H$ (а не только для $v \in D(A)$).—Прим., перев.

Чтобы получить эту формулу, прежде всего заметим, что для любых w и v из $D(A)$

$$((A+i)w, v) = (w, (A-i)v) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-i) d(w, E_t v).$$

Пусть теперь u — произвольный вектор из H ; положим

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(s+i)] dE_s u;$$

тогда

$$((A+i)w, v) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-i) d_t \int_{-\infty}^{\infty} [1/(s-i)] d_s (E_s u, E_t v).$$

При помощи соотношения (9.Б.5) из приложения к данной главе такие двойные интегралы можно свести к однократным; в результате мы получим

$$((A+i)w, v) = \int_{-\infty}^{\infty} [(t-i)/(t-i)] d(u, E_t v) = (u, v).$$

Поэтому $(A+i)w = u$, или $w = (A+i)^{-1}u$, т. е.

$$(A+i)^{-1}u = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(s+i)] dE_s u. \quad (9.10.3)$$

После этого повторное использование (9.Б.5) приводит нас к формуле (9.10.2).

Формулы (9.10.2) и (9.10.3) дают основание для следующего определения: если $f(t)$ — любая непрерывная или кусочно непрерывная функция, то оператор $f(A)$ определяется как

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dE_t. \quad (9.10.4)$$

Эта формула интерпретируется аналогично равенству $A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t$,

а именно

$$D(f(A)) = \left\{ v: \left(v, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dE_t v \right) < \infty \right\}, \quad (9.10.5)$$

$$(u, f(A)v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(u, E_t v).$$

Если $f(t)$ — ограниченная на всей вещественной оси функция, как в (9.10.2) и (9.10.3), то $f(A)$ — ограниченный оператор; если $f(t)$ — вещественнозначная функция, то оператор $f(A)$ самосопряжен; если $|f(t)| = 1$, то $f(A)$ унитарен.

Например, из A можно получить другой унитарный оператор, взяв $f(t) = e^{i\alpha t}$ с вещественным α . [Унитарный оператор, полученный при помощи преобразования Кэли, имеет то преимущество, что может быть определен без использования спектрального разложения A и что уравнение $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ можно разрешить относительно A .]

В качестве другого примера возьмем $f(t) = th t$. Тогда $f(A)$ ограничен и самосопряжен. Если A рассматривается как наблюдаемая в квантовой механике, то $f(A)$ — эквивалентная ограниченная наблюдаемая. Аппаратура для измерения $f(A)$ та же, что и для измерения A , только дополняется простым компьютером для вычисления $th t$ от измеренных значений A . Наблюдаемая $f(A)$ дает ту же информацию, что и A , потому что t всегда можно получить из $f(t)$. Такое представление о наблюдаемых окажется полезным в гл. 14.

Если отображение $t \rightarrow f(t)$ взаимно однозначно на вещественной оси t , как и во всех приведенных выше примерах, исключая $f(t) = e^{i\alpha t}$, то (9.10.4) можно переписать следующим образом. Пусть $\mathcal{C}$ — кривая на комплексной плоскости, заданная уравнением $z = f(t)$ ($-\infty < t < \infty$), а g — функция, обратная f , т. е. $t = g(z)$. Тогда на $\mathcal{C}$ определяется семейство ортогональных проекторов как $F_z = E_{g(z)}$, где $\{E_t\}$ — разложение единицы для оператора A . При этом (9.10.4) переходит в формулу

$$f(A) = \int_{\mathcal{C}} z dF_z. \quad (9.10.6)$$

В частности, взяв функцию $f(t) = (t - i)/(t + i)$, получим, что любой унитарный оператор, для которого единица не является собственным значением, характеризуется разложением единицы $\{F_z\}$, определенным на единичной окружности $\mathcal{C}$: $|z| = 1$. В этом случае F_z обычно записывается как F_θ , где $z = e^{i\theta}$ (следовательно, $t = -i \operatorname{ctg}(\theta/2)$); поэтому каноническое представление унитарного оператора имеет вид

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF_\theta, \quad (9.10.7)$$

где семейство $\{F_\theta\}$ обладает свойствами 1—4 § 9.7 с заменой интервала $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, 2\pi)$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если $f(t)$ ограничена, то суммы Римана—Стилтьеса, соответствующие интегралу (9.10.4), сильно сходятся к $f(A)$. При каких обстоятельствах они сходятся к $f(A)$ по норме?

Дробные степени неотрицательного самосопряженного оператора можно определить после следующего краткого предварительного рассмотрения.

Теорема. Если A — самосопряженный оператор, E_t — соответствующее разложение единицы, а v — единичный вектор ($\|v\|=1$) из области значений проектора $E_b - E_a$, где $a < b$, то

$$a \leq (v, Av) \leq b. \quad (9.10.8)$$

Доказательство. Неубывающая функция $(v, E_t v)$ равна нулю при $t < a$ и равна единице при $t > b$. Поэтому

$$b - (v, Av) = \int_{a=0}^{b+0} (b-t) d(v, E_t v) \geq 0;$$

второе неравенство доказывается аналогично.

Эта теорема показывает, что спектр A лежит в замыкании числовой области значений, так как если t_0 — такая точка, что E_t не постоянна на любом интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, то t_0 с точностью до любого $\varepsilon > 0$ можно аппроксимировать величиной (v, Av) , где v — единичный вектор.

Теорема показывает также, что если A неотрицателен, то $E_t = 0$ при $t < 0$, иначе можно найти такой вектор v , что $(v, Av) < 0$. Поэтому если $A \geq 0$, то функция $f(A) = A^{1/2}$ и вообще A^α ($\alpha > 0$) может быть определена как

$$A^\alpha = \int_0^\infty t^\alpha dE_t, \quad (9.10.9)$$

где подразумевается положительный корень t^α . В частности, если T — произвольный замкнутый оператор с плотной в H областью определения, так что T^*T определен и самосопряжен по теореме фон Неймана, упомянутой в § 7.9, то $(T^*T)^{1/2}$ является самосопряженным (и неотрицательным) оператором, который часто можно рассматривать как своего рода абсолютное значение T . Однако он отличается от $(TT^*)^{1/2}$, если T не является нормальным оператором.

Теперь рассмотрим так называемое полярное разложение общего оператора (сначала для случая ограниченного оператора A , определенного на всем H). Пусть $R = (A^*A)^{1/2}$; R неотрицателен. Обозначим через $\hat{R}$ ограничение R на $R(R) = N(R)^\perp \stackrel{\text{def}}{=} D(\hat{R})$, где N — нуль-пространство. (Этот этап построений необязателен для случая положительного, а не просто неотрицательного R .) Поскольку любой элемент $w \in H$ можно записать как $w = u + v$, где $u \in D(\hat{R})$, а $v \in N(R)$ и, значит, $Rw = \hat{R}u = Ru$, то очевидно, что R и $\hat{R}$ имеют одну и ту же область значений, а именно $D(\hat{R})$. Поэтому $\hat{R}$ отображает $D(\hat{R})$ взаимно однозначно на себя. Положим

$$\hat{V} = A\hat{R}^{-1}, \quad D(\hat{V}) = R(\hat{R}) = D(\hat{R}).$$

Тогда для любого v из H

$$\hat{V}Rv = A\hat{R}^{-1}Rv = Av.$$

Замечание. $N(R) = N(A)$. Теперь $\hat{V}$ — изометрическое отображение своей области определения на свою область значений (совпадающей с областью значений оператора A), потому что если v — любой вектор из $R(\hat{R})$ и $w = \hat{R}^{-1}v$, то

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|Rw\|^2 = (Rw, Rw) = (w, R^2w) = (w, A^*Aw) = \\ &= (Aw, Aw) = \|Aw\|^2 = \|A\hat{R}^{-1}v\|^2 = \|\hat{V}v\|^2\end{aligned}$$

и, следовательно, $\hat{V}$ изометрично. Определим теперь оператор V как расширение $\hat{V}$ на H , получаемое так: $Vw = 0$ для $w \perp R(R)$. Такой оператор V называется *частично изометрическим*. Очевидно, что $\|V\| = 1$, исключая случай нулевого оператора A .

Вывод. Любой ограниченный оператор A можно записать как $A = VR$, где $R \geq 0$, а V — частично изометрический оператор. Это разложение единственно, если потребовать, что $Vw = 0$ для $w \perp R(R)$. Если $Av \neq 0$ для $v \neq 0$, то оператор $R > 0$, а оператор V унитарен. Этот вывод справедлив и для неограниченного, но замкнутого оператора A с плотной в H областью определения; см. Като [1966], а также § 7.9. Разложение VR называется *полярным разложением* A . Если V — унитарный оператор, то его всегда можно представить как $\exp(i\Theta)$, где Θ — самосопряженный оператор. Поскольку самосопряженные операторы соответствуют вещественным числам, выражение $A = VR$ напоминает выражение $z = e^{i\theta}r$ для произвольного комплексного числа z .

УПРАЖНЕНИЯ

2. Покажите, что если V частично изометричен, то V^* также частично изометричен.

3. Докажите, что любой ограниченный оператор A можно записать также как R_1V_1 , где $R_1 = (AA^*)^{1/2}$, а V_1 — частично изометрический оператор.

Приложение А к главе 9.

СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ E_t

Прежде всего докажем, что для каждого t оператор E_t является ограниченным. По теореме из § 9.4 $0 \leq \sigma(t) \leq C\|v\|^2$ для всех t , где C — постоянная, т. е.

$$\sigma(t) = \sigma(t; v) = (v, E_tv) \leq C\|v\|^2.$$

При помощи поляризации получаем (см. также (1.11.3)), что

$$|(u, E_tv)| \leq 4C\|u\|\|v\|,$$

а после подстановки $u = E_tv$ и сокращения одного множителя получаем

$$\|E_tv\| \leq 4C\|v\|,$$

т. е. E_t — ограниченный оператор (что следует также из теоремы о замкнутом графике, поскольку E_tv определено для всех v из H); ниже будет доказано, что константу $4C$ можно заменить единицей.

Так как $\sigma(-\infty)=0$, ясно, что $E_{-\infty}$ — нулевой оператор; сейчас мы покажем, что $E_{+\infty}$ — единичный оператор I . Для этого возьмем в (9.6.7) $u=(A-\bar{\lambda}I)w$, где w — произвольный элемент $D(A)$; тогда

$$\begin{aligned} (Aw - \bar{\lambda}w, R_{\lambda}v) &= (w, (A - \lambda I) R_{\lambda}v) = (w, v) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1/(t - \lambda)] d(Aw - \bar{\lambda}w, E_tv) = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(t - \lambda)] d(Aw, E_tv) + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} [-\lambda/(t - \lambda)] d(w, E_tv). \end{aligned}$$

Далее, (Aw, E_tv) и (w, E_tv) были получены поляризацией функции $\sigma(t; v)$, которая (как функция от t) имеет конечную полную вариацию; следовательно, и они имеют конечную полную вариацию. Поэтому при $\lambda \rightarrow i\infty$ первый интеграл стремится к нулю, а второй — к $\int_{-\infty}^{\infty} d(w, E_tv) = (w, E_{\infty}v)$; значит, $(w, v) = (w, E_{\infty}v)$ для всех $w \in D(A)$; но $D(A)$ плотна в H , поэтому $v = E_{\infty}v$, иначе говоря, $E_{\infty} = I$, что и следовало доказать.

Для любого t оператор E_t самосопряжен, потому что $\sigma(t; v)$ вещественна, и поэтому функция $\sigma(t; u, v)$, полученная поляризацией, удовлетворяет уравнению $\sigma(t; v, u) = \overline{\sigma(t; u, v)}$, т. е.

$$(v, E_t u) = \overline{(u, E_t v)} = (E_t v, u),$$

а поскольку E_t ограничен и определен на всем H , отсюда получается $E_t^* = E_t$.

Покажем теперь, что для любых вещественных чисел s и t

$$E_t E_s = E_s E_t = E_{\min(s, t)}. \quad (9.A.1)$$

Сначала предположим, что $s \neq t$, для определенности $s < t$; тогда

$$\begin{aligned} (u, E_t E_s v) &= (E_t u, E_s v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G(s+)} d\lambda (E_t u, R_{\lambda} v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s+)} d\lambda (u, E_t R_{\lambda} v) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C(s+)} d\lambda \int_{C(t+)} d\mu (u, R_{\mu} R_{\lambda} v) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C(s+)} d\lambda \int_{C(t+)} d\mu \left(u, \frac{R_{\mu} - R_{\lambda}}{\mu - \lambda} v \right) \end{aligned} \quad (9.A.2)$$

(в конце было использовано резольвентное уравнение).

Предположим теперь, что контур $C(s)$ лежит внутри контура $C(t)$, как на рис. 9.7. [Сравните с выкладками, связанными с уравнением (9.3.8) в конечномерном случае.] Последний интеграл записывается как разность двух интегралов, один — содержащий R_{μ} , другой — содержащий R_{λ} . Интегрирование сначала по λ в первом из них показывает, что

$$\int_{C(s+)} [1/(\mu - \lambda)] d\lambda = 0,$$

поскольку μ лежит вне контура $C(s)$. Интегрирование сначала по μ дает для второго интеграла

$$\int_{C(t+)} [1/(\mu - \lambda)] d\mu = -2\pi i,$$

потому что λ лежит внутри контура $C(t)$ (заметим, что $C(t)$ обходится по часовой стрелке). В результате получаем

$$(u, E_t E_s v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s+)} d\lambda (u, R_\lambda v) = (u, E_s v),$$

т. е. $E_t E_s = E_s$. Очевидно, что из (9.A.2) следует, что E_s и E_t коммутативны. До сих пор у нас было $s \neq t$. По построению $(u, E_t w)$ непрерывна по t справа для любых u и w , в частности для $w = E_s v$; поэтому если t стремится к s

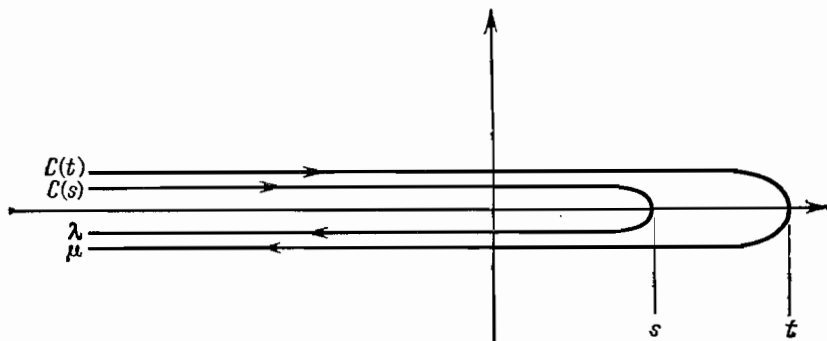


Рис. 9.7. Контур $C(s)$ и $C(t)$.

справа, то равенство $(u, E_t E_s w) = (u, E_s w)$ показывает, что $E_s^2 = E_s$, что и утверждалось. Следовательно, E_s — проектор. Для $s < t$ $E_t - E_s$ также является проектором, потому что

$$(E_t - E_s)^2 = E_t^2 - 2E_s E_t + E_s^2 = E_t - 2E_s + E_s = E_t - E_s.$$

Резюме. $\{E_t\}$ — однопараметрическое семейство самосопряженных проекторов, таких, что

$$E_t E_s = E_s E_t = E_{\min(s, t)}, \quad (9.A.3)$$

и для любых u, v из H

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u, E_t v) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u, E_t v) = (u, v), \quad (9.A.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u, E_{t+\varepsilon} v) = (u, E_t v). \quad (9.A.5)$$

Равенство (9.A.4) можно переписать как $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = I$. Равенство (9.A.5) описывает непрерывность E_t справа; более подробно свойства непрерывности E_t обсуждались в § 9.9.

Приложение Б к главе 9.

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Здесь будет показано, что любое семейство $\{E_t\}$ самосопряженных проекторов, обладающих свойствами 1—4 из § 9.7, определяет самосопряженный оператор $\tilde{A}$; если же $\{E_t\}$ получено по оператору A с помощью формулы (9.6.5), где $R_\lambda = R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1}$, то $\tilde{A} = A$, так что имеется взаимно однозначное соответствие между классом всех таких семейств и множеством самосопряженных операторов.

Определим сначала операторы A_n ($n=1, 2, \dots$) по формуле

$$(u, A_n v) = \int_{-n}^n t d(u, E_t v). \quad (9.Б.1)$$

Ясно, что каждый A_n линейен, ограничен, самосопряжен, так что остался только вопрос о сходимости $A_n v$ для заданного $v \in H$ при $n \rightarrow \infty$. Для сходимости $A_n v$ необходимо (и, как будет показано, достаточно), чтобы нормы $\|A_n v\|$ были ограничены при $n \rightarrow \infty$. Уравнение, комплексно сопряженное уравнению (9.Б.1), выглядит так:

$$(A_n v, u) = \int_{-n}^n t d(E_t v, u).$$

Подставим в это уравнение $u = A_n v$ и снова используем (9.Б.1) с заменой t на s ; тогда

$$\|A_n v\|^2 = \int_{-n}^n t d_t \int_{-n}^n s d_s (E_t v, E_s v). \quad (9.Б.2)$$

В силу (9.А.1) функция $(E_t v, E_s v) = (E_s E_t v, v)$ не зависит от s при $s \geq t$; поэтому

$$\int_{-n}^n s d_s (E_t v, E_s v) = \int_{-n}^t s d (E_s v, v) \quad (9.Б.3)$$

и при применении d_t к этой функции получается просто $t d(E_t v, v)$. Но тогда двойной интеграл сводится к однократному и

$$\|A_n v\|^2 = \int_{-n}^n t^2 d(v, E_t v). \quad (9.Б.4)$$

[Поскольку данный интеграл меньше $n^2 \|v\|^2$, мы имеем $\|A_n\| \leq n$, но этот результат использоваться не будет.] Связь между двойным и однократным интегралами обобщается; это обобщение приводится здесь для последующих ссылок:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d_t \int_{-\infty}^{\infty} g(s) d_s (E_t u, E_s v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) d(u, E_t v), \quad (9.Б.5)$$

если только функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ таковы, что интегралы сходятся.

Определим теперь оператор $\hat{A}$, положив

$$D(\hat{A}) = \left\{ v \in H: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v) < \infty \right\}, \quad (9.Б.6)$$

$$\hat{A}v = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v \quad \forall v \in D(\hat{A}).$$

Рассуждения, приведенные выше, показывают, что выражение, подобное (9.Б.4), имеет место и для $\|A_n v - A_m v\|^2$, только интегрирование проводится лишь для таких t , для которых $n < |t| < m$. Следовательно, $\{A_n v\}$ — последовательность Коши в H , если интеграл в (9.Б.6) конечен. Покажем дополнительно, что (1) $\hat{A}$ определен на плотном множестве (и, следовательно, имеет сопряженный), (2) $\hat{A}$ самосопряжен и (3) $R_\lambda(\hat{A} - \lambda)\omega = \omega$ для всех $\omega \in D(\hat{A})$. По-

следнее означает, что R_λ является резольвентой и для $\hat{A}$, так что $(\hat{A} - \lambda)^{-1} = (A - \lambda)^{-1}$, т. е. $\hat{A} = A$.

Чтобы показать, что $D(\hat{A})$ плотна в H , возьмем произвольный элемент $v \in H$. Тогда последовательность $\{v_k\}$, где $v_k = (E_k - E_{-k})v$, сходится к v при $k \rightarrow \infty$, в то время как $A_n v_k = A_k v_k$ для всех $n \geq k$, так что $v_k \in D(\hat{A})$.

Для нахождения $\hat{A}^*$ рассмотрим все пары элементов $u, w \in H$, такие, что

$$(u, \hat{A}v) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(u, E_t v) = (w, v)$$

для всех $v \in D(\hat{A})$. Возьмем комплексно сопряженное уравнение:

$$(v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(E_t v, u) = \int_{-\infty}^{\infty} t d(v, E_t u).$$

Задача нахождения u и w , удовлетворяющих этому уравнению, в точности та же задача, с которой мы встретились при определении $D(\hat{A})$ и $\hat{A}u$, и поэтому мы делаем вывод, что $\hat{A}^* = \hat{A}$.

Наконец, для любых u, v по формуле (9.6.7)

$$(u, R_\lambda v) = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(t - \lambda)] d(u, E_t v) = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(t - \lambda)] d(E_t u, v) \quad (9.6.7)$$

для любого невещественного λ . Далее возьмем $v = \hat{A}w - \lambda w$, где w — произвольный элемент из $D(\hat{A})$ (заданной в (9.Б.6)). По определению оператора $\hat{A}$

$$(E_t u, \hat{A}w - \lambda w) = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \lambda) d_s(E_t u, E_s w);$$

подставив это в (9.Б.7), получим

$$(u, R_\lambda (\hat{A} - \lambda I) w) = \int_{-\infty}^{\infty} [1/(t - \lambda)] d_t \int_{-\infty}^{\infty} (s - \lambda) d_s(E_t u, E_s w);$$

применение же соотношения (9.Б.5) между двойным и однократным интегралами дает

$$(u, R_\lambda (\hat{A} - \lambda I) w) = \int_{-\infty}^{\infty} [(t - \lambda)/(t - \lambda)] d(u, E_s w) = (u, w).$$

Поэтому $R_\lambda = (\hat{A} - \lambda I)^{-1}$, что и требовалось доказать. Следовательно, из (9.Б.1) при $n \rightarrow \infty$ получаем нужное представление оператора A для $v \in D(A)$.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Операторы $-id/dx$ и $-(d/dx)^2$ на $\mathbb{R}$; регулярные и особые операторы Штурма—Лиувилля; конечные точки типа предельной точки и типа предельной окружности; метод Фробениуса; формулы для резольвенты и спектральных проекторов; разложения по собственным функциям; радиальные уравнения водородоподобного атома в нерелятивистском и релятивистском случаях.

Предварительные сведения: гл. 1—9.

В этой главе кратко излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка, в значительной степени развитой Германом Вейлем.

10.1. РЕЗОЛЬВЕНТА И СПЕКТРАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО ДЛЯ ОПЕРАТОРА $-id/dx$

Обозначим через T_0 оператор, определенный для всех распределений f на $\mathbb{R}$ посредством уравнения

$$T_0 f = -if'. \quad (10.1.1)$$

В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ мы определим оператор A :

$$D(A) = \{f \in L^2: f' \in L^2\}, \quad Af = T_0 f = -if'. \quad (10.1.2)$$

В § 7.5 показано, что A является самосопряженным оператором. Отметим, что в соответствии с § 5.6 любое f в $D(A)$ автоматически удовлетворяет граничному условию $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Точечный спектр $P\sigma(A)$ является пустым, ибо если λ —собственное значение, то собственной функцией будет $Se^{-i\lambda x}$ ($S = \text{const} \neq 0$), которая не принадлежит L^2 ни при каком λ . С другой стороны, для любого вещественного λ можно построить приближенную собственную функцию в виде волнового пакета

$$f(x) = \beta^{1/2} e^{-\beta x^2} e^{i\lambda x} \quad (\beta > 0).$$

Когда $\beta \rightarrow 0$, $\|f\|$ постоянна, тогда как $\|Af - \lambda f\| \rightarrow 0$. Следовательно, непрерывный спектр $C\sigma(A)$ заполняет всю вещественную ось в плоскости λ .

Для того чтобы найти резольвенту, мы допустим, что $\text{Im} \lambda \neq 0$, и будем искать решение f уравнения

$$Af - \lambda f = g, \quad \text{т. е.} \quad -if' - \lambda f = g, \quad (10.1.3)$$

где g — произвольный элемент из $L^2(\mathbb{R})$. Это решение таково:

$$f(x) = (R_\lambda g)(x) = \begin{cases} i \int_{-\infty}^x e^{i\lambda(x-x')} g(x') dx', & \operatorname{Im} \lambda > 0, \\ -i \int_x^{\infty} e^{i\lambda(x-x')} g(x') dx', & \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases} \quad (10.1.4)$$

Следовательно, резольвента R_λ является интегральным оператором.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $\|f\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \|g\|$, т. е. что $\|R_\lambda\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$. Это обеспечивает второе доказательство того, что A самосопряжен; именно, при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ оператор $(A - \lambda)^{-1}$ определен во всем L^2 и ограничен, следовательно, верхняя и нижняя полуплоскости входят в резольвентное множество (см. § 8.6).

2. Покажите, что если g имеет ограниченный носитель, то $\|f\| (= \|R_\lambda g\|) \leq \operatorname{const} \cdot |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}$, где постоянная зависит от g , но не от λ . *Указание.* Выполните преобразование Фурье и вспомните, что $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

3. Интегрируя R_λ по подходящему контуру в плоскости λ (см. § 9.6), покажите, что для $s < t$ $E_t - E_s$ является интегральным оператором вида

$$((E_t - E_s)g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(x-x')} - e^{is(x-x')}}{2\pi i(x-x')} g(x') dx', \quad (10.1.5)$$

10.2. РЕЗОЛЬВЕНТА И СПЕКТРАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО ДЛЯ ОПЕРАТОРА $-(d/dx)^2$

Здесь оператор T_0 задается уравнением $T_0 f = -f''$, где f — любое распределение на $\mathbb{R}$. Самосопряженный оператор A определяется следующим образом:

$$D(A) = \{f \in L^2: f'' \in L^2\}, \quad Af = T_0 f = -f''. \quad (10.2.1)$$

Из рассуждений, аналогичных проведенным в предыдущем параграфе, видно, что точечный спектр оператора A пуст и что непрерывный спектр заполняет неотрицательную вещественную ось. Для любого λ , не лежащего на неотрицательной вещественной оси, уравнение $Af - \lambda f = g$ можно разрешить и найти

$$f(x) = (R_\lambda g)(x) = (1/(2k)) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x-x'|} g(x') dx', \quad (10.2.2)$$

где $k = \sqrt{-\lambda}$, $\operatorname{Re} k > 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Интегрируя резольвенту по подходящему контуру в плоскости λ , покажите, что спектральный проектор E_t дается формулой

$$(E_t g)(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{t} |x-x'|}{\pi |x-x'|} g(x') dx', & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (10.2.3)$$

2. Проверьте непосредственно, что

$$E_t E_s = E_{\min(t, s)}.$$

10.3. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Пусть T_0 является либо одним из операторов, рассмотренных в последних двух параграфах, либо любым обыкновенным дифференциальным оператором, который имеет постоянные коэффициенты и представляется в виде

$$T_0 = p(-id/dx), \quad (10.3.1)$$

где $p(k)$ — вещественный полином от вещественного k . Мы определим некоторый оператор в $L^2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in L^2: T_0 f \in L^2\}, \\ Af &= T_0 f = p(-id/dx) f. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Если $\hat{f}(k)$ — преобразование Фурье любого распределения медленного роста $f(x)$ на $\mathbb{R}$, то $k\hat{f}(k)$ является преобразованием Фурье от $(-id/dx)f(x)$, а $p(k)\hat{f}(k)$ — преобразованием Фурье от $p(-id/dx)f(x)$. Следовательно, если $\mathcal{F}$ — унитарный оператор преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$, так что $\hat{f} = \mathcal{F}f$, и если $\hat{A} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^*$, то определение (10.3.2) принимает вид

$$D(\hat{A}) = \{\hat{f} \in L^2: p(k)\hat{f} \in L^2\}, \quad \hat{A}\hat{f} = p(k)\hat{f}. \quad (10.3.3)$$

Ясно, что $\hat{A}$ самосопряжен, а следовательно, A , равный $\mathcal{F}^*\hat{A}\mathcal{F}$, также самосопряжен.

Преобразование Фурье уравнения $Af - \lambda f = g$ есть $\hat{A}\hat{f} - \lambda\hat{f} = \hat{g}$; следовательно, если R_λ является резольвентой A , то оператор $\hat{R}_\lambda = \mathcal{F}R_\lambda\mathcal{F}^*$ есть резольвента оператора $\hat{A}$, и ясно, что

$$(\hat{R}_\lambda \hat{g})(k) = \hat{g}(k)/(p(k) - \lambda). \quad (10.3.4)$$

Если $C(t+)$ — контур, описанный в § 9.6, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(t+)} \frac{1}{p(k) - \lambda} d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } p(k) \leq t, \\ 0 & \text{при } p(k) > t, \end{cases} \quad (10.3.5)$$

поэтому проектор $\hat{E}_t$ дается формулой

$$(\hat{E}_t \hat{g})(k) = \begin{cases} \hat{g}(k) & \text{для всех таких } k, \text{ что } p(k) \leq t, \\ 0 & \text{для всех таких } k, \text{ что } p(k) > t. \end{cases} \quad (10.3.6)$$

Точнее говоря, это уравнение определяет $\hat{E}_t \hat{g}$ каждый раз, когда $\hat{g}$ — непрерывная функция, но непрерывные функции плотны в L^2 и результирующий оператор ограничен, так что $\hat{E}_t$ определен во всем L^2 согласно теореме о расширении, сформулированной в начале гл. 7. Спектральные проекторы для A определяются теперь следующим образом:

$$E_t = \mathcal{F}^* \hat{E}_t \mathcal{F}.$$

Побочный результат: если f принадлежит области $D(A)$, определенной в (10.3.2), то все производные $f', \dots, f^{(m)}$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, где m — степень полинома $p(\cdot)$. Чтобы это доказать, заметим сначала, что поскольку $p(k)\hat{f}$ принадлежит L^2 , $|p(k)|\hat{f}$ также принадлежит L^2 , следовательно,

$$c_1 \hat{f} + c_2 |p(k)| \hat{f}$$

принадлежит L^2 . Теперь выберем c_1 и c_2 так, что

$$|k^r| < c_1 + c_2 |p(k)|$$

для всех k и для $r = 1, \dots, m$. Так как $\hat{f}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, а значит, заведомо принадлежит $L^2(-K, K)$, K конечно, то распределение $k^r \hat{f}$ принадлежит $L^2(-K, K)$ для любого r , и лемма в § 5.5 показывает, что

$$\|k^r \hat{f}\| \leq \|c_1 \hat{f} + c_2 |p(k)| \hat{f}\|$$

для каждого K . Правая часть остается ограниченной при $K \rightarrow \infty$, следовательно, $k^r \hat{f} \in L^2$, а значит, и $f^{(r)}$ принадлежит L^2 , что и требовалось доказать.

Метод преобразования Фурье используется в следующей главе для изучения оператора Лапласа и некоторого интегродифференциального оператора.

Мы заключаем этот параграф некоторыми замечаниями об операторе преобразования Фурье $\mathcal{F}$. В случае n измерений

$$(\mathcal{F}f)(x) = \hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot x'} f(x') dx'_1 \dots dx'_n. \quad (10.3.7)$$

Его резольвентой (для $\lambda^4 \neq 1$) является

$$f(x) = (R_\lambda g)(x) = \frac{1}{1-\lambda^4} [\lambda^2 \hat{g}(x) + \hat{g}(-x) + \lambda^2 g(x) + \lambda g(-x)], \quad (10.3.8)$$

ибо легко видеть, что тогда $\mathcal{F}f - \lambda f = g$, если вспомнить, что $\hat{g}(x) = g(-x)$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Формула (10.3.8) показывает, что вся плоскость λ , кроме точек $\lambda = \pm 1, \pm i$, является резольвентным множеством оператора преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Поэтому соответствующее разложение единицы F_z , определенное на единичной окружности $|z|=1$ (см. (9.10.7)), является ступенчатой функцией со скачками в точках $z = \pm 1, \pm i$; скачки суть проекторы P_1, P_{-1}, P_i, P_{-i} . Найдите эти проекторы и проверьте, что

$$\mathcal{F} = \sum_{z=1, i, -1, -i} z P_z, \quad I = \sum_{z=1, i, -1, -i} P_z.$$

Покажите, что этот оператор $\mathcal{F}$ не является преобразованием Кэли самосопряженного оператора A , но таковым является $\sqrt{i}\mathcal{F}$. Найдите A . Найдите также собственные функции оператора $\mathcal{F}$ в одномерном случае, для чего сначала покажите, что гауссиан соответствующей ширины инвариантен относительно преобразования Фурье, затем покажите, что если $f(x)$ — собственная функция, то $f'(x) \pm xf(x)$ — также собственная функция, и используйте свойства функций Эрмита.

10.4. РЕГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Допустим, что $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции из классов C^1 и C соответственно для $a \leq x \leq b$ и что $p(x) > 0$. Обозначим через T_0 оператор

$$T_0 f = -(pf')' + qf. \quad (10.4.1)$$

Согласно § 5.4, если f принадлежит L^2 , то pf' и qf являются распределениями, а поэтому и $T_0 f$ — также распределение (но не обязательно принадлежащее L^2). Рассмотрим граничные условия

$$\alpha f(a) + \beta f'(a) = 0, \quad \gamma f(b) + \delta f'(b) = 0, \quad (10.4.2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные постоянные, причем α и β не являются одновременно нулями (γ и δ также не являются одновременно нулями). Оператор A типа Штурма — Лиувилля в гильбертовом пространстве $L^2 = L^2(a, b)$ теперь определяется следующим образом:

$$D(A) = \{f \in L^2: T_0 f \in L^2, f \text{ удовлетворяет (10.4.2)}\}, \quad (10.4.3)$$

$$Af = T_0 f, \quad f \in D(A). \quad (10.4.4)$$

[Заметим, что поскольку $f \in L^2$, $qf \in L^2$, откуда $(pf')' \in L^2$, а следовательно, f' — непрерывная функция и граничные условия (10.4.2) имеют смысл.] Методом § 7.5 легко показать, что A самосопряжен. Будет показано, что A имеет чисто точечный спектр с собственными значениями λ_j , такими, что $|\lambda_j| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ (на самом деле $\lambda_j \rightarrow +\infty$). Будет показано, что резоль-

вентой оператора A является компактный интегральный оператор, ядром которого является функция Грина оператора $A - \lambda$; согласно § 8.6, существование резольвенты для всех невещественных λ дает другое доказательство самосопряженности A , поскольку он, очевидно, симметричен.

Симметрия A является следствием *формальной самосопряженности* T_0 , под которой имеют в виду, что если интегрирование по частям справедливо, то

$$\int_a^b f T_0 g \, dx = \int_a^b g T_0 f \, dx + \text{Граничные члены.} \quad (10.4.5)$$

Иногда вводят в качестве третьего коэффициента функцию $r(x)$, считая ее непрерывной и положительной на $[a, b]$, и записывают уравнение для собственных значений в более общей форме:

$$-(pf')' + qf = \lambda rf. \quad (10.4.6)$$

Это эквивалентно введению оператора S_0 , определяемого так:

$$S_0 f = (1/r) [-(pf')' + qf], \quad (10.4.7)$$

который формально самосопряжен в гильбертовом пространстве $L^2_\sigma(a, b)$, где мера σ задана посредством $d\sigma(x) = r(x) dx$, так что скалярное произведение имеет вид

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) r(x) dx. \quad (10.4.8)$$

Ясно, что при надлежащем выборе $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ самый общий оператор второго порядка можно записать в форме (10.4.7), так что суть теории Штурма—Лиувилля заключается в выборе скалярного произведения, относительно которого рассматриваемый оператор формально самосопряжен. Выбор гильбертова пространства, разумеется, дело физики, и вышеупомянутый выбор отражает важность самосопряженности во многих физических приложениях. Хотя форма (10.4.7) часто удобна для вычислений, для развития теории достаточно более простая форма (10.4.1), которая и будет использоваться в остальной части данной главы.

10.5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Хотя все величины в формулировке данной задачи вещественны и нет никаких упоминаний об аналитичности, а $p'(x)$ и $q(x)$ не обязательно дифференцируемы, теория аналитических функций играет важную роль в анализе свойств рассматриваемого оператора. Решение одноточечной граничной задачи для оператора

$T_0 - \lambda$ аналитически зависит от λ , как показывает следующая лемма.

Лемма. Для заданных значений $\varphi(a)$ и $\varphi'(a)$ и для любого вещественного или комплексного λ дифференциальное уравнение

$$T_0 \varphi = -(\rho \varphi')' + q \varphi = \lambda \varphi \quad (10.5.1)$$

имеет единственное решение $\varphi(x, \lambda)$ для $a \leq x \leq b$, которое для данного x является целой функцией λ . [Замечание. Это φ в общем случае не принадлежит $D(A)$.]

Доказательство. Обозначим φ' через ψ . Тогда дифференциальное уравнение эквивалентно следующей системе интегральных уравнений для φ и ψ :

$$\begin{aligned} \rho(x) \psi(x) &= \rho(a) \psi'(a) + \int_a^x [q(x') - \lambda] \psi(x') dx', \\ \varphi(x) &= \varphi(a) + \int_a^x \psi(x') dx'. \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

Эти уравнения решаются итерационным методом Пикара, согласно которому φ и ψ заменяются на φ_s и ψ_s ($s=0, 1, 2, \dots$) в подынтегральных выражениях и на φ_{s+1} и ψ_{s+1} в левых частях уравнений. Функции $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ принимают равными нулю; тогда $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ равны константам $\varphi(a)$ и $\psi(a)$, и затем доказывается, что $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)$ сходятся при $s \rightarrow \infty$ и что предельные функции удовлетворяют интегральным уравнениям. Именно, пусть K — любое компактное множество в плоскости λ , и пусть

$$M = \max \left\{ \sup \frac{|q(x') - \lambda|}{\rho(x)}, 1 \right\},$$

где супремум берется для всех x и x' из $[a, b]$ и для всех λ из K . Введем обозначения $\Delta_s \varphi = \varphi_{s+1} - \varphi_s$, $\Delta_s \psi = \psi_{s+1} - \psi_s$; тогда

$$\begin{aligned} |\Delta_{s+1} \psi(x)| &\leq M \int_a^x |\Delta_s \varphi(x')| dx', \\ |\Delta_{s+1} \varphi(x)| &\leq M \int_a^x |\Delta_s \psi(x')| dx'. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Если, кроме того, $m = \max \{ |\varphi(a)|, |\psi(a)| \}$, то при помощи индукции по s получим, что

$$|\Delta_s \psi(x)|, |\Delta_s \varphi(x)| \leq M^s (x-a)^s m/s! \quad (10.5.4)$$

для всех $x \in [a, b]$ и всех $\lambda \in K$. Следовательно, ряды

$$\varphi(a) + \sum_{s=1}^{\infty} \Delta_s \varphi(x), \quad \varphi'(a) + \sum_{s=1}^{\infty} \Delta_s \psi(x) \quad (10.5.5)$$

сходятся равномерно по x и λ , поскольку частичные суммы мажорируются частичными суммами степенных рядов для экспоненты в соответствии с (10.5.4). Таким образом, ряды (10.5.5) можно интегрировать почленно, а отсюда следует, что их пределы удовлетворяют интегральным уравнениям, что и требовалось доказать.

Для доказательства единственности используем (10.5.3), опустив индексы и приняв за $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ соответственно разности $\varphi - \bar{\varphi}$ и $\varphi' - \bar{\varphi}'$ для двух решений одноточечной граничной задачи, и покажем, что допущение $\Delta\varphi \neq 0$ ведет к противоречию. Аналитическая зависимость от λ появляется как простой побочный результат. Из (10.5.2) видно, что частичные суммы (10.5.5) являются полиномами от λ , и ряды сходятся равномерно по λ на любом компактном множестве K в плоскости λ . Из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости аналитических функций (см. книгу Кноппа [1945, § 19]) следует, что $\varphi(x, \lambda)$ для данного x является целой функцией от λ .

Теперь допустим, что заданные величины $\varphi(a)$ и $\varphi'(a)$ фиксированы (т. е. не зависят от λ), не равны одновременно нулю и удовлетворяют левому граничному условию

$$\alpha\varphi(a) + \beta\varphi'(a) = 0.$$

Тогда λ является собственным значением A тогда и только тогда, когда правое граничное условие

$$\gamma\varphi(b, \lambda) + \delta\varphi'(b, \lambda) = 0$$

также удовлетворяется. Левая часть этого уравнения является целой функцией λ и не обращается тождественно в нуль, так как A — симметрический оператор и потому не имеет невещественных собственных значений. Нули целой функции, не обращающейся тождественно в нуль, представляют собой изолированные точки, следовательно, собственные числа λ оператора A будут вещественными числами без предельных точек. Единственность $\varphi(x, \lambda)$ для любого λ показывает, что пространство собственных функций одномерно.

10.6. РЕЗОЛЬВЕНТА. ФУНКЦИЯ ГРИНА. ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Перейдем теперь к построению функции Грина. Можно поменять ролями концевые точки a и b ; поэтому существует другое решение $\chi(x) = \chi(x, \lambda)$ уравнения (10.5.1), имеющее заданные фиксированные значения $\chi(b)$ и $\chi'(b)$, которые удовлетворяют *правому* граничному условию

$$\gamma\chi(b) + \delta\chi'(b) = 0.$$

Из (10.5.1) следует, что вронскиан $\chi \partial\varphi/\partial x - \varphi \partial\chi/\partial x$ двух решений для данного λ есть константа, умноженная на $1/p(x)$. Следовательно, можно определить функцию $h(\lambda)$ для λ , которое не является собственным значением, с помощью уравнения

$$h(\lambda) p(x) \left[\chi(x, \lambda) \frac{\partial\varphi(x, \lambda)}{\partial x} - \varphi(x, \lambda) \frac{\partial\chi(x, \lambda)}{\partial x} \right] = 1. \quad (10.6.1)$$

Для λ , не равного собственному значению A , функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = G(x, y; \lambda) = h(\lambda) \begin{cases} \varphi(x, \lambda) \chi(y, \lambda), & x \leq y, \\ \chi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda), & x \geq y \end{cases} \quad (10.6.2)$$

$$(a \leq x, y \leq b).$$

Для любого фиксированного y функция $G(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям при $x=a$ и $x=b$; кроме того, оператор $T_0 - \lambda$, будучи применен к $G(x, y)$, дает нуль для всех $x \neq y$, но не для $x=y$, потому что λ не является собственным значением (фактически $\partial G/\partial x$ имеет разрыв при $x=y$). В самом деле, $h(\lambda)$ была выбрана так, что

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} + q(x) - \lambda \right] G(x, y) = \delta(x-y), \quad (10.6.3)$$

т. е. так, что $-p(x) (\partial/\partial x) G(x, y)$ имеет единичный скачок при $x=y$. Далее, если g — любое распределение в L^2 и если

$$f(x) = \int_a^b G(x, y; \lambda) g(y) dy, \quad (10.6.4)$$

то видно, что f удовлетворяет граничным условиям и принадлежит L^2 (она непрерывна) и что $T_0 f = \lambda f + g$, поэтому $T_0 f \in L^2$, а значит, f содержится в $D(A)$, и $Af - \lambda f = g$ или $f = R_\lambda g$, где R_λ — резольвента оператора A , т. е. эта резольвента является интегральным оператором в (10.6.4); это ограниченный оператор (фактически компактный — см. гл. 12), и он определен во всем L^2 для любого λ , которое не является собственным значением A .

Отсюда следует новое доказательство самосопряженности A (до сих пор использовалась лишь его симметрия), так как $+i$ и $-i$ принадлежат резольвентному множеству. Следует также, что непрерывный спектр пуст, поскольку любое вещественное λ , не равное собственному значению, также принадлежит резольвентному множеству. Следовательно, собственные функции образуют базис в L^2 , т. е. любое $f \in L^2$ может быть разложено по ним, и это разложение сходится в среднем к f . Итак, имеется бесконечно много собственных значений (так как каждое собственное пространство одномерно) и $|\lambda_j| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

10.7. БОЛЕЕ ОБЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим граничные условия

$$\alpha_i f(a) + \beta_i f'(a) + \gamma_i f(b) + \delta_i f'(b) = 0 \quad (i=1, 2), \quad (10.7.1)$$

где допускается, что матрица этой системы уравнений имеет ранг 2, так что уравнения независимы. Назовем их *сцепленными*

граничными условиями. Их можно разрешить относительно каких-либо двух неизвестных, которые будут выражены через два других; пусть эти уравнения разрешены, скажем, относительно $f'(a)$ и $f'(b)$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \varepsilon_1 f(a) + \zeta_1 f(b), \\ f'(b) &= \varepsilon_2 f(a) + \zeta_2 f(b); \end{aligned} \quad (10.7.2)$$

обсуждение других случаев, вполне аналогичных этому, предоставляем читателю. Для того чтобы результирующий оператор A был симметричен, поскольку оператор умножения на $q(x)$ уже симметричен, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b \bar{g} (pf')' dx = \int_a^b (p\bar{g}')' f dx$$

для всех f и g в $D(A)$, т. е. для всех f и g из L^2 , таких, что $(pf')'$ и $(p\bar{g}')'$ принадлежат L^2 и что указанные выше граничные условия удовлетворяются для f и g . Интегрирование по частям приводит к уравнению

$$[p(x)(\bar{g}(x)f'(x) - \bar{g}'(x)f(x))]_a^b = 0.$$

Подстановка f' при $x=a$ и $x=b$ из граничных условий (10.7.2) и $\bar{g}'$ при $x=a$ и $x=b$ из соответствующих комплексно сопряженных уравнений, в которых f заменена на $\bar{g}$, дает уравнение, содержащее восемь членов. Значения f и g как при $x=a$, так и при $x=b$ могут быть выбраны произвольно при условии, что f' и g' при $x=a$, $x=b$ затем определяются при помощи (10.7.2). Легко показать, что упомянутое восьмичленное уравнение будет удовлетворяться тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} \zeta_2 = \operatorname{Im} \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 p(b) + \bar{\zeta}_1 p(a) = 0. \quad (10.7.3)$$

Затем точно так же, как в предыдущей задаче, можно использовать методы § 7.5 для того, чтобы доказать самосопряженность оператора A , определенного следующим образом:

$$\begin{aligned} D(A) &= \{f \in L^2: T_0 f \in L^2, (10.7.2), (10.7.3) \text{ выполняются}\}, \\ Af &= T_0 f. \end{aligned}$$

Эти результаты иллюстрируют теорему фон Неймана о возможности самосопряженного расширения симметрического оператора. Пусть T — оператор, определенный так:

$$\begin{aligned} D(T) &= \{f \in L^2: T_0 f \in L^2, f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\}, \\ Tf &= T_0 f \quad \text{для } f \in D(T). \end{aligned} \quad (10.7.4)$$

Оператор T — такой симметричный оператор, что сопряженный ему оператор T^* вообще не имеет никаких граничных условий. В некотором смысле T — минимальный оператор в H (минимальный относительно области определения), полученный из T_0 , а T^* — максимальный. Для любого λ уравнение $T^*f = \lambda f$ имеет два независимых решения, поэтому индексы дефекта оператора T равны $(2, 2)$. Следовательно, согласно теореме фон Неймана (§ 8.6), существует двух-(комплексно)-параметрическое семейство, т. е. четырех-(вещественно)-параметрическое семейство самосопряженных операторов A между T и T^* ($T \subset A \subset T^*$). Рассмотренные выше граничные условия обеспечивают такое семейство: в уравнениях (10.7.2) имеются четыре комплексные постоянные, а уравнения (10.7.3) налагают четыре вещественных ограничения, так что остаются четыре свободных вещественных параметра.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Найдите резольвенту рассмотренного выше оператора A , т. е. найдите функцию Грина для уравнения $Af - \lambda f = g$.

10.8. ОПЕРАТОР ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ОДНОЙ ОСОБОЙ КОНЦЕВОЙ ТОЧКОЙ

До сих пор предполагалось, что область изменения x представляет собой ограниченный замкнутый интервал $[a, b]$ и что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Если $[a, b]$ заменить интервалом вида $[a, \infty)$ или $[a, b)$ (в последнем случае коэффициенты могут стать бесконечными при $x \rightarrow b$), то правая конечная точка ($x = b$) называется *особой*. Задача Штурма — Лиувилля может иметь одну или две особые конечные точки. Часто случается, что в особой конечной точке не требуется никаких граничных условий — требование принадлежности решения к L^2 заменяет граничное условие. Это так называемый случай предельной точки (см. ниже), который обычно (но не всегда) встречается в квантовой механике. Радиальные уравнения, которые получаются при разделении переменных в уравнениях Лапласа, Шредингера и Дирака, имеют особые конечные точки при $r = 0$ и $r = \infty$. Точка ∞ имеет тип предельной точки, следовательно, в ней имеется автоматическое или внутреннее граничное условие, тогда как конечная точка 0 иногда имеет тип предельной точки, а иногда тип предельной окружности, и в последнем случае дополнительное граничное условие должно быть наложено на основании физических соображений; см. ниже § 10.15 — 10.17.

В этом параграфе и в двух следующих мы рассмотрим случай одной особой конечной точки. Мы возьмем интервал $[0, \infty)$, но точно таким же образом можно рассматривать любой интервал вида $[a, b)$.

Допустим, что при $0 \leq x < \infty$ $p(x) \in C^1$, $q(x) \in C$ и $p(x) > 0$. Если $f \in L^2(0, \infty)$ и если T_0 — оператор, определенный уравнением

$$T_0 f = -(pf')' + qf, \quad (10.8.1)$$

то $T_0 f$ является распределением, поскольку f принадлежит $L^2(0, b)$ для любого конечного b , а значит, может быть применена аргументация предшествующих параграфов.

Весьма нелегко дать точный аналог минимального оператора T , определенного при помощи (10.7.4), поскольку соответствующее граничное условие при $+\infty$ все еще неизвестно. Поэтому мы выбираем область определения, которая *заведомо* достаточно мала, именно $C_0^\infty(0, \infty)$, даже если результирующий оператор не является замкнутым. Одинаково удовлетворительным был бы выбор $C_b^\infty(0, \infty)$. В любом случае функции в этой области тождественно обращаются в нуль в некоторой окрестности точки 0 и в некоторой окрестности точки ∞ . Оператор T определяется следующим образом:

$$D(T) = C_0^\infty, \quad Tf = T_0 f \quad \text{для } f \in C_0^\infty. \quad (10.8.2)$$

Дважды интегрируя по частям в (Tf, g) , получим (f, Tg) , установив тем самым, что T симметричен. Метод § 7.5 показывает, что сопряженным T оператором является оператор, определяемый без граничных условий:

$$D(T^*) = \{f \in L^2: T_0 f \in L^2\}, \quad T^* f = T_0 f. \quad (10.8.3)$$

10.9. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ В ОСОБОЙ КОНЦЕВОЙ ТОЧКЕ

Согласно теореме фон Неймана из § 8.6, существование и число самосопряженных расширений оператора T , заданного формулами (10.8.1), (10.8.2) предшествующего параграфа, определяются индексами дефекта (m, n) оператора T , которые являются коразмерностями областей значений операторов $T \pm i$, т. е. размерностями нуль-пространств операторов $T^* \mp i$ или числами линейно независимых решений уравнений $T^* f = \pm if$, где T^* определен в (10.8.3).

Дифференциальное уравнение $T_0 f = \lambda f$ является уравнением второго порядка; следовательно, оно имеет два независимых решения для любого λ , и, согласно определению (10.8.3) оператора T^* , решение f уравнения $T_0 f = \lambda f$ принадлежит области определения оператора T^* тогда и только тогда, когда оно принадлежит $L^2(0, \infty)$. Может случиться, что оба решения уравнения $T_0 f = \lambda f$ (а значит, и все его решения) принадлежат L^2 . Если это произойдет для одного не вещественного λ , то, согласно лемме § 8.6, это будет иметь место для всех λ в данной полуплоскости (верхней или нижней). Кроме того, если $T_0 f = \lambda f$, то $T_0 \bar{f} = \bar{\lambda} \bar{f}$, и $\bar{f} \in L^2$, если $f \in L^2$; следовательно, если решение f принадлежит L^2

для одной полуплоскости, то решение принадлежит L^2 также и для другой. Фактически для данной задачи все решения принадлежат L^2 для всех λ (см. книгу Коддингтона и Левинсона [1955]).

Таким образом мы приходим к выводу, что индексы дефекта оператора T суть $(0, 0)$, $(1, 1)$ или $(2, 2)$. Далее мы покажем, что всегда имеется по меньшей мере одно решение уравнения $Tf = \lambda f$, принадлежащее L^2 , и, значит, случай $(0, 0)$ исключается. (Когда существуют две особые концевые точки, случай $(0, 0)$ может иметь место, как в § 10.2, где было обнаружено, что оператор $-(d/dx)^2$ на $\mathbb{R}$ самосопряжен без каких-либо граничных условий.)

Пусть $f_i(x) = f_i(x; \lambda)$ ($i = 1, 2$) — решения уравнения $T_0 f = \lambda f$, т. е. уравнения

$$-(pf')' + qf = \lambda f \quad (10.9.1)$$

со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1, & p(0)f_1'(0) &= 0, \\ f_2(0) &= 0, & p(0)f_2'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (10.9.2)$$

Так же как для регулярной задачи Штурма — Лиувилля, вронскиан двух решений (для одного и того же значения λ) есть константа, умноженная на $1/p(x)$. В самом деле, мы находим, что

$$p(x)[f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)] \equiv 1. \quad (10.9.3)$$

Общее решение для данного λ с точностью до произвольного постоянного множителя дается формулой

$$f(x) = f_1(x) + mf_2(x), \quad (10.9.4)$$

где m — комплексное число. Мы покажем, что если $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, то

имеется по меньшей мере одно значение m , для которого $\int_0^\infty |f|^2 dx$

конечен. Умножив (10.9.1) на $\bar{f}(x)$ и проинтегрировав от 0 до b (в конечном счете положим $b \rightarrow \infty$), после интегрирования по частям мы найдем, что

$$-[\bar{f}pf']_{x=0}^{x=b} + \int_0^b (p|f'|^2 + q|f|^2) dx = \lambda \int_0^b |f|^2 dx. \quad (10.9.5)$$

Интеграл в левой части принимает вещественное значение. Возьмем мнимые части от всех членов уравнения. Используя начальные условия (10.9.2), прежде всего заметим, что

$$p(0)\operatorname{Im}[\bar{f}(0)f'(0)] = \operatorname{Im} m;$$

следовательно,

$$-p(b)\operatorname{Im}[\bar{f}(b)f'(b)] \stackrel{\text{def}}{=} F(m; b) = -\operatorname{Im} m + \operatorname{Im} \lambda \int_0^b |f|^2 dx. \quad (10.9.6)$$

Положим теперь для простоты $\text{Im } \lambda > 0$ (ясно, что другой случай аналогичен). Мы покажем, что для данного b $F(m; b) < 0$ внутри некоторого круга D_b в плоскости m и $F(m; b) > 0$ вне этого круга. Более того, когда b возрастает, эти круги стягиваются, т. е. если $b' > b$, то $D_{b'}$ содержится в D_b . Действительно,

$$F(m; b) = (ip/2)[(\bar{f}_1 + \bar{m}\bar{f}_2)(f'_1 + mf'_2) - (f_1 + mf_2)(\bar{f}'_1 + \bar{m}\bar{f}'_2)]_{x=b}, \quad (10.9.7)$$

что можно записать в виде

$$F(m; b) = A|m|^2 + B \text{Re } m + C \text{Im } m + D, \quad (10.9.8)$$

где A , B , C и D — вещественные коэффициенты и

$$A = -p(b) \text{Im} [\bar{f}_2(b)f'_2(b)] = \text{Im } \lambda \int_a^b |f_2|^2 dx. \quad (10.9.9)$$

Здесь было еще раз использовано (10.9.5) с подстановкой f_2 вместо f . Ясно, что геометрическим местом точек со свойством $F(m; b) = 0$ будет окружность в плоскости m , а более детальные вычисления с использованием (10.9.2) показывают, что радиус этой окружности равен $1/(2A)$. Ясно, что для больших m $F(m; b) > 0$ (в силу (10.9.9) $A > 0$), следовательно, $F < 0$ в круге D_b , ограниченном этой окружностью, и $F > 0$ вне его. Наконец, из (10.9.6) следует, что $F(m; b)$ — возрастающая функция b при фиксированном m , и, значит, круги стягиваются, когда b возрастает.

Если круги D_b при $b \rightarrow \infty$ стягиваются к точке m_∞ , говорят, что в данной задаче осуществляется *случай предельной точки* на правом конце ($x = \infty$). Тогда $F(m_\infty; b) \leq 0$ для всех b и (10.9.6) показывает, что решение $f(x) = f_1(x) + m_\infty f_2(x)$ квадратично интегрируемо на $(0, \infty)$; в самом деле,

$$\int_0^\infty |f|^2 dx \leq \text{Im } m_\infty / \text{Im } \lambda. \quad (10.9.10)$$

Поскольку радиус круга $1/(2A) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, из уравнения (10.9.9) следует, что $f_2(x)$ не является квадратично интегрируемой и поэтому нет других квадратично интегрируемых решений, кроме кратных $f(x)$. Как уже было указано выше, если принадлежность L^2 была установлена для одного λ , то она имеет место для всех λ . В действительности в случае предельной точки условие квадратичной интегрируемости заменяет однородное граничное условие в концевой точке.

Если круги D_b стягиваются к кругу D_∞ ненулевого радиуса, то говорят, что в данной задаче осуществляется *случай предельной окружности* на правом конце. Тогда, взяв любые два значе-

ния m в D_∞ , легко увидеть, что любая линейная комбинация f_1 и f_2 квадратично интегрируема. В этом случае квадратичная интегрируемость не эквивалентна граничному условию. Поэтому для задачи Штурма—Лиувилля в случае предельной окружности на одном конце (или на обоих), вообще говоря, требуется некоторое дополнительное условие, наложенное на решение вместо граничного условия, для того чтобы сделать оператор самосопряженным. Примеры будут даны ниже в § 10.15—10.17.

Коддингтон и Левинсон дали следующий критерий установления того, имеет ли оператор Штурма—Лиувилля T_0 при $x = \infty$ особую точку типа предельной точки. Если существует функция $M(x) > 0$ из класса C^1 , такая, что

$$\int_0^\infty (pM)^{-1/2} dx = \infty \quad (10.9.11)$$

и

$$p^{1/2} M' M^{-3/2} \text{ ограничено, } 0 \leq x < \infty, \quad (10.9.12)$$

и если $q(x) \geq -M(x)$, то при $x = \infty$ оператор T_0 имеет особую точку типа предельной точки. Полагая $M = \text{const}$ и $p = \text{const}$ соответственно, можно получить два частных случая.

а) Если $q(x)$ ограничена снизу (возможно, отрицательной) постоянной и $\int_0^\infty p^{-1/2} dx$ бесконечен, то оператор T_0 имеет особую точку типа предельной точки.

б) Если $q(x) \geq -kx^2$, где $k = \text{const}$, то оператор T_0 , определенный уравнением $T_0 f = -f'' + qf$, имеет особую точку типа предельной точки.

10.10. РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА. МЕТОД ФРОБЕНИУСА

Дальнейшая классификация концевой точки, скажем, при $x = a$ возможна в том случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ аналитичны вблизи a . Запишем уравнение $T_\lambda f = \lambda f$ в виде

$$f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0, \quad (10.10.1)$$

где $P(x) = p'(x)/p(x)$, $Q(x) = -[q(x) - \lambda]/p(x)$. Концевая точка a является *регулярной особой точкой* уравнения (10.10.1), если $P(x)$ и $Q(x)$ аналитичны в некоторой окрестности точки a в комплексной плоскости x , за исключением того, что при $x = a$ P может иметь простой полюс, а Q — полюс не выше второго порядка.

Заметим, что $P(x)$ и $Q(x)$ могут иметь особенность тогда, когда $p(x)$ и $q(x)$ не имеют особенности; достаточно, например, чтобы $p(a) = 0$.

Мы увидим, что регулярная особая точка может иметь как тип предельной точки, так и тип предельной окружности. Отметим также, что для данных $p(x)$ и $q(x)$ точка $x=a$ может быть регулярной особой точкой уравнения (10.10.1) для некоторого λ , а для других не быть таковой. Например, при $p=q=x^3$ нуль является регулярной особой точкой лишь для $\lambda=0$. Однако то, какой случай (предельной точки или предельной окружности) имеет место, согласно предыдущему параграфу, не зависит от λ ; поэтому, чтобы выяснить, какой случай осуществляется, можно использовать любое значение λ , при котором a является регулярной особой точкой.

Теперь мы опишем так называемый *метод Фробениуса* для нахождения решения вблизи регулярной особой точки.

Разложения функций $P(x)$ и $Q(x)$ в ряд Лорана в окрестности $x=a$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= P_0(x-a)^{-1} + P_1 + P_2(x-a) + \dots, \\ Q(x) &= Q_0(x-a)^{-2} + Q_1(x-a)^{-1} + Q_2 + \dots, \end{aligned} \right\} 0 < |x-a| < R \quad (10.10.2)$$

Будем искать решение уравнения (10.10.1) в виде степенного ряда

$$f(x) = (x-a)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (a_0 \neq 0). \quad (10.10.3)$$

Подставим этот ряд в (10.10.1) и приравняем нулю полученные коэффициенты при различных степенях $x-a$. Это дает *определяющее уравнение для α*

$$f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^2 - \alpha + P_0\alpha + Q_0 = 0 \quad (10.10.4)$$

и последовательность рекуррентных соотношений

$$F(\alpha+l) a_l + \sum_{j=1}^l [(\alpha+l-j) P_j + Q_j] a_{l-j} = 0 \quad (l=1, 2, \dots) \quad (10.10.5)$$

для коэффициентов $a_1, a_2, \dots$, выражаемых через a_0 , который является произвольным. Пусть α_1 и α_2 — корни определяющего уравнения (10.10.4), упорядоченные так, что $\operatorname{Re} \alpha_1 \geq \operatorname{Re} \alpha_2$.

Теорема. Для $\alpha = \alpha_1$ ряд (10.10.3) с коэффициентами, определяемыми из (10.10.5), сходится для $|x-a| < R$, и построенная так функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.10.1).

Доказательство основано на стандартной теории аналитических функций и приводится в книгах по дифференциальным уравнениям, например в книге Йоргенса и Реллиха [1976].

Для $\alpha = \alpha_2$ этот же метод дает второе решение, если только число $\alpha_1 - \alpha_2$ не является целым, но в любом случае второе решение имеет вид

$$g(x) = f(x) \int_a^x \frac{dw}{p(w)f(w)^2}, \quad (10.10.6)$$

что легко показать прямой подстановкой в уравнение $-(pg')' + qg = \lambda g$. Если в (10.10.6) подставить степенные ряды для f и p , то $g(x)$ примет вид

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^{\alpha_1 \varphi_1}(x), & \text{если } \alpha_1 - \alpha_2 \text{ не целое,} \\ (x-a)^{\alpha_2 \varphi_2}(x) + \text{const} \cdot f(x) \ln(x-a), & \text{если } \alpha_1 - \alpha_2 \text{ целое,} \end{cases} \quad (10.10.7)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — аналитические функции для $|x-a| < R$ и не обращаются в нуль при $x=a$.

Если вспомнить, что $\text{Re } \alpha_1 \geq \text{Re } \alpha_2$, то из (10.10.3) и (10.10.7) можно увидеть, что f и g принадлежат $L^2(a, a+c)$ при $c < R$, если $\text{Re } \alpha_2 > -1/2$; следовательно, это является критерием для случая предельной окрестности.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Примените метод Фробениуса к уравнению Бесселя для $x=0$ и к уравнению Лежандра для $x=\pm 1$.

2. Что дает данный метод в том частном случае, когда a является регулярной точкой дифференциального уравнения (10.10.1)?

10.11. САМОСОПРЯЖЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ОПЕРАТОРА T В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКИ

В этом параграфе будет показано, что если концевая точка ∞ имеет тип предельной точки, то самосопряженные варианты оператора $T_0 = (d/dx) p (d/dx) + q$ могут быть получены наложением граничного условия только в точке $x=0$. Для этого решающим является следующее свойство случая предельной точки.

Оказывается, что функция $f_2(x)$ в этом случае не является квадратично интегрируемой. Можно снова повторить рассуждения § 10.9 с f_1 и f_2 , переопределенными так, чтобы вместо (10.9.2) удовлетворялись граничные условия

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \cos \alpha, & p(0) f_1'(0) &= \sin \alpha, \\ f_2(0) &= -\sin \alpha, & p(0) f_2'(0) &= \cos \alpha, \end{aligned} \quad (10.11.1)$$

где α — вещественный параметр. Весь вывод, начиная с (10.9.3), остается неизменным, и мы заключаем, что новая функция $f_2(x)$ также не является квадратично интегрируемой для $\text{Im } \lambda \neq 0$, т. е.

никакое решение, удовлетворяющее вещественному граничному условию

$$f(0) \cos \alpha + p(0) f'(0) \sin \alpha = 0, \quad (10.11.2)$$

не является квадратично интегрируемым на $(0, \infty)$ для $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Определим теперь такое расширение A_α оператора T в случае предельной точки, при котором от f не требуется тождественного обращения в нуль вблизи $x=0$, а лишь нужно удовлетворить условию (10.11.2). Мы покажем, что A_α существенно самосопряжен:

$$D(A_\alpha) = \left\{ f \in C^\infty: \begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ для всех } x > \text{некоторого } b, \\ f(x) \text{ удовлетворяет (10.11.2)} \end{array} \right\}.$$

Методом § 7.5 легко показать, что

$$D(A_\alpha^*) = \{f \in L^2(0, \infty): T_0 f \in L^2, (10.11.2) \text{ выполняется}\}.$$

Согласно установленному выше свойству случая предельной точки, уравнение $A_\alpha^* f = \lambda f$ не имеет отличных от нуля решений f для $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, следовательно, индексы дефекта A_α равны $(0, 0)$. Поэтому A_α существенно самосопряжен, а A_α^* является его самосопряженным замыканием. Таким образом, мы имеем однопараметрическое семейство $\{A_\alpha^*\}$ самосопряженных расширений оператора T , таких, что $T \subset A_\alpha^* \subset T^*$.

Резольвента $R_\lambda = (A_\alpha - \lambda)^{-1}$ оператора A_α , которая требуется в следующем параграфе для разложения по собственным функциям, получается при помощи функции Грина для $A_\alpha - \lambda$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Функция Грина содержит квадратично интегрируемое решение уравнения $T_0 f = \lambda f$, которое мы обозначим через $f_3(x)$ или $f_3(x, \lambda)$. Оно определяется формулой

$$f_3(x, \lambda) = f_1(x, \lambda) + m_\infty(\lambda) f_2(x, \lambda), \quad (10.11.3)$$

где f_1 и f_2 — решения, удовлетворяющие граничным условиям (10.11.1) при $x=0$. Из (10.9.3) следует, что

$$p(x) [f_2(x) f_3'(x) - f_3(x) f_2'(x)] \equiv -1, \quad (10.11.4)$$

откуда ясно, что функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = G(x, y; \lambda) = \begin{cases} f_2(x) f_3(y), & x \leq y, \\ f_3(x) f_2(y), & x \geq y. \end{cases} \quad (10.11.5)$$

При фиксированном y функция $G(x, y)$ принадлежит L^2 , удовлетворяет граничному условию (10.11.2) при $x=0$ и уравнению

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} + q(x) - \lambda \right] G(x, y) = \delta(x-y). \quad (10.11.6)$$

Поэтому для любой непрерывной функции $g(x)$ в $L^2(0, \infty)$ и для $\text{Im } \lambda \neq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned}(R_\lambda g)(x) &= ((A_\alpha - \lambda)^{-1} g)(x) = \int_0^\infty G(x, y) g(y) dy = \\ &= f_3(x) \int_0^x f_2(y) g(y) dy + f_2(x) \int_x^\infty f_3(y) g(y) dy. \quad (10.11.7)\end{aligned}$$

Для вещественного λ , не являющегося собственным значением, интегральный оператор в (10.11.7) существует, но может быть неограниченным, потому что интервал интегрирования теперь $(0, \infty)$. На самом деле он является в точности неограниченным, когда λ принадлежит непрерывному спектру A . Однако каждый раз, когда уравнение $Af - \lambda f = g$ имеет решение, это решение дается формулой (10.11.7).

10.12. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Разложение данной функции или, точнее, данного элемента $g(x)$ из $L^2(0, \infty)$ по собственным функциям оператора A_α содержит суммирование по собственным функциям точечного (дискретного) спектра A_α и интегрирование по собственным функциям непрерывного спектра (эти функции, конечно, не принадлежат L^2). Эти две части объединяются путем записи разложения в виде интеграла Стильбеса.

Если $\lambda \in P\sigma(A_\alpha)$, то функция $f_2(x, \lambda)$, удовлетворяющая условию (10.11.2), которое было использовано в определении оператора A_α , является собственной функцией (не обязательно нормированной) и, следовательно, квадратично интегрируемой на $(0, \infty)$. (Было обнаружено, что этого не может быть для невещественного λ , но, разумеется, любое λ из данного спектра вещественно.) Если $\lambda \in C\sigma(A_\alpha)$, то $f_2(x, \lambda)$ не является квадратично интегрируемой, но может быть использована в построении приближенных собственных функций в виде волнового пакета (мы не будем пользоваться таким построением). Итак, мы ожидаем разложение вида

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, t) d\gamma(t), \quad (10.12.1)$$

где $\gamma(t)$ — некоторая функция ограниченной вариации, которая имеет скачки при собственных значениях A_α , меняется непрерывно на непрерывном спектре и является постоянной в любом интервале, не лежащем в спектре. Разложение такого типа получается из спектрального семейства $\{E_t\}$ оператора A_α .

Так как E_t получается интегрированием R_λ (формула (10.11.7)) по контуру $C(t)$ в плоскости λ (см. § 9.6), нам нужно более детально знать зависимость f_2 и f_3 от λ . Согласно § 10.5, $f_1'(x, \lambda)$

и $f_2(x, \lambda)$ — целые функции λ для каждого x , тогда как $f_3(x, \lambda)$ дана формулой (10.11.3). Пусть $m(b, \lambda) = -f_1(b, \lambda)/f_2(b, \lambda)$. В силу (10.9.7) $m(b, \lambda)$ лежит на окружности $F(m; b) = 0$ в плоскости m . Так как при $b \rightarrow \infty$ эта окружность стягивается к m_∞ , мы имеем

$$m_\infty(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} [-f_1(b, \lambda)/f_2(b, \lambda)]. \quad (10.12.2)$$

Отсюда можно показать (см. книгу Коддингтона и Левинсона [1955]), что $m_\infty(\lambda)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и что $\text{Im } m_\infty(\lambda)$ имеет тот же знак, что и $\text{Im } \lambda$.

Из § 9.6 и уравнения (10.11.7) следует, что проектор E_t имеет вид

$$(E_t g)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^t \int_0^\infty [G(x, y; s + i\varepsilon) - G(x, y; s - i\varepsilon)] g(y) dy. \quad (10.12.3)$$

Чтобы упростить дальнейший вывод, допустим, что $g(y)$ — непрерывная функция, равная нулю для всех y , больших некоторого y_0 . Позднее мы обсудим окончательные формулы для случая, когда g — произвольный элемент $L^2(0, \infty)$. Подставив $f_1 + m_\infty f_2$ вместо f_3 в выражение для G , мы получим вклад от f_1 , равный нулю, поскольку f_1 и f_2 непрерывны по λ , и поэтому в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ вклады от $\lambda = s + i\varepsilon$ и $\lambda = s - i\varepsilon$ взаимно уничтожаются. То, что остается, можно записать так:

$$(E_t g)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^t \left[f_2(x, \lambda) \int_0^\infty f_2(y, \lambda) g(y) dy m_\infty(\lambda) \right]_{\lambda=s-i\varepsilon}^{\lambda=s+i\varepsilon} ds.$$

Функция $m_\infty(s \pm i\varepsilon)$ в общем случае не имеет предела при $\varepsilon \rightarrow 0$, но ее интеграл по s имеет предел (см. книгу Коддингтона и Левинсона), и функция

$$\rho(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^t [m_\infty(s + i\varepsilon) - m_\infty(s - i\varepsilon)] ds \quad (10.12.4)$$

(определенная с точностью до произвольной аддитивной постоянной) — вещественная и неубывающая, поскольку $m_\infty(\bar{\lambda}) = \overline{m_\infty(\lambda)}$, а $\text{Im } m_\infty(\lambda)$ имеет тот же знак, что и $\text{Im } \lambda$. Следовательно,

$$(E_t g)(x) = \int_{-\infty}^t f_2(x, s) h(s) d\rho(s), \quad (10.12.5)$$

где

$$h(s) = \int_0^\infty f_2(y, s) g(y) dy. \quad (10.12.6)$$

Наконец, в пределе при $t \rightarrow +\infty$ (10.12.5) переходит в формулу

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, s) h(s) d\rho(s). \quad (10.12.7)$$

Это и есть разложение по собственным функциям функции $g(x)$, а (10.12.6) дает формулу для коэффициента разложения $h(s)$. Функция $\rho(s)$ называется *спектральной функцией* оператора A_α , а (10.12.4) носит название *формулы Титчмарша*.

Формула (10.12.5) показывает, что поскольку E_t имеет скачки при собственных значениях A_α , непрерывна на непрерывном спектре и постоянна в любом t -интервале вне спектра, этими же свойствами обладает и $\rho(t)$.

До сих пор предполагалось, что $g(x)$ — непрерывная функция с ограниченным носителем. Рассмотрим более общий случай: пусть $g(x)$ — произвольный элемент $L^2(0, \infty)$, а $h(s)$ — элемент пространства L^2_ρ типа рассмотренного в § 5.9. Тогда формулы (10.12.6) и (10.12.7) можно интерпретировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } T \rightarrow \infty \quad \int_0^T f_2(y, s) g(y) dy &\rightarrow h(s) \in L^2_\rho, \\ \text{при } T \rightarrow \infty \quad \int_{-T}^T f_2(x, s) h(s) d\rho(s) &\rightarrow g(x) \in L^2(0, \infty). \end{aligned} \quad (10.12.8)$$

В первом из этих соотношений интеграл является вполне определенной функцией s для каждого T (фактически аналитической), поскольку f_2 и g принадлежат $L^2(0, T)$, и сходится к $h(s)$ по норме L^2_ρ . Интеграл во втором соотношении имеет аналогичный смысл: если $\rho_T(s)$ совпадает с $\rho(s)$ в $(-T, T)$ и постоянна на остальной части оси, то f_2 и h принадлежат $L^2_{\rho_T}$, а интеграл сходится к $g(x)$ по норме $L^2(0, \infty)$.

Отображение $g \rightarrow h$ подобно преобразованию Фурье; по крайней мере формально, мы имеем равенство Парсеваля

$$\begin{aligned} (h_1, h_2)_{L^2_\rho} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h_1(s)} h_2(s) d\rho(s) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h_1(s)} \int_0^{\infty} f_2(y, s) g_2(y) dy d\rho(s) = \\ &= \int_0^{\infty} g_2(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y, s) \overline{h_1(s)} d\rho(s) dy = \\ &= \int_0^{\infty} g_2(y) \overline{g_1(y)} dy = (g_1, g_2)_{L^2(0, \infty)}. \end{aligned}$$

До некоторой степени эвристически мы приходим к следующему заключению.

Теорема. Для любого элемента $g(x)$ в $L^2(0, \infty)$ существует элемент $h(s)$ в L^2_0 , такой, что справедливы соотношения (10.12.8); обратно, для любого $h(s)$ в L^2_0 существует элемент $g(x)$ в $L^2(0, \infty)$, такой, что соотношения (10.12.8) справедливы. Отображение $g \rightarrow h$ является изометрическим изоморфизмом (т. е. унитарным отображением) $L^2(0, \infty)$ на L^2_0 .

Подтверждение этих заключений и другие детали см. в книгах Коддингтона и Левинсона [1955], Йоргенса и Реллиха [1976].

В квантовомеханических формулировках $g(x)$ и $h(s)$ можно рассматривать как волновые функции, которые описывают данное состояние физической системы в двух различных представлениях. В первом представлении диагональна наблюдаемая x , а во втором — наблюдаемая A .

Получение разложения по собственным функциям в случае двух особых концевых точек будет описано в § 10.14.

10.13. СЛУЧАЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим оператор T_0 из § 10.8 для интервала $[0, \infty)$ на такой области, что f и $T_0 f$ принадлежат L^2 , причем граничное условие при $x=0$ имеет обычный вид (10.11.2), а именно

$$f(0) \cos \alpha + p(0) f'(0) \sin \alpha = 0 \quad (\alpha \text{ вещественное}). \quad (10.13.1)$$

Допустим, что T_0 имеет на ∞ особую точку типа предельной окружности, и зададимся вопросом: какие возможные граничные или концевые условия при $x=\infty$ приводят к самосопряженности этого оператора? Ясно, что нельзя просто записать

$$f(\infty) \cos \beta + p(\infty) f'(\infty) \sin \beta = 0,$$

поскольку предельные значения f , p и f' при $x=\infty$ вообще лишены смысла. Вместо $p(\infty)$ и $p(\infty)f'(\infty)$ нам нужны два (в общем случае комплексных) числа c_1 и c_2 , которые характеризовали бы асимптотическое поведение f . Оказывается, что в случае предельной окружности все f , такие, что f и $T_0 f$ принадлежат L^2 , ведут себя на бесконечности примерно подобным образом и их действительно можно различать при помощи двух таких чисел.

Пусть λ_0 — любое заданное вещественное число, и пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — любые линейно независимые вещественные решения уравнения $T_0 u = \lambda u$. Для любого $g \in L^2$ рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{1}{W} \int_x^\infty [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] g(y) dy \quad (10.13.2)$$

(это выражение имеет смысл, поскольку u_1 , u_2 и g принадлежат L^2), где

$$W = p(x) [u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)] = \text{const.} \quad (10.13.3)$$

Непосредственная подстановка h в уравнение дает

$$(T_0 - \lambda_0) h = g.$$

Поэтому если f — любая функция, для которой f и $T_0 f$ принадлежат L^2 , и если $g = (T_0 - \lambda_0) f$, то $f - h$ удовлетворяет однородному уравнению и мы можем записать

$$f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \frac{1}{W} \int_x^\infty [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] g(y) dy, \quad (10.13.4)$$

где

$$g = (T_0 - \lambda_0) f. \quad (10.13.5)$$

Обратно, если g — любой элемент из L^2 , а c_1 и c_2 — любые, вообще говоря комплексные, постоянные, то функция f , заданная формулой (10.13.4), обладает тем свойством, что f и $T_0 f$ принадлежат L^2 . Постоянные c_1 и c_2 называются *предельными числами* функции $f(x)$ относительно данных решений u_1 и u_2 . Выражение (10.13.4) можно также записать в виде

$$f(x) = u_1(x) [c_1 + \varphi_1(x)] + u_2(x) [c_2 + \varphi_2(x)],$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$. Уточнения c_1 и c_2 вызывают того же сорта ограничения на f , что и уточнения $f(a)$ и $f'(a)$ при конечном a : для заданных λ_0 , u_1 , u_2 и для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ существует в точности одно решение уравнения $T_0 f = \lambda f$, имеющее заданные значения c_1 и c_2 . Более того, при фиксированных c_1 и c_2 это решение является целой функцией λ .

Главный результат (доказательство см. в книге Йоргенса и Реллиха [1976]) состоит в следующем:

Теорема. (1) Пусть λ_0 , $u_1(x)$ и $u_2(x)$ заданы, как указано выше. Если A — любое самосопряженное расширение минимального оператора T из (10.8.2) в случае особой точки типа предельной окружности на бесконечности и граничного условия типа (10.13.1) при $x=0$, то существует вещественное число β , такое, что предельные числа c_1 и c_2 любого элемента f в $D(A)$ удовлетворяют условию

$$c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta = 0. \quad (10.13.6)$$

Обратно, при любых вещественных α и β оператор $A_{\alpha\beta}$, определяемый так:

$$D(A_{\alpha\beta}) = \{f \in L^2: T_0 f \in L^2, (10.13.1) \text{ и } (10.13.6) \text{ выполняются}\}, \quad (10.13.7)$$

$$A_{\alpha\beta} f = T_0 f,$$

является самосопряженным расширением оператора T .

(2) Если λ_0 , u_1 и u_2 заменить любыми $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$, причем $\tilde{\lambda}_0$ также вещественно, а $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ — линейно независимые вещественные решения уравнения $T_0 u = \tilde{\lambda}_0 u$, то значение β для данного оператора, вообще говоря, получится другим, но семейство самосопряженных расширений оператора T останется тем же самым.

В силу п. (2) теоремы целесообразно для простоты брать в качестве u_1 и u_2 решения уравнения $T_0 u = 0$.

10.14. СЛУЧАЙ ДВУХ ОСОБЫХ КОНЦЕВЫХ ТОЧЕК

Допустим, что рассматриваемый оператор имеет особенности на обоих концах интервала (a, b) . (В частности, мы можем иметь или $a = -\infty$, или $b = +\infty$, или и то, и другое вместе.) Для того чтобы классифицировать какой-то конец, скажем $x = a$, мы вводим промежуточную точку c ($a < c < b$). Если все решения уравнения $T_0 f = \lambda f$ для каждого λ квадратично интегрируемы на (a, c) , т. е. принадлежат $L^2(a, c)$, то левая концевая точка $x = a$ имеет тип предельной окружности. В противном случае существует только одно решение (с точностью до постоянного множителя) в $L^2(a, c)$ для каждого не вещественного λ и a имеет тип предельной точки. Правая концевая точка $x = b$ классифицируется аналогично.

Мы покажем, что если обе концевые точки имеют тип предельной точки, то в граничных условиях вообще нет необходимости и оператор A , для которого

$$D(A) = \{f \in L^2: T_0 f \in L^2\}, \quad Af = T_0 f, \quad (10.14.1)$$

самосопряжен. Если одна концевая точка (или обе) имеет (имеют) тип предельной окружности, то в ней (в них) необходимо ставить граничное условие.

Вообще говоря, спектр может состоять из дискретной и непрерывной частей, но Коддингтон и Левинсон [1955], а также Йоргенс и Реллих [1976] показали, что полностью дискретный спектр получается в том случае, когда для оператора T_0 реализуется тип предельной окружности на обоих концах и на каждом конце ставится граничное условие типа (10.13.6). Этот результат незначительно перекрывает регулярную задачу Штурма —

Лиувилля в том смысле, что если $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ непрерывны в конечном замкнутом интервале $[a, b]$, то для той же задачи в открытом интервале (a, b) (т. е. задачи, в которой мы игнорируем значения $x=a$ и $x=b$) на каждом конце имеются особые точки типа предельной окружности, поскольку все решения уравнения $T_0 f = \lambda f$ квадратично интегрируемы на (a, b) .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что из уравнения Штурма—Лиувилля

$$-(p(x)f'(x))' + q(x)f(x) = \lambda f(x),$$

выполнив преобразование $x \rightarrow y = y(x)$ и положив $f(x) = \varphi(y)g(y)$ с $\varphi(y)$, выбранной надлежащим образом, можно получить уравнение Штурма—Лиувилля

$$-(\tilde{p}(y)g'(y))' + \tilde{q}(y)g(y) = \lambda g(y).$$

Найдите $\varphi(y)$, $\tilde{p}(y)$, $\tilde{q}(y)$. (Заметим, что L^2 -норма не сохраняется: в общем случае $\int |f|^2 dx \neq \int |g|^2 dy$.) Покажите, что если $y(x) = 1/x$, то регулярная точка $x=0$ первого уравнения преобразуется в особую концевую точку $y = \infty$ второго уравнения типа предельной окружности.

Когда обе концевые точки a и b имеют тип предельной точки, разложение по собственным функциям аналогично проведенному в § 10.12, за исключением того, что спектр имеет кратность два, т. е. могут быть две линейно независимые собственные функции для данного собственного значения, а также две линейно независимые собственные функции (не в L^2) в данной точке непрерывного спектра. Поэтому в разложение по собственным функциям входят два коэффициента $h_1(s)$ и $h_2(s)$. Вместо спектральной функции $\rho(s)$ мы имеем теперь *спектральную матрицу* размера 2×2 с матричными элементами $\rho_{jk}(s)$ ($j, k = 1, 2$). Соответственно таким характеристикам $\rho(s)$, как вещественность и неубывание, спектральная матрица является эрмитовой, фактически вещественной и симметричной, и неубывающей в том смысле, что для $s' > s$ матрица $\rho_{jk}(s') - \rho_{jk}(s)$ положительно полуопределенна.

Рассмотрим вопрос более детально. Пусть $f_1(x, \lambda)$ и $f_2(x, \lambda)$ — решения уравнения $T_0 f = \lambda f$, удовлетворяющие вещественным граничным условиям в некоторой точке $c \in (a, b)$, причем

$$p(x)[f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)] = 1.$$

Тогда для любого λ с $\text{Im } \lambda \neq 0$ потребуем, чтобы f_2 и f_3 были решениями уравнения $T_0 f = \lambda f$, принадлежащими $L^2(a, c)$ и $L^2(c, b)$ соответственно, и представим их в виде

$$\begin{aligned} f_3(x, \lambda) &= f_1(x, \lambda) + m(\lambda)f_2(x, \lambda), \\ f_4(x, \lambda) &= f_1(x, \lambda) + n(\lambda)f_2(x, \lambda), \end{aligned} \quad (10.14.2)$$

где $m(\lambda)$ и $n(\lambda)$ мы определяем очень похоже на то, как определяли $m_\infty(\lambda)$ в § 10.12, а именно полагаем

$$m(\lambda) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-f_1(x, \lambda)}{f_2(x, \lambda)}, \quad n(\lambda) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{-f_1(x, \lambda)}{f_2(x, \lambda)}. \quad (10.14.3)$$

Из аналога уравнения (10.9.6), считая в нем b сначала положительным, а затем отрицательным, получаем, что $\operatorname{Im} m(\lambda)$ и $\operatorname{Im} n(\lambda)$ не равны нулю при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ и противоположны по знаку. Поэтому, когда обе концевые точки имеют тип предельной точки, не существует решения уравнения $T_0 f = \lambda f$, принадлежащего L^2 для невещественного λ , и мы можем теперь показать, что оператор A , заданный в (10.14.1), является самосопряженным. Прежде всего если допустить, что A^* не равен A , то A^* был бы по крайней мере ограничением A , так как нетрудно видеть, что оператор, сопряженный минимальному оператору T , заданному посредством

$$D(T) = C_0^\infty, \quad T f = T_0 f,$$

равен A (см. 10.14.1). Поэтому A^* равен T^{**} , т. е. равен замыканию T , которое содержится в A . Но A не имеет невещественных собственных значений, следовательно, индексы дефекта A^* равны $(0, 0)$, откуда с учетом замкнутости A и A^* следует, что $A^* = A$.

Вместо формул (10.12.6) и (10.12.7) для разложения функции $g(y) \in L^2(a, b)$ по собственным функциям мы имеем (см. книгу Коддингтона и Левинсона [1955])

$$h_j(s) = \int_a^b f_j(y, s) g(y) dy \quad (j=1, 2), \quad (10.14.4)$$

$$g(x) = \sum_{j,k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x, s) h_k(s) d\rho_{jk}(s). \quad (10.14.5)$$

Наконец, вместо формулы (10.12.4) для ρ имеем

$$\rho_{jk}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon}^t [M_{jk}(s + i\varepsilon) - M_{jk}(s - i\varepsilon)] ds, \quad (10.14.6)$$

где

$$M_{jk} = \frac{1}{2[m(\lambda) - n(\lambda)]} \begin{pmatrix} 2 & m(\lambda) + n(\lambda) \\ m(\lambda) + n(\lambda) & 2m(\lambda)n(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (10.14.7)$$

Примеры будут рассмотрены в следующих двух параграфах. Часто суммирование в (10.14.5) обходится введением новой переменной вместо $s = \lambda$ или эквивалентным действием. Например, для оператора $-(d/dx)^2$ имеются две собственные функции непрерывного спектра для каждого $\lambda > 0$, а именно $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$, но их можно записать в виде e^{isx} , где теперь новая переменная $s = \sqrt{\lambda}$ меняется от $-\infty$ до ∞ .

10.15. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

При разделении переменных в двумерном приведенном волновом уравнении $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ в полярных координатах r, θ путем представления решения в виде $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ мы получаем для множителя $R(r)$ уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (10.15.1)$$

где l^2 — константа разделения; k^2 играет роль параметра собственного значения λ . В задаче о приведенном волновом уравнении появляются только целые значения l , но мы потребуем лишь, чтобы l было вещественным. Во всяком случае, поскольку в уравнении фигурирует только l^2 , мы можем считать, что $l \geq 0$. Если положить $r = x$, $k^2 = \lambda$ и $\sqrt{r} R(r) = f(x)$, то уравнение (10.15.1) можно записать как

$$-f'' + \frac{l^2 - 1/4}{x^2} f = \lambda f. \quad (10.15.2)$$

Это уравнение имеет вид уравнения Штурма — Лиувилля в интервале $(0, \infty)$, причем $p = 1$, $q = (l^2 - 1/4)/x^2$. Согласно критерию § 10.9, правая конечная точка $x = \infty$ имеет тип предельной точки для всех значений l . Левая конечная точка $x = 0$ является регулярной особой точкой. Определяющее уравнение выглядит так: $\alpha^2 - \alpha + (-l^2 + 1/4) = 0$, откуда $\alpha = 1/2 \pm l$, и значит, $x = 0$ имеет тип предельной окружности при $0 \leq l < 1$ и тип предельной точки при $l \geq 1$.

Сначала допустим, что $l \geq 1$, т.е. что нет необходимости в граничных условиях, и оператор A_l , определенный в $L^2(0, \infty)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} D(A_l) &= \{f \in L^2: T_0 f \in L^2\}, \\ A_l f &= T_0 f = -f'' + \frac{l^2 - 1/4}{x^2} f, \end{aligned} \quad (10.15.3)$$

самосопряжен. Несколько изменив рассуждения предыдущего параграфа, фундаментальные решения f_1 и f_2 уравнения $T_0 f = \lambda f$ можно взять в виде

$$\begin{aligned} f_1(r, \lambda) &= \sqrt{\frac{\pi r}{2}} J_l(kr) \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \left(kr - l \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \\ f_2(r, \lambda) &= \sqrt{\frac{\pi r}{4}} Y_l(kr) \sim \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \left(kr - l \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (10.15.4)$$

где J_l и Y_l — функции Бесселя и Неймана и

$$k = \sqrt{\lambda}, \quad \operatorname{Re} k > 0. \quad (10.15.5)$$

Символ $\sim$ указывает на то, что данное асимптотическое представление имеет силу при $r \rightarrow \infty$. В отличие от соответствующих функций в предыдущем параграфе функции f_1 и f_2 не являются целыми функциями λ при фиксированном r , но аналитичны в плоскости λ с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Из асимптотических представлений или из разложений около $r=0$ мы находим, что вронскиан имеет значение

$$f_1 f_2' - f_2 f_1' = 1.$$

Как и в § 10.14, в случае $\text{Im } \lambda \neq 0$ мы обозначим решения, квадратично интегрируемые вблизи нуля и бесконечности, соответственно через

$$\begin{aligned} f_3(x, \lambda) &= f_1(x, \lambda) + m(\lambda) f_2(x, \lambda), \\ f_4(x, \lambda) &= f_1(x, \lambda) + n(\lambda) f_2(x, \lambda). \end{aligned} \quad (10.15.6)$$

Тогда $f_3 f_4' - f_4 f_3' = n(\lambda) - m(\lambda)$, а функция Грина будет иметь вид

$$G(x, y) = G(x, y; \lambda) = \frac{1}{m(\lambda) - n(\lambda)} \begin{cases} f_3(x, \lambda) f_4(y, \lambda), & x < y, \\ f_4(x, \lambda) f_3(y, \lambda), & x > y. \end{cases} \quad (10.15.7)$$

Нам известно, что $\sqrt{r} J_l(kr)$ при $l \geq 1$ квадратично интегрируема в любом интервале $(0, c)$, тогда как $\sqrt{r} Y_l(kr)$ не является таковой из-за особенности Y_l при $r=0$. Поэтому $f_3 \equiv f_1$, т.е. $m(\lambda) \equiv 0$. Для того чтобы определить $n(\lambda)$, введем функции Ганкеля

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(z) &= J_l(z) + iY_l(z) \sim \sqrt{2/(\pi z)} e^{i(z - l\pi/2 - \pi/4)}, \\ H_l^{(2)}(z) &= J_l(z) - iY_l(z) \sim \sqrt{2/(\pi z)} e^{-i(z - l\pi/2 - \pi/4)}. \end{aligned} \quad (10.15.8)$$

Ясно, что для получения решения, квадратично интегрируемого на (c, ∞) , нужно взять f_4 пропорциональной функции $\sqrt{r} H_l^{(1)}(kr)$ при $\text{Im } k > 0$ и пропорциональной $\sqrt{r} H_l^{(2)}(kr)$ при $\text{Im } k < 0$. Для $\text{Re } k > 0$ по предположению $\text{Im } k$ имеет тот же знак, что и $\text{Im } \lambda$; следовательно,

$$m(\lambda) = 0, \quad n(\lambda) = i \text{ sign } \text{Im } (\lambda). \quad (10.15.9)$$

Обсудим теперь спектр оператора A_l . Прежде всего, поскольку $\sqrt{r} J_l(kr)$ не интегрируема квадратично на $(0, \infty)$ при любом k , собственных функций (в строгом смысле) не существует, т.е. точечный спектр пуст. Для $\lambda < 0$ можно взять $k = i\sqrt{-\lambda}$, где имеется в виду положительное значение квадратного корня, и $f_4 = \sqrt{\pi r/2} H_l^{(1)}(kr)$. Тогда из (10.15.7) нетрудно установить, что интегральный оператор $(A_l - \lambda)^{-1} = \int G(x, y) \dots dy$ ограничен.

Следовательно, отрицательная вещественная полуось плоскости λ принадлежит резольвентному множеству, и мы приходим к выводу, что спектр полностью непрерывен и лежит на полуоси $[0, \infty)$.

Разложение по собственным функциям задается формулами (10.14.4)–(10.14.7) § 10.14, но со следующей модификацией. Когда λ пересекает отрицательную вещественную полуось, претерпевает скачок не только $n(\lambda)$, но и функции f_1 и f_2 (тогда как $m(\lambda) \equiv 0$), причем таким образом, что функция Грина $G(x, y; \lambda)$ остается непрерывной при этом переходе λ через полуось, потому что отрицательная полуось принадлежит резольвентному множеству, а функция Грина является ядром резольвенты $(A_l - \lambda)^{-1}$, которое непрерывно на резольвентном множестве. Поэтому $G(x, y; s + i\varepsilon) - G(x, y; s - i\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\rho_{jk}(t)$ определяется формулой (10.14.6) для $t \geq 0$ и является константой для $t < 0$. Принимая эту константу равной нулю, получаем

$$(\rho_{jk}(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{для } t < 0, \\ \begin{pmatrix} t/\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{для } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.15.10)$$

Итак, разложение по собственным функциям для заданной функции $g(r) \in L^2(0, \infty)$ имеет вид

$$h(s) = h_1(s) = \int_0^\infty \sqrt{\pi r/2} J_l(\sqrt{sr}) g(r) dr, \quad (10.15.11)$$

$$g(r) = (1/\pi) \int_0^\infty \sqrt{\pi r/2} J_l(\sqrt{sr}) h(s) ds. \quad (10.15.12)$$

Согласно Титчмаршу [1946], этот результат принадлежит Ганкелю.

При $0 \leq l < 1$ точка $r=0$ имеет тип предельной окружности. Поэтому существует много самосопряженных расширений минимального оператора, соответствующего T_0 , зависящих от граничного условия при $r=0$, которое следует брать из физических соображений. Не затрагивая общий случай, мы лишь отметим, что при $l=0$ в задаче о приведенном волновом уравнении $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ в двух измерениях разумным требованием является самосопряженность ∇^2 как оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда, как будет показано в следующей главе, хотя f_1 и f_2 ограничены и поэтому квадратично интегрируемы на $(0, c)$ для любого $c < \infty$, решение $R(r) = Y_0(kr)$ следует исключить из-за логарифмической особенности при $r=0$. После этого все приве-

денные выше формулы имеют силу при $l=0$. Отметим мимоходом, что в соответствующей задаче о релятивистском водородоподобном атоме с орбитальным квантовым числом $l=0$ требование, заключающееся в том, чтобы волновая функция была *конечной* в начале координат (как $J_0(kr)$ в нашем случае), было бы неприемлемым (гамильтониан не был бы самосопряженным, и не существовало бы вообще никаких собственных функций); см. § 10.17.

Из-за нулей в матрице (10.15.10) второе решение f_2 (10.15.4) не входит в разложение по собственным функциям. Поэтому спектр является простым (кратность равна единице). Это следствие свойств функции $f_1(x, \lambda)$. В самом деле, Йоргенс и Реллих [1976] доказали для любого оператора Штурма—Лиувилля на x -интервале (a, b) следующую теорему.

Теорема. Пусть Q — открытый прямоугольник в плоскости λ , симметричный относительно вещественной оси (см. рис. 10.1) и содержащий интервал $[\lambda_1, \lambda_2]$, в котором нет собственных значений оператора A . Допустим, что существует решение $f_1(x, \lambda)$ уравнения $T_0 f = \lambda f$, такое, что

- (1) f_1 аналитична по λ в Q и вещественна для вещественного λ ;
- (2) ни для какого $\lambda \in Q$ f_1 как функция x не обращается тождественно в нуль;

(3) $f_1 \in L^2(a, c)$ для всех $\lambda \in Q$ при некотором c , $a < c < b$. Тогда спектр оператора A в $[\lambda_1, \lambda_2]$ имеет кратность ≤ 1 . Ясно, что в условии (3) $L^2(a, c)$ можно заменить на $L^2(c, b)$.

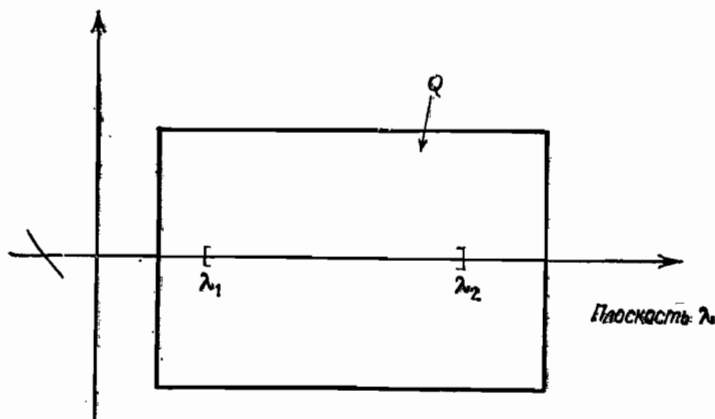


Рис. 10.1. Диаграмма для теоремы Йоргенса и Реллиха.

Замечание. Кратность, равная нулю, означала бы, что в $[\lambda_1, \lambda_2]$ спектр пуст.

Применение данной теоремы читатель найдет в следующем параграфе.

УПРАЖНЕНИЕ.

1. Рассмотрите задачи на собственные значения для уравнения (10.15.2) на интервалах $(0, a)$, (a, b) и (a, ∞) . Найдите соответствующие разложения по собственным функциям.

10.16. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ

Уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона в кулоновом поле с фиксированным точечным зарядом Ze в начале координат записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + \frac{-Ze^2}{r} u = Eu$$

(в обычных обозначениях). Здесь нет никакого безразмерного параметра. Путем подходящего выбора единиц длины и энергии это уравнение можно записать в виде

$$-\nabla^2 u - (2/r) u = \lambda u. \quad (10.16.1)$$

Разделением переменных можно получить решения специального вида $u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ в сферических координатах r, θ, φ . Обозначая $rR(r)$ через $f(r)$, получаем радиальное уравнение следующего вида:

$$T_0 f \stackrel{\text{def}}{=} -f'' + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} \right) f = \lambda f, \quad (10.16.2)$$

где l — неотрицательное целое. Это задача Штурма—Лиувилля на $(0, \infty)$. Как и в задаче об уравнении Бесселя, в данной задаче имеет место случай предельной точки на бесконечности для всех l и этот же случай при $r=0$ для $l=1, 2, \dots$. Для $l=0$ в нуле имеем случай предельной окружности.

Для $l=1, 2, \dots$ оператор A_l , определяемый формулами

$$D(A_l) = \{f \in L^2(0, \infty): T_0 f \in L^2\}, \quad A_l f = T_0 f, \quad (10.16.3)$$

самосопряжен. Для $l=0$ в точке $r=0$ необходимо поставить граничное условие: оно может быть взято в виде (10.13.6) и зависеть от параметра $\beta \in [0, \pi)$. Самосопряженный оператор с таким граничным условием мы обозначим через $A_{0\beta}$.

Для $l \geq 1$ собственные значения оператора A_l суть

$$\lambda_n = -1/n^2, \quad n = l+1, l+2, \dots \quad (10.16.4)$$

(формула Бальмера для энергетических уровней); все они являются простыми. Обозначим через $\varphi_{nl}(r)$ соответствующие нормированные собственные функции, которые можно найти в любой книге по квантовой механике.

Йоргенс и Реллих [1976] исследовали собственные значения операторов A_{β} и обнаружили, что они лежат в интервалах

$$-\frac{1}{(n-1)^2} < \lambda_n \leq -\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.16.5)$$

Для одного значения β , именно $\beta=0$, по Йоргенсу и Реллиху λ_n достигает верхнего предела интервала (10.16.5). Отсюда следует, что в этом случае формула Бальмера справедлива также и для $l=0$. Рассматривая полный гамильтониан $-\nabla^2 - 2/r$, можно показать, что $\beta=0$ дает физически корректное граничное условие (см. следующую главу).

Йоргенс и Реллих доказали следующие свойства спектра для $l \geq 1$: (1) собственными значениями оператора A_l являются лишь те числа, которые дает формула Бальмера (10.16.4); (2) на полуоси $\lambda < 0$ нет непрерывных частей спектра, т.е. любой интервал на $\lambda < 0$, не содержащий какого-либо значения (10.16.4), принадлежит резольвентному множеству; (3) неотрицательная вещественная полуось $\lambda \geq 0$ составляет непрерывный спектр; (4) этот спектр простой.

Решением уравнения $T_0 f = \lambda f$ является функция

$$f(r, \lambda) = r^{l+1} e^{-i\sqrt{\lambda}r} F(l+1+i/\sqrt{\lambda}, 2l+2, 2i\sqrt{\lambda}r), \quad (10.16.6)$$

где $\sqrt{\lambda}$ обозначает главную ветвь квадратного корня ($|\arg \sqrt{\lambda}| < \pi/2$), а F — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера

$$F(a, c, z) = {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n, \quad (10.16.7)$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) \quad \text{для } n > 0. \quad (10.16.8)$$

Это решение $f(r, \lambda)$ является аналитической функцией в плоскости с разрезом $|\arg \lambda| < \pi$ при фиксированном r , оно квадратично интегрируемо по r на $(0, c)$ ($c < \infty$) для любого λ ; наконец, несмотря на свой внешний вид, это решение вещественно для вещественного λ . Поэтому простота непрерывного спектра следует из теоремы предыдущего параграфа.

Согласно Йоргенсу и Реллиху, разложение по собственным функциям для данной функции $g(r)$ из $L^2(0, \infty)$ имеет вид

$$g(r) = \sum_{n=l+1}^{\infty} c_n \varphi_{nl}(r) + \int_0^{\infty} f(r, s) h(s) dp(s), \quad (10.16.9)$$

где

$$c_n = \int_0^{\infty} \varphi_{nl}(r) g(r) dr, \quad (10.16.10)$$

$$h(s) = \int_0^{\infty} f(r, s) g(r) dr, \quad (10.16.11)$$

а спектральная функция $\rho(s)$ задана формулой

$$d\rho(s) = \frac{1}{2\pi} (2\sqrt{s})^{2l+1} e^{\pi i \sqrt{s}} \left| \frac{\Gamma(l+1+i/\sqrt{s})}{\Gamma(2l+2)} \right|^2 ds. \quad (10.16.12)$$

Эти формулы справедливы и для $l=0$, если в граничном условии для оператора $A_{0\beta}$ положить $\beta=0$.

10.17. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ

В релятивистском случае имеется безразмерный параметр $\alpha = \alpha_0 Z$, причем $\alpha_0 = e^2/(\hbar c) = (137.03)^{-1}$. Исходя из физических соображений, можно считать, что формулировка этой задачи теряет смысл для $Z \approx 137$, и мы принимаем $0 < \alpha < 1$. Как будет показано в следующей главе, имеются две радиальные функции $f(r)$ и $g(r)$. Выберем в качестве единиц длины и энергии $\hbar/(mc)$ и mc^2 соответственно; тогда уравнения для f и g запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda + 1 + \frac{\alpha}{r} \right) f - g' - \frac{1+k}{r} g &= 0, \\ \left(\lambda - 1 + \frac{\alpha}{r} \right) g + f' + \frac{1-k}{r} f &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 < r < \infty), \quad (10.17.1)$$

где k — целое число, отличное от нуля, а λ — энергия. Исключение одной из функций, скажем f , приводит к уравнению второго порядка для другой функции, именно

$$g'' + P g' + Q g = 0, \quad (10.17.2)$$

где

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{3}{r} - \frac{\lambda+1}{(\lambda+1)r+\alpha}, \\ Q(r) &= \left(\lambda + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - 1 - \frac{k^2+k}{r^2} + \frac{(k+1)\alpha}{r^2[(\lambda+1)r+\alpha]}. \end{aligned} \quad (10.17.3)$$

Это уравнение можно формально привести к самосопряженному виду $-(p g')' + q g = 0$, положив

$$p(r) = \exp \int P(r) dr, \quad q(r) = -p(r) Q(r).$$

Однако этот результат не имеет вида уравнения Штурма—Лиувилля вследствие того, что параметр λ (собственное значение)

входит в уравнение весьма сложным образом. Тем не менее, как показали Роос и Сангрэн [1962], можно воспользоваться идеями предыдущих параграфов.

Введем двухкомпонентный вектор $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ и оператор T_0 следующим образом:

$$T_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (rg)' \\ -(rf)' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 - \alpha/r & k/r \\ k/r & 1 - \alpha/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (10.17.4)$$

В силу симметрии входящей сюда матрицы видно, что оператор формально самосопряжен относительно скалярного произведения

$$\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = \int_a^b (\bar{f}_1 f_2 + \bar{g}_1 g_2) r^2 dr, \quad (10.17.5)$$

а уравнения (10.17.1) принимают вид

$$T_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (10.17.6)$$

Допустим теперь, что f и g удовлетворяют этим уравнениям. Умножим первое уравнение из (10.17.1) на $\bar{f}$, второе — на $\bar{g}$, сложим их и, умножив на r^2 , проинтегрируем по r от a до b ($0 < a < b < \infty$). Затем проинтегрируем член, содержащий $(r\bar{g})(rf)'$, по частям. Большинство полученных членов вещественны, и, взяв всюду мнимые части, мы найдем, что

$$\operatorname{Im} \lambda \int_a^b (|f|^2 + |g|^2) r^2 dr + [r^2 \operatorname{Im} \bar{g}(r) f(r)]_a^b = 0. \quad (10.17.7)$$

Положим теперь $a=1$ и допустим, что существуют два решения (мы будем отмечать их индексами 1 и 2), такие, что

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 0, & f_2(1) &= 1, \\ g_1(1) &= 1, & g_2(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.17.8)$$

Тогда общее решение (с точностью до постоянного множителя) имеет вид

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad (10.17.9)$$

соответствующий (10.9.4), причем m — комплексное число. Подставим это решение в (10.17.7). Из начальных условий (10.17.8) следует, что $\operatorname{Im} \bar{g}(1) f(1) = \operatorname{Im} m$, и поэтому

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} m + \operatorname{Im} \lambda \int_1^b (|f|^2 + |g|^2) r^2 dr &= F(m; b) \stackrel{\text{def}}{=} -b^2 \operatorname{Im} \bar{g}(b) f(b) = \\ &= A|m|^2 + B \operatorname{Re} m + C \operatorname{Im} m + D, \end{aligned} \quad (10.17.10)$$

как в (10.9.6) — (10.9.8), где теперь

$$A = -b^2 \operatorname{Im} \overline{g_2(b)} f_2(b) = \operatorname{Im} \lambda \int_1^b (|f_2|^2 + |g_2|^2) r^2 dr. \quad (10.17.11)$$

Далее теория совпадает с изложенной в § 10.9—10.14, за исключением того, что гильбертово пространство $L^2(a, b)$ заменяется гильбертовым пространством $H(a, b)$ со скалярным произведением типа L^2 , заданным формулой (10.17.5). В частности, здесь применимы свойства концевых точек типа предельной точки и типа предельной окружности.

Легко видеть, что концевая точка $r = \infty$ имеет тип предельной точки. Из уравнений (10.17.1) следует, что f и g асимптотически ведут себя или обе как $e^{\mu r}$, или обе как $e^{-\mu r}$, где $\mu = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Значит, лишь в одном из этих случаев осуществляется квадратичная интегрируемость на $(1, \infty)$ для $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Концевая точка $r = 0$, как видно из (10.17.2), (10.17.3), будет регулярной особой точкой уравнения для g . В обозначениях (10.10.2) $P_0 = 3$, $Q_0 = \alpha^2 - k^2 + 1$. Поэтому определяющее уравнение (в котором теперь показатель обозначается через γ , а не через α) записывается в виде $(\gamma + 1)^2 + \alpha^2 - k^2 = 0$, откуда $\gamma_1, \gamma_2 = -1 \pm \sqrt{k^2 - \alpha^2}$. При малых r два решения уравнения (10.17.2) ведут себя, как $g(r) \sim r^{\gamma_1}$ и $g(r) \sim r^{\gamma_2}$.

Допустим теперь, что $\alpha < \sqrt{3/4}$, т.е. $Z \leq 118$. Квантовое число k представляет собой отличное от нуля целое, и значит, $k^2 \geq 1$. Мы видим, что $\gamma_1 > -1/2$, $\gamma_2 < -3/2$. Поэтому $|g|^2 r^2$ интегрируемо на $(0, 1)$ для $\gamma = \gamma_1$, но не интегрируемо для $\gamma = \gamma_2$. Следовательно, в $r = 0$ имеет место случай предельной точки, а оператор, определяемый формулами

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H(0, \infty) : T_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H \right\}, \quad A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

самосопряжен без каких-либо граничных условий.

Для $\sqrt{3/4} < \alpha < 1$ ($119 \leq Z \leq 137$) в концевой точке $r = 0$ все еще имеет место случай предельной точки при $|k| \geq 1$, но он переходит в случай предельной окружности при $k = \pm 1$, поскольку тогда оба показателя γ_1 и γ_2 больше или равны $-3/2$, так что для всех решений g $|g|^2 r^2$ интегрируемо на $(0, 1)$. В этом случае для каждого невещественного λ решение, ведущее себя подобно $e^{-\mu r}$ ($\mu = \sqrt{1 - \lambda^2}$, $\operatorname{Re} \mu > 0$), принадлежит H . Поэтому индексы дефекта минимального оператора, основанного на T_0 , равны $(1, 1)$, и для получения самосопряженного оператора требуется граничное условие при $r = 0$. Физически приемлемое граничное условие будет обсуждаться в следующей главе.

НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Гамильтонианы Шредингера и Дирака для свободной частицы и водородоподобного атома; гамильтониан Шредингера для атомов с n электронами; самосопряженность и свойства спектров; резольвента и разложение единицы для лапласиана; относительно ограниченное возмущение самосопряженного оператора; существенный спектр; абсолютно непрерывные и сингулярно непрерывные спектры; непрерывный спектр в смысле Гильберта; абсолютно непрерывные и сингулярно непрерывные подпространства; задачи о релятивистском водородоподобном атоме для различных значений Z ; самосопряженность и спектр лапласиана в ограниченной области пространства.

Предварительные сведения: гл. 1—10.

В соответствующих единицах гамильтонианом свободной частицы H является оператор кинетической энергии $-\frac{1}{2}\nabla^2$ в $\mathbb{R}^3$. Для системы N тождественных частиц гамильтониан представляет собой оператор $-\frac{1}{2}\nabla^2$ в $\mathbb{R}^n$, где $n=3N$. Гамильтониан Шредингера получится добавлением члена потенциальной энергии. В данной главе рассматриваются самосопряженные варианты этих операторов. Для случая одной частицы (электрона) в кулоновом поле (водородоподобный атом) рассмотрен также релятивистский гамильтониан (Дирака).

11.1. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ЛАПЛАСИАН В $\mathbb{R}^n$

Пусть u — любое распределение на $\mathbb{R}^n$, и пусть $\nabla^2 u$ — распределение, заданное формулой

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u, \quad (11.1.1)$$

где производные понимаются в смысле теории распределений. Когда оператор ∇^2 ограничен подходящей областью определения в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$, он самосопряжен. Более точно мы покажем, что оператор H , определенный посредством

$$D(H) = \{u \in L^2: \nabla^2 u \in L^2\}, \quad Hu = -\frac{1}{2}\nabla^2 u, \quad (11.1.2)$$

самосопряжен. Это будет сделано при помощи преобразования Фурье рассмотренного в § 10.3.

Обозначим через U оператор преобразования Фурье в L^2 , так что если $u \in L^2$, то $\hat{u} = Uu$ также принадлежит L^2 . Пусть $\hat{H}$ обозначает преобразование Фурье оператора H , т. е.

$$\hat{H} = UH U^*, \quad H = U^* \hat{H} U. \quad (11.1.3)$$

Таким образом, если $v = Hu$, то $\hat{v} = \hat{H}\hat{u}$. Ясно, что H самосопряжен тогда и только тогда, когда $\hat{H}$ самосопряжен. Но $\hat{H}$ легче описывать. Мы покажем, что если $u = u(x)$ — любое распределение в $D(H)$ и $\hat{u} = \hat{u}(y)$ — его преобразование Фурье, то распределение ${}^{1/2}|y|^2 \hat{u}(y)$ является преобразованием Фурье оператора $Hu = -{}^{1/2}\nabla^2 u$. Это, очевидно, справедливо, если $u = \varphi$, где φ — пробная функция в $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ибо тогда

$$\hat{\varphi}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int \dots \int e^{-iy \cdot x} \varphi(x) d^n x,$$

и поэтому после выполнения двух интегрирований по частям (что вполне оправдано, поскольку $\varphi \in \mathcal{S}$) мы получаем

$${}^{1/2}|y|^2 \hat{\varphi}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int \dots \int e^{-iy \cdot x} [-{}^{1/2}\nabla^2 \varphi(x)] d^n x.$$

Если u — любой элемент из $D(H)$ и $v = Hu = -{}^{1/2}\nabla^2 u$, то для любого $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(\hat{v}, \hat{\varphi}) = (Uv, U\varphi) = (v, \varphi) = (-{}^{1/2}\nabla^2 u, \varphi) = (u, -{}^{1/2}\nabla^2 \varphi),$$

где последнее равенство следует из определения производной распределения. Следовательно,

$$(\hat{v}, \hat{\varphi}) = (Uu, -{}^{1/2}U\nabla^2 \varphi) = (\hat{u}, {}^{1/2}|y|^2 \hat{\varphi})$$

согласно предыдущему результату, и поэтому

$$(\hat{v}, \hat{\varphi}) = ({}^{1/2}|y|^2 \hat{u}, \hat{\varphi}).$$

Все эти шаги, разумеется, можно обратить, и мы видим, что $\hat{u} \in D(\hat{H})$ тогда и только тогда, когда $|y|^2 \hat{u} \in L^2$, т. е.

$$D(\hat{H}) = \{\hat{u} \in L^2: |y|^2 \hat{u} \in L^2\}, \quad \hat{H}\hat{u} = {}^{1/2}|y|^2 \hat{u}. \quad (11.1.4)$$

Далее ${}^{1/2}|y|^2$ — вещественная непрерывная функция y , и в конце § 7.5 было показано, что оператор, определенный таким образом при помощи вещественной непрерывной функции, самосопряжен. Отсюда мы заключаем, что H также самосопряженный оператор.

Для $n=2$ и $n=3$, согласно замечанию в § 5.13, любое u в области определения оператора H является непрерывной функцией и стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

11.2. РЕЗОЛЬВЕНТА, СПЕКТР И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКТОРЫ

Если R_λ — резольвента $(H - \lambda)^{-1}$ рассматриваемого оператора H , то оператор

$$\hat{R}_\lambda = UR_\lambda U^* \quad (11.2.1)$$

является резольventой $(\hat{H} - \lambda)^{-1}$ оператора $\hat{H}$, так как

$$\begin{aligned} (\hat{H} - \lambda)^{-1} &= (UHU^* - \lambda)^{-1} = (U(H - \lambda)U^*)^{-1} = \\ &= (U^*)^{-1}(H - \lambda)^{-1}U^{-1} = U(H - \lambda)^{-1}U^*. \end{aligned}$$

Равенства (11.1.4) показывают, что $(\hat{H} - \lambda)^{-1}$ является оператором умножения

$$(\hat{R}_\lambda \hat{v})(y) = (1/2 |y|^2 - \lambda)^{-1} \hat{v}(y) \quad (11.2.2)$$

с областью определения, охватывающей все гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ для любого невещественного λ .

Для того чтобы исследовать спектр, мы сначала заметим, что для $\lambda < 0$ $\hat{R}_\lambda$ — также ограниченный оператор, определенный на всем L^2 , согласно (11.2.2). Поэтому спектр ограничивается значениями $\lambda \geq 0$. Для $\lambda \geq 0$ обратный оператор $(H - \lambda)^{-1}$ существует, но неограничен. В частности, для любого $\hat{v}(y)$, который обращается гладким образом в нуль на сфере $1/2 |y|^2 = \lambda$, уравнение $(1/2 |y|^2 - \lambda) \hat{u} = \hat{v}$ имеет единственное решение $\hat{u}$, определяемое правой частью формулы (11.2.2.). Мы видим, что точечный спектр пуст и неотрицательная вещественная ось составляет непрерывный спектр.

Согласно § 9.6, спектральный проектор $\hat{E}_t$ задается в виде

$$\hat{E}_t = (1/(2\pi i)) \int_{C(t)} \hat{R}_\lambda d\lambda,$$

где $C(t)$ — контур, идущий от $-\infty + ia$ в верхней полуплоскости к $-\infty - ia$ в нижней полуплоскости (a — любое положительное число) и пересекающий вещественную ось в точке $\lambda = t$. Интеграл от $(1/2 |y|^2 - \lambda)^{-1}$ по $C(t)$ равен $2\pi i$, если $1/2 |y|^2 < t$, и равен нулю, если $1/2 |y|^2 > t$. Поэтому

$$(\hat{E}_t \hat{u})(y) = \begin{cases} \hat{u}(y) & \text{при } |y|^2 < 2t, \\ 0 & \text{при } |y|^2 > 2t. \end{cases} \quad (11.2.3)$$

Наконец, разложение единицы E_t для исходного оператора H , самосопряженного варианта $1/2 \nabla^2$, определяется как $E_t = U^* \hat{E}_t U$. Мы вычислим его сначала для некоторой функции $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} (E_t \varphi)(x) &= \begin{cases} (2\pi)^{-n/2} \int_{|y| < \sqrt{2t}} e^{iy \cdot x} \hat{\varphi}(y) d^n y & \text{для } t > 0 \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases} \\ &= (2t)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} K(\sqrt{2t} |x - x'|) \varphi(x') d^n x' \text{ для } t > 0, \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

где ¹⁾

$$K(\omega) = (2\pi)^{-n} \int_{|y| < 1} \dots \int e^{i\omega y_1} d^n y. \quad (11.2.5)$$

Очевидно, что если $\varphi(x)$ заменить общим элементом $u(x) \in L^2$, то формула (11.2.4) остается в силе, поскольку $\mathcal{S}$ плотно в L^2 , а оператор ограничен.

В случае одного измерения $K(\omega) = \sin \omega / (\pi \omega)$, в случае трех измерений

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}.$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что в n измерениях K имеет вид

$$K(\omega) = (2\pi\omega)^{-n/2} J_{n/2}(\omega).$$

Указания. 1) Этот интеграл может быть записан так:

$$\int_{-1}^1 dy_1 e^{i\omega y_1} \int_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} dy_2 \int_{-\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_3 \dots;$$

интегрирование по $y_2, y_3, \dots, y_n$ дает объем $(n-1)$ -мерного шара радиуса $\sqrt{1-y_1^2}$. 2) Формулу для объема этого шара можно получить при помощи формулы (6.3.5). 3) Следует использовать интеграл Пуассона для функции Бесселя (см. книгу Магнуса и Оберхеттингера [1943]).

Мы отметим одно отличие между проводимыми здесь рассуждениями и теми, которые проводились в § 10.15, где для двумерного лапласиана использовалось разделение переменных в полярных координатах r и θ . (То же отличие имеет место при любом числе измерений.) Там для $l=0$ (нет зависимости от θ) мы обнаружили, что радиальное уравнение имеет особую точку $r=0$ типа предельной окружности, и поэтому следовало поставить в данной точке некое граничное условие, чтобы дифференциальный оператор был самосопряженным. При этом в зависимости от выбора граничного условия можно было получить различные самосопряженные операторы. Здесь не появляется никаких граничных условий. В тех рассуждениях предпочтительным был выбор такого условия, при котором исключалось бы решение дифференциального уравнения, ведущее себя подобно $\ln r = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ при $r \rightarrow 0$. Для любого $r > 0$ $\nabla^2 \ln r = 0$, но если $\ln r$ рассматривать как распределение, то

$$\nabla^2 \ln r = 2\pi \delta(x) \delta(y).$$

¹⁾ Строго говоря, в приведенной ниже формуле подынтегральное выражение имеет вид

$$\exp[i\omega \cdot y] \equiv \exp[i\sqrt{2t}(x-x') \cdot y].$$

Но если при вычислении интеграла ось y_1 взять в направлении вектора $x-x'$, то получится формула (11.2.5). — Прим. перев.

Однако это распределение не принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2)$, и поэтому определение (11.1.2) автоматически исключает такое решение из области определения оператора H .

УПРАЖНЕНИЯ

2. Проверьте, что для любой функции $\varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \ln r \nabla^2 \varphi \, dx \, dy = 2\pi \varphi(0, 0).$$

3. Оператор, о котором идет речь в данном упражнении, появляется не в квантовой теории, а в теории переноса. Пусть L^2 — гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, состоящее из распределений $f(x, \mu)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 d\mu \overline{f(x, \mu)} g(x, \mu),$$

и пусть T — оператор, определяемый формулами

$$D(T) = \left\{ f \in L^2: \mu \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2 \right\}, \quad Tf(x, \mu) = -i\mu \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mu).$$

Решив уравнение $Tf - \lambda f = g$, вычислите резольвенту $R_\lambda = (T - \lambda)^{-1}$ для $\text{Im } \lambda \neq 0$. Затем положите $\hat{T} = UTU^*$, где U — оператор преобразования Фурье относительно x :

$$(Uf)(k, \mu) = \hat{f}(k, \mu) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x, \mu) \, dx.$$

Покажите, что $\hat{T}$ самосопряжен, а значит, самосопряжен и T . Вычислите резольвенту $\hat{R}_\lambda = (\hat{T} - \lambda)^{-1}$ и разложение единицы $\hat{E}_t$ для оператора $\hat{T}$. Путем обратного преобразования найдите разложение единицы E_t для T .

11.3. ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА

Одной из целей современных математических исследований оператора Шредингера и связанных с ним операторов является подведение надежной базы под многое из того, что на основе физических соображений представлялось интуитивно очевидным; см. книги Като [1966] и Йоргенса и Вайдмана [1973]. Первое такое обстоятельство заключается в квантовомеханическом требовании, чтобы гамильтониан любой физической системы интерпретировался как самосопряженный оператор. В настоящем параграфе будет сделано несколько замечаний по этому вопросу (без доказательств). Некоторые аспекты непрерывного спектра будут рассмотрены в следующем параграфе.

Рассмотрим сначала гамильтониан

$$H = H_0 + V, \quad \text{где } H_0 = -\frac{1}{2} \nabla^2, \quad (11.3.1)$$

для одной частицы, которая движется в поле с потенциалом $V=V(\mathbf{x})$. Гильбертово пространство есть $H=L^2(\mathbb{R}^3)$, а H_0 обозначает самосопряженный оператор, который в § 11.1 обозначался через H . Пусть $V(\mathbf{x})$ —ограниченная непрерывная (вещественная) функция. Рассматривая эту функцию как оператор, мы имеем самосопряженный, ограниченный и определенный во всем H оператор. Из упражнения 2 § 7.2 следует, что гамильтониан H самосопряжен. Говорят, что V представляет собой ограниченное возмущение H_0 .

Если $V(\mathbf{x})$ —неограниченная функция, то вопрос о самосопряженности и других свойствах оператора H значительно труднее, но при разумных допущениях на него можно ответить с помощью методов теории возмущений для операторов. Если $V(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, то скалярное произведение $V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ вполне определено как распределение (в L^1 ; см. § 5.4) и можно доказать, что это распределение принадлежит L^2 , если ψ принадлежит области определения оператора H_0 , заданной в (11.1.2). Таким образом, оператор V определен на этой области. В книге Като [1966] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если потенциал $V(\mathbf{x})$ может быть записан в виде суммы двух (вещественных) функций, из которых одна непрерывна и ограничена, а другая принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$, то оператор H , определяемый формулами

$$\begin{aligned} D(H) &= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3): \nabla^2 \psi \in L^2\}, \\ H\psi &= -\frac{1}{2}\nabla^2 \psi + V\psi, \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

самосопряжен и ограничен снизу.

Данная теорема применима, в частности, к водородоподобному атому, где $V(\mathbf{x}) = -Z/|\mathbf{x}|$, Z —положительное целое число, определяющее заряд ядра.

Като показал также, что это заключение имеет силу и для n -электронного атома с ядерным зарядом $Z \geq n$, для которого

$$V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = - \sum_{j=1}^n Z/|\mathbf{x}_j| + \sum_{j < k=1}^n 1/|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|. \quad (11.3.3)$$

Теорема 2. Оператор H , определяемый формулами

$$\begin{aligned} D(H) &= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^{3n}): \nabla^2 \psi \in L^2\}, \\ H\psi &= -\frac{1}{2}\nabla^2 \psi + V\psi, \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

где ∇^2 представляет собой $3n$ -мерный лапласиан, а V задан формулой (11.3.3), самосопряжен и ограничен снизу.

Ограниченность H снизу означает, что существует значение энергии λ_0 (отрицательное в рассматриваемых здесь случаях),

такое, что $(\psi, H\psi) \geq \lambda_0(\psi, \psi)$ для всех ψ , или, эквивалентно, что весь спектр лежит в интервале $\lambda \geq \lambda_0$. Это соответствует существованию основного состояния, или состояния с наименьшей энергией.

Йоргенс [1967] доказал самосопряженность гамильтониана для водородоподобного атома в однородном электрическом поле (эффект Штарка), в однородном магнитном поле (эффект Зеемана), при одновременном действии этих полей, в магнитном поле кольцевого тока (это более физичная модель для эффекта Зеемана, поскольку в ней полная энергия магнитного поля конечна).

Когда задача о водородоподобном атоме рассматривается при помощи разделения переменных в сферических координатах r, θ, φ , обнаруживаются ложные решения для $l=0$ (нулевой момент импульса), так как радиальное уравнение при $r=0$ имеет особую точку типа предельной окружности, как было указано в § 10.16. Как и в предыдущем параграфе, такие нежелательные решения, ведущие себя подобно $1/r$ при $r \rightarrow 0$, исключаются из области определения оператора в (11.3.2), потому что

$$\nabla^2 (1/r) = -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (11.3.5)$$

не принадлежит L^2 .

11.4. ВОЗМУЩЕНИЕ СПЕКТРА. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

В записи $H = H_0 + V$ оператор V мыслится как возмущение. Если V мал в некотором смысле, то различные свойства спектра инвариантны, т. е. одинаковы для H и H_0 . Мы предполагаем, что H_0 самосопряжен и что V является симметрическим оператором, определенным на области определения оператора H_0 , т. е. $D(V) \supset D(H_0)$.

Одним из видов малости может служить относительная ограниченность. Оператор V называется *ограниченным относительно* H_0 или *H_0 -ограниченным*, если существуют постоянные a и b , такие, что

$$\|V\psi\| \leq a\|\psi\| + b\|H_0\psi\| \quad \text{для всех } \psi \in D(H_0). \quad (11.4.1)$$

В общем случае можно уменьшить b , если увеличивать a , но нельзя взять $b=0$ при конечном a , если только V не является ограниченным оператором. Точная нижняя грань возможных значений b называется *H_0 -гранью* оператора V .

Теорема 1. (Реллих). Пусть H_0 и V — указанные выше операторы, причем V H_0 -ограничен с H_0 -гранью, меньшей единицы. Тогда $H = H_0 + V$ самосопряжен и имеет область определения $D(H) = D(H_0)$.

Теорема 2. (Като). *Если в условиях теоремы 1 H_0 ограничен снизу (или сверху, или с двух сторон), то $H = H_0 + V$ ограничен снизу (или сверху, или с двух сторон), но не обязательно той же гранью (теми же гранями).*

Эти теоремы лежат в основе цитированных в предыдущем параграфе результатов Като. Для кулонова потенциала $V(\mathbf{x}) = -Z/|\mathbf{x}|$ V хотя и не является ограниченным оператором, H_0 -ограничен с H_0 -гранью, равной нулю. (То есть в (11.4.1) можно положить $b \rightarrow 0$, полагая при этом $a \rightarrow \infty$.) Так как спектр оператора $-1/2 \nabla^2$ лежит в $[0, \infty)$, теорема 2 применима к задачам Шредингера.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если $V(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, то непрерывный спектр H также заполнит $[0, \infty)$, поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, *существенный спектр* оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом: λ принадлежит существенному спектру оператора H тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{v_j\}_1^\infty$ линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что $\|Hv_j - \lambda v_j\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь одноэлектронный гамильтониан $H = H_0 + V$, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Пусть H_0 — самосопряженный вариант оператора $-1/2 \nabla^2$ в $\mathbb{R}^3$, а $V(\mathbf{x})$ — сумма двух функций, одна из которых ограничена, а другая принадлежит $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Теорема (Като). *Если в условиях теоремы 1 § 11.3 $V(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, то существенный спектр оператора $H = H_0 + V$ совпадает с существенным спектром оператора $H_0 = -1/2 \nabla^2$, а именно представляет собой $[0, \infty)$.*

Из определения существенного спектра следует, что спектр отрицательных энергий ($\lambda < 0$) оператора $H_0 + V$ состоит только из изолированных энергетических уровней конечной кратности

без каких-либо точек накопления, кроме, возможно, $\lambda = 0$. Это справедливо не только для водородоподобного атома, но и для электрона в поле с любым потенциалом $V(x)$, который стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $V(x)$ обладает периодичностью (потенциал электрона в кристаллической решетке), то могут быть участки непрерывного спектра при отрицательных энергиях, даже если средний потенциал неотрицателен.

Для гамильтониана n -электронного атома, в котором возмущение $V = V(x_1, \dots, x_n)$ задано в виде (11.3.3), положение осложняется. Если какой-нибудь электрон удаляется на большие расстояния, то остаточный ион может находиться в связанном состоянии с отрицательной энергией, и, следовательно, можно предположить, что непрерывный спектр опустится в отрицательные значения λ . Кроме того, принцип Паули требует, чтобы гамильтониан ограничивался подпространством гильбертова пространства $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, состоящим из функций, антисимметричных по отношению к перестановкам электронов. По Жислину и Сигалову [1965] существенным спектром так ограниченного оператора $H_0 + V$ является $[\mu, \infty)$, где μ — наинизшая энергия иона (т. е. основное состояние). Представляет интерес дальнейшее сужение этого подпространства пространства $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ путем учета симметрии гамильтониана относительно сохраняемых величин, например полного момента импульса с возможным включением спина электрона. Детальное обсуждение этих вопросов см. в книге Йоргенса и Вайдмана [1973].

Теоремы приведенного выше типа не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале I (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор E_t не будет непрерывным по t в любой точке I . Тем не менее весь интервал I представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру; см. следующий параграф).

Приведенные выше теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т. е. такой, на котором E_t непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения V типа Гиль-

берта—Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта—Шмидта; см. следующую главу).

Даже если E_t непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция $f(t)$ (или любая функция локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \quad (11.4.2)$$

где f_1 —скачкообразная функция, f_2 абсолютно непрерывна, а f_3 сингулярно непрерывна. Функция f_2 равна интегралу Лебега от своей производной, а производная f_3 равна нулю для почти всех t (см. гл. 13: функция Кантора является функцией типа f_3). В интервалах, где f_1 и f_3 —константы, f является абсолютно непрерывной. Пусть теперь $\{E_t\}$ —разложение единицы для самосопряженного оператора H . Для любого v в гильбертовом пространстве $(v, E_t v)$ является неубывающей функцией t , а значит, для нее возможна декомпозиция (11.4.2). Скачки f_i происходят в собственных значениях оператора H . Спектр H называется *абсолютно непрерывным* в интервале I , если $(v, E_t v)$ —абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет *кусочным*.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения $(v, E_t v)$ всегда состоит из первых двух членов (11.4.2). Однако это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для E_t .

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т. е. выше уровня ионизации, но это неверно, если не принимать во внимание спин электрона. Например, если игнорировать спин, то имеются связанные состояния (так называемые *квартетные состояния*) атома лития (Li), которые лежат выше основного состояния Li^+ ; если учесть спин-орбитальное и спин-спиновое взаимодействия, то эти состояния оказываются неустойчивыми из-за так называемой автоионизации (спонтанный переход к Li^+ плюс свободный электрон). Следовательно, не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии λ выше уровня ионизации. Всегда ли это верно—вопрос открытый.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите, что если T —симметрический оператор с индексами дефекта (m, m) , $m < \infty$, то все самосопряженные расширения T имеют одинаковый существенный спектр.

11.5. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР В СМЫСЛЕ ГИЛЬБЕРТА.

НЕПРЕРЫВНЫЕ И АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Говорят, что самосопряженный оператор A имеет *чисто точечный спектр в смысле Гильберта*, если его собственные векторы порождают пространство H . В этом случае нам не требуется какой-либо «непрерывный спектр»; однако любое λ_0 , которое является предельной точкой точечного спектра $P\sigma(A)$, но не принадлежит $P\sigma(A)$, включено в $C\sigma(A)$ согласно определению, данному в § 8.1. Чтобы это показать, положим, что λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — собственные значения, которые стремятся к λ_0 при $n \rightarrow \infty$. Пусть для каждого λ_n v_n обозначает соответствующий собственный вектор с $\|v_n\| = 1$. Тогда $\|(A - \lambda_0)v_n\| = |\lambda_n - \lambda_0| \|v_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому $(A - \lambda_0)^{-1}$ неограничен. Следовательно, поскольку остаточный спектр пуст, $\lambda_0 \in C\sigma(A)$.

Так, в упомянутом в предыдущем параграфе примере оператора с чисто точечным спектром, собственные значения которого всюду плотны в некотором интервале, каждая точка интервала, не относящаяся к собственным значениям, принадлежит непрерывному спектру.

Лишние точки такого рода можно исключить при помощи альтернативного определения непрерывного спектра для частного случая самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Это определение Рисс и Секефальви-Надь приписывают Гильберту. Так как H сепарабельно, $P\sigma(A)$ представляет собой конечное или счетное множество $\{\lambda_j\}$ собственных значений. Пусть для каждого j P_j обозначает проектор на j -е собственное пространство $E_j = N(A - \lambda_j)$, т. е. проектор, областью значений которого является E_j . Тогда $\sum_j P_j$ является проектором (см. ниже упражнение 1), область значений которого представляет собой ортогональную прямую сумму всех этих собственных подпространств. Подпространства H_p и H_c пространства H определяются следующим образом:

$$H_p = R(\sum_j P_j), \quad H_c = H_p^\perp; \quad (11.5.1)$$

они связаны с точечной и непрерывной частями спектра оператора A . Подпространство H_p инвариантно относительно преобразования $v \rightarrow Av$, поскольку каждое $v \in H_p$ представляет собой линейную комбинацию собственных векторов. Подпространство H_c также инвариантно; действительно, если $u \in H_c$, т. е. если $(u, v) = 0$ для любого $v \in H_p$, то $(Au, v) = (u, Av) = 0$ для любого $v \in H_p$, потому что Av также принадлежит H_p ; следовательно, $Au \in H_c$. Операторы A_p и A_c определяются как ограничения оператора A :

$$A_p = A|_{H_p}, \quad A_c = A|_{H_c}. \quad (11.5.2)$$

причем в соответствующих подпространствах они самосопряжены. Первый из них имеет чисто точечный спектр (в смысле Гильберта), а второй имеет чисто непрерывный спектр. (Если бы A_c имел какой-либо собственный вектор, то этот вектор был бы и собственным вектором A , что приводит к противоречию, ибо все собственные векторы A лежат в H_p .) Непрерывный спектр оператора A в смысле Гильберта, обозначаемый $HC\sigma(A)$, определяется как $C\sigma(A_c)$, т. е. $\lambda \in HC\sigma(A)$, если $(A_c - \lambda)^{-1}$ — неограниченный оператор в H_c . Теперь можно более четко сформулировать понятие приближенного собственного вектора, введенное в § 8.1.

Лемма. λ_0 принадлежит $HC\sigma(A)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{u_n\}$, такая, что $\|u_n\| = 1$, а $\|(A - \lambda_0)u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и каждый u_n ортогонален любому собственному вектору оператора A . Более того, $\{u_n\}$ может быть выбрана как ортонормированная последовательность.

Доказательство. Достаточность условия очевидна, ибо $(A_c - \lambda_0)^{-1}$ неограничен при указанных предположениях. Поэтому мы допустим, что $\lambda_0 \in HC\sigma(A)$, и докажем существование последовательности $\{u_n\}$, о которой говорилось выше. Пусть $E_\lambda(A_c)$ — спектральное семейство оператора A_c в H_c . Оно сильно непрерывно по λ , так как A_c не имеет точечного спектра. Тогда существует либо возрастающая последовательность $\{\lambda_n\}$, такая, что $\lambda_n \uparrow \lambda_0$, либо убывающая последовательность $\{\lambda_n\}$, такая, что $\lambda_n \downarrow \lambda_0$, и, кроме того, такая, что все проекторы $E_{\lambda_n}(A_c)$ различны, поскольку в противном случае λ_0 принадлежало бы интервалу постоянства $E_\lambda(A_c)$ и поэтому находилось бы в резольвентном множестве оператора A_c . Пусть $\lambda_n \uparrow \lambda_0$ (другой случай аналогичен), и пусть $\{u_n\}$ — последовательность нормированных векторов в H_c , таких, что u_n находится в области значений проектора

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} E_{\lambda_{n+1}}(A_c) - E_{\lambda_n}(A_c).$$

Тогда u_n попарно ортогональны, так как $P_n P_m = 0$ для $n \neq m$. Поскольку $E_\lambda(A_c) u_n = u_n$ для $\lambda > \lambda_{n+1}$ и $E_\lambda(A_c) u_n = 0$ для $\lambda < \lambda_n$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0)u_n\| &= \|(A_c - \lambda_0)u_n\| = \\ &= \left\| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} (\lambda - \lambda_0) dE_\lambda(A_c) u_n \right\| \leq \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_0| \|u_n\| = |\lambda_n - \lambda_0|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|(A - \lambda_0)u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, векторы $u_n \in H_c$, поэтому ортогональны всем собственным векторам A , как и утверждалось.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что если P_j ($j=1, 2, \dots$) — взаимно ортогональные проекторы (т. е. $P_j P_k = P_j \delta_{jk}$ и $P_j^* = P_j$), то $\sum_{j=1}^n P_j$ сильно сходится (при $n \rightarrow \infty$) к проектору P_0 и область значений P_0 представляет собой ортогональную прямую сумму соответствующих областей значений P_j .

2. Покажите, что если A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве, то $HC\sigma(A)$ является замкнутым множеством на вещественной прямой без изолированных точек (т. е. совершенным множеством).

Замечания.

1. Спектр оператора A (т. е. дополнение $\rho(A)$) не обязательно является объединением $P\sigma(A)$ и $HC\sigma(A)$, но является замыканием этого объединения.

2. Некоторые точки могут принадлежать как $P\sigma(A)$, так и $HC\sigma(A)$.

3. Определение непрерывного спектра в смысле Гильберта можно распространить на нормальные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве, но для операторов, не являющихся нормальными, и для операторов в общем банаховом пространстве все еще нужно определение § 8.1.

Подпространство H_c может быть разложено далее. Определим H_{ac} как множество всех $v \in H$, таких, что функция $(v, E_t v) = \|E_t v\|^2$ абсолютно непрерывна по t в $(-\infty, \infty)$, а H_{sc} — как множество $v \in H$, таких, что $(v, E_t v)$ сингулярно непрерывна. Можно доказать (Като [1966, § X.1.2]), что H_{ac} и H_{sc} — взаимно ортогональные замкнутые линейные многообразия (подпространства), порождающие H_c ; поэтому

$$H = H_p \oplus H_{ac} \oplus H_{sc}. \quad (11.5.3)$$

Кроме того, H_{ac} и H_{sc} инвариантны относительно преобразования $v \rightarrow Av$, а операторы

$$A_{ac} = A|_{H_{ac}}, \quad A_{sc} = A|_{H_{sc}} \quad (11.5.4)$$

имеют абсолютно непрерывный и сингулярно непрерывный спектры соответственно. Если P_p , P_{ac} , P_{sc} — ортогональные проекторы, соответствующие (11.5.3), то разложения

$$E_t = P_p E_t + P_{ac} E_t + P_{sc} E_t \quad (11.5.5)$$

полностью аналогичны разложению (11.4.2); разложение (11.4.2) применяется к вещественнозначным неубывающим функциям $f(t)$, а (11.5.5) — к проекторнозначным неубывающим функциям E_t .

Интересная характеристика подпространства H_{ac} через резольвенту $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ была предложена Густафсоном и Джонсоном [1974]. Вспомним, что если λ_0 принадлежит резольвентному множеству, то R_λ непрерывна (фактически аналитична) в λ_0 . Если λ_0 — изолированное собственное значение, то R_λ имеет полюс в λ_0 ; поскольку A самосопряжен, λ_0 вещественно, и этот полюс простой. Отсюда с легкостью следует, что если v — вектор в H_p , т. е. линейная комбинация собственных векторов, то $\|R_\lambda v\|$ стремится к бесконечности подобно $\text{const} \cdot |\text{Im } \lambda|^{-1}$, когда $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ для некоторого значения $\text{Re } \lambda$ в точечном спектре. Можно предположить, что если $v \in H_c$, то $\|R_\lambda v\|$ стремится к бес-

конечности менее быстро (как именно быстро — зависит от того, принадлежит v подпространству H_{ac} или нет). Рассмотрим векторы v , для которых имеется постоянная $M(v)$, такая, что

$$\|R_\lambda v\| \leq M(v) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2} \quad \text{для всех } \lambda. \quad (11.5.6)$$

Густафсон и Джонсон показали, что любое такое v принадлежит H_{ac} , и на самом деле H_{ac} представляет собой замыкание множества всех таких v .

Пример подобного поведения встречался в упражнении 2 § 10.1, и теперь ясно, что спектр рассмотренного там оператора абсолютно непрерывен.

11.6. ГАМИЛЬТонианы ДИРАКА

Обсуждение релятивистских гамильтонианов Дирака по необходимости ограничивается случаем одного электрона в поле с некоторым конкретным потенциалом, поскольку в релятивистике кулоново взаимодействие между двумя электронами должно заменяться взаимодействием через электромагнитное поле, а потому обсуждение случая двух или нескольких электронов следует проводить в рамках квантовой электродинамики.

Кратко рассмотрим операторы для свободной частицы и для водородоподобного атома. Гильбертовым пространством H является пространство $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ четырехкомпонентных волновых функций $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, причем каждая компонента представляет собой распределение в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Гамильтониан свободной частицы формально записывается в виде

$$-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2, \quad (11.6.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и α_i ($i = 1, \dots, 4$) суть эрмитовы антикоммутирующие (4×4) -матрицы, квадраты которых равны единичной матрице:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 4; i \neq j), \quad (11.6.2)$$

$$\alpha_i^2 = I \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (11.6.3)$$

(см. книгу Шиффа [1955]); в правой части уравнения (11.6.3) символ I обозначает единичную (4×4) -матрицу. Для любых ψ из H произведение $\alpha \cdot \nabla \psi$ вполне определено как (четырёхкомпонентное) распределение. Если область определения гамильтониана H_0 выбрана так, что $\alpha \cdot \nabla \psi$ также принадлежит L^2 , т. е. если

$$D(H_0) = \{\psi \in H: \alpha \cdot \nabla \psi \in H\}, \quad H_0 \psi = (-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2) \psi, \quad (11.6.4)$$

то H_0 самосопряжен. Это нетрудно увидеть, если при помощи преобразования Фурье перейти к импульсному представлению, после чего H_0 станет оператором $\hat{H}_0$ умножения на эрмитово-

матричнозначную функцию, и будет применима аргументация, использованная для лапласиана в § 11.1.

Если добавить кулонов потенциал $-Ze^2/r$, то получится релятивистский гамильтониан водородоподобного атома

$$-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2 - Ze^2/r, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (11.6.5)$$

Как и в нерелятивистском случае, можно показать, что ψ/r принадлежит $\mathbf{H} = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$, если ψ принадлежит области определения гамильтониана свободной частицы, которая теперь задана в (11.6.4). Отсюда по аналогии с нерелятивистским случаем (теорема 1 § 11.3) можно было бы предположить, что гамильтониан (11.6.5) самосопряжен на области $\mathbf{D}(\mathbf{H}_0)$.

Вопрос о самосопряженных вариантах оператора (11.6.5) будет обсуждаться ниже. Оказывается, что высказанное предположение справедливо для $Z \leq 118$, а для больших значений Z его следует несколько видоизменить.

Сначала, однако, опишем в общих чертах разделение переменных, которое приводит к системе радиальных уравнений, уже рассматривавшейся в § 10.17.

Уравнение стационарных состояний для электрона в центральном поле с потенциалом $V(r)$ имеет вид

$$[-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 E_0 + V(r)] \psi = E \psi \quad (11.6.6)$$

(здесь E_0 стоит вместо mc^2). Матрицы α_i выражаются через (2×2) -матрицы σ_i следующим образом:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (11.6.7)$$

где I — единичная (2×2) -матрица, а σ_i — так называемые спиновые матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.6.8)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \end{pmatrix}, \quad (11.6.9)$$

где ∂_z — сокращенная запись $\partial/\partial z$ (аналогично для ∂_x и ∂_y).

Подробности процедуры разделения переменных даны в книге Бете и Солпитера [1957]. Окончательные результаты следующие: вводят квантовые числа l и j , причем l , квантовое число орбитального момента импульса, — целое неотрицательное число, а j , квантовое число полного момента импульса, принимает два зна-

чения $l + 1/2$ и $l - 1/2$ (но лишь $+1/2$ для $l = 0$). Четыре компоненты ψ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [j = l + 1/2] & & [j = l - 1/2] \\ \psi_1 = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} g Y_l^m, & & \psi_1 = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} g Y_l^m, \\ \psi_2 = -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} g Y_l^{m+1}, & & \psi_2 = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} g Y_l^{m+1}, \\ \psi_3 = -i \sqrt{\frac{l-m+1}{2l+3}} f Y_{l+1}^m, & & \psi_3 = -i \sqrt{\frac{l+m}{2l-1}} f Y_{l-1}^m, \\ \psi_4 = -i \sqrt{\frac{l+m+2}{2l+3}} f Y_{l+1}^{m+1}, & & \psi_4 = i \sqrt{\frac{l-m-1}{2l-1}} f Y_{l-1}^{m+1}, \end{aligned} \quad (11.6.10)$$

где f и g — функции, зависящие лишь от r , а $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — нормированные тессеральные сферические гармоники:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (11.6.11)$$

$(l = 0, 1, \dots; m = -l, -l+1, \dots, l).$

В каждом столбце таблицы m — целое, причем $-j \leq m + 1/2 \leq j$; величина $(m + 1/2)\hbar$ является z -й компонентой полного момента импульса. Если функции ψ_j ($j = 1, \dots, 4$) любого из столбцов (11.6.10) подставить в уравнение (11.6.6) и воспользоваться приведенными в книге Бете и Солпитера формулами для производных функции вида $h(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$ по x, y и z , то можно получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для $f(r)$ и $g(r)$. Два случая $j = l \pm 1/2$ можно объединить, введя новое целое квантовое число k :

$$\begin{aligned} k &= -l-1 & \text{для } j = l + 1/2 & \quad (l = 0, 1, \dots), \\ k &= l & \text{для } j = l - 1/2 & \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Тогда получится система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} [E + E_0 - V(r)] f(r) - \left[g'(r) + \frac{1+k}{r} g(r) \right] &= 0, \\ \frac{1}{\hbar c} [E - E_0 - V(r)] g(r) + \left[f'(r) + \frac{1-k}{r} f(r) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

Если f и g удовлетворяют этим уравнениям для данного E , то функции (11.6.10) являются компонентами собственной функции ψ оператора H , а E — соответствующее собственное значение, причем тогда и только тогда, когда ψ принадлежит области определения оператора H , которая все еще точно не установлена, но в любом случае необходимо, чтобы интеграл по $\mathbb{R}^3$ от величины $\sum_{j=1}^4 |\psi_j|^2$

был конечен, т. е. чтобы

$$\int_0^{\infty} (|f|^2 + |g|^2) r^2 dr < \infty. \quad (11.6.13)$$

Система (11.6.12) рассматривалась в § 10.17 для случая $V(r) = -Ze^2/r$. После исключения f получается уравнение второго порядка для g в формально самосопряженном виде. (Исключение g приводит к такому же уравнению для f .) Хотя это уравнение не является уравнением Штурма—Лиувилля из-за того, что параметр собственного значения $\lambda = E$ входит в него весьма сложным образом, было обнаружено, что некоторые понятия теории Штурма—Лиувилля вполне применимы. Радиус r меняется в интервале $(0, \infty)$, и было выяснено, что конечная точка $r = \infty$ всегда имеет тип предельной точки. Это значит, что ни для вещественного, ни для комплексного E не существует более одного независимого решения системы (11.6.12), такого, что интеграл (11.6.13) сходится. В самом деле, f и g асимптотически при $r \rightarrow \infty$ ведут себя или оба как $e^{i\mu r}$, или оба как $e^{-i\mu r}$, где $\mu = (E_0^2 - E^2)^{1/2}/(\hbar c)$. Конечная точка $r = 0$ является регулярной особой точкой, а потому может быть исследована методом Фробениуса. Результат зависит от целого числа $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ и безразмерного параметра

$$\alpha = \alpha_0 Z = \frac{e^2}{\hbar c} Z \approx \frac{1}{137.037} Z \quad (11.6.14)$$

(которые не следует путать с матрицами $\alpha_i, \dots, \alpha_4$). Показатель γ в решении вида степенного ряда

$$g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma}$$

находится из определяющего уравнения и имеет вид

$$\gamma = -1 \pm \sqrt{k^2 - \alpha^2}.$$

На нижнем пределе интеграл (11.6.13) сходится при $\gamma > -3/2$ и расходится при $\gamma < -3/2$. Отсюда мы находим, что точка $r = 0$ имеет тип предельной окружности при $k^2 = 1$ и $\sqrt{3/4} \leq \alpha < 1$ (и тогда нам требуется некоторое граничное условие при $r = 0$) и тип предельной точки при иных значениях k^2 и α . (Мы не рассматриваем $\alpha \geq 1$.) На необходимость дополнительного условия для задач, подобных данной, указывал Кейс (1950 г.).

В качестве дополнительного условия мы примем

$$\iiint (1/r) \sum_{i=1}^4 |\psi_i(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} < \infty, \quad (11.6.15)$$

т. е. будем допускать лишь такие состояния ψ , для которых конечно математическое ожидание потенциальной энергии. (Тогда, разумеется, кинетическая энергия также имеет конечное математическое ожидание в стационарном состоянии, поскольку полная энергия E имеет определенное значение.) Интеграл (11.6.15) сходится при $\gamma > -1$ и расходится при $\gamma < -1$. Следовательно, это условие как раз относится к условиям того рода, которые служат для отбора одного из решений (11.6.12) в случае предельной окружности и не должны оказывать никакого влияния в случае предельной точки.

По-видимому, естественно предположить, что хотя теория Штурма—Лиувилля и не применима, оператор в (11.6.12) всегда самосопряжен для $0 \leq \alpha < 1$ на максимальной области определения с единственным ограничением (11.6.15).

В нерелятивистском случае лишние решения радиального уравнения, которые появлялись, когда концевая точка $r=0$ имела тип предельной окружности, исключались при рассмотрении полного гамильтониана, поскольку такие решения не принадлежали области определения лапласиана. Подобное происходит и здесь, но, к сожалению, возникают некоторые затруднения. Спросим себя: при каких значениях α (т. е. Z) решения ψ , найденные выше, принадлежат области определения невозмущенного гамильтониана H_0 , заданной в (11.6.4)? Вблизи начала координат $r=0$ каждая компонента ψ , согласно (11.6.10), представляет собой r^γ , умноженное на тессеральную гармонику. Мы должны применять оператор H_0 с производными, рассматриваемыми в смысле теории распределений. Легко видеть, что для $\gamma > -2$ дифференцирование не дает какого-либо вклада типа дельта-функции, как в (11.3.5). Поэтому компоненты $H_0\psi$ представляют собой просто функции типа $r^{\gamma-1}$, умноженного на угловые множители, вблизи начала координат. Отсюда требование, чтобы $H_0\psi$ принадлежало пространству L^2 , состоит в том, что интеграл

$$\int r^{2\gamma-2} r^2 dr \quad (11.6.16)$$

должен сходиться при $r=0$, т. е. что $\gamma > -1/2$. К сожалению, при $\alpha \geq \sqrt{3}/4$ (т. е. $Z > 118$) это требование исключает оба решения радиальных уравнений (11.6.12), полученные методом Фробениуса. Отсюда следует что при $Z > 118$ оператор $H_0 + V$ не может быть самосопряженным на области определения H_0 , а требует большей области, удовлетворяющей, однако, условию (11.6.15).

Теперь мы суммируем информацию о полном гамильтониане (11.6.5), данную в работах Като [1966], Вайдмана [1971], Рейто [1971], Густафсона и Рейто [1973], после предварительного замечания об области определения оператора потенциальной энергии V .

Из того, что ψ принадлежит области определения $D(H_0)$ гамильтониана свободной частицы, следует, что для каждой компоненты ψ_j $|\nabla \psi_j|^2$ интегрируема в $\mathbb{R}^3$. Тогда известное неравенство

$$\iint \iint (1/r^2) |u|^2 d^3x \leq 4 \iint \iint |\nabla u|^2 d^3x, \quad (11.6.17)$$

справедливое всегда, когда интеграл, стоящий в правой части, сходится, показывает, что ψ/r принадлежит L^2 . Поэтому оператор V , представляющий собой умножение на $-Ze^2/r$, определен на области H_0 . Като показал, что при $\alpha < 1/2$ оператор V является H_0 -ограниченным оператором с H_0 -гранью, меньшей единицы. Из теоремы 1 § 11.4 следует, что при $\alpha < 1/2$ ($Z \leq 68$) оператор $H = H_0 + V$ самосопряжен и его область определения совпадает с $D(H_0)$.

Далее было показано сначала, что при $\alpha < \sqrt{3}/4$ ($Z \leq 118$) минимальный оператор $H_0 + V$, в качестве области определения которого взято $(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^4$, является существенно самосопряженным оператором, что вполне достаточно для многих целей, а затем установлено, что область определения самосопряженного варианта, т.е. замыкания минимального оператора, совпадает с областью $D(H_0)$, заданной в (11.6.4), которая может быть охарактеризована так же как $(W^1)^4$, где W^1 — пространство Соболева $W^1(\mathbb{R}^3)$, описанное в § 5.11.

Для $\sqrt{3}/4 \leq \alpha < 1$ оператор $H_0 + V$, как было указано выше, не является существенно самосопряженным оператором на области определения оператора H_0 , но имеет индексы дефекта (1, 1) и, следовательно, нуждается в более широкой области определения. Согласно К. Густафсону (частное сообщение), и минимальный оператор $H_0 + V$ становится существенно самосопряженным, если область $(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^4$ расширить за счет функций, при $r \rightarrow 0$ стремящихся к бесконечности подобно $1/r$ (но не быстрее). Это согласуется с результатами, полученными нами для радиальных уравнений, и наводит на мысль о том, что если во всем интервале $0 \leq \alpha < 1$ гамильтониан Дирака H для водородоподобного атома определять как

$$D(H) = \{ \psi \in H : T\psi \in H, \text{ (11.6.15) выполняется} \},$$

$$H\psi = T\psi,$$

где T — формальный оператор вида (11.6.5), то H самосопряжен; условие (11.6.5) заключается в том, что математическое ожидание потенциальной энергии в состоянии ψ конечно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите неравенство (11.6.17). *Указание.* Сначала покажите, что если $f(r)$ вещественна, принадлежит классу C^1 и стремится к нулю при больших

r , то

$$\int_0^{\infty} f(r)^2 dr \leq 4 \int_0^{\infty} r^2 f'(r)^2 dr.$$

2. Пусть A и B — операторы в $L^2(0, 1)$, заданные так:

$$D(A) = \{f \in L^2: f''' \in L^2, f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0\}, \quad Af = f''',$$

$$D(B) = D(A), \quad Bf = -f''' + f''.$$

Покажите, что A и B самсопряжены, и найдите индексы дефекта оператора $A+B$.

3. Покажите, что $(\alpha \cdot k + \alpha_4)^2 = (k^2 + 1)I$, где I — единичная (4×4) -матрица.

4. Проверьте, что (4×4) -матрицы $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, заданные (11.6.7) и (11.6.8), удовлетворяют соотношениям (11.6.2) и (11.6.3).

5. Покажите, что при $\sqrt{3/4} < \alpha < 1$ и $k = \pm 1$ индексы дефекта радиального оператора, заданного при помощи (11.6.12), равны $(1, 1)$.

11.7. ЛАПЛАСИАНЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Допустим теперь, что Ω — ограниченная область (связное открытое множество) в $\mathbb{R}^3$, граница которой $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно гладких поверхностей и удовлетворяет условию внешнего конуса из § 6.4 (причина выбора $n=3$ вскоре проявится). Оператор A_0 определяется как взятый со знаком минус лапласиан, действующий на достаточно гладкие функции $f(x)$, обращающиеся в нуль на границе:

$$D(A_0) = \{f \in C(\bar{\Omega}): \nabla^2 f \in C(\Omega), f = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \quad (11.7.1)$$

$$A_0 f = -\nabla^2 f \quad \text{для } f \in D(A_0),$$

где $\bar{\Omega}$ обозначает замыкание Ω . Из формулы Грина

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d^3x = \int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x , следует, что A_0 — симметрический оператор. Мы покажем, что A_0 существенно самосопряжен в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Достигается это установлением того, что $+i$ и $-i$ принадлежат резольвентному множеству (см. § 8.6) и что A_0 имеет чисто точечный спектр.

Согласно теории потенциала (см. § 6.4), с Ω связана некая функция Грина $G(x, x')$ и решением задачи

$$-\nabla^2 u = 4\pi\rho \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad u \text{ непрерывна на } \bar{\Omega} \quad (11.7.2)$$

с заданной функцией $\rho = \rho(x)$, непрерывной на $\bar{\Omega}$, является

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, x') \rho(x') d^3x'. \quad (11.7.3)$$

Для $x' \in \Omega$ функция $G(x, x')$ обращается в нуль при $x \in \partial\Omega$ и

$$G(x, x') = 1/|x - x'| + g(x, x'),$$

где g — некоторая непрерывная функция. Особенность G достаточно слабая, так что

$$M = \sup_{(x)} \int_{\Omega} G(x, x')^2 d^3x' < \infty; \quad (11.7.4)$$

см. ниже упражнение 1. [Это неверно при размерности, большей 3; с другой стороны, двумерный случай аналогичен данному — в нем G имеет логарифмическую особенность.]

На множестве $D(G_0)$, заданном как $C(\Omega)$, уравнение

$$(G_0 f)(x) = \int_{\Omega} G(x, x') f(x') d^3x',$$

определяет ограниченный оператор, так как из неравенства Шварца следует, что

$$\left| \int_{\Omega} G(x, x') f(x') d^3x' \right|^2 \leq M \|f\|^2,$$

а последующее интегрирование по x в Ω дает

$$\|G_0 f\|^2 \leq M \|f\|^2 \times \text{объем}(\Omega).$$

Кроме того, функция Грина удовлетворяет равенству $G(x, x') = G(x', x)$; следовательно, G_0 — симметрический оператор. Поскольку он также ограничен и определен на области, всюду плотной в L^2 , его замыкание, которое мы назовем G , является самосопряженным оператором.

Резольвента оператора A_0 может быть выражена через G . Пусть g — любая функция, непрерывная на $\bar{\Omega}$, и пусть λ — любое не вещественное число. Тогда уравнение

$$Gf - (4\pi/\lambda)f = -(1/\lambda)Gg \quad (11.7.5)$$

имеет единственное решение f в L^2 , так как $4\pi/\lambda$ не вещественно и, следовательно, принадлежит резольвентному множеству G . Из приведенного ниже упражнения 2 вытекает, что Gf и Gg непрерывны, а значит, непрерывна и функция f ; тогда в силу (11.7.2)

$$-\nabla^2[(4\pi/\lambda)f] = 4\pi[f + (1/\lambda)g]. \quad (11.7.6)$$

Это уравнение показывает, что $\nabla^2 f$ — непрерывная функция. Кроме того, f обращается в нуль на границе; это следует из (11.7.5), поскольку Gf и Gg обращаются в нуль на границе. Мы заключаем, что f принадлежит области определения оператора A_0 . Следовательно, (11.7.6) можно записать в виде $A_0 f - \lambda f = g$, т. е.

$$f = (A_0 - \lambda)^{-1} g.$$

Наконец, так как оператор G и резольвента $(G - 4\pi/\lambda)^{-1}$ ограничены, из (11.7.5) следует, что $\|f\| \leq \text{const} \cdot \|g\|$, и можно сделать вывод, что любое вещественное λ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 , откуда следует, что A_0 существенно самосопряжен.

Оператор G является положительным интегральным оператором типа Фредгольма; известно (см. книгу Куранта и Гильберта), что G имеет чисто точечный спектр и что его собственные значения μ_i ($i = 1, 2, \dots$) положительны и накапливаются лишь при 0. Если $Gf_i = \mu_i f_i$, то ясно, что $A_0 f_i = (4\pi/\mu_i) f_i$. Кроме того, если λ вещественно, но $4\pi/\lambda$ не равно ни одному μ_i , то (11.7.5) снова имеет решение; проведенные выше рассуждения показывают, что λ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 .

Закключение. Оператор A_0 имеет чисто точечный спектр; его собственные значения λ_i положительны; $\lambda_i \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя принцип максимума для гармонических функций, покажите, что

$$0 \leq G(x, x') < \frac{1}{|x - x'|} \text{ для } x, x' \in \Omega.$$

Установите, что если Ω — ограниченная область, то существует такая постоянная M , что

$$\int G(x, x')^2 d^3x' \leq M \text{ для всех } x \text{ в } \Omega.$$

2. Пусть $\{f_k\}$ — последовательность Коши пробных функций, которая сходится в $L^2 = L^2(\Omega)$ к распределению $f \in L^2$. Покажите, что функции $(Gf_k)(x)$ равномерно сходятся при $k \rightarrow \infty$, а значит, Gf — непрерывная функция.

Глава 12

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Каноническое представление компактного оператора; спектр; норма Гильберта—Шмидта; след; спектры операторов с компактной резольвентой; применение к дифференциальным и интегральным операторам.

Предварительные сведения: гл. 1—9.

В этой главе мы будем иметь дело с некоторыми классами ограниченных операторов, а именно с классами компактных операторов, операторов Гильберта—Шмидта, ядерных и вырожденных операторов. Эти классы связаны между собой вложениями:

ограниченные $\supset$ компактные $\supset$ Гильберта—Шмидта $\supset$ ядерные $\supset$ вырожденные.

Операторы каждого из этих классов имеют ряд свойств, общих с конечномерными операторами или матрицами. В конечномерном пространстве все эти классы совпадают.

12.1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ

Согласно одному из видов формулы полярного разложения, любая $(n \times n)$ -матрица A может быть записана в виде $A = UR$, где U — унитарная матрица, а R — положительно полуопределенная матрица. Диагонализуя затем матрицу R при помощи некоторой унитарной, произвольную матрицу A можно записать в виде

$$A = U_1 D U_2, \quad (12.1.1)$$

где U_1 и U_2 унитарны, а D диагональна с неотрицательными диагональными элементами. Это конечномерный случай стандартной формы компактного оператора, которая будет приведена ниже.

Если λ — собственное значение A , а $\mathbf{v}$ — вектор, такой, что для некоторого положительного целого m

$$(A - \lambda)^m \mathbf{v} = 0, \quad (A - \lambda)^{m-1} \mathbf{v} \neq 0, \quad (12.1.2)$$

то $\mathbf{v}$ является обобщенным собственным вектором порядка m . Обобщенный собственный вектор порядка 1 представляет собой обычный собственный вектор. Размерность нуль-пространства

$N(A - \lambda)$ есть *геометрическая кратность* λ : это максимальное число линейно независимых обычных собственных векторов, соответствующих данному собственному значению λ . Пространство, порожденное обычными и обобщенными собственными векторами всех порядков, соответствующими λ , называется (*алгебраическим*) *собственным подпространством*. Его размерность называется *алгебраической кратностью* λ . Она равна кратности λ как корня характеристического уравнения $\det(A - \lambda) = 0$ и равна числу появлений λ на главной диагонали жордановой нормальной формы матрицы A . Наибольший порядок собственного вектора для данного λ есть *индекс* λ . Эти определения применимы к любому ограниченному оператору в гильбертовом или банаховом пространстве, когда λ — изолированная точка точечного спектра. Если A — нормальная матрица ($AA^* = A^*A$), то геометрическая и алгебраическая кратности совпадают для каждого собственного значения, индекс равен единице, а все собственные векторы являются обычными собственными векторами.

Одной из стандартных норм матриц (см. книгу Гантмахера [1953]), часто обозначаемой через $\|\cdot\|_2$, является

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{j,k=1}^n |A_{jk}|^2 \right)^{1/2} = (\text{tr}(A^*A))^{1/2}; \quad (12.1.3)$$

это конечномерный случай нормы Гильберта — Шмидта, которая будет приведена ниже.

Сумма собственных значений A с учетом их алгебраической кратности есть *след* матрицы A , он обозначается через $\text{tr } A$ и равен сумме диагональных элементов

$$\text{tr } A = \sum_{j=1}^n A_{jj};$$

кроме того, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ или в более общем виде

$$\text{tr}(A_1 A_2 \dots A_k) = \text{tr}(A_2 \dots A_k A_1)$$

(циклическая перестановка). След A равен произведению $(-1)^{n-1}$ и коэффициента при λ^{n-1} в характеристическом уравнении. Если P — неособенная матрица, то $P^{-1}AP$ имеет те же собственные значения, что и A , а значит, и тот же след. Это можно установить, используя циклическую перестановку: $\text{tr } P^{-1}AP = \text{tr } APP^{-1} = \text{tr } A$.

Ранг $r(A)$ матрицы A размера $n \times n$ равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов (или строк). Это число является также размерностью области значений A ; в таком виде данное определение применимо и к любому вырожденному оператору.

12.2. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Почти все в этом параграфе справедливо для операторов в банаховом пространстве или для отображений одного банахова пространства на другое (см. Като [1966]), но мы будем рассматривать лишь ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Как будет ясно из нижеследующего определения, только ограниченный оператор может быть компактным.

Оператор A называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если для каждой ограниченной последовательности $\{\varphi_j\}$ элементов из H последовательность $\{A\varphi_j\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. *Замечание.* Если A не является ограниченным, то мы могли бы найти ограниченную последовательность $\{\varphi_j\}$, такую, что $\|A\varphi_j\| \rightarrow \infty$, а потому A не был бы компактным. Как мы видим, компактный оператор можно определить как оператор, который преобразует последовательность, сходящуюся слабо, в последовательность, сходящуюся сильно.

Оператор A^*A положительно полуопределен, и мы определяем $R = (A^*A)^{1/2}$, как в § 9.10. Так как $\|Rx\| = \|Ax\|$ для всех $x \in H$, то R — компактный оператор, если таковым является A . В самом деле, если $\{A\varphi_j\}$ сходится, то

$$\|R\varphi_j - R\varphi_k\| = \|A\varphi_j - A\varphi_k\|,$$

и значит, $\{R\varphi_j\}$ также сходится.

Лемма. *Если A — компактный оператор, то R имеет чисто точечный спектр с неотрицательными собственными значениями, причем или их конечное число, или они накапливаются только вблизи $\lambda = 0$. Положительные собственные значения имеют конечную кратность (и, конечно, индекс, равный единице, поскольку R самосопряжен).*

Доказательство. Если бы непрерывный спектр в смысле Гильберта не был бы пуст, он содержал бы число $\lambda_0 \neq 0$ (фактически положительное), так как этот спектр является совершенным множеством (см. упражнение 2 § 11.5). Тогда нашлась бы бесконечная ортонормированная последовательность $\{u_k\}$, такая, что $\|Ru_k - \lambda_0 u_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, но это бы противоречило компактности R , ибо последовательность $\{u_k\}$ ограничена, а если она содержит подпоследовательность $\{v_k\}$, для которой $\{Rv_k\}$ сходится, скажем, к ω , то $\lambda_0 v_k$ сходилась бы к ω . Но $(\lambda_0 v_k, x) \rightarrow 0$ при любом x , поскольку $\{v_k\}$ ортонормирована, откуда следует, что $\omega = 0$. С другой стороны, $\|\lambda_0 v_k\| = |\lambda_0|$ для всех k , откуда следует, что $\omega \neq 0$. Следовательно, R имеет чисто точечный спектр. Аналогичные рассуждения показывают, что собственные значения не могут накапливаться при $\lambda \neq 0$ и что не существует собственных значений с бесконечной кратностью.

Пусть теперь $\{\varphi_j\}$ — максимальная ортонормированная система собственных векторов R , соответствующих положительным собственным значениям $\{\alpha_j\}$, т. е. $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормирован-

ная система в $N(R)^\perp$. Для каждого j определим $\psi_j = (1/\alpha_j) A\varphi_j$; тогда

$$\begin{aligned}(\psi_j, \psi_k) &= \frac{1}{\alpha_j \alpha_k} (A\varphi_j, A\varphi_k) = \frac{1}{\alpha_j \alpha_k} (\varphi_j, R^2 \varphi_k) = \\ &= \frac{1}{\alpha_j \alpha_k} (\varphi_j, \alpha_k^2 \varphi_k) = \delta_{jk}.\end{aligned}$$

Следовательно, система $\{\psi_j\}$ также ортонормирована. Если x — линейная комбинация векторов φ_j , то

$$Ax = \sum (\varphi_j, x) \alpha_j \psi_j. \quad (12.2.1)$$

Это выражение справедливо также и для $x \in N(R) = N(A)$, ибо тогда все $(\varphi_j, x) = 0$. Таким образом, это справедливо для всех x .

Теорема. Оператор A компактен тогда и только тогда, когда существуют ортонормированные последовательности $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ одинаковой длины (конечной или бесконечной) и соответствующая последовательность $\{\alpha_j\}$ положительных чисел, которая сходится к нулю (если она не является конечной), такие, что A задается формулой (12.2.1). Оператор, сопряженный A , определяется так:

$$A^*y = \sum (\psi_j, y) \alpha_j \varphi_j. \quad (12.2.2)$$

Доказательство. Если A компактен, то существование последовательностей $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\alpha_j\}$ было установлено выше. Мы докажем обратное: если такие последовательности даны, то оператор A , определяемый из (12.2.1), компактен. С этой целью возьмем ограниченную последовательность $\{x_r\}_1^\infty$ в H . Нам нужно показать, что $\{Ax_r\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $\{x_r\}$ ограничена, то, согласно упражнению 4 § 1.9, она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{x_r\}$. Мы покажем, что из слабой сходимости $\{x_r\}$ следует сильная сходимость последовательности $\{Ax_r\}$. В силу ограниченности x_r существует такая постоянная M , что

$$\sum_j |(\varphi_j, x_r)|^2 \leq M^2 \quad \text{для всех } r.$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем J так, что $\alpha_j < \varepsilon$ для всех $j > J$; тогда

$$\left\| \sum_{j>J} (\varphi_j, x_r) \alpha_j \psi_j \right\| \leq M\varepsilon \quad \text{для всех } r. \quad (12.2.3)$$

Последовательность $\{x_r\}$ слабо сходится. Поэтому для фиксированных ε и J найдется такое R , что

$$|(\varphi_j, x_r - x_s)| \leq \varepsilon / \sqrt{J} \quad (1 \leq j \leq J) \quad \text{для всех } r, s > R.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \sum_{j=1}^J (\varphi_j, x_r - x_s) \alpha_j \psi_j \right\| \leq \varepsilon \max(\alpha_j) \quad \text{для } r, s > R. \quad (12.2.4)$$

Из (12.2.3) и (12.2.4) мы заключаем, что $\{Ax_r\}$ — последовательность Коши, что и требовалось доказать. Наконец, для установления (12.2.2) нам нужно лишь заметить, что если взять так определенный оператор A^* , то $(y, Ax) = (A^*y, x)$ для всех x и y в H .

Замечание. Даже если $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ — бесконечные последовательности, они не обязательно образуют полные системы. Более того, одна из них может быть полной, а другая нет.

Если A — неособенная $(n \times n)$ -матрица, то (12.2.1) эквивалентно (12.1.1), если φ_j взять в качестве строк матрицы U_2 , а ψ_j — в качестве столбцов матрицы U_1 . (Если A — особенная матрица, то некоторые из таких строк и столбцов нужно отбросить — они не вносят вклад в (12.1.1) из-за нулей в диагональной матрице D .)

Мы утверждаем (без доказательства), что спектр компактного оператора T является счетным множеством, которое имеет точку накопления (если она вообще существует) только в $\lambda = 0$. Каждое $\lambda \neq 0$ в $\sigma(T)$ представляет собой собственное значение конечной кратности. Если λ — собственное значение T , то $\bar{\lambda}$ — собственное значение T^* (см. книгу Като [1966, § III. 6.7]).

УПРАЖНЕНИЕ

1. Пусть $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ — полная ортонормированная система, а $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$ — соответствующее множество положительных чисел, которые стремятся к нулю при $j \rightarrow \pm \infty$. Определите точечный и непрерывный спектры оператора A , заданного формулой

$$Ax = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi_j, x) \alpha_j \varphi_{j+i}.$$

12.3. ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Если A — любой ограниченный оператор и $\{\chi_k\}$ — любая полная ортонормированная последовательность в H , естественно представить себе величины $(\chi_k, A\chi_l)$ ($k, l = 1, 2, \dots$) в качестве матричных элементов оператора A . Отсюда хотелось бы определить норму $\|A\|_2$ по аналогии с (12.1.3) как

$$\left[\sum_{k,l} |(\chi_k, A\chi_l)|^2 \right]^{1/2}, \quad (12.3.1)$$

а след — как

$$\sum_k (\chi_k, A\chi_k). \quad (12.3.2)$$

Поэтому мы хотим знать: для каких операторов A эти суммы сходятся и не зависят от выбора последовательности $\{\chi_k\}$?

Говорят, что оператор A является *оператором Гильберта — Шмидта*, если он компактен и положительные числа α_j , входящие в равенство (12.2.1), таковы, что

$$\|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\sum \alpha_j^2)^{1/2} < \infty. \quad (12.3.3)$$

Рассмотрим сумму в (12.3.1), когда A удовлетворяет этому условию. Пусть $\{\varphi_j\}$ расширена до полной ортонормированной системы путем включения собственных векторов из нуль-пространства $N(R)$, а $\{\alpha_j\}$ соответственно дополнена нулями; тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} |(\chi_k, A\chi_l)|^2 &= \sum_l \|A\chi_l\|^2 = \sum_{k,l} |(\varphi_k, A\chi_l)|^2 = \\ &= \sum_{k,l} |(A^*\varphi_k, \chi_l)|^2 = \sum_k \|A^*\varphi_k\|^2 = \\ &= \sum_k \left\| \sum_j (\psi_j, \varphi_k) \alpha_j \varphi_j \right\|^2 = \sum_k \sum_j \alpha_j^2 |(\psi_j, \varphi_k)|^2 = \\ &= \sum_j \alpha_j^2. \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

(Отметим, что перестановка членов рядов возможна лишь тогда, когда ряды абсолютно сходятся.) Таким образом, если A — оператор Гильберта — Шмидта, то сумма в (12.3.1) сходится и не зависит от выбора последовательности. Кроме того,

$$\|A\|_2^2 = \sum_l \|A\chi_l\|^2. \quad (12.3.5)$$

Обратное утверждение дано следующей леммой, доказательство которой оставляем в качестве упражнения 1 (см. ниже).

Лемма. Если A — ограниченный оператор, такой, что $\sum \|A\chi_l\|_2^2$ сходится для некоторой полной ортонормированной последовательности $\{\chi_l\}$, то (1) эта сумма сходится к одному и тому же значению при замене $\{\chi_l\}$ любой другой полной ортонормированной последовательностью, (2) A^*A имеет такой вид спектра, который требуется, чтобы A был компактен (см. лемму в предыдущем параграфе), и $\sum \alpha_j^2 < \infty$, так что A является оператором Гильберта — Шмидта, и, следовательно, (12.3.4) и (12.3.5) выполняются.

Если выполняется также более сильное условие

$$\sum \alpha_j < \infty, \quad (12.3.6)$$

то A представляет собой ядерный оператор. Мы покажем, что если A удовлетворяет этому условию, то сумма (12.3.2) не зависит от выбора последовательности $\{\chi_k\}$, лишь бы эта последовательность была ортонормированной и полной. Прежде всего

$$\sum_k (\chi_k, A\chi_k) = \sum_k \left[\sum_j (\varphi_j, \chi_k) \alpha_j (\chi_k, \psi_j) \right]. \quad (12.3.7)$$

Из условия (12.3.6) следует, что этот двойной ряд сходится абсолютно. Так как $\alpha_j \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \sum_k |(\varphi_j, \chi_k) (\chi_k, \psi_j)| &\leq \\ &\leq \left[\sum_j |(\varphi_j, \chi_k)|^2 \sum_k |(\chi_k, \psi_j)|^2 \right]^{1/2} = \|\varphi_j\| \|\psi_j\| = 1, \end{aligned}$$

то сумма абсолютных значений членов в (12.3.7) не превышает $\sum \alpha_j < \infty$. Поэтому в (12.3.7) можно сначала провести суммирование по k и получить

$$\sum_k (\chi_k, A\chi_k) = \sum_j \alpha_j (\varphi_j, \psi_j) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } A. \quad (12.3.8)$$

Ядерные операторы играют известную роль в квантовой статистике (см. гл. 14).

Заметим, что вторая сумма в (12.3.8) может сходиться (и даже абсолютно) для компактного оператора A , который не относится к ядерным операторам.

Наконец, если сумма (12.2.1) включает лишь конечное число членов, скажем r , т. е. если A^*A имеет лишь конечное число ненулевых собственных значений, каждое из которых конечной кратности, то A является *вырожденным оператором ранга r* ; тогда

$$r = \dim R(A) = \dim R(A^*).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите сформулированную выше лемму. Указание для части (1): запишите сумму в виде

$$\sum_{k,l} |(\omega_k, A\chi_l)|^2,$$

где $\{\omega_k\}$ — любая другая полная ортонормированная последовательность. Указание для части (2): выберите подходящую последовательность $\{\omega_k\}$, используя собственные векторы и приближенные собственные векторы (если требуется) оператора A^*A .

2. Покажите, что из компактности A и ограниченности B следует компактность AB и BA .

3. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, а U — унитарный оператор, то A^* , $(A^*A)^{1/2}$ и U^*AU являются операторами Гильберта — Шмидта и что

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \|(A^*A)^{1/2}\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

4. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, то $\|A\| \leq \|A\|_2$, а A^*A — ядерный оператор и $\|A\|_2^2 = \text{tr } A^*A$.

5. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, а B — ограниченный оператор, то AB и BA — операторы Гильберта — Шмидта, причем

$$\|BA\|_2 \leq \|B\| \|A\|_2, \quad \|AB\|_2 \leq \|B\| \|A\|_2.$$

6. Покажите, что если A и B — операторы Гильберта — Шмидта, то $A+B$ — также оператор этого класса и что

$$\|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

7. Пусть A и B — операторы Гильберта — Шмидта. Покажите, что AB и BA — ядерные операторы и что

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA, \quad |\text{tr } AB| \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$$

8. Покажите, что если A — ядерный оператор, то A^* тоже ядерный оператор, причем $\text{tr } A^* = \overline{\text{tr } A}$.

9. Пусть A — ядерный оператор, а B — ограниченный. Покажите, что AB и BA — ядерные операторы и $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Указание. При помощи полярного разложения запишите $A = UR$; тогда $C = UR^{1/2}$ и $D = R^{1/2}$ — операторы Гильберта — Шмидта, а $A = CD$.

10. Покажите, что из вырожденности A и ограниченности B следует вырожденность операторов A^* , AB , BA , причем

$$r(A^*) = r(A), \quad r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}.$$

Некоторые из приведенных выше результатов можно суммировать в виде следующих утверждений:

1. $\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) = \operatorname{tr}(A_2 \cdots A_k A_1)$ в том случае, когда $A_1, \dots, A_k$ ограничены и хотя бы один из них является ядерным или хотя бы два из них являются операторами Гильберта — Шмидта.

2. Норма Гильберта — Шмидта удовлетворяет всем требованиям нормы.

3. Операторы Гильберта — Шмидта образуют гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:

$$(A, B) = \operatorname{tr} A^* B = \sum (A \chi_l, B \chi_l).$$

В этом случае нужно доказать полноту пространства. Для этого либо воспользуйтесь книгой Като [1966, § V.2.4], либо рассматривайте это доказательство как несколько более трудное упражнение.

12.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА

Если $K(x, y)$ — непрерывная функция на единичном квадрате плоскости x, y , то оператор K , определенный в $L^2(0, 1)$ при помощи формулы

$$(Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy,$$

является прототипом оператора класса Гильберта — Шмидта. Операторы такого рода появляются в качестве резольвент регулярных операторов Штурма — Лиувилля, где $K(x, y)$ — функция Грина (см. § 10.6).

Существенное обобщение состоит в следующем. Обозначим через H гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ и допустим, что $K = K(x, y)$ — некое распределение в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для того чтобы определить аналог приведенного выше интеграла, возьмем $\kappa_m(x, y)$ ($m = 1, 2, \dots$) — функции в $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, которые сходятся к $K(x, y)$ в L^2 при $m \rightarrow \infty$. Тогда для любого g в H $\psi_l(y)$ ($l = 1, 2, \dots$) будут функциями в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые сходятся к $g(y)$ в L^2 при $l \rightarrow \infty$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что функции

$$\int \kappa_m(x, y) \psi_l(y) d^n y \quad (m, l = 1, 2, \dots) \quad (12.4.1)$$

образуют последовательность Коши в $L^2(\mathbb{R}^n) = H$. Обозначим через $f(x)$ предел этой последовательности и запишем

$$f(x) = (Kg)(x) = \int K(x, y) g(y) d^ny. \quad (12.4.2)$$

2. Покажите, что

$$\|f\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \int \kappa_m(x, y) \psi_l(y) d^ny \right\| \leq \|K\|_0 \|g\|, \quad (12.4.3)$$

где $\|K\|_0$ — норма $K(x, y)$ в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Это неравенство показывает, что K , определяемый формулой (12.4.2), является ограниченным оператором и что его норма $\|K\|$ не превышает $\|K\|_0$.

Пусть теперь $\{\chi_k\}_1^\infty$ — полная ортонормированная последовательность в $L^2(\mathbb{R}^n) = H$. Для простоты мы допустим, что $\chi_k(x)$ — гладкие вещественные функции. Тогда функции

$$\chi_k(x) \chi_l(y) \quad k, l = 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную последовательность в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Эта последовательность является полной, но мы используем лишь неравенство Бесселя

$$\sum_{k,l} |(\chi_k, K\chi_l)|^2 \leq \|K\|_0^2, \quad (12.4.4)$$

из которого в силу леммы предыдущего параграфа следует, что K — оператор Гильберта — Шмидта.

12.5. ОПЕРАТОРЫ С КОМПАКТНОЙ РЕЗОЛВЕНТОЙ

Пусть T — замкнутый оператор, резольвента которого $R_\lambda = (T - \lambda)^{-1}$ компактна для некоторого λ_0 в резольвентном множестве $\rho(T)$. Тогда резольвентное уравнение, записанное в виде

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} (I + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda), \quad (12.5.1)$$

показывает, что R_λ — компактный оператор для любого другого λ из $\rho(T)$, поскольку второй множитель в правой части уравнения ограничен. Такой оператор T называется *оператором с компактной резольвентой*.

Мы знаем, что спектр $\sigma(R_{\lambda_0})$ состоит из ограниченного счетного множества без каких-либо точек накопления, кроме нуля, и что любое $\mu \neq 0$ в $\sigma(R_{\lambda_0})$ есть собственное значение конечной кратности. Это сразу позволяет нам узнать спектр T . Прежде всего допустим, что $\mu \neq 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(R_{\lambda_0})$. Тогда для любого $y \in H$ уравнение

$$R_{\lambda_0} x - \mu x = y$$

имеет решение x . В частности, если z — произвольный элемент H и мы положим $y = -\mu R_{\lambda_0} z$, то уравнение

$$R_{\lambda_0} x - \mu x = -\mu R_{\lambda_0} z$$

имеет решение x . Отсюда следует, что x находится в области определения оператора $T - \lambda_0$ (которая является областью значений оператора R_{λ_0}). Следовательно, уравнение

$$x - \mu (T - \lambda_0) x = -\mu z,$$

т. е.

$$Tx - (\lambda_0 + 1/\mu) x = z,$$

имеет решение x для любого z . Иначе говоря, $\lambda_0 + 1/\mu$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(T)$.

С другой стороны, если $\mu \neq 0$ — собственное значение R_{λ_0} , а x — соответствующий собственный вектор, т. е. если

$$R_{\lambda_0} x - \mu x = 0,$$

то $x - \mu (T - \lambda_0) x = 0$, или

$$Tx - (\lambda_0 + 1/\mu) x = 0,$$

откуда следует, что этот же самый x является собственным вектором оператора T , соответствующим собственному значению $\lambda_0 + 1/\mu$. Итак, любое $\lambda \neq \lambda_0$ принадлежит либо $P\sigma(T)$, либо $\rho(T)$, и нам уже известно, что $\lambda_0 \in \rho(T)$. Таким образом, T имеет чисто точечный спектр.

Пусть μ_k — одно из ненулевых собственных значений R_{λ_0} , так что $\lambda_k = \lambda_0 + 1/\mu_k$ есть собственное значение T . Соответствующий спектральный проектор для R_{λ_0} имеет вид

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(\mu_k^-)} (R_{\lambda_0} - \mu)^{-1} d\mu. \quad (12.5.2)$$

Его область значений конечномерна, поскольку μ_k — собственное значение конечной кратности. Путь интегрирования представляет собой достаточно малый контур около μ_k , такой, что он не окружает никакое другое собственное значение и не окружает нуль. Непосредственные вычисления показывают, что при преобразовании $\lambda = \lambda_0 + 1/\mu$ формула (12.5.2) переходит в

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(\lambda_k^-)} (T - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (12.5.3)$$

т. е. P_k является также проектором для T , соответствующим собственному значению λ . Мы видим, что λ_k имеет ту же кратность, что и μ_k . Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если T — оператор с компактной резольвентой, то спектр $\sigma(T)$ состоит из собственных значений λ_k конечной кратности с единственной точкой накопления $\lambda = \infty$.

Как уже отмечалось, резольвента регулярного оператора Штурма—Лиувилля T является интегральным оператором типа Гильберта—Шмидта. Следовательно, теорема 1 применима и T имеет чисто точечный спектр, как было уже установлено в § 10.6. Другим примером дифференциального оператора с компактной резольвентой является лапласиан в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, рассмотренный в § 11.7. Существенно самосопряженный вариант лапласиана в Ω есть оператор A_0 , определенный уравнением (11.7.1). Обратный ему оператор A_0^{-1} , представляющий собой резольвенту оператора A_0 при $\lambda=0$, является интегральным оператором в (11.7.3), ядро которого есть функция Грина $G(x, x')$ для области Ω . Особенность при $x=x'$ интегрируема, в силу чего (см. (11.7.4)) интеграл

$$\iint |G(x, x')|^2 d^3x d^3x'$$

конечен. Поэтому A_0^{-1} —оператор Гильберта—Шмидта, следовательно, компактен, и мы заключаем из теоремы 1, что A_0 имеет чисто точечный спектр, состоящий лишь из собственных значений конечной кратности, которые накапливаются только на бесконечности. Это совпадает с утверждением, сделанным в § 11.7 на основе теории Фредгольма.

Если оператор T с компактной резольвентой еще и самосопряжен, то его собственные векторы образуют полную ортонормированную систему. Если T не является самосопряженным оператором, полная система векторов получается, если (1) включаются обобщенные собственные векторы и (2) удовлетворяются некоторые дополнительные условия. Ниже мы сформулируем две теоремы о полноте, которые использовались в теории гидродинамической устойчивости для установления полноты собственных колебаний малого возмущения стационарного течения; основные операторы этой теории не являются самосопряженными.

Пусть $\lambda_k (k=1, 2, \dots)$ —собственные значения оператора T . Для каждого k область значений E_k проектора P_k , заданного в (12.5.3), представляет собой конечномерное пространство, инвариантное относительно T : $x \in E_k$ тогда и только тогда, когда $Tx \in E_k$. Поэтому T , ограниченный областью E_k , может быть представлен $(n_k \times n_k)$ -матрицей T_k , где $n_k = \dim E_k$. Собственные и обобщенные собственные векторы T_k (см. § 12.1) соответствуют системе векторов x_{ks} ($s=1, \dots, n_k$) в H , которые порождают пространство E_k . При дополнительных условиях, сформулированных ниже в теоремах, линейная оболочка собственных подпространств E_k ($k=1, 2, \dots$) совпадает с пространством H . Тогда для любого вектора $v \in H$ составляющая v в E_k имеет вид

$$\sum_{s=1}^{n_k} c_{ks} x_{ks}, \quad (12.5.4)$$

откуда

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{n_k} c_{ks} x_{ks} \right). \quad (12.5.5)$$

Хотя, вообще говоря, в этой сумме нельзя произвольно переставлять члены, как это разрешено в случае самосопряженности T , мы можем сказать, что векторы $\{x_{ks}\}$ образуют полную систему в том смысле, что их конечные линейные комбинации плотны в H .

Обычно полагают, что в задаче гидродинамической устойчивости могут появляться лишь собственные векторы порядка 1 (т. е. обычные собственные векторы), но это не доказано. Как и в конечномерном случае, собственный вектор порядка m , соответствующий собственному значению λ_k , является вектором $x \in H$, таким, что

$$(T - \lambda_k)^m x = 0, \quad (T - \lambda_k)^{m-1} x \neq 0.$$

При $m > 1$ этот вектор можно характеризовать как решение уравнения

$$(T - \lambda_k) x = y,$$

где y — некоторый собственный вектор порядка $m-1$. Поскольку T — дифференциальный оператор в гидродинамической задаче, отыскание x влечет за собой решение неоднородного дифференциального уравнения, как только y известен. Для этой цели составлены вычислительные программы, но до сих пор не обнаружено никаких обобщенных собственных функций.

Ди Прима и Хабетлер [1969] использовали теорему Наймарка (см. ниже) для доказательства полноты решений задачи Орра — Зоммерфельда, которая является несамосопряженной задачей на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего двумерные собственные колебания возмущений плоского ламинарного течения.

Теорема 2 (Наймарк). Пусть T — оператор с компактной резольвентой, и пусть имеется последовательность концентрических окружностей $|\lambda| = r_l$ ($l = 1, 2, \dots$) в его резольвентном множестве (т. е. не проходящих через какое-либо собственное значение), такая, что

$$\sup \{ \|R_\lambda\| : |\lambda| = r_l \} \rightarrow 0 \text{ при } l \rightarrow \infty; \quad (12.5.6)$$

тогда собственные векторы и обобщенные собственные векторы $\{x_{ks}\}$ оператора T образуют полную систему в H .

Замечание. Так как $\|R_\lambda\| \geq [\text{dist}(\lambda, \sigma(T))]^{-1}$, ясно, что условие (12.5.6) может удовлетворяться лишь в том случае, когда при $k \rightarrow \infty$ собственные значения λ_k станут все более и более разделяться.

Идея доказательства состоит в следующем. Оператор

$$P^{(l)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=r_l} (-R_\lambda) d\lambda$$

представляет собой сумму проекторов P_k для всех собственных значений λ_k , которые лежат внутри окружности $|\lambda|=r_l$. Следовательно, $P^{(l)}v$ является частичной суммой ряда (12.5.5) и становится полной суммой в пределе при $l \rightarrow \infty$. Из определения резольвенты мы имеем $(T - \lambda) R_\lambda = I$, откуда

$$-R_\lambda = (1/\lambda) I - (1/\lambda) T R_\lambda.$$

Если v принадлежит области определения $D(T)$, то

$$T R_\lambda v = R_\lambda T v,$$

откуда

$$P^{(l)}v = v - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=r_l} \frac{1}{\lambda} R_\lambda d\lambda T v.$$

Вследствие условия (12.5.6) теоремы второй член в последнем выражении стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Следовательно, любое $v \in D(T)$ можно представить в виде разложения (12.5.5), но $D(T)$ плотна в H и полнота системы собственных и обобщенных собственных векторов доказана.

Более сильным средством исследования иногда оказывается аналогичная теорема Карлемана, поскольку в ней не требуется, чтобы собственные значения λ_k все более и более разделились при $k \rightarrow \infty$. В этой теореме требуется только, чтобы при $k \rightarrow \infty$ собственные значения концентрировались на комплексной плоскости в некоторых направлениях, проведенных из начала координат, и чтобы резольвента оператора T была оператором Гильберта — Шмидта. Эту теорему использовал Сэттинджер [1970] для доказательства полноты собственных колебаний возмущений общего трехмерного стационарного течения. Общая форма этой теоремы дана в книге Данфорда и Шварца [1963]; мы приведем упрощенную форму, в которой требуется, чтобы собственные значения находились вблизи вещественной оси; в этом отношении T похож на самосопряженный оператор, у которого собственные значения вещественны.

Теорема 3 (Карлеман). Если T — оператор с резольвентой Гильберта — Шмидта и если вдоль каждого луча $\lambda = re^{i\theta}$ (θ фиксировано), исключая вещественную ось ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$), $\|R_\lambda\| = O(|\lambda|^{-1})$ для больших λ , то собственные векторы и обобщенные собственные векторы оператора T образуют полную систему в H .

В гидродинамических задачах собственные значения λ_k лежат в параболической области

$$\operatorname{Re} \lambda \geq \operatorname{const} + \operatorname{const} \cdot (\operatorname{Im} \lambda)^2.$$

Условие теоремы сильнее необходимого; необходимо только, чтобы норма $\|R_\lambda\|$ вела себя указанным выше образом на каждом из пяти лучей, выходящих из начала координат и таких, что угол между смежными лучами меньше $\pi/2$ (см. книгу Данфорда и Шварца).

ВЕРОЯТНОСТЬ. МЕРА

Одномерные и многомерные распределения вероятности; функции распределения; плотности; каноническое разложение неубывающей функции; дискретные, атомные, сингулярные, непрерывные и абсолютно непрерывные распределения вероятности; неубывающие функции нескольких переменных; среднее; математическое ожидание; моменты; стандартное отклонение; характеристическая функция; коэффициенты корреляции и корреляционные матрицы; меры; функции множеств; теорема о расширении и теорема Рисса о представлении для мер; выборка; выборочное среднее; выборочная дисперсия; маргинальная и условная вероятности; нормальное распределение; центральная предельная теорема; метод Монте-Карло; вероятность и мера в гильбертовом пространстве.

Предварительные сведения: гл. 1—3, интеграл Стильтьеса.

Понятие функции распределения вероятностей создает основу изучения вероятностей в конечномерных пространствах. В большинстве случаев в физических приложениях вероятности или дискретны, или абсолютно непрерывны, или представляют собой смесь того и другого, но для полноты концептуальной основы требуется также понятие сингулярно непрерывных распределений. Теория вероятностей применяется главным образом в квантовой механике (что мы обсудим в следующей главе), в статистической механике, в анализе ошибок и в методах Монте-Карло. Замечательным явлением оказывается стремление в среднем к универсальному, так называемому нормальному распределению, составляющее суть центральной предельной теоремы. Функция распределения, маргинальная и условная вероятности используются в методах Монте-Карло, в которых моделируются путем вычислений естественные случайные явления, плохо поддающиеся анализу. Представления о вероятностях и мерах как функций множеств необходимы для изучения вероятности в бесконечномерных и абстрактных пространствах, которые появляются в статистической механике и в теории стохастических процессов.

13.1. ОДНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПЛОТНОСТЬ**

Результаты многих независимых повторений какого-либо наблюдения или эксперимента (например, над атомной системой) можно описать при помощи распределения вероятности. Результатом отдельного наблюдения является совокупность значений некоторых величин; скажем n величин, таких, как углы отклонения,

напряжения, энергии, показания счетчиков и т. п. Итак, этот результат может быть представлен точкой некоторого n -мерного пространства. Для большинства элементарных процессов характерно то, что, как бы тщательно ни контролировались условия опыта, эти результаты меняются значительно и случайным образом от одного повторения к другому. Полученное распределение точек в n -мерном пространстве описывается функцией распределения в этом пространстве. В данном рассмотрении вероятность представляется интуитивным понятием: например, утверждение, что нейтрон имеет вероятность, равную 0.316, пройти через слой фольги без столкновений, подразумевает следующее: (1) так случилось с нейтронами в 31.6% большого числа испытаний, (2) предполагается, что при последующих испытаниях нейтроны будут вести себя аналогично, причем соответствующее процентное отношение будет стремиться к некоторому значению, близкому к 31.6%, когда число испытаний неограниченно возрастает.

В теории вероятностей случаи $n = 1$ и $n > 1$ обычно называются *одномерным* и *многомерным* соответственно. Начнем с одномерного случая. Если ξ — величина, которая определяется в результате эксперимента, то функция F , определяемая из условия

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}, \quad (13.1.1)$$

где для любого вещественного x $P\{\xi \leq x\}$ обозначает вероятность того, что измеряемая величина ξ меньше или равна x , называется *функцией распределения случайной переменной*¹⁾. Другие вероятности могут быть выражены через эту функцию F ; в частности, вероятность того, что ξ попадает в интервал $(x_1, x_2]$, имеет вид

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1); \quad (13.1.2)$$

если функция F имеет скачки, то они описывают вероятность попадания в точки, именно

$$P\{\xi = x_0\} = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0). \quad (13.1.3)$$

Члены в правой части этой формулы обозначают предельные значения, достигаемые функцией $F(x)$, когда $x \rightarrow x_0$ справа и слева соответственно.

Из определения (13.1.1) следует, что $F(x)$ — неубывающая и непрерывная справа функция, принимающая значения от 0 до 1, т. е.

$$F(b) \geq F(a), \quad \text{если } b \geq a, \quad (13.1.4)$$

$$F(a + \epsilon) \rightarrow F(a) \quad \text{при } \epsilon \downarrow 0, \quad (13.1.5)$$

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1. \quad (13.1.6)$$

¹⁾ Автор называет эту функцию кумулятивной вероятностью (cumulative probability), но мы будем придерживаться общепринятого термина. — *Прим. перев.*

Обратно, любая функция с такими свойствами описывает некоторое распределение вероятности. Например, если известна F , то можно сгенерировать с любой точностью множество случайных чисел, имеющих соответствующее распределение, используя для этой цели вычислительную машину.

Требование односторонней непрерывности (13.1.5) довольно произвольно, и мы будем часто записывать равенства, подобные (13.1.3), таким образом, чтобы они не зависели от этого требования. (Правая часть (13.1.3) не зависит от соглашения, что $F(x_0 + 0) = F(x_0)$.)

ПРИМЕР 1

Если ξ принимает лишь конечное число значений $x_1, \dots, x_N$, записанных, допустим, в порядке возрастания и если $P\{\xi = x_i\} = p_i$, то $F(x)$ — ступенчатая функция:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < x_1, \\ \sum_{k=1}^{i-1} p_k & \text{при } x_{i-1} \leq x < x_i \quad (i=2, \dots, N), \\ 1 & \text{при } x_N \leq x < \infty. \end{cases} \quad (13.1.7)$$

Такого рода функции пригодны для рассмотрения бросаний монеты и игральной кости и вообще конечной игры. Они также удобны для описания распределения энергий фотонов, испускаемых при скачкообразном переходе атома из некоторого возбужденного состояния на более низкий энергетический уровень (см. рис. 13.1).

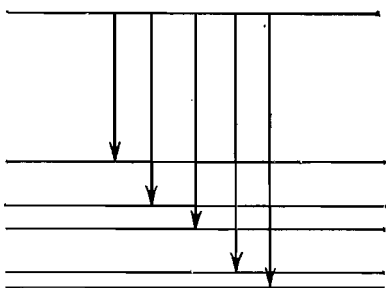


Рис. 13.1. Диаграмма уровней энергии.

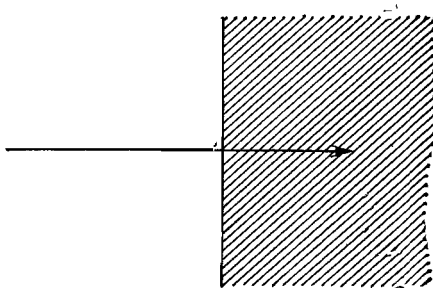


Рис. 13.2. Пробег нейтрона для примера 2.

ПРИМЕР 2

Нейтрон или фотон проникает в вещество равномерной плотности и проходит расстояние ξ до столкновения (рис. 13.2). Функция распределения случайной переменной ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-x/\lambda} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где λ — длина среднего свободного пробега (см. рис. 13.3). Здесь F имеет производную $f(x) = F'(x)$, которая непрерывна всюду, исключая скачок в точке

$x=0$. Эта производная называется *плотностью распределения вероятности*, так как для любого x_0

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1/\Delta x) P\{x_0 < \xi < x_0 + \Delta x\}. \quad (13.1.8)$$

Такое распределение вероятности называется *непрерывным*, или точнее *абсолютно непрерывным* (см. ниже определение).

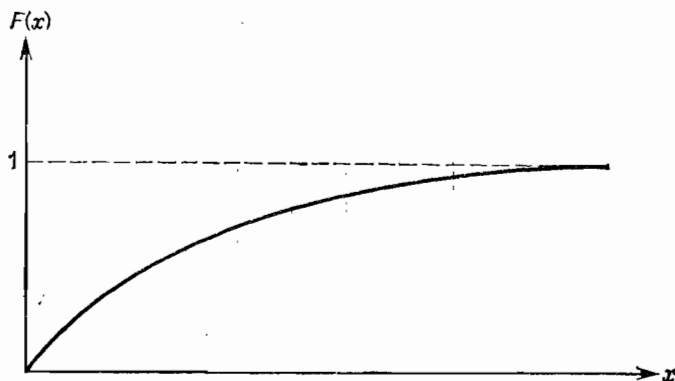


Рис. 13.3. Функция распределения для примера 2.

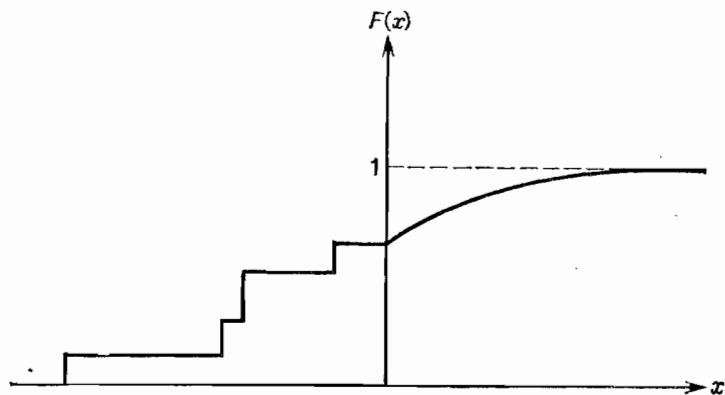


Рис. 13.4. Функция распределения для примера 3.

ПРИМЕР 3

Рассмотрим атом в основном состоянии, находящийся в поле излучения с непрерывным спектром. После поглощения кванта атом может перейти в одно из различных возбужденных состояний или в состояние непрерывного спектра при энергии, большей энергии ионизации, которую примем за нуль энергии. Распределение вероятности энергии E после поглощения одного кванта частично дискретно, частично непрерывно, как на рис. 13.4. Функция распределения $F(x) = P\{E \leq x\}$ является ступенчатой функцией при $x < 0$ и непрерывной функцией при $x \geq 0$.

ПРИМЕР 4

Нейтрон или фотон проходит через бесконечную последовательность параллельных тонких поглощающих слоев фольги, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга, как на рис. 13.5. Пусть ξ — расстояние от первого слоя до того слоя, где происходит поглощение, и пусть α — вероятность поглощения в каждом слое ($0 < \alpha < 1$). Тогда функция распределения переменной ξ записывается так:

$$F(x) = 1 - \alpha^n \quad \text{при} \quad (n-1)d < x \leq nd, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где d — расстояние между последовательными слоями. Эта ступенчатая функция с бесконечным числом ступеней изображена на рис. 13.6

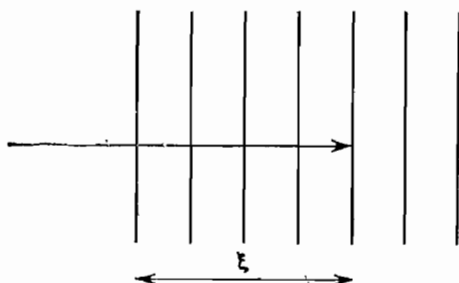


Рис. 13.5. Пробег нейтрона для примера 4.

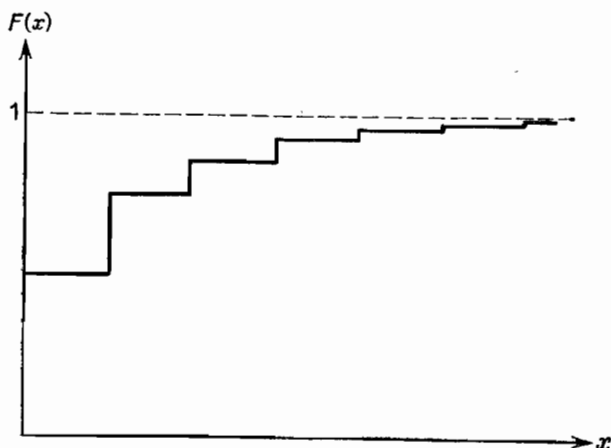


Рис. 13.6. Функция распределения для примера 4.

ПРИМЕР 5

Пусть в последнем примере $\varphi = \varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t$ — переменное напряжение, имеющееся в цепи, в то время как частица движется через последовательность слоев фольги; пусть τ — время, которое требуется для того, чтобы частица прошла от одного слоя до следующего, и пусть $\theta = \omega \tau$. Тогда в момент поглощения частицы напряжение φ имеет значение 0 с вероятностью $1 - \alpha$, зна-

чение $\varphi_0 \sin \theta$ — с вероятностью $\alpha - \alpha^2, \dots$, значение $\varphi_0 \sin n\theta$ — с вероятностью $\alpha^n(1-\alpha)$ и т. д. Функция распределения $F(x) = P\{\varphi \leq x\}$ имеет вид

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (1-\alpha) \quad (\varphi_0 \sin n\theta \leq x);$$

здесь суммирование проводится по всем таким n , что $\varphi_0 \sin n\theta \leq x$. Если θ — иррациональное кратное π , то $F(x)$ имеет бесконечно много скачков, плотно распределенных в интервале $[-\varphi_0, \varphi_0]$.

ПРИМЕР 6 (функция Кантора)

Предположим, что цифровая вычислительная машина имеет приспособление (использующее радиоактивный распад, тепловой шум или что-либо подобное), которое бесконечно генерирует по требованию последовательность независимых случайных чисел $x_1, x_2, \dots$, равномерно распределенных на отрезке

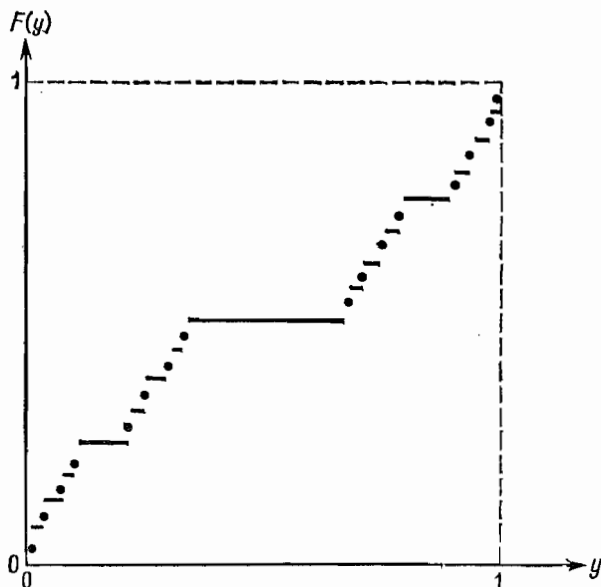


Рис. 13.7. Функция Кантора.

$[0, 1]$; эти числа берутся в качестве значений случайной переменной ξ . Допустим, что каждое число x выражено в виде бесконечного двоичного разложения

$$x = 0.abcd\dots, \quad (13.1.9)$$

где каждая цифра $a, b, c, d, \dots$ имеет значение 0 или 1. Допустим также, что в вычислительной машине имеется подпрограмма, преобразующая каждое такое x в число

$$y = 0.aabbcdd\dots \quad (13.1.10)$$

путем дублирования каждой цифры; числа y принимаем в качестве значений другой случайной переменной η . Легко найти функцию распределения F для переменной η . Любое число y вида (13.1.10) обязательно либо меньше $0.01 = 1/4$, либо больше (или равно) $0.11 = 3/4$ в зависимости от того, меньше x $0.1 = 1/2$

либо больше этой величины (или равно ей). Поэтому $F(y)$ имеет постоянное значение $1/2$ при $1/4 \leq y \leq 3/4$. Аналогично $F(y)$ имеет значение $1/4$ при $1/16 \leq y \leq 3/16$, значение $3/4$ при $13/16 \leq y \leq 15/16$ и т. д. Если y имеет вид (13.1.10), где цифры попарно равны в бесконечном двоичном разложении, то для такого y $F(y) = 0.abcc\ldots$, т. е.

$$P\{\eta < y = 0.aabcc\ldots\} = 0.abcc\ldots \quad (13.1.11)$$

Если y не представляется в виде (13.1.10), то это значение лежит в одном из интервалов постоянства F , описанных выше.

Сумма длин всех интервалов постоянства F равна

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1,$$

т. е. эти интервалы заполняют интервал $[0, 1]$, а то, что отброшено, имеет меру нуль. С другой стороны, F непрерывна, поскольку: (1) если y_0 имеет вид (13.1.10), то утверждение $y \rightarrow y_0$ с очевидностью влечет за собой $x \rightarrow x_0$ в соответствии с (13.1.11), (2) любое другое y_0 принадлежит интервалу постоянства, а следовательно, тем более интервалу непрерывности функции F . График функции $F(y)$ изображен на рис. 13.7.

Отступление по поводу множеств меры нуль

Множество S на $\mathbb{R}$ имеет меру нуль, если оно может быть покрыто совокупностью интервалов, сумма длин которых произвольно мала. Например, пусть S состоит из рациональных чисел в $(0, 1)$. Они могут быть записаны в виде последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, например, так: $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, \ldots$. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ α_1 может быть заключено в интервал длины $\varepsilon/2$, α_2 — в интервал длины $\varepsilon/4$, $\ldots$, α_n — в интервал длины $\varepsilon/2^n$ и т. д. Эти интервалы покрывают S , а сумма их длин равна ε . Следовательно, рациональные числа образуют множество меры нуль.

Если в примере 6 отбросить первые $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}$ интервалов постоянства функции $F(y)$ (взятых в описанном выше порядке), то остаток интервала $[0, 1]$ будет состоять из интервалов с суммарной длиной, равной $1/2^n$, что может быть сделано произвольно малым при достаточно большом n . Таким образом, множество значений y , в которых F не является постоянной, имеет меру нуль. Иначе говоря, производная $F'(y)$ существует и равна нулю везде, исключая множество меры нуль.

Если некоторое соотношение справедливо на всем $\mathbb{R}$, исключая, возможно, множество меры нуль, то говорят, что это соотношение справедливо почти всюду (или почти везде). При этом предполагается, что интервалы, о которых шла речь выше, не являются вырожденными (интервалами $[a, a]$, состоящими из единственной точки); поэтому можно допустить, что все интервалы являются открытыми. В $\mathbb{R}^n$ множество меры нуль определяется как множество, которое может быть заключено в открытое множество произвольно малого объема.

Рассмотренная функция $F(y)$ представляет собой известный пример Кантора непрерывной отличной от постоянной функции, производная которой $f(y) = F'(y)$ равна нулю почти всюду.

Если функция распределения $F(x)$ независимо от того, является ли она непрерывной, имеет производную, равную нулю почти везде, то распределение вероятности называется *сингулярным*. Распределение в последнем примере является как непрерывным, так и сингулярным.

Используя две теоремы о декомпозиции, одна из которых принадлежит Жордану, а другая — Лебегу (см. книгу Феллера [1966]), любую неубывающую функцию $F(x)$ можно записать в виде суммы трех неубывающих функций:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x).$$

Здесь $F_1(x)$ — чисто ступенчатая функция со скачками $p_1, p_2, \dots$ в точках $x_1, x_2, \dots$ (не обязательно упорядоченных), т. е. имеющая вид

$$F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad (\forall p_i > 0).$$

Далее, $F_2(x)$ непрерывна и является интегралом от своей производной $f(x) \geq 0$ (в смысле Лебега):

$$F_2(x) = \int_0^x f(y) dy, \quad f(x) = F_2'(x).$$

Наконец, $F_3(x)$ сингулярна и непрерывна. Если $F(x)$ — чисто ступенчатая функция, как в рассмотренных выше примерах 1, 4 и 5, то распределение вероятности называется *атомным*; в примерах 1 и 4 распределения называют также *дискретными* (скачки происходят в изолированных точках). Функция $F_2(x)$ принадлежит к классу функций, называемых *абсолютно непрерывными*; см. § 13.10.

13.2. СРЕДНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Допустим, что $F(x)$ — функция распределения случайной переменной ξ и что желательно найти среднее значение ξ для некоторой продолжительной последовательности измерений. Сначала рассмотрим случай, в котором ξ — ограниченная случайная переменная, т. е. предположим, что $F(x) = 0$ при $x < a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$. Таким образом, все измеренные значения ξ находятся в интервале $[a, b]$. Чтобы получить приближенно среднее значение, разобьем интервал $[a, b]$ на N подынтервалов точками x_i (i от 0 до N) так, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Обозначим через x'_i произвольную точку в подынтервале $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Доля измерений, в которых ξ находится между x_{i-1} и x_i , составляет $F(x_i) - F(x_{i-1})$. Поэтому приближенно среднее значение равно

$$\sum_{i=1}^N x'_i [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

В пределе, когда разбиение бесконечно измельчается ($N \rightarrow \infty$), эта сумма стремится к интегралу Стильтьеса

$$\int_a^b x dF(x). \quad (13.2.1)$$

Теория интеграла Стильтьеса от непрерывной функции почти совпадает с соответствующей теорией интеграла Римана (см. книгу Натансона [1950, гл. 8]). Интеграл Стильтьеса широко используется в физике. В частности, в рассмотренном выше примере 3 такое использование позволяет включить в один член суммирование по дискретным состояниям и интегрирование по непрерывным состояниям. Для сумм Римана — Стильтьеса обычно используются следующие обозначения: интервал $x_{i-1} < x \leq x_i$ обозначается через Δ_i , а $F(x_i) - F(x_{i-1})$ — через $F(\Delta_i)$. Тогда рассматриваемая сумма записывается как $\sum x'_i F(\Delta_i)$, а соответствующая сумма Римана — Стильтьеса для непрерывной функции $\varphi(x)$ — как $\sum \varphi(x'_i) F(\Delta_i)$. Обозначения такого вида особенно удобны в многомерном случае, который будет обсуждаться в следующем параграфе.

Интеграл (13.2.1) называется *средним значением* или *ожидаемым значением* или *математическим ожиданием* величины ξ и обозначается через $E(\xi)$ или μ . В общем случае неограниченной случайной переменной математическое ожидание имеет вид

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b x dF(x) \quad (13.2.2)$$

при условии, что этот предел существует. Если предел не существует, то среднее значение измерений величины не стремится к какому-либо фиксированному предельному значению при неограниченном росте числа повторений эксперимента.

Пусть теперь φ — непрерывная функция. Каждому измеренному значению x величины ξ соответствует некоторое число $\varphi(x)$, и эти числа являются значениями случайной переменной, обозначаемой через $\varphi(\xi)$. Ожидаемое значение $\varphi(\xi)$ представляет собой

$$E(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) \quad (13.2.3)$$

снова при условии, что интеграл существует. Отметим некоторые важные случаи.

Случай 1. $\varphi(x)$ — степень x . Величины $E(\xi^k)$, $k=1, 2, \dots$, если они существуют, называются *моментами* данного распределения. Первый из них есть $E(\xi) = \mu$. Важной комбинацией первых двух моментов является *дисперсия* $\sigma^2 = E((\xi - \mu)^2)$. Так как $E(1) = 1$ и $E(\xi) = \mu$, дисперсию σ^2 можно записать также в виде

$$\sigma^2 = E(\xi^2) - 2\mu E(\xi) + \mu^2 E(1) = E(\xi^2) - \mu^2;$$

величина σ называется *стандартным отклонением* ξ . Если ξ — ограниченная случайная переменная, то моменты всех порядков существуют и конечны. Важнейшей классической задачей является *проблема моментов*, состоящая в вычислении F , когда все моменты известны (см. книгу Феллера, т. 2).

Случай 2. φ — ограниченная непрерывная функция. Тогда $E(\varphi(\xi))$ всегда существует. Наиболее важный пример дает $\varphi(x) = e^{-i\lambda x}$ (λ вещественно). Комплекснозначная функция

$$\chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x) \quad (13.2.4)$$

вещественного параметра λ называется *характеристической функцией* распределения вероятности или случайной переменной ξ . Эта функция играет важную роль в доказательстве центральной предельной теоремы в § 13.6.

Случай 3. φ — пробная функция ($\varphi \in C_0^\infty$). Тогда распределение f (в смысле Шварца) можно определить как линейный функционал

$$\langle f, \varphi \rangle = E(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty. \quad (13.2.5)$$

Интегрирование по частям (по поводу интегрирования по частям в интегралах Стильтьеса см. книгу Натансона [1950]) дает

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(x) F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi'(x) dx,$$

но проинтегрированный член обращается в нуль, и, следовательно,

$$\langle f, \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle,$$

где F — распределение, определяемое через функцию $F(x)$ формулой

$$\langle F, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \psi(x) dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty.$$

Таким образом, $f = F'$. Распределение f называется *вероятностной мерой* случайной величины ξ (f является обычной функцией тогда и только тогда, когда $F(x)$ — абсолютно непрерывная функция, и в таком случае $f(x)$ представляет собой плотность вероятности $F'(x)$ величины ξ).

Функция $F(x)$ является распределением медленного роста, поскольку она ограничена; поэтому $f = F'$ тоже распределение медленного роста, а характеристическая функция $\chi(\lambda)$ равна умноженному на $\sqrt{2\pi}$ преобразованию Фурье от f .

13.3. ДВУМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НЕУБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если каждое повторение эксперимента дает два числа x, y , являющихся значениями случайных переменных ξ и η , то распределение полученных точек на плоскости x, y называется *двумерным*. Сейчас мы будем рассматривать эти двумерные распределения; многомерный случай будет очевидным обобщением, и мы кратко обсудим его в конце данного параграфа.

Совместная функция распределения $F(\cdot, \cdot)$ задается в виде

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} \quad (13.3.1)$$

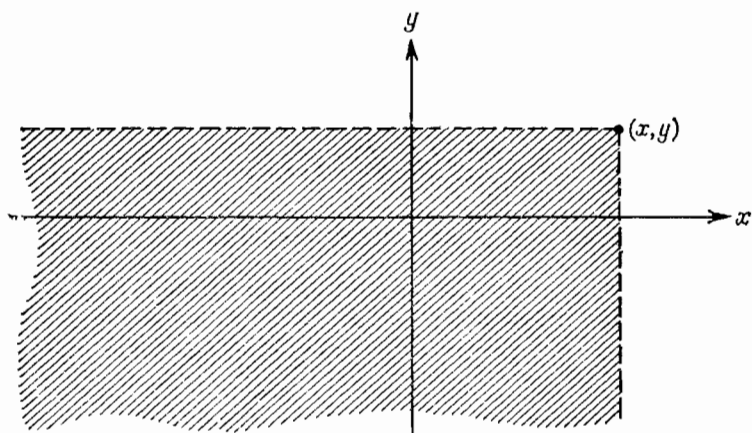


Рис. 13.8. Область плоскости, указанная в определении (13.3.1).

и представляет собой долю тех экспериментов, для которых результирующие точки лежат в квадранте, расположенном левее и ниже точки (x, y) (см. рис. 13.8). Другие вероятности могут быть выражены через функцию $F(\cdot, \cdot)$. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_2, y) - F(x_1, y)$ есть вероятность того, что $x_1 < \xi \leq x_2$, тогда как η

имеет любое значение, не превышающее y . Если к тому же $y_1 < y_2$, то $P\{x_1 < \xi \leq x_2, y_1 < \eta \leq y_2\} =$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (13.3.2)$$

Если указанную прямоугольную область плоскости обозначить через $\square$:

$$\square = \{(x, y): x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\},$$

то (13.3.2) можно записать в виде

$$P\{(\eta, \xi) \in \square\} = F(\square), \quad (13.3.3)$$

где $F(\square)$ стоит вместо правой части (13.3.2).

Ясно, что $F(\infty, \infty) = 1$, а $F(x, -\infty) = 0$ для любого x и $F(-\infty, y) = 0$ для любого y . Требование о неубывании $F(\cdot)$ в одномерном случае заменяется здесь требованием, чтобы $F(\square) \geq 0$ для любого прямоугольника с условием $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Это требование включает также предельный случай $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) \geq 0$ при $y_1 \rightarrow -\infty$ и предельный случай $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) \geq 0$ при $x_1 \rightarrow -\infty$. При этих условиях $F(x, y)$ называется *неубывающей функцией* двух переменных x и y .

Для того чтобы найти среднее значение непрерывной функции $\varphi(\xi, \eta)$, допустим сначала, что ξ и η ограничены так, что получаемые из эксперимента точки (x, y) лежат в прямоугольнике $a < x < b, c < y < d$. Этот прямоугольник разбивается на множество малых прямоугольников $\square_{jk}$ горизонтальными и вертикальными прямыми $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ и $y = y_0, y_1, y_2, \dots, y_M$. Если (x'_j, y'_k) — точка в $\square_{jk}$, то среднее значение $\varphi(\xi, \eta)$ приближенно представляется двойной суммой Римана—Стилтьеса

$$\sum_{j,k} \varphi(x'_j, y'_k) F(\square_{jk}), \quad (13.3.4)$$

которая сходится к двойному интегралу Стилтьеса $\int_a^b \int_c^d \varphi(x, y) \times \times d^2 F(x, y)$, когда разбиение бесконечно измельчается ($N, M \rightarrow \infty$). Если для неограниченного случая этот интеграл имеет предел при $b, d \rightarrow \infty$ и $a, c \rightarrow -\infty$, то математическое ожидание $\varphi(\xi, \eta)$ определяется как

$$E(\varphi(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) d^2 F(x, y). \quad (13.3.5)$$

Если вторая производная $f(x, y) = \partial^2 F / \partial x \partial y$ существует и является кусочно непрерывной, то она называется *плотностью* данного распределения, а само распределение тогда называется *абсолютно непрерывным*; в этом случае

$$E(\varphi(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy. \quad (13.3.6)$$

В другом крайнем случае распределение может быть дискретным относительно обеих переменных, т. е. вероятности могут концентрироваться в изолированных точках плоскости x, y . Между указанными крайними случаями существует столько возможностей, что мы не будем проводить полную их классификацию.

Если соответствующие интегралы существуют, то числа $E(\xi^k \eta^l)$ представляют собой *моменты* двумерного распределения. Первые моменты суть средние:

$$\mu_1 = E(\xi), \quad \mu_2 = E(\eta); \quad (13.3.7)$$

из вторых моментов получается *ковариационная матрица* с элементами

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= E((\xi - \mu_1)^2) = E(\xi^2) - \mu_1^2, \\ \rho_{22} &= E((\eta - \mu_2)^2) = E(\eta^2) - \mu_2^2, \\ \rho_{12} &= \rho_{21} = E((\xi - \mu_1)(\eta - \mu_2)) = E(\xi\eta) - \mu_1\mu_2. \end{aligned} \quad (13.3.8)$$

Величина $\rho = \rho_{12}/\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}$ называется *коэффициентом корреляции*; согласно неравенству Шварца, ρ лежит в интервале $[-1, 1]$. Если $\rho = \pm 1$, то ξ и η полностью коррелированы, а все точки (x, y) , получаемые в эксперименте, лежат на некоторой прямой, проходящей через точку (μ_1, μ_2) . Это имеет место и в том случае, когда ρ не определено, т. е. когда $\rho_{11} = 0$ или $\rho_{22} = 0$. Если ξ и η являются *независимыми* случайными переменными (а это значит, что $F(x, y)$ имеет вид $F_1(x)F_2(y)$), то $\rho = 0$ и переменные не коррелированы (из того, что ξ велико, не следует, что η велико или мало). Однако ρ может быть равным нулю и в том случае, когда ξ и η не являются независимыми; такой пример дает распределение с плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} (4\pi)^{-1} & \text{при } x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Здесь $\rho_{12} (= \rho_{21})$ обращается в нуль в силу симметрии f , но f нельзя записать в виде $f_1(x)f_2(y)$.

Используя функцию распределения $F(x, y)$, мы определим *вероятностную меру* на $\mathbb{R}^2$ как распределение f , именно

$$\langle f, \varphi \rangle = \iint \varphi(x, y) d^2F(x, y) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (13.3.9)$$

Здесь f — производная распределения $\partial^2 F / \partial x \partial y$ и является обычной функцией тогда и только тогда, когда F абсолютно непрерывна. Двумерная *характеристическая функция*

$$\chi(\lambda) = \iint e^{-i\lambda \cdot x} d^2F(x, y) \quad (13.3.10)$$

равна умноженному на 2π преобразованию Фурье от f .

Теперь сделаем несколько замечаний о многомерном случае, который является непосредственным обобщением двумерного случая.

(Совместной) функцией распределения случайных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ является функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\}. \quad (13.3.11)$$

Обозначим через $\square$ прямоугольный параллелепипед:

$$\square = \{x: a_1 < x_1 \leq b_1, \dots, a_n < x_n \leq b_n\} \quad (13.3.12)$$

и введем обозначение

$$F(\square) = P(\xi \in \square), \quad (13.3.13)$$

где ξ — векторнозначная случайная переменная, компоненты которой суть $\xi_1, \dots, \xi_n$. Явная формула для $F(\square)$ представляет собой обобщение (13.3.2). Мы определим вершину v параллелепипеда как точку x , для которой каждая компонента x_j равна или a_j , или b_j , и обозначим количество a среди компонент вершины v через $N_a(v)$. Тогда

$$F(\square) = \sum_v (-1)^{N_a(v)} F(v), \quad (13.3.14)$$

причем сумма берется по всем 2^n вершинам $\square$. Из вероятностной интерпретации (13.3.11) ясно, что

$F(x)$ — функция неубывающая: $F(\square) \geq 0$ для каждого $\square$, (13.3.15)

$F(x)$ нормирована: $F(\infty, \dots, \infty) = 1$ и $F(x_1, \dots, x_n) = 0$,

если любое $x_j = -\infty$. (13.3.16)

Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то интеграл Стильеса

$$\int_{\square} \varphi(x) d^n F(x) \quad (13.3.17)$$

является пределом сумм Римана—Стильеса: $\square$ разбивают на большое число малых параллелепипедов $\square_j$ гиперплоскостями $x_j = x_{jp}$ ($p = 0, 1, \dots, N$), где

$$a_j = x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{jN} = b_j,$$

а затем полагают интеграл (13.3.7) равным

$$\lim \sum_j \varphi(x'_j) F(\square_j),$$

где для каждого j x'_j — точка внутри $\square_j$, а $\lim$ означает предел при бесконечном измельчении разбиения $\square$. Если $\varphi(x)$ ограничена во всем $\mathbb{R}^n$, то в силу свойств (13.3.15), (13.3.16) функции F интеграл (13.3.17) имеет предел, обозначаемый через $\int_{\mathbb{R}^n}$, когда

независимо b_j стремятся к $+\infty$, а a_j к $-\infty$.

Вероятностной мерой величин ξ , называется распределение f , определенное как

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n F(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (13.3.18)$$

а характеристическая функция определяется как

$$\chi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda \cdot x} d^n F(x). \quad (13.3.19)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите функцию распределения $F(x, y)$ случайных переменных ξ, η , значения которых равномерно распределены на единичной окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$.
2. Покажите, что характеристической функцией распределения из упражнения 1 является

$$\chi(\lambda) = J_0(|\lambda|).$$

13.4. НОРМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Наиболее выдающимся положением элементарной теории вероятностей является центральная предельная теорема (см. следующий параграф), которая утверждает, что в результате осреднения все

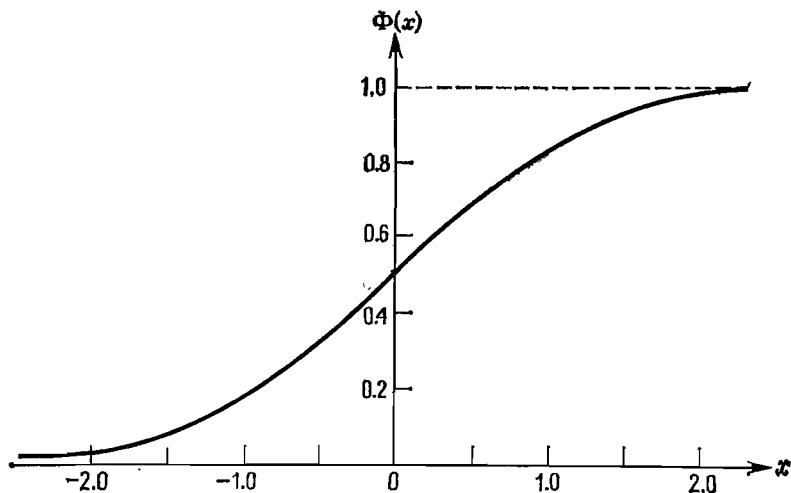


Рис. 13.9. Функция нормального распределения.

распределения вероятности стремятся к нормальным или гауссовым распределениям. Эти распределения мы сейчас и рассмотрим, начиная с одномерного случая. *Нормальным* или *гауссовым*

распределением на $\mathbb{R}$ называется распределение с функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (13.4.1)$$

и плотностью

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (13.4.2)$$

как показано на рис. 13.9 и 13.10.

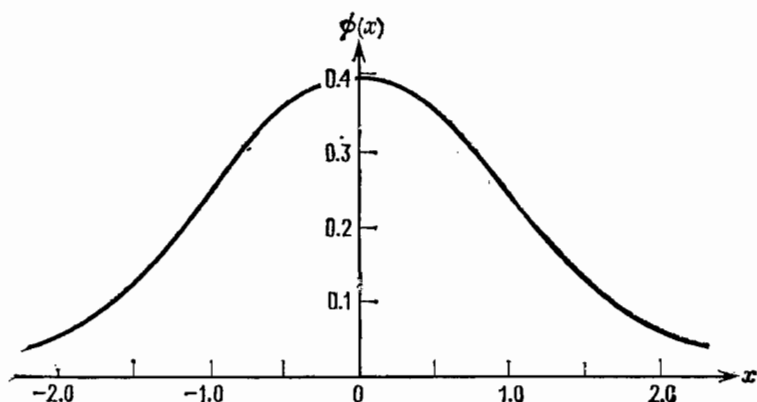


Рис. 13.10. Плотность нормального распределения.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что $\Phi(\infty)=1$ и что это нормальное распределение имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию и вообще моменты всех порядков имеют вид

$$E(\xi^{2k-1})=0, \quad E(\xi^{2k})=1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1), \quad (13.4.3)$$

где k —любое положительное целое, а ξ —случайная переменная, подчиняющаяся нормальному распределению. Покажите, что характеристическая функция равна

$$\chi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\Phi(x) = e^{-\lambda^2/2}.$$

Подробные таблицы $\Phi(x)$ и родственных функций даны, например, в справочнике Абрамовица и Стиган [1964]. В частности, установлено, что

$$\Phi(-0.67449) = 1/4, \quad \Phi(+0.67449) = 3/4, \quad (13.4.4)$$

откуда следует для нормально распределенной величины ξ

$$P(-0.67449 \leq \xi \leq 0.67449) = 1/2. \quad (13.4.5)$$

В более общей формулировке говорят, что ξ нормально распределена со средним значением μ и дисперсией σ^2 , если

$$P\{\xi \leq x\} = F(x) = \Phi((x - \mu)/\sigma), \quad (13.4.6)$$

ибо тогда $E(\xi) = \mu$, $E((\xi - \mu)^2) = \sigma^2$.

Двумерное нормальное распределение случайных переменных ξ , η с данными средними μ_1 , μ_2 и с данной ковариационной матрицей $\rho = (\rho_{kl})$ (см. § 13.3) имеет плотность вида

$$f(x, y) = \exp[-(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c)], \quad (13.4.7)$$

где

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (13.4.8)$$

а c выбрано так, что $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$. Чтобы найти соотношение между μ , ρ , a , b , заметим, что в силу (13.4.8) показатель экспоненты можно записать в виде $-1/2(u^2 + v^2)$ при помощи линейного преобразования

$$\begin{aligned} u &= c_{11}x + c_{12}y + u_0, \\ v &= c_{21}x + c_{22}y + v_0. \end{aligned} \quad (13.4.9)$$

В векторно-матричных обозначениях эти уравнения и их решения можно записать в виде

$$u = Cx + u_0, \quad x = Du + x_0, \quad (13.4.10)$$

где $CD = I$ и $Du_0 = -x_0$. Пусть α и β — новые случайные переменные, полученные из ξ и η путем преобразования (13.4.9), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha &= c_{11}\xi + c_{12}\eta + u_0, \\ \beta &= c_{21}\xi + c_{22}\eta + v_0. \end{aligned}$$

Тогда плотность вероятности $g(u, v)$ для α , β имеет вид

$$g(u, v) = f(x, y) |\partial(x, y)/\partial(u, v)|,$$

но якобиан есть константа, так что $g(u, v)$ пропорциональна $\exp\{-1/2u^2 - 1/2v^2\}$. Отсюда после нормировки имеем

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2 + v^2)/2} = f(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

Нетрудно видеть, что средние μ_1 и μ_2 для ξ и η являются компонентами вектора x_0 , а ковариационная матрица имеет вид $\rho = DD^T$ (T означает транспонирование).

13.5. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть a — среднее значение большого числа n независимых измерений случайной переменной ξ ; его можно представлять себе как значение другой случайной переменной α , которая получается из

составного эксперимента, включающего n повторений исходного эксперимента с последующим вычислением среднего значения. Переменная α имеет то же математическое ожидание, что и ξ , но меньшую дисперсию (в $\sqrt{n}$ раз). Более того, мы покажем, что если n велико, то α имеет распределение, близкое к нормальному. Пусть ξ имеет функцию распределения F ; тогда ее характеристической функцией будет

$$\chi_{\xi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x).$$

Поскольку между распределениями медленного роста и их преобразованиями Фурье существует взаимно однозначное соответствие, функция $\chi_{\xi}(\lambda)$ (λ вещественно) полностью определяет меру $f = F'$.

Пусть теперь F_1 и F_2 — функции распределения двух независимых случайных переменных ξ и η . Очевидно, что $\xi + \eta$ также можно рассматривать как случайную переменную. Будет показано, что характеристическая функция для $\xi + \eta$ есть произведение характеристических функций для ξ и для η . Пусть F_3 — функция распределения случайной переменной $\zeta = \xi + \eta$. Тогда $E(\varphi(\xi + \eta))$ задается в виде

$$E(\varphi(\xi + \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + y) dF_1(x) dF_2(y), \quad (13.5.1)$$

но, с другой стороны,

$$E(\varphi(\xi + \eta)) = E(\varphi(\zeta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w) dF_3(w). \quad (13.5.2)$$

Если $\varphi(x) = e^{-i\lambda x}$, то

$$\chi_{\xi+\eta}(\lambda) = \chi_{\xi}(\lambda) \chi_{\eta}(\lambda), \quad (13.5.3)$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что абсолютное значение характеристической функции не может превышать единицу, ибо

$$|\chi(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\lambda x}| dF(x) = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

(F — неубывающая функция).

Пусть далее ξ — случайная переменная, а F — ее функция распределения. Добавляя, если необходимо, подходящую константу к каждому измеренному значению ξ , можно сделать так, что среднее полученных значений будет равно нулю:

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0; \quad (13.5.4)$$

затем, умножая каждое значение на другую константу, можно получить единичную дисперсию

$$\sigma^2 = E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1. \quad (13.5.5)$$

Допустим, что мы уже осуществили указанные действия. При этом подразумевалось, что интегралы сходятся. Сделаем еще одно допущение:

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF(x) < \infty. \quad (13.5.6)$$

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные переменные, каждая из которых имеет функцию распределения F . Например, значения этих переменных могут получаться в результате n независимых повторений измерения ξ , так что $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 + \dots + \xi_n$ — случайная переменная как результат составного измерения, которое в свою очередь может повторяться неопределенно часто (всегда с тем же n), чтобы дать распределение значений η . Дисперсия η равна n , так как

$$E(\eta^2) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E(\xi_j \xi_k).$$

а

$$E(\xi_j \xi_k) = \begin{cases} \iint xy dF(x) dF(y) = 0, & j \neq k, \\ \int x^2 dF(x) = 1, & j = k. \end{cases}$$

Следовательно, случайная переменная

$$\zeta_n = (\xi_1 + \dots + \xi_n) / \sqrt{n} \quad (13.5.7)$$

имеет нулевое среднее и единичную дисперсию.

Любопытным и фундаментальным фактом теории вероятностей является то, что при $n \rightarrow \infty$ распределение ζ_n стремится к универсальному распределению вероятности, а именно к рассмотренному в предыдущем параграфе нормальному распределению, которое совершенно не зависит от первоначального распределения переменной ξ , пока выполняются условия (13.5.4)—(13.5.6). Этот результат составляет знаменитую центральную предельную теорему. Мы сформулируем и докажем простой вариант этой теоремы, а затем сформулируем без доказательства теорему Берри—Эссена.

Центральная предельная теорема. Пусть ξ и ζ_n имеют указанный выше смысл. Тогда распределение вероятности переменной ζ_n при $n \rightarrow \infty$ сходится (как распределение) к нормальному распре-

делению. То есть если F_n — функция распределения ξ_n , то при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\Phi(x) \quad \text{для любой пробной функции } \varphi, \quad (13.5.8)$$

причем Φ имеет вид (13.4.1).

Замечания. (1) Правый член в (13.5.8) можно записать как

$$\int \varphi(x) (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) dx,$$

поскольку нормальное распределение имеет плотность

$$(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2).$$

(2) Согласно теореме Берри—Эссена (см. ниже) $F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$ поточечно равномерно.

Доказательство теоремы. Если $P\{\xi \leq x\} = F(x)$, то $P\{a\xi \leq y\} = F(y/a)$. Отсюда следует, что если $\chi(\lambda)$ — характеристическая функция ξ , то $\chi(a\lambda)$ — характеристическая функция $a\xi$. Согласно (13.5.3), характеристическая функция переменной

$$\xi_n = n^{-1/2} (\xi_1 + \dots + \xi_n)$$

имеет вид

$$\chi_{\xi_n}(\lambda) = [\chi_{\xi}(\lambda/\sqrt{n})]^n. \quad (13.5.9)$$

Для заданного λ из (13.5.4)–(13.5.6) следует, что

$$\chi_{\xi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - i\lambda x - 1/2 \lambda^2 x^2 + O(\lambda^3 x^3)] dF(x) = 1 - 1/2 \lambda^2 + O(\lambda^3).$$

Поэтому

$$\chi_{\xi}(\lambda/\sqrt{n}) = 1 - \lambda^2/(2n) + O(\lambda^3/n^{3/2}),$$

что можно записать как

$$\chi_{\xi}(\lambda/\sqrt{n}) = (1 - \lambda^2/(2n)) [1 + O(\lambda^3/n^{3/2})]; \quad (13.5.10)$$

следовательно,

$$\chi_{\xi_n}(\lambda) = (1 - \lambda^2/(2n))^n [1 + O(\lambda^3/\sqrt{n})]. \quad (13.5.11)$$

[Для n -й степени выражения в квадратных скобках из (13.5.10) использовано биномиальное разложение.] Мы видим, что

$$\chi_{\xi_n}(\lambda) \rightarrow e^{-\lambda^2/2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (13.5.12)$$

причем сходимость равномерна по λ в любом конечном интервале. Теперь покажем, что если φ — любая функция из класса $\mathcal{S}$ пробных функций для распределений медленного роста, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) [\chi_{\xi_n}(\lambda) - e^{-\lambda^2/2}] d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (13.5.13)$$

Иначе говоря, если f_n и f обозначают соответственно распределение случайной переменной ξ_n и нормальное распределение, то $\langle \hat{f}_n, \hat{f}_n \rangle \rightarrow \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$ для любой $\varphi \in \mathcal{S}$, где величины «с крышкой» означают преобразования Фурье. Вспомним, что $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ представляет собой взаимно однозначное отображение класса $\mathcal{S}$ на себя и что характеристическая функция нормального распределения равна $\exp(-\lambda^2/2)$. Так как для распределений медленного роста $\langle \hat{f}_n, \hat{f} \rangle$ всегда равно $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$, то $\langle \hat{f}_n, \hat{f}_n \rangle \rightarrow \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$ для любой пробной функции $\hat{\varphi}$, а это в точности требуемый результат (13.5.8). Для того чтобы доказать (13.5.13), разобьем интервал интегрирования на две части: $|\lambda| < a$ и $|\lambda| > a$. Так как $|\chi(\lambda)| \leq 1$ для любой характеристической функции, вклад в интеграл (13.5.13) от $|\lambda| > a$ можно сделать сколь угодно малым (независимо от n), выбирая a достаточно большим, поскольку $\varphi \in \mathcal{S}$. Затем в силу равномерной сходимости (13.5.12) при $|\lambda| < a$ вклад от $|\lambda| < a$ можно сделать произвольно малым, выбирая n достаточно большим. Это завершает доказательство.

В данной теореме ничего не говорится ни о типе, ни о скорости сходимости $F_n(x)$ к $\Phi(x)$. [Теоремы о характеристиках сходимости см. в книге Феллера, т. 2.] Вообще говоря, быстрая сходимость при $n \rightarrow \infty$ требует существования моментов распределения ξ выше третьего, которым мы ограничились в нашем случае. Требуется также некоторая минимальная степень гладкости $F(x)$, которая обычно выражается через поведение характеристической функции $\chi(\lambda)$ при больших λ . Чтобы получить равномерность относительно x для этих высоких скоростей сходимости, необходимо постулировать еще более высокую степень гладкости $F(x)$. Замечательная теорема, полученная независимо Берри в 1941 г. и Эссенем в 1942 г. (см. книгу Феллера [1966]), дает равномерную сходимость со скоростью $O(n^{-1/2})$, не требуя никаких допущений, кроме (13.5.4) — (13.5.6). (Вместо единичной дисперсии в ней фигурирует явно дисперсия σ^2 .)

Теорема (Берри — Эссен). При допущениях данного параграфа

$$\left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| \leq C \frac{\rho}{\sigma^3 \sqrt{V_n}} \quad (\forall x, \forall n), \quad (13.5.14)$$

где C — универсальная постоянная.

В первоначальной статье Эссен установил, что

$$0.410 \leq C \leq 7.59. \quad (13.5.15)$$

Здесь имелось в виду, что при $C = 7.59$ неравенство (13.5.14) справедливо для всех случаев, тогда как при $C < 0.410$ это неравенство нарушается хотя бы в одном случае. Этот результат последовательно улучшался (см. книгу Феллера [1966]), и дальнейшие исследования привели к следующим пределам:

$$0.410 \leq C \leq 0.800 \quad (13.5.16)$$

(частное сообщение проф. Эссена, 1971 г.).

Далее, ρ не может быть меньше σ^3 (см. упражнение ниже), но в некоторых ситуациях можно ожидать, что ρ и σ^3 будут

сравнимы. Затем из (13.5.16) мы видим, что F_n отличается от функции нормального распределения не более чем на 0.05 для $n \approx 256$ и не более чем на 0.01 для $n \approx 6400$.

Во многих вариантах центральной предельной теоремы (включая вариант Берри—Эссена) не требуется, чтобы переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имели одинаковые распределения, а достаточно, чтобы их распределения отличались друг от друга не слишком сильно в том смысле, который определен в этих теоремах. И в этом случае результат тот же: распределение переменной $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/\sqrt{n}$ стремится к нормальному распределению при $n \rightarrow \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Используя неравенство Шварца, покажите, что $\int |x| dF(x) \leq \sigma$. Путем дальнейшего использования этого неравенства установите, что

$$\sigma^4 \leq \int |x| dF(x) \int |x|^3 dF(x),$$

и выведите отсюда, что $\sigma^3 \leq \rho$. Обобщите этот результат,

13.6. ВЫБОРКА

Иногда распределение вероятности может быть вычислено из физических закономерностей, но чаще заключение о физических законах делают из наблюдаемого распределения вероятности. Например, наблюдаемую ненулевую корреляцию между двумя случайными переменными (когда коэффициент корреляции не равен нулю) можно принять как указание существования причинной связи между этими переменными. В качестве другого примера допустим, что два различных предположения предсказывают различные значения x_1 и x_2 величины ξ , которая имеет случайные осцилляции, связанные с экспериментальными или измерительными ошибками. Если большое число наблюдаемых значений ξ показывает, что математическое ожидание $E(\xi)$ согласуется с каким-то из чисел x_1, x_2 , то это воспринимается как подтверждение соответствующего предположения.

Конечное (но большое) число n наблюдаемых значений случайной переменной ξ или набора коррелированных переменных $\xi, \eta, \dots$, получающихся при n независимых повторениях некоторого эксперимента или наблюдаемого явления, называется *выборкой* распределения переменной ξ или переменных $\xi, \eta, \dots$. Теория выборки имеет отношение к получению информации путем проб, когда неизвестно лежащее в основе явления распределение вероятности.

Пусть требуется найти математическое ожидание $E(\xi) = \mu$ некоторой единственной случайной переменной ξ , и пусть n неза-

висимых измерений ξ дали значения $x_1, \dots, x_n$. Тогда в качестве *выборочного среднего значения* принимают

$$a = (x_1 + \dots + x_n)/n \quad (13.6.1)$$

и рассматривают его как приближение к μ . Мы хотим получить оценку для «вероятной ошибки» этого приближения. Ясно, что a является измеренным значением случайной переменной

$$\alpha = (\xi_1 + \dots + \xi_n)/n, \quad (13.6.2)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и имеют то же распределение, что и ξ . Можно представить себе n независимых повторений эксперимента как некоторый составной эксперимент, дающий значение α , и можно спросить, как распределено наблюдаемое значение α , если много раз повторяется этот составной эксперимент. Математическое ожидание переменной α равно $(1/n)[E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n)] = \mu$, но нетрудно видеть, что дисперсия $E((\alpha - \mu)^2)$ меньше в n раз, чем дисперсия σ^2 переменной ξ , поскольку

$$\begin{aligned} E((\alpha - \mu)^2) &= E(((1/n) \sum \xi_i - \mu)^2) = (1/n^2) E((\sum [\xi_i - \mu])^2) = \\ &= (1/n^2) E(\sum [\xi_i - \mu] \sum [\xi_j - \mu]) = (1/n^2) \sum E((\xi_i - \mu)^2) = \sigma^2/n. \end{aligned} \quad (13.6.3)$$

Здесь предпоследнее равенство получено благодаря обращению в нуль корреляций $E((\xi_i - \mu)(\xi_j - \mu))$ при $i \neq j$, что следует из независимости переменных ξ_i .

Если бы σ была известна, то в качестве меры вероятной ошибки выборки можно было бы принять стандартное отклонение $\sigma/\sqrt{n}$ переменной α . Однако поскольку распределение вероятности неизвестно, σ также является искомой величиной. Поэтому вводится *выборочная дисперсия*

$$V = (1/n) \sum_{j=1}^n (x_j - a)^2. \quad (13.6.4)$$

Интуитивно ясно, что V довольно близка к σ^2 . Из (13.6.1) следует, что V можно записать в виде $(1/n) \sum x_j^2 - a^2$. Значит, V есть измеренное значение случайной переменной

$$\beta = (1/n) \sum \xi_i^2 - \alpha^2, \quad (13.6.5)$$

и простые вычисления дают

$$E(\beta) = [(n-1)/n] \sigma^2. \quad (13.6.6)$$

Поэтому разумно допустить, что $\sigma^2 \approx Vn/(n-1)$, и считать $\sqrt{Vn/(n-1)}$ приближенно равным стандартному отклонению переменной α .

Теперь из центральной предельной теоремы следует, что если n велико, то функция распределения α приближенно описывается как

$$F(a) \approx \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sqrt{Vn/(n-1)}}\right),$$

где $\mu = E(\alpha) = E(\xi)$. Следовательно, если мы определим вероятную ошибку в виде

$$\delta a = 0.6745 \sqrt{V/(n-1)}, \quad (13.6.7)$$

то формула (13.4.4) дает

$$P\{|a - \mu| < \delta a\} = 0.5. \quad (13.6.8)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом: допустим, мы производим не одну серию n измерений, а много серий из n измерений. Тогда a и δa будут иметь различные численные значения после проведения различных серий, в то время как μ имеет всегда одно и то же неизвестное значение, и неравенство $|a - \mu| < \delta a$ будет верным примерно для половины этих серий и неверным для другой половины.

Переходя к более надежной оценке ошибки, можно положить

$$\delta' a = 1.6449 \sqrt{V/(n-1)}; \quad (13.6.9)$$

тогда

$$P\{|a - \mu| < \delta' a\} = 0.9. \quad (13.6.10)$$

Хотя обычно используются эти формулы для ошибки, следовало бы отметить, что подобные формулы могут быть получены из более элементарного неравенства Чебышева (см. ниже упражнение 1). Действительно, если константы в (13.6.7) и (13.6.9) увеличить примерно вдвое, то из неравенства Чебышева при $\sigma = \sqrt{V/(n-1)}$ получатся аналоги формул (13.6.8 и 13.6.10), в которых знак равенства будет заменен на $\geq$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной переменной ξ со средним значением μ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Рассматривая интеграл

$$\int_{|x - \mu| > t} (x - \mu)^2 dF(x),$$

получите неравенство Чебышева

$$P\{|x - \mu| > t\} \leq \sigma^2/t^2.$$

2. Проверьте равенство (13.6.6.).

В случае выборки распределения двух случайных переменных ξ, η измеряемыми значениями являются пары (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Выборочной ковариационной матрицей называется (2×2) -матрица, элементами которой являются

$$\begin{aligned} V_{11} &= (1/n) \sum (x_i - a)^2, & V_{22} &= (1/n) \sum (y_i - b)^2, \\ V_{12} &= V_{21} = (1/n) \sum (x_i - a)(y_i - b), \end{aligned} \quad (13.6.11)$$

где a и b — выборочные средние переменных ξ и η соответственно.

Выборочный коэффициент корреляции определяется как $W = V_{12}/\sqrt{V_{11}V_{22}}$. Из неравенства Коши следует, что $-1 \leq W \leq 1$, точно так же как из неравенства Шварца следовало $-1 \leq \rho \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЕ

3. Найдите случайные переменные (связанные с составными экспериментами из n измерений ξ и η), для которых V_{11} , V_{12} и V_{22} представляют собой ожидаемые значения. Найдите приближенные вероятные ошибки и придумайте способ грубого установления того, является ли существенным заданный ненулевой выборочный коэффициент корреляции W .

13.7. МАРГИНАЛЬНАЯ И УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть каждое повторение эксперимента дает значения x и y случайных переменных ξ , η , и пусть совместная функция распределения ξ , η определяется так же, как в (13.3.1):

$$F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}.$$

Тогда распределение так полученных значений x при полном игнорировании значений y имеет функцию распределения

$$F(x, \infty) = \text{Маргинальная функция распределения } \xi; \quad (13.7.1)$$

аналогично

$$F(\infty, y) = \text{Маргинальная функция распределения } \eta. \quad (13.7.2)$$

Возьмем другую крайность: отбросим все эксперименты, кроме тех, в которых обнаружено, что η лежит в некотором малом интервале ($y \leq \eta < y + \Delta y$). Тогда получаемое распределение значений x переменной ξ называется *условным распределением* переменной ξ , причем условие состоит в том, что η лежит в указанном интервале.

Чтобы обсудить далее условные вероятности, сделаем упрощающее предположение о том, что $F(x, y)$ имеет непрерывную плотность

$$f(x, y) = \partial^2 F(x, y) / \partial x \partial y.$$

Позднее мы вернемся к общему случаю.

Маргинальное распределение ξ имеет плотность

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad (13.7.3)$$

которая равна производной функции $F(x, \infty)$, потому что в общем случае

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x', y') dx' dy'$$

вследствие граничных условий $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$. Аналогично маргинальное распределение переменной η имеет плотность

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (13.7.4)$$

Для того чтобы найти условные вероятности, заметим, что доля экспериментов, в которых $x \leq \xi \leq x + \Delta x$ и $y \leq \eta \leq y + \Delta y$, равна приблизительно $f(x, y) \Delta x \Delta y$, тогда как полная доля экспериментов, в которых $y \leq \eta \leq y + \Delta y$ независимо от значений ξ ,

равна $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \Delta y$. Если отбросить все те эксперименты, в которых $\eta \notin [y, y + \Delta y]$, то распределение ξ в оставшихся экспериментах имеет плотность (в пределе $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{f(x, y) \Delta x \Delta y}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \Delta y} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} \stackrel{\text{def}}{=} f(x|y) \quad (13.7.5)$$

при условии, что знаменатель не равен нулю. Величина $f(x|y)$ называется *плотностью условной вероятности* переменной ξ при условии, что $\eta = y$. Если знаменатель обращается в нуль, то и числитель также обращается в нуль, а значит, $f(x|y)$ не определена. Однако часто условная вероятность имеет физический смысл, и ее можно найти из модифицированного эксперимента. Например, в эксперименте по определению распределения рассеянных частиц для данной первоначальной энергии E_0 может случиться, что спектр первичных частиц не содержит частиц с энергиями, близкими к E_0 , и тогда потребуется другой источник первичных частиц.

Физически все вероятности условны, поскольку любой результат любого эксперимента зависит от любого из условий, при которых он осуществляется. Лишь обращаясь к физике явления, можно предсказать, например, будет ли влиять фаза Луны на ядерно-физический эксперимент. [Тем, кому этот пример кажется крайностью, нужно указать на то, что фаза Луны оказывает слабое воздействие на магнитное поле Земли через влияние атмосферных приливов на ионосферные токи.]

Определение (13.7.5) можно записать в виде

$$f(x, y) = f_2(y) f(x|y), \quad (13.7.6)$$

где f_2 — маргинальная плотность переменной η , задаваемая (13.7.4). Разложения такого вида очень важны при вычислениях по методу Монте-Карло. В трехмерном случае случайных переменных ξ, η, ζ можно записать

$$f(x, y, z) = f(z) g(y|z) h(x|y, z).$$

Здесь $g(y|z)$ — плотность значений η (при $\eta = y$) при условии, что $\xi = z$ и игнорировании значений ξ . Метод Монте-Карло использует соответствующие функции распределения:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(z') dz' = \mathbf{P} \{ \xi \leq z \}$$

(ξ и η игнорируются), (13.7.7)

$$G(y|z) = \int_{-\infty}^y g(y'|z) dy' = \mathbf{P} \{ \eta \leq y | \xi = z \}$$

(ξ игнорируется), (13.7.8)

$$H(x|y, z) = \int_{-\infty}^x h(x'|y, z) dx' = \mathbf{P} \{ \xi \leq x | \eta = y, \xi = z \}. \quad (13.7.9)$$

Ясно, что три функции F, G, H полностью определяют совместное распределение переменных ξ, η, ζ . Однако такое описание не является достаточно общим, так как существование функций G и H зависит от некоторой гладкости распределения относительно η и ξ (в настоящем рассмотрении мы даже допустили существование плотностей $f(x, y, z)$), хотя для большинства применений методов Монте-Карло это описание удовлетворительно. Более общие формулировки см. в книге Феллера [1966].

Как указывалось ранее, из-за возможного обращения в нуль числителя и знаменателя в (13.7.5) теряется единственность функций G и H . Если z_0 принадлежит интервалу постоянства $F(z)$, то распределение не содержит никаких троек ξ, η, ζ с $\xi = z_0$ и поэтому $G(y|z_0)$ и $H(x|y, z_0)$ не определены, хотя это означает лишь непригодность данного представления. Аналогично если для некоторого z_1 y_0 принадлежит интервалу, в котором $G(y|z_1)$ постоянна, то это означает лишь неопределенность $H(x|y_0, z_1)$.

В следующем параграфе мы объясним использование этих функций в методе Монте-Карло.

13.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Первоначально метод Монте-Карло разрабатывался в связи с изучением нейтронной цепной реакции в системе с размножением, и этот метод легче всего описать, имея в виду такое применение. Пусть система состоит из нескольких фиксированных областей пространства, заполненных веществами с известными свойствами. Отдельный эксперимент (пользуясь терминологией предыдущих параграфов) заключается в следующем: один нейтрон вводится в данную систему в точке пространства $\mathbf{x}_0$ со скоростью $\mathbf{v}_0$ в момент времени t_0 и нейтронной цепочке разрешается ветвиться до некоторого момента «переписи» $T > t_0$. Тогда случайными пере-

менными $\xi, \eta, \dots$ будут положения и скорости x_j, v_j ($j = 1, \dots, v$) нейтронов, имеющих в момент времени T . Число нейтронов v также является одной из случайных переменных.

Описанный эксперимент следует осуществить повторно и независимо большое число n раз. Хотелось бы получить средние значения различных величин $\varphi(\xi, \eta, \dots)$, таких, как полная кинетическая энергия нейтронов в момент T , некоторые моменты их пространственных распределений и т. п.

Однако этот эксперимент не проводится в лаборатории, а моделируется на ЭВМ с использованием случайных чисел. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, промежуточной между двумя случаями, рассмотренными в предыдущих параграфах. В первом случае была известна функция распределения $F(x, y, \dots)$ случайных переменных $\xi, \eta, \dots$ и мы хотели лишь вычислить некоторые средние. Во втором случае была неизвестна функция распределения $F(x, y, \dots)$ и нам хотелось получить сведения о ней из большой выборки измеряемых значений.

В рассматриваемом случае вероятностные законы элементарных процессов (нейтронно-ядерного взаимодействия) нам полностью известны, но для ветвящихся цепочек эти законы комбинируются столь сложно, что практически почти невозможно записать и тем более использовать некую формулу для функции распределения $F(x, y, \dots)$ результата. Однако знания элементарных процессов вполне хватает для достаточно точного моделирования ветвящихся цепочек с помощью ЭВМ, что не только дешевле и надежнее, но и гораздо удобнее с точки зрения измерений, чем изучение цепной реакции в лаборатории.

Программа, реализующая метод Монте-Карло, содержит подпрограмму, называемую генератором случайных чисел. Каждый раз эта подпрограмма активизируется (при помощи оператора CALL или ему подобного) для получения числа r в интервале $0 < r < 1$. Числа $r_1, r_2, \dots$, порожденные таким образом, в практическом отношении ведут себя подобно независимым значениям некоторой случайной переменной ρ , равномерно распределенной на $(0, 1)$, т. е. имеющей функцию распределения

$$F(r) = \begin{cases} 0, & r < 0, \\ r, & 0 \leq r < 1, \\ 1, & 1 \leq r. \end{cases}$$

Строго говоря, эти числа не являются ни случайными, ни независимыми, поскольку каждое из них как-то вычисляется из предшествующих, но, как правило, они удовлетворяют всем стандартным статистическим тестам случайности, равномерности и независимости с точностью, значительно превышающей требуемую

в методе Монте-Карло. В одной из первых таких подпрограмм использовалась простая формула

$$r_{k+1} \equiv 7^{13} r_k \pmod{1}, \quad (13.8.1)$$

где r — десятичные дроби, содержащие 11 цифр, причем произведение образуется с 22 знаками, но затем производится усечение по модулю 1. Эта схема производит около 10^{10} различных чисел до повторения, если начать, скажем, с $r_0 = 10^{-11}$ (очевидно, r_0 не должно быть равным нулю или иметь нуль в качестве своей наименьшей значащей цифры).

По изучению генераторов случайных чисел была проделана большая работа, вероятно, даже бóльшая, чем это было необходимо, поскольку уже простейшие генераторы типа (13.8.1) оказались вполне удовлетворительными для практических целей.

В процедуре моделирования каждая ветвящаяся цепочка (т. е. каждое повторение «эксперимента») строится последовательными шагами с использованием случайных чисел и известных вероятностных законов для элементарных процессов.

Первый шаг после введения первоначального нейтрона в точку x_0 со скоростью v_0 состоит в определении точки x_1 первого столкновения. Длиной первого свободного пробега, т. е. расстоянием $|x_1 - x_0|$, которое нейтрон пройдет до первого столкновения, является случайная переменная, обозначенная через ξ в примере 2 § 13.1, причем ее функция распределения $F(x)$ была показана на рис. 13.3. Легко видеть, что если мы, получив случайное число r при помощи генератора, приравняем это расстояние $-\lambda \ln r$, где λ — средняя длина свободного пробега, то мы получим правильное распределение вероятности для расстояния. Так как движение происходит в направлении единичного вектора $v_0/|v_0|$, мы полагаем

$$x_1 = x_0 + ((-\lambda \ln r)/|v_0|) v_0. \quad (13.8.2)$$

Момент времени первого столкновения определяется как

$$t_1 = t_0 + (-\lambda \ln r)/|v_0|. \quad (13.8.3)$$

Этот пример иллюстрирует общий принцип, состоящий в том, что если $F(x)$ — функция распределения случайной переменной ξ и F^{-1} обозначает функцию, обратную к F , так что

$$r = F(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(r),$$

и если, кроме того, ρ имеет равномерное распределение на $(0, 1)$, то случайная переменная

$$\xi = F^{-1}(\rho) \quad (13.8.4)$$

имеет распределение, определенное при помощи F , ибо

$$P\{\xi \leq x\} = P\{\rho \leq r\} = r = F(x).$$

Поэтому правило выработки одномерного распределения заключается в подстановке случайного числа r в функцию, обратную данной функции распределения.

Правила выборки для многомерного распределения можно получить аналогичным образом при помощи разложения по маргинальной, смешанной и условной вероятностям, рассмотренным в § 13.7. Например, если в трехмерном случае функции F , G , H , заданные в (13.7.7)–(13.7.9), описывают распределение переменных ξ , η , ζ , а F^{-1} , G^{-1} , H^{-1} —функции, обратные этим функциям относительно первого аргумента, т. е. если

$$F(z) = r \Leftrightarrow z = F^{-1}(r),$$

$$G(y|z) = r \Leftrightarrow y = G^{-1}(r|z),$$

$$H(x|y, z) = r \Leftrightarrow x = H^{-1}(r|y, z),$$

то выборочные значения x , y , z переменных ξ , η , ζ определяются как

$$z = F^{-1}(r_1), \quad y = G^{-1}(r_2|z), \quad x = H^{-1}(r_3|y, z),$$

где r_1 , r_2 , r_3 —независимые случайные числа, полученные при помощи генератора.

Второй шаг моделирования цепочки заключается в выяснении того, сколько нейтронов появилось в результате столкновения в точке x_i . Число появившихся нейтронов является случайной переменной, функция распределения которой представляет собой ступенчатую функцию, причем она предполагается известной из лабораторных измерений, а ее значение определяется путем подстановки случайного числа в функцию, обратную этой ступенчатой функции. Направления движения и значения энергии новых нейтронов затем определяются путем выборки других элементарных распределений, также известных из лабораторных измерений, и т. д. Это продолжается до тех пор, пока для всех ветвей данной цепочки не наступит момент переписи T .

После того, как таким образом будет смоделировано большое число независимых цепочек, скажем от 1000 до 10 000, искомые статистические свойства цепной реакции получаются путем усреднения, а вероятные ошибки средних можно вычислить по формулам § 13.6.

Искусство использования метода Монте-Карло на практике базируется на многих методиках, которые в течение многих лет разрабатывались в целях упрощения процедур выборки и уменьшения дисперсии; см. книгу Спанье и Гелбарда [1969]. Хотя точность этого метода по существу ограничена (ошибка составляет примерно 1%), он часто дает полезные ответы для задач статистической физики, которые полностью неразрешимы аналитическими методами из-за сложной природы физических систем.

13.9. МЕРЫ

Хотя описание через функции распределения является наиболее приемлемым для конечномерных случаев, вероятностные распределения могут быть также получены в рамках общей теории распределений или классической теории меры. Такие описания позволяют перейти к бесконечномерным случаям, к абстрактным выборочным пространствам и к современной теории стохастических процессов.

Вероятностные распределения в $\mathbb{R}^n$ принадлежат классу распределений на $\mathbb{R}^n$, называемых *мерами*, которые мы сейчас обсудим большей частью без доказательств.

Классы $C_0^\infty = \mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ пробных функций часто оказываются более узкими, чем это необходимо для определения частного распределения $\langle f, \cdot \rangle$, а типы сходимости $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$ и $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ пробных функций часто оказываются сильнее, чем это необходимо для непрерывности линейного функционала. Например, распределение $f(x) = \delta(x - x_0)$ можно рассматривать как функционал, определяемый в виде $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ для всех непрерывных φ ; в этом случае поточечная сходимость φ_j к ψ гарантирует сходимость $\langle f, \varphi_j \rangle$ к $\langle f, \psi \rangle$.

В последующих рассуждениях тип сходимости пробных функций в $\mathbb{R}^n$ будет ослаблен так, чтобы выделить класс распределений, называемых мерами, и окажется, что любое распределение этого класса может быть представлено в виде (13.3.18), где $F(x)$ — произвольная функция локально ограниченной вариации. Тогда область определения функционала будет расширена, чтобы включить все непрерывные функции $\varphi(x)$ с ограниченным носителем.

Определение 1. Запись $\varphi_j \xrightarrow{C_0} \psi$ означает, что, во-первых, функции $\{\varphi_j(x)\}$ имеют носители в некоторой общей ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ и, во-вторых, $\varphi_j(x) \rightarrow \psi(x)$ равномерно в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Это определение совпадает с определением сходимости $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$, за исключением того, что не требуется сходимость производных $\varphi_j(x)$. Далее это определение будет применено вообще к пробным функциям из пространства C_0 , которые непрерывны, но не обязательно дифференцируемы.

Определение 2. *Мерой* на $\mathbb{R}^n$ называется распределение f на $\mathbb{R}^n$, такое, что функционал $\langle f, \cdot \rangle$ непрерывен по отношению к только что определенному типу сходимости, т. е. такое распределение, что из $\varphi_j \xrightarrow{C_0} \psi$ следует $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$.

В частности, вероятностная мера f , определенная с помощью (13.3.18), является мерой, поскольку если последовательность $\varphi_j(x)$ сходится равномерно к $\psi(x)$, то

$$|\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \psi \rangle| \leq \sup_x |\varphi_j(x) - \psi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} d^n F(x), \quad (13.9.1)$$

но правая часть неравенства стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$, так как $\int_{\mathbb{R}^n} d^n F(x) = 1$. Таким образом, f есть мера.

Распределение f на $\mathbb{R}^n$, такое, что $f \geq 0$ на всем $\mathbb{R}^n$, называется *положительным*.

Теорема. *Положительное распределение f на $\mathbb{R}^n$ есть мера (следовательно, $\delta(x)$ — мера, тогда как $\delta'(x)$, $\delta''(x)$ и т. д. не являются мерами).*

Доказательство. Допустим, что $\{\varphi_k\}$ и ψ принадлежат $\text{real}C_0^\infty$ и тако-
вы, что $\varphi_k \xrightarrow{C_0} \psi$. Нужно показать, что $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$; тогда то же будет справедливо и для последовательностей в srxC_0^∞ . Пусть χ — неотрицательная функция в C_0^∞ , причем $\chi(x) = 1$ в области, содержащей носители всех φ_k и ψ . Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для достаточно большого k

$$-\varepsilon \chi(x) < \varphi_k(x) - \psi(x) < \varepsilon \chi(x),$$

откуда следует, что обе функции $\varepsilon \chi \pm (\varphi_k - \psi)$ неотрицательны и

$$\varepsilon \langle f, \chi \rangle \pm [\langle f, \varphi_k \rangle - \langle f, \psi \rangle] \geq 0,$$

так как f — положительное распределение; поэтому $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$.

Более того, распределение f , определенное через интеграл Стильтьеса (13.3.18), является мерой, даже если F не удовлетворяет требованиям (13.3.15) и (13.3.16) для функции распределения, а лишь представляет собой любую (вообще говоря, комплексную) функцию локально ограниченной вариации. Согласно приложению к этой главе, F можно записать как $F_1 - F_2 + iF_3 - iF_4$, где каждая $F_k(x)$ — неубывающая функция. Тогда любое из $\langle f, \varphi_j \rangle$, $\langle f, \psi \rangle$ можно разложить на четыре члена, для каждого из которых выполняется (13.9.1) после замены $\int_{\mathbb{R}^n}$ на $\int_{\square}$, где $\square$ — параллелепипед, содержащий носители всех φ_j . Таким образом, f является мерой.

Согласно теореме Рисса о представлении, которую мы сейчас сформулируем без доказательства, любая мера может быть приведена к виду (13.3.18) путем надлежащего выбора функции $F(x)$. Поэтому в одном измерении любая мера f на $\mathbb{R}$ является производной F' (в смысле теории распределений) функции $F(x)$ локально ограниченной вариации. В n измерениях $f = \partial^n F / \partial x_1 \dots \partial x_n$.

Теорема (Рисс). *Если f — мера на $\mathbb{R}^n$, т. е. если функционал $\langle f, \cdot \rangle$ непрерывен относительно типа сходимости $\xrightarrow{C_0}$, то суще-*

ствует функция $\sigma(x)$ локально ограниченной вариации, такая, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n \sigma(x) \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n). \quad (13.9.2)$$

Более того, если σ нормирована условиями

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \sigma(x + \varepsilon)$$

(или каким-либо другим способом), то σ — единственная для заданной меры f ($\varepsilon > 0$ означает, что $\varepsilon_j > 0$ для $j = 1, \dots, n$).

Первоначальная формулировка теоремы Рисса, относящаяся к 1909 г. (см. книгу Рисса и Секефальви-Надя [1953, § 50]), охватывала случай конечного интервала $[a, b]$ в одном измерении. Приведенная здесь теорема рассматривается, например, в книге Лорана Шварца [1950, § 1.1] (см. также книгу Рисса и Секефальви-Надя [1953, § 59]). Соответствующая теорема для меры на абстрактном компактном хаусдорфовом пространстве приведена в книге Данфорда и Шварца [1966, § IV.6.3].

Теперь покажем, что если f — мера, то область определения функционала $\langle f, \cdot \rangle$ может быть расширена от C_0^∞ до класса C_0 всех непрерывных функций с ограниченным носителем на $\mathbb{R}^n$, причем функционал остается непрерывным относительно определенного выше типа сходимости $\xrightarrow{C_0}$.

Сначала доказываем, что f локально ограничена. Затем вспоминаем, что линейный функционал в банаховом или гильбертовом пространстве непрерывен (относительно сходимости по норме этого пространства) тогда и только тогда, когда этот функционал ограничен. Здесь мы имеем несколько более слабое утверждение:

Лемма. Если линейный функционал $\langle f, \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывен в смысле определения 2, т. е. если f является мерой, и если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то найдется такая постоянная $K = K(\Omega)$, что

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq K(\Omega) \sup_x |\varphi(x)|$$

для всех пробных функций φ с носителем в Ω .

Доказательство от противного предоставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема о расширении. Если f — мера, то область определения функционала $\langle f, \cdot \rangle$ может быть расширена, чтобы включить все функции φ из класса C_0 : расширенный функционал, скажем $\langle f_1, \cdot \rangle$, остается непрерывным в том смысле, что если $g_n(x)$ и $g(x)$ принадлежат C_0 и $g_n(x) \xrightarrow{C_0} g(x)$, то $\langle f_1, g_n \rangle \rightarrow \langle f_1, g \rangle$. Это расширение единственно.

Доказательство (частичное). Нужно для любой заданной функции $g = g(x) \in C_0$ определить $\langle f, g \rangle$. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность функций из C^∞ с носителями в ограниченной области Ω (которая содержит носитель g). Эта последовательность такова, что $\varphi_n(x) \rightarrow g(x)$ равномерно для всех x , и построена, например, при помощи применения операторов сглаживания к g (см. § 2.6). Тогда по лемме

$$|\langle f, \varphi_k \rangle - \langle f, \varphi_l \rangle| \leq K(\Omega) \sup_x |\varphi_k(x) - \varphi_l(x)|,$$

откуда следует, что $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ — числовая последовательность Коши. Определим

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, \varphi_n \rangle.$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Завершите доказательство, установив, что:

1) если $\{\varphi_n(x)\}$ — любая другая последовательность, тоже сходящаяся равномерно к $g(x)$, то последовательность $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ имеет тот же предел, что и $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$;

2) определенный нами функционал $\langle f, \cdot \rangle$ линеен;

3) если $g(x) \in C_0^\infty$, то $\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle$;

4) если $g_n(x)$ и $g(x)$ принадлежат C_0 и $g_n \xrightarrow{C_0} g$, то $\langle f, g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$;

5) если $\langle f, \cdot \rangle$ — любой другой функционал на C_0 , обладающий теми же свойствами, что и функционал $\langle f, \cdot \rangle$, то $f_1 = f_2$.

Индекс у f_1 обычно опускается, кроме тех случаев, когда необходимо отличать функционал $\langle f, \cdot \rangle$ от его расширения.

Для данного класса распределений имеется естественное пространство пробных функций. Для класса распределений Шварца этим пространством является $C_0^\infty = \mathcal{D}$, для распределений медленного роста — пространство $\mathcal{S}$, для мер — пространство C_0 , для распределений в L^2 (гл. 5) — само L^2 . В каждом из этих примеров мы имеем некоторое пространство X пробных функций с типом сходимости $\xrightarrow{X}$, причем C_0^∞ является всюду плотным вложением в X . Это означает следующее: 1) для функций из C_0^∞ $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ влечет $\varphi_j \xrightarrow{X} \varphi$; 2) для любой функции χ из X существуют функции $\psi_j \in C_0^\infty$, такие, что $\psi_j \xrightarrow{X} \chi$. Непрерывный линейный функционал на X определяет ограничение на C_0^∞ и, с другой стороны, полностью определяется своим ограничением, которое является распределением в смысле гл. 2. Мы называем X *естественным* пространством пробных функций для таких распределений.

Мера f называется *ограниченной*, если существует такая постоянная K , что $|\langle f, \varphi \rangle| \leq K \sup |\varphi(x)|$ для всех $\varphi \in C_0$. [Согласно лемме, каждая мера локально ограничена.]

Следствие теоремы о расширении. Если f — ограниченная мера, то область определения функционала $\langle f, \cdot \rangle$ может быть расширена на все C (пространство ограниченных непрерывных функций), причем норма функционала $\langle f, \cdot \rangle$ сохраняется.

Доказательство для одного измерения. Дано $\psi \in C$, нужно определить $\langle f, \psi \rangle$. Пусть $\chi_n(x)$ — непрерывная функция, равная 1 при $|x| \leq n$, равная нулю при $|x| \geq n+1$, линейная при $-n-1 < x < -n$ и при $n < x < n+1$. Тогда для любого n $\chi_n(x)\psi(x) \in C_0$. Распределение f и функция ψ могут быть представлены как

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2 + i\psi_3 - i\psi_4,$$

где f_i и ψ_i неотрицательны. Для любых i, j $\langle f_i, \chi_n \psi_j \rangle$ является ограниченной неубывающей функцией n , и, следовательно, существует предел $\langle f, \chi_n \psi \rangle$, который мы и примем в качестве $\langle f, \psi \rangle$. Далее,

$$|\langle f, \chi_n \psi \rangle| \leq K \sup |\chi_n(x) \psi(x)| \leq K \sup |\psi(x)|,$$

откуда

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq K \sup |\psi(x)|,$$

что и требовалось доказать.

Если $\langle f, \phi \rangle$ рассматривается как значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$ в обобщенном смысле, то расширение области определения функционала $\langle f, \cdot \rangle$ сводится к расширению понятия интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

Если f — произвольное распределение Шварца, то этот интеграл определяется только для $g \in C_0^\infty$; если f — распределение медленного роста, то интеграл определяется для всех $g \in \mathcal{S}$; если f — мера, то интеграл определяется для всех $g \in C_0$; если f — ограниченная мера, то интеграл определяется для всех ограниченных непрерывных функций g ; если $f \in L^2$, то интеграл определяется для всех $g \in L^2$. Аналогичные замечания можно сделать для распределений на $\mathbb{R}^n$.

13.10. МЕРЫ КАК ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ

Математическая теория вероятностей обычно трактуется как ветвь теории меры. Хотя это и не обязательно для большинства приложений, включая рассматриваемые в этой книге (где выборочное пространство конечномерно), в этом параграфе предлагается краткое введение в классическое представление с точки зрения теории меры. Это делается из-за того, что, во-первых, читатель может встретиться с таким подходом в литературе, а во-вторых, это единственно возможный подход к некоторым бесконечномерным задачам, например когда каждое событие является некоторой траекторией в пространстве-времени и совокупность всех таких траекторий представляет собой бесконечномерное пространство.

Напомним, что неубывающая функция $F(x)$ на $\mathbb{R}$ определяет некоторую (положительную) меру на $\mathbb{R}$. Классически мера определяется следующим образом: каждому множеству S из некоторого класса точечных множеств на $\mathbb{R}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mu(S)$, и $\mu(S)$ является *мерой* множества S . Мера интервала определяется так:

$$\begin{aligned}\mu(\Delta) &= F(b-0) - F(a+0), & \text{если } \Delta = (a, b), \\ \mu(\Delta) &= F(b+0) - F(a-0), & \text{если } \Delta = [a, b], \\ \mu(\Delta) &= F(b+0) - F(a+0), & \text{если } \Delta = (a, b], \\ \mu(\Delta) &= F(b-0) - F(a-0), & \text{если } \Delta = [a, b),\end{aligned}\quad (13.10.1)$$

где $F(x \pm 0)$ означает предел $F(x \pm \varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Замечание 1. На самом деле необходимо лишь определить $\mu(\Delta)$ для открытых интервалов, поскольку меры дополнений измеримых множеств определяются ниже.

Замечание 2. Мера вырожденного интервала $[a, a]$, содержащего одну точку, вполне определена и может быть положительной. Если полное изменение функции F равно единице, так что F можно рассматривать как функцию распределения некоторой случайной переменной ξ , то $\mu(\Delta)$ представляет собой вероятность того, что ξ лежит в Δ . Мы хотим расширить это понятие так, чтобы $\mu(S)$ представляло вероятность того, что ξ лежит в S , где S — более общее множество. Если Δ_1 и Δ_2 — любые непересекающиеся интервалы, то ясно, что $\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ должна быть определена как $\mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$. Так как объединение любых двух интервалов всегда можно записать в виде объединения двух непересекающихся интервалов, то мера $\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ определена для любых Δ_1 и Δ_2 , а именно не превышает $\mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$. Отсюда следует, что $\mu(S)$ определена в случае, когда S — любое конечное

объединение интервалов. Если S — счетное объединение $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$, то $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j\right)$ является неубывающей функцией n и определяется как

$$\mu(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j\right). \quad (13.10.2)$$

Замечание. Если полное изменение F на $\mathbb{R}$ бесконечно, а S — неограниченное множество, то $\mu(S)$ может быть бесконечной. Тогда предположим, что множество $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ содержится в интервале Δ , и обозначим через S' дополнение S относительно Δ , т. е. множество всех точек, которые принадлежат Δ , но не при-

надлежат S . Вероятностное представление показывает, что должно быть $\mu(S') = \mu(\Delta) - \mu(S)$, даже если само S' не является счетным объединением интервалов. Например, S может быть плотным в Δ (так что S' не содержит никаких невырожденных интервалов), хотя S' все еще несчетное множество.

Описанная процедура, повторенная бесконечное число раз, определяет $\mu(S)$ для всех множеств S , принадлежащих *борелеву классу* (или *полю*) $\mathbf{B}$ множеств на $\mathbb{R}$. Этот класс представляет собой наименьший класс множеств, таких, что 1) каждый интервал содержится в $\mathbf{B}$, 2) счетное объединение множеств из $\mathbf{B}$ принадлежит $\mathbf{B}$, 3) дополнение множества из $\mathbf{B}$ также содержится в $\mathbf{B}$.

Мера μ является функцией множеств, определенной для всех S из $\mathbf{B}$, причем $\mu(S) \geq 0$ для всех S из $\mathbf{B}$ и

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j), \\ \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j), \text{ если } S_j \text{ попарно не пересекаются.} \end{aligned} \quad (13.10.3)$$

Множество S имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ S может быть вложено в борелево множество S' меры, меньшей или равной ε , или, что эквивалентно, в открытое множество S' меры, меньшей или равной ε , как это утверждалось в § 13.1. Если S — любое множество, отличающееся от борелева множества S_0 на множество меры нуль (т. е. если множество S может быть получено из S_0 выбрасыванием точек множества S_1 и добавлением точек множества S_2 , причем S_1 и S_2 имеют меру нуль), то $\mu(S)$ определяется как $\mu(S_0)$. Этот последний шаг известен как *пополнение меры*, а множества S , получаемые таким образом, называются *измеримыми* или μ -*измеримыми* множествами.

Заметим, что класс борелевых множеств не зависит от выбора функции F , тогда как класс множеств, имеющих меру нуль, зависит от выбора F . Если F постоянна в интервале Δ , то $\mu(\Delta) = 0$, даже если длина интервала отлична от нуля. С другой стороны, если F имеет скачок при $x = \xi$ и если через $\{\xi\}$ обозначить множество, состоящее из единственной точки ξ , то $\mu(\{\xi\}) > 0$. Если $F(x) \equiv x$ (в этом случае мера любого интервала совпадает с его длиной), то мера μ называется *лебеговой мерой* и часто обозначается через m . Известно, что существуют множества S , которые неизмеримы в смысле Лебега. Если такое S лежит в интервале, в котором функция F , определяющая меру μ , постоянна, то S является μ -измеримым и $\mu(S) = 0$. Следовательно, класс измеримых множеств зависит от μ (т. е. от F), а класс борелевых множеств не зависит.

Если F — вещественная функция локально ограниченной вариации, причем не обязательно неубывающая, то μ — вещественная (не обязательно положительная) мера на $\mathbb{R}$. Если F — комплексная функция локально ограниченной вариации, то μ — комплексная мера на $\mathbb{R}$.

Общий n -мерный случай мы опишем для $n = 2$. Пусть $F = F(x, y)$ — неубывающая функция на плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. § 13.3). Сначала при помощи F определим меру μ для открытых множеств. Пусть Ω — любое открытое множество на плоскости, и пусть $\mathcal{A}(\Omega)$ — множество допустимых функций для Ω , а именно вещественных функций $\varphi(x, y)$, таких, что 1) $\varphi(x, y)$ непрерывна на всей $\mathbb{R}^2$, 2) $\varphi(x, y) = 0$ для $(x, y) \notin \Omega$, 3) $\varphi(x, y) \leq 1$ на всей $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mu(\Omega)$ определяется как

$$\mu(\Omega) = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) d^2F(x, y). \quad (13.10.4)$$

[Такой двойной интеграл Стильеса непрерывной функции φ относительно неубывающей функции F мы обсуждали в § 13.3.] Функция φ может быть сколь угодно «близкой» в некотором смысле к характеристической функции множества Ω , т. е. к функции, равной 1 на Ω и равной нулю вне Ω . Это подсказывает, что (13.10.4) следовало бы записать в виде

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} d^2F(x, y). \quad (13.10.5)$$

Легко проверить, что это верно, если Ω — такая область (прямоугольник, круг, эллипс, треугольник, кольцо и т. п.), для которой известно, как определить данный интеграл. В противном случае (13.10.4) можно рассматривать в качестве определения для (13.10.5). Если $F(x, y) = x + y$, то μ является *лебеговой мерой* на $\mathbb{R}^2$, а $\mu(\Omega)$ представляет собой площадь области Ω и может быть записана как $\iint_{\Omega} dx dy$. Если F — функция распределения

случайных переменных ξ, η , то $\mu(\Omega)$ — вероятность того, что точка (ξ, η) лежит в Ω .

Начиная с этого места, рассуждения совпадают с проведенными для $\mathbb{R}$, за исключением того, что «интервал» всюду заменяется «открытым множеством». Борелевы множества в $\mathbb{R}^2$ суть множества, которые могут быть получены из открытых множеств операциями дополнения и счетного объединения (а следовательно, также и счетного пересечения). Функция множества $\mu(S)$, определенная, как описано выше, для борелевых множеств, обладает свойствами (13.10.3) и называется *положительной мерой* на $\mathbb{R}^2$.

В абстрактной теории начинают с абстрактного *выборочного пространства* S (множества иначе неопределяемых точек x , кото-

рые называются *событиями* или *выборками* и мыслятся как возможные исходы пробы или эксперимента) и с так называемой σ -алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathcal{S}$; это такая совокупность подмножеств, что дополнение любого S в $\mathcal{A}$ также принадлежит $\mathcal{A}$ и что если $\{S_n\}$ — любая счетная совокупность множеств в $\mathcal{A}$, то объединение и пересечение этих множеств $\{S_n\}$ принадлежат $\mathcal{A}$. Тогда на $\mathcal{A}$ задается некоторая неотрицательная функция множества P , для которо $P(S) \geq 0$ и которая является *счетно аддитивной*; это означает, что если $\{S_n\}$ — счетная совокупность непересекающихся множеств в $\mathcal{A}$, то $P(\cup S_n) = \sum P(S_n)$. (Если опустить слово «непересекающиеся», то « $=$ » следует заменить на « $\leq$ ».) Тройка $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$ называется *вероятностным пространством* (см. книгу Феллера [1966]).

Функция $P(S)$ рассматривается как вероятность того, что исход пробы является одной из точек множества S . Если $\mathcal{S}$ — топологическое пространство, а $\mathcal{A}$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая открытые множества из $\mathcal{S}$, то эти множества в совокупности $\mathcal{A}$ называются *борелевыми множествами* пространства $\mathcal{S}$. Иногда используют иную терминологию и называют σ -алгебру «борелевой алгеброй», или « σ -полем», или «борелевым полем».

Если $\varphi(x)$ — вещественнозначная функция, определенная на $\mathcal{S}$, то ее математическое ожидание хотелось бы определить как интеграл Стильтеса

$$E(\varphi(x)) = \int_{\mathcal{S}} \varphi(x) dP(x). \quad (13.10.6)$$

Для того чтобы определить такой интеграл в абстрактном вероятностном пространстве, мы ограничимся следующим классом функций φ :

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется *случайной переменной* на вероятностном пространстве $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, P\}$, если для любого вещественного t множество всех x , для которых $\varphi(x) \leq t$, принадлежит σ -алгебре $\mathcal{A}$.

Замечание. x обозначает неопределяемую точку в абстрактном пространстве $\mathcal{S}$, но если в $\mathcal{S}$ введена какая-либо *разумная* система координат (конечномерная или бесконечномерная), то каждая координата точки x является случайной переменной в полном соответствии с предыдущими параграфами.

Поскольку P — положительная мера, в данном контексте нет необходимости использовать полную теорию интеграла Стильтеса в абстрактных пространствах с мерой для того, чтобы интерпретировать (13.10.6). Вместо этого мы поступим следующим образом (см. книгу Феллера [1966, § IV.4]): прежде всего $\varphi(x)$ — *простая* функция, если она принимает значения $\varphi^{(1)}$,

$\varphi^{(2)}, \dots$ на множествах $S_1, S_2, \dots$ в данной алгебре. Тогда мы определяем

$$E(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)} P(S_j) \quad (13.10.7)$$

при условии, что сумма сходится абсолютно; в противном случае математическое ожидание не определено. Любая случайная переменная $\varphi(x)$ является равномерным пределом последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ простых функций, и мы полагаем

$$E(\varphi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\varphi_k(x)). \quad (13.10.8)$$

Это следует понимать так: может быть доказано, что или все величины $E(\varphi_k(x))$ существуют для достаточно больших k и их предел существует, или все они не определены. Кроме того, если этот предел существует, то он одинаков для всех последовательностей $\{\varphi_k\}$, сходящихся к φ .

На этом мы заканчиваем описание абстрактной концептуальной основы математической теории вероятностей; дальнейшее ее развитие см. в томе 2 книги Феллера [1966].

Теперь вернемся к конечномерному случаю и кратко рассмотрим вопрос о том, когда две различные меры определяют одинаковые измеримые множества. Такое равенство приводит к понятию абсолютно непрерывных функций и мер и к теореме Радона—Никодима. Мы обсудим в основном одномерный случай. Как было указано выше, борелевы множества на $\mathbb{R}$ (или на $\mathbb{R}^n$) не зависят от выбора функции $F(x)$ (или $F(\mathbf{x})$), использованной в определении меры μ , но множества меры нуль, которые используются в пополнении меры, зависят от F . Поэтому интересный нас вопрос можно поставить так: когда множества μ -меры нуль совпадают с множествами лебеговой меры нуль и когда при двух заданных мерах μ_1 и μ_2 , полученных при помощи функций F_1 и F_2 , множества μ_1 -меры нуль совпадают с множествами μ_2 -меры нуль?

Теорема 1. Каждое множество на $\mathbb{R}$ лебеговой меры нуль имеет μ -меру нуль тогда и только тогда, когда функцию $F(x)$ можно записать в виде интеграла Лебега

$$F(x) = \int_0^x f(x') dx'. \quad (13.10.9)$$

Тогда производная $F'(x)$ существует почти всюду и совпадает почти всюду с $f(x)$.

Феллер [1966] определяет $F(x)$ как абсолютно непрерывную функцию, если она может быть выражена в указанной форме, а данную теорему в несколько более общей формулировке он

называет теоремой Радона—Никодима. Следуя этой точке зрения, мы назвали распределение вероятности $\mathbf{P}$ абсолютно непрерывным (§ 13.1), если ее функция распределения может быть выражена в виде (13.10.9). Для такого распределения данная теорема показывает, что если S —множество лебеговой меры нуль, то вероятность $\mathbf{P}\{x \in S\} = 0$. Утверждение приведенной выше теоремы применимо, однако, и к любой вещественной или комплексной функции $F(x)$ локально ограниченной вариации. Другое и чаще используемое определение абсолютной непрерывности формулируется следующим образом.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на $\mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждый раз, когда объединение конечного числа непересекающихся интервалов (a_k, b_k) имеет лебегову меру, меньшую δ , т. е. когда

$$\sum (b_k - a_k) < \delta, \quad (13.10.10)$$

выполняется неравенство

$$\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon. \quad (13.10.11)$$

Абсолютная непрерывность в интервале (α, β) на $\mathbb{R}$ определяется аналогично.

Эти два определения абсолютной непрерывности эквивалентны для конечного интервала, но не для всего $\mathbb{R}$. Например, функция $F(x) = x^2$ может быть записана в виде (13.10.9), но не является абсолютно непрерывной в смысле определения 1, поскольку для любого $\delta > 0$ мы можем найти такой интервал $(a, a + \delta)$, что величина $(a + \delta)^2 - a^2$ произвольно велика, просто положив a достаточно большим. Однако если дополнительно допустить, что полная вариация F на $\mathbb{R}$ конечна, то из (13.10.9) следует абсолютная непрерывность. Обратно, если $F(x)$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ согласно приведенному определению, то, во-первых, легко доказать, что $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, а во-вторых, из теоремы Радона—Никодима (которая будет сформулирована ниже) следует, что $F(x)$ можно представить в виде (13.10.9). Наконец, теорема Банаха—Зарецкого (см. книгу Натансона [1950]) утверждает, что если $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и $\mu(S) = 0$ для любого множества S лебеговой меры нуль, то $F(x)$ абсолютно непрерывна в смысле определения 1. (Если $F(x)$ не имеет ограниченной вариации, то мера μ , разумеется, не определена.)

В случае когда $F(x)$ является функцией Кантора, описанной в примере 6 § 13.1 и изображенной на рис. 13.7, было показано, что для любого $\delta > 0$ можно найти конечную совокупность открытых интервалов на $\mathbb{R}$ с общей длиной, меньшей δ , но та-

кую, что $F(x)$ возрастает только в этих интервалах. В этом случае сумма в (13.10.11) равна 1 и поэтому $F(x)$ не является абсолютно непрерывной. Было также указано, что $F'(x) = 0$ почти всюду. Таким образом, правая часть равенства (13.10.9), рассматриваемая как интеграл Лебега (а это единственно возможная интерпретация), является константой и, следовательно, не равна функции $F(x)$.

В теореме Радона—Никодима лебегова мера заменяется произвольной положительной мерой μ_1 на $\mathbb{R}$.

Определение 2. Мера μ_2 на $\mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной относительно* положительной меры μ_1 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каждый раз, когда объединение конечного числа непересекающихся интервалов Δ_k имеет меру μ_1 , меньшую δ , т. е. когда

$$\sum \mu_1(\Delta_k) = \sum F_1(\Delta_k) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\sum |\mu_2(\Delta_k)| = \sum |F_2(\Delta_k)| < \varepsilon.$$

(Заметим, что $\sum \mu_1(\Delta_k)$ можно было бы записать как $\sum |\mu_1(\Delta_k)|$ в силу положительности меры μ_1 .)

Теорема (Радон—Никодим). Если μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 , то F_2 можно записать в виде

$$F_2(x) = \int_1^x f(x') dF_1(x').$$

В § 14.8 мы встретимся с применением этой теоремы к одному из представлений некоторой физической системы, в которой данная наблюдаемая диагональна.

В многомерном случае имеет место все то же самое, за исключением того, что Δ_k представляет собой прямоугольный параллелепипед (также называемый *интервалом* в $\mathbb{R}^n$), $F(\Delta_k)$ определяется так же, как в § 13.3, а равенство в теореме Радона—Никодима имеет вид

$$F_2(x) = \int_1^{x_1} \dots \int_1^{x_n} f(x') d^n F_1(x').$$

Вариант этой теоремы для абстрактных пространств см. в книге Халмоша [1950] или в книге Данфорда и Шварца [1966].

Теперь мы можем ответить на вопрос, с которого мы начали данное рассмотрение: достаточное условие того, что две меры μ_1 и μ_2 определяют одинаковые множества меры нуль, состоит в их положительности и абсолютной непрерывности одной относительно другой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $f(x)$ и $F(y)$ — абсолютно непрерывные функции. Покажите, что $F(f(x))$ абсолютно непрерывна, если $f(x)$ монотонна или если $F(y)$ непрерывна по Липшицу.

2. Покажите, что если

$$f(x) = \begin{cases} (x \sin(1/x))^3 & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$F(y) = y^{1/3} \quad (\text{вещественный корень}),$$

то $f(x)$ и $F(y)$ абсолютно непрерывны в $(-1, 1)$, тогда как $F(f(x))$ таковой не является. Почему это не вступает в противоречие с упражнением 1? Заметьте, что интегралы

$$\int_{x_0}^1 \frac{d}{dx} F(f(x)) dx, \quad \int_{-1}^{x_0} \frac{d}{dx} F(f(x)) dx$$

расходятся при $x_0 = 0$ как интегралы Римана, причем не спасает положение и рассмотрение их в смысле Лебега.

13.11. ВЕРОЯТНОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА. ГАУССОВЫ МЕРЫ

Мы представим здесь некоторые простейшие соображения относительно мер в топологических векторных пространствах для того, чтобы проиллюстрировать идеи, высказанные в предшествующем параграфе, и чтобы показать нечто из того, что может происходить в бесконечномерном случае. Дальнейшие подробности см. в книге Гельфанда и Виленкина [1961].

В конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ лебегова мера m обладает тем свойством, что она одинакова для конгруэнтных множеств: если S измеримо, а S' получено из S сдвигом и вращением в $\mathbb{R}^n$, то $m(S') = m(S)$. Если Ω — открытое множество, то $m(\Omega)$ представляет его объем; поэтому если Ω также ограничено и непусто, то

$$0 < m(\Omega) < \infty. \quad (13.11.1)$$

В бесконечномерном случае нельзя найти меры, обладающей этими свойствами. Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H . Для любого $x \in H$ мы записываем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k$$

и называем x_k координатами x . Рассмотрим ограниченные открытые множества

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x: 0 < x_k < 1/k, k=1, 2, \dots\}, \\ \Omega_{1/2} &= \{x: 0 < x_k < 1/(2k), k=1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (13.11.2)$$

При помощи сдвигов множества $\Omega_{1/2}$ в различных направлениях мы можем породить бесконечное число непересекающихся копий этого множества в Ω_1 . Поэтому если $m(\Omega_{1/2}) > 0$, то $m(\Omega_1) = \infty$, а, с другой стороны, если $m(\Omega_1) < \infty$, то $m(\Omega_{1/2}) = 0$, и, таким образом, условие (13.11.1) нарушается. Отсюда следует, что в H нет понятия объема и понятия плотности вероятности. Однако существуют распределения вероятности, включая непрерывные, основанные на так называемых цилиндрических множествах, которые, согласно Гельфанду и Виленкину, были введены Колмогоровым в 1936 г.

Если M —любое конечномерное подпространство H , а S —любое борелево множество в M , то множество

$$Z = S + M^\perp, \quad (13.11.3)$$

т. е. множество всех точек $x + y$ из H , где $x \in S$, а $y \in M^\perp$, называется *цилиндрическим множеством*, S —его *основанием*, а $M^\perp$ —*образующим подпространством*. (Если бы M было двумерным, а $M^\perp$ —одномерным, то Z представляло бы собой обычный трехмерный цилиндр, но в приведенном выше определении $M^\perp$, конечно, обязательно является бесконечномерным подпространством.)

Говоря, что S —борелево множество в M , мы имеем в виду обычную топологию M , которое изоморфно $\mathbb{R}^m$ для некоторого m . Борелевы множества порождаются операциями дополнения (относительно M) и счетного объединения, исходя из открытых множеств пространства M .

Основание S и образующее подпространство $M^\perp$ цилиндрического множества Z неоднозначно определяются этим множеством. Например, мы всегда можем заменить подпространство M на большее подпространство M' (т. е. подпространство большей размерности), которое содержит M , а затем заменить множество S на множество S' в M' , задав это множество в виде $S + (M' \ominus M)$, где $M' \ominus M$ означает ортогональное дополнение M в M' . Ясно, что $S' + M'^\perp$ совпадает с $S + M^\perp$. Из этого следует, что любые два цилиндрических множества Z_1 и Z_2 (или любое конечное число таких множеств) могут быть описаны как имеющие основания в общем конечномерном подпространстве M и имеющие общее образующее подпространство $M^\perp$. А именно, если M_1 и M_2 являются подпространствами для Z_1 и Z_2 , то мы принимаем за подпространство M линейную оболочку M_1 и M_2 .

Таким образом мы видим, что цилиндрические множества образуют *алгебру* A_0 множеств, т. е. совокупность множеств, обладающих следующими свойствами: 1) объединение и пересечение двух любых цилиндрических множеств являются цилиндрическими множествами; 2) дополнение (в H) любого цилиндрического множества является цилиндрическим множеством.

Следующее свойство этой алгебры состоит в том, что если имеется счетная совокупность $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ цилиндрических множеств, каждое из которых имеет основание в общем конечномерном подпространстве, то их объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ и их пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i$ представляют собой цилиндрические множества.

Алгебра A_0 не является σ -алгеброй, поскольку в общем случае счетное объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ не представляет собой цилиндрическое множество, если только все Z_i не имеют оснований в общем конечномерном подпространстве, но мы определяем A как наименьшую σ -алгебру, содержащую A_0 . Алгебра A получается при помощи операций дополнения и счетного объединения, исходя из цилиндрических множеств. Множества Ω_1 и $\Omega_{1/2}$, заданные равенствами (13.11.2), содержатся в A .

Допустим теперь, что P — счетно аддитивная функция множества, определенная на σ -алгебре A и удовлетворяющая аксиомам

$$0 \leq P(X) \leq 1 = P(H), \quad (13.11.4)$$

как в предыдущем параграфе. Тогда тройка $\{H, A, P\}$ представляет собой вероятностное пространство.

Если Z — цилиндрическое множество, то $P(Z)$ можно интерпретировать как маргинальную вероятность. Именно, пусть M — подпространство, которое содержит основание S множества Z , и пусть $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ — ортонормированный базис в H , причем такой, что $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ является базисом в M , а $\{\varphi_{m+1}, \dots\}$ — базисом в $M^{\perp}$. Тогда координаты $\{x_k\}_1^{\infty}$ точки x в H относительно базиса $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ можно рассматривать как случайные переменные, которые описывают результат некоторого эксперимента, а $P(Z)$ есть вероятность того, что точка $(x_1, \dots, x_m)$ лежит в S , тогда как значения $x_{m+1}, \dots$ полностью игнорируются. В этом смысле $P(Z)$ — маргинальная вероятность. Определение $P(Z)$ для всех Z из A_0 сводится к определению всех возможных конечномерных маргинальных вероятностей. Предполагается, что это определение согласуется с вероятностной интерпретацией: именно, $P(Z)$ удовлетворяет (13.11.4), является конечно аддитивной, а также счетно аддитивной в том смысле, что для непересекающихся Z_i в A_0

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} Z_i\right) = \sum_1^{\infty} P(Z_i), \quad (13.11.5)$$

когда $\bigcup_1^{\infty} Z_i$ содержится в A_0 . Мы называем P *вероятностной мерой* на A_0 . Следующая теорема является фундаментальной в теории вероятностей (см. книгу Феллера [1966, § IV.5]).

Теорема о расширении. Если A_0 — алгебра множеств, а P — вероятностная мера на A_0 , то P имеет единственное расширение до вероятностной меры на σ -алгебре A , порожденной алгеброй A_0 .

Если P ограничить подалгеброй алгебры A_0 , состоящей из всех Z с основанием S в некотором фиксированном конечномерном подпространстве M , то мы можем определить

$$P_M(S) = P(Z);$$

тогда ясно, что P_M есть вероятностная мера в M . Но M конечномерно, и поэтому P_M можно описать при помощи методов предыдущих параграфов, например, используя функцию распределения $F(x_1, \dots, x_m)$ или — в случае ее абсолютной непрерывности — плотность $f(x_1, \dots, x_m)$. Чтобы показать, что данная функция множества P является вероятностной мерой в H (после того, как уже показано, что P_M представляет собой вероятностную меру в каждом M), остается лишь показать, что счетная аддитивность (13.11.5) имеет место, когда не все Z_i имеют основания в общем M , хотя их объединение есть цилиндрическое множество. Такой пример будет приведен ниже в упражнении 4.

Гельфанд и Виленкин [1961, § IV.2] приводят различные условия, при которых P является счетно аддитивной, когда P_M — вероятностная мера в каждом M .

В том случае, когда P определена на A_0 , но предполагается лишь ее конечная аддитивность (и значит, она, строго говоря, не может быть вероятностью), эту функцию называют *мерой цилиндрических множеств*.

Основными примерами служат так называемые гауссовы меры в H , которые соответствуют нормальным распределениям в конечномерном пространстве. В § 13.4 было определено двумерное нормальное распределение, имеющее предписанные средние μ_1 и μ_2 случайных переменных ξ и η и предписанную ковариационную матрицу ρ . Было показано, что, переходя при помощи линейного преобразования от переменных ξ, η к переменным α, β , можно получить нормальное распределение переменных α, β с нулевыми средними и единичной ковариационной матрицей ρ . Плотность вероятности α, β тогда равна $\exp\{-(\alpha^2 + \beta^2)/2\}$. Сначала опишем обобщение этого случая на пространство H . Оказывается, что в этом случае нет счетной аддитивности, хотя некоторые другие гауссовы меры обладают таким свойством.

Пусть Z — цилиндрическое множество, основание которого S лежит в m -мерном подпространстве $M \in H$, и пусть $x_1, \dots, x_m$ — декартовы координаты в M . Меру цилиндрических множеств определяем, положив

$$P(Z) = (2\pi)^{-m/2} \int_S \exp[-(x_1^2 + \dots + x_m^2)/2] dx_1 \dots dx_m. \quad (13.11.6)$$

Отсюда следует, что P_M имеет плотность $(2\pi)^{-m/2} \exp[-(x_1^2 + \dots + x_m^2)/2]$ в M . (Напомним, что H — вещественное гильбертово пространство и поэтому координаты x_j вещественны.) Можно показать, что $P(Z)$ не зависит от выбора M и S для данного Z (см. упражнение 2) и что P не является счетно аддитивной (см. упражнение 3).

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Демонстрация того, что маргинальные вероятности могут давать большую информацию.) Пусть $F(x, y)$ — функция распределения случайных переменных ξ, η . Рассмотрим преобразования

$$\xi' = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta,$$

$$\eta' = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \quad (\theta \text{ вещественно}).$$

Допустим, что для каждого такого преобразования маргинальное распределение ξ' при игнорировании η' известно. Покажите, что тогда $F(x, y)$ определена.

2. Покажите, что при замене M и S на M' и S' для данного Z , как это было описано ранее, значение (13.11.6) для $P(Z)$ не изменится.

3. Пусть x_j ($j=1, \dots$) — координаты относительно полной ортонормированной системы $\{\varphi_j\}_1^\infty$ в вещественном гильбертовом пространстве H . Рассмотрим цилиндрические множества

$$Z_1: |x_1| < a \quad (x_2, x_3, \dots \text{ произвольны}),$$

$$\vdots$$

$$Z_k: \sum_{j=1}^k x_j^2 < a^2 \quad (x_{k+1}, \dots \text{ произвольны}),$$

$$\vdots$$

где a — положительная постоянная. Покажите, что (13.11.6) дает

$$P(Z_k) = \frac{\Gamma(k/2, a^2/2)}{\Gamma(k/2)},$$

где $\Gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция, имеющая вид

$$\Gamma(x, y) = \int_0^y e^{-t} t^{x-1} dt$$

($\Gamma(x) = \Gamma(x, \infty)$). Используя очевидное неравенство $\Gamma(x, y) < y^{x-1}$ для положительных x и y и асимптотическую формулу Стирлинга для $\Gamma(x)$, покажите,

что для фиксированного $a > 0$ $P(Z_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Пересечение $\bigcap_{k=1}^\infty Z_k$

представляет собой шар B_a радиуса a в H и не является цилиндрическим множеством, но если бы функция P могла быть расширена на σ -алгебру $\mathcal{A}$ (которая содержит B_a), мы бы заключили, что $P(B_a) = 0$ для любого a . Наконец, поскольку H является счетным объединением $\bigcup_{a=1}^\infty B_a$, мы видим, что гауссова мера P не является счетно аддитивной.

4. Пусть x_j ($j=1, \dots$) снова координаты. Рассмотрим цилиндрические множества (во всех случаях неуказанные координаты произвольны):

$$Z_1: x_1 < 1,$$

$$Z_2: x_1 \geq 1, \quad x_2 < 1,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$Z_k: x_j \geq 1 \quad (j=1, \dots, k-1), \quad x_k < 1.$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Покажите, что Z_k не пересекаются, что их основания не лежат в каком-либо общем конечномерном подпространстве и что их объединение является цилиндрическим множеством.

Грубо говоря, причина того, что описанная выше гауссова мера не ведет себя как вероятность, заключается в следующем. Гауссова мера имеет единичную дисперсию в каждом из бесконечно многих направлений в $\mathbf{H}$, а это вызывает стремление «вытолкнуть» вероятность на большие расстояния до такой степени, что фактически вероятность нахождения x в любом конечном шаре равна нулю (см. упражнение 3). Разумеется, такой путь рассуждений носит чисто эвристический характер, поскольку в $\mathbf{H}$ нет таких понятий, как плотность вероятности, а потому бессмысленно говорить о том, «где» локализована вероятность, но этот путь наводит на мысль, что, возможно, мы получим более разумную гауссову меру, если выберем фиксированный ортонормированный базис $\{\psi_l\}_1^\infty$ в $\mathbf{H}$ и потребуем, чтобы дисперсия в направлении ψ_l стремилась к нулю с достаточной скоростью, когда $l \rightarrow \infty$. Конечно, полученная мера будет в высокой степени анизотропна.

С этой целью допустим, что B — положительно определенный компактный оператор, и обозначим $A = B^{-1}$. (Введенные выше ортонормированные векторы ψ_l будут собственными векторами B , а дисперсия в направлении ψ_l будет соответствующим собственным значением.) Если Z — любое цилиндрическое множество с основанием S в m -мерном подпространстве $\mathbf{M}$, то примем в качестве ортонормированного базиса в $\mathbf{M}$ совокупность $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ и определим эрмитову матрицу $A(\mathbf{M})$ с элементами

$$A(\mathbf{M})_{jk} = (\varphi_j, A\varphi_k) \quad (j, k = 1, \dots, m),$$

а затем положим

$$\mathbf{P}(Z) = \mathbf{P}_{\mathbf{M}}(S) = \frac{V \det A(\mathbf{M})}{(2\pi)^{m/2}} \int_S \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k} x_j A(\mathbf{M})_{jk} x_k \right\} dx_1 \dots dx_m.$$

Мы утверждаем без доказательства, что это определяет меру цилиндрических множеств и что эта мера счетно аддитивна,

если B — ядерный оператор; тогда $\{H, A, P\}$ является вероятностным пространством.

Подробности см. в книге Гельфанда и Виленкина [1961].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 13.

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Полной вариацией вещественной функции $f(x)$ одной переменной в интервале $[a, b]$ является, грубо говоря, сумма всех вертикальных смещений, необходимых при вычерчивании графика $f(x)$ от $x=a$ до $x=b$, если все смещения — и вверх, и вниз — берутся со знаком плюс. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную, то полная вариация равна $\int_a^b |f'(x)| dx$. Однако чтобы

придать этому понятию более общий смысл, не обязательно требовать, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой или даже непрерывной. Полная вариация ступенчатой функции равна сумме модулей величин ее скачков.

Разбиение P_N отрезка $[a, b]$ представляет собой совокупность точек x_j , таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Тогда полная вариация f на $[a, b]$ определяется как

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})| : \forall P_N, \forall N \right\}. \quad (13.A.1)$$

Ясно, что это определение согласуется с частными случаями, описанными выше. Функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, если $V_a^b < \infty$. Функция имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, если V_a^b конечна и остается ограниченной, когда $a, b \rightarrow -\infty, +\infty$. Функция имеет локально ограниченную вариацию, если V_a^b конечна для любого конечного интервала $[a, b]$.

ПРИМЕР 1

Функция $f(x)$, принимающая значение 1 для рациональных x и значение 0 для иррациональных x , имеет неограниченную вариацию на любом интервале.

ПРИМЕР 2

Непрерывная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ x \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0 \end{cases} \quad (13.A.2)$$

имеет неограниченную вариацию на любом интервале, включающем начало координат.

ПРИМЕР 3

Монотонная функция (неубывающая или невозрастающая) имеет ограниченную вариацию на любом интервале; в самом деле, $V_a^b = |f(b) - f(a)|$.

Частичное обращение утверждения примера 3 состоит в том, что любая функция $f(x)$ локально ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих (или двух невозрастающих) функций:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x). \quad (13.A.3)$$

Чтобы это показать, разобьем V_a^b на две части — *положительную* и *отрицательную вариации* $\bar{V}_a^b$ и $\bar{V}_a^b$, для чего введем обозначения

$$[y]^+ = \max \{0, y\}, \quad [y]^- = \max \{0, -y\} \quad (13.A.4)$$

для любых вещественных y и определим

$$\begin{aligned} \bar{V}_a^b &= \sup \left\{ \sum [f(x_j) - f(x_{j-1})]^+ : \forall P_N, \forall N \right\}, \\ \bar{V}_a^b &= \sup \left\{ \sum [f(x_j) - f(x_{j-1})]^- : \forall P_N, \forall N \right\}. \end{aligned} \quad (13.A.5)$$

Очевидно, что

$$\bar{V}_a^b + \bar{V}_a^b = V_a^b, \quad \bar{V}_a^b - \bar{V}_a^b = f(b) - f(a).$$

Наконец, в (13.A.3) f_1 и f_2 можно взять в виде

$$f_1(x) = \bar{V}_a^x + \text{const}, \quad f_2(x) = \bar{V}_a^x + \text{const}, \quad (13.A.6)$$

где две константы выбраны так, что их разность равна $f(a)$.

Представление (13.A.3) весьма неоднозначно, поскольку f_1 и f_2 можно заменить на $f_1 + g$ и $f_2 + g$, где g — любая неубывающая функция. Функции, приведенные в (13.A.6) и называемые *восходящей* и *нисходящей частями* $f(x)$, имеют особое свойство, состоящее в том, что когда одна из них возрастает, другая остается постоянной. Таким образом, возрастание $f_1(x) + f_2(x)$ на интервале $[a, b]$ равно V_a^b , а не просто $\geq V_a^b$.

Если $f(x)$ — комплекснозначная функция, то определение (13.A.1) остается в силе, но разделение на восходящую и нисходящую части нужно проводить отдельно для $\text{Re } f(x)$ и $\text{Im } f(x)$; в таком случае мы имеем

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + if_3(x) - if_4(x),$$

где каждая из f_k — неубывающая функция.

Рассмотрим теперь вещественную функцию $f(x, y)$ двух переменных. *Полная вариация* f в прямоугольнике $a \leq x \leq c$, $b \leq y \leq d$ есть

$$V_{ab}^{cd} = \sup \left\{ \sum_{j,k} |f(\square_{jk})| : \forall P_N, \forall N \right\}, \quad (13.A.7)$$

где P_N — разбиение данного прямоугольника на малые прямоугольники $\square_{jk}$ вертикальными и горизонтальными прямыми с координатами x_j и y_k , такими, что

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_N = c, \\ b &= y_0 < y_1 < \dots < y_N = d, \end{aligned}$$

а обозначение $f(\square)$ было объяснено в § 13.3.

Положительные и отрицательные вариации $\bar{V}_{ab}^{cd}$ и $\bar{V}_{ab}^{cd}$ получаются заменой $|\cdot|$ в (13.A.7) на $[\cdot]^+$ и $[\cdot]^-$, как в одномерном случае. Когда величины $f(\square_{jk})$ суммируются по совокупности малых прямоугольников, покрывающих исходный прямоугольник, все члены, кроме тех, которые соответствуют угловым точкам исходного прямоугольника, взаимно уничтожаются; поэтому

$$\bar{V}_{ab}^{cd} - \bar{V}_{ab}^{cd} = f(c, d) - f(c, b) - f(a, d) + f(a, b).$$

Если заменить c и d на x и y , а a и b рассматривать как постоянные, то можно записать

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (\bar{V}_{ab}^{xy} + f(x, b) + f(a, y) + \text{const}) - (\bar{V}_{ab}^{xy} + \text{const}) = \\ &= f_1(x, y) - f_2(x, y), \end{aligned} \quad (13.A.8)$$

где f_1, f_2 — неубывающие функции x и y в том смысле, как это было определено в § 13.3.

Замечание. В этом равенстве члены $f(x, b)$ и $f(a, y)$, каждый из которых зависит от одной переменной, могут быть включены как в f_1 , так и в f_2 , поскольку для них $f(\square)$ всегда равна нулю.

Для n -мерного случая, описанного в конце § 13.3, все делается по тому же образцу. Используя обозначения § 13.3, мы определяем

$$V_a^b = \sup \left\{ \sum_j |f(\square_j)| : \forall P_N, \forall N \right\}. \quad (13.A.9)$$

Тогда комплекснозначную функцию $f(x)$ локально ограниченной вариации можно записать в виде

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4, \quad (13.A.10)$$

где каждая из $f_k(x)$ — неубывающая функция.

ВЕРОЯТНОСТЬ И ОПЕРАТОРЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Состояния системы; наблюдаемые; измерение; вероятностные аксиомы для квантовомеханической системы; спектральные проекторы; ортогональность проекторов как следствие вероятностных аксиом; функция распределения для наблюдаемой; вероятностная основа для представления наблюдаемой в качестве самосопряженного оператора; математическое ожидание; дисперсия; неопределенность; квантовомеханический ансамбль; матрица плотности — положительно определенный оператор с единичным следом; функция ожидания; выражение неограниченных наблюдаемых через ограниченные; соотношения коммутации; банахова алгебра; C^* - и B^* -алгебры; представление B^* -алгебры через C^* -алгебру; положительно определенный элемент; положительный функционал; наблюдаемая с простым спектром; порождающий вектор; спектральное представление гильбертова пространства; полная система коммутирующих наблюдаемых; унитарные «наблюдаемые».

Предварительные сведения: гл. 1—9, 12, 13.

Эта глава посвящена обсуждению роли, которую играет вероятность в основаниях квантовой механики, и предварительному знакомству с той ролью, которую играет вероятность в квантовой статистической механике.

14.1. СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ. НАБЛЮДАЕМЫЕ

В квантовомеханическом описании некоторой физической системы (например, атома) предполагается, что каждое возможное состояние соответствует ненулевому элементу (вектору) φ в некотором гильбертовом пространстве H или, точнее говоря, лучу $\{a\varphi: a \in \mathbb{C}\}$, содержащему все кратные φ . Обратно, каждый луч в H соответствует возможному состоянию данной системы. Часто бывает удобно считать, что φ нормирован ($\|\varphi\| = 1$); вектор φ и в этом случае определен неоднозначно, так как любой вектор вида $e^{ia}\varphi$ (a вещественно) также может быть взят в качестве представителя рассматриваемого луча, т. е. состояния данной системы.

Обозначим через A вещественную наблюдаемую величину в классическом смысле, например энергию данной системы. С классической точки зрения A имеет определенное значение λ в каждом состоянии системы φ . С другой стороны, в квантовой теории допускается, что если данную систему неоднократно приводить в состояние φ и каждый раз измерять A , то, вообще говоря, получатся различные значения $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$, подчиняющиеся, однако, некоторому вероятностному закону. Пусть $F(\cdot)$ —

функция распределения для этих значений (см. гл. 13), такая, что для любого вещественного λ

$$F(\lambda_0) = \mathbf{P}\{\lambda \leq \lambda_0\},$$

где $\mathbf{P}$ обозначает вероятность; функция F зависит, конечно, от начального состояния φ .

Далее, при измерении наблюдаемой $\mathcal{A}$ в общем случае происходит возмущение системы, так что после каждого измерения она оказывается в различных состояниях $\psi, \psi', \psi'', \dots$. Эти конечные состояния распределены (в $\mathbf{H}$) по некоторому вероятностному закону (также зависящему от начального состояния φ), и ψ взаимосвязаны с λ определенным образом (как именно, будет объяснено ниже). Предполагается, что после каждого измерения $\mathcal{A}$ данная физическая система приводится в начальное состояние φ до осуществления нового измерения.

Из описанных ниже простых аксиом квантовой механики будет следовать, что каждой наблюдаемой $\mathcal{A}$ можно поставить в соответствие самосопряженный оператор A в $\mathbf{H}$. Функция распределения $F(\cdot)$ значений $\mathcal{A}$ для данного состояния φ тогда будет выражена через A и φ при помощи формулы (14.3.7).

14.2. ВЕРОЯТНОСТИ: КОНЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

Сначала будут сформулированы аксиомы для модели, в которой имеется лишь конечное число возможных конечных состояний (нормированных векторов) $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, называемых *собственными состояниями* наблюдаемой $\mathcal{A}$, которые могут быть получены в результате измерения. В каждом состоянии ψ_i $\mathcal{A}$ имеет единственное вещественное значение λ_i , которое рассматривается как значение некоторой физической величины, когда система находится в состоянии ψ_i . Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ будем условно называть *собственными значениями*, хотя пока что с $\mathcal{A}$ не было связано никакой матрицы или оператора. Предварительно мы допустим, что все λ_i различны; как будет показано ниже, это допущение легко обойти, несколько изменив формулы. Из аксиом будет следовать, что собственные состояния порождают пространство $\mathbf{H}$, которое, следовательно, в данной модели n -мерно.

Основная аксиома разбивается на две части.

(а) Если $\mathcal{A}$ измеряется, когда система находится в состоянии, представляющем собой линейную суперпозицию собственных состояний, т. е. в состоянии вида

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j, \quad (14.2.1)$$

то вероятность получения в результате измерения значения λ_k пропорциональна квадрату нормы k -го члена суммы, т. е.

$$P\{\lambda = \lambda_k\} = \text{const} \cdot |c_k|^2. \quad (14.2.2)$$

(б) Если в результате измерения получается значение λ_k , то система находится в состоянии ψ_k .

Если $\varphi = c_k \psi_k$ (все остальные c_j равны нулю), то измеренное значение равно λ_k (и система не возмущена данным измерением); поэтому коэффициент пропорциональности в (14.2.2) равен $\|\varphi\|^{-2}$ (вспомним, что $\|\psi_k\| = 1$). Таким образом, в общем случае

$$P\{\lambda = \lambda_k\} = |c_k|^2 / \|\varphi\|^2. \quad (14.2.3)$$

Из сформулированных выше аксиом следует, что ψ_j ортогональны. В самом деле, поскольку сумма вероятностей (14.2.3) равна единице, мы имеем

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \sum_{j,k=1}^n \bar{c}_j c_k (\psi_j, \psi_k). \quad (14.2.4)$$

Это тождество относительно c_i , и значит,

$$(\psi_j, \psi_k) = \delta_{jk}. \quad (14.2.5)$$

Отсюда следует, что $c_j = (\psi_j, \varphi)$ для каждого j . Таким образом, аксиома (а) принимает вид

$$P\{\lambda = \lambda_k\} = |(\psi_k, \varphi)|^2 / \|\varphi\|^2. \quad (14.2.6)$$

(В том случае, когда не все λ_i различны, суммирование в правой части следует проводить по всем k , для которых $\lambda_k = \lambda$.) Теперь мы допустим, что (14.2.6) справедливо для всех φ из гильбертова пространства H (которое до сих пор не было определено). Так как сумма вероятностей равна 1, мы имеем

$$\sum_{j=1}^n |(\psi_j, \varphi)|^2 = \|\varphi\|^2 \quad \text{для любого } \varphi \in H. \quad (14.2.7)$$

В силу теоремы 1 из § 1.6 отсюда следует, что векторы $\psi_1, \dots, \psi_n$ образуют полную ортонормированную систему в H . В этой модели H представляет собой n -мерное комплексное векторное пространство V^n , причем каждый вектор φ имеет вид (14.2.1).

Приведем теперь для n -мерного случая данную аксиому к такому виду, который допускал бы простое обобщение на случай бесконечного числа (быть может, непрерывно распределенных) измеряемых возможных значений λ наблюдаемой $\mathcal{A}$. Впредь будем предполагать, что начальное состояние представляется нормированным вектором, т. е. что $\|\varphi\| = 1$.

Пусть Δ — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$, и пусть

$$M(\Delta) = \text{Линейная оболочка множества } \{\psi_j; \lambda_j \in \Delta\}, \quad (14.2.8)$$

т. е. $M(\Delta)$ — подпространство n -мерного пространства, состоящее из линейных комбинаций тех собственных состояний, для которых соответствующие собственные значения лежат в Δ . Обозначим через $P(\Delta)$ ортогональный проектор H на $M(\Delta)$; иначе говоря, если φ задан в виде (14.2.1), то

$$P(\Delta)\varphi = \sum_{\lambda_j \in \Delta} c_j \psi_j. \quad (14.2.9)$$

В силу ортонормированности ψ_j и нормировки φ из (14.2.6) следует, что распределение вероятности определяется как

$$P\{\lambda \in \Delta\} = \|P(\Delta)\varphi\|^2, \quad (14.2.10)$$

что и является искомым видом аксиомы вероятности. Более того, если измеренное значение лежит в Δ , то последующее состояние системы представляется вектором в области значений проектора $P(\Delta)$, т. е. в $M(\Delta)$.

Пусть теперь Δ и Δ' — два любых непересекающихся интервала ($\Delta \cap \Delta'$ пусто). Из ортогональности ψ_j следует, что

$$M(\Delta) \perp M(\Delta'), \quad (14.2.11)$$

или

$$P(\Delta)P(\Delta') = P(\Delta')P(\Delta) = 0. \quad (14.2.12)$$

Наконец, соотношение полноты (14.2.7) эквивалентно следующему требованию:

$$P(\Delta) = I, \text{ если } \Delta = (-\infty, \infty), \quad (14.2.13)$$

так что $M(\mathbb{R}) = H$. Четыре последних соотношения (14.2.10) — (14.2.13) непосредственно переносятся на бесконечномерный случай.

14.3. ВЕРОЯТНОСТИ: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ (H БЕСКОНЕЧНОМЕРНО)

Для того чтобы обосновать аксиомы, рассмотрим следующую пару физических операций, повторяемых бесконечное число раз:

- 1) физическая система приводится в состояние φ ;
- 2) измеряется наблюдаемая $\mathcal{A}$.

Пусть $\lambda^{(i)}$ — измеренное значение $\mathcal{A}$ (вещественное число), полученное при i -м повторении, а $\psi^{(i)}$ — конечное состояние системы. Для любого интервала Δ на $\mathbb{R}$ определим

$M(\Delta)$ = Подпространство пространства H , порожденное векторами $\{\psi^{(i)}: \text{все } i, \text{ такие, что } \lambda^{(i)} \in \Delta\}$. (14.3.1)

Как и в конечной модели, мы допускаем, что $\lambda^{(i)}$ однозначно определяется конечным состоянием $\psi^{(i)}$, так что никакие два различных λ не могут соответствовать одному и тому же ψ .

Поэтому если Δ_1 и Δ_2 — непересекающиеся интервалы, то $M(\Delta_1)$ и $M(\Delta_2)$ — непересекающиеся множества, иначе говоря, они имеют в качестве общего элемента лишь нулевой вектор. По дальнейшей аналогии с конечной моделью допустим, что любой вектор ψ из H является возможным результатом измерения, так что все эти множества в совокупности порождают H . Это делает возможным следующее определение проекторов $P(\Delta)$: пусть Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 — непересекающиеся интервалы, объединение которых совпадает с $\mathbb{R}$, например $(-\infty, a]$, $(a, b]$, (b, ∞) ; тогда $M(\Delta_1)$, $M(\Delta_2)$ и $M(\Delta_3)$ — непересекающиеся множества, которые порождают H . Если произвольный $x \in H$ представлен в виде $x_1 + x_2 + x_3$, где $x_i \in M(\Delta_i)$, мы полагаем $x_i = P(\Delta_i)x$ ($i=1, 2, 3$) и таким образом определяем проектор $P(\Delta)$ для произвольного интервала Δ . Вскоре мы увидим, что $P(\Delta)$ являются ортогональными проекторами.

Итак, мы приходим к следующим аксиомам относительно распределения значений (λ) наблюдаемой $\mathcal{A}$.

1. Для любого интервала Δ на $\mathbb{R}$ существует проектор $P(\Delta)$ (зависящий от $\mathcal{A}$), такой, что если начальное состояние есть φ ($\|\varphi\|=1$), то

$$P\{\lambda \in \Delta\} = \|P(\Delta)\varphi\|^2. \quad (14.3.2)$$

2. Если в результате измерения $\mathcal{A}$ получается значение, лежащее в Δ , то конечное состояние системы принадлежит множеству

$$M(\Delta) = R(P(\Delta)).$$

Из этих аксиом следует, что если Δ_1 , Δ_2 — непересекающиеся интервалы, то

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = 0 = P(\Delta_2)P(\Delta_1),$$

а если $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1) = P(\Delta_2)P(\Delta_1).$$

Следовательно, достаточно рассмотреть проекторы

$$E_{\lambda_0} \stackrel{\text{def}}{=} P((-\infty, \lambda_0]) \quad (-\infty < \lambda_0 < \infty), \quad (14.3.3)$$

поскольку тогда, например,

$$P((a, b]) = E_b - E_a.$$

Покажем теперь, что эти проекторы ортогональны, т. е. являются самосопряженными операторами, так что, например, для непересекающихся интервалов Δ_1 и Δ_2 множества $M(\Delta_1)$ и $M(\Delta_2)$ ортогональны (см. § 9.2). Пусть φ и ψ — произвольные элементы этих множеств, соответствующих интервалам $(-\infty, \lambda_0]$ и (λ_0, ∞) , т. е.

$$\varphi \in M((-\infty, \lambda_0]), \quad \psi \in M((\lambda_0, \infty)). \quad (14.3.4)$$

Если система первоначально находится в состоянии $\alpha\varphi + \beta\psi$ (α и β — произвольные числа), то

$$P(\lambda \leq \lambda_0) = \frac{\|\alpha\varphi\|^2}{\|\alpha\varphi + \beta\psi\|^2}, \quad P(\lambda > \lambda_0) = \frac{\|\beta\psi\|^2}{\|\alpha\varphi + \beta\psi\|^2}, \quad (14.3.5)$$

откуда следует, что

$$\|\alpha\varphi\|^2 + \|\beta\psi\|^2 = \|\alpha\varphi + \beta\psi\|^2 = (\alpha\varphi + \beta\psi, \alpha\varphi + \beta\psi).$$

Раскрывая скалярное произведение, получаем

$$2 \operatorname{Re} \bar{\alpha}\beta(\varphi, \psi) = 0.$$

Так как α и β произвольны, мы имеем $(\varphi, \psi) = 0$, и поэтому многообразия (14.3.4) ортогональны. Следовательно, E_{λ_0} , определенный в (14.3.3), является ортогональным проектором (см. упражнение ниже). Видно, что семейство проекторов E_λ ($-\infty < \lambda < \infty$) имеет все свойства разложения единицы (см. § 9.6). В частности, соотношения

$$E_\lambda \rightarrow 0 \text{ (сильно) при } \lambda \rightarrow -\infty,$$

$$E_\lambda \rightarrow I \text{ (сильно) при } \lambda \rightarrow +\infty$$

получаются из допущения, что $\mathcal{A}$ всегда может быть измерена (или наблюдаена), когда система находится в произвольном состоянии $\varphi \in \mathcal{H}$, и что полученное значение λ всегда является вещественным числом.

Тогда формула

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda \quad (14.3.6)$$

определяет самосопряженный оператор A , который можно рассматривать как математическое представление наблюдаемой $\mathcal{A}$. Возможные измеряемые значения $\mathcal{A}$ составляют спектр оператора A .

Из (14.3.2) видно, что если система находится в состоянии φ ($\|\varphi\| = 1$), то функция распределения λ имеет вид

$$F(\lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\lambda \leq \lambda_0\} = \|E_{\lambda_0}\varphi\|^2 = (\varphi, E_{\lambda_0}\varphi). \quad (14.3.7)$$

В этом определении отражается основной физический смысл семейства проекторов E_λ .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если области значений проекторов P и $I - P$ ортогональны, то P самосопряжен.

14.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ A

В этом параграфе мы покажем, что область определения самосопряженного оператора A , который соответствует наблюдаемой $\mathcal{A}$, допускает следующую интерпретацию: данный элемент φ из $\mathcal{H}$

принадлежит области определения A тогда и только тогда, когда распределение вероятности значений $\mathcal{A}$ имеет конечную дисперсию, если система находится в состоянии φ .

Функцией распределения измеряемых значений $\mathcal{A}$, когда система находится в состоянии φ , является функция $F(\cdot)$, определенная в (14.3.7). Поэтому математические ожидания получают следующим образом: математическое ожидание или среднее самой величины $\mathcal{A}$, обозначаемое через $E(\mathcal{A}; \varphi)$, есть

$$E(\mathcal{A}; \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(\varphi, E_{\lambda} \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0, \quad (14.4.1)$$

дисперсия есть

$$E((\mathcal{A} - \lambda_0)^2; \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(\varphi, E_{\lambda} \varphi), \quad (14.4.2)$$

и если $f(\cdot)$ — любая непрерывная функция, то

$$E(f(\mathcal{A}); \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(\varphi, E_{\lambda} \varphi), \quad (14.4.3)$$

причем во всех случаях мы исходим из допущения, что интегралы сходятся при $\lambda = \pm \infty$.

Согласно § 9.10, если A — самосопряженный оператор, E_{λ} — соответствующее ему разложение единицы, а $f(\lambda)$ — любая непрерывная функция, определенная для вещественных значений λ , то оператор $f(A)$ определяется следующим образом: во-первых,

$$\mathbf{D}(f(A)) = \left\{ \varphi: \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(\varphi, E_{\lambda} \varphi) < \infty \right\} \quad (14.4.4)$$

(эта область является плотной в $\mathbf{H}$); во-вторых, для любого $\varphi \in \mathbf{D}(f(A))$

$$f(A) \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_{\lambda} \varphi. \quad (14.4.5)$$

Поэтому интеграл в (14.4.3) сходится, в частности, если $\varphi \in \mathbf{D}(f(A))$. Для таких φ интеграл в (14.4.5) сходится сильно, т. е. представляет собой сильный предел в $\mathbf{H}$ последовательности

интегралов $\int_{-n}^n f(\lambda) dE_{\lambda} \varphi$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, из (14.4.1) — (14.4.3) следует, что

$$E(\mathcal{A}; \varphi) = (\varphi, A \varphi) \quad \text{для } \varphi \in \mathbf{D}(A), \quad (14.4.6)$$

$$E((\mathcal{A} - \lambda_0)^2; \varphi) = (\varphi, (A - \lambda_0)^2 \varphi) \quad \text{для } \varphi \in \mathbf{D}(A^2), \quad (14.4.7)$$

$$E(f(\mathcal{A}); \varphi) = (\varphi, f(A) \varphi) \quad \text{для } \varphi \in \mathbf{D}(f(A)). \quad (14.4.8)$$

[Поскольку $\mathcal{A}$ может быть любой наблюдаемой, последние два равенства являются всего лишь частными случаями (14.4.6) для

наблюдаемых $(A - \lambda_0)^2$ и $f(A)$ соответственно.] Вообще говоря, эти формулы могут быть взяты за основу аксиоматической трактовки квантовой теории, но в некоторых отношениях предпочтительней трактовка, предложенная в предыдущем параграфе, потому что в ней *существование* самосогласованного оператора A , соответствующего наблюдаемой A , следует из вероятностной интерпретации квантовой механики. Более того, распределение вероятности, заданное формулой (14.3.7) для измеряемых значений A в состоянии φ , вполне определено для любого φ , а не только для φ , принадлежащих области $D(A)$. В силу формулы (9.8.5) φ принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда второй момент этого распределения конечен, т. е. когда дисперсия (14.4.2) конечна, как утверждалось в начале данного параграфа. В этом случае дисперсия равна $\|(A - \lambda_0)\varphi\|^2 / \|\varphi\|^2$, где λ_0 — среднее значение A , заданное посредством (14.4.1). *Неопределенность A* (или A) *в состоянии φ* есть квадратный корень из дисперсии (называемый в статистике стандартным отклонением). Неопределенность равна $\|(A - \lambda_0)\varphi\|$, если φ нормирован и принадлежит $D(A)$, и бесконечна, если $\varphi \notin D(A)$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. В соотношении коммутации $pq - qp = -i\hbar$ координата q и соответствующий импульс p являются неограниченными операторами, и значит, это равенство не имеет смысла как соотношение для операторов. Здесь имеется в виду, что для любого φ , принадлежащего как области определения pq , так и области определения qp , т. е. для $\varphi \in D(pq) \cap D(qp)$, справедливо уравнение

$$(pq - qp)\varphi = -i\hbar\varphi. \quad (14.4.9)$$

Далее, чтобы придать этому соотношению достаточную силу, естественно допустить, что $D(pq) \cap D(qp)$ плотно в H . Покажите, что если Δp и Δq — неопределенности p и q в состоянии φ , то

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2. \quad (14.4.10)$$

В качестве другой предельной ситуации рассмотрим случай, когда φ не принадлежит даже $D(p) \cap D(q)$. В этом случае хотя бы одна из неопределенностей (Δp или Δq) бесконечна и ни одна из них не равна нулю, так что (14.4.10) все еще остается в силе. Что можно сказать о случае, когда φ принадлежит $D(p) \cap D(q)$, но не принадлежит $D(pq) \cap D(qp)$?

Обсуждение соотношений коммутации будет продолжено в § 14.6.

Определение (14.4.4), (14.4.5) для $f(A)$ справедливо также для комплекснозначной $f(\cdot)$. В частности, если $f(\lambda) = e^{it\lambda}$, то характеристической функцией распределения будет

$$\chi(t) = E(e^{itA}, \varphi) = (\varphi, e^{itA}\varphi),$$

где e^{itA} — унитарный оператор, определенный во всем H . [В этом случае условие конечности интеграла (14.4.4) выполняется для всех φ — в самом деле, значение этого интеграла просто равно $\|\varphi\|^2$.] Если A — гамильтониан H , то e^{itH} представляет собой оператор, описывающий эволюцию физической системы во времени: $\varphi(t) = e^{-i\hbar t H} \varphi(0)$.

14.5. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

До сих пор мы сталкивались с двумя различными видами недетерминированности измерения: во-первых, классический вид, связанный лишь с недостаточным знанием состояния системы (в принципе можно было бы полностью предсказать движение брошенной монеты, располагая точными начальными данными, но на практике исход случаен); во-вторых, квантовомеханический вид, когда вообще существует специфическая неопределенность значения наблюдаемой A , даже если система находится в точно определенном состоянии φ . Для целей квантовой механики необходимо скомбинировать оба вида неопределенности. Это достигается путем рассмотрения больших ансамблей идентичных невзаимодействующих физических систем. Так же, как в классическом случае, предполагается, что каждая система из ансамбля находится в определенном состоянии, но различные системы находятся в различных состояниях, и когда мы случайным образом выбираем одну из этих систем, то получаем случайный результат с некоторой вероятностью, которая зависит как от структуры ансамбля, так и от квантовомеханических неопределенностей, связанных с индивидуальными системами.

Сначала рассмотрим конечную модель из § 14.2, в которой любой вектор φ , определяющий состояние системы, можно пред-

ставить в виде $\sum_{j=1}^n c_j \psi_j$, где $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ — ортонормированная система. Тогда, полагая $c_j = (x_j + iy_j)$, каждому состоянию можно поставить в соответствие точку из $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \mathbf{x}$. В случае $\|\varphi\| = 1$ $\sum (x_j^2 + y_j^2) = 1$ и точка лежит на единичной сфере в $\mathbb{R}^{2n}$. Для того чтобы описать ансамбль из N систем ($N \gg 1$), каждой системе можно сопоставить точку на единичной сфере, а затем ввести плотность $\rho = \rho(\mathbf{x})$ таких точек, т. е. число точек на единицу площади $(2n-1)$ -мерной поверхности сферы.

Только что описанный метод непригоден для случая бесконечного числа измерений, поскольку, как было указано в § 13.11, в этом случае невозможно сколь-нибудь разумным образом определить объем. Обратившись непосредственно к вероятностям, можно избежать этой трудности, а тем самым избежать и попытки описания распределения состояний в H . Сначала рассмотрим дискретную модель. Допустим, что $\{\varphi_k\}$ — некоторая конечная или счетная совокупность нормированных состояний (не обязательно предполагать их ортогональность или даже линейную независимость); допустим далее, что каждая из систем рассматриваемого ансамбля находится в одном из этих состояний. Обозначим через p_k долю полного числа $N (\gg 1)$ систем, находящихся

в состоянии φ_k , так что если некую систему случайно выбрать из ансамбля, то p_k определяет вероятность того, что она находится в состоянии φ_k . Если A — самосопряженный оператор, соответствующий некоторой ограниченной наблюдаемой, то математическое ожидание A , когда система находится в состоянии φ , равно $(\varphi, A\varphi)$; см. предыдущий параграф. Поэтому математическое ожидание A для всего ансамбля составляет

$$E(A) = \sum_k p_k (\varphi_k, A\varphi_k). \quad (14.5.1)$$

Согласно § 12.3, $(\varphi_k, A\varphi_k)$ равно $\text{tr}(P_{\varphi_k} A)$, где P_{φ_k} — ортогональный проектор пространства H на одномерное подпространство, содержащее φ_k , и где tr означает trace (след). Следовательно, $E(A) = \text{tr}(DA)$, где через D обозначен оператор

$$D = \sum_k p_k P_{\varphi_k}. \quad (14.5.2)$$

Каждый оператор P_{φ_k} самосопряжен, положительно определен и является ядерным оператором со следом, равным единице, как это следует из § 12.3. Поскольку каждая вероятность p_k неотрицательна и $\sum p_k = 1$, видно, что D также положительно определен и имеет след, равный единице.

Если начальная совокупность состояний $\{\varphi_k\}$ плотна на единичной сфере в H , то любой ансамбль систем можно аппроксимировать при помощи некоторой дискретной модели; поэтому можно получить основную аксиому статистической квантовой механики, принадлежащую фон Нейману, просто опустив условие дискретности.

Аксиома. Любому ансамблю идентичных невзаимодействующих квантовомеханических систем можно поставить в соответствие ядерный положительно определенный оператор D с единичным следом, называемый *матрицей плотности* данного ансамбля. Математическое ожидание любого ограниченного самосопряженного оператора (наблюдаемой) A задается для данного ансамбля величиной

$$E(A) = \text{tr}(DA). \quad (14.5.3)$$

Фон Нейман доказал следующее утверждение. Допустим, что $E(\cdot)$ — любая вещественнозначная функция, определенная для всех ограниченных самосопряженных операторов в некотором гильбертовом пространстве, причем функция обладает свойствами линейности и положительности (это, очевидно, необходимые свойства, если $E(\cdot)$ рассматривать как математическое ожидание), а именно:

$$\begin{aligned} E(aA + bB) &= aE(A) + bE(B) \quad (a, b \text{ вещественны}), \\ E(A) &\geq 0, \text{ если } A \text{ положительно определен.} \end{aligned}$$

Тогда существует положительно определенный ядерный оператор D , такой, что $E(A) = \text{tr}(DA)$ для всех A . Если к тому же $E(I) = 1$, где I — единичный оператор, то $\text{tr} D = 1$. Это показывает, что описание при помощи матрицы плотности является совершенно общим.

Все статистические величины можно выразить через $E(\cdot)$. Например, дисперсия A равна $E(A^2) - (E(A))^2$. Если функция $f_x(t)$ равна единице при $t \leq x$ и равна нулю при $t > x$, то $F(x)$, определенная как $E(f_x(A))$, представляет собой функцию распределения A для данного ансамбля.

На первый взгляд может показаться, что рассмотрение лишь ограниченных операторов снижает действие этой теории, но на самом деле для физических применений не возникает никаких помех. Если A — неограниченный самосопряженный оператор, а $f(t)$ — ограниченная возрастающая функция, скажем $f(t) = \text{th}(t)$, то оператор $B = f(A)$ ограничен. В этом случае измерение B дает точно такую же информацию о системе, что и измерение A ; если b — измеряемое значение B , то соответствующим измеряемым значением A является $\text{ar th } b$. (См. также упражнение 4 в следующем параграфе.)

УПРАЖНЕНИЕ

1. Допустим, что система представляет собой атом, который имеет в точности два энергетических состояния с векторами состояния ψ_1 и ψ_2 . Оператор D может быть представлен в виде (2×2) -матрицы с матричными элементами $D_{jk} = \langle \psi_j, D \psi_k \rangle$. Вычислите эту матрицу в трех следующих случаях и проверьте, что она положительно определена и имеет единичный след. (1) Половина систем (атомов) ансамбля находится в состоянии ψ_1 , а другая половина — в состоянии ψ_2 . (2) Все системы ансамбля находятся в одном и том же состоянии, вектор которого представлен в виде $\alpha \psi_1 + \beta \psi_2$, где α и β — некоторые постоянные, такие, что $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Покажите, что в этом случае собственные значения матрицы D_{jk} равны нулю и единице, и обобщите этот результат на системы (атомы), имеющие любое конечное число энергетических состояний. (3) Системы находятся в различных состояниях, так что если вектор состояния записать в виде $\psi_1 \sin \theta e^{i\phi_1} + \psi_2 \cos \theta e^{i\phi_2}$, то все значения углов θ , ϕ_1 и ϕ_2 равновероятны в ансамбле.

Обратите внимание на то, что первый и третий ансамбли в этом упражнении имеют одинаковые статистические свойства, хотя при их построении используются совершенно различные векторы состояния. Это одна из причин, почему многие из тех, кто работает в области статистической квантовой механики (или квантовой статистики), предпочитают чисто алгебраическую формулировку квантовой механики (кратко описанную в следующем параграфе), в которой гильбертовы пространства и векторы состояния вообще не используются.

Матрицу плотности можно рассматривать в связи не с ансамблем, а лишь с единственной системой, истинное состояние которой нам неизвестно; в первом примере упражнения мы по-

лагаем, что система равновероятно может находиться как в состоянии 1, так и в состоянии 2, но мы не знаем, в каком именно; заметим, что это весьма отличается от уверенности в том, что система находится в состоянии $(1/\sqrt{2})(\psi_1 + \psi_2)$.

14.6. АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. КАНОНИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ КОММУТАЦИИ

В предыдущем параграфе было отмечено, что свойства квантовомеханической системы могут быть выражены исключительно через ограниченные наблюдаемые и что с некоторых точек зрения описание более фундаментально, если оно не ссылается на векторы состояния в гильбертовом пространстве.

Множество $\mathcal{A}$ всех ограниченных операторов (не обязательно самосопряженных) в гильбертовом пространстве образует алгебру, называемую *C*-алгеброй*. В более общей формулировке $\mathcal{A}$ не обязано содержать все ограниченные операторы, но от этого множества требуется: во-первых, быть замкнутым по отношению к операциям умножения (AB) и образования линейных комбинаций $(aA + bB; a, b \in \mathbb{C})$, во-вторых, содержать сопряженный оператор A^* для любого $A \in \mathcal{A}$, в-третьих, быть полным пространством. Последнее означает, что если $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, то найдется оператор $A \in \mathcal{A}$, такой, что $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Данная алгебра обладает следующими свойствами.

1. Это полное нормированное линейное пространство, и следовательно, банахово пространство (см. гл. 15). Нормой элемента A является его операторная норма $\|A\|$.

3. Определено ассоциативное умножение: если A, B, C принадлежат $\mathcal{A}$, то A принадлежат также AB и т. д.; $(AB)C = A(BC)$; $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$; $(aA)(bB) = (ab)(AB)$.

2. Умножение дистрибутивно: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.

4. Инволюция $A \rightarrow A^*$ определена так, что $(A^*)^* = A$, $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $(aA)^* = \bar{a}A^*$.

5. $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (откуда следует, что $\|A^*\| = \|A\|$).

6. В алгебре содержится единица I , так что $AI = IA = A$.

(Комплексная) *B*-алгебра* определяется как абстрактная алгебра, обладающая свойствами 1—5. В данном кратком изложении мы допустим для нее также свойство 6 (существование единицы).

Замечания. Иногда рассматривают соответствующие вещественные алгебры. Например, алгебра коммутирующих самосопряженных ограниченных операторов является одной из таких алгебр, если скаляры a, b ограничиваются вещественным полем $\mathbb{R}$. В случае некоммутирующих операторов нельзя избежать несамосопряженных элементов, ибо, допустив $A^* = A$ и $B^* = B$, получим, что

$(AB)^* = BA$ тогда и только тогда, когда $AB = BA$. Известное равенство $pq - qp = \hbar/i$ показывает, что в этом случае нельзя также избежать невещественных скаляров.

Некоторые авторы, например Рикарт (но не все), рассматривают B^* -алгебру как абстрактную, а C^* -алгебру как алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Основная теорема утверждает, что любую B^* -алгебру можно представлять себе как C^* -алгебру, т. е. что B^* -алгебра изометрически изоморфна некоторой алгебре ограниченных линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве (это соответствие неоднозначно). Эти алгебры являются частными случаями более общих банаховых алгебр, возможно, не обладающих некоторыми из свойств 4, 5 и 6 (или всеми этими свойствами).

Упражнения

1. Проверьте, что для ограниченных операторов $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ и $\|A^*A\| = \|A\|^2$.
2. Для B^* -алгебры с единицей покажите, что $I^* = I$, $\|I\| = 1$. Покажите, что $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, если элемент A имеет обратный A^{-1} . (Элемент B называется обратным A и обозначается через A^{-1} , если $AB = I$ и $BA = I$.)
3. Допустим, что $F(\cdot)$ — некоторый вещественный линейный функционал, определенный для самосопряженных элементов B^* -алгебры A . [Например, в качестве $F(\cdot)$ можно взять математическое ожидание $E(\cdot)$, рассмотренное в предыдущем параграфе.] Для любого $A \in A$, положив $B = (A + A^*)/2$, $C = i(A - A^*)/(2i)$, определите $F_1(A) = F(B) + iF(C)$ и покажите, что $F_1(\cdot)$ — линейное расширение (уже невещественное) на все элементы A . [В частности, покажите, что $F_1(aA) = aF_1(A)$ для любого комплексного числа a .]

Теперь приведем без доказательства несколько основных фактов относительно B^* -алгебр.

В любой банаховой алгебре A с единицей спектр элемента A , $\sigma(A)$, представляет собой множество всех комплексных чисел λ , таких, что элемент $\lambda I - A$ не имеет обратного в A . [Это согласуется с определением, данным в гл. 7, если A — алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.]

С нашей точки зрения, теория общих банаховых алгебр имеет следующий недостаток: если A — подалгебра банаховой алгебры B , то спектры данного элемента A относительно этих двух алгебр могут не совпадать, поскольку $\lambda I - A$ может иметь обратный в B , но не иметь обратного в A . Поэтому надо различать $\sigma_A(A)$ и $\sigma_B(A)$. Однако в частном случае B^* -алгебр с единицей и $A \subseteq B$ в том смысле, что A — подмножество B и само является B^* -алгеброй с той же единицей, той же нормой, теми же умножением и сопряжением, как и в B , спектры $\sigma_A(A)$ и $\sigma_B(A)$ совпадают для любых A в A . Важность этого случая для квантовой механики очевидна, поскольку спектр A представляет собой возможные измеримые значения A , которые не должны зависеть от того, рассматривается ли A как элемент, принадлежащий A или принадлежащий B .

Если A — самосопряженный элемент (т. е. $A^* = A$), то спектр A лежит на вещественной оси в плоскости λ .

Линейная функция F на A называется *ограниченной*, если существует число $\|F\|$, такое, что $|F(A)| \leq \|F\| \|A\|$ для всех A . Элемент A называется *положительно определенным*, если его можно представить в виде B^*B для некоторого $B \in A$. Линейный функционал F на A называется *положительным*, если для любого положительно определенного элемента A $F(A)$ — вещественное неотрицательное число, т. е. $F(B^*B) \geq 0$ для любого B . Можно доказать, что F — положительный функционал тогда и только тогда, когда $\|F\| = F(I)$. Вспомним, что математическое ожидание $E(\cdot)$ для наблюдаемых в квантовомеханическом статистическом ансамбле представляет собой положительный линейный функционал, причем $E(I) = 1$.

В абстрактной алгебраической формулировке квантовой статистической механики *динамическая система* описывается при помощи B^* -алгебры A . Самосопряженные элементы A представляют собой наблюдаемые этой системы, и на них наложены различные (вообще говоря, нелинейные) связи, характеризующие данную систему: эти связи могут описывать, например, соотношения коммутации, зависимость гамильтониана от различных координат и импульсов и т. п. В свою очередь эти соотношения определяют алгебраическую структуру A . Ансамбль таких одинаковых и невзаимодействующих систем тогда описывается положительно определенным функционалом $E(\cdot)$ на A , причем $E(I) = 1$. Возможные измеримые значения наблюдаемой A представляют собой точки спектра A , а ожидаемым значением A в данном ансамбле является $E(A)$.

УПРАЖНЕНИЕ

4. Пусть q и p — координата и соответствующий ей импульс, как в упражнении § 14.4. В силу своей самосопряженности унитарные операторы $U(\alpha) = e^{ip\alpha}$ и $V(\beta) = e^{iq\beta}$ вполне определены (см. § 9.10) и ограничены и, следовательно, принадлежат C^* -алгебре всех ограниченных операторов в H . Покажите, что соотношение коммутации (14.4.9) можно записать следующим образом:

$$U(\alpha) V(\beta) U(-\alpha) V(-\beta) = e^{i\hbar\alpha\beta}. \quad (14.6.1)$$

Для этой цели допустите, что существует множество S векторов ψ , плотное в H , для которого вполне определены такие выражения, как $pq U(\alpha)\psi$ и т. п. (обратите внимание на упражнение 6 ниже.) Сначала покажите, что для таких ψ

$$\frac{d}{d\alpha} [U(\alpha) q - q U(\alpha)] \psi = i p [U(\alpha) q - q U(\alpha)] \psi + \hbar U(\alpha) \psi.$$

Затем покажите, что вектор $\psi(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [U(\alpha) q - q U(\alpha)] \psi$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению и тем же начальным условиям, что и вектор $\hbar \alpha U(\alpha) \psi$. Далее установите, что

$$[U(\alpha) q - q U(\alpha)] \psi = \hbar \alpha U(\alpha) \psi.$$

Наконец, покажите, что результат применения обеих частей равенства (14.6.1) к ψ удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению относительно переменной β и одним и тем же начальным условиями.

Классические соотношения коммутации для p и q впервые были приведены к виду (14.6.1) Германом Вейлем. Затем фон Нейман [1931] в соответствии с предложением М. Стоуна доказал, что любые операторы p и q , удовлетворяющие соотношениям коммутации в форме Вейля, эквивалентны соответственно оператору $(\hbar/i)(d/dx)$ и оператору умножения на x , которые применяются к функциям от x . Точнее говоря, фон Нейман доказал, что если p и q — операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H и если полученные при их помощи $U(\alpha)$ и $V(\beta)$ удовлетворяют (14.6.1), то H можно представить в виде конечной или счетной прямой суммы гильбертовых пространств H_n , $n = 1, 2, \dots$, каждое из которых инвариантно относительно p и q и может быть отображено на $L^2(\mathbb{R})$ с помощью унитарного преобразования W , такого, что $WpW^{-1} = (\hbar/i)(d/dx)$ и $WqW^{-1} = x$ (оператор умножения на x). В этом смысле $(\hbar/i)(d/dx)$ и x — единственно возможные представления таких операторов p и q с точностью до унитарного преобразования.

Упражнения

5. Найдите явные выражения для $U(\alpha)$ и $V(\beta)$, когда $H = L^2(\mathbb{R})$, $p = (\hbar/i)(d/dx)$, $q = x$ (области определения выбрать подходящим образом), и проверьте (14.6.1) непосредственно. В этом случае в качестве множества S можно взять класс Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ пробных функций для распределений медленного роста; каждое $\psi \in \mathcal{S}$ принадлежит области определения любого конечно произведения операторов, взятых из множества

$\{p^m, q^n, U(\alpha), V(\beta)\}$: все положительные целые m, n , все вещественные α, β .

6. Покажите, что нельзя полностью избавиться от сделанного в упражнении 4 допущения о существовании множества S векторов ψ путем рассмотрения следующего примера (Б. Мисра, частное сообщение). Пусть гильбертово пространство $H = L^2(0, 1)$, а p и q — самосопряженные операторы, определяемые уравнениями

$$D(p) = \{f \in L^2: f' \in L^2, f(0) = f(1)\}; \text{ для } f \in D(p) \quad pf = -i\hbar f'$$

(производную f' следует понимать в смысле теории распределений),

$$D(q) = H, \quad (qf)(x) = xf(x).$$

Покажите, что $(pq - qp)\psi = i\hbar\psi$ для всех ψ , принадлежащих некоторому плотному в H множеству, тогда как (14.6.1) остается верным лишь для некоторых значений β . Заметим, что если $\psi \in D(p)$, то $q\psi$ и $V(\beta)\psi$, вообще говоря, не принадлежат $D(p)$. Заметим также, что p и q не обязательно эквивалентны соответствующим операторам в $L^2(\mathbb{R})$, поскольку оператор q , ограниченный в $L^2(0, 1)$, неограничен в $L^2(\mathbb{R})$.

Следствие теоремы Стоуна — фон Неймана заключается в том, что каждый из самосопряженных операторов p и q , удовлетворяющих (14.6.1), имеет чисто непрерывный спектр, состоящий из всех вещественных чисел.

В книге Путнама [1967] имеются теоремы об условиях, при которых из равенства $pq - qp = -i\hbar$ на плотном в $\mathbf{H}$ множестве следует соотношение Вейля (14.6.1), а также соответствующие теоремы для систем канонических переменных $p_j, q_j, j = 1, 2, \dots$. Когда существует бесконечное множество таких пар $\{p_j, q_j\}$, теорема Стоуна—фон Неймана не применима, и в общем случае имеется много различных и неэквивалентных представлений соотношений коммутации Вейля. Этот факт играет определенную роль в квантовой теории поля (см. книгу Йоста [1965]).

14.7. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

Говорят, что $(n \times n)$ -матрица M имеет простой спектр, если каждое из ее n собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ —простое, т. е. все λ_i различны. Как известно, в этом случае собственные векторы $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ порождают все n -мерное комплексное векторное пространство V^n или $\mathbb{C}^n$.

[Доказательство. Для того чтобы доказать линейную независимость $\mathbf{v}^{(i)}$, допустим, что

$$c_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + c_n \mathbf{v}^{(n)} = 0, \quad (14.7.1)$$

и покажем, что все $c_i = 0$. Пусть $p_k(\cdot)$ обозначает интерполяционный полином Лагранжа для любого $k = 1, \dots, n$, такой, что $p_k(\lambda_j) = 0$ при $j \neq k$, а $p_k(\lambda_k) \neq 0$. Если матрицу $p_k(M)$ умножить на вектор (14.7.1), то все члены в левой части обратятся в нуль, кроме k -го члена; отсюда следует, что $c_k = 0$.]

Приведенное выше определение простого спектра не распространяется на операторы в $\mathbf{H}$, поскольку в $\mathbf{H}$ нет собственных векторов, соответствующих непрерывному спектру. Следовательно, это определение надо заменить таким, которое было бы пригодно и для $\mathbf{H}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ —различные собственные значения M (при $k = n$ спектр простой), а $P_1, \dots, P_k$ —соответствующие проекторы на собственные подпространства $E_1, \dots, E_k$ ($P_j E_l = \delta_{jl} E_l$). Спектр является простым тогда и только тогда, когда существует вектор $\xi \in V^n$, такой, что его проекции $P_j \xi$ ($j = 1, \dots, k$) порождают V^n (например, если все λ_j различны, в качестве ξ можно взять линейную комбинацию $\sum c_j \mathbf{v}^{(j)}$, причем все c_j отличны от нуля).

Если M —эрмитова матрица (и следовательно, представляет самосопряженный оператор в V^n), то соответствующее разложение единицы имеет вид

$$E_t = \sum_{\lambda_i \leq t} P_i,$$

а спектр является простым тогда и только тогда, когда векторы $E_t \xi$, в которых t пробегает $\mathbb{R}$, порождают V^n .

Допустим теперь, что $A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t$ — самосопряженный оператор в H . Назовем спектр A *простым*, если существует элемент ξ в H , такой, что замкнутая линейная оболочка элементов

$$\{E_t \xi: -\infty < t < \infty\} \quad (14.7.2)$$

совпадает с H , т. е. совокупность конечных линейных комбинаций таких элементов плотна в H . Вектор ξ называется *порождающим вектором* для A .

Аналогично спектр унитарного оператора

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF_\theta$$

является *простым*, если существует *порождающий вектор* ξ , такой, что элементы $\{F_\theta \xi: 0 \leq \theta < 2\pi\}$ порождают H .

Если A имеет простой спектр, то, в частности, для любого λ из точечного спектра $P\sigma(A)$ собственное подпространство E_λ одномерно, как и в конечномерном случае. Чтобы это показать, допустим, что ξ — порождающий вектор, а

$$P_\lambda = E_{\lambda+0} - E_{\lambda-0}$$

является проектором на E_λ . Тогда $P_\lambda E_t \xi = P_\lambda \xi$ при $t \geq \lambda$ и $P_\lambda E_t \xi = 0$ при $t < \lambda$. Следовательно, для любой линейной комбинации η элементов $E_t \xi$, а значит, для любого η в H , $P_\lambda \eta = \text{const} \cdot P_\lambda \xi$, откуда следует, что E_λ одномерно.

Грубо говоря, если A соответствует наблюдаемой $\mathcal{A}$, то измеримое значение $\mathcal{A}$ однозначно определяет состояние системы (т. е. состояние, в котором система остается после измерения) при условии, что A имеет простой спектр; в противном случае для однозначного описания состояния системы необходимы также значения других (коммутирующих с $\mathcal{A}$) наблюдаемых $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и т. д. (см. § 14.9).

Обозначенный через A_α оператор Штурма — Лиувилля с одной регулярной концевой точкой и с одной особой концевой точкой типа предельной точки был описан в § 10.11 и 10.12. В разложении по собственным функциям (10.12.7) заданной функции $g(x)$ для любого данного значения спектрального параметра $s = \lambda$ оказывается единственная функция, а именно $f_2(x, \lambda)$. Это наводит на мысль, что A_α имеет простой спектр. Для данного λ $f_2(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $-(pf')' + + qf = \lambda f$ и граничному условию (10.11.2). Следовательно, эта функция является собственной функцией в обобщенном смысле, но не в строгом смысле, поскольку она не интегрируема квадратично на $(0, \infty)$ (если только λ не лежит в точечном спектре)

и, значит, не принадлежит данному гильбертову пространству. Для доказательства простоты спектра A_α нам нужно найти порождающий вектор $\xi = \xi(x)$ в $H = L^2(0, \infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\eta(s)$ — функция класса $C^1(\mathbb{R})$, отличная от нуля для всех s и принадлежащая L^2_σ . Покажите, что функция

$$\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, s) \eta(s) ds$$

является порождающим вектором для A_α . *Указание.* Функции $h(s)$ класса $C^1_0(\mathbb{R})$ плотны в L^2_σ , а отображение (10.12.6), (10.12.7) устанавливает изоморфизм $L^2(0, \infty)$ и L^2_σ .

2. Сформулируйте определение кратности (положительное целое) спектра самосопряженного оператора, спектр которого не обязательно простой.

3. Покажите, что оператор $-id/dx$ из § 10.1 имеет простой спектр, и укажите порождающий вектор $\xi(x)$. Разложение единицы приведено в § 10.1.

4. Установите, что оператор $-(d/dx)^2$ из § 10.2 не имеет простого спектра. Это можно сделать, показав, что если $\xi(x)$ — порождающий вектор, то формула

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(E_t \xi)(x)$$

(f произвольно) не дает всех φ из $L^2(\mathbb{R})$. В самом деле, любая $\varphi(x)$, определенная этой формулой, имеет преобразование Фурье вида $g(s) \hat{\xi}(s)$, где $g(s)$ — четная функция.

14.8. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА H ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

В гл. 1 было показано, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства по структуре идентичны. Гильбертово пространство некоторой квантовомеханической системы можно представить себе абстрактным пространством, но часто бывает удобным иметь его конкретную реализацию, например в виде пространства L^2 функций, точно так же, как часто удобно вводить декартовы координаты в конечномерном пространстве. Одной из таких реализаций является так называемое спектральное представление, связанное с заданным самосопряженным оператором A , имеющим простой спектр. В квантовой механике оно называется *представлением*, в котором оператор A диагонален. Некоторые теоремы о спектральном представлении приведены в этом параграфе лишь с эвристическими «доказательствами» — детали читатель может найти в книге Ахиезера и Глазмана [1950].

Пусть в гильбертовом пространстве (абстрактном или конкретном) задан самосопряженный оператор A с простым спектром и порождающим вектором ξ . Обозначим через E_t разложение

единицы для A . Допустим, что некий элемент u из H задается интегралом вида

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dE_t \xi, \quad (14.8.1)$$

где $f(t)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной t . Иначе говоря, мы предполагаем, что сумма Римана — Стильеса

$$\sum_j f(t_j) E(\Delta_j) \xi \quad (14.8.2)$$

сходится в H к элементу u , когда разбиение оси t измельчается. Поскольку спектр A простой, любой элемент u из H можно аппроксимировать суммой (14.8.2); поэтому разумно считать, что любой элемент u можно представить в виде (14.8.1).

Положим теперь, что другим таким элементом является

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dE_t \xi, \quad (14.8.3)$$

и получим выражение для скалярного произведения (u, v) через функции f и g . Развернув скалярное произведение сумм Римана — Стильеса, соответствующих (14.8.1) и (14.8.3), мы будем иметь сумму членов, которые содержат произведения $\overline{f(t_j)} g(t_k)$ на $(E(\Delta_j) \xi, E(\Delta_k) \xi)$. В силу свойств проекторов полученные скалярные произведения равны $\delta_{jk}(\xi, E(\Delta_k) \xi)$, а если учесть, что интервал $\Delta_k = (\tau_k, \tau_{k+1})$, то эти произведения будут равны

$$\delta_{jk}[(\xi, E_{\tau_{k+1}} \xi) - (\xi, E_{\tau_k} \xi)].$$

Таким образом, мы установили, что сумма

$$\sum_j \overline{f(t_j)} g(t_j) [(\xi, E_{\tau_{j+1}} \xi) - (\xi, E_{\tau_j} \xi)]$$

является приближением для (u, v) . Но это тоже сумма Римана — Стильеса. Поэтому, переходя к пределу, мы можем допустить, что

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) d(\xi, E_t \xi). \quad (14.8.4)$$

Функция

$$\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, E_t \xi) \quad (14.8.5)$$

является вещественной благодаря самосопряженности E_t . Кроме того, это неубывающая функция, так как при $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} \sigma(t_2) - \sigma(t_1) &= (\xi, (E_{t_2} - E_{t_1}) \xi) = \\ &= (\xi, (E_{t_2} - E_{t_1})^2 \xi) = \\ &= ((E_{t_2} - E_{t_1}) \xi, (E_{t_2} - E_{t_1}) \xi) \geq 0. \end{aligned}$$

Подставив $\sigma(\cdot)$ в выражение (14.8.4), получаем

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) d\sigma(t), \quad (14.8.6)$$

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t). \quad (14.8.7)$$

Это и есть искомые выражения.

В § 5.9 были определены пространства типа L^2_σ , причем скалярное произведение и норма описывались выражениями, совпадающими с (14.8.6) и (14.8.7), где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ предполагались гладкими функциями. Для гладких функций проведенные выше рассуждения нетрудно сделать строгими, и, следовательно, отображение $f(\cdot) \rightarrow u$ является изометрическим изоморфизмом плотного в L^2_σ множества на плотное в H множество. Это отображение представляет собой ограниченное линейное преобразование гильбертова пространства L^2_σ в гильбертово пространство H . Путем очевидного обобщения теоремы о расширении из § 7.1 его можно распространить на все элементы каждого из пространств.

Наконец, если оператор $A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t$ аппроксимировать суммой Римана—Стилтьеса

$$\sum_j t_j E(\Delta_j), \quad (14.8.8)$$

используя то же разбиение оси t , что и в (14.8.2), а затем применить оператор (14.8.8) к вектору (14.8.2), то полученную двойную сумму можно свести (в силу свойств проекторов) к одинарной сумме, а именно к

$$\sum_j t_j f(t_j) E(\Delta_j) \xi.$$

Это наводит на мысль, что если u соответствует $f(t)$, то Au соответствует $tf(t)$. Подобные соображения приводят к следующей теореме.

Теорема. Пусть A —самосопряженный оператор с простым спектром в гильбертовом пространстве H . Тогда существуют неубывающая функция $\sigma(\cdot)$ и взаимно однозначное отображение $u \rightarrow f(\cdot)$ пространства H на пространство L^2_σ , такие, что из $u \rightarrow f(\cdot)$ и $v \rightarrow g(\cdot)$ следует $(u, v) = (f(\cdot), g(\cdot))$. Операторам в H соответствуют операторы в L^2_σ . В частности, оператору A соответствует в L^2_σ операция умножения $f(t)$ на t , т. е. если u из H соответствует функция $f(t)$, то Au соответствует функция $tf(t)$.

Заметим, что A неоднозначно определяет L_σ^2 в силу неоднозначности порождающего вектора ξ . Если ξ_1 — другой порождающий вектор для A , а $\sigma_1(t) = (\xi_1, E_t \xi_1)$ — соответствующая неубывающая функция, то существует положительная функция $\rho(t)$, такая, что

$$\sigma_1(t) = \int_{-\infty}^t \rho(t') d\sigma(t'),$$

и поэтому мера $d\sigma_1$ абсолютно непрерывна относительно меры $d\sigma$. Если $u \in H$ представляется функцией $f(t) \in L_\sigma^2$, то этот же элемент представляется функцией $\rho(t)^{-1/2} f(t) \in L_{\sigma_1}^2$. В квантовой механике переход от σ к σ_1 представляет собой лишь изменение нормировки базисных векторов. В случае когда A имеет чисто точечный спектр, σ можно выбрать так, чтобы все базисные векторы имели норму, равную единице. Во всех других случаях не существует однозначного выбора σ , поскольку нет общих соглашений о наиболее удобной нормировке волновых функций непрерывных состояний.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Взяв приведенные выше ξ и ξ_1 , покажите, что если

$$\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) dE_t \xi,$$

то

$$\rho(t) = |a(t)|^2.$$

14.9. ПОЛНАЯ СИСТЕМА КОММУТИРУЮЩИХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Рассмотрим два самосопряженных оператора

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t \quad \text{и} \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} t dF_t. \quad (14.9.1)$$

Говорят, что они *коммутируют*, если

$$E_s F_t = F_t E_s \quad \text{для всех } s, t. \quad (14.9.2)$$

[Замечание. Так как A и B в общем случае неограничены, нельзя сказать, что $AB = BA$, исключая случай, когда области определения операторов AB и BA совпадают, тогда как E_t и F_s определены во всем H ; однако $ABu = BAu$ для всех таких u (если они существуют), для которых обе части равенства имеют смысл.] Говорят, что коммутирующие операторы A и B имеют *простой совместный спектр* или образуют *полную систему коммутирующих наблюдаемых*, если в H существует элемент ξ

(порождающий вектор), такой, что замкнутая линейная оболочка элементов

$$\{E_s F_t \xi: -\infty < s, t < \infty\} \quad (14.9.3)$$

совпадает с H .

Обобщение на любое конечное число самосопряженных или унитарных операторов очевидно.

Если A и B образуют полную систему, как определено выше, то мера на плоскости s, t определяется следующим образом:

$$\sigma(s, t) = (\xi, E_s F_t \xi), \quad (14.9.4)$$

где ξ — порождающий вектор. Эта мера — неубывающая функция в смысле, определенном в гл. 13. Именно, если через $\square$ обозначить прямоугольную область в плоскости s, t :

$$\square = \{s, t: a \leq s < b, c \leq t < d\}, \quad (14.9.5)$$

а $\sigma(\square)$ определить как

$$\sigma(\square) = \sigma(b, d) - \sigma(a, d) - \sigma(b, c) + \sigma(a, c),$$

то $\sigma(\square) \geq 0$ для всех таких $\square$. Пространство $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ определяем по аналогии с § 5.9 при помощи двойных интегралов Стильбеса (см. § 13.3) следующим образом. В $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ определяем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(s, t)} \psi(s, t) d^2\sigma(s, t).$$

Полученное таким образом пространство со скалярным произведением расширяем до полного пространства $L^2_\sigma(\mathbb{R}^2)$ распределений на $\mathbb{R}^2$ точно так же, как это было сделано для $L^2_\sigma = L^2_\sigma(\mathbb{R})$ в § 5.9.

Переформулируем теперь теорему предыдущего параграфа для конечного числа операторов.

Теорема. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — коммутирующие самосопряженные операторы в H с совместным простым спектром. Тогда существуют неубывающая функция $\sigma(t_1, \dots, t_k)$ и взаимно однозначное отображение $u \rightarrow f(t_1, \dots, t_k)$ пространства H на пространство $L^2_\sigma(\mathbb{R}^k)$, такие, что из $u \rightarrow f(\dots)$ и $v \rightarrow g(\dots)$ следует $(u, v) = (f(\dots), g(\dots))$. Операторам в H соответствуют операторы в $L^2_\sigma(\mathbb{R}^k)$. В частности, для любого $j = 1, \dots, k$ оператору A_j соответствует в $L^2_\sigma(\mathbb{R}^k)$ операция умножения $f(t_1, \dots, t_k)$ на t_j , т. е. если u соответствует функция $f(t_1, \dots, t_k)$, то $A_j u$ соответствует функция $t_j f(t_1, \dots, t_k)$.

В квантовой механике гильбертово пространство $L^2_\sigma(\mathbb{R}^k)$ дает представление физической системы, в котором наблюдаемые $A_1, \dots, A_k$ диагональны.

ПРИМЕР 1

Пусть A — оператор $-(d/dx)^2$ (см. упражнение 4 § 14.7), спектр которого не является простым. Другой оператор B определим при помощи равенства

$$(Bf)(x) = f(-x)$$

для всех $f \in L^2$. Этот оператор коммутирует с A . Оператор B имеет чисто точечный спектр, состоящий из двух собственных значений $\mu = \pm 1$, так как $B^2 = I$. Любое четное распределение в L^2 является собственной функцией для $\mu = +1$, а любое нечетное распределение — для $\mu = -1$. Система уравнений

$$-f''(x) = \lambda f(x), \quad f(-x) = \mu f(x)$$

имеет (с точностью до нормировки) единственное решение, а именно $\cos \sqrt{\lambda} x$ для $\mu = 1$ и $\sin \sqrt{\lambda} x$ для $\mu = -1$. По-видимому, A и B имеют простой совместный спектр, т. е. A и B образуют полную систему коммутирующих операторов. Нетрудно установить, что разложение единицы F_t для B имеет вид

$$(F_t \varphi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -1, \\ 1/2 \varphi(x) - 1/2 \varphi(-x) & \text{при } -1 \leq t < 1, \\ \varphi(x) & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$$

Задача об отыскании представления произвольного $u \in H$ через элементы вида $E_s F_t \xi$ сводится к тому, чтобы выразить $\varphi(x)$ в следующем виде:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(s) e^{-ixs} + h(s) e^{ixs}] \xi(s) ds$$

(детали мы опускаем). Хотя и требуется, чтобы $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ были четными функциями, мы располагаем достаточной свободой для такого представления любого $\varphi(x)$, взяв, скажем, $\xi(s)$ равным e^{-s} для $s \geq 0$ и равным нулю для $s < 0$. Отсюда следует, что совместный спектр операторов A и B будет простым.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Задача с начальными данными; начальные данные; граничные и другие вспомогательные условия; эволюция; динамика частицы; поток тепла; волновой процесс; пространство состояний; норма; банахово пространство; корректно и некорректно поставленные задачи; обобщенные решения; инвариантность корректности относительно преобразований Лоренца.

Предварительные сведения: уравнения с частными производными, встречающиеся в физике; гл. 1—8.

Законы классической физики носят причинный или детерминированный характер, и это приводит к понятию корректно поставленной задачи с начальными данными. Грубо говоря, если состояние системы при $t=t_0$ известно точно, то это позволяет предсказать последующие состояния при $t > t_0$. В настоящей главе, а также в двух следующих главах изучаются именно такие задачи. Эти задачи обычно связаны с решением дифференциальных уравнений, и необходимо выяснить, какие их решения физически приемлемы и какие начальные и вспомогательные условия при этом нужно ставить. Правильная постановка задач основана на следующем физическом принципе: необходимо, чтобы для любого начального состояния имелось только одно решение и чтобы это решение непрерывно зависело от начального состояния (характер непрерывности нужно оговаривать). Мы увидим, что естественную среду для таких задач образуют банаховы пространства. В основном рассматриваются линейные задачи; краткое изложение теории нелинейных задач, пока еще весьма фрагментарной, приводится в гл. 17.

15.1. ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В МЕХАНИКЕ

Во многих задачах теоретической физики переменная времени t играет особую роль. Математическая постановка таких задач включает *начальные данные*, которые описывают состояние системы в начальный момент $t=0$; задача же состоит в нахождении состояния в более поздний момент $t > 0$, т. е. в нахождении *эволюции* системы из ее начального состояния.

В качестве конечномерного примера из небесной механики укажем задачу N тел, которые рассматриваются как материальные точки, свободно движущиеся в пространстве под действием только сил взаимного притяжения. Мгновенное состояние системы задается значениями трех декартовых координат и трех соответ-

ствующих компонент импульса каждого тела. Если эти $6N$ величин известны для $t=0$, то ньютоновы законы движения и закон всемирного тяготения однозначно определяют (без учета столкновений) их значения для последующих моментов времени $t > 0$.

Эта задача нелинейна, однако в элементарной механике есть много задач (где речь идет о твердых телах, стенках, пружинах, грузах и т. д.), для которых система имеет одно или несколько состояний равновесия, а если состояние системы близко к равновесному, то уравнения ее движения можно линеаризовать. Пусть система имеет n степеней свободы; обозначим через y n -мерный вектор, компонентами которого являются отклонения от равновесия. В этом случае получается уравнение вида

$$\ddot{y} = Ay, \quad (15.1.1)$$

где A — вещественная $(n \times n)$ -матрица. Мгновенная конфигурация системы соответствует точке n -мерного пространства, и если при $t=0$ заданы y и $\dot{y}$, то последующее движение точки y n -мерного пространства в линейном приближении полностью определяется уравнением (15.1.1).

Для консервативных систем (без трения) матрица A симметрична и, следовательно, имеет вещественные собственные значения; если все собственные значения матрицы A отрицательны, то движение системы представляет собой гармонические колебания около положения равновесия; если есть какие-либо положительные собственные значения, то в общем решении имеются экспоненциально расходящиеся члены и состояние равновесия неустойчиво. Конечно, при специально выбранных начальных данных y и $\dot{y}$ при $t=0$ эти члены могут отсутствовать, но тогда при малейшем изменении начальных данных они снова могут появиться, так что в конечном счете обязательно возникают большие отклонения от положения равновесия, т. е. равновесие оказывается неустойчивым. Ниже (в § 15.3) мы убедимся в том, что подобная, только более сильная, неустойчивость может иметь место и в бесконечномерном случае.

15.2. ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Конечность числа степеней свободы в предыдущих примерах получается в результате идеализации тел как точечных масс и твердых тел. Физики больше имеют дело со сплошной средой. В этом случае задачи с начальными данными формулируются на основе дифференциальных уравнений с частными производными или интегродифференциальных уравнений, дополненных начальными условиями и граничными или другими вспомогательными условиями. Дифференциальные уравнения могут быть записаны

так, что в левой части в качестве оператора появляется $\partial/\partial t$, а операторы в правой части зависят от t только параметрически (или вообще не зависят от t). Иногда дифференциальное уравнение, вообще не содержащее t , появляется в качестве вспомогательного условия; в качестве примера можно указать дивергентные условия $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ для уравнений Максвелла в вакууме. Если в постановке задачи содержатся только дифференциальные уравнения с частными производными и начальные данные (в этом случае для исключения граничных условий обычно необходимо начальные данные задавать на всем пространстве), то такую задачу часто называют *задачей Коши*.

Одномерная задача теплопроводности представляет собой простейшую задачу с начальными данными. Если $u = u(x, t)$ — температура в точке x теплоизолированного стержня в момент времени t , то поток тепла в точке x пропорционален $-du/dx$, дивергенция этого потока дает соответствующую скорость убывания температуры (или ее роста, если дивергенция отрицательна); следовательно, u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t, \quad (15.2.1)$$

где σ — положительная постоянная (предполагается, что коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость постоянны), а a и b суть x -координаты концов стержня. Начальное условие задается в следующем виде:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (\text{известная функция}), \quad a \leq x \leq b. \quad (15.2.2)$$

Такая задача имеет бесконечное множество решений, и поэтому необходимы еще граничные условия. Их надлежащий выбор зависит от физической постановки, и одним из возможных является случай, когда

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t, \quad (15.2.3)$$

что соответствует сохранению определенной температуры на концах стержня; здесь эта температура принята равной нулю.

Решение этих уравнений в классическом смысле называется *строгим решением* задачи с начальными данными. Необходимое условие существования строгого решения состоит в том, чтобы начальные данные были согласованы с дифференциальным уравнением и граничными условиями, т. е. чтобы $f(x)$ была дважды дифференцируемой и обращалась в нуль при $x = a$ и $x = b$. Часто желательно иметь решения в более общем смысле.

В стандартном методе рядов Фурье получаются более общие решения. Они имеют вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \sigma t} \sin nx; \quad (15.2.4)$$

здесь ради простоты интервал (a, b) взят равным $(0, \pi)$, а b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в разложении по синусам:

$$b_n = (2/\pi) \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx. \quad (15.2.5)$$

Этот метод допускает, например, определенные разрывы в начальном распределении температуры, представляющие интерес с физической точки зрения. Возникает вопрос, следует ли считать (15.2.4) решением в любом случае, когда интегралы (15.2.5) существуют, скажем, в смысле Лебега, даже когда, например, $f(x)$ может иметь плотное в $(0, \pi)$ множество разрывов или даже когда ряд (15.2.4) при $t=0$ расходится.

Имеются решения, соответствующие таким начальным данным $f(x)$, которые следует рассматривать скорее как распределение, а не как функцию. Чтобы показать это, мы рассмотрим сначала задачу на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, т. е. заменим интервал $[a, b]$ на $\mathbb{R}$ и отбросим граничные условия. Для любого фиксированного вещественного y функция

$$\psi(x, t; y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma t}} e^{-(x-y)^2/4\sigma t} \quad (15.2.6)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.2.1) при всех x и всех $t > 0$. Согласно (2.6.3),

$$\lim_{t \downarrow 0} \psi(x, t; y) = \delta(x-y) \quad (15.2.7)$$

в смысле сходимости распределений; поэтому функция $\psi(x, t; y)$, которая называется *фундаментальным решением*, соответствует начальным данным $f(x) = \delta(x-y)$. Можно представить себе, что в точке $x=y$ стержня при $t=0$ внезапно появляется единичное количество тепла. Предположим теперь, что $f=f(y)$ — произвольное вещественное распределение медленного роста на $\mathbb{R}$. Для любого $t > 0$ функция $\psi(x, t; y)$, рассматриваемая как функция от y , принадлежит классу Шварца $\mathcal{S}$ пробных функций. Читатель легко может убедиться в том, что функция

$$u(x, t) = \langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi(x, t; y) \, dy \quad (15.2.8)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.2.1) при всех x и всех $t > 0$. Кроме того,

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$$

в смысле сходимости распределений. Следовательно, мы имеем решение задачи с начальными данными в очень общем смысле.

Теперь можно получить соответствующее решение на конечном интервале $[a, b]$ при наличии граничных условий (15.2.3), воспользовавшись известным приемом отражения решения от прямых $x=a$ и $x=b$ в плоскости x, t . Если $f(x)$ задана на $[a, b]$, то мы распространим начальные данные на всю прямую $\mathbb{R}$, потребовав, чтобы $f(x)$ была нечетной (обобщенной) функцией от $x-a$ и $x-b$ (и, следовательно, периодической с периодом $2(b-a)$), т. е. чтобы $f(x)$, $-f(2a-x)$ и $-f(2b-x)$ были одним и тем же распределением. Тогда тем же свойством обладает и решение, задаваемое формулой (15.2.8). Кроме того, легко убедиться в том, что в силу особых свойств фундаментального решения (15.2.6) $u(x, t)$ является обычной функцией при $t > 0$ даже в том случае, когда $u(x, 0)$ является распределением. (Это особое свойство задачи теплопроводности, а не задач с начальными данными вообще.) Поэтому из равенств

$$u(x, t) = -u(2a-x, t) = -u(2b-x, t)$$

следует, что $u=0$ при $x=a$ и $x=b$.

15.3. КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

При любом разумном выборе класса допустимых начальных функций $f(x)$ задача теплопроводности поставлена корректно (по Адамару), а это означает, что (а) для любой $f(x)$ из этого класса решение существует, (б) для любой заданной $f(x)$ решение единственно и (в) решение непрерывно зависит от $f(x)$. Последнее означает, что если возмущение δu решения мало при $t=0$, то оно мало также в при любом $t > 0$. Например, если предположить, что $f(x)$ кусочно непрерывна и имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию, то можно воспользоваться методом Фурье, и тогда из (15.2.4) следует, что все коэффициенты Фурье в разложении u , а значит, и δu убывают при увеличении t . В следующей главе корректность будет определена на фоне банаховых пространств.

Предположим, однако, что в правой части дифференциального уравнения (15.2.1) изменен знак:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \quad (\sigma > 0), \quad (15.3.1)$$

а начальные и граничные условия остались прежними. Тогда вместо (15.2.4) получим решение вида

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{+n^2 \sigma t} \sin nx,$$

члены которого растут экспоненциально по времени. Если коэффициенты Фурье b_n исходной функции f не убывают чрезвычайно быстро при $n \rightarrow \infty$ (т. е. если $f(x)$ не является очень гладкой функцией), то при любом положительном t ряд Фурье расходится из-за наличия множителя n^2 в экспоненте, поэтому у такой задачи решения нет; но даже если решение существует, оно не зависит непрерывно от начальных данных. Возьмем произвольное положительное число M (сколь угодно большое) и любые ε и δ (сколь угодно малые); тогда возмущение

$$u_1(x, t) = \varepsilon e^{m^2 \sigma t} \sin mx$$

будет не больше ε при $t=0$, но будет больше M при $t=\delta$, если m достаточно велико. Поэтому эта задача с начальными данными поставлена некорректно.

Некорректность хуже, чем просто неустойчивость. Если исходное уравнение теплопроводности (15.2.1) изменяется добавлением в правой части члена ku , где k — постоянная, то имеется такое возмущение, именно

$$u_1(x, t) = \text{const} \cdot \exp \left[\left(k - \frac{\sigma \pi^2}{(b-a)^2} \right) t \right] \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a},$$

которое неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$, если $k > \sigma \pi^2 / (b-a)^2$; следовательно, физическая система неустойчива в обычном смысле. Однако за конечное время, скажем $t \leq t_1$, никакое возмущение не может возрасти более чем в

$$\exp \left[(k - \sigma \pi^2 / (b-a)^2) t_1 \right]$$

раз, следовательно, решение непрерывно зависит от начальных данных. Иначе говоря, принимая в расчет указанный выше множитель, мы можем выяснить, с какой точностью нужно знать $f(x)$, чтобы гарантировать, что ошибка будет меньше ε при $0 \leq t \leq t_1$, в то время как в некорректно поставленной задаче ошибка на любом заданном интервале времени может увеличиться во сколь угодно большое число раз.

Некорректно поставленные задачи могут представлять физический интерес. Задача теплопроводности с измененным так, как указано выше, знаком эквивалентна задаче, в которой нужно найти распределение температуры при $t < 0$, если оно известно при $t=0$. У такой задачи нет решения, представляющего практический интерес, если отсутствует дополнительная информация относительно тепловой истории системы, задаваемая обычно в виде неравенств.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Найдите решение задачи (15.2.1), (15.2.2) в виде ряда Фурье, заменив (15.2.3) условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0, \quad 0 \leq t, \quad (15.3.2)$$

и дайте физическую интерпретацию этим новым граничным условиям. Покажите, что если задать одновременно все четыре граничные условия (15.2.3) и (15.3.2), то у такой задачи совсем нет решения, если $f(x) \not\equiv 0$.

15.4. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Напомним, что одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15.4.1)$$

имеет решение вида

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct). \quad (15.4.2)$$

Заметим попутно, что эта задача может быть представлена в каноническом виде, упомянутом в начале § 15.2, введением другой функции $v(x, t)$, такой, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (15.4.3)$$

Тогда мгновенное состояние системы описывается заданием значений $u(x, 0)$ и $v(x, 0)$ как функций от x . (Если в наличии имеется только u , то необходимо задавать также и du/dt .)

Если f и g дважды дифференцируемы, то (15.4.2) дает строгое решение уравнения (15.4.1). Из физических соображений часто желательно допускать более общие «решения» такого вида, например решения пилообразной формы. Тогда производные от f и g могут иметь разрывы; в точках разрыва f' или g' вторые производные, которые входят в уравнение (15.4.1), не существуют. Кроме того, знаменитый пример Вейерштрасса показывает, что можно выбрать такие f и g , для которых f'' и g'' нигде не существуют, даже если f' и g' непрерывны; следовательно, уравнение (15.4.1) никогда ни при каких x и t не может удовлетворяться, хотя подобные «решения» можно интерпретировать как такой волновой процесс, который физики называют «белым шумом». Хуже то, что f и g сами могут быть недифференцируемы или даже всюду разрывными. Ясно, что как только начинают рассматриваться обобщенные решения, становится необходимым уточнить класс физически допустимых функций или распределений. Обобщенное решение (15.4.2) в смысле теории распределений всегда удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.4.1).

Из (15.4.2) очевидно, что если при $t=0$ значения u и du/dt известны для всех x , функции f и g полностью определяются этими начальными данными, и значит, решение (15.4.2) единственно. В гл. 17 мы увидим, что в некоторых нелинейных задачах, близко связанных с данной, обобщенные решения (называемые там «слабыми») не являются единственными, если не заданы определенные вспомогательные условия; для данного дифференциаль-

ного уравнения и данных начальных значений получаются различные обобщенные решения, зависящие от вида этих вспомогательных условий.

15.5. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО (ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ) ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В задачах описанного выше типа мгновенное состояние физической системы при любом фиксированном значении переменной t характеризуется заданными функциями других переменных (называемых *пространственными переменными*). Эти функции будут обозначаться одним символом u и рассматриваться как точка бесконечномерного пространства $\mathbf{B}$. Движение точки $u = u(t)$ в пространстве $\mathbf{B}$ при изменении t соответствует эволюции системы.

С этого момента и до гл. 17 рассматриваются только линейные задачи. Сумма $u_1 + u_2$ или разность $u_1 - u_2$ двух элементов $\mathbf{B}$ определяется как такая точка пространства $\mathbf{B}$, которая получается сложением или вычитанием соответствующих функций. Для любого числа α αu определяется как точка, полученная умножением всех функций, представляющих u , на α . Таким образом, $\mathbf{B}$ становится линейным пространством. Эти операции могут привести к функциям, не представляющим непосредственно состояния физической системы (например, могут получиться отрицательные плотности), однако удобно рассматривать такие функции как представления обобщенных состояний системы. Тогда если функция разложена в $\mathbf{B}$ в какой-либо ряд, то отдельные члены и частные суммы этого ряда также представляются точками пространства $\mathbf{B}$. По той же причине удобно использовать комплекснозначные функции.

Понятие расстояния в пространстве $\mathbf{B}$ вводится таким образом, что две точки u_1 и u_2 близки тогда и только тогда, когда они представляют почти тождественные состояния физической системы. Для линейных задач это расстояние берется как функция разности $u_1 - u_2$ (равной, скажем, w), называется *нормой* элемента $u_1 - u_2$ (или w) и обозначается через $\|u_1 - u_2\| = \|w\|$; это число положительно, если u_1 и u_2 представляют разные состояния, и равно нулю, если $u_1 = u_2$. В качестве известных примеров можно указать максимум-норму и L^2 -норму — см. § 15.7. Расстояние $\|\alpha w\|$ между состояниями αu_1 и αu_2 рассматривается как умноженное на $|\alpha|$ расстояние между u_1 и u_2 , т. е. $\|\alpha w\| = |\alpha| \|w\|$. Поскольку определяемая величина интерпретируется как расстояние, необходимо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство треугольника $\|u_1 - u_3\| \leq \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - u_3\|$ или, несколько проще, $\|w_1 + w_2\| \leq \|w_1\| + \|w_2\|$. Может быть, не очевидно, предписывается ли это требование физическими соображениями (напоминаем: в релятивистской геометрии нера-

венство треугольника не выполняется), однако фактически оно удовлетворяется при любом выборе нормы, которую, вероятно, следовало бы использовать на практике, и, кроме того, это требование существенно для некоторых важных результатов теории операторов.

15.6. ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ. БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО

Если осуществляется бесконечная последовательность изменений состояния системы и величина изменений убывает достаточно быстро вдоль последовательности, то кажется очевидным, что должно существовать возможное состояние системы, являющееся пределом этой последовательности состояний. Выражаясь математическим языком, если $\|u_l - u_n\| \rightarrow 0$ при $l, n \rightarrow \infty$ независимо друг от друга, то последовательность $\{u_n\}$ точек B должна иметь предел в B . В этом смысле B имеет такую же непрерывную структуру, как и множество вещественных чисел (у каждой последовательности Коши есть предел) в отличие от той недостаточности, которая присуща множеству одних рациональных чисел.

На основании этих соображений в качестве B берется банахово пространство, которое было определено в гл. 1 (в § 1.2 и 1.3) как *полное нормированное линейное пространство*. Банахово пространство обладает всеми свойствами гильбертова пространства, за исключением тех, которые связаны со скалярным произведением, и как было указано в гл. 1, может оказаться невозможным определить скалярное произведение так, чтобы выполнялось соотношение $(u, u)^{1/2} = \|u\|$ для нормы u в B .

Для данной задачи часто возможен выбор среди различных банаховых пространств. Является ли данное «решение» приемлемым представлением возможной эволюции физической системы, должны решать физики, однако в следующей главе мы увидим, что как только банахово пространство B выбрано, соответствующие обобщения строгих решений будут обобщенными решениями, которые определяются некоторым семейством операторов $E(t)$ в B .

15.7. ПРИМЕРЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пространства непрерывных функций с так называемой максимум-нормой используются в задачах теплопроводности, диффузии и переноса. Приведем несколько примеров.

1. $C(a, b) = \{f: f(x) \text{ непрерывна, } a \leq x \leq b\}$,

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : a \leq x \leq b \},$$

т. е. $C(a, b)$ — пространство всех функций, определенных и непрерывных на интервале $a \leq x \leq b$; для любой такой функции f норма является супремумом или наименьшей верхней гранью значений $|f(x)|$. (В данном случае вместо $\sup$ можно было бы написать $\max$.)

2. $C(\mathbb{R}^n) = \{f: f(x) \text{ непрерывна на всем } \mathbb{R}^n\}$,

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|: x \in \mathbb{R}^n\},$$

где вектор x обозначает точку n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$.

3. $CP(\mathbb{R}, p) = \{f: f(x) \text{ непрерывна для всех } x \text{ и периодична с периодом } p [f(x+p) \equiv f(x)]\}$,

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|: x \in \mathbb{R} \text{ (или } x \in [a, a+p], a \text{ любое)}\}.$$

В каждом из этих примеров возможны два случая: случаи вещественнозначных и комплекснозначных функций и скаляров. Если необходимо различать эти случаи, то пишут ${}^{\text{real}}C(a, b)$ или ${}^{\text{срх}}C(a, b)$ и т. п.

Для этих пространств, очевидно, выполняются все аксиомы банаховых пространств (возможно, за исключением полноты).

Утверждение. Приведенные выше пространства являются полными и тем самым банаховыми пространствами.

Доказательство (для $C(\mathbb{R}^n)$). Пусть $\{f_k\}$ — любая последовательность Коши в $C(\mathbb{R}^n)$. Для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших l и k $\|f_k - f_l\| \leq \varepsilon$; иначе говоря,

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \quad (15.7.1)$$

при всех достаточно больших l и k . Поэтому (1) $\{f_k(x)\}$ для любого x является числовой последовательностью Коши и, следовательно, сходится к пределу $f(x)$; (2) поскольку сходимость равномерна, $f(x)$ непрерывна; (3) положив в (15.7.1) $k \rightarrow \infty$, получим

$$|f(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x$$

при всех достаточно больших l — это показывает, что $f(x)$ ограничена и что $\|f - f_l\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\{f_k\}$ имеет предел $f = f(x)$ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ и это пространство полно.

Типичным примером пространств с дискретными координатами служит гильбертово пространство l^2 , описанное в § 1.3, каждая точка ξ которого является бесконечной последовательностью $\{x_k\}$

комплексных чисел, таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ сходится, а именно

$$l^2 = \{\xi = \{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}, \quad \|\xi\| = \|\{x_k\}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Аналогичными пространствами являются

$$l^1 = \{\xi = \{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}, \quad \|\xi\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|,$$

и в общем случае (для любого $p \geq 1$)

$$l^p = \{\xi = \{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}, \quad \|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Для l^2 доказательства неравенства треугольника и полноты были даны в гл. 1 о гильбертовых пространствах; для l^p -пространств эти доказательства аналогичны, но здесь опускаются, поскольку эти пространства не будут нами использоваться.

Пространства с дискретными координатами можно обобщить следующим образом. Пусть $\{B_k\}$ — последовательность банаховых пространств ($k=1, 2, \dots$); определим пространство $l^2\{B_k\}$, каждый элемент ξ которого является последовательностью $\{u_k\}$, где

$u_k \in B_k$, такой, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2$ сходится (в k -м члене сумма $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве B_k), т. е.

$$l^2\{B_k\} = \left\{ \xi = \{u_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 < \infty \right\}, \quad \|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространства Фока, появляющиеся в теории вторичного квантования, являются именно такими пространствами: для них в качестве каждого пространства B_k берется гильбертово пространство; см. гл. 1.

Все пространства распределений $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\Omega)$, $L^p_0(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$), введенные в гл. 5, являются банаховыми пространствами со следующей нормой:

$$\|f\| = \left[\int_{\mathbb{R}^n \text{ или } \Omega} |f|^p dx \text{ или } \int |f|^p d\sigma(x) \right]^{1/p}.$$

Для любого банахова пространства B множество $B(B)$ ограниченных линейных операторов, определенных на всем B , является другим банаховым пространством (фактически банаховой алгеброй, потому что в нем определено умножение); нормой элемента $A \in B(B)$ служит его операторная норма $\|A\|$.

В каждом из описанных выше пространств точка представляет одну функцию. Во многих задачах для описания состояния физической системы требуется несколько функций (например, в гидродинамике нужно знать давление $p(x)$, плотность $\rho(x)$ и три компоненты скорости $v(x)$). Эти функции можно записать как компоненты $f_j(x)$ векторнозначной функции $f(x)$ (которая не обязательно имеет столько же компонент, что и x). Тогда все при-

веденные выше пространства можно обобщить, например:

$C(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m) = \{f: f(x) \text{ — ограниченное непрерывное отображение } \mathbb{R}^n \text{ в } \mathbb{R}^m\},$

$$\|f\| = \sup \{|f_j(x)| : x \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, \dots, m\};$$

если функции комплекснозначны, пространство обозначается как $C(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m)$. Аналогично в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ и $L^p(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m)$ каждая компонента $f_j(x)$ является вещественным или комплексным распределением из вещественного или комплексного пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\| = \left[\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Для любого банахова пространства B можно построить другое банахово пространство следующим образом. Однопараметрическое семейство $u(t)$ элементов B (кривая в B) называется *непрерывной*, если $\|u(t+\delta) - u(t)\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ для всех t . Тогда банахово пространство $B_1(a, b)$ определяется так:

$B_1(a, b) = \{u(t) \text{ — непрерывная кривая в } B: a \leq t \leq b\};$

$$\text{для } u \in B_1(a, b) \quad \|u\| = \max_{a \leq t \leq b} \|u(t)\|.$$

Пространства такого рода используются в § 16.6 о неоднородных задачах с начальными данными.

15.8. НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Напоминаем, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны, т.е. эквивалентны как абстрактные гильбертовы пространства. Для банаховых пространств это неверно. Например, легко убедиться в том, что пространства L^1 и L^2 (скажем, на $\mathbb{R}$) неэквивалентны. Так как L^2 — гильбертово пространство, для него справедливо правило параллелограмма (1.3.5), тогда как для L^1 оно не выполняется, согласно § 1.3. Поскольку правило параллелограмма касается только внутренних свойств (т.е. свойств абстрактных банаховых пространств), то L^1 и L^2 не могут быть изоморфными. Кроме того, неэквивалентны и L^1 и L^p для любого $p > 1$, потому что пространство L^p рефлексивно, а L^1 нет (см. § 5.7), а рефлексивность также относится к внутренним свойствам. Можно доказать, что вообще при $p \neq r$ пространства L^p и L^r неэквивалентны.

Выбор нормы в функциональном пространстве является делом главным образом физиков, поскольку этот выбор накладывает

ограничения на класс допустимых функций. Если функция $w(x)$ должна иметь конечное значение максимум-нормы, то она должна быть ограниченной; если она должна иметь конечную L^2 -норму, то она должна быть квадратично интегрируемой и т. д. Неэквивалентность различных норм важна также и для сходимости, чего нет в случае конечномерных пространств, в которых все обычные нормы топологически эквивалентны. Например, если $\mathbf{v}$ — вектор с компонентами $v_1, \dots, v_n$, то обе нормы

$$\|\mathbf{v}\|_{\max} = \max \{|v_1|, \dots, |v_n|\}$$

и

$$\|\mathbf{v}\|_2 = (|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2)^{1/2}$$

определяют один и тот же тип сходимости, а именно $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда каждая компонента вектора $\mathbf{v}_k$ сходится к соответствующей компоненте $\mathbf{w}$. Однако в функциональных пространствах разные нормы в общем случае неэквивалентны и задача может оказаться корректно поставленной относительно одной нормы и некорректно поставленной относительно другой. В задачах о волновом процессе и подобных ему процессах часто удобны нормы типа L^2 -норм, потому что в этих задачах энергия выражается через интеграл от квадрата некоторой полевой величины (или суммы таких квадратов); следовательно, для физически допустимых функций такие нормы конечны и остаются ограниченными в течение эволюции системы.

15.9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Многие понятия, связанные с линейными операторами, для банаховых пространств оказываются теми же самыми, что и для гильбертова пространства. Следующие понятия определяются так же, как и в гл. 7: линейный оператор A ; область определения $D(A)$; область значений $R(A)$; расширение; норма $\|A\|$; произведение операторов; обратный оператор; собственное значение; собственный вектор; точечный, непрерывный и остаточный спектры; резольвентное множество; резольвента; график $\Gamma(A)$; замкнутый оператор; компактный оператор (но не оператор Гильберта — Шмидта или ядерный оператор).

Понятий «симметрический», «самосопряженный», «унитарный», «нормальный» в банаховых пространствах нет. Нет и общей теории спектрального разложения, подобной той, что изложена в гл. 9.

Выполняется теорема о расширении (ограниченный оператор имеет единственное расширение на все замыкание своей области определения без увеличения нормы); ее доказательство в § 7.1 справедливо для любого банахова пространства.

ПРИМЕР 1

Пусть B — пространство $CP(\mathbb{R}, 2\pi)$ непрерывных периодических функций на $\mathbb{R}$ с периодом 2π , в котором в качестве нормы $\|\cdot\|$ взята максимум-норма. Пусть T — оператор, область определения которого $D(T)$ является множество таких функций из B , которые имеют абсолютно сходящийся ряд Фурье. Если

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

то по определению

$$(Tf)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{1+n^2} e^{inx}.$$

Здесь T — ограниченный оператор с плотной в B областью определения; следовательно, имеется единственное его расширение T' с $D(T') = B$. В действительности T' можно представить как интегральный оператор вида

$$(T'f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) dy.$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Найдите выражение для ядра $K(x-y)$ в приведенном выше примере (оно не единственно).

Порождает ли данная операция, скажем дифференцирование, ограниченный или неограниченный оператор, зависит от выбора банахова пространства. Пусть B — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, таких, что величина

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x \sup_q \left\{ \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^q f(x) \right| : x \in \mathbb{R}, q = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

конечна. Несколько измененное доказательство полноты $C(\mathbb{R}^n)$, приведенное в § 15.7, показывает, что B является банаховым пространством. В этом пространстве оператор дифференцирования T , заданный равенствами

$$D(T) = B, \quad (Tf)(x) = (d/dx) f(x),$$

является ограниченным линейным оператором. Заметим, кстати, что это банахово пространство, вероятно, не очень полезно, так как, например, оно содержит функцию $\sin x$, но не содержит функцию $\sin(1+\varepsilon)x$ при любом $\varepsilon > 0$.

15.10. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Как и в гильбертовом пространстве, линейный функционал $l(u)$ на B ограничен, если конечна величина

$$\|l\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u \neq 0} (|l(u)| / \|u\|).$$

Множество всех ограниченных линейных функционалов на B с указанной нормой является другим банаховым пространством; оно называется *сопряженным* (к B) пространством и обозначается через B' . Согласно § 5.7, сопряженным к пространству типа L^p является соответствующее пространство L^q , где $(1/p) + (1/q) = 1$, а в соответствии с теоремой Рисса—Фреше о представлении из § 1.8 гильбертово пространство можно рассматривать как сопряженное самому себе.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Пусть B —пространство $C(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных вещественных функций на $\mathbb{R}$ с максимум-нормой. Доказать изометричность сопряженного пространства B' пространству всех вещественных функций $\sigma(x)$ с ограниченной вариацией, определенных на $\mathbb{R}$ и таких, что $\sigma(0)=0$, а $\sigma(x+0)=\sigma(x)$; в качестве нормы функции $\sigma(x)$ из B' берется ее полная вариация на $\mathbb{R}$. (Указание. Воспользуйтесь теоремой Рисса о представлении из § 13.9.)

15.11. СХОДИМОСТЬ ВЕКТОРОВ И ОПЕРАТОРОВ

Типы сходимости, определенные для гильбертовых пространств в § 1.9 и 9.9, все еще можно использовать, за исключением того, что для слабой сходимости выражения $(v, \cdot)$, являющиеся линейными функционалами в случае гильбертовых пространств, нужно заменить линейными функционалами $l(\cdot)$ из B' . Последовательность $\{u_n\}$ сходится к w *сильно*, если $\|u_n - w\| \rightarrow 0$, и *слабо*, если $l(u_n) \rightarrow l(w)$ для каждого l из B' . Последовательность $\{A_n\}$ ограниченных операторов сходится к A *равномерно*, если $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, *сильно*, если $\|A_n v - A v\| \rightarrow 0$ для любого $v \in B$, и *слабо*, если $l(A_n) \rightarrow l(A v)$ для любого $v \in B$ и любого $l \in B'$. Слабая сходимость нам почти не требуется.

15.12. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Напоминаем, что матрица A в задаче § 15.1 симметрична для консервативных систем (т.е. $A_{jk} = A_{kj}$ для всех j, k). Эта симметрия лучше всего описывается при помощи скалярного произведения $x \cdot y$ векторов, а именно матрица A симметрична тогда и только тогда, когда $(Ax) \cdot y = x \cdot (Ay)$ для всех векторов x, y , потому что если это равенство расписать по координатам, то оно примет вид

$$\sum_{j, k} A_{jk} x_k y_j = \sum_{j, k} A_{kj} x_k y_j.$$

Иногда (но не для всех банаховых пространств) можно ввести аналогичные обозначения для B через скалярное произведение двух элементов из B , записываемое как (u, v) , аналогичное ска-

лярному произведению векторов и обладающее теми же свойствами. Если скалярное произведение определяется в B так, что $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ (как и для векторов), то B является гильбертовым пространством (см. гл. 1). Среди симметрических операторов в гильбертовом пространстве важнее всего самосопряженные операторы, которые рассматривались в гл. 7—9.

15.13. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В специальной теории относительности Эйнштейна нет однозначно определенной переменной времени t . Однако теории относительности по форме инвариантны относительно преобразований Лоренца; следовательно, если задача корректно поставлена в одной системе координат Лоренца, то она оказывается корректно поставленной и во всех системах координат Лоренца. В качестве примеров можно указать уравнение Дирака и уравнения Максвелла (о них пойдет речь в следующей главе).

Иногда нелегко выяснить, какое решение задачи с начальными данными в некоторой системе координат описывает ту же самую эволюцию физической системы, что и данное решение в другой системе координат.

15.14. ПОЛУНОРМЫ

Как было указано в § 5.9, *полунорма* — это такая функция $\|\cdot\|$, которая удовлетворяет всем требованиям нормы, за исключением того, что требуется только ее полуопределенность ($\|u\| \geq 0$ для всех u), а не определенность ($\|u\| > 0$, кроме $u = 0$). Пространство V , полное относительно полунормы, можно превратить в банахово пространство следующим образом: назовем u и u' из V эквивалентными (и будем писать $u \sim u'$), если $\|u - u'\| = 0$. Отношение $\sim$ рефлексивно ($u \sim u$), симметрично (если $u \sim u'$, то $u' \sim u$) и транзитивно (если $u \sim u'$ и $u' \sim u''$, то $u \sim u''$ вследствие неравенства треугольника); поэтому это отношение разбивает V на непересекающиеся классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий u , обозначается через $[u]$ и определяется следующим образом:

$$[u] = \{v: \|u - v\| = 0\}.$$

Кроме того, если $u \sim u'$, то $\|u\| = \|u'\|$ (тоже в силу неравенства треугольника), так что $\|[u]\|$ может быть определена однозначно как $\|u\|$. Легко показать, что с такой нормой множество всех классов эквивалентности оказывается банаховым пространством B . В алгебраических терминах это формулируется так: если V_0 —

подпространство пространства V , состоящее из элементов с нулевой полунормой, то B является факторпространством V/V_0 .

Эта процедура используется в классическом определении L^p -пространств, согласно которому функция $f(x)$ принадлежит L^p , если она измерима и $|f(x)|^p$ интегрируема. Однако при этом необходимо считать, что две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают как элементы L^p , если они отличаются друг от друга только на множестве меры нуль, поскольку в таком случае

$$\|f - g\| = \left[\int |f(x) - g(x)|^p dx \right]^{1/p} = 0.$$

Глава 16

КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУГРУППЫ

Постановка задач в банаховых пространствах; строгое решение; понятие корректно поставленной задачи в смысле Адамара; существование и единственность решения; непрерывная зависимость решения от начального состояния; обобщенное решение; полугруппа; сильно непрерывная полугруппа; инфинитезимальный генератор; теорема Хилле—Йосиды; неоднородные задачи; неоднородные граничные условия; задачи с явной зависимостью от времени; приложения к задачам теплопроводности, волновых процессов, квантовой механики, теории электромагнитного поля и переноса нейтронов.

Предварительные сведения: гл. 15.

В данной главе представлена общая теория линейных задач с начальными данными или эволюционных физических задач.

16.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейную задачу с начальными данными рассмотренного в гл. 15 типа можно сформулировать абстрактно как задачу нахождения такой функции $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}$, что

$$du(t)/dt = Au(t) \quad (16.1.1)$$

и

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ задано}, \quad (16.1.2)$$

где A — оператор, включающий пространственные переменные, а производной функции $u(t)$ является предел (при $\Delta t \rightarrow 0$) выражения $[u(t + \Delta t) - u(t)]/\Delta t$ в смысле сходимости в $\mathbf{B}$. *Строгое решение* уравнения (16.1.1) определяется как такая функция $u(t)$ ($u(t) \in \mathbf{B}$ для всех $t \geq 0$), что

$$u(t) \in D(A) \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (16.1.3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (16.1.4)$$

Граничные или другие вспомогательные условия учитываются тем, что область определения $D(A)$ оператора A ограничивается только теми элементами пространства $\mathbf{B}$, которые удовлетворяют этим условиям; предполагается, что эти условия линейны и однородны, так что множество $\mathbf{S}$ всех тех u , которые удовлетворяют этим условиям, образует линейное многообразие; предполагается, что $D(A)$ содержится в $\mathbf{S}$. Таким образом, условие

(16.1.3), помимо всего прочего, требует, чтобы $u(t)$ удовлетворяла всем вспомогательным условиям для всех $t \geq 0$. Уравнение (16.1.1) — это линейное эволюционное уравнение, оно описывает изменение физической системы из заданного начального состояния.

Описанная постановка задачи применима не только к уравнениям первого порядка по t , поскольку уравнения более высокого порядка можно свести к системам первого порядка путем введения дополнительных зависимых переменных.

Значительная часть теории, излагаемой в этой главе, может быть обобщена на задачи, в которых оператор A зависит (достаточно гладко) от t ; например, A может быть дифференциальным оператором, коэффициенты которого зависят от t . Такие задачи рассматриваются кратко в § 16.7, а пока предполагается, что A не зависит от t .

Выбор банахова пространства B , а также области определения оператора A является существенной частью постановки задачи. Мы увидим, что данная задача может оказаться корректно поставленной (в смысле следующего параграфа) при одном выборе B и некорректно поставленной при другом выборе B^1). Этот выбор, по крайней мере частично, почти всегда определяется физическими соображениями.

16.2. КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Задача с начальными данными называется *корректно поставленной* (в смысле Адамара), если она обладает следующими свойствами:

- 1) строгие решения однозначно определяются своими начальными элементами;
- 2) множество U всех начальных элементов строгих решений плотно в банаховом пространстве B ;
- 3) для любого конечного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная $K = K(t_0)$, что каждое строгое решение удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leq K \|u(0)\| \quad \text{для } 0 \leq t \leq t_0. \quad (16.2.1)$$

В связи с первым условием заметим, что если *какое-либо* строгое решение однозначно определяется его начальным элементом, то в силу линейности задачи этим свойством обладают и все другие

¹⁾ Любая однозначно разрешимая линейная задача может быть сделана корректно поставленной при должном выборе норм в области определения оператора или его области значений, но не каждая норма удобна или естественна в данной задаче. — *Прим. перев.*

КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУГРУППЫ

Постановка задач в банаховых пространствах; строгое решение; понятие корректно поставленной задачи в смысле Адамара; существование и единственность решения; непрерывная зависимость решения от начального состояния; обобщенное решение; полугруппа; сильно непрерывная полугруппа; инфинитезимальный генератор; теорема Хилле—Иосиды; неоднородные задачи; неоднородные граничные условия; задачи с явной зависимостью от времени; приложения к задачам теплопроводности, волновых процессов, квантовой механики, теории электромагнитного поля и переноса нейтронов.

Предварительные сведения: гл. 15.

В данной главе представлена общая теория линейных задач с начальными данными или эволюционных физических задач.

16.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейную задачу с начальными данными рассмотренного в гл. 15 типа можно сформулировать абстрактно как задачу нахождения такой функции $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве B , что

$$du(t)/dt = Au(t) \quad (16.1.1)$$

и

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ задано,} \quad (16.1.2)$$

где A — оператор, включающий пространственные переменные, а производной функции $u(t)$ является предел (при $\Delta t \rightarrow 0$) выражения $[u(t + \Delta t) - u(t)]/\Delta t$ в смысле сходимости в B . *Строгое решение* уравнения (16.1.1) определяется как такая функция $u(t)$ ($u(t) \in B$ для всех $t \geq 0$), что

$$u(t) \in D(A) \text{ для всех } t \geq 0, \quad (16.1.3)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (16.1.4)$$

Граничные или другие вспомогательные условия учитываются тем, что область определения $D(A)$ оператора A ограничивается только теми элементами пространства B , которые удовлетворяют этим условиям; предполагается, что эти условия линейны и однородны, так что множество S всех тех u , которые удовлетворяют этим условиям, образует линейное многообразие; предполагается, что $D(A)$ содержится в S . Таким образом, условие

(16.1.3), помимо всего прочего, требует, чтобы $u(t)$ удовлетворяла всем вспомогательным условиям для всех $t \geq 0$. Уравнение (16.1.1)—это линейное эволюционное уравнение, оно описывает изменение физической системы из заданного начального состояния.

Описанная постановка задачи применима не только к уравнениям первого порядка по t , поскольку уравнения более высокого порядка можно свести к системам первого порядка путем введения дополнительных зависимых переменных.

Значительная часть теории, излагаемой в этой главе, может быть обобщена на задачи, в которых оператор A зависит (достаточно гладко) от t ; например, A может быть дифференциальным оператором, коэффициенты которого зависят от t . Такие задачи рассматриваются кратко в § 16.7, а пока предполагается, что A не зависит от t .

Выбор банахова пространства B , а также области определения оператора A является существенной частью постановки задачи. Мы увидим, что данная задача может оказаться корректно поставленной (в смысле следующего параграфа) при одном выборе B и некорректно поставленной при другом выборе B^1). Этот выбор, по крайней мере частично, почти всегда определяется физическими соображениями.

16.2. КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Задача с начальными данными называется *корректно поставленной* (в смысле Адамара), если она обладает следующими свойствами:

1) строгие решения однозначно определяются своими начальными элементами;

2) множество U всех начальных элементов строгих решений плотно в банаховом пространстве B ;

3) для любого конечного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная $K = K(t_0)$, что каждое строгое решение удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leq K \|u(0)\| \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (16.2.1)$$

В связи с первым условием заметим, что если *какое-либо* строгое решение однозначно определяется его начальным элементом, то в силу линейности задачи этим свойством обладают и все другие

¹⁾ Любая однозначно разрешимая линейная задача может быть сделана корректно поставленной при должном выборе норм в области определения оператора или его области значений, но не каждая норма удобна или естественна в данной задаче.— *Прим. перев.*

откуда видно, что (1) решение единственно, потому что если $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, где u_1 и u_2 — произвольные решения, то $u_1(0) = u_2(0)$ только тогда, когда $u_1(t) = u_2(t)$ для всех t , и (2) решение непрерывно зависит от $u(0)$, т. е. задача корректно поставлена. Разрешающим оператором $E_0(t)$ является интегральный оператор в формуле (16.2.7), а обобщенное решение задается этой же формулой в предположении, что $f(y)$ представляет собой произвольный элемент банахова пространства B_0 .

Данная задача корректно поставлена также и в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$, если оператор A определен следующим образом:

$$D(A) = \{u \in L^2: u'' \in L^2, u(a) = u(b) = 0\}, \quad (16.2.8)$$

$$Au = \sigma u'',$$

так как, скалярно умножив уравнение с частными производными (15.2.1) на $\overline{u(x, t)}$ и проинтегрировав по частям с учетом граничных условий, мы получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{1}{2} |u|^2 dx = - \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \leq 0,$$

следовательно,

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|.$$

(Заметим, что в этом случае нет необходимости вводить меньшее пространство B_0 , поскольку $D(A)$ плотно в L^2 .)

Эта задача корректно поставлена и относительно любой из общих норм, таких, как L^p -нормы, или нормы, включающие кроме $u(x)$ еще и одну или несколько (или бесконечное число) производных от $u(x)$ и т. д.; при этом решение задается формулой (16.2.7). Данная задача корректно поставлена относительно всех этих норм потому, что уравнение теплопроводности чрезвычайно «устойчиво» в прямом направлении (при возрастании t от 0): решение с ростом t уменьшается и постоянно заглаживается. Напротив, это уравнение столь же «неустойчиво» в обратном направлении (при убывании t от 0), что делает обратную задачу теплопроводности некорректно поставленной при любом выборе норм¹⁾.

Соответствующая многомерная задача также корректно поставлена, например, в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ с максимум-нормой или в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Фундаментальным решением является

$$\psi(x, t; y) = (2\pi\sigma t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/(4\sigma t)}. \quad (16.2.9)$$

¹⁾ См. примечание в конце § 16.1. — *Прим. перев.*

16.3. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Как было указано в § 15.4, задача Коши для одномерного волнового уравнения всегда имеет решение, по крайней мере в смысле теории распределений (граничные условия будут рассмотрены позже). Действительно, если φ и ψ — произвольные распределения на $\mathbb{R}$, а $f = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi$ и $g = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\psi$, то распределения на $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x+ct) + g(x-ct), \\ v(x, t) &= f(x+ct) - g(x-ct) \end{aligned} \quad (16.3.1)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (16.3.2)$$

в смысле теории распределений, а также начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x). \quad (16.3.3)$$

Замечание. Для произвольного распределения $h(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$ выражение $h(x, 0)$ было бы бессмысленным. Однако в теории задач с начальными данными t рассматривается как параметр, и из (16.3.1) видно, что для любого фиксированного значения t_0 этого параметра $u(x, t_0)$ и $v(x, t_0)$ являются вполне определенными распределениями на $\mathbb{R}$, и поэтому начальные условия (16.3.3) имеют смысл. В данной задаче и x можно рассматривать как параметр, и при фиксированном x_0 $u(x_0, t)$ и $v(x_0, t)$ будут вполне определенными распределениями. Вообще параметром может быть любая линейная комбинация $t' = \alpha x + \beta t$, лишь бы прямые $\alpha x + \beta t = \text{const}$ не были характеристическими линиями (см. следующую главу), т. е. лишь бы $\beta \neq \pm \alpha$. В релятивистских задачах разные временные переменные t, t' связываются с различными системами отсчета.

Чтобы доказать единственность решения, нужно показать, что если $\varphi = \psi = 0$ для всех x , то $u = v = 0$ для всех x и всех t . Пусть ξ и η — новые переменные в плоскости x, t , такие, что $\xi = x + ct$ и $\eta = x - ct$. Тогда уравнения (16.3.2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (u + v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (u - v) = 0. \quad (16.3.4)$$

Поэтому $u + v$ — распределение, зависящее только от ξ , а $u - v$ — распределение, зависящее только от η (см. § 2.7); если эти распределения обозначить через $2f$ и $2g$, то получаются формулы (16.3.1), а это говорит о том, что каждое решение уравнений (16.3.2) имеет вид (16.3.1). В частности, если $\varphi = \psi = 0$, то $u = v = 0$. Это рассуждение является просто весьма частным случаем метода характеристик, при помощи которого доказывается единственность решения общей (нелинейной) гиперболической системы уравнений (см. следующую главу); значения $u + v$ и $u - v$ распространяются в плоскости x, t вдоль характеристических линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Чтобы рассмотреть вопрос о непрерывной зависимости решения от начальных данных, нужно подобрать какую-либо норму $\|\cdot\|$ для состояний, представляемых для заданного t распределениями $u(x, t)$, $v(x, t)$, — отсюда следует также выбор класса распределений, которыми можно представить состояния системы. Иначе говоря, необходимо подобрать банахово пространство; ниже описаны разные варианты этого выбора. В любом случае удобно ввести двумерные векторы

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.};$$

тогда дифференциальные уравнения (16.3.2) и решение (16.3.1) можно сокращенно записать так:

$$\frac{d}{dt} u(t) = \tilde{A} u(t) \quad \text{и} \quad u(t) = \tilde{E}(t) u(0),$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c \frac{\partial}{\partial x}, \quad (16.3.5)$$

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T_{-ct} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} T_{ct}, \quad (16.3.6)$$

где для любого вещественного a T_a — оператор сдвига, определяемый равенством $(T_a f)(x) = f(x - a)$. Для конкретного банахова пространства операторы A и $E(t)$ общей теории получаются из $\tilde{A}$ и $\tilde{E}(t)$ путем надлежащего выбора их областей определения.

Рассмотрим сначала пространство

$$B = \left\{ u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u(x) \text{ и } v(x) \text{ — ограниченные непрерывные функции} \right\}, \quad (16.3.7)$$

$$\|u\| = \sup_x (\max \{|u(x)|, |v(x)|\}).$$

В данном случае из (16.3.1) сразу следует, что $\|u(t)\| \leq \|u(0)\|$, следовательно, задача с начальными данными корректно поставлена в этом банаховом пространстве. Однако ниже мы увидим, что это неверно в многомерном случае (имеется в виду — для максимум-нормы), поэтому банаховы пространства этого типа физически неуместны в рассматриваемой задаче.

Нетрудно убедиться в том, что рассматриваемая задача корректно поставлена и в банаховом пространстве

$$B = \left\{ u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u, v \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad (16.3.8)$$

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (|u(x)|^2 + |v(x)|^2) dx,$$

потому что непосредственные вычисления, начиная с (16.3.1), показывают, что

$$\|u(t)\|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi|^2 + |\psi|^2) dx = \|u(0)\|^2,$$

т. е. задача корректно поставлена. В качестве области определения оператора A , который действует по формуле (16.3.5), можно взять множество всех таких u , у которых $u, v \in C_0^\infty$, или множество

$$D(A) = \{u \in B: \tilde{A}u \in B\},$$

или любое другое множество, находящееся между этими крайними случаями. В первом случае строгие решения являются функциями класса C_0^∞ для каждого t и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений всюду на плоскости x, t . Во втором случае строгие решения являются непрерывными функциями, дифференцируемыми в классическом смысле почти всюду, и в том же смысле почти всюду удовлетворяют дифференциальным уравнениям. Обобщенные решения не обязательно дифференцируемы в классическом смысле для любых x и t ; для каждого t они являются распределениями из L^2 . Таким образом, благодаря концепции Адамара корректно поставленной задачи мы приходим к удивительному понятию нигде недифференцируемого решения дифференциального уравнения. Это же справедливо и для ранее рассмотренного банахова пространства (16.3.7). Поскольку такие обобщенные решения часто имеют физический смысл, как, например, белый шум, иногда предпочтительнее интегральная формулировка физических законов, не зависящая от дифференцируемости, такая, как в приведенном ниже упражнении и в более общем случае в гидродинамике (см. следующую главу).

УПРАЖНЕНИЕ

1. Пусть x — вектор с компонентами x и y , где $y = ct$, и пусть $\mathcal{C}$ — периметр прямоугольника, рассматриваемый как замкнутая кривая. Покажите, что если u — строгое решение рассмотренной выше задачи, то

$$\oint_{\mathcal{C}} u \cdot dx = 0 \quad \text{и} \quad \oint_{\mathcal{C}} w \cdot dx = 0, \quad (16.3.9)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Покажите, что для строгого решения требование, чтобы выполнялись условия (16.3.9) для периметров $\mathcal{C}$ всех прямоугольников, эквивалентно требованию, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения. Используя неравенство Шварца для распределений из L^2 , покажите, что уравнения (16.3.9) справедливы и для обобщенных решений.

Если уравнения (16.3.9) интерпретируются как описание колебаний воздуха в трубе, то величина $1/2 \|u\|^2 = 1/2 \int (|u|^2 + |v|^2) dx$ выражает полную энергию колебательного движения при соответствующем выборе единиц. Для строгого решения u и du/dx при данном t принадлежат L^2 , поэтому $u(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$, согласно § 5.6. Поэтому, используя дифференциальные уравнения и интегрирование по частям по x , получаем, что

$$d \|u\|^2 / dt = 0,$$

откуда следует, что $\|u(t)\|^2 = \|u(0)\|^2$, а не просто $\leq \|u(0)\|^2$; следовательно, энергия сохраняется для строгих решений, а тем самым и для обобщенных решений.

Покажем теперь, что корректность постановки задачи может зависеть от выбора нормы. Имеется много способов сведения уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка. Вместо (16.3.2) можно написать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (16.3.10)$$

В банаховом пространстве с нормой

$$\|u\| = \sup_x \max \{ |u(x)|, |w(x)| \} \quad (16.3.11)$$

задача поставлена *некорректно*, в чем можно убедиться при рассмотрении строгого решения

$$u = \cos Kx \cos cKt, \quad w = -cK \cos Kx \sin cKt,$$

для которого

$$\|u(t)\| / \|u(0)\| = \max \{ |\cos cKt|, cK |\sin cKt| \}.$$

Но это отношение при любом $t > 0$ можно сделать сколь угодно большим при подходящем выборе K . Это означает, что $E_0(t)$ не является ограниченным оператором. Знание физики помогает исключить формулировки подобного рода, потому что u и w имеют разные размерности, поэтому норма (16.3.11) оказывается несостоятельной при проверке размерности.

Во всех случаях, когда прямая задача корректно поставлена, таковой же оказывается обратная задача, поскольку система (16.3.2) инвариантна по отношению к подстановкам $-t \rightarrow t$, $u \rightarrow u$, $-v \rightarrow v$.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Выясните, является ли рассматриваемая задача с начальными данными корректно поставленной относительно следующих норм (u , v , w — это величины, входящие в уравнения (16.3.2) и (16.3.10)). В каждом случае в качестве области

определения $D(A)$ можно взять либо C_0^∞ , либо множество всех $u \in B$, для которых $\tilde{A}u \in B$.

$$1) \|u\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|u(x)|^2 + |w(x)|^2) dx \right)^{1/2};$$

$$2) \|u\| = \sup_x (|u(x)| + |v(x)|);$$

$$3) \|u\| = \sup_x (|u(x)| + |w(x)|).$$

Предположим теперь, что при $\dot{x} = a$ и $x = b$ выполнено граничное условие $u = 0$:

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (16.3.12)$$

и что начальные данные (16.3.2) заданы только на интервале (a, b) . Если колебания интерпретируются как звуковые волны в трубе, а u и v — величины, пропорциональные скорости и давлению соответственно, то условия (16.3.12) означают, что концы трубы при $x = a$ и $x = b$ закрыты. Для строгого решения смысл этих условий очевиден, поскольку $u(x, t)$ — функция, фактически функция класса C^1 .

Для обобщенного решения условия (16.3.12) не имеют непосредственного смысла, потому что u — всего лишь распределение; однако они могут быть проинтерпретированы как механизм отражения решения $u(x, t)$, определенного как распределение на $\mathbb{R}$ для каждого t с помощью условий

$$u(2a - x, t) = -u(x, t) \quad (\forall x, \forall t),$$

$$u(2b - x, t) = -u(x, t) \quad (\forall x, \forall t);$$

для v предполагаются аналогичные условия. Рассмотрение деталей этой интерпретации предоставляется читателю.

В многомерном случае волновая задача поставлена некорректно относительно максимум-нормы вследствие роста амплитуды при сжатии сферической волны в точке, что и показывает следующее упражнение.

УПРАЖНЕНИЕ

3. Пусть r — радиальная координата в трехмерном пространстве V^3 , и пусть $\psi(r)$ — гладкая (класса C^2) функция с носителем в $[r_0, \infty)$, где $r_0 > 0$. Покажите, что для $t < r_0/c$ функция

$$u(r, t) = [(r + ct)/r] \psi(r + ct) \quad (16.3.13)$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (16.3.14)$$

и, следовательно, представляет приходящую волну. Предполагая, что $\psi(r)$ аппроксимирует функцию с разрывом в r_0 (см. рис. 16.1), покажите, что

$\sup_r |u(r, t)|$ может превосходить $\sup_r |\psi(r)|$ в любое число раз, следовательно, задача некорректно поставлена относительно максимум-нормы. [Можно было бы переопределить норму как $\|f\| = \sup_r |f(r)|$ и тогда было бы $\|u\| = \|\psi\|$ для

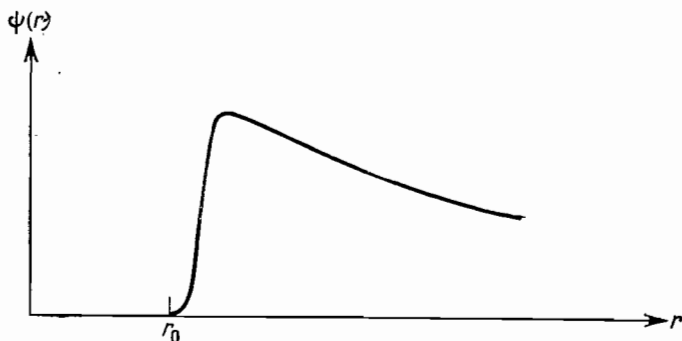


Рис. 16.1. Функция $\psi(r)$.

всех $t < r_0/c$, однако это удастся сделать только для волн, сходящихся к началу координат, но не для волн, сходящихся к другим точкам V^3 .]

В многомерном случае нет обобщения метода, основанного на уравнениях (16.3.1); однако в этом случае при решении задачи Коши или задачи в прямоугольной области можно использовать методы, основанные на разложении в ряд Фурье; при этом доказывается, что данная задача корректно поставлена относительно L^2 -нормы, являющейся обобщением нормы (16.3.8).

16.4. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Пусть $\psi = \psi(x, t) = \psi(x_1, \dots, x_n, t)$ — комплекснозначная функция (волновая функция). Уравнением Шредингера является уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi, \quad (16.4.1)$$

где ∇^2 есть n -мерный лапласиан, $V = V(x)$ — заданная вещественная функция переменных $x_1, \dots, x_n$ (потенциал), $\hbar$ и m — постоянная Планка, деленная на 2π , и масса электрона соответственно. Оператор $H = (-\hbar^2/(2m)) \nabla^2 + V$ называется квантовомеханическим гамильтонианом (оператором Гамильтона) системы. Для водородоподобного атома $n=3$ и $V = -Ze^2/|x|$; здесь Ze — заряд ядра, а $-e$ — заряд электрона. Для многоэлектронных атомов n равно утроенному числу электронов, а V описывает взаимодействие электронов не только с ядром, но и между собой. Для электрона в металлическом кристалле $n=3$, $V(x)$ — периодическая по всем трем переменным функция.

Задача с начальными данными может быть проиллюстрирована примером свободной частицы в одномерном случае. Это задача

нахождения комплекснозначной функции $\psi(x, t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (16.4.2)$$

со следующими начальными данными при $t=0$:

$$\psi(x, 0), \quad -\infty < x < \infty. \quad (16.4.3)$$

Сначала возьмем банахово пространство **B** непрерывных ограниченных функций переменной x с максимум-нормой

$$\|\psi\| = \sup_x |\psi(x)|. \quad (16.4.4)$$

При таком выборе нормы данная задача с начальными данными является *некорректно* поставленной, что можно увидеть, рассматривая строгое решение вида

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{t_0}{t_0 - t}} \exp \frac{-imx^2}{2\hbar(t_0 - t)}, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (16.4.5)$$

где t_0 — положительная постоянная. [Это решение моделирует фундаментальное решение (15.2.6) уравнения теплопроводности.] Поскольку $\|\psi(x, t)\| = [t_0/(t_0 - t)]^{1/2}$, в то время как $\|\psi(x, 0)\| = 1$, отсюда следует, что

$$\|E_0(t)\| \geq \sqrt{t_0/(t_0 - t)}.$$

Поэтому для любого $t > 0$ оператор $E_0(t)$ неограничен, потому что квадратный корень можно сделать сколь угодно большим, взяв t_0 достаточно близким к t , например положив $t_0 = t + \varepsilon$. [Заметим, между прочим, что решение (16.4.5) квадратично интегрируемо, если постоянная t_0 задана с малой отрицательной мнимой частью.]

Известное значение квадратичной интегрируемости для квантовой механики наводит на мысль, что в данной задаче в качестве **B** следует брать пространство $L^2(\mathbb{R})$ (см. гл. 5) с нормой

$$\|\psi\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (16.4.6)$$

В качестве **D(A)** можно взять множество таких распределений $\psi(x) \in L^2$, что $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$ также принадлежат L^2 . Тогда если $\psi = \psi(x, t)$ — строгое решение задачи (16.4.2), то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right) dx = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (16.4.7)$$

[В § 5.6 было доказано, что если ψ и ψ' принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$; если, кроме того, $\psi'' \in L^2$, то и $\psi' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.] Это означает, что норма $\|\psi\|$ строгого решения при $t > 0$ та же, что и при $t = 0$, т. е. $\|E_0(t)\| = 1$. Отсюда следует также единственность строгого решения, потому что $\|\psi_1 - \psi_2\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\psi_1 = \psi_2$, так что если $\psi_1 = \psi_2$ при $t = 0$, то $\psi_1 = \psi_2$ при всех t .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Примените преобразование Фурье (по x) к уравнению (16.4.2) и найдите явный вид соответствующего (16.4.5) строгого решения полученного уравнения.

Рассуждения, связанные с (16.4.7), невозможны при большей размерности, потому что $\psi(x)$ не обязана стремиться к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ даже в том случае, когда и ψ , и все ее производные первого порядка принадлежат L^2 . Однако сам результат сохраняется: в § 16.8 будет показано, что если H — любой самосопряженный оператор, то (1) к оператору $-(i/\hbar)H$ можно применить теорему Хилле — Йосиды, и (2) если $d\psi/dt = -(i/\hbar)H\psi$, то $(d/dt)\|\psi\|^2 = 0$; следовательно, задача с начальными данными для уравнения Шредингера корректно поставлена относительно L^2 -нормы. Это очень общий результат: оператор H может быть гамильтонианом системы, состоящей из любого числа частиц, на которые действуют любые внутренние и внешние силы, предполагается только, что H самосопряжен. Исследование самосопряженности различных гамильтонианов Шредингера и Дирака было проведено в гл. 10 и 11.

Для многоэлектронного атома из принципа исключения Паули следует одно важное вспомогательное условие. Его полное изложение потребовало бы введения электронных спинов, однако пояснить его можно следующим образом. Пусть $\psi(x_1, x_2, t)$ — волновая функция двухэлектронного атома, где теперь x_1 и x_2 — трехмерные векторы. В этом случае используется гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^6)$. Иногда требуется, чтобы волновая функция была симметрической относительно перестановки двух электронов, т. е. $\psi(x_1, x_2, t) = \psi(x_2, x_1, t)$, а иногда необходимо, чтобы она была антисимметрической: $\psi(x_1, x_2, t) = -\psi(x_2, x_1, t)$. Для учета этих требований вводятся два подпространства L_+^2 и L_-^2 пространства $L^2(\mathbb{R}^6)$, состоящие из симметрических и антисимметрических функций из $L^2(\mathbb{R}^6)$ соответственно. Гамильтониан H многоэлектронного атома всегда инвариантен относительно перестановок двух электронов, так что если $\psi \in L_+^2$ (или L_-^2), то и $H\psi \in L_+^2$ (или L_-^2). Поэтому если $\psi(x_1, x_2, t)$ — произвольное решение уравнения Шредингера, то симметрическая функция

$$\psi(x_1, x_2, t) + \psi(x_2, x_1, t)$$

и антисимметрическая функция

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = -\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$$

являются решениями того же самого уравнения в подпространствах L_+^2 и L_-^2 соответственно. Если ограничиваться рассмотрением того или иного подпространства, которые, очевидно, замкнуты и поэтому являются банаховыми пространствами со всеми их свойствами, то вспомогательное условие выполняется автоматически. На подходящей области определения гамильтониан самосопряжен на каждом из этих подпространств, следовательно, по теореме Хилле—Иосиды задача с начальными данными снова поставлена корректно.

16.5. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

В этом параграфе демонстрируется использование второго определения самосопряженного оператора, данного в § 8.6. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (16.5.1)$$

где векторные поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют также вспомогательным условиям

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (16.5.2)$$

и начальному условию

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{заданы.} \quad (16.5.3)$$

[Можно рассмотреть несколько более общую задачу об электромагнитном поле. Однако если есть токи и заряды, на движение которых влияют эти поля, или имеют место ферромагнитные эффекты, то уравнения оказываются нелинейными.]

Уместным для данной задачи банаховым пространством является подпространство $\mathbf{H}_0$ гильбертова пространства $\mathbf{H}$, элементами которого служат пары векторных полей в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой нормой:

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (16.5.4)$$

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) d^3\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (16.5.5)$$

где

$$|\mathbf{E}| = (|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2)^{1/2}, \quad (16.5.6)$$

а величина $|\mathbf{H}|$ аналогична. Тогда

$$\mathbf{H} = \{u: \|u\| < \infty\}, \quad (16.5.7)$$

а скалярное произведение в $\mathbf{H}$ имеет вид

$$(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \bar{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{H}_2) d^3x.$$

Пространство $\mathbf{H}$ представляет собой декартово произведение шести пространств вида

$$\left\{ E_x(\mathbf{x}): \int_{\mathbb{R}^3} |E_x|^2 d^3x < \infty \right\},$$

т. е. пространств типа $L^2(\mathbb{R}^3)$; поэтому можно написать

$$\mathbf{H} = (L^2(\mathbb{R}^3))^6,$$

имея в виду, что квадрат нормы в декартовом произведении равен сумме квадратов норм шести перемножаемых пространств.

Подпространство $\mathbf{H}_0$ определяется так:

$$\mathbf{H}_0 = \{u \in \mathbf{H}: \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0\}. \quad (16.5.8)$$

Ясно, что это линейное многообразие в $\mathbf{H}$; сейчас мы докажем, что оно замкнуто, следовательно, является подпространством, т. е. гильбертовым пространством со всеми его свойствами. Компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются распределениями из L^2 , а производные в (16.5.8) берутся в смысле теории распределений.

Итак, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ в том и только в том случае, когда $\int \bar{\varphi} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3x = 0$ для любой пробной функции $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, тогда как $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ тогда и только тогда, когда для любой пробной функции $\bar{\psi}$ $\int \bar{\psi} \nabla \cdot \mathbf{H} d^3x = 0$. По определению производной распределения это означает, что элемент

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

ортогонален всем элементам из $\mathbf{H}$ вида

$$\begin{bmatrix} \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\mathbf{H}_0$ является ортогональным дополнением множества всех элементов такого вида. Ортогональное дополнение всегда является замкнутым линейным многообразием (см. гл. 1), поэтому $\mathbf{H}_0$ замкнуто.

Для того чтобы представить (16.5.1) в виде $\partial u / \partial t = Au$, оператор A определяется сначала на $\mathbf{H}$ следующим образом: формально определим оператор A_0 как

$$A_0 u = \begin{bmatrix} -c \nabla \times \mathbf{H} \\ c \nabla \times \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c \nabla \times \\ c \nabla \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (16.5.9)$$

(входящие в это равенство величины как распределения вполне определены); затем возьмем

$$D(A) = \{u \in H: A_0 u \in H\}; \text{ для } u \in D(A) \quad Au = A_0 u. \quad (16.5.10)$$

Элемент Au всегда принадлежит H_0 , потому что дивергенция вихря равна нулю; таким образом, A переводит H_0 в себя. Мы получаем ограничение A на H_0 , которое также будет обозначаться через A и которое оказывается подходящим для рассматриваемой задачи с начальными данными. Далее будет доказана следующая теорема.

Теорема. A — симметрический оператор, который определен на H_0 . Резольвентное множество $\rho(A)$ содержит верхнюю и нижнюю полуплоскости; отсюда следует, что A самосопряжен и поэтому в силу теоремы Хилле — Йосиды рассматриваемая задача с начальными данными корректно поставлена.

Доказательства этих утверждений кажутся почти тривиальными после применения преобразования Фурье. Определим

$$\hat{E}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} E(x, t) e^{-ik \cdot x} d^3x$$

и аналогично $\hat{H}$. Отображение

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{H} \end{bmatrix}$$

является изоморфизмом H на гильбертово пространство $\hat{H}$, которое определяется так же, как и H , и лишь над E и H ставятся крышки. Подпространство H_0 отображается при этом на подпространство

$$\hat{H}_0 = \{\hat{u} \in \hat{H}: k \cdot \hat{E} = 0, k \cdot \hat{H} = 0\}. \quad (16.5.11)$$

$[\hat{H}_0]$ — ортогональное дополнение множества всех векторов вида

$$\begin{bmatrix} k\varphi \\ k\psi \end{bmatrix},$$

что является другим доказательством замкнутости H_0 и $\hat{H}_0$.] После преобразования Фурье оператор A задается равенством

$$\hat{A} \begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ck \times \hat{H} \\ ck \times \hat{E} \end{bmatrix}, \quad (16.5.12)$$

а его область определения состоит из всех тех векторов из $\hat{H}_0$, для которых правая часть (16.5.12) принадлежит $\hat{H}_0$. Из векторных тождеств

$$\begin{aligned} -u_1 \cdot (k \times v_2) &= -(u_1 \times k) \cdot v_2 = (k \times u_1) \cdot v_2, \\ u_2 \cdot (k \times v_1) &= (u_2 \times k) \cdot v_1 = -(k \times u_2) \cdot v_1 \end{aligned}$$

следует, что $\hat{A}$ симметричен, т. е. что

$$(u, \hat{A}v) = (\hat{A}u, v) \quad \forall u, v \in D(\hat{A}).$$

Чтобы исследовать резольвенту и резольвентное множество, возьмем произвольный элемент

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

пространства $\hat{H}_0$ ($\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$ — трехмерные векторные поля) и рассмотрим уравнение

$$(\hat{A} - \lambda) \hat{u} = \hat{v}, \quad (16.5.13)$$

где λ — произвольное невещественное число. Если это уравнение имеет единственное решение $\hat{u}$ для любого $\hat{v}$ и $\|\hat{u}\| \leq K \|\hat{v}\|$ для некоторого $K = K(\lambda)$, то λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(\hat{A}) = \rho(A)$, а $\hat{u} = \hat{R}_\lambda \hat{v}$, где $\hat{R}_\lambda$ — резольвента: $\hat{R}_\lambda = (\hat{A} - \lambda)^{-1}$. В развернутом виде (16.5.13) записывается так (крючки всюду опущены):

$$\begin{aligned} -ck \times u_2 - \lambda u_1 &= v_1, \\ ck \times u_1 - \lambda u_2 &= v_2. \end{aligned} \quad (16.5.14)$$

Эти линейные уравнения имеют единственное решение

$$u_1 = \frac{\lambda v_1 - ck \times v_2}{c^2 k^2 - \lambda^2}, \quad u_2 = \frac{\lambda v_2 + ck \times v_1}{c^2 k^2 - \lambda^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу (16.5.14) из равенств $k \cdot v_1 = k \cdot v_2 = 0$ следуют равенства $k \cdot u_1 = k \cdot u_2 = 0$. Знаменатель никогда не обращается в нуль, потому что $\text{Im } \lambda \neq 0$. Шесть компонент вектора u являются линейными комбинациями шести компонент вектора v с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями переменной k при любом невещественном λ . Теперь нетрудно показать, что существует такое $K = K(\lambda)$, что $\|u\| \leq K \|v\|$, т. е. $\lambda \in \rho(A)$, что и требовалось доказать.

16.6. ПОЛУГРУППЫ

Напомним, что если A — оператор в конечномерном пространстве (т. е. A соответствует квадратной матрице), то решением задачи с начальными данными является функция $u(t) = e^{tA} u(0)$, где для любой матрицы M экспоненциальная функция e^M определяется как степенной ряд. Если A неограничен, то в бесконечномерном случае функцию e^{tA} уже нельзя определить так просто; тем не менее мы сейчас покажем, что разрешающий оператор $E(t)$ обладает многими свойствами экспоненты e^{tA} .

Если $u(t)$ — любое строгое решение дифференциального уравнения (16.1.1), то функция $\tilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t+s)$, где s — неотрицательная постоянная, является строгим решением с начальным элементом $u(s)$, и поэтому $\tilde{u}(t) = E(t) u(s)$; однако $u(s) = E(s) u(0)$ и $u(t+s) = E(t+s) u(0)$, следовательно,

$$E(t+s) u(0) = E(t) E(s) u(0) \quad \forall u(0) \in U.$$

Так как U плотно в B , а операторы $E(t)$ ограничены, отсюда следует, что

$$E(t+s) = E(t) E(s) \quad (t, s \geq 0). \quad (16.6.1)$$

[Попутно эти рассуждения показывают, что U — не просто множество *начальных* данных строгих решений, а множество *всех* значений, допускаемых строгими решениями.]

Набор объектов $a, b, c, \dots$, для которых определена бинарная операция $a \circ b$ со свойствами ассоциативности и т. д., называется *полугруппой*; она отличается от группы только тем, что существование обратных элементов не предполагается. Набор операторов $\{E(t): t \geq 0\}$ является однопараметрической полугруппой операторов. Если задача с начальными данными обратима по времени, как задача о волновом движении, то набор $\{E(t): \text{все вещественные } t\}$ образует однопараметрическую *группу* линейных операторов. Для операторов операцией, записываемой как произведение в уравнении (16.6.1), является обычная композиция преобразований, поэтому для нее ассоциативность автоматически выполняется: $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$.

Полугруппа $\{E(t): t \geq 0\}$ разрешающих операторов корректно поставленной задачи с начальными данными обладает некоторыми особыми свойствами.

Во-первых, она коммутативна, так как из равенства (16.6.1) следует, что $E(t)E(s) = E(s)E(t)$.

Во-вторых, она имеет единичный элемент $E(0) = I$, потому что $E(0)u = u$ для всех u .

В-третьих, эта полугруппа сильно непрерывна. Пусть $u(t)$ — произвольное строгое решение дифференциального уравнения (16.1.1). Для любого $\varepsilon > 0$, согласно (16.1.4),

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| < \varepsilon,$$

если только Δt достаточно мало. Поэтому в силу неравенства треугольника

$$\|u(t + \Delta t) - u(t)\| \leq (\|Au(t)\| + \varepsilon) \Delta t,$$

т. е. $u(t + \Delta t) \rightarrow u(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ в смысле сходимости в B . Иначе говоря, для любого $u \in U$ $E(t + \Delta t)u \rightarrow E(t)u$. Так как U плотно в B , а операторы $E(t)$ ограничены, то доказательство того, что

$$E(t + \Delta t)u \rightarrow E(t)u \quad \text{для любого } u \in B \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0 \quad (t \geq 0), \quad (16.6.2)$$

является простым упражнением на использование неравенства треугольника. [Для $t = 0$ предполагается, что $\Delta t \rightarrow 0$ только по положительным значениям, поскольку $E(t)$, вообще говоря, не определены для $t < 0$.] Свойство (16.6.2) называется *сильной непрерывностью* семейства $E(t)$ операторов. Заметим, что эта полугруппа, вообще говоря, не является непрерывной по норме, т. е. $\|E(t + \Delta t) - E(t)\|$ обычно не стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$.

В-четвертых, $E(t)$ равномерно ограничена на любом конечном интервале: для заданного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная K , что $\|E(t)\| \leq K$ для всех $t \in [0, t_0]$, потому что $E_0(t)$ равномерно ограничены в силу (16.2.1), а $E(t)$ имеет ту же норму, что и $E_0(t)$, согласно теореме о расширении.

В общем случае разные операторы A_1 и A_2 могут порождать одну и ту же полугруппу $E(t)$ (например, A_2 может быть расширением A_1); в этом случае соответствующие задачи с начальными данными тождественны, за исключением чисто терминологического отличия, состоящего в том, что некоторые строгие решения одной задачи оказываются только обобщенными решениями другой.

В следующем параграфе будет показано, что любое семейство $E(t)$, обладающее этими свойствами, является разрешающим оператором некоторой корректно поставленной задачи с начальными данными.

Общую теорию полугрупп см. в книге Хилле и Филлипса [1957].

16.7. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим теперь обращение результата предыдущего параграфа. Взяв любую полугруппу $E(t)$ с описанными там свойствами, мы определим такой оператор A' , называемый *инфинитезимальным генератором* полугруппы $E(t)$, что задача с начальными данными

$$du(t)/dt = A'u(t), \quad u(0) \text{ задан}, \quad (16.7.1)$$

окажется корректно поставленной, а $E(t)$ будет ее разрешающим оператором. Оператор A' определяется как «производная» от $E(t)$ при $t=0$ в следующем смысле: область определения $D(A')$ определяется как множество всех $u \in B$, таких, что $(1/\Delta t)[E(\Delta t) - I]u$ имеет предел в B при $\Delta t \rightarrow 0$, само же значение $A'u$ определяется как этот предел, т. е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1/\Delta t)[E(\Delta t) - I]u = A'u. \quad (16.7.2)$$

Очевидно, что $D(A')$ — линейное подпространство в B и A' — линейный оператор.

Теорема 1. Если $E(t)$ обладает свойствами, описанными в предыдущем параграфе, т. е. если $E(t)$ является ограниченной сильно непрерывной коммутативной полугруппой с единицей $E(0) = I$, то задача с начальными данными (16.7.1) с оператором A' , определяемым формулой (16.7.2), корректно поставлена. Множество U' возможных начальных элементов $u(0)$ строгих решений совпадает с $D(A')$, а строгие решения имеют вид $u(t) = E(t)u(0)$. Кроме того, A' — замкнутый оператор.

Доказательство. (а) Пусть u_0 — любой элемент описанной выше области определения $D(A')$. Так как $E(t)$ ограничен и коммутирует с $E(\Delta t)$, величина

$$E(t)(1/\Delta t)[E(\Delta t - I)u_0] \quad \text{или} \quad (1/\Delta t)[E(\Delta t - I)E(t)u_0]$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к пределу, равному $E(t)A'u_0$. Поэтому $E(t)u_0 \in D(A')$, а $A'E(t)u_0 = E(t)A'u_0$, следовательно, функция $u(t) = E(t)u_0$ такова, что

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - A'u(t) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

т. е. является строгим решением задачи (16.7.1). (б) Чтобы показать, что это решение единственно, возьмем произвольное решение $u(t)$, таксе, что $u(0) = u_0$, а затем покажем, что $u(t) = E(t)u_0$. Покажем, что для любого $t > 0$ функция $g(s) = E(t-s)u(s)$, определенная для $s \in [0, t]$, постоянна, т. е. не зависит от s . Прежде всего

$$\left. \frac{d}{ds} g(s) \right|_{s=s_0} = \left. \frac{d}{ds} E(t-s)u(s_0) \right|_{s=s_0} + \left. \frac{d}{ds} E(t-s_0)u(s) \right|_{s=s_0}.$$

В правой части первое слагаемое равно

$$-\left. \frac{d}{dt} E(t-s)u(s_0) \right|_{s=s_0} = -A'E(t-s_0)u(s_0)$$

(потому что $E(t-s)u(s_0)$ удовлетворяет (16.7.1) согласно пункту (а)), а второе слагаемое равно

$$E(t-s_0) \left. \frac{d}{ds} u(s) \right|_{s=s_0} = E(t-s_0)A'u(s_0)$$

(потому что $E(\cdot)$ ограничен и предполагается, что $u(t)$ является решением задачи (16.7.1)). Как было указано выше, $E(\cdot)$ и A' на элементах $D(A')$ коммутируют, поэтому $dg(s)/ds = 0$, т. е. $g(s)$ — постоянная; следовательно, $g(t) = g(0)$, т. е. $u(t) = E(t)u(0)$, что и требовалось доказать. Теперь покажем, что инфинитезимальный генератор A' является замкнутым оператором. Если $w(s)$ — любое непрерывное однопараметрическое семейство элементов из B ,

то интеграл $\int_a^b w(s) ds$ определяется (он также является элементом B) как предел сумм Римана

$$\sum_j w(s'_j)(s_{j+1} - s_j),$$

где $\dots, s_j, s_{j+1}, \dots$ — разбиение интервала $[a, b]$, а $s'_j \in [s_j, s_{j+1}]$ для каждого j , т. е. точно так же, как и для обычной непрерывной функции. Доказательство того, что этот предел является единственным и что интеграл обладает всеми ожидаемыми свойствами, такими, как

$$\frac{d}{db} \int_a^b w(s) ds = w(b), \quad (16.7.3)$$

$$\left\| \int_a^b w(s) ds \right\| \leq \int_a^b \|w(s)\| ds. \quad (16.7.4)$$

оставляется читателю в качестве упражнения на использование неравенства треугольника.

Если $u_0 \in D(A')$ и $u(t) = E(t)u_0$ — соответствующее строгое решение, то ясно, что

$$u(t) - u_0 = \int_0^t A' u(s) ds, \quad (16.7.5)$$

т. е.

$$[E(t) - I] u_0 = \int_0^t A' E(s) u_0 ds. \quad (16.7.6)$$

[Замечание. Функция $A' u(s) = E(s) A' u_0$ непрерывна.] Предположим теперь, что $\{v_n\}$ — последовательность элементов из $D(A')$, таких, что $v_n \rightarrow u$ и $A' v_n \rightarrow w$. Нужно показать, что $u \in D(A')$ и $w = A' u$. Итак,

$$\begin{aligned} E(\delta) u - u &= \lim_{n \rightarrow \infty} [E(\delta) v_n - v_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta A' E(s) v_n ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta E(s) A' v_n ds = \int_0^\delta E(s) \lim_{n \rightarrow \infty} A' v_n ds. \end{aligned}$$

[Сходимость равномерна по s , потому что $E(s)$ равномерно ограничены по s .] Поэтому, поскольку $A' v_n \rightarrow w$,

$$\frac{E(\delta) u - u}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta E(s) w ds,$$

а это выражение при $\delta \rightarrow 0$ сходится к $E(0)w = w$ в силу непрерывности подынтегральной функции. Таким образом, из определений A' и $D(A')$, данных в начале параграфа, следует, что $u \in D(A')$ и $A' u = w$, т. е. A' — замкнутый оператор.

Если в качестве A взять оператор A' , то множество строгих решений задачи с начальными данными, у которой $E(t)$ — разрешающий оператор, становится наибольшим. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $u(t)$ — любое строгое решение корректно поставленной задачи с начальными данными (16.1.1), то $u(0) \in D(A')$, где A' — инфинитезимальный генератор разрешающего оператора $E(t)$, и, следовательно, $u(t)$ является строгим решением также и уравнения

$$du(t)/dt = A' u(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (16.1.4) с заменой A на A' следует из (16.7.2).

16.8. ТЕОРЕМА ХИЛЛЕ — ИОСИДЫ

В случае когда A — ограниченный оператор, разрешающий оператор $E(t)$ получается по формуле

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) (tA)^k; \quad (16.8.1)$$

этот ряд сходится по норме для всех t , т. е.

$$\left\| E(t) - \sum_{k=0}^n (1/k!) (tA)^k \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (16.8.2)$$

Если A неограничен, как в большинстве практических ситуаций, то ряд (16.8.1) может вообще не сходиться, а если это так, то это в лучшем случае приводит к некоторому ограничению $E(t)$ на достаточно малую область определения, такую, что все операторы A^k ($k = 1, 2, \dots$) на ней определены.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите (16.8.2) для ограниченного оператора и покажите, что

$$de^t A / dt = Ae^t A = e^t A A.$$

Часто нелегко решить, является ли вообще данный оператор инфинитезимальным генератором какой-либо полугруппы. Обычно это помогает сделать следующая теорема. (Напоминаем, что, согласно предыдущему параграфу, оператор A всегда можно считать замкнутым.)

Теорема (Хилле—Иосида). Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной в B областью определения. Если для всех $\lambda > \alpha$ оператор $(A - \lambda)^{-1}$ существует, ограничен и имеет плотную в B область определения и если

$$(\lambda - \alpha) \|(A - \lambda)^{-1}\| \leq 1 \quad \text{для всех } \lambda > \alpha \quad (16.8.3)$$

(т. е. если резольвента $R_\lambda(A)$ существует для $\lambda > \alpha$ и ее норма ограничена числом $1/(\lambda - \alpha)$), то A является инфинитезимальным генератором некоторой полугруппы $E(t)$, которая сильно непрерывна при $t \geq 0$ и такова, что $E(0) = I$ и $\|E(t)\| \leq e^{\alpha t}$ при $t \geq 0$.

Доказательство см. в книге Хилле и Филлипса [1957].

Если предположения теоремы выполняются, то ясно, что A определяет корректно поставленную задачу с начальными данными.

В следующем параграфе мы применим эту теорему к задаче о переносе нейтронов, а пока укажем два ее элементарных применения. (1) Если A ограничен, то $\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq (\lambda - \|A\|)^{-1}$ для всех $\lambda > \|A\|$; следовательно, задача с начальными данными корректно поставлена и $\|E(t)\| \leq \exp\{t\|A\|\}$ в соответствии с (16.8.1). (2) Пусть оператор H самосопряжен и $A = -iH$. Тогда $(A - \lambda)^{-1} = i(H - i\lambda)^{-1}$ и условия теоремы Хилле—Иосиды следуют из известных свойств самосопряженных операторов — см. § 8.3. В этом случае полугруппа $E(t)$ обычно обозначается через e^{-iHt} . Применения теоремы к операторам Шредингера были приведены в § 16.4.

16.9. ПЕРЕНОС НЕЙТРОНОВ В СЛОЕ.**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ — ИОСИДЫ**

В данном параграфе дается еще один пример вычисления резольвенты и ее использования. Рассмотрим перенос нейтронов в однородном слое материала, занимающего область $-a \leq x \leq a$, y, z произвольны. Предположим, что рассеяние является упругим и изотропным и что все нейтроны имеют одну и ту же скорость v . Пусть θ — угол между вектором скорости нейтронов и осью x , и пусть $\mu = \cos \theta$. Обозначим через $\Psi(x, \mu, t)$ плотность нейтронов (плотность числа частиц) в фазовом пространстве в точке x в направлении θ и в момент времени t ; предполагается, что эта плотность не зависит от y и z и от угла φ по азимуту вокруг оси x . Уравнением эволюции этой системы является так называемое уравнение переноса нейтронов

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma \right) \Psi(x, \mu, t) = \sigma \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu', t) d\mu' \quad (16.9.1)$$

(см. Рихтмайер и Мортон [1967]); здесь σ — полное ядерное сечение, отнесенное к единице объема ($1/\sigma$ является величиной среднего свободного пробега), c — среднее число частиц, появляющихся после столкновения ($c=1$ при чистом рассеянии, $c < 1$ для рассеяния с поглощением, $c > 1$ для размножающей среды).

Член $\sigma \Psi(x, \mu, t)$ в (16.9.1) можно исключить при помощи подстановки

$$\Psi(x, \mu, t) = \psi(x, \mu, t) e^{-t\sigma\mu}.$$

Если взять такие единицы длины и времени, что $\sigma = 1$, $v = 1$ (в этих единицах $2a$ равен толщине слоя в длинах среднего свободного пробега), то мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, \mu, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu, t) + \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu', t) d\mu'. \quad (16.9.2)$$

Это уравнение можно записать как

$$\partial \psi / \partial t = A \psi, \quad (16.9.3)$$

где A — интегродифференциальный оператор в правой части уравнения (16.9.2) с подходящей областью определения в подходящем банаховом пространстве.

В первоначальной постановке задачи предполагалось, что (16.9.2) выполняется только на интервале $-a \leq x \leq a$, а область определения оператора A ограничивается функциями, удовлетворяющими граничным условиям

$$\begin{aligned} \psi(a, \mu, t) &= 0 \quad \text{при } \mu < 0, \\ \psi(-a, \mu, t) &= 0 \quad \text{при } \mu > 0, \end{aligned}$$

которые утверждают, что извне нейтроны в слой не попадают. В более удобной формулировке задачи (К. О. Фридрихс, не опубликовано), принятой здесь, предполагается, что уравнение (16.9.2) выполняется для всех x , однако постоянная c заменяется функцией

$$c(x) = \begin{cases} c & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases} \quad (16.9.4)$$

Это эквивалентно предположению, что область вне слоя заполнена абсолютно поглощающей средой, имеющей то же полное ядерное сечение σ , что и слой. Для всех задач, в которых начальное распределение нейтронов $\psi(x, \mu, 0)$ не содержит нейтронов, попадающих в слой извне, т. е. равно нулю для $x\mu < 0$ и $|x| > a$, такая постановка задачи порождает в точности то же решение в слое, что и первоначальная, потому что любой нейтрон, вылетающий из слоя, обязательно поглотится при следующем столкновении и никогда не вернется в слой. При такой постановке не нужно никаких граничных условий.

Данный оператор A ни в каком подходящем гильбертовом пространстве не симметричен, поэтому при любом выборе области определения его нельзя сделать самосопряженным. Первый член в правой части (16.9.2) антисимметричен, а второй член симметричен; эти члены некоммутативны, следовательно, A нельзя сделать и нормальным оператором при любом выборе области определения. Спектр и другие свойства оператора A были исследованы Ленером и Уингом [1955, 1956] и Ленером [1962]. Точечный спектр этого оператора состоит из конечного числа положительных собственных значений, непрерывный спектр совпадает со всей мнимой осью, остальная же часть плоскости представляет собой резольвентное множество.

В этом параграфе оператор A будет рассматриваться в банаховом пространстве непрерывных функций с максимум-нормой, с которым легче работать, чем с гильбертовым пространством. Далее будет показано, что, когда область определения оператора A выбрана должным образом, условия теоремы Хилле—Иосиды выполняются, поэтому задача с начальными данными (16.9.3) корректно поставлена.

Пусть B — банахово пространство ограниченных непрерывных функций $f(x, \mu)$ (в общем случае комплекснозначных), определенных для всех вещественных x и всех $\mu \in [-1, 1]$, с нормой

$$\|f\| = \sup \{ |f(x, \mu)| : x \in \mathbb{R}, \mu \in [-1, 1] \}.$$

Область определения $D(A)$ оператора A состоит из всех таких $f \in B$, что $\partial f / \partial x \in B$; тогда

$$(Af)(x, \mu) = -\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^1 f(x, \mu') d\mu'. \quad (16.9.5)$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой Хилле—Иосиды, нужно показать, что A — замкнутый оператор, а его резольвента $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ существует и ее норма ограничена числом $(\lambda - \alpha)^{-1}$ для всех вещественных λ , больших некоторой постоянной α .

Доказательство замкнутости A основано на свойствах равномерной сходимости функций и предоставляется читателю в качестве упражнения (определение замкнутого оператора дано в § 7.6).

Для исследования резольвенты возьмем произвольный элемент g пространства B и произвольное комплексное число λ . Нужно решить уравнение

$$Af - \lambda f = g \quad (16.9.6)$$

относительно f , если это возможно, и найти постоянную $K = K(\lambda)$, такую, что $\|f\| \leq K\|g\|$ для всех $g \in B$. Оказывается, достаточно рассмотреть положительные значения λ . Чтобы решить уравнение (16.9.6), положим

$$\xi(x) = \int_{-1}^1 f(x, \mu) \mu; \quad (16.9.7)$$

тогда (16.9.6) примет вид

$$\left(\lambda + \mu \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, \mu) = \frac{g(x)}{2} \xi(x) - g(x, \mu). \quad (16.9.8)$$

Функция $\xi(x)$, конечно, неизвестна, однако для решения (16.9.6) мы сначала выразим решение $f(x, \mu)$ уравнения (16.9.8) через ξ и g . Если после этого $f(x, \mu)$ подставить в (16.9.7), то получится интегральное уравнение Фредгольма относительно $\xi(x)$. Решения (16.9.8) находятся элементарными методами и имеют следующий вид:

$$f(x, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^x e^{\lambda(x'-x)/\mu} \left[\frac{c(x')}{2} \xi(x') - g(x', \mu) \right] dx', & \mu > 0, \\ \frac{-1}{\mu} \int_x^{\infty} e^{\lambda(x'-x)/\mu} \left[\frac{c(x')}{2} \xi(x') - g(x', \mu) \right] dx', & \mu < 0. \end{cases} \quad (16.9.9)$$

Легко видеть, что $f(x, \mu)$ непрерывна как по μ , так и по x и что $f(x, 0)$ можно получить из любой строки формулы (16.9.9), устремив μ к нулю. Если в обоих интегралах выражения в квадратных скобках заменить их наибольшим значением $\frac{1}{2}c\|\xi\| + \|g\|$, то, очевидно,

$$\|f\| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{c}{2} \|\xi\| + \|g\| \right), \quad (16.9.10)$$

где под $\|\xi\|$ подразумевается $\sup |\xi(x)|$.

Теперь проинтегрируем найденную выше функцию $f(x, \mu)$ по μ от -1 до 1 , чтобы получить $\xi(x)$, согласно (16.9.7). В результате получим

$$\xi(x) = \frac{c}{2} \int_{-a}^a E(\lambda |x' - x|) \xi(x') dx' + G_\lambda(x), \quad (16.9.11)$$

где

$$G_\lambda(x) = \left[- \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \int_x^\infty dx' + \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_{-\infty}^x dx' \right] e^{\lambda(x'-x)/\mu} g(x', \mu), \quad (16.9.12)$$

а $E(\cdot)$ — интегральная показательная функция

$$E(z) = \int_z^\infty (e^{-w/w}) dw$$

(см. Абрамовиц и Стиган [1964]). Если в (16.9.12) заменить $g(x', \mu)$ на $\|g\|$, то интегрирование можно выполнить явно; оно дает $2/\lambda$, и поэтому

$$\|G_\lambda\| \leq (2/\lambda) \|g\|. \quad (16.9.13)$$

Уравнение (16.9.11) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма с симметрическим ядром Гильберта—Шмидта. Оно имеет единственное решение ξ для любого G_λ , если только $2/c$ не является собственным значением входящего в него интегрального оператора. Покажем теперь, что так оно и есть в данном случае, в частности если λ достаточно велико. Функция $E(|w|)$ имеет логарифмическую особенность при $w=0$ и экспоненциально стремится к нулю при $w \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл $\int_{-\infty}^\infty E(|w|) dw$ конечен; кроме того, E положительна, следовательно,

$$\int_{-a}^a E(\lambda |x' - x|) dx' < \text{const}/\lambda.$$

Поэтому норма первого слагаемого в правой части (16.9.11) может быть сделана меньше $1/2 \|\xi\|$ для всех λ , больших некоторого λ_0 , а в этом случае единственным решением однородного уравнения (где $G_\lambda=0$) является $\xi=0$, так что $2/c$ не может быть собственным значением. Вообще для $\lambda > \lambda_0$

$$\|\xi\| \leq 1/2 \|\xi\| + \|G_\lambda\|,$$

или

$$\|\xi\| \leq 2 \|G_\lambda\|. \quad (16.9.14)$$

Объединяя неравенства (16.9.10), (16.9.13) и (16.9.14), получаем

$$\|f\| \leq (1/\lambda)(2c/\lambda + 1) \|g\| \quad \text{для всех } \lambda > \lambda_0.$$

Поскольку $f = R_\lambda g$, мы имеем

$$\|R_\lambda\| \leq (1/\lambda)(2c/\lambda + 1),$$

а отсюда следует, что найдется такое число α , что

$$\|R_\lambda\| \leq 1/(\lambda - \alpha) \quad \text{для } \lambda > \alpha;$$

следовательно, здесь можно применить теорему Хилле — Йосиды и задача с начальными данными о переносе нейтронов в слое корректно поставлена.

16.10. НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу с начальными данными

$$du(t)/dt - Au(t) = g(t), \quad (16.10.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (16.10.2)$$

где A — замкнутый линейный оператор, для которого соответствующая однородная задача ($g(t) \equiv 0$) корректно поставлена, и где u_0 и $g(t)$ заданы; $g(t)$ — однопараметрическое семейство элементов банахова пространства B , иначе говоря, кривая в B .

Рассмотрим первый пример. Пусть одномерная задача теплопроводности из § 15.2 дополнена источником тепла, распределенным вдоль стержня. Тогда правая часть $g(t)$ уравнения (16.10.1) представляет собой функцию от x и t — плотность источника.

Второй пример на первый взгляд может показаться задачей совершенно иного типа. Пусть уравнение теплопроводности однородно, однако граничные условия нулевой температуры на концах стержня заменяются условием, по которому на каждом конце стержня температура является заданной функцией от t , скажем $h_a(t)$ при $x=a$ и $h_b(t)$ при $x=b$. При помощи стандартного приема эта задача сводится к задаче типа первого примера. А именно, пусть $w(x, t)$ — любая гладкая функция, такая, что $w(a, t) = h_a(t)$ и $w(b, t) = h_b(t)$; положим

$$g(x, t) = -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = -\frac{\partial w}{\partial t} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Тогда функция $u(x, t) = w(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям и неоднородному уравнению с частными производными. Такая редукция задачи существенна, если мы хотим рассматривать граничные условия как ограничения на область определения оператора A .

Часто член, представляющий источник, отражает взаимодействие между изучаемым процессом и некоторым другим процессом, одновременно происходящим в системе, как, например, в задаче совместного рассмотрения распространения звука и тепла,

обсуждаемой в книге Рихтмайера и Мортонa [1967], или в задачах электромагнетизма, где плотности заряда и токи служат источником электромагнитного поля и в свою очередь подвергаются влиянию этого поля. В таких случаях эти несколько процессов следует рассматривать как составляющие большей (часто нелинейной) задачи. Тем не менее иногда удобно иметь вычислительный алгоритм, доказательство существования решения и т. д. для одного процесса, в котором источники предполагаются заданными.

Задача называется *корректно поставленной*, если она имеет единственное решение при любом разумном выборе u_0 и $g(t)$ и если решение в некотором смысле непрерывно зависит от них. Для уточнения этого определения нам потребуется еще одно банахово пространство B_1 с нормой $\|\cdot\|_1$, элементами которого являются функции $\omega(t)$ со значениями в B , определенные на интервале $[0, t_0]$; мы полагаем

$$B_1(0, t_0) = \{\omega(\cdot) \text{ — любая кривая в } B: \omega(t) \text{ непрерывна на } [0, t_0]\},$$

$$\|\omega(\cdot)\|_1 = \max \{\|\omega(t)\|: t \in [0, t_0]\}.$$

Очевидно, что вследствие единственности решений однородной задачи любое решение неоднородной задачи также будет единственным. Действительно, разность двух решений для заданных u_0 и $g(\cdot)$ является решением однородной задачи с нулевыми начальными данными и поэтому должна быть равной нулю для всех t . Ниже мы покажем, что строгие решения существуют для множеств u_0 и $g(\cdot)$, плотных соответственно в B и B_1 ; в приведенной ниже формуле (16.10.3) строгое решение выражается в явном виде через разрешающий оператор однородной задачи. Таким образом, остается показать, что это решение непрерывно зависит от u_0 и $g(\cdot)$.

Пусть $\hat{u}_0$ и $\tilde{u}_0$ — два почти равных начальных элемента (почти тождественные начальные состояния физической системы), $\hat{g}(t)$ и $\tilde{g}(t)$ — две почти совпадающие кривые в B , а $\hat{u}(t)$ и $\tilde{u}(t)$ — получающиеся строгие решения задачи (16.10.1), (16.10.2); тогда указанная задача называется *корректно поставленной*, если $\|\tilde{u}(\cdot) - \hat{u}(\cdot)\|_1$ меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$ при условии, что $\|\tilde{u}_0 - \hat{u}_0\|$ и $\|\tilde{g}(\cdot) - \hat{g}(\cdot)\|_1$ меньше некоторого $\delta > 0$. Изменение начального элемента от $\hat{u}_0$ до $\tilde{u}_0$ меняет решение на величину $E(t)(\tilde{u}_0 - \hat{u}_0)$, о которой известно, что она мала, если мала величина $\|\tilde{u}_0 - \hat{u}_0\|$, потому что однородная задача корректно поставлена. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\tilde{u}_0 - \hat{u}_0 = 0$, предполагая изменение только $g(\cdot)$. Обозначая $\tilde{g}(\cdot) - \hat{g}(\cdot)$ просто через $g(\cdot)$, а $\tilde{u}(\cdot) - \hat{u}(\cdot)$ — просто через $u(\cdot)$, мы должны пока-

зять, что норма $\|u(\cdot)\|_1$ мала, если мала $\|g(\cdot)\|_1$ ($u(\cdot)$ — решение задачи (16.10.1) с $u(0)=0$). Отображение $F_0: g(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ (для $u(0)=0$) пространства B_1 на себя, определенное этим строгим решением, является линейным преобразованием пространства B_1 ; нужно показать, что F_0 имеет плотную область определения и ограничено. В целом это соответствует аналогичным рассуждениям для однородного случая, а обобщенные решения определяются путем расширения оператора F_0 до F с областью определения, совпадающей со всем B_1 .

Чисто формальные рассуждения показывают, что решением задачи (16.10.1), (16.10.2) должно быть

$$u(t) = E(t) u_0 + \int_0^t E(t-s) g(s) ds, \quad (16.10.3)$$

потому что тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= \frac{d}{dt} E(t) u_0 + E(0) g(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} E(t-s) g(s) ds = \\ &= AE(t) u_0 + g(t) + \int_0^t AE(t-s) g(s) ds = \\ &= A \left[E(t) u_0 + \int_0^t E(t-s) g(s) ds \right] + g(t) = \\ &= Au(t) + g(t) \end{aligned} \quad (16.10.4)$$

и, очевидно, $u(0) = u_0$. Здесь нужно обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла в первой строке (16.10.4) и возможность перестановки знаков оператора A и интеграла в третьей строке. Если u_0 — любой элемент множества U начальных элементов строгих решений однородной задачи, введенного в § 16.2, а $g(\cdot)$ — любой элемент некоторого множества $G \subset B_1$, то указанные действия обосновать можно, и поэтому $u(t)$ является строгим решением задачи (16.10.1), (16.10.2). Множество G задается так:

$$G = \{g(\cdot) \in B_1: g(t) \in D(A^2), \quad 0 \leq t \leq t_0; \\ g(t), Ag(t), A^2g(t) \text{ непрерывны на } [0, t_0]\}. \quad (16.10.5)$$

[Под непрерывностью здесь понимается сильная непрерывность, т. е. непрерывность в топологии B , например $\|g(t+\delta) - g(t)\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.] Мы покажем далее, что множество G плотно в B_1 .

Теперь мы докажем предыдущие утверждения.

Утверждение 1 (обоснование действий в первой строке (16.10.4)). При фиксированном t_0

$$\frac{d}{dt} \int_0^{t_0} E(t-s) g(s) ds = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} E(t-s) g(s) ds.$$

Для $g(\cdot) \in G$ все подынтегральные выражения в (16.10.3), (16.10.4) являются непрерывными функциями со значениями в B ; так же, как и в § 16.7, интегралы следует понимать как (сильные) пределы в B соответствующих сумм Римана. Как и в обычных интегралах, дифференцирование по параметру t под знаком интеграла допустимо, если отношение разностей сходится равномерно по s к производной, т. е. если

$$\left\| \frac{E(\delta) - I}{\delta} E(t-s) g(s) - A E(t-s) g(s) \right\| \rightarrow 0$$

равномерно по s ($0 \leq s \leq t$) при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку оператор $E(t-s)$ ограничен и коммутирует с A на любом элементе из $D(A)$, это требование сводится к тому, что

$$\left\| \frac{E(\delta) - I}{\delta} g(s) - A g(s) \right\| \rightarrow 0$$

равномерно по s ($0 \leq s \leq t$) при $\delta \rightarrow 0$. Согласно (16.7.6),

$$\frac{E(\delta) - I}{\delta} g(s) - A g(s) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta [A E(v) g(s) - A g(s)] dv;$$

поскольку в силу (16.10.5) $A g(s) \in D(A)$ для любого s , формулу (16.7.6) можно снова применить, на этот раз к подынтегральному выражению. В результате получаем, что

$$\frac{E(\delta) - I}{\delta} g(s) - A g(s) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left[\int_0^v A E(w) A g(s) dw \right] dv,$$

и поэтому

$$\left\| \frac{E(\delta) - I}{\delta} g(s) - A g(s) \right\| \leq \frac{1}{2} \delta \sup \|E(w) A^2 g(s)\|,$$

где супремум берется при $0 \leq w \leq t$, $0 \leq s \leq t$; этот супремум конечен, потому что функция $A^2 g(s)$ непрерывна, а оператор $E(w)$ равномерно ограничен. Это завершает обоснование действий в первой строке (16.10.4).

Утверждение 2 (обоснование действий в третьей строке (16.10.4)).

$$\int_0^t A h(s) ds = A \int_0^t h(s) ds,$$

где для данного t функция $h(s)$ является непрерывной функцией $E(t-s) g(s)$.

Здесь необходимо рассмотреть только аппроксимации интегралов суммами Римана. Ясно, что значение оператора A на сумме

Римана интеграла $\int_0^t h(s) ds$ равно сумме Римана интеграла

$\int_0^t Ah(s) ds$; поскольку A — замкнутый оператор, переход к пределу при приближении интегралов их суммами дает равенство

$$A \int_0^t h(s) ds = \int_0^t Ah(s) ds.$$

Это завершает доказательство того, что для любого $u_0 \in U$ и любого $g(\cdot) \in G$ формула (16.10.3) выражает строгое решение задачи с начальными данными (16.10.1), (16.10.2).

Утверждение 3. G плотно в B_1 . Чтобы показать это, нужно установить, что для инфинитезимального генератора A сильно непрерывной (для $t \geq 0$) полугруппы $E(t)$ область определения $D(A^k)$ плотна в B для $k=1, 2, \dots$. Доказательство этого см. у Хилле и Филлипса [1957, с.308] или у Рихтмайера и Мортонса [1967, с.52]. Именно, теперь $g(t)$ — любая непрерывная кривая в B , $0 \leq t \leq t_0$, иначе говоря, $g(\cdot)$ — элемент банахова пространства B_1 , определенного в начале этого параграфа. Разобьем интервал $[0, t_0]$ на N подынтервалов длины $\delta = t_0/N$ и аппроксимируем каждое $g(n\delta)$ элементом h_n из $D(A^2)$; затем при помощи линейной интерполяции определим функцию $h(t)$ по h_n , т. е. положим

$$h(t) = h_n + \frac{t - n\delta}{\delta} (h_{n+1} - h_n) \quad \text{для } n\delta \leq t \leq (n+1)\delta.$$

Ясно, что $h(t) \in D(A^2)$ для всех t , и ясно, что $h(t)$, $Ah(t)$ и $A^2h(t)$ непрерывны, т. е. $h(\cdot) \in G$. Если δ достаточно мало и достаточно малы $\|g(n\delta) - h_n\|$ для каждого n , то очевидно, что величина

$$\|g(\cdot) - h(\cdot)\|_1 = \sup \{\|g(t) - h(t)\| : t \in [0, t_0]\}$$

может быть сделана сколь угодно малой; иначе говоря, любой элемент $g(\cdot) \in B_1$ может быть аппроксимирован с любой точностью по норме B_1 элементами h из G , т. е. G плотно в B_1 .

Пусть, наконец, F_0 — линейное преобразование пространства B_1 , определяемое следующим образом:

$$D(F_0) = G,$$

$$F_0 g(\cdot) \rightarrow u(\cdot), \quad \text{где } u(t) = \int_0^t E(t-s) g(s) ds.$$

Очевидно, что оператор F_0 ограничен для $0 \leq t \leq t_0$ (и поэтому неоднородная задача корректно поставлена) и его ограниченное расширение F на все B_1 задается тем же самым интегралом. Тогда по аналогии с § 16.2 функцию $u(t)$, определяемую формулой (16.10.3), назовем *обобщенным решением* неоднородной задачи (16.10.1), (16.10.2) для любого $u_0 \in B$ и любого $g(\cdot) \in B_1$.

16.11. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ОПЕРАТОР A ЗАВИСИТ ОТ ВРЕМЕНИ

В большинстве практических задач зависимость A от t носит простой характер. Обычно выполняются следующие предположения:

1) область определения $D(A)$ не зависит от t ;
 2) для любого $v \in D(A)$ функция $A(t)v$ (сильно) непрерывна по t ;

3) для любого фиксированного s задача с начальными данными: $(d/dt)u(t) = A(s)u(t)$ ($t \geq 0$), $u(0)$ задано, корректно поставлена; обозначим ее решение через $u_s(t)$;

4) постоянная $K = K(t_0)$, входящая в неравенство $\|u_s(t)\| \leq K\|u_s(0)\|$, $0 \leq t \leq t_0$ (см. (16.2.1)), может быть выбрана не зависящей от s для любого интервала $0 \leq s \leq s_0$.

При этих предположениях предыдущую теорию можно обобщить очевидным образом. Тогда задача с начальными данными

$$du(t)/dt = A(t)u(t), \quad t \geq s, \quad u(s) = u_0 \text{ (задано)}, \quad (16.11.1)$$

корректно поставлена. Ее строгие решения определяются ограниченным плотно определенным оператором $E_0(t, s)$, так что $u(t) = E_0(t, s)u(s)$. Расширение $E(t, s)$ этого оператора на все B определяет обобщенные решения.

Операторы $E(t, s)$ не образуют полугруппу, однако они удовлетворяют тождеству

$$E(t_3, t_2)E(t_2, t_1) = E(t_3, t_1) \quad (t_3 \geq t_2 \geq t_1). \quad (16.11.2)$$

Для любого s оператор $A(s)$ можно считать инфинитезимальным генератором полугруппы, определяемой задачей с начальными данными для уравнения $(d/dt)u(t) = A(s)u(t)$ ($t \geq 0$); тогда

$$A(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [(E(t + \delta, t) - I)/\delta].$$

Если условия теоремы Хилле—Иосиды выполняются равномерно по t , т. е. если резольвента $R_\lambda(A(t))$ существует для любого $\lambda > \alpha$ и ее норма ограничена числом $(\lambda - \alpha)^{-1}$ для всех t , принадлежащих конечному интервалу $[0, t_0]$, то задача с начальными данными (16.11.1) корректно поставлена на $[0, t_0]$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ: ГИДРОДИНАМИКА

Связь между линейными и нелинейными эволюционными задачами; гидродинамика как пример такой связи; система законов сохранения; квазилинейные уравнения; слабые решения; скачки и условия на скачке; ударные волны; поверхности скольжения; контактные разрывы; условия Ренкина—Гюнио; условие энтропии; характеристики; гиперболические уравнения; характеристическая форма уравнений; инварианты Римана; теорема Коши—Ковалевской; начальная поверхность или начальные данные без характеристических точек; характеристическая плоскость; задача Римана; спонтанное образование ударных волн; неустойчивости Гельмгольца и Тейлора; кусочно аналитические задачи с начальными данными; маховское отражение; тройное пересечение ударных волн; течение в окрестности угловой точки; вычисление степенных рядов в задаче об отсоединенной ударной волне; алгебраические преобразования степенных рядов на ЭВМ; арифметика с подсчетом значащих цифр; аналитическое продолжение на ЭВМ.

Предварительные сведения: основы гидродинамики.

Нелинейные задачи с начальными данными в основном еще не изучены. Все линейные задачи из предыдущих глав в общем являются частными случаями нелинейных задач или превращаются в нелинейные, если учитываются все взаимосвязи. Акустика переходит в гидродинамику, если считать амплитуды колебаний конечными; уравнения Максвелла и уравнение Дирака при совместном их рассмотрении представляют нелинейную систему (см. работу Гросса [1966]). Новые феномены, возникающие из-за нелинейности, многочисленны и разнообразны; некоторые из них будут описаны в этой главе в связи с задачами гидродинамики. Основной вывод состоит в том, что нужно стремиться некоторым образом сформулировать результат в терминах кусочно аналитических функций. При этом весьма вероятно, что детали такой формулировки останутся неясными до тех пор, пока не будет проделана достаточно большая теоретическая работа.

Нелинейным стационарным задачам присущи также многочисленные дополнительные особенности, такие, как бифуркация и уединенные волны, но они не затрагиваются в этой книге. Не затрагиваются также конвекция и турбулентность, выделяющиеся из задач с начальными данными по той причине, что непредсказуемость деталей является их существенной чертой. Не вполне детерминированный характер имеют задачи метеорологии. В них случайные явления вместе с неадекватным знанием начальных данных увеличивают масштабы неопределенности, но можно использовать новые данные наблюдений, поступающие с течением времени.

Возникающие из-за нелинейности феномены столь многочисленны и разнообразны, что невозможно познакомиться со всеми ними при изучении какого-либо одного предмета, например, гидродинамики. Однако некоторые из них находят достаточно широкие приложения, в особенности теория характеристик, развитие скачков и других особенностей точных решений и теорема Коши—Ковалевской—все это важно, например, в общей теории относительности. Задача Коши для предложенных Эйнштейном уравнений поля будет обсуждаться во втором томе.

Весьма вероятно, что нелинейные эффекты окажутся важными и в других областях, например в квантовой теории поля при изучении взаимодействия частиц. Вряд ли можно предсказать, с какого рода феноменами еще придется столкнуться.

17.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Уравнение звуковых волн

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \nabla^2 u,$$

где u — отклонение $p - p_0$ от статического давления p_0 , отражает следующие три допущения, сделанные при идеализации физической реальности:

- 1) однородность и изотропность статического состояния,
- 2) инфинитезимальную малость акустического возмущения: $u \ll p_0$,
- 3) инфинитезимальную малость среднего свободного пробега молекул газа по сравнению с линейным масштабом возмущения, равным $(|\nabla p|/p)^{-1}$.

Если мы отбросим два первых допущения, но оставим третье, то придем к гидродинамике, которую можно рассматривать как нелинейное обобщение волнового движения. Ей и посвящена эта глава.

Как было указано в § 15.4, одномерное волновое уравнение имеет решения вида $u(x, t) = f(x \pm ct)$. Если носитель f ограничен, то такое решение представляет собой волновой пакет, движущийся с постоянной скоростью $\pm c$ и без изменения амплитуды, т. е. размера и формы. Для более общих линейных уравнений с постоянными коэффициентами, таких, как уравнения упругих колебаний однородной среды или уравнение Шредингера для свободной частицы, волновой пакет, вообще говоря, изменяется по мере своего движения благодаря явлениям рассеяния и затухания (или роста). Для линейных уравнений с переменными коэффициентами движение оказывается еще более сложным, но в частном случае гиперболических систем (см. § 17.8 ниже) может иметь место распространение без рассеяния или затухания, и происходит оно вдоль так называемых характеристик,

которые аналогичны траекториям $x = \text{const} \pm ct$ в одномерном случае и движущимся волновым фронтам при большей размерности.

Уравнения гидродинамики нелинейны, но если мы наложим малое возмущение на заданное гладкое решение, то это возмущение будет удовлетворять линейной гиперболической системе уравнений, получающейся путем линеаризации уравнений гидродинамики относительно этого решения. Изучение характеристик играет ведущую роль в анализе гидродинамических задач.

В нелинейных задачах встречается ряд новых явлений, таких, как ударные волны и контактные разрывы, которые могут быть представлены при помощи так называемых слабых решений уравнений. Для изучения этих решений необходимо записать уравнения в форме соответствующих законов сохранения. В общем случае может быть несколько таких консервативных форм: гладкие решения у них одинаковы, а слабые различны, и выбор той или иной из них основывается на физических соображениях.

17.2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим одномерное движение идеальной (невязкой) жидкости, происходящее при таких условиях, что теплопроводностью можно пренебречь. Жидкость можно представлять себе движущейся в длинной трубе с поперечным сечением единичной площади без трения о стенки. Пусть ρ , u , p , $\mathcal{E}$ — плотность, скорость, давление и внутренняя энергия на единицу массы жидкости — являются функциями x и t , где x — декартова координата вдоль трубы, а t — время. В качестве дополнительных зависимых переменных удобно ввести импульс и (полную) энергию на единицу объема, а именно $m = m(x, t) = \rho u$ и $e = e(x, t) = \rho \mathcal{E} + \frac{1}{2} \rho u^2$. Пусть траектории двух частиц жидкости заданы уравнениями $x = a = a(t)$ и $x = b = b(t)$, где $a(t) < b(t)$. Рассмотрим часть жидкости, заключенную между этими траекториями. Ее полная масса, полный импульс и полная энергия соответственно равны

$$M = \int_a^b \rho dx, \quad P = \int_a^b m dx, \quad E = \int_a^b e dx. \quad (17.2.1)$$

Согласно основным физическим законам $\dot{M} = 0$ (здесь точка обозначает d/dt), $\dot{P}$ равна сумме сил, действующих на эту часть жидкости, а $\dot{E}$ равна скорости, с которой эти силы совершают работу. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 0, & \dot{P} &= -p(b, t) + p(a, t), \\ \dot{E} &= -p(b, t)u(b, t) + p(a, t)u(a, t). \end{aligned} \quad (17.2.2)$$

Каждое из этих уравнений можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx + g(x, t) \Big|_{x=a(t)}^{x=b(t)} = 0,$$

или же в виде

$$\int_a^b (\partial f / \partial t) dx + (uf + g) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0,$$

так как $\dot{a} = u(a, t)$ и $\dot{b} = u(b, t)$, или, наконец, в виде

$$\int_a^b [\partial f / \partial t + \partial (uf + g) / \partial x] dx = 0;$$

если при этом предположить дифференцируемость функции $uf + g$. Это верно для каждого интервала (a, b) , и поэтому для f и g из C^1 отсюда следует, что выражение в квадратных скобках тождественно обращается в нуль. Таким образом мы приходим к уравнениям с частными производными для гидродинамики, если выражения для f и g соответствуют (17.2.1) и (17.2.2). Положим

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ (e + p)m/\rho \end{pmatrix}. \quad (17.2.3)$$

Тогда получающиеся уравнения можно сокращенно записать так:

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x = 0.$$

Пока у нас неизвестных функций (это ρ , m , e и p) больше, чем уравнений. Но, согласно законам термодинамики, существует функциональная связь между p , ρ и $\mathcal{E}$, называемая *уравнением состояния* вещества. Если она записана в виде $p = f(\mathcal{E}, \rho)$ (для идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\mathcal{E}$, $\gamma = \text{const}$), то в переменных, введенных в (17.2.3), она выглядит так:

$$p = f((1/\rho)(e - \frac{1}{2}m^2/\rho), \rho). \quad (17.2.4)$$

Если символ p в (17.2.3) понимается как сокращенное обозначение для этого выражения, то каждая компонента вектора $\mathbf{F}$ будет функцией компонент вектора $\mathbf{U}$, т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$, и поэтому

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x = 0. \quad (17.2.5)$$

Система уравнений этого общего вида при любом числе зависимых и независимых переменных называется *системой законов сохранения* (см. работы Лакса [1954, 1957]). Для течения жидкости в плоскости x, y вектор импульса имеет две компоненты m и n , а уравнения в форме законов сохранения имеют вид

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x + \partial \mathbf{G}(\mathbf{U}) / \partial y = 0, \quad (17.2.6)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ mn/\rho \\ (e+p)m/\rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} n \\ mn/\rho \\ n^2/\rho + p \\ (e+p)n/\rho \end{bmatrix}. \quad (17.2.7)$$

Уравнения (17.2.5) могут быть также представлены различными способами в виде системы квазилинейных уравнений, например, как

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + u\partial/\partial x) \rho &= -\rho \partial u/\partial x, \\ \rho (\partial/\partial t + u\partial/\partial x) u &= -\partial p/\partial x, \\ \rho (\partial/\partial t + u\partial/\partial x) \mathcal{E} &= -\rho \partial u/\partial x, \end{aligned} \quad (17.2.8)$$

где снова $p = f(\mathcal{E}, \rho)$. Система уравнений называется *квазилинейной*, если она линейна относительно частных производных высшего порядка (в данном случае первого порядка) с коэффициентами, являющимися функциями недифференцированных величин и их низших производных (здесь — только самих величин $u, \rho, p, \mathcal{E}$).

Теперь покажем, как можно получить другую систему законов сохранения. Пусть $T = T(x, t)$ и $S = S(x, t)$ — абсолютная температура и удельная (на единицу массы) энтропия жидкости. Согласно законам термодинамики, S и T также являются функциями $\mathcal{E}$ и ρ , причем

$$d\mathcal{E} + p d(1/\rho) = T dS. \quad (17.2.9)$$

Объединяя первое и третье из уравнений (17.2.8), можно получить, что

$$(\partial/\partial t + u\partial/\partial x) \mathcal{E} + p (\partial/\partial t + u\partial/\partial x) (1/\rho) = 0.$$

Используя теперь (17.2.9), будем иметь

$$(\partial/\partial t + u\partial/\partial x) S = 0,$$

откуда следует, что вдоль траекторий частиц энтропия постоянна. Далее, это уравнение можно объединить с первым из уравнений (17.2.8), что дает

$$\partial(\rho S)/\partial t + \partial(\rho u S)/\partial x = 0. \quad (17.2.10)$$

Это новая форма третьего уравнения консервативной системы. Если ρS обозначить через $s = s(x, t)$ (это энтропия на единицу объема) и зависимость между $s, \mathcal{E}$ и ρ записать в виде $s = f_1(\mathcal{E}, \rho)$, то

$$s = f_1((1/\rho)(e - \frac{1}{2}m^2/\rho), \rho).$$

Поэтому если вместо (17.2.3) мы возьмем

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ s \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ ms/\rho \end{bmatrix}, \quad (17.2.11)$$

то получим новую систему законов сохранения.

Пока течение остается гладким, т.е. пока p , u , ρ и т.д. как функции от x и t принадлежат C^1 , система (17.2.8) и обе системы законов сохранения, основанные на (17.2.3) и (17.2.11), эквивалентны. Однако реальные течения не всегда гладки, и даже в гладком в начальный момент течения со временем могут возникнуть ударные волны и другие особенности. Течения с особенностями описываются слабыми решениями дифференциальных уравнений; такие решения обсуждаются в следующем параграфе. В классе слабых решений эти три системы дифференциальных уравнений уже неэквивалентны, и правильная форма должна определяться из физических соображений. Как мы увидим, правильные слабые решения дает только консервативная система, основанная на (17.2.3), потому что сохранение массы, импульса и энергии — это основные физические законы (при наличии ударных волн энтропия не сохраняется, а возрастает).

Для гладких решений каждую из консервативных систем можно представить в квазилинейной форме, для чего сначала определяется матрица $A = A(U)$ с элементами

$$A_{jk} = \partial F_j(U) / \partial U_k; \quad (17.2.12)$$

тогда система

$$\partial U / \partial t + A(U) \partial U / \partial x = 0 \quad (17.2.13)$$

будет квазилинейной.

17.3. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Сначала рассмотрим случай одной пространственной[†] переменной. Интегрирование системы (17.2.2) по t от t_1 до t_2 дает

$$M(t_2) - M(t_1) = 0,$$

$$P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [-p(b, t) + p(a, t)] dt, \quad (17.3.1)$$

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [-p(b, t)u(b, t) + p(a, t)u(a, t)] dt,$$

где, как и в (17.2.2), $a = a(t)$ и $b = b(t)$. Эти уравнения являются *фундаментальным* выражением физических законов сохранения массы, импульса и энергии для жидкости, поскольку они не требуют дифференцируемости входящих в них функций. Они связывают значения массы, импульса и энергии рассматриваемой части жидкости в момент t_2 со значениями тех же самых величин в момент времени t_1 . Однако если компоненты $\mathbf{U}(x, t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))$ рассматриваются как распределения на плоскости x, t , то система (17.3.1) в точности эквивалентна консервативной системе (17.2.5), если производные понимаются в смысле теории распределений. Если $\mathbf{W}(x, t)$ — векторнозначная пробная функция с тем же числом компонент, что и $\mathbf{U}$, то, согласно определению производной от распределения, (17.2.5) означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial \mathbf{W} / \partial t) \cdot \mathbf{U} + (\partial \mathbf{W} / \partial x) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U})] dx dt = 0. \quad (17.3.2)$$

Любая функция $\mathbf{U}(x, t)$, которая удовлетворяет этому уравнению для всех таких векторных пробных функций $\mathbf{W}(x, t)$, называется *слабым решением* консервативной системы (17.2.5).

17.4. УСЛОВИЯ НА СКАЧКЕ

Слабое решение в общем случае кусочно гладко. Гладкие части удовлетворяют дифференциальным уравнениям в любой из форм, но этого в общем случае недостаточно для определения характера движения, исходя из начальных данных, и дифференциальные уравнения должны быть дополнены условиями на скачке в местах разрыва.

Предположим, что слабое решение $\mathbf{U}(x, t)$ имеет разрыв в плоскости x, t вдоль кривой $\mathcal{C}$: $x = x(t)$, но дифференцируемо в некоторой окрестности $\mathcal{N}$ кривой $\mathcal{C}$; функция $x(t)$ предполагается дифференцируемой. Пусть $\mathbf{W}(x, t)$ — пробная функция, носитель которой принадлежит $\mathcal{N}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ часть носителя $\mathbf{W}(x, t)$, лежащую по одну сторону (например, слева) от $\mathcal{C}$ (см. рис. 17.1). Так как $\mathbf{W} = 0$ на границе $\mathcal{R}$ всюду, за исключением отрезка кривой $\mathcal{C}$, то по теореме Гаусса

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \cdot \mathbf{F} \right) dx dt + \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{W} dx dt = \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F}) \right] dx dt = \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left[-\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} \right] ds, \end{aligned}$$

где взяты левые предельные значения U и $F(U)$ на $\mathcal{C}$, а $(1+\dot{x}^2)^{-1/2}$ и $-\dot{x}(1+\dot{x}^2)^{-1/2}$ — компоненты единичного вектора нормали к $\mathcal{C}$ в системе координат x, t . Второй интеграл в левой части равен нулю, потому что (17.2.5) выполняется (в строгом

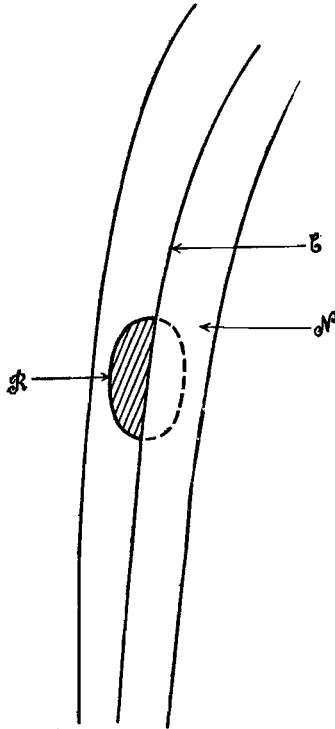


Рис. 17.1. Диаграмма к условиям на скачке.

смысле) внутри $\mathcal{R}$. Поэтому если мы выполним аналогичное интегрирование по правой части носителя $\mathcal{W}$ и сложим оба результата, а затем используем (17.3.2), то получим, что

$$0 = \int_{\mathcal{C}} (\dot{x}[U] - [F]) \cdot \frac{\mathbf{W}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} ds,$$

где $[]$ обозначает разность между двумя предельными значениями функции на двух сторонах кривой $\mathcal{C}$, т.е. скачок этой функции (скажем, при переходе слева направо). Разность, а не сумма получается потому, что направление единичного вектора нормали меняется на противоположное, когда теорема Гаусса применяется для второй части носителя $\mathcal{W}$. В силу произвольности $\mathbf{W}$ из

последнего уравнения вытекает следующее условие на скачке:

$$\dot{x}[\mathbf{U}] - [\mathbf{F}(\mathbf{U})] = 0 \quad \text{на } \mathcal{E}. \quad (17.4.1)$$

Обобщение на случай более чем одной пространственной переменной получается непосредственно. Функция $\mathbf{U}(x, y, t)$ является слабым решением уравнения (17.2.6), если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \int \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U}) \right] dx dy dt = 0 \quad (17.4.2)$$

для любой векторной пробной функции $\mathbf{W}(x, y, t)$. Чтобы найти обобщение условия (17.4.1), напомним, что $-\dot{x}$ и x были компонентами перпендикулярного к $\mathcal{E}$ вектора в системе координат x, y, t . Поэтому если $\mathbf{U}(x, y, t)$ — слабое решение уравнения (17.2.6), гладкость которого нарушается только разрывом первого рода вдоль поверхности $\mathcal{S}$ в трехмерном пространстве с координатами x, y, t , а $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_t)$ — перпендикулярный к $\mathcal{S}$ вектор, то вместо (17.4.1) для $\mathbf{U}$ получится условие

$$\lambda_t[\mathbf{U}] + \lambda_x[\mathbf{F}(\mathbf{U})] + \lambda_y[\mathbf{G}(\mathbf{U})] = 0 \quad \text{на } \mathcal{S}. \quad (17.4.3)$$

17.5. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ПОВЕРХНОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Для гидродинамики в случае одной пространственной переменной, когда $\mathbf{U}$ и $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ заданы в виде (17.2.3), условия на скачке можно интерпретировать следующим образом. Первая компонента векторного уравнения (17.4.1) такова:

$$\dot{x}[\rho] = [m] = [\rho u]. \quad (17.5.1)$$

Если предельные значения слева и справа от кривой $\mathcal{E}$ отметить индексами 1 и 2 соответственно, то это уравнение можно переписать в виде

$$(u_1 - \dot{x})\rho_1 = (u_2 - \dot{x})\rho_2.$$

Так как $u_1 - \dot{x}$ и $u_2 - \dot{x}$ являются относительными скоростями жидкости относительно местоположения разрыва с обеих его сторон, то общее значение обеих частей последнего равенства представляет собой массу M жидкости, которая протекает через единицу площади разрыва за единицу времени:

$$M = (u_1 - \dot{x})\rho_1 = (u_2 - \dot{x})\rho_2; \quad (17.5.2)$$

M положительна, если жидкость движется через разрыв вправо. Теперь запишем две другие компоненты векторного уравнения (17.4.1):

$$Mu_2 - Mu_1 = p_1 - p_2, \quad (17.5.3)$$

$$M(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{2}u_2^2 - \mathcal{E}_1 - \frac{1}{2}u_1^2) = p_1u_1 - p_2u_2. \quad (17.5.4)$$

Эти уравнения показывают, что скорость изменения импульса при прохождении жидкости через разрыв равна разности сил давления по обе стороны от разрыва, а скорость изменения полной энергии (т.е. суммы внутренней и кинетической энергий) равна скорости, с которой эти силы совершают работу.

Для дву- или трехмерных течений скорость жидкости представляется вектором $\mathbf{u}$. Из-за увеличения размерности уравнения (17.5.2) — (17.5.4) изменяются незначительно; в частности, (17.5.3) заменяется векторным уравнением. Предположим, что p , ρ и $\mathbf{u}$ имеют разрывы первого рода на поверхности $\mathcal{S}$ и что P — точка $\mathcal{S}$, а $\mathbf{U}$ — скорость поверхности относительно той системы координат, в которой записаны уравнения, измеряемая по нормали к поверхности в точке P . Иначе говоря, будем считать, что $\boldsymbol{\lambda}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке P , направленный в область с индексом 2; тогда если провести через P прямую в направлении $\boldsymbol{\lambda}$, то $\mathbf{U}$ будет скоростью движения точки пересечения поверхности с этой прямой. Так как $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}$ представляет собой ортогональную проекцию скорости жидкости на это направление, то вместо уравнения (17.5.2) будем иметь

$$M = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_1 - U) \rho_1 = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_2 - U) \rho_2. \quad (17.5.5)$$

Скорость изменения импульса равна $M(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$, а сила равна $\boldsymbol{\lambda}(p_1 - p_2)$, и поэтому уравнения (17.5.3) и (17.5.4) заменяются уравнениями

$$M(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \boldsymbol{\lambda}(p_1 - p_2), \quad (17.5.6)$$

$$M(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2^2 - \mathcal{E}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1^2) = \rho_1 \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_2. \quad (17.5.7)$$

Уравнение (17.5.6) эквивалентно двум уравнениям:

$$M(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_2 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_1) = p_1 - p_2, \quad (17.5.8)$$

$$M(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u}_2 - \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u}_1) = 0. \quad (17.5.9)$$

Из уравнения (17.5.9) видно, что существуют две основные возможности: либо тангенциальная компонента скорости, равная $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u}$, непрерывна при переходе через $\mathcal{S}$, либо $M = 0$. В первом случае $\mathcal{S}$ представляет собой *ударную волну* или *фронт ударной волны*; во втором случае — это *поверхность скольжения*, при переходе через которую давление p и нормальная компонента скорости остаются непрерывными ($\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}_2 = U$), тогда как плотность ρ и тангенциальная компонента $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u}$ скорости могут иметь произвольные скачки. Если же $M = 0$ и функция $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u}$ непрерывна, то поверхность является *контактным разрывом*, когда разрывны только плотность и температура и нет относительного движения.

Для случая ударной волны приведенные выше условия на скачке можно записать в терминах удельного объема $V = 1/\rho$ в

следующей (одной из возможных) форме:

$$(1/V_1)(\lambda \cdot \mathbf{u}_1 - U) = (1/V_2)(\lambda \cdot \mathbf{u}_2 - U) = \sqrt{(p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)}, \quad (17.5.10)$$

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 1/2 (p_1 + p_2) (V_1 - V_2), \quad (17.5.11)$$

$$\lambda \times (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0. \quad (17.5.12)$$

В таком виде они известны как условия *Ренкина—Гюгоньо*. Более общие условия (17.4.1) или (17.4.3) часто также называются условиями Ренкина—Гюгоньо в обобщенном смысле. Положительное значение квадратного корня в (17.5.10) соответствует случаю $M > 0$ (ударной волне, движущейся относительно жидкости в сторону области с индексом 1); отрицательное значение квадратного корня соответствует случаю $M < 0$.

17.6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ

Если $M > 0$, то индекс 2 указывает жидкость, которая пройдена фронтом ударной волны (или находится за ним). Поэтому в данном случае можно ожидать, что $p_2 > p_1$ и $V_2 > V_1$, как и наблюдается в экспериментах. Однако уравнения (17.5.10) — (17.5.12) остаются верными, если индексы 1 и 2 поменять местами (согласно (17.5.5), это не меняет массу M) и поэтому существуют также решения, для которых $p_2 < p_1$ и $V_2 > V_1$ ¹⁾. Такие решения называются *ударными волнами разрежения*. Как будет сейчас показано, их можно исключить из рассмотрения, проанализировав энтропию, устойчивость или же механизмы диссипации.

Чтобы исследовать энтропию, сначала рассмотрим случай идеального газа; тогда²⁾

$$\mathcal{E} = pV/(\gamma - 1), \quad T \propto pV, \quad S \propto \ln(pV^\gamma). \quad (17.6.1)$$

В общем случае, когда $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p, V)$, уравнение (17.5.11), записанное в виде

$$\mathcal{E}(p_2, V_2) - \mathcal{E}(p_1, V_1) = 1/2 (p_1 + p_2) (V_1 - V_2),$$

устанавливает связь между p_1, V_1 и p_2, V_2 : для заданных p_1, V_1 существует однопараметрическое семейство возможных конечных состояний, каждое из которых представляется точкой (p_2, V_2) на плоскости p, V ; геометрическим местом этих точек является так называемая *кривая Гюгоньо*. Для заданных p_1, V_1 положим

$$\pi = p_2/p_1, \quad \eta = V_1/V_2 = p_2/p_1;$$

¹⁾ Если при этом движение фронта волны по-прежнему происходит в сторону области с индексом 1. — *Прим. перев.*

²⁾ Символ $\propto$ означает функциональную зависимость, т. е. равенство с точностью до постоянного множителя или слагаемого. — *Прим. перев.*

здесь π и η — коэффициент давления и коэффициент сжатия ударной волны соответственно. В случае идеального газа нетрудно проверить, что кривая Гюгонио описывается уравнением

$$\pi = (\theta\eta - 1)/(\theta - \eta) \quad (\theta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)). \quad (17.6.2)$$

Так как π и η по определению положительны, они меняются в интервалах $0 < \pi < \infty$ и $1/\theta < \eta < \theta$. Ударные волны сжатия и разрежения получаются при $\eta > 1$ и $\eta < 1$ соответственно. Бесконечно сильная ударная волна (при $\pi \rightarrow \infty$) сжимает жидкость только в конечное число раз $\theta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ (при этом температура $T_2 \rightarrow \infty$). На кривой Гюгонио энтропия как функция от η выражается формулой

$$S \propto \ln p + \gamma \ln V,$$

а изменение энтропии, вызываемое ударной волной, составляет

$$\begin{aligned} \Delta S = S_2 - S_1 &\propto \ln \pi - \gamma \ln \eta = \\ &= \ln [(\theta\eta - 1)/(\theta - \eta)] - \gamma \ln \eta. \end{aligned}$$

Производная функции ΔS по η вдоль кривой Гюгонио равна

$$\frac{d}{d\eta} \Delta S = \frac{\theta}{\theta\eta - 1} + \frac{1}{\theta - \eta} - \frac{\gamma}{\eta} = \frac{\gamma\theta(\eta - 1)^2}{(\theta\eta - 1)(\theta - \eta)\eta}.$$

Эта величина положительна на всей кривой (ибо $1/\theta < \eta < \theta$), кроме точки $\eta = 1$, где она обращается в нуль; следовательно, $\Delta S > 0$ при $\eta > 1$ и $\Delta S < 0$ при $\eta < 1$. Ударные волны могут существовать в системе, в которой все другие процессы изэнтропичны. Следовательно, случай $\Delta S < 0$ может быть исключен из рассмотрения, и из второго закона термодинамики вытекает, что ударные волны разрежения в природе не встречаются¹⁾. Вывод о том, что ΔS — это возрастающая функция η вдоль кривой Гюгонио (за исключением точки $\eta = 1$), имеет место для общего уравнения состояния при весьма широких предположениях (см. книгу Куранта и Фридрихса [1948, § 65]).

На невозможность существования ударных волн разрежения указывают и следующие соображения относительно их устойчивости. Рассмотрим две ударные волны, следующие одна за другой. Для простоты предположим, что это плоские параллельные волны стационарной формы, движущиеся относительно жидкости в одном и том же направлении. Из уравнений Ренкина — Гюгонио нетрудно получить, что если это ударные волны сжатия, то задняя дви-

¹⁾ Хотя возможность существования ударной волны разрежения при некоторых весьма специфических условиях теоретически предсказывалась уже довольно давно, экспериментаторам удалось подтвердить это лишь в последнее время (см. работу Борисова и др. [1980]). — *Прим. перев.*

жется быстрее передней, так что они через короткое время сливаются в одну ударную волну, тогда как ударные волны разрежения с течением времени все больше и больше удаляются бы друг от друга. Благодаря отсутствию в природе абсолютной точности ударную волну одинаково хорошо можно представлять себе либо как одиночный разрыв конечной величины, либо в виде последовательности многих малых разрывов с малыми расстояниями между ними. Если такая последовательность состоит из ударных волн сжатия, то они быстро сливаются, формируя крутой общий профиль, тогда как ударные волны разрежения стремились бы разойтись в стороны, формируя при этом профиль плавного перехода.

Благодаря молекулярной природе жидкости в ней неизбежны такие диссипативные процессы, как теплопроводность и вязкость. Очевидно, что переход давления, плотности и температуры от их начальных значений к конечным не может происходить мгновенно, а должен осуществляться в слое, толщина которого сравнима со средним свободным пробегом молекул жидкости. Даже если эта толщина составляет несколько таких пробегов, градиент температуры оказывается достаточным для того, чтобы вызвать заметное перетекание тепла от нагретого участка к холодному, а возникающие в жидкости сдвиги достаточны для появления заметных сил вязкости (напомним, что плоское сжатие в одном направлении вызывает сдвиги; это можно установить, рассматривая прямые, образующие углы 45° с направлением сжатия¹⁾).

Чтобы получить качественную оценку этих процессов, можно использовать описывающие их классические уравнения, несмотря на то, что эти уравнения точны только тогда, когда температура и плотность очень мало изменяются на расстоянии, сравнимом с длиной свободного пробега. В работе Беккера [1922] (см. также книгу Рихтмайера и Мортонa [1967, § 12.10]) классические члены, представляющие перетекание тепла и силы вязкости, включены в уравнения гидродинамики для случая одной пространственной переменной x . При этом ищется такое решение, для которого u , p , ρ , $\mathcal{E}$ зависят от x и t только через комбинацию $w = x - Ut$ (U — константа) и достигают предельных значений u_1 , p_1 , ρ_1 , $\mathcal{E}_1$ и u_2 , p_2 , ρ_2 , $\mathcal{E}_2$ при $w \rightarrow -\infty$ и $w \rightarrow \infty$ соответственно с непрерывным, но достаточно быстрым переходом от одной совокупности значений к другой на достаточно малом интервале по w . Оказывается, что предельные значения точно удовлетворяют условиям на скачке (17.5.2) — (17.5.4) при $\dot{x} = U$. (Этого следовало ожидать, потому что условия на скачке зависят только от сохранения в целом массы, импульса и энергии, а диссипативные эффекты

¹⁾ См., например, книгу Зельдовича и Райзера [1966, с. 576]. — *Прим. перев.*

исчезают в пределе при $\omega \rightarrow \pm \infty$.) Однако решение такого вида существует только для ударных волн сжатия, т.е. при $u_1, u_2 > U$ только для $\rho_2 > \rho_1$ (при этом $\rho_2 > \rho_1$, $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, $u_2 < u_1$). Следовательно, не существует бегущего решения стационарной формы, соответствующего ударной волне разрежения. Ясно, что если ударная волна разрежения с произвольным профилем начнет движение в момент $t=0$, то со временем ее профиль будет неограниченно расплываться и никогда не станет стационарным.

17.7. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Звуковые волны—это колебания с малой амплитудой и малой длиной волны, накладываемые в качестве возмущений на гладкое течение жидкости. Если $U^0 = U^0(x, t)$ —гладкое решение консервативной системы (17.2.5) и $U^0 + \varepsilon U^1$ —другое такое решение, где ε —малая величина, а U^1 представляет звуковую волну, то

$$\partial(U^0 + \varepsilon U^1)/\partial t + \partial F(U^0 + \varepsilon U^1)/\partial x = 0.$$

Следовательно, с точностью до первого порядка по ε

$$\partial U^1/\partial t + \partial(A(U^0)U^1)/\partial x = 0,$$

где матрица A определена в (17.2.12). Предположение о малости длины звуковой волны означает, что U^0 должно очень мало меняться на длине волны для U^1 , т.е. что величиной $\partial U^0/\partial x$ можно пренебречь по сравнению с $\partial U^1/\partial x$, и поэтому

$$\partial U^1/\partial t + A(U^0)\partial U^1/\partial x = 0. \quad (17.7.1)$$

Для данного гладкого течения $U^0(x, t)$ (17.7.1) представляет собой линейное уравнение относительно $U^1(x, t)$, отличающееся от (17.2.13) только тем, что оно линеаризовано путем замены в матрице коэффициентов A неизвестной функции $U(x, t)$ известной функцией $U^0(x, t)$.

В элементарной теории звуковых волн предполагается, что решение уравнения (17.7.1) должно представлять волны, распространяющиеся по жидкости в обе стороны. Если матрица коэффициентов постоянна и может быть диагонализирована при помощи преобразования $A \rightarrow TAT^{-1} = D$, а произведение TU^1 обозначено через V^1 , то уравнение (17.7.1) принимает вид

$$\partial V^1/\partial t + D \partial V^1/\partial x = 0. \quad (17.7.2)$$

Уравнения этой системы будут взаимно независимы, а j -е уравнение запишется как

$$\partial V_j^1/\partial t + \lambda_j \partial V_j^1/\partial x = [\partial/\partial t + \lambda_j \partial/\partial x] V_j^1 = 0, \quad (17.7.3)$$

где λ_j есть j -е собственное значение матрицы A . Для вещественного λ_j решение этого уравнения будет представлять волну, распространяющуюся со скоростью λ_j .

Так как на самом деле матрица коэффициентов в (17.7.1) не является постоянной, матрицы T и D зависят от U^0 , и поэтому вместо (17.7.2) будем иметь

$$T \partial U^1 / \partial t + T A \partial U^1 / \partial x = 0,$$

т. е. ¹⁾

$$T \partial U^1 / \partial t + D T \partial U^1 / \partial x = 0. \quad (17.7.4)$$

Следовательно, вместо (17.7.3) получится уравнение

$$\sum_{k=1}^l T_{jk}(U^0) [\partial / \partial t + \lambda_j(U^0) \partial / \partial x] U_k^1 = 0 \quad (j=1, \dots, l), \quad (17.7.5)$$

где l — число уравнений в системе (для гидродинамики в одномерном случае $l=3$). Теперь решение представляет волны, распространяющиеся в среде с переменными свойствами, а уравнения системы взаимосвязаны, потому что матрица T в (17.7.5) не перестановочна с дифференциальным оператором.

17.8. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Напомним, что матрица A может быть приведена к диагональной форме с помощью преобразования подобия $A \rightarrow T A T^{-1} = D$ тогда и только тогда, когда она имеет полную систему собственных векторов. При этом столбцы матрицы T^{-1} образуют полную систему правосторонних собственных векторов, а строки матрицы T образуют полную систему левосторонних собственных векторов. Система

$$\partial U / \partial t + A \partial U / \partial x = 0$$

уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы A вещественны, а система ее собственных векторов полна. Линейная система

$$\partial U / \partial t + A(x, t) \partial U / \partial x = 0$$

с переменными коэффициентами называется *гиперболической в области $\mathcal{R}$* плоскости x, t , если в каждой точке области $\mathcal{R}$ все собственные значения матрицы $A(x, t)$ вещественны, а система ее собственных векторов полна. Гиперболичность нелинейной системы зависит не только от уравнений, но также и от решения. Если $U(x, t)$ есть решение системы

$$\partial U / \partial t + A(U) \partial U / \partial x = 0, \quad (17.8.1)$$

¹⁾ Если матрица $A(U^0)$ диагонализируема при всех значениях решения U^0 . — Прим. перев.

то эта система будет *гиперболической* в области $\mathcal{R}$ для решения $\mathbf{U}(x, t)$, если матрица $A(\mathbf{U}(x, t))$ обладает указанными выше свойствами, т. е. если линеаризованная система, которая получается при линеаризации системы (17.8.1) относительно решения $\mathbf{U}(x, t)$, является гиперболической в области $\mathcal{R}$.

На зависимость $A(\mathbf{U})$ от $\mathbf{U}$ или $A(\mathbf{U}(x, t))$ от x и t часто накладывают ограничения. Например, считают, что эти функции удовлетворяют условию Липшица, а чтобы избежать плохой обусловленности матриц, требуют ограниченности величины $\|T\| \|T^{-1}\|$ в области $\mathcal{R}$, где $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы, а T — матрица преобразования, которое приводит A к диагональному виду: $TAT^{-1} = D$.

Если матрица T умножается непосредственно на систему (17.8.1), а не на ее линеаризованную форму, то получается система

$$\sum_{k=1}^l T_{jk}(\mathbf{U}) (\partial/\partial t + \lambda_j(\mathbf{U}) \partial/\partial x) U_k = 0 \quad (j=1, \dots, l) \quad (17.8.2)$$

(сравните ее с (17.7.5)). Это *характеристическая форма* системы (17.8.1). Система является гиперболической тогда и только тогда, когда она может быть преобразована в систему уравнений с вещественными коэффициентами, имеющую характеристическую форму.

Если система является гиперболической, то для каждого $j=1, \dots, l$ существует однопараметрическое семейство кривых $x(t)$ на плоскости x, t , которые удовлетворяют уравнению $dx/dt = \lambda_j$, т. е. уравнению

$$dx(t)/dt = \lambda_j(\mathbf{U}(x(t), t)). \quad (17.8.3)$$

Такие кривые называются *характеристиками* решения $\mathbf{U}(x, t)$. Это пути распространения (в смысле геометрической акустики) звуковых волн, наложенных на решение $\mathbf{U}(x, t)$. Существенной чертой характеристической формы (17.8.2) является то, что в данной точке с координатами x, t все величины в j -м уравнении дифференцируются в одном и том же направлении в плоскости x, t , а именно в направлении j -й характеристики, проходящей через эту точку.

17.9. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Уравнения одномерной гидродинамики проще всего представить в характеристической форме, выбрав в качестве зависимых переменных плотность ρ , скорость u и удельную энтропию S . Если уравнение состояния записано в виде

$$\rho = \rho(S, p),$$

а $c=c(S, \rho)$ определяется формулой

$$c^2 = \partial p(S, \rho) / \partial \rho, \quad (17.9.1)$$

то уравнения § 17.2 принимают вид

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + u \partial/\partial x) \rho + \rho \partial u/\partial x &= 0, \\ (\partial/\partial t + u \partial/\partial x) u + (1/\rho) (c^2 \partial \rho/\partial x + (\partial p/\partial S) (\partial S/\partial x)) &= 0, \\ (\partial/\partial t + u \partial/\partial x) S &= 0; \end{aligned}$$

тогда

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2/\rho & u(1/\rho) & \partial p(S, \rho)/\partial S \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad (17.9.2)$$

а собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda I) = [(u - \lambda)^2 - c^2](u - \lambda) = 0$$

и равны $u \pm c$ и u . Характеристики — это траектории распространяющихся вперед и назад звуковых сигналов и частиц жидкости.

Теперь нетрудно записать уравнения в характеристической форме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho + \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \right) u &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho - \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) u &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) S &= 0. \end{aligned} \quad (17.9.3)$$

Важным частным случаем является тот, в котором в некоторый начальный момент времени $t=0$ энтропия постоянна, т. е. $S(x, 0)$ не зависит от x . Тогда третье из уравнений (17.9.3) показывает, что S будет оставаться постоянной все время (точнее, до появления ударных волн), а это означает изэнтропичность течения. Отсюда следует, что p и c зависят только от ρ , и поэтому временно их можно обозначить через $p(\rho)$ и $c(\rho)$. Определим еще одну термодинамическую величину, а именно

$$\sigma(\rho) = \int [1/(\rho c(\rho))] d\rho(\rho);$$

тогда первые два из уравнений (17.9.3) после деления на ρc дадут

$$[\partial/\partial t + (u \pm c) \partial/\partial x](\sigma \pm u) = 0. \quad (17.9.4)$$

Величины $\sigma \pm u$, которые называются *инвариантами Римана*, постоянны вдоль опережающих и запаздывающих характеристик.

На уравнениях (17.9.4) основаны различные аналитические численные методы расчета одномерных изэнтропических течений. Один такой пример, в котором рассматривается спонтанное образование ударных волн, приводится ниже в § 17.14.

В (17.9.4) c и σ являются функциями ρ , и поэтому в качестве зависимых переменных могут быть взяты $u(x, t)$ и $\rho(x, t)$. В некоторых случаях ρ можно исключить из $c(\rho)$ и $\sigma(\rho)$ (например, для идеального газа

$$\sigma = 2c/(\gamma - 1)), \quad (17.9.5)$$

и тогда в качестве зависимых переменных можно взять $u(x, t)$ и $c(x, t)$.

17.10. ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАДАЧАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Для нелинейных уравнений с частными производными, которые возникают в физических приложениях, теория задач с начальными данными состоит из двух частей. Начальные данные и решения в общем случае являются кусочно гладкими, и поэтому одна часть теории посвящена гладким фрагментам решений, а в другой ее части рассматриваются скачки и прочие особенности. Если решение гладко в области пространства x, t , то его эволюция определяется дифференциальными уравнениями. Если в такой области все зависимые величины известны в некоторый момент времени t_0 , то можно надеяться определить их там в ближайшие последующие моменты $t_0 + \varepsilon$, решая локальную задачу с начальными данными для дифференциальных уравнений. Такие локальные задачи с начальными данными рассматриваются в теореме Коши—Ковалевской, которая будет приведена ниже (см. § 17.14).

Сначала напомним, что уравнение с частными производными, имеющее порядок выше первого, всегда можно свести к системе более низкого порядка за счет введения новых неизвестных. Например, уравнение

$$f(u, \partial u/\partial t, \partial^2 u/\partial t^2, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial x \partial t) = 0$$

можно переписать в виде системы

$$\begin{aligned} f(u, v, \partial v/\partial t, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \partial v/\partial x) &= 0, \\ \partial u/\partial t &= v, \end{aligned}$$

которая имеет первый порядок по t .

Поэтому естественно рассмотреть систему уравнений

$$\partial u_i/\partial t = f_i \quad (i = 1, \dots, l), \quad (17.10.1)$$

где для каждого i функция f_i зависит от неизвестных $u_1, \dots, u_l$ и их производных по пространственным переменным

$x, y, \dots$. Однако эта система слишком специфична в одном отношении: мы придем к ней только тогда, когда исходные уравнения (каковы бы они ни были) могут быть разрешены относительно всех первых производных $\partial u_i / \partial t$ по t . Но это не всегда так.

Чтобы дать в дальнейшем физическую интерпретацию условия разрешимости относительно производных по времени, рассмотрим линейный случай для двух независимых переменных. Если считать неизвестные $u_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, l$) компонентами вектора $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ и предположить, что исходная система полностью сводится к системе первого порядка как по x , так и по t , то последняя запишется в виде

$$A \partial \mathbf{U} / \partial t + B \partial \mathbf{U} / \partial x + C \mathbf{U} = 0, \quad (17.10.2)$$

где A, B и C суть $(l \times l)$ -матрицы, элементы которых являются гладкими функциями от x и t . Заметим, что отсюда не следует равенство порядков по t и x для исходного уравнения. Например, уравнение теплопроводности $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ можно представить в виде (17.10.2), если ввести новую функцию $v = \partial u / \partial x$ и положить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (17.10.3)$$

Рассмотрим теперь задачу Коши, или задачу только с начальными данными, определяемую уравнениями (17.10.2) совместно с начальным условием $\mathbf{U}(x, 0)$, заданным для всех x . Если $\det A \neq 0$ в некоторой области $\mathcal{R}$ плоскости x, t , содержащей ось x (или в более общем случае часть оси x), то систему (17.10.2) можно разрешить, выразив $\partial \mathbf{U} / \partial t$ через заданную функцию $\mathbf{U}(x, 0)$ на оси x в области $\mathcal{R}$. После этого дифференцирование (17.10.2) по t дает уравнение для определения $\partial^2 \mathbf{U} / \partial t^2$ на оси x через функции $\mathbf{U}$ и $\partial \mathbf{U} / \partial t$ (теперь уже известные) и т. д. Поэтому если функция $\mathbf{U}(x, 0)$ бесконечно дифференцируема по x , то определены все производные $\partial^k \mathbf{U} / \partial t^k$, и их можно использовать для построения степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) t^k \partial^k \mathbf{U} / \partial t^k |_{x, 0}. \quad (17.10.4)$$

Можно доказать (это частный случай теоремы Коши—Ковалевской), что если $\mathbf{U}(x, 0)$ — аналитическая функция, а матрицы A, B и C — аналитические функции по x и t , то ряд (17.10.4) сходится для t из некоторого интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где ε может зависеть от x , и сумма этого ряда как функция от x и t удовлетворяет уравнению (17.10.2). Следовательно, решение задачи с начальными данными получается в некоторой окрестности оси x в области $\mathcal{R}$.

Ситуация будет совсем иной, если $\det A = 0$ на оси x в области $\mathcal{R}$. Пусть в этом случае $V = V(x)$ — левосторонний собственный вектор матрицы A , соответствующий нулевому собственному значению. Умножая (17.10.2) слева на V^T , мы увидим, что начальная функция $U(x, 0)$ должна в таком случае удовлетворять условию

$$(V^T B \partial/\partial x + V^T C) U(x, 0) = 0 \quad (17.10.5)$$

для каждого такого левостороннего собственного вектора V , но это означает, что задача с начальными данными теперь не имеет решения. Далее, если начальная функция все же удовлетворяет этому условию, то описанный выше метод степенных рядов становится вообще непригодным для построения решения, потому что производные $\partial U/\partial t$, $\partial^2 U/\partial t^2$ и т. д. уже не определяются однозначно на оси x при помощи уравнения (17.10.2): например, к любому значению функции $\partial U/\partial t$, получающемуся из (17.10.2), можно добавить произвольное кратное правостороннего собственного вектора матрицы A , соответствующего нулевому собственному значению.

Таким образом, задача с начальными данными локально имеет единственное решение, если $\det A \neq 0$ в области $\mathcal{R}$. Если же это не так, то решения в общем случае не существует, а если оно все-таки существует, то оно всегда будет неединственным. Интерпретация и обобщение этого результата будут даны в следующем параграфе.

Задача [теплопроводности, сформулированная выше в терминах двух функций u и v (это отнюдь не лучшая ее формулировка), дает пример того, что $\det A = 0$ (согласно (17.10.3)). У этой задачи нет решения, если начальные значения u и v не удовлетворяют условию $v = du/dx$ на оси x , а если это условие выполнено, то решение задачи не является единственным, потому что к v можно добавить произвольную функцию от t .

17.11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ВОДЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теперь сформулируем выводы предыдущего параграфа в терминах характеристик. Если, как и в § 17.8, существует линейная комбинация уравнений системы (17.10.2), в которой все величины дифференцируются по одному и тому же направлению в плоскости x, t , то говорят, что получившееся уравнение (эта линейная комбинация) имеет *характеристическую форму*. Это тот случай, когда существует такой вектор $W = W(x, t)$, что векторы $W^T A$ и $W^T B$ пропорциональны, т. е.

$$\lambda W^T A = \mu W^T B$$

при некоторых $\lambda = \lambda(x, t)$ и $\mu = \mu(x, t)$, не обращающихся одновременно в нуль. Тогда нужная линейная комбинация получается умножением (17.10.2) на $\mathbf{W}^T$ слева. Предположим сначала, что один из векторов $\mathbf{W}^T A$ и $\mathbf{W}^T B$ не является тождественным нулем и поэтому отличен от нуля в некоторой области $\mathcal{R}$ плоскости x, t . Тогда интересующая нас линейная комбинация может быть представлена в $\mathcal{R}$ как

$$\mathbf{W}^T A (\mu \partial/\partial t + \lambda \partial/\partial x) \mathbf{U} + \mu \mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0,$$

если $\mathbf{W}^T A \neq 0$, и как

$$\mathbf{W}^T B (\mu \partial/\partial t + \lambda \partial/\partial x) \mathbf{U} + \lambda \mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0,$$

если $\mathbf{W}^T B \neq 0$. Если кривая $\mathcal{C}: x = x(s), t = t(s)$ в $\mathcal{R}$ определяется уравнениями

$$\dot{x} = \lambda(x, t), \quad \dot{t} = t(x, t), \quad (17.11.1)$$

где точка означает дифференцирование по параметру s , то в обоих случаях $\mathcal{C}$ является *характеристикой* или *характеристической кривой*, а линейная комбинация принимает вид

$$\mathbf{Y}^T \partial \mathbf{U} / \partial t + \mathbf{X}^T \mathbf{U} = 0 \quad \text{на } \mathcal{C}. \quad (17.11.2)$$

По своему характеру это обыкновенное дифференциальное уравнение. Если на $\mathcal{C}$ известны $n-1$ компонент вектора $\mathbf{U}$, а n -я его компонента известна в одной точке кривой $\mathcal{C}$, то во всех других точках кривой эту компоненту можно найти интегрированием уравнения (17.11.2). Иначе говоря, *информация о решении распространяется вдоль характеристик*. Теперь рассмотрим тот случай, когда оба вектора $\mathbf{W}^T A$ и $\mathbf{W}^T B$ равны нулю в области $\mathcal{R}$, а $\mathbf{W}^T C$ в нуль не обращается. Тогда в силу (17.10.2) $\mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0$ в $\mathcal{R}$, и поэтому компоненты вектора $\mathbf{U}$ снова оказываются взаимосвязанными на кривой $\mathcal{C}$. Наконец, если $\mathbf{W}^T A, \mathbf{W}^T B, \mathbf{W}^T C$ все равны нулю в области $\mathcal{R}$, то уравнения системы (17.10.2) не являются независимыми в $\mathcal{R}$, т. е. уравнений оказывается меньше, чем неизвестных, и поэтому решение локальной задачи с начальными данными становится неединственным.

Характеристическая кривая $\mathcal{C}$ параллельна оси x , если на $\mathcal{C}$ $\dot{t} = 0$, или $\mu = 0$, или же $\mathbf{W}^T A = 0$. Поэтому предыдущий результат относительно задачи с начальными данными, определяемой уравнением (17.10.2) и заданной в качестве начального условия функцией $\mathbf{U}(x, 0)$, может быть сформулирован следующим образом. Эта задача имеет единственное решение в некоторой окрестности оси x при произвольной начальной функции $\mathbf{U}(x, 0)$ тогда и только тогда, когда ось x не является характеристикой. Если же ось x является характеристикой, то некоторая информация, содержащаяся в функции $\mathbf{U}(x, 0)$, просто распространяется вдоль оси x (что налагает некоторое ограничение на

начальную функцию $U(x, 0)$ вместо того, чтобы распространяться в область $t > 0$ и тем самым участвовать в определении решения при $t > 0$.

В более общем случае начальные данные могут быть заданы вдоль кривой $\mathcal{C}$: $x = x(s)$, $t = t(s)$, т. е. $U(x(s), t(s))$ задается как функция параметра s . Тогда для произвольной аналитической начальной функции $U(x(s), t(s))$ существует единственное аналитическое решение уравнения (17.10.2) в некоторой окрестности кривой $\mathcal{C}$, если $\mathcal{C}$ нигде не является характеристикой, т. е. нигде не касается характеристик уравнения (17.10.2). [При этом предполагается, что $\mathcal{C}$ является аналитической кривой, т. е. $x(s)$ и $t(s)$ — аналитические функции, так что могут быть использованы разложения в степенные ряды.] Такая формулировка результата оказывается подходящей, например, для задач теории относительности, в которых временная переменная t уже не выделяется в физическом смысле. В специальной теории относительности $\mathcal{C}$ может быть любой пространственно-подобной прямой в плоскости x, t или, в более общем случае, пространственно-подобной гиперплоскостью в пространстве-времени, а в общей теории относительности она может быть любой пространственно-подобной *гиперповерхностью*. Задача Коши для уравнений поля гравитации будет обсуждаться во втором томе.

17.12. ХАРАКТЕРИСТИКИ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРЕМА КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ

Случай трех или более независимых переменных рассматривается аналогично. Вместо (17.10.2) возьмем систему

$$A\partial U/\partial t + B\partial U/\partial x + C\partial U/\partial y + DU = 0, \quad (17.12.1)$$

в которой матрицы A , B , C и D являются гладкими функциями от x , y и t . Пусть $\mathcal{S}$ — гладкая поверхность, заданная параметрически (параметры α и β):

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad t = t(\alpha, \beta),$$

а начальное условие имеет вид

$$U(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta)) = \\ = \text{заданная на } \mathcal{S} \text{ гладкая функция от } \alpha \text{ и } \beta. \quad (17.12.2)$$

По аналогии с предыдущим параграфом поверхность $\mathcal{S}$ называется *характеристической*, если она ориентирована так, что дифференциальные уравнения накладывают ограничения на начальную функцию (17.12.2) на $\mathcal{S}$. Поэтому будем искать такую линейную комбинацию уравнений системы (17.12.1), в которой все неизвестные (компоненты вектора U) дифференцируются по

направлениям, лежащим в некоторой плоскости. Если поверхность $\mathcal{S}$ касается этой плоскости в некоторой точке P , то в P линейная комбинация может быть выражена через производные по α и β , и поэтому полученное дифференциальное уравнение (эта линейная комбинация) накладывает ограничения на начальную функцию (17.12.2) в точке P . При таких обстоятельствах эта плоскость является *характеристической плоскостью* в точке P , а P — *характеристической точкой* поверхности $\mathcal{S}$. Если все точки поверхности $\mathcal{S}$ характеристические, то она представляет собой *характеристическую поверхность* рассматриваемой системы уравнений.

Предположим, что нужная нам линейная комбинация получается умножением (17.12.1) слева на вектор $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y, t)$. В этой линейной комбинации неизвестная функция U_i дифференцируется по направлению (в пространстве x, y, t), направляющие косинусы которого пропорциональны величинам

$$(\mathbf{W}^T \mathbf{A})_i, \quad (\mathbf{W}^T \mathbf{B})_i, \quad (\mathbf{W}^T \mathbf{C})_i.$$

Поэтому если λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали к $\mathcal{S}$ в точке P , то P будет характеристической точкой поверхности $\mathcal{S}$ при выполнении условия

$$\lambda \mathbf{W}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{W}^T \mathbf{B} + \nu \mathbf{W}^T \mathbf{C} = 0. \quad (17.12.3)$$

Это означает, что $\mathbf{W}$ должен быть левосторонним собственным вектором матрицы $\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}$, соответствующим нулевому собственному значению; условие же существования нулевого собственного значения имеет вид

$$\det (\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}) = 0. \quad (17.12.4)$$

Три неизвестные λ, μ, ν должны удовлетворять также условию $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, так что для них получилось всего два уравнения. Поэтому в общем случае можно ожидать существования одного или более однопараметрических семейств решений. Если эти решения вещественны, то существуют соответствующие однопараметрические семейства характеристических плоскостей. Для рассматриваемых ниже (см. упражнение 3) уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных имеются два таких семейства: одно состоит из всех плоскостей, касательных к траектории частицы в пространстве x, y, t , а второе — из всех плоскостей, касательных к звуковому конусу. Конечно, гидродинамика нелинейна (см. следующий абзац). Но для нее ни одна поверхность (плоскость) $t = \text{const}$ не может быть характеристической, так как при совпадении одной из характеристических плоскостей с плоскостью $t = \text{const}$ возникала бы бесконечная скорость распространения сигнала, тогда как в гидродинамике при любом выборе начальных данных скорость жидкости и ско-

рость звука конечны, а максимальная скорость распространения сигнала равна их сумме. Это также следует из того факта, что матрица A в уравнении (17.12.1) равна I для случая гидродинамики.

Предположим теперь, что матрицы коэффициентов A , B , C и D в уравнении (17.12.1) зависят не только от x , y и t , но и от компонент вектора U . (Именно так обстоит дело в гидродинамике — см. § 17.2.) Тогда уравнения (17.12.1) называются *квазилинейными*. Определения и выводы остаются теми же самыми, что и для линейного случая, но точка зрения несколько изменяется: для данной системы уравнений поверхность $\mathcal{S}$ может быть характеристической или не быть ею в зависимости от начальных функций, заданных на $\mathcal{S}$, т. е. от компонент векторного поля (17.12.2) на $\mathcal{S}$, поскольку A , B и C зависят от U . Часто это формулируется в виде указания на то, являются или не являются заданные начальные функции характеристическими относительно заданной поверхности $\mathcal{S}$.

Задача Коши (задача определения $U(x, y, t)$ по данным Коши (17.12.2) при помощи дифференциального уравнения (17.12.1)) называется аналитической, если поверхность $\mathcal{S}$ и все рассматриваемые функции являются аналитическими. Чтобы поверхность $\mathcal{S}$ была аналитической, функции $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ и $t(\alpha, \beta)$ должны быть аналитическими, а ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

должен быть равен 2 всюду на $\mathcal{S}$. [Чтобы убедиться, что это последнее условие в действительности необходимо, заметим, что уравнения $x(\alpha, \beta) = \alpha^3$, $y(\alpha, \beta) = \beta$, $t(\alpha, \beta) = \alpha^2$ определяют поверхность, которая имеет точки возврата на оси y , где ранг этой матрицы равен только 1.]

Теперь сформулируем без доказательства один из вариантов теоремы Коши — Ковалевской для случая трех независимых переменных x , y , t . Обобщение на случай большего числа независимых переменных будет очевидным.

Теорема. Предположим, что аналитические данные Коши (17.12.2) заданы на аналитической поверхности $\mathcal{S}$ и не являются характеристическими относительно $\mathcal{S}$ в некоторой принадлежащей $\mathcal{S}$ двумерной окрестности точки P . Предположим также, что матрицы A , B и C в (17.12.1) являются аналитическими функциями от x , y , t и компонент вектора U . Тогда найдется такая трехмерная окрестность точки P , в которой задача Коши имеет единственное решение.

В наиболее распространенном случае в качестве $\mathcal{S}$ берется плоскость x, y ($t=0$), и условия теоремы удовлетворяются во всех ее точках. Тогда если K — любая компактная область в этой плоскости, то найдется такой интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$, что задача имеет единственное решение для всех $(x, y) \in K$ и всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите характеристики уравнения теплопроводности, если оно записано в виде системы (17.10.2), (17.10.3). Выше утверждалось, что если A — вырожденная матрица (т. е. $\det A = 0$), то метод степенных рядов вообще неприменим, поскольку производные $\partial U/\partial t$, $\partial^2 U/\partial t^2$ и т. д. в общем случае не определяются однозначно при помощи этого метода. Согласуйте это утверждение с тем фактом, что для уравнения теплопроводности решение $u(x, t)$ при $t > 0$ однозначно определяется заданием $u(x, 0)$.

2. Рассмотрите характеристики системы уравнений Коши — Римана

$$\partial u/\partial t = \partial v/\partial x, \quad \partial v/\partial t = -\partial u/\partial x.$$

3. Рассмотрим двумерное течение жидкости, когда давление p , плотность ρ и скорость $\mathbf{u} = (u, v)$ являются функциями от x, y и t . Взяв за исходные уравнения § 17.2 и простое уравнение состояния $p = (\gamma - 1)\rho\mathcal{E}$, покажите, что уравнения в характеристической форме запишутся так:

$$Dp/Dt - c^2 D\rho/Dt = 0, \quad (17.12.5)$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot (D\mathbf{u}/Dt + (1/\rho)\nabla p) = 0, \quad (17.12.6)$$

$$\rho c (\lambda D/Dt + c\boldsymbol{\nabla}) \cdot \mathbf{u} + (D/Dt + c\lambda \cdot \nabla) p = 0. \quad (17.12.7)$$

Все векторы, входящие в эти уравнения, имеют по две компоненты; в частности, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, а λ и $\boldsymbol{\mu}$ — произвольные единичные векторы в плоскости x, y . Через D/Dt обозначен оператор

$$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y,$$

т. е. оператор дифференцирования вдоль траекторий частиц, а c — адиабатическая скорость звука, равная $\sqrt{\gamma p/\rho}$. Эти уравнения являются обобщением уравнений (17.9.3). В уравнении (17.12.6) направления дифференцирования ограничены плоскостью, касательной к траектории частицы и параллельной вектору $\boldsymbol{\mu}$; в (17.12.7) они ограничены плоскостью, касательной к звуковому конусу и такой, что линия пересечения этой плоскости с плоскостью x, y перпендикулярна вектору λ .

Для некоторых задач условие аналитичности везде может быть заменено условием гладкости. В частности, это верно для гиперболических уравнений, включая уравнения гидродинамики, при условии что гладкость означает однократную непрерывную дифференцируемость при определенных разумных ограничениях (см. книги Куранта и Гильберта [1962] или Гарабедяна [1964]). У решения могут существовать разрывы в высших (и, при обычных условиях, даже в первых) производных; на самом деле они распространяются вдоль характеристик. Однако метод Коши — Ковалевской непригоден для рассмотрения ударных волн и других главных особенностей. Более того, оказывается, что для существования решения при наличии контактного разрыва или поверхности скольжения сама эта поверхность и течение по обе ее

стороны должны быть аналитическими или по крайней мере кусочно аналитическими, а не только гладкими. Причиной этого являются неустойчивости Гельмгольца и Тейлора (см. § 17.15).

17.13. ЗАДАЧА РИМАНА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Простейшей задачей с негладкими начальными данными является классическая задача Римана. Это задача с одной пространственной переменной, когда функции u , p и ρ в начальный момент постоянны, за исключением разрывов в точке $x=0$, где они претерпевают скачки от значений u_1 , p_1 , ρ_1 при $x < 0$ до значений u_2 , p_2 , ρ_2 при $x > 0$.

Примером практической реализации такой задачи является ударная труба. Это длинная труба или трубка, разделенная на две части тонкой поперечной диафрагмой в точке $x=0$. Воздух накачивается в одну из частей (например, в ту, для которой $x < 0$) до высокого давления p_1 , а в другой части остается под более низким давлением p_2 . После установления теплового и механического равновесия температура везде постоянна, так что в силу закона Бойля $p_1/\rho_1 = p_2/\rho_2$, а $u_1 = u_2 = 0$. После этого в момент $t=0$ диафрагма разрывается или быстро убирается. Тогда ударная волна будет двигаться по воздуху вправо, начиная от точки $x=0$, а волна разрежения — влево.

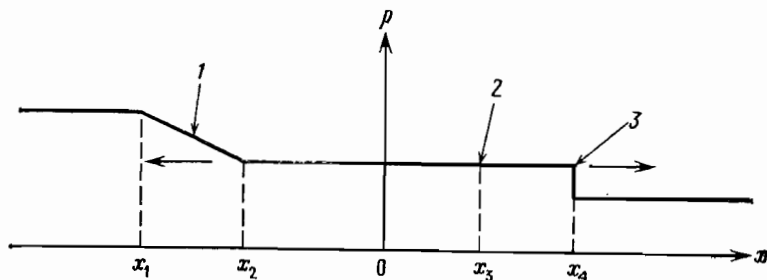


Рис. 17.2. Профиль давления в задаче Римана.

1 — волна разрежения; 2 — контактный разрыв; 3 — ударная волна.

Профиль давления в некоторый момент $t > 0$ будет таким, как показано на рис. 17.2. Первоначальная граница раздела, на которой раньше стояла диафрагма, уже находится в точке $x=x_3$, где имеется контактный разрыв (см. § 17.5), на котором давление непрерывно, а температура и плотность разрывны. (Сразу левее x_3 воздух расширился, а правее сжался.) Каждая из точек x_1 , x_2 , x_3 , x_4 движется от начала координат со своей постоянной скоростью. Нетрудно установить, что существует только одно решение этой задачи, удовлетворяющее условиям на скачке и условию энтропии в точках разрыва и дифференциальным урав-

нениям между ними. Легко видеть, что характер решения будет именно таким, как только что было описано.

Другим примером такого рода является столкновение двух облаков первоначально холодного межзвездного газа с границами в виде параллельных плоскостей. В момент столкновения $p_1 = T_1 = p_2 = T_2 = 0$, а $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$. В этом случае образуются две ударные волны, движущиеся от плоскости столкновения внутрь каждого облака.

Общий случай с произвольными значениями u_1 , u_2 , p_1 , p_2 , ρ_1 , ρ_2 был исследован Риманом в 1860 г. (см. книгу Куранта и Фридрихса [1948]).

По-видимому, простейшее обобщение задачи Римана получится в том случае, если допустить в ней не только постоянные, но и аналитические по обе стороны от точки $x=0$ функции при $t=0$. Этой задаче было посвящено много работ. В них доказаны существование и единственность решения для упрощенных вариантов этой задачи (например, когда имеются всего одна функция и одно дифференциальное уравнение). Однако общий случай еще нельзя считать исследованным до конца.

Соответствующая многомерная задача с начальными разрывами на искривленной в общем случае поверхности пока что очень далека от завершения и, по-видимому, еще долго останется в таком состоянии.

Соображения по поводу кусочно аналитических задач с начальными данными сформулированы в общих чертах в § 17.16. Предварительно для этой цели рассматриваются спонтанное образование ударных волн и неустойчивости Гельмгольца и Тейлора.

17.14. СПОНТАННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Предположим, что газ в состоянии покоя заполняет длинную трубку с поршнем на одном из ее концов. При $t=0$ поршень начинает вдвигаться в трубку с непрерывным ускорением. Мы покажем, что возникающее при этом течение газа будет оставаться гладким до определенного момента времени t^* , а в этот момент в некоторой точке внутри газа образуется ударная волна, которая начнет двигаться по газу в сторону от поршня. Интенсивность ударной волны равна нулю при $t=t^*$, но становится положительной и возрастает при $t > t^*$. Таким образом, в течении, которое сначала было гладким, со временем может образоваться особенность. Это явление наблюдается в атмосфере некоторых пульсирующих звезд: ударная волна формируется в каждом цикле на стадии ускоренного разлета, когда оболочка движется наружу под действием расширяющегося внутризвездного вещества. Тогда ударная волна также движется наружу через оставшуюся атмос-

феру и исчезает в окружающем звезду вакууме, по-видимому, нагревая корону звезды при прохождении через нее.

Обозначим координату x поршня в момент t через $\xi(t)$ и предположим, что $\xi(t) = 0$ при $t < 0$. Газ находится в области $x > \xi(t)$. Предположим, что ускорение поршня $\ddot{\xi}(t) > 0$ при $t > 0$ и либо непрерывно при всех t , либо в крайнем случае имеет скачок при $t = 0$. При $t < 0$ мы имеем $u = 0$ и $c = c_0$ для всех $x > 0$. Уравнения в характеристической форме, описывающие течение, приведены в (17.9.4), (17.9.5). Характеристические кривые $x_{\pm}(t)$ в плоскости x, t задаются уравнениями

$$dx_+/dt = u + c, \quad dx_-/dt = u - c. \quad (17.14.1)$$

Вдоль каждой запаздывающей характеристики $x_-(t)$ величина $u - \sigma = u - 2c/(\gamma - 1)$ постоянна. Более того, она постоянна для всего течения, пока в нем не возникла ударная волна, так как $u = 0$ и $c = c_0$ при $t = 0$ для всех x . Таким образом,

$$u - 2c/(\gamma - 1) = -2c_0/(\gamma - 1). \quad (17.14.2)$$

Вдоль каждой опережающей характеристики $x_+(t)$ величина $u + 2c/(\gamma - 1)$ также постоянна, и поэтому u и c в отдельности постоянны вдоль нее, так что каждая опережающая характеристика в плоскости x, t является прямой с тангенсом угла наклона, равным $(u + c)^{-1}$. Запаздывающие характеристики остаются прямыми только до их пересечения с опережающей характеристикой, выходящей из начала координат (см. рис. 17.3).

Вдоль опережающей характеристики, начинающейся на поршне в момент t_0 , величины u, c, p и ρ определяются из системы уравнений

$$u = \dot{\xi}(t_0), \quad u - 2(c - c_0)/(\gamma - 1) = 0, \quad c^2 = \gamma p/\rho, \quad p = K\rho^\gamma, \quad (17.14.3)$$

а уравнение самой характеристики имеет вид

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \xi(t_0) + (u + c)(t - t_0) = \\ &= \xi(t_0) + [c_0 + 1/2(\gamma + 1)\dot{\xi}(t_0)](t - t_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_+(t, t_0). \end{aligned} \quad (17.14.4)$$

Из (17.14.3) следует, что пока $\dot{\xi}(t_0)$ возрастает, все величины u, c, p, ρ будут возрастающими функциями от t_0 . Поэтому тангенсы углов наклона, равные $(u + c)^{-1}$, уменьшаются при движении влево по семейству опережающих характеристик, и любые две такие характеристики обязательно пересекутся, если они продолжены вперед достаточно далеко. Две характеристики, начинающиеся при t_0 и $t_0 + \varepsilon$, пересекутся в момент t_1 , если

$$\partial x_+(t_1, t_0)/\partial t_0 = 0$$

(при этом были отброшены величины порядка ε^2). Учитывая это условие и считая, что $0 < \dot{\xi}(t_0) < \infty$, из уравнения (17.14.3)

получаем

$$t_1 = t_0 + \frac{2}{(\gamma-1)\dot{\xi}(t_0)} \left[c_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{\xi}(t_0) \right] \stackrel{\text{def}}{=} t_1(t_0). \quad (17.14.5)$$

Кривая на плоскости x, t , заданная в виде

$$x = x_+(t_1(t_0), t_0), \quad t = t_1(t_0) \quad (t_0 - \text{параметр}), \quad (17.14.6)$$

является огибающей характеристик; она изображена на рис. 17.3 линией с резким изломом. Мы видим, что эта кривая имеет точку возврата, соответствующую такому значению t_0 , при котором функция $t_1(t_0)$ достигает минимума.

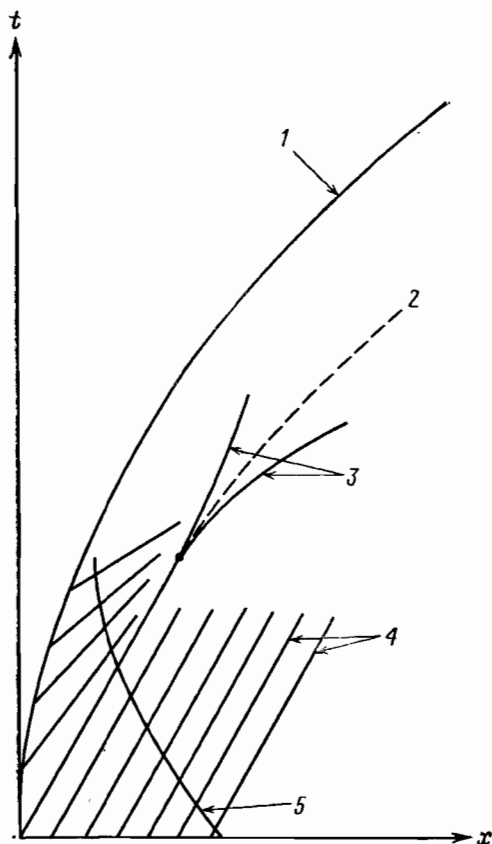


Рис. 17.3. Спонтанное образование ударной волны.

1 — кривая движения поршня $x = \xi(t)$; 2 — ударная волна; 3 — огибающая; 4 — опережающие характеристики; 5 — запаздывающая характеристика.

Ударная волна возникает в точке возврата огибающей и затем движется так, как это схематически указано на рисунке штриховой линией. Чтобы увидеть образование ударной волны, заметим, что p , ρ , u , c — возрастающие функции от t_0 , но скорость изменения x как функции от t_0 при фиксированном $t = t_1$ равна нулю в точке возврата, и поэтому p , ρ , u и c как функции от x имеют там бесконечные производные.

Изучение дальнейшего развития ударной волны становится более сложным, так как теперь нужно учитывать условия Ренкина — Гюгоньо и течение уже нельзя считать изэнтропическим. Можно показать, что интенсивность ударной волны сначала возрастает как $(t - t^*)^{1/2}$, где t^* — минимум функции $t_1(t_0)$.

17.15. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ТЕЙЛОРА

Чтобы задача с начальными данными была корректно поставленной по Адамару, необходимо не только существование единственного решения для всех начальных состояний системы, определяемых некоторым «разумным» классом начальных функций, но требуется еще и непрерывная зависимость (в некотором смысле) этого решения от начальных данных (см. гл. 16). Примером отсутствия такой непрерывной зависимости служит неустойчивость Гельмгольца.

Пусть некоторая плоскость разделяет две области (два полупространства), в каждой из которых со своей для каждой области скоростью равномерно движется жидкость, скользя без трения по этой плоскости. Введя малое возмущение начальных данных путем перехода от плоской поверхности скольжения к волнистой синусоидальной с малой амплитудой отклонений и соответствующего незначительного изменения течения вблизи этой поверхности, можно получить решение, в котором амплитуда возмущения со временем возрастает.

Этот рост является экспоненциальным до тех пор, пока амплитуда мала по сравнению с длиной волны, т. е. для линеаризованной задачи (см. ниже). Именно по этой причине легкий ветерок порождает волны на поверхности водоема. Описанное возрастание малых возмущений известно под названием *неустойчивости Гельмгольца*. (При этом предполагается, что скорость скольжения не превосходит определенной части скорости звука — при больших относительных скоростях акустические явления подавляют эту неустойчивость.) Более того, скорость экспоненциального роста таких возмущений неограниченно возрастает, если длина волны λ первоначальных колебаний поверхности скольжения стремится к нулю. Следовательно, для любых заданных $\epsilon > 0$ и $M > 0$ можно найти такое достаточно малое λ , что начальное «инфинитезимальное» возмущение с длиной волны λ возрастет более чем в M раз

за промежуток времени, меньший, чем ϵ . Но это и означает, что зависимость решения линеаризованной задачи от начальных данных не является непрерывной.

Если на границе между двумя жидкостями существует поверхностное натяжение (его лучше было бы назвать натяжением поверхности раздела), то возмущения с длиной волны, меньшей некоторого λ_0 , не возрастают, и поэтому непрерывная зависимость решения от начальных данных восстанавливается, даже если длинноволновые возмущения все еще остаются неустойчивыми. Волны на поверхности водоема стабилизируются под действием как поверхностного натяжения, так и гравитации. С другой стороны, когда поверхность скольжения образуется внутри данной жидкости, например, при движении восходящих воздушных потоков или при пересечении двух ударных волн (см. обсуждение задачи о маховском отражении в § 17.17), стабилизирующие факторы, вообще говоря, отсутствуют.

Предыдущие соображения основываются на линеаризованной теории неустойчивости. Хотя пока еще нет количественной теории нелинейных процессов, все же можно сделать несколько замечаний качественного и предположительного характера. Пусть невозмущенная поверхность между жидкостями — это плоскость x, y , а возмущенная поверхность $\mathcal{S}$ задана уравнением $z = z(x, y, t)$. [Линеаризованная теория основывается на предположении, что $\partial z / \partial x$ и $\partial z / \partial y$ везде $\ll 1$.] Простоты ради мы не будем учитывать влияние гравитации, поверхностного натяжения и сжимаемости жидкости и предположим, что течение является безвихревым по обе стороны поверхности $\mathcal{S}$, так что при любом t скорость выражается через свой потенциал ϕ как $\mathbf{u} = \nabla \phi$, где $\nabla^2 \phi = 0$ в каждой области. Тогда задача с начальными данными формулируется следующим образом. Величины

$$z(x, y, t) \quad \text{и} \quad \partial z(x, y, t) / \partial t \quad (17.15.1)$$

заданы при $t = 0$ как функции от x и y . Потенциал скорости $\phi(x, y, z, t)$ определяется в каждой области для любого t по функциям (17.15.1) при помощи уравнения Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$ и следующих условий: (1) нормальная компонента скорости $\mathbf{u}$ непрерывна при переходе через $\mathcal{S}$ и согласована на $\mathcal{S}$ с нормальной компонентой скорости самой поверхности $\mathcal{S}$ и (2) $\mathbf{u}$ стремится к $(\pm V/2, 0, 0)$ при $z \rightarrow \pm \infty$, где V — относительная скорость или скорость скольжения. (Заметим, что потенциал ϕ не является непрерывным при переходе через $\mathcal{S}$.) Теперь движение определяется из того условия, что давление p непрерывно при переходе через $\mathcal{S}$ и удовлетворяет уравнению

$$\rho_0 (\partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0. \quad (17.15.2)$$

Рассмотрим решение задачи, для которой

$$z = z(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) e^{ikx}. \quad (17.15.3)$$

(Здесь следовало бы учесть и зависимость от y , но для упрощения записи она опускается.) В линейном приближении каждый член этой суммы можно рассматривать независимо от остальных. Тогда можно найти зависимость от времени (см. книгу Ландау и Лифшица [1954, § 30]), что дает

$$c_k(t) = A_k e^{kVt/2} + B_k e^{-kVt/2} \quad (17.15.4)$$

до тех пор, пока амплитуда мала по сравнению с длиной волны, т. е. $|c_k| \ll k$. Коэффициент в одном из показателей, а именно $|k|V/2$, стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для сходимости ряда вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp[ikx + (|k|V/2)t]$$

при некотором $t = t_0 > 0$ необходимо, чтобы

$$d_k = o(\exp[-(|k|V/2)t_0]) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

а для выполнения этого условия начальная поверхность должна быть аналитической: если она не является аналитической, то решение нельзя получить методом рядов Фурье.

Поведение поверхности раздела при больших амплитудах (когда линейное приближение становится непригодным) изучалось экспериментально и при помощи численных расчетов. Для поверхности, которая в начальный момент имела вид

$$z = a_k(t) \cos kx,$$

установлено, что когда амплитуда становится сравнимой с длиной волны, т. е. когда $a_k \approx 1/k$, возрастание $a_k(t)$ перестает быть экспоненциальным и становится приближенно линейным с коэффициентом $\dot{a}_k(t) \approx \alpha V$, где α — постоянная порядка единицы. Зависимость от x также изменяется.

Наблюдения показывают, что при еще больших амплитудах ($a_k \gg 1/k$) поверхность раздела разрушается и заменяется турбулентным слоем, толщина которого со временем возрастает благодаря турбулентной диффузии. Мелкие начальные иррегулярности любого рода вызывают немедленное локальное разрушение этой поверхности.

С другой стороны, если начальная поверхность является кусочно аналитической, например состоящей из плоских полос с зигзагообразным поперечным профилем, изображенным на рис. 17.4, то, согласно предположению из следующего параграфа (если оно

верно), должно существовать кусочно аналитическое решение; характер этого решения пока неизвестен.

Неустойчивость Тейлора подобна неустойчивости Гельмгольца. В этом случае нет скольжения вдоль $\mathcal{S}$. Вместо этого рассматриваются две жидкости с различными плотностями. Эта система

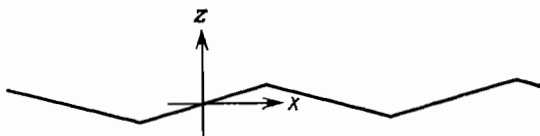


Рис. 17.4. Поперечный профиль начальной поверхности, состоящей из плоских полос.

испытывает ускорение в направлении от тяжелой жидкости к легкой. Примером такой системы с ускорением, создаваемым силой тяжести, является вода в верхней части сосуда, поддерживаемая давлением воздуха, находящегося в нижней его части. Если поверхность раздела — в точности горизонтальная плоскость, то система имеет равновесную конфигурацию, однако эта конфигурация неустойчива. Волны на поверхности раздела содержат зависящий от времени множитель вида $e^{\pm at}$, а не $\sin at$ или $\cos at$, как обычные волны на поверхности воды. Снова коэффициент a неограниченно возрастает (при отсутствии поверхностного натяжения), если длина волны стремится к нулю.

17.16. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КУСОЧНО АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Из-за отсутствия доказательств существования и единственности удобно принять некое рабочее предположение в качестве отправной точки для дальнейших исследований. Для гидродинамических задач с начальными данными представляется разумным предположить, что если начальные данные являются кусочно аналитическими, то существует единственное кусочно аналитическое решение по крайней мере для некоторого конечного интервала времени. При этом считается, что уравнение состояния также представляется кусочно аналитической функцией. Сделанные выше замечания о неустойчивостях Гельмгольца и Тейлора показывают, что кусочную аналитичность нельзя во всех случаях заменить кусочной гладкостью.

Под кусочной аналитичностью начальных данных подразумевается следующее. Пространство может быть разбито на ячейки, в каждой из которых описывающие течение функции являются аналитическими при $t=0$. Ячейки разделены аналитическими

поверхностями, при переходе через которые эти функции претерпевают разрывы первого рода, а поверхности ограничены аналитическими кривыми, которые служат ребрами ячеек. Пока нет полной ясности в том, какого рода особенности функций или поверхностей допустимы на ребрах и в угловых точках ячеек (несколько примеров таких особенностей будет описано в следующем параграфе), и поэтому даже в формулировке предположения должна оставаться некоторая неопределенность.

Кусочная аналитичность решения означает, что пространство-время может быть аналогично разбито на ячейки и т. д.; это, конечно, не означает, что разбиение пространства остается все время таким же, как при $t=0$, потому что со временем в течении могут возникать ударные волны и другие особенности. В задаче Римана при $t=0$ одномерное пространство разбивается на две области аналитичности ($x > 0$ и $x < 0$), но при $t > 0$, согласно рис. 17.2, таких областей будет пять.

17.17. ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЙ

Несколько примеров особенностей можно получить при рассмотрении явления маховского отражения. Пусть плоская стационарная ударная волна движется по ударной трубе слева направо и при этом набегаёт на наклонную плоскость или клин, расположенный на дне трубы, как показано на рис. 17.5. Возмущение

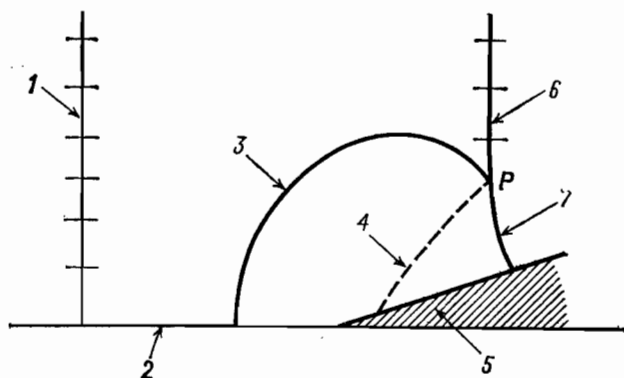


Рис. 17.5. Маховское отражение.

1 — первичная ударная волна; 2 — дно ударной трубы; 3 — вторичная ударная волна; 4 — поверхность скольжения; 5 — клин; 6 — первичная ударная волна; 7 — стембель Маха.

зарождается в тот момент, когда фронт ударной волны касается основания клина, а затем распространяется дальше от этой точки; криволинейной границей возмущения является вторичная ударная волна.

При определенных условиях, наложенных на угол клина и интенсивность первичной ударной волны (см. работы Бликни и Тауба [1949] и Даффа [1962]), первичная и вторичная ударные волны встречаются в так называемой *тройной точке* P над клином; от этой точки и до поверхности клина первичная и вторичная волны сливаются в одну ударную волну (также криволинейной формы), называемую *стеблем Маха*. Истечение вниз из тройной точки порождает также поверхность скольжения, показанную штриховой линией. Элемент жидкости непосредственно под поверхностью скольжения был сжат объединенной ударной волной, а элемент непосредственно над ней был сжат до того же окончательного давления (давление непрерывно при переходе через поверхность скольжения) последовательно двумя ударными волнами. Сжатие объединенной ударной волной приводит к большему увеличению энтропии, так как увеличение энтропии при прохождении конкретной ударной волны грубо оценивается как куб коэффициента сжатия этой волны. Поэтому температура и удельный объем снизу от поверхности будут больше, чем сверху от нее, так что скорость течения в сторону от ударных волн должна быть больше снизу от поверхности, чтобы обеспечивалось сохранение массы.

Для этого течения выполняется закон подобия, потому что в формулировку задачи не входит никакой характерной длины. (Ясно, что длина и поперечные размеры ударной трубы несущественны, и при обсуждении закона подобия их можно считать бесконечными.) Это означает, что полная картина течения в момент t_2 (началом отсчета времени служит момент достижения первичной ударной волной основания клина) является точно такой же, как и в момент t_1 , если осуществить преобразование подобия с коэффициентом t_1/t_2 . Иначе говоря, функции u , v , p и ρ зависят только от аргументов x/t и y/t , где x и y — декартовы координаты с началом отсчета в вершине клина.

Кажется очевидным, что ударные волны и поверхность скольжения должны быть аналитическими кривыми (за исключением, возможно, самой тройной точки P), а описывающие течение переменные в каждой области должны быть аналитическими функциями аргументов $\xi = x/t$ и $\eta = y/t$. Это наводит на мысль, что на таких кривых координаты $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$ должны быть степенными рядами относительно длины дуги σ (в переменных подобия $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$), где ξ_0 и η_0 — координаты точки P , а в каждой из двух областей, ограниченных этими кривыми, u , v , p и ρ должны быть степенными рядами по двум переменным $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$. Эти функции равны известным постоянным в каждой из областей спереди первичной ударной волны и сзади нее. Однако нетрудно убедиться в том, что ни одно решение такого вида не может удовлетворять одновременно условиям на скачке, диффе-

ренциальным уравнениям и закону подобия. Можно предположить, что одна или более кривых имеют бесконечную кривизну в точке P , подобно функции $y = |x|^{3/2}$ в начале координат. Для такого случая можно попытаться использовать представления в виде степенных рядов с дробными показателями степени, но этот подход также ничего не дает. Ничего не получается и при помощи представлений, в которые входят логарифмы. Пока что характер особенности в точке P остается неясным.

Течение в окрестности вершины клина служит примером течения в окрестности угловой точки. Для безвихревого течения несжимаемой жидкости решение выражается через дробные степени ξ и η (см. книгу Ландау и Лифшица [1954, § 10, задача 6]), и, по-видимому, здесь это верно даже тогда, когда течение является завихренным, а жидкость — сжимаемой.

Эти два примера, как и многие другие, показывают, что формулировка кусочно аналитических задач с начальными данными должна допускать не только разрывы первого рода, но и другие особенности, однако подходящий класс особенностей в настоящее время еще не очерчен.

Приложение к главе 17 (разделы А — Д).

ЗАДАЧА ОБ ОТСОЕДИНЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Представление решения задачи Коши в виде степенного ряда было предложено Коши, а позднее Ковалевской с единственной целью доказать существование решения. До появления быстродействующих ЭВМ не могло быть и речи об использовании метода степенных рядов для проведения реальных численных расчетов, за исключением достаточно очевидных случаев. Даже при наличии современной ЭВМ нужно преодолеть ряд трудностей, чтобы сделать этот метод пригодным для практических целей. Успешно работающие методики были предложены Рихтмайером [1957] и Левисом [1959], которые ввели специальные правила для выполнения на ЭВМ действий трех различных видов (арифметических действий, алгебраических преобразований и действий с аналитическими функциями), что сделало метод степенных рядов пригодным для практики и очень точным в применении к задаче о расчете отсоединенной ударной волны, на которой он проверялся. Эти правила — арифметика с подсчетом значащих цифр, преобразование степенных рядов и аналитическое продолжение решения — описаны в данном приложении после краткого обсуждения постановки задачи об отсоединенной ударной волне.

17.А. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наша цель состоит в том, чтобы рассчитать стационарное двумерное течение сжимаемой жидкости, когда аналитические данные Коши заданы на аналитической кривой, не имеющей характеристических точек. Описывающие течение величины (давление, плотность, компоненты скорости и т. д.) представляются степенными рядами по двум пространственным переменным или по криволинейным координатам, одна из которых постоянна на заданной кривой. Разложение делается относительно некоторой точки на кривой. Тогда определение коэффициентов разложения по заданным начальным данным (значениям на кривой) при помощи гидродинамических уравнений в частных производных становится

формальной численной процедурой, которая выполняется машинными программами по преобразованию степенных рядов. После вычисления достаточно большого числа коэффициентов (скажем, нескольких сотен для каждой искомой величины) ряды суммируются, в результате чего получается решение вблизи той точки, относительно которой было сделано разложение. В обоснованности применения такой численной процедуры можно убедиться эмпирически, а именно: (1) сравнивая результаты, полученные в данной точке течения из разложений относительно двух или более соседних точек на кривой, (2) проверяя выполнение закона Бернулли и (3) проверяя постоянство энтропии вдоль линии тока.

Для изучения был выбран частный случай этой задачи — течение между отсоединенной ударной волной и осесимметричным затупленным телом наподобие головной части снаряда, движущегося при большом числе Маха в воздухе (без учета вязкости). Общие характеристики этого течения хорошо известны. Взаимное расположение ударной волны, тела и линий тока показано на рис.

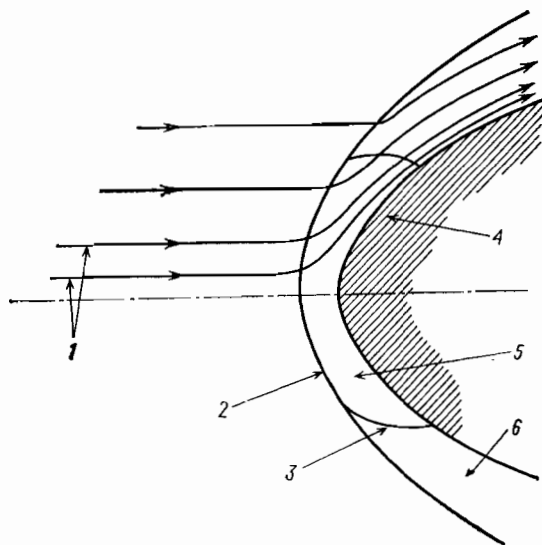


Рис. 17.6. Отсоединенная ударная волна.

1 — линии тока; 2 — ударная волна; 3 — звуковая линия; 4 — тело; 5 — область дозвукового течения; 6 — область сверхзвукового течения.

17.6. Выбрана такая система отсчета, в которой тело находилось бы в состоянии покоя. Зазор между ударной волной и поверхностью тела составляет примерно одну десятую радиуса кривизны в передней точке поверхности и в действительности зависит от числа Маха и уравнения состояния. Вблизи оси течение за ударной волной является дозвуковым, но с удалением от оси оно становится сверхзвуковым. При обычных условиях толщина примыкающего к поверхности тела пограничного слоя жидкости пренебрежимо мала, и поэтому предположение об отсутствии вязкости во всей области течения вполне оправдано.

Как и в ряде других подходов к этой задаче, мы начнем с предположения, что форма ударной волны известна, чтобы в дальнейшем рассчитать ту форму тела, которая порождает такую ударную волну. Если давление, плотность и скорость воздуха перед ударной волной известны, то их значения непосред-

венно за ней определяются из условий Ренкина—Гюгонно на скачке. Если выбранные нами поверхность ударной волны и уравнение состояния являются аналитическими, то описывающие течение величины непосредственно за волной (данные Коши) будут аналитическими функциями подходящей координаты вдоль волны и могут быть разложены в ряд по степеням этой координаты. Подготовительная программа вычисляет коэффициенты этих разложений; основная программа вычисляет оставшиеся коэффициенты полного разложения по двум переменным, исходя из дифференциальных уравнений в частных производных; наконец, последняя программа вычисляет различные величины путем суммирования степенных рядов во всех заданных точках поля течения.

Математическая формулировка задачи сводится к следующему. Пусть z и r — цилиндрические координаты. Предположим, что течение симметрично относительно оси z , а форма ударной волны задана уравнением

$$z = G(r) = G_0 + G_2 r^2 + G_4 r^4 + \dots \quad (17.A.1)$$

В области перед ударной волной, т. е. при $z < G(r)$ (на рис. 17.6 она слева), описывающие течение величины постоянны, а скорость параллельна оси z . Воздух считается идеальным газом с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \mathcal{E} \rho \quad (17.A.2)$$

в обозначениях § 17.2. Перед волной при надлежащем выборе единиц

$$p = 1, \quad \rho = 1, \quad u = U, \quad v = 0. \quad (17.A.3)$$

Здесь u и v — осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, а U — постоянная. Скорость звука перед волной равна $\sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma}$, и поэтому число Маха $M = U / \sqrt{\gamma}$.

За волной описывающие течение переменные зависят от z и r . Удобно ввести криволинейные координаты x и y таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} x &= z - G(r), & z &= x + g(y), \\ y &= r - r_0, & r &= r_0 + y, \end{aligned} \quad (17.A.4)$$

где r_0 — положительная постоянная, $g(y) = G(r_0 + y)$, y — радиальная координата, измеряемая от радиуса r_0 той точки на ударной волне, относительно которой делают разложения в степенные ряды, а x — координата, измеряемая параллельно оси, но от волны, а не от фиксированной плоскости, так что для волны $x = 0$. Если f обозначает любую из переменных течения u, v, p, ρ , то $f = f(x, y)$; $f(0, y)$ обозначает значение переменной непосредственно за волной, т. е. предел $f(x, y)$ при $x \downarrow 0$.

Чтобы описать наклон волны в точке $(0, y)$, введем угол α между нормалью к волне и направлением набегающего потока; тогда

$$\sin \alpha = \frac{g'(y)}{\sqrt{1 + g'(y)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + g'(y)^2}}.$$

Непосредственно за волной значения переменных течения определяются как функции от y из условий Ренкина—Гюгонно на скачке. Согласно § 17.5, в данном случае эти условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{1 + g'^2}} &= \sqrt{\frac{p-1}{1-1/\rho}}, & \rho &= \frac{\theta\rho-1}{\theta-\rho} \quad \left(\theta = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right), \\ \frac{(U-u) + g'v}{\sqrt{1 + g'^2}} &= \sqrt{(p-1)(1-1/\rho)}, & \frac{(U-u)g' - v}{\sqrt{1 + g'^2}} &= 0, \end{aligned} \quad (17.A.5)$$

где g' обозначает $g'(y)$ и u, v, p, ρ обозначают $u(0, y), v(0, y), p(0, y), \rho(0, y)$. Так как функция $g'(y)$ известна, из этих уравнений можно найти u, v, p, ρ как функции от y при $x = 0$.

При $x \geq 0$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $p(x, y)$ и $\rho(x, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} \rho \left[(u - vg') \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \left[(u - vg') \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} - g' \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \left(\frac{\partial}{\partial y} - g' \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho v + \frac{\rho v}{r_0 + y} &= 0, \\ \gamma p \left[(u - vg') \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right] - \rho \left[(u - vg') \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (17.A.6)$$

Первые два из этих уравнений представляют собой уравнения движения, третье — уравнение непрерывности, а четвертое — уравнение энергии, из которого исключено при помощи уравнения состояния (17.A.2). Выражения в квадратных скобках являются производными вдоль линий тока; члены с множителем vg' появляются из-за неортогональности системы координат.

Уравнения (17.A.5) и (17.A.6) определяют задачу Коши. В терминах ее решения функция тока ψ запишется (без множителя 2π) в виде

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} (r_0 + y)^2 U - (r_0 + y) \int_0^x \rho(x', y) v(x', y) dx'. \quad (17.A.7)$$

Величина $2\pi\psi$ равна массе жидкости, протекающей в единицу времени через сечение, перпендикулярное оси x и ограниченное окружностью с центром на оси x , проходящей через точку (x, y) . Линия тока $\psi = 0$ состоит из двух частей — части оси x и кривой, пересекающей ось при некотором положительном значении x ; эта кривая определяет искомую поверхность тела. Теперь задача состоит в том, чтобы найти эту линию тока и течение между нею и ударной волной.

17.Б. НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ

Задача некорректно поставлена, если нет непрерывной зависимости ее решения от данных Коши. Если на функции u , v , p и ρ при $x=0$ накладывается малое возмущение, то получающееся возмущение решения в общем возрастает с возрастанием x . Оказывается, что всегда можно найти такое возмущение, которое возрастало бы с ростом x с любой наперед заданной экспоненциальной скоростью. Это связано с эллиптическим характером уравнений в частных производных в дозвуковой области (см. книгу Куранта и Фридрихса [1948, § 22]). Простейший пример такой неустойчивости эллиптического уравнения получается при рассмотрении уравнения Лапласа, которое имеет решения вида $e^{kx} \sin ky$ для произвольно большого k . Как известно, подходящие (корректно поставленные) граничные задачи для уравнения Лапласа (задачи Дирихле и Неймана) определяются заданием одной функции на замкнутой кривой, а не двух функций на начальной кривой.

Чтобы исследовать рост возмущений для аналогичной, но более простой задачи, сначала перепишем уравнения (17.A.6), считая x и y декартовыми коор-

динамиками на плоскости и отбрасывая члены, содержащие g' и r_0 :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \gamma p \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \rho \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17.Б.1)$$

Далее эти уравнения линеаризуются путем замены u на $u_0 + u_1$ (и аналогичной замены остальных переменных течения), где u_1 — малое и быстро изменяющееся возмущение (наподобие возмущения $e^{ikx} \sin ky$ для уравнения Лапласа). При этом предполагается, что можно пренебречь величинами u_1 и $(\nabla u_0)/u_0$ по сравнению соответственно с u_0 и $(\nabla u_1)/u_1$ и т. д. Если в линеаризованную систему (17.Б.1) подставить возмущение вида

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u} \exp[i(k_1 x + k_2 y)], & p_1 &= \hat{p} \exp[i(k_1 x + k_2 y)], \\ v_1 &= \hat{v} \exp[i(k_1 x + k_2 y)], & \rho_1 &= \hat{\rho} \exp[i(k_1 x + k_2 y)], \end{aligned} \quad (17.Б.2)$$

то окажется, что постоянные $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$, $\hat{\rho}$, k_1 и k_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{v} + \hat{p} k &= 0, & (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\rho} + \rho_0 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}) &= 0, \\ (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) (\gamma p_0 \hat{\rho} - \rho_0 \hat{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (17.Б.3)$$

Здесь $\mathbf{v}_0$, $\hat{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{k}$ — это векторы

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения имеют решения различных видов. В частности, если $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} \neq 0$, то

$$\hat{p} = (\gamma p_0 / \rho_0) \hat{\rho} = c^2 \hat{\rho},$$

где c — скорость звука. Тогда из уравнений (17.Б.3) можно исключить $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{p}$, что дает

$$c^2 \hat{\rho} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \hat{\rho},$$

и поэтому

$$c^2 (k_1^2 + k_2^2) - (u_0 k_1 + v_0 k_2)^2 = 0.$$

Если последнее равенство рассматривать как квадратное уравнение для определения отношения k_1/k_2 , то его дискриминант равен

$$c^2 (u_0^2 + v_0^2 - c^2) = c^2 (\|\mathbf{u}_0\|^2 - c^2).$$

Поэтому если $\|\mathbf{u}_0\| > c$, т. е. если течение является сверхзвуковым, то отношение k_1/k_2 вещественно и решение устойчиво. Наоборот, если $\|\mathbf{u}_0\| < c$, т. е. если течение является дозвуковым, то k_1 комплексно при вещественном k_2 и существуют решения вида

$$e^{ik_1 x} \sin k_2 y, \quad e^{i\bar{k}_1 x} \sin k_2 y,$$

одно из которых растет экспоненциально с возрастанием x .

Физическая задача, в которой задано тело, а не ударная волна, поставлена корректно, поскольку корректно поставлена задача Дирихле для уравне-

ния Лапласа. Соответствующая математическая формулировка заключается в том, что нужно одновременно рассчитывать фронт ударной волны и течение за ним. Пока еще нет численных методов для решения задач в такой непосредственной постановке, за исключением весьма неточных методов временного характера, при использовании которых можно лишь надеяться на то, что течение в конце концов станет стационарным.

Некорректность — это расплата за обращение задачи и трактовку ударной волны как заранее известной. Она служит препятствием для применения конечноразностных методов, но оказывается вполне преодолимой для метода степенных рядов. Более того, одно время выражалось опасение, что на звуковой линии, разделяющей дозвуковую и сверхзвуковую области, течение может иметь какую-либо особенность или быть неустойчивым в некотором смысле. Однако течение при переходе через звуковую линию остается гладким, а дозвуковой или сверхзвуковой характер течения совершенно не отражается на точности метода степенных рядов.

17.B. МЕТОД СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Пусть f обозначает любую из переменных течения u , v , p или ρ . Представим f в виде суммы ряда:

$$f = f(x, y) = \sum_{j, k} f_{jk} x^j y^k,$$

где суммирование происходит по всем парам (j, k) неотрицательных целых чисел, f_{jk} — коэффициенты разложения, а само разложение рассматривается в области $x \geq 0$.

При помощи уравнений (17. A. 5) величины u , v , p , ρ как функции от y при $x=0$ можно выразить через функцию $g'(y)$. При этом можно избавиться от иррациональностей, обусловленных радикалами, и поэтому степенные ряды для $u(0, y)$ и т. д. выражаются через степенной ряд для $g(y)$. Эта часть вычислений проводится по стандартным правилам и не нуждается в подробном пояснении. В результате ее выполнения получается около дюжины коэффициентов для каждой функции — они находятся в памяти ЭВМ и могут быть использованы для дальнейших вычислений (это коэффициенты u_{0k} , v_{0k} , p_{0k} , ρ_{0k} для $k=0, 1, \dots, K$). Начиная с них, основная программа вычисляет все коэффициенты u_{jk} , v_{jk} , p_{jk} и ρ_{jk} для которых $j+k \leq K$. В численных расчетах K полагалось для различных задач равным 10, 14 и 19; тогда общее число членов каждого ряда равнялось $1/2 (K+1)(K+2)$, т. е. 66, 120 и 210 соответственно для каждой функции.

Сначала уравнения (17. A. 6) разрешаются относительно производных по x , что дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{(u - vg') \rho v [\partial p / \partial y + \gamma p / (y + r_0)]}{\gamma p (1 + g'^2) - \rho (u - vg')^2} + \\ &\quad + \frac{\gamma p [\rho u \partial v / \partial y + g' \partial p / \partial y - \rho v \partial u / \partial y]}{\gamma p (1 + g'^2) - \rho (u - vg')^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial p / \partial x + \rho v \partial u / \partial y}{\rho (u - vg')}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\partial p / \partial y - g' \partial p / \partial x + \rho v \partial v / \partial y}{\rho (u - vg')}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\rho [(u - vg') \partial p / \partial x + v \partial p / \partial y] - \gamma p v \partial \rho / \partial y}{\gamma p (u - vg')}. \end{aligned} \quad (17.B.1)$$

Общую идею метода можно пояснить при помощи рис. 17.7. На нем каждая точка представляет пару значений индексов (j, k) , для которых мы хотим при окончании вычислений знать коэффициенты u_{jk} и т. д. Предположим, что на некоторой стадии вычислений для u, v, p и ρ известны все те коэффициенты, для которых $j+k \leq K$ и $j \leq j'$ для некоторого $j' \in [0, K]$.

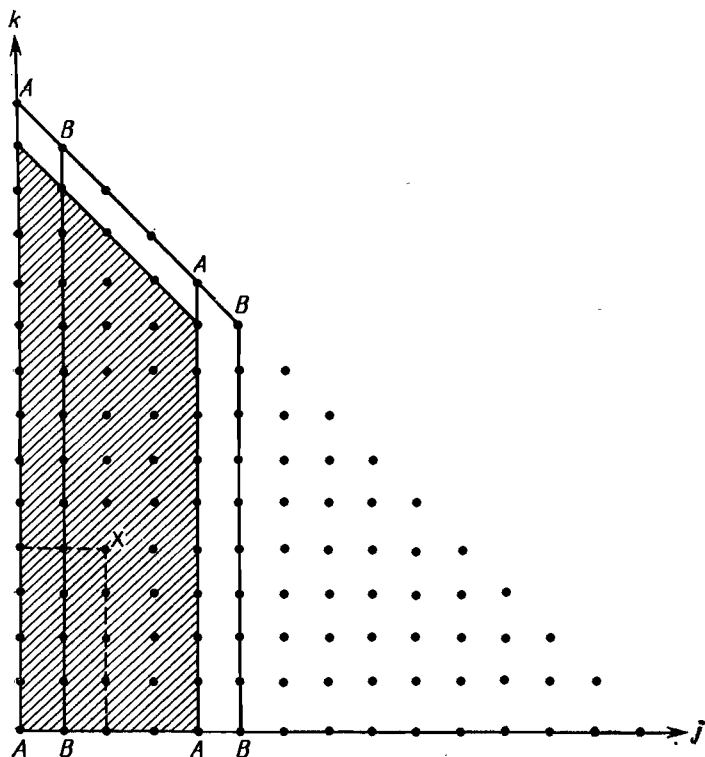


Рис. 17.7. Схема проведения вычислений.

Соответствующие точки на рис. 17.7 лежат в области АААА (для изображенного случая $j' = 4$). Будем говорить для краткости, что функции u, v, p, ρ известны в данной области. Эта область обладает тем свойством (т. е. она имеет такую форму), что если в ней известны две функции, то в этой же области можно найти их сумму, разность, произведение или частное путем формального сложения, вычитания, умножения или деления соответствующих степенных рядов. Выполнение сложения и умножения очевидно. При умножении в отмеченной на рисунке точке X коэффициент произведения, например, двух функций f и g вычисляется по коэффициентам f и g в точках, лежащих в выделенном штриховыми линиями прямоугольнике, противоположными вершинами которого являются точки X и $(0, 0)$. Аналогичное замечание справедливо и для деления, которое выполняется по известным алгебраическим правилам деления многочленов от двух переменных как рядов. Для выполнения этих операций были созданы специальные подпрограммы. Были также написаны подпрограммы для формального (т. е. почленного) дифференцирования отрезка ряда по y и его интегрирования по x .

Если u , v , p и ρ известны в области $AAAA$, то их производные по y могут быть найдены (при помощи подпрограммы дифференцирования) в заштрихованной на рисунке области, которая отличается от $AAAA$ лишь тем, что сдвинута на единицу вниз, так как дифференцирование уменьшает на единицу показатель степени y в каждом члене ряда. После этого при помощи других подпрограмм в заштрихованной области можно полностью вычислить выражение, стоящее в правой части первого из уравнений (17.B.1), а затем аналогичным образом и в правых частях остальных уравнений. Таким образом, теперь нам известны четыре частных производные du/dx , dv/dx , dp/dx и $d\rho/dx$ в заштрихованной области. Интегрируя их почленно по x , мы получим u , v , p , ρ в области $BBBB$, которая отличается от заштрихованной лишь тем, что сдвинута вправо на единицу. Если к $BBBB$ снова присоединить точки, соответствующие начальным коэффициентам при $x=0$, то после этого функции будут известны в области, которая отличается от упомянутой в начале абзаца области $AAAA$ лишь тем, что для нее неравенство $j \leq j'$ заменено неравенством $j \leq j' + 1$. Этим завершается последовательность тех действий, которые составляют один цикл вычислений.

Информация, полученная вначале из данных Коши, представляет собой частный случай, для которого область $AAAA$ сводится к отрезку оси k , соответствующему $j'=0$. Поэтому после K циклов вычислений по описанной выше схеме функции будут известны по всей треугольной области $j+k \leq K$.

Упомянутые ранее подпрограммы были сведены в специальный язык программирования, каждая инструкция которого соответствует одной из формальных операций над степенными рядами. Затем уравнения в частных производных (17.B.1) были записаны непосредственно на этом языке, причем порядок выполнения действий был именно таким, как описано выше.

Язык этот дает также возможность начать новый цикл после окончания очередного цикла при $j' < K$ и прекратить вычисления при $j'=K$. Для программирования правых частей уравнений (17.B.1) потребовалось чуть менее ста инструкций на этом языке.

Использование подпрограмм и специального языка программирования следует рассматривать как нечто большее, чем только удачный эксперимент. Программа в действительности воссоздает и использует рекуррентные соотношения, которые выражают коэффициенты старших членов ряда через коэффициенты младших его членов. Так как мы имеем дело со степенными рядами по двум переменным и с довольно сложной системой четырех нелинейных уравнений в частных производных, то ясно, что эти рекуррентные соотношения должны быть очень сложными. Это соображение подтверждается следующим фактом: для того чтобы при помощи этих рекуррентных соотношений вычислить коэффициенты четырех функций течения до десятого порядка, требуется много миллионов арифметических операций. Вероятно, есть все основания сказать, что выписать эти рекуррентные соотношения (по крайней мере без ошибок) было бы за пределами человеческих возможностей. Поэтому выполнение формальных алгебраических преобразований при помощи ЭВМ является существенной частью практического использования метода степенных рядов Коши — Ковалевской.

17.Г. АРИФМЕТИКА С ПОДСЧЕТОМ ЗНАЧАЩИХ ЦИФР

Для проведения описанных выше вычислений оказалось необходимым использовать так называемую арифметику с подсчетом значащих цифр, причем не просто для того, чтобы иметь некоторую оценку точности результатов, а для того, чтобы вообще получить эти результаты. В такой арифметике достоверность вычислений при выполнении каждой операции контролируется индексом значащих цифр.

Напомним, что во времена ручного счета, когда результат каждого арифметического действия записывался на бумаге, было обычным делом подчер-

кивать в каждом числе ту цифру, которая рассматривалась как его последняя значащая цифра. После каждой арифметической операции число значащих цифр результата определялось по значащим цифрам операндов при помощи простого набора правил. Действуя так, можно было всегда заметить серьезную потерю точности в длинных вычислениях. Эта процедура считалась существенной частью высококачественных вычислений, и, по-видимому, удивительно то, что, за очень редкими исключениями, она не была реализована на вычислительных машинах либо аппаратно, либо в математическом обеспечении.

При решении рассматриваемой задачи были использованы два типа арифметики с подсчетом значащих цифр. Они описаны Рихтмайером [1957, 1960], Греем и Гаррисоном [1959], а также Ашенхёрстом и Метрополисом [1959]. В арифметике первого типа каждое число с плавающей точкой представляется тремя величинами: дробной частью (мантиссой) f , порядком e и индексом значащих цифр (разрядов) s ; все они размещаются в одном машинном слове. Мантисса f такова, что $1/2 \leq |f| < 1$, и представляется в виде двоичного числа со знаком, имеющего l двоичных разрядов (где l — величина порядка 40); e — целое число со знаком (скажем, $-200 < e < 200$), а s — целое число из интервала $0 \leq s \leq l$. [Некоторая работа была проделана и на машине с десятичной системой счисления, но мы будем пользоваться терминологией двоичной системы.] Тройка (f, e, s) представляет число

$$x = (f \pm 2^{-s}) \cdot 2^e. \quad (17.G.1)$$

В f примерно s предположительно верных цифр. Правила для определения s остаются такими же, какими они были раньше при ручном счете. Перед сложением или вычитанием двух чисел то из них, у которого порядок меньше, денормализуется. Это означает, что если Δe — разность порядков этих чисел, то число (f, e, s) с меньшим порядком заменяется на (f', e', s') , где $f' = 2^{-\Delta e} f$, $e' = e + \Delta e$, $s' = \min(s + \Delta e, l)$. Теперь оба числа имеют одинаковый порядок и дробные части можно сложить и вычесть. Получившаяся новая дробная часть, скажем f_1 , лежит в интервале $-2 < f_1 < 2$, а новый индекс значащих цифр s_1 полагается равным наименьшему из тех двух индексов, которые были перед сложением или вычитанием. Наконец, результат нормализуется: если $1 \leq |f_1| < 2$, то f_1 , e_1 и s_1 заменяются на $1/2 f_1$, $e_1 + 1$, $\min(s_1 + 1, l)$, а если $|f_1| < 1/2$, то f_1 сдвигается влево относительно двоичной точки и одновременно e_1 и s_1 уменьшаются на 1 при каждом сдвиге на одну позицию, пока $|f_1|$ не попадет в интервал $[1/2, 1)$ или пока s_1 не станет равным нулю в процессе сдвига — в последнем случае e_1 уменьшится лишь настолько, насколько уменьшился s_1 . [Результат вида $x = (f, e, 0)$ вполне возможен. Он представляет собой близкое к нулю число с (мультипликативной) неопределенностью $\approx \pm 2^e$, и эту неопределенность нужно учитывать, если x используется в дальнейших вычислениях. Поэтому значение e имеет вполне определенный смысл. При $s = 0$ дробная часть f , которая является полностью потерявшим значимость остатком, также полагается равной нулю, чтобы предотвратить возможное (но неверное) возникновение значимости при сложении двух или более таких чисел.] Умножение и деление выполняются по обычным для чисел с плавающей точкой правилам, а индекс значащих цифр результата принимается равным наименьшему из индексов операндов. Деление на число x , у которого $s = 0$, является неприятной помехой в вычислениях, так как, согласно (17.G.1), нуль может быть одним из возможных значений x .

При решении задачи об отсоединенной ударной волне использовался и другой тип арифметики с подсчетом значащих цифр, а именно ненормализованная арифметика, предложенная Метрополисом. Вместо индекса значащих цифр s у каждого числа с плавающей точкой спереди ставится столько нулей, чтобы все оставшиеся цифры были значащими. [Иначе говоря, после этих первых нулей идет известное число *гарантированных* цифр (в пределе вся полноразрядная мантисса), на которых еще не сказались ошибки округления. Но это лишь другая точка зрения на то же самое — в обоих случаях на машине

будут получаться одни и те же результаты.] При таком подходе не нужна нормализация после сложения или вычитания. После умножения или деления результат, который находится в регистре двойной длины, сдвигается так, чтобы впереди было столько нулей, сколько их было у наименее точного из операндов, после чего получается соответствующий порядок.

Оба типа арифметики оказались эффективными средствами для работы со степенными рядами.

Элементарные примеры показывают, что если в процессе вычислений величина x полностью теряет значимость (а это происходит независимо от того, применялась арифметика с подсчетом значащих цифр или нет), то последующие величины, которые зависят от x , могут иметь не только неверные цифры в мантиссе, но и неверный порядок. Предположим, что e^{-x} вычисляется при $x=20$ при помощи степенного ряда для e^{-x} . [В действительности это было бы неразумно, так как существует много лучших способов вычисления e^{-x} , но в общем случае наилучшие способы решения очень сложных задач неизвестны.] Пусть вычисления выполняются с десятью верными десятичными знаками. При n порядка 20 частная сумма ряда S_n превышает по модулю 10^7 , а ошибка округления составляет примерно 10^{-3} и не может быть уменьшена путем добавления следующих членов ряда, даже если они берутся с повышенной точностью. Следовательно, с ростом n частная сумма S_n не стремится к величине e^{-20} , которая меньше 10^{-8} , а остается значительно больше последней (примерно в 10^5 раз).

Теперь предположим, что функция $f(z)$ получается как сумма ряда $\sum a_n z^n$, коэффициенты a_n которого сами получаются в результате длинных вычислений, являющихся причиной все большей потери значимости с ростом n . Тогда при n , большем некоторого n_0 , все цифры у a_n могут стать незначимыми, а неопределенные множители могут сильно возрастать с ростом n . При таких обстоятельствах ряд $\sum a_n z^n$ оказывается полусходящимся: ошибка частной суммы как приближения к $f(z)$ убывает до некоторых пор с добавлением новых членов, но затем она начинает возрастать. Поэтому важно прекратить суммирование при $n \approx n_0$.

Как было установлено, степенные ряды по x и y для рассматриваемой задачи обладают тем свойством, что коэффициенты u_{jk} и т. д. остаются значащими в области $\mathcal{R}$ плоскости j, k , ограниченной осями j и k и не очень четко определяемой кривой, которая, грубо говоря, отсекает треугольник. Следовательно, ряд $\sum u_{jk} x^j y^k$ должен суммироваться только в $\mathcal{R}$. При проведении этих сложных вычислений невозможно определить $\mathcal{R}$ заранее, однако при наличии арифметики с подсчетом значащих цифр это делается очень просто. Суммирующая ряд подпрограмма проверяет индекс значащих цифр s у каждого коэффициента u_{jk} и не включает в сумму соответствующий член, если $s=0$. После реализации этого приема в программе точность получаемых результатов неожиданно резко возросла: от примерно одного десятичного знака до примерно шести десятичных знаков для разумно малых x и y (меньших примерно половины расстояния между ударной волной и телом).

17.Д. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Область сходимости разложения $\sum_{j,k} f_{jk} x^j y^k$ функции $f=f(x, y)$ в степенной

ряд определяется особенностями f , рассматриваемой как аналитическая функция от двух комплексных переменных. В задаче об отсоединенной ударной волне мало что известно об особенностях функций u, v, p и ρ , но совершенно ясно, что область сходимости слишком мала и не содержит вещественные точки (x, y) с достаточно большими положительными x , не достигая тем самым поверхности тела (т. е. линии тока $\psi=0$). Чтобы преодолеть это затруднение,

Левис [1953] предложил три метода аналитического продолжения решения; один из них будет описан в этом параграфе.

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит области сходимости рядов для функций u, v, p и ρ , причем $x_0 > 0$, и пусть $x - x_0 = \xi$, а $y = y_0 = \eta$. Тогда уравнение $\xi = 0$ ($x = x_0$) определяет в области течения кривую $\mathcal{E}'$, которая будет эквидистантой для ударной волны. Функции получаются на $\mathcal{E}'$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) с помощью описанных выше вычислений. Следовательно, можно рассмотреть новую задачу Коши, для которой

$$u(x_0, y_0 + \eta), \quad v(x_0, y_0 + \eta), \quad p(x_0, y_0 + \eta), \quad \rho(x_0, y_0 + \eta)$$

предполагаются известными функциями переменной η на $\mathcal{E}'$ и дифференциальные уравнения в частных производных используются еще раз, как и выше, для разложения $u(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$ и т. д. в ряды по степеням ξ и η , например

$$u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \sum_{j,k} \hat{u}_{jk} \xi^j \eta^k.$$

Начальные данные для нового разложения, а именно коэффициенты $\hat{u}_{0k}$ и т. д. выражаются через коэффициенты u_{jk} и т. д. предыдущего разложения. Чтобы найти эту зависимость, запишем, что

$$u(x_0, y_0 + \eta) = \sum_k \hat{u}_{0k} \eta^k = \sum_{j,k} u_{jk} x_0^j (y_0 + \eta)^k.$$

Здесь для простоты y_0 можно приравнять нулю (при этом новая точка, относительно которой делается разложение, будет находиться на том же расстоянии от оси тела, что и старая); тогда

$$\hat{u}_{0k} = \sum_j u_{jk} x_0^j.$$

Аналогичные выражения получаются и для функций v, p и ρ .

Пусть K_1 — наивысший показатель степени первого разложения, так что в это разложение включены все те члены, для которых $j + k \leq K_1$ (это K_1 мы ранее обозначали через K), и пусть K_2 имеет такой же смысл для второго разложения. Левис доказал, что если наложить определенное ограничение на выбор точки (x_0, y_0) , то найдется такая постоянная s ($0 < s \leq 1$), что при стремлении K_1 и K_2 к бесконечности таким образом, что K_2 всегда равняется целой части от sK_1 , второе разложение сходится к решению задачи Коши в области сходимости разложения этого решения в степенной ряд относительно точки (x_0, y_0) ; следовательно, получается правильное аналитическое продолжение. Это обстоятельство является существенным, потому что используемые для второго разложения данные Коши получаются со все возрастающей точностью, когда $K_1 \rightarrow \infty$. (В теореме предполагается, что все арифметические действия выполняются точно и поэтому не происходит потери значащих цифр.) Для многих задач, включая задачу об отсоединенной ударной волне, можно положить $s = 1$, так что тогда $K_2 = K_1$.

Всю эту процедуру можно повторить, чтобы таким образом достичь еще больших значений x . В рассматриваемой задаче достаточно двух разложений, чтобы достичь поверхности тела, за исключением части течения вниз по потоку, где иногда приходилось использовать три разложения.

На рис. 17.8 изображены ударная волна, тело и звуковая линия для одного из расчетов Левиса, проводившегося с двойной точностью (с 54 двоичными знаками) при помощи ненормализованной арифметики Метрополиса. Ударная волна выбрана в виде гиперболоида вращения с таким углом между асимптотами гиперболы, который в точности равен углу при вершине звукового конуса на бесконечности; число Маха $M = 12$, постоянная для идеального газа $\gamma = 1.4$, степени разложений $K_1 = K_2 = 19$. На основании тех трех возможностей проверить численные результаты, о которых упоминалось в начале

§ 17.А, можно сделать вывод о том, что для изображенной на рис. 17.8 области точность определения контура тела составляет примерно 8 десятичных знаков, компонент скорости u и v — примерно 6 знаков, а давления p и плотности ρ — примерно 7 знаков.

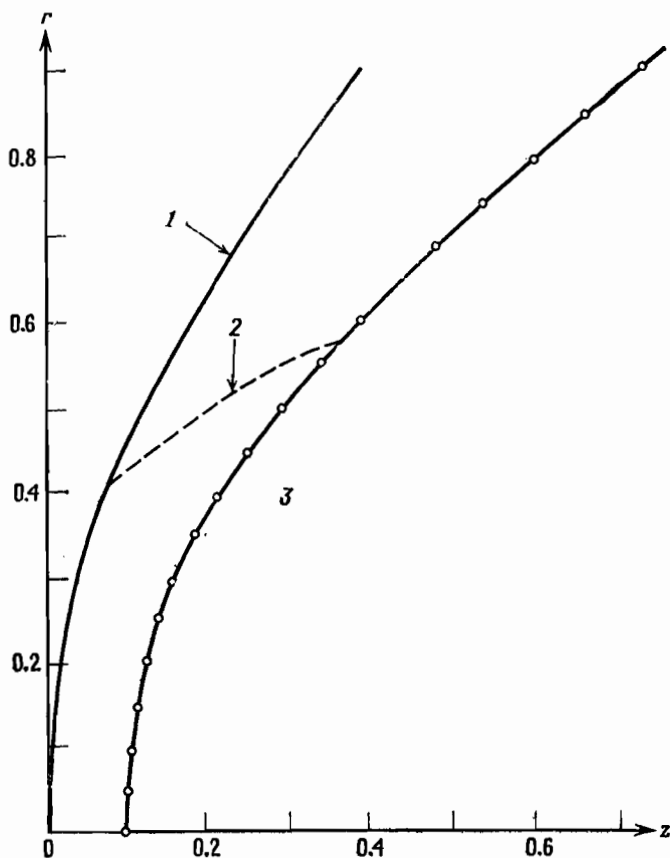


Рис. 17.8. Эскиз контура тела, рассчитанный Левисом.

1 — ударная волна; 2 — звуковая линия; 3 — тело.

Таким образом, метод степенных рядов может оказаться эффективным для решения аналитической задачи Коши, если при этом используются (1) алгебраические преобразования степенных рядов на ЭВМ, (2) арифметика с подсчетом значащих цифр и (3) аналитическое продолжение по методу Левиса,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ¹⁾

- Абрамовиц, Стиган (Abramowitz M., Stegun I. A.) [1964]. Handbook of mathematical functions.— Washington: Nat. Bureau of Stand., Appl. Math. Series. [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.]
- Арнольд В. И. [1971]. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука; 2-е изд.— М.: Наука, 1975.
- Ахиезер Н. И., Глазман И. М. [1950]. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Гостехиздат; 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1966.
- Ашенхёрст, Метрополис (Ashenurst R. L., Metropolis N. C.) [1959]. Unnormalized floating point arithmetic.— J. Assoc. Comput. Mach., v. 6, p. 415—428.
- Баернштейн (Baernstein A.) [1971]. Representation of holomorphic functions by boundary integrals.— Trans. Amer. Math. Soc., v. 160, p. 27—37.
- Банах (Banach S.) [1955]. Théorie des opérations linéaires.— New York, Chelsea Publ. Co.
- Барут (Barut A. O.) [1967]. The theory of the scattering matrix.— London; Macmillan.
- Беккер (Becker R.) [1922]. Stosswelle und Detonation.— Z. Physik, B. 8, S. 321.
- Берс Л. (Bers L.) [1958]. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics.— New York: John Wiley and Sons. [Имеется перевод: Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.— М.: ИЛ, 1961.]
- Бете Г., Солпитер Е. (Bethe H. A., Salpeter E. E.) [1957]. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms.— Springer. [Имеется перевод: Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами.— М.: Физматгиз, 1960.]
- Биркгоф (Birkhoff G.) [1962]. Helmholtz and Taylor instability.— In: Proc. of Symposia in Appl. Math., Amer. Math. Soc., v. 92, p. 13 ff.
- Биркгоф, Рота (Birkhoff G., Rota G.) [1962]. Ordinary differential equations.— Waltham (Mass.): Ginn and Co.
- Бликин, Тауб (Bleakney W., Taub A. H.) [1949]. Interaction of shock waves.— Rev. Mod. Phys., v. 21, p. 584—605.
- *Борисов Ал. А., Борисов А. А., Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. [1980]. Эволюция волн разрежения вблизи термодинамической критической точки.— Письма в ЖЭТФ, т. 31, вып. 11, 619—622.
- Вазов В. (Wasow W.) [1976]. Asymptotic expansions for ordinary differential equations.— Huntington (N. Y.): Krieger Pub. Co. [Имеется перевод изд. 1965 г.: Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.]
- Вайдман (Weidmann J.) [1971]. Oszillationsmethoden für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.— Math. Z., B. 119, S. 349—373.
- Вейнбергер (Weinberger H. F.) [1965]. A first course in partial differential equations.— New York: Blaisdell Pub. Co.
- Вернер (Werner P.) [1969]. Bemerkungen zur Theorie der L_p Räume.— J. für die reine und angew. Math., B. 239/240, S. 401—434.

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. В ссылках в тексте номера страниц приводятся по изданию, год выхода которого указан после фамилии автора.— *Прим. перев.*

- Винер (Wiener N.) [1930]. Generalized harmonic analysis.— *Acta Math.*, v. 55, p. 117—258.
- Гантмахер Ф. Р. [1953]. Теория матриц.— М.: Гостехиздат; 2-е изд.— М.: Наука, 1966.
- Гарабедян (Garabedian P. R.) [1964]. Partial differential equations.— New York: John Wiley and Sons.
- Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. [1959]. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— 2-е изд.— М.: Физматгиз.
- — [1958]. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Гостехиздат.
- — [1958]. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат.
- Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. [1961]. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз.
- Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. [1962]. Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы представлений.— М.: Физматгиз.
- Грей, Гаррисон (Gray H. L., Harrison C.) [1959]. Normalized floating-point arithmetic with an index of significance.— In: *Proc. Eastern Joint Computer Conference*.
- Гросс (Gross L.) [1966]. The Cauchy problem for the coupled Maxwell and Dirac equations.— *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 19, p. 1—15.
- Густафсон, Джонсон (Gustafson K., Johnson G.) [1974]. On the absolutely continuous subspace of a self-adjoint operator.— *Helv. Physica Acta*, v. 47, p. 163—166.
- Густафсон, Рейто (Gustafson K., Rejto P. A.) [1973]. Some essentially self-adjoint Dirac operators with spherically symmetric potentials.— *Israel Jour. Math.*, v. 14, p. 63—75.
- Данфорд Н., Шварц Дж. Т. (Dunford N., Schwartz J. T.) [1958]. Linear operators. Part I: General theory.— New York: Interscience. [Имеется перевод: Линейные операторы. Ч. 1. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.]
- — [1963]. Linear operators. Part II: Special Theory.— New York: Interscience. [Имеется перевод: Линейные операторы. Ч. 2. Спектральная теория.— М.: Мир, 1966.]
- Дафф (Duff R. E.) [1962]. Slip line instability.— In: *Proc. of Symposia in Appl. Math.*, Amer. Math. Soc., v. 13, p. 77ff.
- Джон (John F.) [1971]. Partial differential equations.— Springer.
- Джонсон (Johnson G.) [1968]. Harmonic functions on the unit disc. I, II.— *Ill. J. Math.*, v. 12, p. 366—396.
- Дим, Маккин (Dym H., McKean H. P.) [1972]. Fourier series and integrals.— New York: Academic Press.
- Ди Прима, Хабетлер (DiPrima R. C., Habetler G. J.) [1968]. A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability.— *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, v. 34, p. 218—227.
- Дирак П. (Dirac P. A. M.) [1930, 1935, 1947, 1958]. The principles of quantum mechanics.— Ed. 1, 2, 3, 4.— Oxford: Clarendon Press. [Имеется перевод: Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.]
- Донoghю (Donoghue W. F.) [1969]. Distributions and Fourier transforms.— New York: Acad. Press.
- Жислин Г. М., Сигалов А. Г. [1965]. О спектре оператора энергии для атомов с неподвижными ядрами на подпространствах, отвечающих неприводимым представлениям групп перестановок.— *ИАН, сер. матем.*, 29, 835—860; О некоторых математических проблемах в теории атомных спектров.— *ИАН, сер. матем.*, 29, 1261—1272.
- *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. [1966]. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука,

- Зигмунд А. (Zygmund A.) [1952]. Trigonometrical series.— New York: Chelsea Pub. Co. [Имеется перевод изд. 1959—1960 гг.: Тригонометрические ряды. Т. 1, Т. 2.— М.: Мир, 1965.]
- Йоргенс (Jörgens K.) [1967]. Zur Spektraltheorie der Schrödingeroperatoren.— Math. Zeitschr., B. 96, S. 355—372.
- [1970]. Lineare Integraloperatoren.— Stuttgart: B. G. Teubner.
- Йоргенс К., Вайдман И. (Jörgens K., Weidmann J.) [1973]. Spectral properties of Hamiltonian operators.— Springer. [Имеется перевод: Спектральные свойства гамильтоновых операторов.— М.: Мир, 1976.]
- Йоргенс Реллих (Jörgens K., Rellich F.) [1976]. Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialoperatoren (bearbeitet von J. Weidmann).— Springer.
- Йордан, фон Нейман (Jordan P., von Neumann J.) [1935]. On inner products in linear metric spaces.— Ann. of Math., v. 36, p. 719—723.
- Юст Р. (Jost R.) [1965]. The general theory of quantized fields.— Providence: Amer. Math. Soc. [Имеется перевод: Общая теория квантованных полей.— М.: Мир, 1967.]
- Канторович Л. В., Акилов Г. П. [1959]. Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз. [Книга переиздана под названием Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.]
- Карлесон (Carleson L.) [1966]. On the convergence and growth of partial sums of Fourier series.— Acta Math., v. 116, p. 135—157.
- Като Т. (Kato T.) [1966]. Perturbation theory for linear operators.— Springer. [Имеется перевод: Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.]
- Келли Дж. (Kelley J. L.) [1955]. General topology.— Princeton: Van Nostrand. [Имеется перевод: Общая топология.— М.: Наука, 1968.]
- Кноп (Кноп К.) [1945, 1947]. Theory of functions. Vol. I. Vol. II.— New York: Dover Publ.
- Коддингтон Э. А., Левинсон Н. (Coddington E. A., Levinson N.) [1955]. Theory of ordinary differential equations.— New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.]
- * Колмогоров А. Н., Фомин С. В. [1976]. Элементы теории функций и функционального анализа.— 4-е изд.— М.: Наука.
- Курант Р. (Courant R.) [1950]. Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces.— New York: Interscience. [Имеется перевод: Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности.— М.: ИЛ, 1953.]
- Курант, Гильберт (Courant R., Hilbert D.) [1953, 1962]. Methods of mathematical physics, Vol. I. Vol. II.— New York: Interscience. [Имеется перевод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I.— М.: Гостехиздат, 1951; Курант Р.. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.]
- Курант Р., Фридрихс К. (Courant R., Friedrichs K. O.) [1948]. Supersonic flow and shock waves.— New York: Interscience. [Имеется перевод: Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.]
- Лакс (Lax P. D.) [1954]. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.— Comm. Pure Appl. Math., v. 7, p. 159—193.
- [1957]. Hyperbolic systems of conservation laws. II.— Comm. Pure Appl. Math., v. 10, p. 537—566.
- Лакс П., Филлипс Р. (Lax P. D., Phillips R. S.) [1967]. Scattering theory.— New York, Academic Press. [Имеется перевод: Теория рассеяния.— М.: Мир, 1971.]
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [1954]. Механика сплошных сред.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат.
- Ланцош К. (Lanczos C.) [1956]. Applied analysis.— Englewood Cliffs: Prentice Hall. [Имеется перевод: Практические методы прикладного анализа.— М.: Физматгиз, 1961.]

- Левис (Lewis G. E.) [1959]. Analytic continuation using numerical methods.— Ph. D. Thesis, New York Univ.; In: *Methods in computational physics* Vol. 4.— New York, Academic Press, 1965, p. 45—81.
- Ленер (Lehner J.) [1962]. The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab.— *J. Math. and Mech.*, v. 11, p. 173—181.
- Ленер, Уинг (Lehner J., Wing G. M.) [1955]. On the spectrum of an unsymmetric operator using in transport theory of neutrons.— *Comm. Pure and Appl. Math.*, 8, p. 217—234.
- [1956]. Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry.— *Duke Math. J.*, v. 23, p. 125—142.
- Магнус, Оберхеттингер (Magnus W., Oberhettinger F.) [1943]. *Formulas and theorems for the functions of mathematical physics*.— New York: Chelsea Pub. Co.
- Майстерс (Meisters G. H.) [1971]. Translation-invariant linear forms and a formula for the Dirac measure.— *J. Funct. Anal.*, v. 8, p. 173—188.
- Маклаффи (MacDuffee C. C.) [1946]. *The theory of matrices*.— New York, Chelsea Pub. Co.
- Мессиа А. (Messiah A. M. L.) [1958]. *Quantum mechanics*.— New York: Interscience. [Имеется перевод: *Квантовая механика*. Т. 1, Т. 2.— М.: Наука, 1978, 1979.]
- Морс Ф., Фешбах Г. (Morse P. M., Feshbach H.) [1953]. *Methods of theoretical physics*. Vol. I. Vol. II.— New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: *Методы теоретической физики*. Т. 1. Т. 2.— М.: ИЛ, 1958, 1960.]
- Натансон И. П. [1950]. *Теория функций вещественной переменной*.— М.: Гостехиздат; 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1957.
- Нейман фон (Neumann J. von) [1929]. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermite-scher Funktionaloperatoren.— *Math. Annalen*, B. 102, S. 49—131.
- [1931]. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren.— *Math. Annalen*, B. 104, S. 570—578.
- Путнам (Putnam C. R.) [1967]. *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*.— Berlin: Springer.
- Райт (Wright J. D. M.) [1973]. All operators on a Hilbert space are bounded.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 79, p. 1247—1250.
- Рейто (Rejto P. A.) 1971. On reducing subspaces for one-electron Dirac operators.— *Israel J. Math.*, v. 9, p. 111—143.
- Рисс Ф., Секефальви-Надь (Riesz F., Sz. Nady B.) [1953]. *Leçons d'analyse fonctionnelle*.— Budapest: Akadémiai Kiadó. [Имеется перевод: *Лекции по функциональному анализу*.— М.: ИЛ, 1954.]
- Рихтмайер (Richtmyer R. D.) [1957]. Detached shock calculations by power series.— *Rep. NYO-7973*, Courant Inst., New York Univ.; *Annals of the New York Academy of Science*, v. 86, p. 828—842.
- [1960]. Flow diagrams and the estimation of significance.— *Rep. TID 6199*, New York Univ.
- Рихтмайер Р., Мортон К. (Richtmyer R. D., Morton K. W.) [1967]. *Difference methods for initial-value problems*.— New York: Wiley—Interscience. [Имеется перевод: *Разностные методы решения краевых задач*.— М.: Мир, 1972.]
- Росс, Сангрен (Roos B. W., Sangren W. C.) [1962]. Spectral theory of Dirac's radial relativistic wave equation.— *J. Math. Phys.*, v. 3, p. 882—890.
- Соболев С. Л. [1950]. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ.
- Соловей (Solovay R. M.) [1970]. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.— *Ann. of Math.* (2), v. 92, p. 1—56.
- Спанье, Гелбард (Spanier J., Gelbard E. M.) [1969]. *Monte Carlo principles and neutron transport problems*.— Reading: Addison Wesley.
- Стон (Stone M. H.) [1932]. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*.— Providence: Amer. Math. Soc.

- Сэттинджер (Sattinger D. H.) [1970]. The mathematical problem of hydrodynamic stability.— *J. Math. and Mech.*, v. 19, p. 797—817.
- Тейлор (Taylor A. E.) [1958]. Introduction to functional analysis.— New York: John Wiley and Sons.
- Тейлор (Taylor J. R.) [1972]. Scattering theory.— New York: John Wiley and Sons.
- Титчмарш Э. Ч. (Titchmarsh E. C.) [1946]. Eigenfunction expansions associated with second order differential equations. [Имеется перевод: Разложения по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. I.— М.: ИЛ, 1960.]
- Трон (Thron W.) [1966]. Topological structures.— New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. (Whittaker E. T., Watson G. N.) [1927]. A course of modern analysis.— Cambridge Univ. Press. [Имеется перевод: Курс современного анализа.— 2-е изд., Ч. I. Ч. 2.— М.: Физматгиз, 1962, 1963.]
- Феллер В. (Feller W.) [1950]. An introduction to probability theory and its applications. Vol. I. Vol. II.— New York: John Wiley and Sons. [Имеется перевод: Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. Т. 2.— М.: Мир, 1967.]
- Фефферман (Fefferman C.) [1971]. On the divergence of multiple Fourier series.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 77, p. 191—195.
- [1971]. On the convergence of multiple Fourier series.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 77, p. 744—745.
- Фридман (Friedman A.) [1969]. Partial differential equations.— New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Халмош П. (Halmos P. R.) [1950]. Measure theory.— New York: Van Nostrand. [Имеется перевод: Теория меры.— М.: ИЛ, 1953.]
- [1951]. Introduction to Hilbert space and theory of spectral multiplicity.— New York: Chelsea Pub. Co.
- Хёрмандер Л. (Hörmander L.) [1969]. Linear partial differential operators.— Springer. [Имеется перевод изд. 1963 г.: Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.]
- Хилле (Hille E.) [1962]. Analytic function theory. Vol. II.— Boston: Ginn and Co.
- Хилле Э., Филлипс Р. (Hille E., Phillips R. S.) [1957]. Functional analysis and semi-groups.— Providence: Amer. Math. Soc. [Имеется перевод: Функциональный анализ и полугруппы.— М.: ИЛ, 1962.]
- Шварц (Schwartz L.) [1950, 1951]. Théorie des distributions. Tom I. Tom II.— Paris, Hermann Cie.
- Шифф Л. (Schiff L. I.) [1955]. Quantum mechanics.— New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1959.]

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрамовиц (Abramowitz M.) 312, 413, 467
 Акилов Г. П. 469
 Арнольд В. И. 467
 Ахизер Н. И. 186, 200, 365, 467
 Ашенхёрст (Ashenhurst R. L.) 463, 467
- Баернштейн (Baernstein A.) 202, 467
 Банах (Banach S.) 337, 467
 Барут (Barut A. O.) 467
 Беккер (Becker R.) 432, 467
 Берри (Berry A. C.) 317
 Берс (Bers L.) 467
 Бете (Bethe H. A.) 275, 276, 467
 Биркгоф (Birkhoff G.) 467
 Бликни (Bleakney W.) 454, 467
 Борисов А. А. 467
 Борисов Ал. А. 431, 467
- Вазов (Wasow W.) 467
 Вайдман (Weidmann J.) 265, 269, 278, 467, 469
 Ватсон (Watson G. N.) 471
 Вейль (Weyl H.) 11, 226, 269, 362
 Вейбергер (Weinberger H. F.) 467
 Вернер (Werner P.) 112, 113—115, 467
 Вигнер (Wigner E.) 11
 Виленкин Н. Я. 137, 339—342, 345, 468
 Винер (Wiener N.) 84, 87, 88, 468
- Ганкель (Hankel) 254
 Гантмахер Ф. Р. 284, 468
 Гарабедян (Garabedian P. R.) 132, 444, 468
 Гаррисон (Harrison C.) 463, 468
 Гелбард (Gelbard E. M.) 326, 470
 Гельфанд И. М. 39, 42, 57, 59, 79, 80 137, 339—342, 345, 468
 Гильберт (Hilbert D.) 10, 92, 131, 139, 140, 271, 282, 444, 469
 Глазман И. М. 186, 200, 365, 467
 Граев М. И. 468
 Грей (Gray H. L.) 463, 468
- Гросс (Gross L.) 420, 468
 Густафсон (Gustafson K.) 273, 274, 278, 279, 468
- Данфорд (Dunford N.) 60, 140, 295, 296, 329, 338, 468
 Дафф (Duff R. E.) 454, 468
 Джон (John F.) 468
 Джонсон (Johnson G.) 201—203, 273, 274, 468
 Ди Прима (DiPrima R. C.) 294, 468
 Дим (Dym H.) 468
 Дирак (Dirac P. A. M.) 11, 35, 36, 45, 53, 57, 468
 Доногю (Donoghue Wm. F.) 468
- Жислин Г. М. 269, 468
 Жордан (Jordan) 304
- Зарецкий М. А. 337
 Зельдович Я. Б. 432, 468
 Зигмунд (Zygmund A.) 469
- Йоргенс (Jørgens K.) 241, 247—249, 255, 257, 265, 267, 269, 469
 Йордан (Jordan P.) 19, 469
 Йост (Jost R.) 363, 469
- Канторович Л. В. 469
 Карлеман (Carleman T.) 295
 Карлесон (Carleson L.) 94, 469
 Като (Kato T.) 168, 173, 221, 265, 266, 273, 278, 279, 285, 287, 290, 469
 Кейс (Case K.) 277
 Келли (Kelley J. L.) 67, 469
 Кноп (Knopp K.) 233, 469
 Коддингтон (Coddington E. A.) 238, 240, 245, 247, 249, 251, 469
 Колмогоров А. Н. 23, 340, 469
 Крускал (Kruskal M.) 11
 Курант (Courant R.) 10, 92, 131, 139, 140, 282, 431, 444, 446, 458, 469
 Кутателидзе С. С. 467

- Лакс (Lax P. D.) 151, 423, 469
Ландау Л. Д. 451, 455, 469
Ланцош (Lanczos C.) 469
Лебег (Lebesgue) 304
Левинсон (Levinson N.) 238, 240, 245, 247, 249, 251, 469
Левис (Lewis G. E.) 455, 465, 466, 470
Лебнер (Lehner J.) 411, 470
Лифшиц Е. М. 451, 455, 469
- Магнус (Magnus W.) 264, 470
Майстерс (Meisters G. H.) 50, 470
Макдаффи (MacDuffee C. C.) 470
Маккин (McKean H. P.) 468
Малер (Mahler K.) 88
Мессиа (Messiah A.) 156, 470
Метрополис (Metropolis N. C.) 463, 467
Мисра (Misra B.) 362
Морс (Morse P. M.) 470
Мортон (Morton K. W.) 306, 410, 415, 418, 432, 470
- Наймарк М. А. 294
Накоряков В. Е. 467
Натансон И. П. 63, 117, 305, 337, 470
Нейман фон (Neumann J. von) 8, 11, 19, 173, 185, 269, 357, 362, 469, 470
- Оберхеттингер (Oberhettinger F.) 264, 470
- Планк (Planck M.) 9
Путнам (Putnam C. R.) 363, 470
- Райзер Ю. П. 432, 468
Райт (Wright J. D. M.) 61, 470
Рейто (Rejto P. A.) 278, 468, 470
Реллих (Rellich F.) 241, 247—249, 255, 257, 267, 469
Ренер (Rehner N.) 113
Рикарт (Rickart C. E.) 360
Риман (Reimann B.) 446
Рисс (Riesz F.) 86, 112, 114, 271, 328, 329, 470
Рихтмайер (Richtmyer R. D.) 410, 415, 418, 432, 455, 463, 470
Роос (Roos B. W.) 259, 470
Рота (Rota G.) 467
Рюэль (Ruelle D.) 11
- Сангрен (Sangren W. C.) 259, 470
Секефальви-Надь (Sz. Nady B.) 86, 112, 271, 329, 470
- Сигалов А. Г. 269, 468
Соболев С. Л. 124, 470
Соловей (Solovay R. M.) 61, 470
Солпитер (Salpeter E. E.) 275, 276, 467
Спанье (Spanier J.) 326, 470
Стиган (Stegun I. A.) 312, 413, 467
Стоун (Stone M. H.) 362, 470
Сэттинджер (Sattinger D. H.) 145, 295, 471
- Такенс (Takens F.) 11
Тауб (Taub A. H.) 454, 467
Тейлор А. (Taylor A. E.) 471
Тейлор Дж. (Taylor J. R.) 471
Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 246, 254, 471
Трон (Thron W.) 67, 97, 471
- Уинг (Wing G. M.) 411, 470
Уиттекер (Whittaker E. T.) 471
- Феллер (Feller W.) 304, 306, 317, 323, 335, 336, 341, 471
Феферман (Fefferman C.) 94, 95, 471
Фешбах (Feshbach H.) 470
Филлипс (Phillips R. S.) 406, 409, 418, 469, 471
Фомин С. В. 23, 469
Фридман (Friedman A.) 471
Фридрихс (Friedrichs K. O.) 411, 431, 446, 458, 469
- Хабетлер (Habetler G. J.) 294, 468
Халмош (Halmos P. R.) 29, 338, 471
Харди (Hardy G. H.) 9
Хёрмандер (Hörmander L.) 471
Хилле (Hille E.) 33, 202, 406, 409, 418, 471
- Шварц Дж. (Schwartz J. T.) 60, 140, 295, 296, 329, 338, 468
Шварц Л. (Schwartz L.) 35, 36, 42, 47, 75, 329, 471
Шварцшильд (Schwarzschild K.) 11
Шилов Г. Е. 57, 59, 79, 80, 468
Шифф (Schiff L. I.) 274, 471
- Эйнштейн (Einstein A.) 9
Эссен (Esseen G.) 317

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- автоионизация 270
 автокорреляция 82
 аддитивность счетная 335
 аксиомы линейного пространства 16
 алгебра банахова 155
 — борелева 335
 — ограниченных операторов 155, 359
 — операторов 359
 аппроксимации δ -функции 46—47
 аппроксимация в среднем 95
 арифметика с подсчетом значащих цифр 455, 462—464
 — — — — — ненормализованная 463
 атом водородоподобный 226
 — — нерелятивистский 256
 — — релятивистский 258
Арцела — Асколи теорема 140
Арцела теорема 140
- базис 29
 — *Хамеля* 60
Бальмера формула 256
Банаха — Зарецкого теорема 337
Бернштейна теорема 23
Берри — Эссена теорема 317
Бесселя неравенство 27
 — уравнение 252
 — функция 252
 блок жорданов 197
Больцано — Вейерштрасса теорема 63
Буняковского неравенство 18
- вариация отрицательная 346
 — положительная 346
 — функции полная 345
Вейерштрасса теорема аппроксимационная 92
 вектор корневой 197
 — порождающий 364
 — собственный матрицы 15
 — — обобщенный 197, 283
 вектор-столбец 13
 вектор-строка 13
- векторы линейно зависимые 14
 — ортогональные 14
 — — в гильбертовом пространстве 26
 — — — конечномерном пространстве 14
 — ортонормированные 14
 — — в гильбертовом пространстве 26
 — — — — несепарабельном пространстве 29
 — — — — конечномерном пространстве 14
 вероятность 297
 — в гильбертовом пространстве 339
 — — квантовой механике 109
 — маргинальная 321
 — условная 321
 возмущение спектра 267
 волна звуковая 433
 — ударная 429
 — — разрежения 430
 волновое уравнение 377, 421
 волновые процессы 393—398
 выборка 318—321
 выборочное пространство 334
- Гамильтона* оператор системы 398
 гамильтониан *Дирака* 274
 — системы 398
Ганкеля функции 253
 гауссово распределение вероятности 311—312
 — *Гейне* теорема 63
Гельмгольца неустойчивость 449
 генератор инфинитезимальный полу-
 группы 406
 — случайных чисел 324
Гёльдера неравенство 112
Гильберта — Шмидта оператор 287
Грама — Шмидта процедура ортого-
 нализации 27
 график оператора 169
 — — повернутый 169
Грина формула 133
 — функция см. *Функция Грина*
 группа 405
Гюгонио кривая 430

- Дирихле* задача 130
 — интеграл 138
 — — обобщенный 147
 — принцип 139
 дисперсия 306
 — выборочная 319
 дифференцирование распределений 48
 дополнение ортогональное в гильбертовом пространстве 30
 — — конечномерном пространстве 14
- задача гидродинамической устойчивости 145—146
 — *Дирихле* 130
 — *Коши* 373
 — *Неймана* 131
 — о сглаживании распределения 47
 — об отсоединенной ударной волне 455
 — *Орра* — *Зоммерфельда* 294
 — *Пуассона* 130
 — с начальными данными 371—378, 388, 414
 — — — в гидродинамике 437—439
 — — — корректно поставленная 375
 — — — кусочно аналитическая 452
 — — — некорректно поставленная 375
 задачи неоднородные 414
 — теории потенциала 129
 — — — их эквивалентность 130—131
 законы сохранения 55, 423, 426
 замена независимой переменной в распределении 52
 замыкание множества 63
 — оператора 166
 заряд двойного слоя 45
 — монополярный 45
 — мультиполярный точечный 45
 — простого слоя 45
 — точечный 45
- Зеемана* эффект 267
 значение ожидаемое 305
 — собственное 284
 — — матрицы 15
 — — — его алгебраическая кратность 284
 — — — геометрическая кратность 284
 значения граничные аналитических функций 200
 — — распределений 123
- идентификация функций с распределениями 56
- изометрия 186
 изоморфизм гильбертовых пространств 28, 29
 инварианты *Римана* 436
 индекс собственного значения 284
 индексы дефекта 185
 интеграл *Дирихле* 138
 — — обобщенный 147
 — — неопределенный от распределения 50
 — — определенный в L^2 107
 — *Стилтьеса* 83, 305
 — — многомерный 119, 310
 — *Фурье* 87
 — *Фурье* — *Стилтьеса* 87
 интегрирование в L^2 107
 — — по частям для распределений 109
- Кантора* функция 56—57, 302
Карлемана теорема 295—296
 класс борелев 333
 — *Харди* 201
 — *Шварца* пробных функций 39, 72, 73
 — эквивалентности 386
 кольца нормированные 155
 — операторные 155
 контактный разрыв 429
 коразмерность линейного многообразия 185
 корректность по *Адамару* 389
Коши задача 373
Коши — *Ковалевской* теорема 443
 — неравенство 20
 — последовательность 20. См. также Последовательность *Коши*
Коши — *Римана* уравнения см. Уравнения *Коши* — *Римана*
 коэффициент корреляции 309
 — — выборочный 321
 коэффициенты *Фурье* обобщенные 26
 кратность алгебраическая собственнo-го значения 284
 — геометрическая собственнo-го значения 284
 кривая *Гюгонио* 430
 — характеристическая 435, 439
Кэли преобразование 186
 — — обратное 187
- Лагранжа* множитель 138
Лапласа оператор см. Оператор *Лапласа*
 лемма *Реллиха* 142
 — *Римана* — *Лебега* 116
 — *Урысона* 67

линия звуковая 456
 Лузина теорема 117

Максвелла уравнения 401
 матрица ковариационная 309
 — — выборочная 320
 — нильпотентная 197
 — нормальная 15
 — плотности 356—359
 — положительно определенная 15
 — — полуопределенная 15
 — самосопряженная 155
 — спектральная 250
 — транспонированная 13
 — унитарная 15
 — эрмитова 15, 155
 — эрмитово сопряженная 13
Маха отражение 453
 — стебель 454
 — число 457
 мера 46, 327—339
 — вероятностная 307, 309, 311, 341
 — — многомерная 310—311
 — — на $\mathbb{R}^2$ 309
 — гауссова 342
 — лебегова 333, 334
 — ограниченная 330
 — положительная 334
 метод Монте-Карло 323—326
 — преобразования *Фурье* для дифференциальных операторов 228—230
 — степенных рядов 455, 460—462
 — *Фейера* для ряда *Фурье* 76
 — *Фробениуса* 240
 — *Хартри* — *Фока* 7
 методы вариационные 138
Минковского неравенство 112
 многообразие линейное замкнутое 29
 множество бесконечное счетное 21
 — векторов полное ортонормированное 29
 — замкнутое 30, 62
 — измеримое 333
 — индексов 29
 — компактное 63
 — меры нуль 37, 303, 333, 387
 — несчетное 22
 — открытое 62
 — плотное 25
 — резольвентное 175
 — секвенциально компактное 63
 — совершенное 273
 — цилиндрическое 340
 множитель *Лагранжа* 138
 моделирование 323—326
 модель *Соловья* 61

моменты распределения 306
 мощность континуума 22
 — множества 22

Наймарка теорема 294
Неймана задача 131
 — функция 252
фон Неймана теорема 187
 неопределенность наблюдаемой 355
 непрерывность в $\mathcal{D}$ 42
 — операторнозначной функции 213
 — по норме 213
 — сильная 213, 405
 — слабая 213
 — функционала 42
 неравенство *Бесселя* 27
 — *Буняковского* 18
 — *Гельдера* 112
 — *Коши* 20
 — *Минковского* 112
 — треугольника 18
 — *Чебышева* 320
 — *Шварца* 18
 неустойчивость *Гельмгольца* 449
 — *Тейлора* 452
 — ударных волн разрежения 431—433
 неэквивалентность банаховых пространств 382
 норма 16
 — в L^2 99
 — *Гильберта* — *Шмидта* 287
 — оператора 153
 носитель ограниченный 38
 — распределения 70
 — функции 38, 63
 нуль-пространство оператора 194
 область значений оператора 153
 — — — числовая 173
 — определения оператора 153
 оболочка линейная 14
 — — замкнутая 30
 образование ударных волн спонтанное 446—449
 ограничение распределения на $C_0^\infty(\Omega)$ 103
 — медленного роста на C_0^∞ 80
 ожидание математическое 305, 354
 оператор вполне непрерывный 285
 — вырожденный 289
 — *Гамильтона* системы 398
 — *Гильберта* — *Шмидта* 287
 — — — интегральный 160, 290
 — дифференциальный с точки зрения теории распределений 160

- оператор замкнутый 166, 169
 — замыкаемый 166
 — идемпотентный 193
 — интегральный 159
 — компактный 285
 — *Лангаса* 126—135, 138—140, 143—152, 261—265
 — — в ограниченной области 280
 — — его резольвента 262
 — — — собственные функции 138
 — — — их полнота 144, 149
 — — — — существование 143
 — — — спектр 262
 — — — спектральные проекторы 262
 — линейный 153, 383
 — максимальный 190
 — минимальный 236—237
 — неотрицательный 172
 — нормальный 180
 — обратный 154
 — ограниченный 153, 283
 — положительно определенный 173
 — — полуопределенный 173
 — положительный 172
 — преобразования *Фурье* 160
 — радиального импульса 170
 — разрешающий (обобщенный) 391
 — с компактной резольвентой 291—296
 — — простым спектром 363
 — самосопряженный 156, 158
 — — его второе определение 190
 — сглаживания 47—48, 120
 — сдвига 141
 — симметрический 156, 158
 — скалярного типа 198
 — сопряженный 156
 — спектральный 198
 — существенно самосопряженный 158, 182, 190
 — теории переноса 265
 — унитарный 158
 — частично изометрический 221
 — числа частиц 178
 — *Шредингера* 265
 — *Штурма — Лиувилля* 162, 164
 — — — особый 236—251
 — — — разложение по его собственным функциям 244
 — — — случай (тип) предельной окрестности 239, 247
 — — — — точки 239, 242
 — — — регулярный 230
 — — — его собственные функции 231—233
 — — — — их полнота 233—234
 оператор *Штурма — Лиувилля*, кратность спектральная 250
 — — — общие граничные условия 234
 — — — существование и единственность решений 231—233
 — — — функция *Грина* 233
 — эрмитов 156, 158
 — ядерный 288
 оператор $-(d/dx)^2$ 227
 оператор $-id/dx$ 226
 операторы уничтожения и рождения 177
 отклонение стандартное 306
 отражение *Маха* 453

Парсеваля равенство 27, 77
 перенос нейтронов 410
 плотность условной вероятности 322
 площадь единичной сферы в R^n 129
 поверхность скольжения 429
 — характеристическая 441—443
 подпространство абсолютно непрерывное 271
 — алгебраическое собственное 284
 — гильбертова пространства 29
 — корневое 197
 — порожденное векторами 14
 — собственное 191
 — — обобщенное 197
 покрытие множества открытое 63
 поле борелево 333
 — векторное безвихревое (потенциальное) 148
 — — соленоидальное (бездивергентное) 148
 полиномы ортогональные 91
 полнота метрического пространства 97
 подгруппа 405
 полунорма 118, 386
 пополнение меры 333
 последовательности *Коши* эквивалентные 98
 последовательность *Коши* 20
 — — в метрическом пространстве 97
 — — сходящаяся 97
 — — полная ортонормированная 27
 потенциал 398
 правило параллелограмма 18
 представление в квантовой механике импульсное 120
 — — — координатное 120
 — каноническое самосопряженного оператора 209
 — спектральное 365
 преобразование *Кэли* 186

- преобразование *Кэли* обратное 187
 — *Фурье* 75
 — — в L^1 115
 — — в L^2 119
 — — его аналитичность 79
 — — как непрерывное отображение в $\mathcal{S}$ 76
 — — — — — $\mathcal{S}'$ 78
 — — обратное 76
 — — пробных функций 75, 79
 — — распределения медленного роста 78
 — — — — — не обязательно медленного роста 79
 — — — — — периодического 81
 — — — — — с ограниченным носителем 79
 — — свертки 128
 принцип *Дирихле* 139
 — неопределенности 355
 — *Паули* 269
 — составления из частей 70
 — стягивания 66
 проблема моментов 306
 продолжение аналитическое 465—466
 проектор 192, 193
 — ортогональный 194
 проекторы спектральные 194
 произведение двойное скалярное 146
 — распределений прямое 136
 — распределения и функции из C_0^∞ 46
 — скалярное 13
 — — в гильбертовом пространстве 17
 — — — — — конечномерном пространстве 13
 производная распределения 48
 — — частная смешанная 49
 пространства типа L^1, L^p, L^∞ 112—115
 — — L_σ^2 118
 пространство банахово 19, 379
 — векторное 16
 — вероятностное 335
 — выборочное 334
 — гильбертово 17
 — — аналитических функций 33
 — — вещественное 17
 — — несепарабельное 25
 — — сепарабельное 25
 — линейное 16
 — — нормированное 16
 — — со скалярным произведением 97
 — локально компактное 32
 — полное метрическое 97
 — предгильбертово 97
 — равномерное 97
 — рефлексивное 115
 — *Соболева* 121, 140—143
 — сопряженное 114, 385
 пространство состояний для задачи о начальных данных 378
 — *Фока* 26, 381
 процедура ортогонализации *Грама* — *Шмидта* 27
 — поляризации 19
Пуассона задача 130
 — уравнение см. Уравнение *Пуассона*
 — формула интегральная 133
 равенство *Парсевала* 27, 77
 радиус *Шварцшильда* 11
Радона — *Никодима* теорема 336—338
 разбиение единицы 69
 разложение единицы 192, 206, 207
 — (декомпозиция) неубывающей функции 270
 — по собственным функциям 244, 251
 — полярное оператора 221
 — спектральное эрмитовой матрицы 192
 размерность вещественная 14
 — гильбертова пространства 29
 ранг матрицы 284
 распределение 36
 — в L^2 98
 — — гармоническое 152
 — инвариантное относительно сдвига 49
 — медленного роста 74
 — положительное 328
 — с сосредоточенным в точке носителем 71
 — сферически симметричное 53
 распределение вероятности абсолютно непрерывное 304
 — — атомное 304
 — — двумерное 307
 — — дискретное 304
 — — гауссово 311—312
 — — его характеристическая функция 306
 — — многомерное 298
 — — одномерное 298
 — — сингулярное 304
 расширение оператора 153
 регуляризация каноническая 59
 — сингулярных функций 58
 резольвента оператора 175, 226—228
Реллиха лемма 142
Ренкина — *Гюгонио* условия см. Условия *Ренкина* — *Гюгонио*
 решение слабое 55
 — — консервативной системы 426
 — — строгое 373, 388

- решение фундаментальное 374—378
Римана инварианты 436
Римана — *Лебега* лемма 116
Рисса теорема о представлении мер 328
Рисса *Ф.* теорема 114
Рисса — *Фишера* теорема 29
Рисса — *Фреше* теорема о представлении 31
 рост на бесконечности 74
 — медленный 74
 — — распределений 74
 — — функций 74
 ряд *Фурье* многомерный 91
 — — обобщенный 92
 — — сходящийся 90
- самосопряженность формальная операторов 231
 свертка 127
 — распределений 127, 135, 137
 — — ее ассоциативность 137
 — — возможная неассоциативность 137
 — — коммутативность 137
 — функций 127
 свойства распределений локальные 64
 сглаживание 47—48
 сглаживатель 48
 семейство спектральное $\{E_t\}$ 208, 211, 221, 223, 226—228
 — (последовательность) функций равномерно непрерывное (-ая) 140
 сепарабельность 25
 система аксиом *Цермело* — *Френкеля* 61
 — гиперболическая 434
 — законов сохранения 423, 426
 — коммутирующих наблюдаемых полная 368—370
 след матрицы 284
Соболева пространство 121, 140—143
 соотношения взаимности 135
 — коммутации канонические 359
 — — классические 361, 362
 — — в форме *Вейля* 361, 362
 — рекуррентные 241
 сопротивление контактное 135
 — электрическое 134
 состояние системы 348
 спектр абсолютно непрерывный 270
 — в банаховой алгебре 360
 — непрерывный 87, 175
 — — в смысле *Гильберта* 272
 — — сингулярный 88
 — — энергетический 88
- спектр оператора 174
 — — его изменение при расширении оператора 180
 — остаточный 175
 — простой 363
 — самосопряженного оператора 179
 — существенный 268
 — точечный 174
 — унитарного оператора 179
 — чисто линейчатый 87, 88
 — — точечный в смысле *Гильберта* 271
 — энергетический 83, 84
 среднее выборочное 319
 стебель *Маха* 454
 степени дробные неотрицательного оператора 220
Стилтьеса интеграл 83, 305
 — — многомерный 119, 310
Стоуна — *фон Неймана* теорема 362—363
 стремление к нулю (обращение в нуль) на бесконечности 111, 124
 сумма операторов 157
 сходимость в банаховом пространстве сильная 385
 — — — слабая 385
 — — гильбертовом пространстве сильная 32
 — — — слабая 32
 — — среднем 90
 — — $\mathcal{D}$ 42
 — — $\mathcal{S}$ 73
 — ограниченных операторов 385
 — — в банаховом пространстве 385
 — — равномерная (по норме) 385
 — — сильная 385
 — — слабая 385
 — распределений 47
 — ряда *Фурье* поточечная 90, 94
- Тейлора* неустойчивость 452
 теорема *Арцела* 140
 — *Арцела* — *Асколи* 140
 — *Банаха* — *Зарецкого* 337
 — *Бернштейна* 23
 — *Берри* — *Эссена* 317
 — *Больцано* — *Вейерштрасса* 63
 — *Бореля* о покрытиях 63
 — *Вейерштрасса* аппроксимационная 92
 — *Гейне* — *Бореля* 63
 — *Карлемана* 295—296
 — компактности для пространства *Соболева* 140—143
 — *Коши* — *Ковалевской* 443

- теорема *Лузина* 117
 — *Наймарка* 294
 — *фон Неймана* 187
 — о замкнутом графике 168
 — — проекции 14—15, 30
 — — расширении мер 329
 — — — ограниченного оператора 154
 — — связи нуль-пространства и области значений 170, 187
 — *Радона — Никодима* 336—338
 — *Райта* 61
 — *Рисса* о представлении мер 328
 — *Ф. Рисса* 114
 — *Рисса — Фишера* 29
 — *Рисса — Фреие* о представлении 31
 — *Стоуна — фон Неймана* 362—363
 — *Хилле — Иосиды* 409
 — центральная предельная 315—318
 — *Цермело* 23
 — *Шварца* о ядре 136
 — *Шрёдера — Бернштейна* 23
 — *Шура* 198
Титчмарша формула 246
 точка внутренняя 62
 — предельная в гильбертовом пространстве 30
 — регулярная особая 240
 — тройная 454
 транспонирование матрицы 13
- умножение в пространствах L^2 105
 уравнение *Бесселя* 252
 — волновое 377, 421
 — определяющее 241
 — *Пуассона* 126—128
 — — в смысле теории распределений 129
 — резольвентное 183
 — состояния 423
 — *Шредингера* 256, 398
 уравнения квазилинейные 424
 — *Коши — Римана* 151, 204
 — — в смысле теории распределений 151
 — *Максвелла* 401
 — *Эйлера — Лагранжа* 139
Урысона лемма 67
 условие внешнего конуса 131, 139
 — граничное в особой концевой точке 237
 условия на скачке 426
 — *Ренкина — Гюгоньо* 430
 — — обобщенные 430
 устойчивость гидродинамическая 145—146
- Фейера* метод для ряда *Фурье* 76
Фока пространство 26, 381
 форма билинейная 33, 39
 — жорданова нормальная матрицы 197
 — полуторалинейная 33
 — характеристическая гиперболической системы 435
 формула *Бальмера* 256
 — *Грина* 133
 — поляризации 33
 — *Пуассона* интегральная 133
 — *Титчмарша* 246
Фробениуса метод 240
 фронт ударной волны 429
 функции *Ганкеля* 253
 — от операторов 218
 — собственные лапласиана 138
 функционал аналитический 203
 — билинейный 136
 — в функциональном пространстве 39
 — линейный 31, 39
 — мультилинейный 136
 — ограниченный 31
 — разрывный 60
 — полулинейный 14, 33
 — полуопределенный 118, 386
 функция абсолютно непрерывная 270, 304, 337
 — автоковариационная 82
 — *Бесселя* 252
 — волновая 398
 — гармоническая 152, 204
 — *Грина* 130, 233, 280
 — — ее симметричность 133
 — — четырехточечная 134
 — *Кантора* 56—57, 302
 — множеств 331—339
 — *Неймана* 252
 — неубывающая двух переменных 308
 — — нескольких переменных 310
 — ограниченной вариации 345
 — периодическая 104
 — почти периодическая 86
 — пробная 36
 — распределения случайной переменной 298
 — — — многомерная 310
 — — — совместная 307
 — — — характеристическая 306, 309
 — скачкообразная 270
 — спектральная 246
Фурье интеграл 87
 — коэффициенты обобщенные 26
 — преобразования метод для дифференциальных операторов 228—230

- Фурье преобразование 75. *См. также*
 Преобразование Фурье
 — ряд *см.* Ряд Фурье
 Фурье — Стильбеса интеграл 87
- Хамеля базис 60
 Характеристики дифференциальных
 уравнений в частных производных
 435, 439
 Характеристическая форма уравнений
 гидродинамики 436
 Харди класс 201
 Хартри — Фока метод 7
 Хилле — Йосиды теорема 409
- центральная предельная теорема 315—
 318
 Цермело теорема 23
 Цермело — Френкеля система аксиом
 61
- Чебышева неравенство 320
 числа кардинальные 21
 — — их сравнение 23
 число Маха 457
- Шварца класс пробных функций 39, 72,
 75
 — неравенство 18
 — теорема о ядре 136
 Шрёдера — Бернштейна теорема 23
 Шредингера оператор 265
 — уравнение 256, 398
 Штурма — Лиувилля оператор 162,
 164. *См. также* Оператор Штурма —
 Лиувилля
 Шура теорема 198
- Эйлера — Лагранжа уравнения 139
 энтропия 424, 431
 эффект Зеемана 267
 — Штарка 267
- ядро оператора 173
- B^* -алгебра 359
 C^* -алгебра 359
- δ -функция 35

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие. О природе математической физики	7
Глава 1. Гильбертовы пространства	13
1.1. Обзор необходимых сведений о матрицах и конечномерных пространствах	13
1.2. Линейное пространство. Нормированные линейные пространства	16
1.3. Гильбертово пространство: аксиомы и элементарные следствия	17
1.4. Примеры гильбертовых пространств	19
1.5. Кардинальные числа. Сепарабельность. Размерность	21
1.6. Ортонормированные последовательности	26
1.7. Подпространства. Теорема о проекции	29
1.8. Линейные функционалы. Теорема Рисса—Фреше о представлении линейного ограниченного функционала	31
1.9. Сильная и слабая сходимость	32
1.10. Гильбертовы пространства аналитических функций	33
1.11. Поляризация	33
Глава 2. Распределения и их общие свойства	35
2.1. Происхождение понятия распределения	35
2.2. Классы пробных функций. Функции класса C_0^∞	38
2.3. Обозначения для распределений. Билинейная форма	39
2.4. Формальное определение. Непрерывность функционалов	41
2.5. Примеры распределений	43
2.6. Распределения как пределы последовательностей функций. Сходимость распределений	46
2.7. Дифференцирование и интегрирование	48
2.8. Замена независимых переменных. Симметрии	52
2.9. Ограничения и предостережения	53
2.10. Регуляризация	58
Приложение к главе 2. Разрывный линейный функционал	60
Глава 3. Локальные свойства распределений	62
3.1. Краткое описание открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$	62
3.2. Определение локальных свойств	64
3.3. Теорема об открытых покрытиях	66
3.4. Теоремы о пробных функциях. Разбиения единицы	67
3.5. Основные теоремы о локальных свойствах	69
3.6. Носитель распределения	70
Глава 4. Распределения медленного роста и преобразования Фурье	72
4.1. Пространство $\mathcal{S}$	72
4.2. Распределения медленного роста	73
4.3. Рост на бесконечности	74
4.4. Преобразование Фурье на $\mathcal{S}$	75

4.5. Преобразование Фурье распределений медленного роста . . .	77
4.6. Энергетический спектр	82
Глава 5. Пространства L^2	90
5.1. Сходимость в среднем. Полнота систем функций	90
5.2. Физический пример аппроксимации в среднем	95
5.3. Пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\Omega)$	96
5.4. Умножение в пространствах L^2	105
5.5. Интегрирование в пространствах L^2 . Определенные интегралы	107
5.6. Об обращении в нуль на бесконечности. I	111
5.7. Пространства типа L^1 , L^p , L^∞	112
5.8. Преобразование Фурье в L^1 . Лемма Римана — Лебега. Теорема Лузина	115
5.9. Пространства типа L^2_0	118
5.10. Преобразование Фурье и операторы сглаживания в пространствах L^2	119
5.11. Пространства Соболева. Пространство W^1	121
5.12. Граничные значения в W^1 . Подпространство W^1_0	123
5.13. Об обращении в нуль на бесконечности. II	124
Глава 6. Некоторые задачи, связанные с лапласианом	126
6.1. Потенциал. Уравнение Пуассона	126
6.2. Свертки	127
6.3. Обоснование уравнения Пуассона	128
6.4. Задачи Пуассона, Дирихле, Грина и Неймана из классической теории потенциала	129
6.5. Теорема Шварца о ядре. Прямое произведение $f(x)g(y)$	135
6.6. Вариационный метод для собственных функций лапласиана	138
6.7. Теорема компактности для пространства Соболева W^1	140
6.8. Существование собственных функций	143
6.9. Задача гидродинамической устойчивости. Потенциальные и соленоидальные векторные поля	145
6.10. Уравнения Коши — Римана. Гармонические распределения	151
Глава 7. Линейные операторы в гильбертовом пространстве	153
7.1. Линейные операторы	153
7.2. Спряженность. Самосопряженные и унитарные операторы	155
7.3. Примеры в l^2	159
7.4. Интегральные операторы в $L^2(a, b)$	159
7.5. Дифференциальные операторы с точки зрения теории распределений	160
7.6. Замкнутые операторы	165
7.7. График оператора. Область значений и нуль-пространство	168
7.8. Операторы радиального импульса	170
7.9. Положительные операторы. Числовая область значений	172
Глава 8. Спектр и резольвента	174
8.1. Определения	174
8.2. Примеры и упражнения	175
8.3. Спектр симметрического, самосопряженного и унитарного операторов	178
8.4. Изменение спектра при расширении оператора	180
8.5. Аналитические свойства резольвенты	183
8.6. Расширения симметрических операторов. Индексы дефекта. Преобразование Кэли. Второе определение самосопряженности	185

Глава 9. Спектральное разложение самосопряженных и унитарных операторов	191
9.1. Спектральное разложение эрмитовой матрицы	191
9.2. Проекторы в гильбертовом пространстве H	193
9.3. Построение спектральных проекторов для матрицы	194
9.4. Связь с аналитическими функциями	199
9.5. Функции и распределения как граничные значения аналитических функций	200
9.6. Разложение единицы для самосопряженного оператора	206
9.7. Свойства операторов E_t	208
9.8. Каноническое представление самосопряженного оператора	209
9.9. Типы сходимости ограниченных операторов. Связь между свойствами непрерывности E_t и спектром A	211
9.10. Унитарные операторы. Функции от операторов. Ограниченные наблюдаемые. Полярное разложение	217
Приложение А к главе 9. Свойства операторов E_t	221
Приложение Б к главе 9. Каноническое представление самосопряженного оператора	223
Глава 10. Обыкновенные дифференциальные операторы	226
10.1. Резольвента и спектральное семейство для оператора $-id/dx$	226
10.2. Резольвента и спектральное семейство для оператора $-(d/dx)^2$	227
10.3. Метод преобразования Фурье	228
10.4. Регулярный оператор Штурма—Лиувилля	230
10.5. Существование и единственность решения. Интегральное уравнение. Собственные функции	231
10.6. Резольвента. Функция Грина. Полнота собственных функций	233
10.7. Более общие граничные условия	234
10.8. Оператор Штурма—Лиувилля с одной особой концевой точкой	236
10.9. Граничное условие в особой концевой точке	237
10.10. Регулярная особая точка. Метод Фробениуса	240
10.11. Самосопряженное расширение оператора T в случае предельной точки	242
10.12. Разложение по собственным функциям	244
10.13. Случай предельной окружности	247
10.14. Случай двух особых концевых точек	249
10.15. Уравнение Бесселя	252
10.16. Нерелятивистский водородоподобный атом	256
10.17. Релятивистский водородоподобный атом	258
Глава 11. Некоторые операторы с частными производными в квантовой механике	261
11.1. Самосопряженный лапласиан в R^n	261
11.2. Резольвента, спектр и спектральные проекторы	262
11.3. Операторы Шредингера	265
11.4. Возмущение спектра. Существенный спектр. Абсолютно непрерывный спектр	267
11.5. Непрерывный спектр в смысле Гильберта. Непрерывные и абсолютно непрерывные подпространства	271
11.6. Гамильтонианы Дирака	274
11.7. Лапласиан в ограниченной области	280
Глава 12. Компактные операторы, операторы Гильберта—Шмидта и ядерные операторы	283
12.1. Некоторые свойства матриц	283

12.2. Компактные операторы	285
12.3. Операторы Гильберта—Шмидта и ядерные операторы	287
12.4. Интегральные операторы Гильберта—Шмидта	290
12.5. Операторы с компактной резольвентой	291
Глава 13. Вероятность. Мера	297
13.1. Одномерные распределения вероятностей. Функция распределения. Плотность	297
13.2. Средние и математические ожидания	304
13.3. Двумерные и многомерные распределения. Неубывающие функции нескольких переменных	307
13.4. Нормальные распределения	311
13.5. Центральная предельная теорема	313
13.6. Выборка	318
13.7. Маргинальная и условная вероятности	321
13.8. Моделирование. Метод Монте-Карло	323
13.9. Меры	327
13.10. Меры как функции множеств	331
13.11. Вероятность в гильбертовом пространстве. Цилиндрические множества. Гауссовы меры	339
Приложение к главе 13. Функции ограниченной вариации	345
Глава 14. Вероятность и операторы в квантовой механике	348
14.1. Состояния системы. Наблюдаемые	348
14.2. Вероятности: конечная модель	349
14.3. Вероятности: общий случай ($\mathcal{H}$ бесконечномерно)	351
14.4. Математические ожидания. Область определения A	353
14.5. Матрица плотности	356
14.6. Алгебры ограниченных операторов. Канонические соотношения коммутации	359
14.7. Самосопряженный оператор с простым спектром	363
14.8. Спектральное представление пространства $\mathcal{H}$ для самосопряженного оператора с простым спектром	365
14.9. Полная система коммутирующих наблюдаемых	368
Глава 15. Эволюционные задачи. Банаховы пространства	371
15.1. Задачи с начальными данными в механике	371
15.2. Задача теплопроводности с начальными данными	372
15.3. Корректно и некорректно поставленные задачи	375
15.4. Задача с начальными данными для волновых процессов	377
15.5. Функциональное пространство (пространство состояний) задачи с начальными данными	378
15.6. Полнота пространства состояний. Банахово пространство	379
15.7. Примеры банаховых пространств	379
15.8. Неэквивалентность различных банаховых пространств	382
15.9. Линейные операторы	383
15.10. Линейные функционалы. Сопряженное пространство	384
15.11. Сходимость векторов и операторов	385
15.12. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства	385
15.13. Задачи теории относительности	386
15.14. Полунормы	386
Глава 16. Корректно поставленные задачи с начальными данными. Полугруппы	388
16.1. Постановка задач с начальными данными в банаховых пространствах	388

16.2. Корректно поставленные задачи. Обобщенные решения . . .	389
16.3. Волновые процессы	393
16.4. Уравнение Шредингера	398
16.5. Уравнения Максвелла в вакууме	401
16.6. Полугруппы	404
16.7. Инфинитезимальный генератор полугруппы	406
16.8. Теорема Хилле—Иосиды	408
16.9. Перенос нейтронов в слое. Применение теоремы Хилле— Иосиды	410
16.10. Неоднородные задачи	414
16.11. Задачи, в которых оператор A зависит от времени	419
Глава 17. Нелинейные задачи: гидродинамика	420
17.1. Распространение волн	421
17.2. Гидродинамические законы сохранения	422
17.3. Слабые решения	425
17.4. Условия на скачке	426
17.5. Ударные волны и поверхности скольжения	428
17.6. Неустойчивость волн разрежения	430
17.7. Звуковые волны и характеристики в одномерном случае . .	433
17.8. Гиперболические системы	434
17.9. Уравнения гидродинамики в характеристической форме . .	435
17.10. Замечания о задачах с начальными данными	437
17.11. Распространение информации вдоль характеристик в одно- мерном случае	439
17.12. Характеристики в случае нескольких пространственных переменных. Теорема Коши—Ковалевской	441
17.13. Задача Римана и ее обобщения	445
17.14. Спонтанное образование ударных волн	446
17.15. Неустойчивости Гельмгольца и Тейлора	449
17.16. Предположение о гидродинамических кусочно аналитических задачах с начальными данными	452
17.17. Особенности течений	453
Приложение к главе 17 (разделы А—Д). Задача об отсоединенной ударной волне	455
17.А. Постановка задачи	455
17.Б. Некорректность задачи	458
17.В. Метод степенных рядов	460
17.Г. Арифметика с подсчетом значащих цифр	462
17.Д. Аналитическое продолжение	464
Список литературы	467
Именной указатель	472
Предметный указатель	474