Мартин Гарднер

ПУТЕШЕСТВИЕ ВО ВРЕМЕНИ

Перевод с английского
Ю. А. Данилова

МОСКВА «МИР» 1990

ББК 22.1
Г20
УДК 51

Гарднер М.

Г20 Путешествие во времени: Пер. с англ.– М.: Мир, 1990.–341 с., ил.

ISBN 5-03-001166-8

Новая книга хорошо известного советскому читателю американского популяризатора науки, продолжающая серию книг по занимательной математике. Она содержит эссе и задачи из различных областей математики.

Рассчитана на любителей занимательной математики.

Г $\frac{\mathbf{1602020000-096}}{\mathbf{041(01)-90}}$ **7–90** **ББК 22.1**

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

Научно-популярное издание

Мартин Гарднер

ПУТЕШЕСТВИЕ ВО ВРЕМЕНИ

Заведующий редакцией В. С. Власенков. Ст. научный редактор А. Г. Белевцева. Мл. научный редактор М. А. Харузина. Художник Л. М. Муратова. Художественный редактор Н. М. Иванов. Технический редактор Е. В. Алехина. Корректор В. С. Антипова

ИБ № 7039

Сдано в набор 13.04.89. Подписано к печати 23.12.89. Формат 84 × 108 $^{1}/_{32}$. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Объем 5,25 бум. л. Усл. печ. л. 17,64. Усл. кр.-отт. 35,60. Уч. изд. л. 18,37. Изд. № 9/6567. Тираж 100 000 экз. Зак. 498. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Можайский полиграфкомбинат В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 143200 Можайск, ул. Мира, 93.

ISBN 5-03-001166-8 (русск.)
ISBN 0-7167-1924-X (англ.)

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Для многочисленных почитателей популяризаторского таланта корифея современной занимательной математики Мартина Гарднера каждая его новая книга – событие, которого ждут и которому радуются. В чем причины такого успеха? В чем секрет неповторимого своеобразия гарднеровской манеры?

Каждому, кто прочитал хотя бы одну книгу Мартина Гарднера, совершенно ясно, что ее автор – человек необычайно одаренный и увлеченный, великолепно владеющий пером и способный передавать свою увлеченность читателю. Гарднер не «сидит в материале», а свободно владеет им, ориентируясь в бескрайних просторах современной математики и безошибочно выбирая тот ее фрагмент или аспект, который может быть интересен миллионам любителей и профессионалов (выступающих на досуге в роли любителей) во всем мире. Обладая тонкой интуицией, Гарднер безошибочно определяет задачи «с будущим», официальное признание которых иногда задерживалось на годы по сравнению с первой публикацией в разделе «Математические игры» журнала *Scientific American*, который Гарднер вел на протяжении многих лет. Когда группа исследователей открыла новый класс веществ, получивших название квазикристаллов, возникла новая математическая теория – теория апериодических мозаик, и одной из первых публикаций знаменитой ныне мозаики Пенроуза, по свидетельству дотошных историков науки, признана публикация Гарднера.

Эрудиция и обилие привлекаемого им свежего материала поражают не только любителей, но и специалистов. При этом Гарднеру в высшей степени присуща особенность, отличающая, по мнению Я. И. Перельмана, истинного творца занимательной науки от ремесленника,– умение удивляться, видеть необычное в обыденном.

Литературная палитра Мартина Гарднера поражает богатством красок: от философского эссе о глубоких теоретико-познавательных парадоксах до серии задач, от научной фантастики до розыгрыша (традиционного английского «hoax»), от, казалось бы, простого математического факта, который при рассмотрении с новой точки зрения предстает в необычном ракурсе, до введения в сложные проблемы, находящиеся на переднем крае современной математики.

Творчеству Мартина Гарднера присуща еще одна особенность: живая обратная связь с многочисленными читателями, обогащающая обе стороны. Чуждый всякого академического снобизма, Гарднер на страницах своих книг предоставляет слово не только маститым авторам, обладателям высоких научных степеней и званий, но и простому любителю, едва успевшему сделать первые шаги на трудном поприще научного творчества. Не будет преувеличением сказать, что благодаря задачам Мартина Гарднера и его талантливым импровизациям на темы современной математики научный мир обогатился новыми талантами.

Книга, предлагаемая вниманию читателя, также выдержана в истинно гарднеровском духе. Она написана по материалам его журнальных публикаций с учетом замечаний, решений и предложений, поступивших от читателей. Как и предыдущие книги Гарднера, она не монографична, а отличается разнообразием материала и дает обильную пищу для самостоятельного творчества читателей.

Будущим исследователям еще предстоит ответить на многие вопросы, связанные с «феноменом Гарднера», но труд их (и это можно предсказать заранее) никогда не завершится полным и исчерпывающим анализом, ибо, как и у всякого истинного таланта, у Гарднера есть таинственное нечто, которое невозможно разъять на части, не умертвив целого. Именно это делает его книги столь привлекательными.

Ю. Данилов

Дэвиду А. Кларнеру
с благодарностью за весомый вклад в занимательную математику, долгие годы дружбы и многое другое

Перед вами двенадцатый сборник, составленный по материалам отдела «Математические игры», который я вел в журнале *Scientific American.* Как обычно, мои статьи исправлены, пополнены последними данными и расширены в основном по письмам моих всезнающих и неугомонных читателей.

Мартин Гарднер

ГЛАВА 1

ПУТЕШЕСТВИЕ ВО ВРЕМЕНИ

– Но это же противоречит здравому смыслу,– заметил Филби.
– А что такое здравый смысл?– спросил Путешественник во Времени.

Признанный шедевр научной фантастики, небольшой рассказ Герберта Уэллса «Машина времени» – не первое литературное произведение о путешествии во времени. Это отличие принадлежит «Часам, которые шли назад» – действительно пионерской, но весьма посредственной новелле редактора нью-йоркского журнала *Sun* Эдварда П. Митчелла. Она была опубликована без указания автора в номере от 18 сентября 1881 г., за семь лет до того, как Уэллс (которому тогда исполнилось только 22 года) написал первый вариант своего знаменитого рассказа.

Новеллу Митчелла забыли так быстро, что даже всеведущие знатоки научной фантастики не знали о ее существовании до тех пор, пока Сэм Московитц не перепечатал ее в своей антологии произведений Митчелла «Хрустальный человек» (1973). Никто не обратил внимания и на фантастику Уэллса, когда она в 1888 г. выходила отдельными выпусками в *The Science School Journal* под устрашающим названием «Хроника аргонавтов». Сам Уэллс так стыдился этого неуклюже написанного произведения, что прервал его публикацию после трех выпусков и впоследствии уничтожал все экземпляры, какие только ему попадались. Полностью переписанная заново «История Путешественника во Времени» начала выходить в журнале *The New Review* в 1894 г.

Книжное издание, выпущенное в 1895 г., принесло Уэллсу мгновенное признание.

Одна из замечательных особенностей рассказа Уэллса – введение, в котором Путешественник во Времени (имя его в рассказе не упоминается, но в первом варианте Уэллс назвал его доктором Небо – гипфелем) объясняет теоретические основы своего изобретения. Время – это четвертое измерение. Мгновенный куб не может существовать. Тот куб, который мы видим, есть не что иное, как соответствующее текущему моменту времени сечение некоторого «фиксированного и неизменного» четырехмерного куба, обладающего длиной, шириной, высотой и продолжительностью. «Время ничем не отличается от любого из трех пространственных измерений,– сообщает Путешественник во Времени,– кроме того, что наше сознание движется во времени». Если бы мы могли взглянуть на какого-нибудь человека извне нашего пространства–времени (а именно так взирают на людей и их историю этернали в романе Айзека Азимова «Конец вечности» или тралфамадорианцы в «Бойне номер пять» Курта Воннегута), то увидели бы одновременно прошлое, настоящее и будущее этого человека так же, как в трехмерном пространстве мы единым взглядом охватываем все части волнистой линии, проведенной на бумажной ленте пером самописца, повторяющего одномерные пространственные движения уровня ртути в барометре.

Читая рассуждения Путешественника во Времени сегодня, можно подумать, что Уэллс был знаком с великолепной работой Германа Минковского по обоснованию специальной теории относительности Эйнштейна. Линия, по которой ползает наше сознание,– это, конечно, наша «мировая линия» – линия, которую мы описываем в четырехмерном пространстве–времени Минковского, перемещаясь в трехмерном пространстве (не случайно Джордж Гамов назвал свою автобиографию «Моя мировая линия»). Но рассказ Уэллса появился в своем окончательном варианте за десять лет до того, как Эйнштейн опубликовал свою первую работу по теории относительности!

Когда Уэллс писал свой рассказ, он считал теории Путешественника во Времени несусветной наукообразной чепухой, которая понадобилась лишь для того, чтобы придать большее правдоподобие фантастическому замыслу. Но уже через несколько лет физики стали относиться к подобной «чепухе» со всей серьезностью. Понятие абсолютного космического времени с абсолютной одновременностью событий, происходящих в различных точках пространства, было изгнано из физики теорией относительности Эйнштейна. Все современные физики сходятся во мнении, что если бы астронавт отправился в полет к далекой звезде и обратно на космическом корабле, летящем со скоростью, близкой к скорости света, то теоретически такой астронавт мог бы заглянуть на тысячи лет в будущее Земли. Курт Гёдель построил вращающуюся космологическую модель, в которой в принципе можно отправиться в любую точку как в прошлом, так и в будущем мира, хотя путешествия в прошлое отмечаются как физически невозможные. В 1965 г. Ричард Фейнман был удостоен Нобелевской премии по физике за развитый им пространственно-временной подход в квантовой механике, в рамках которого античастицы рассматривались как частицы, двигающиеся вспять во времени – в прошлое.

На тему о путешествии во времени написаны сотни научно-фантастических произведений. Во многих из них поднимаются вопросы о времени и причинности – вопросы глубокие, хотя иногда они бывают облечены в занимательную форму. Приведем наиболее избитый пример. Предположим, что вы отправились в прошлый месяц и покончили с собой, выстрелив в голову. Отправляясь в путешествие, вы знаете, что ничего подобного не произошло. Но пусть даже вам удалось каким-то образом застрелиться по прибытии в прошлое. Как же тогда вы были живы через месяц после своей кончины и отправились в путешествие во времени? «Первая машина времени» Фредерика Брауна начинается с того, что доктор Грейнджер демонстрирует свою машину трем друзьям. Один из них с помощью машины отправляется на 60 лет назад и убивает там своего ненавистного дедушку, когда тот был еще юным мальчиком. История заканчивается через 60 лет, когда доктор Грейнджер демонстрирует свою машину времени двум друзьям.

Не следует думать, будто логические противоречия возникают только тогда, когда во времени путешествуют люди. Перенос во времени чего угодно может приводить к парадоксу. Намек на это имеется уже в рассказе Уэллса. Когда Путешественник во Времени отправляет в прошлое или будущее (куда именно, он не знает) небольшую модель своей машины, его гости высказывают два возражения. Если модель машины времени отправилась в будущее, то почему они не видят ее сейчас: ведь она должна двигаться по своей мировой линии вместе с ними? Если модель машины времени отправилась в прошлое, то почему они не видели ее до того, как Путешественник во Времени принес модель в комнату?

Один из гостей высказывает предположение о том, что модель становится невидимой, так как движется во времени слишком быстро, как невидимы спицы быстро вращающегося колеса. Но что произойдет, если движущийся во времени предмет перестанет двигаться? Если вы не помните, был ли куб на столе в понедельник, то каким образом вы могли бы во вторник вернуть куб на стол в понедельник? А если вы во вторник вздумаете отправиться в будущее и поставите куб на стол в среду, а затем вернетесь во вторник, то что произойдет в среду, если во вторник вы уничтожите куб?

В многочисленных научно-фантастических произведениях предметы, переносимые во времени то туда, то обратно, служат неисчерпаемым источником всякого рода недоразумений. Сэм Майнз однажды так кратко сформулировал сюжет своего рассказа «Найди скульптора»: «Некий ученый строит машину времени и отправляется на ней в будущее. Там он обнаруживает памятник себе, сооруженный в ознаменование первого путешествия во времени. Забрав с собой статую, герой возвращается в свое собственное время и впоследствии сооружает памятник самому себе. Понимаете, в чем тут хитрость? Памятник должен быть установлен в собственном времени ученого с таким расчетом, чтобы, когда тот прибудет в будущее, памятник уже стоял на своем месте и ждал его. Ученый должен отправиться в будущее и привезти памятник назад, чтобы установить его в своем собственном времени. Какой-то части цикла здесь явно недостает. Когда же был изготовлен памятник?»

Великолепным примером того, как возникает парадокс, даже если назад во времени посылается всего лишь сигнал, может служить гипотеза о тахионах – частицах, движущихся быстрее света (такие частицы могли бы существовать). Теория относительности не оставляет другого выхода, кроме как признать, что любой объект, движущийся быстрее света, движется назад во времени. Это обстоятельство вдохновило канадского ботаника

А. Г. Реджинальда Баллера на создание следующего часто цитируемого шуточного стихотворения (так называемого лимерика):

Шустрая мисс Антуанетт
Носилась по свету быстрее, чем свет,
Ей в завтра хотелось попасть,
Да все втуне:
Умчится теперь, прилетит накануне!

Тахионы, если существуют, не могут быть использованы для передачи сигналов. Дж. Бенфорд, Д. Бук и У. Ньюкомб (парадоксу Ньюкомба посвящены две последние главы в моей книге «Завязанные узлом бублики и другие математические забавы»*) упрекнули физиков, занимающихся исследованием тахионов, за то, что те упустили из виду это немаловажное обстоятельство. В своей статье «Тахионный антителефон» они обратили внимание на то, что некоторые методы поиска тахионов основаны на взаимодействиях, позволяющих теоретически осуществлять связь с помощью тахионов. Предположим, что физик Джонс на Земле связывается по тахионному антителефону с физиком Альфа в другой галактике. Оба собеседника принимают следующее соглашение. Как только Альфа получает сигнал от Джонса, он немедленно посылает ответный сигнал. Джонс обещает посылать сигнал Альфе в три часа по земному времени в том и только в том случае, если он не получит сигнал от Альфы к часу дня. Вам понятно, в чем здесь трудность? Оба сигнала распространяются назад во времени. Если Джонс посылает свой сигнал в три часа, то ответ Альфы мог дойти до него до часа дня. «Таким образом,– заключают свои рассуждения авторы,– обмен сигналами происходит в том и только в том случае, если он вообще не происходит... Подлинное... противоречие с принципом причинности». По мнению авторов, большие суммы денег уже были затрачены впустую на обнаружение тахионов методами, основанными на идее тахионной связи и потому заранее обреченными на провал.

Растяжение времени в теории относительности, путешествие во времени в космосе Гёделя и обращение времени в фейнмановском подходе к античастицам столь

* Gardner M. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments.– New York: W. H. Freeman and Company, 1986.

тщательно опутаны колючей проволокой других законов природы, что никакие противоречия возникнуть не могут. В большинстве научно-фантастических произведений парадоксы также «огорожены» и остаются вне досягаемости: любое событие, способное порождать парадокс, остается за рамками повествования. Однако в некоторых историях явные логические противоречия все же возникают. Когда это происходит, автор либо оставляет ситуацию парадоксальной, чтобы дать пищу уму читателя, либо пытается избежать парадокса с помощью тонких предположений.

Прежде чем мы перейдем к обсуждению того, как избегать парадоксов, следует хотя бы кратко упомянуть о жанре псевдопутешествий во времени, в которых не может возникнуть противоречие. Например, парадокс не может возникнуть, если кто-нибудь просто наблюдает прошлое, никак с ним не взаимодействуя. Электронная машина из рассказа Эрика Т. Белла «Перед рассветом», снимающая кинофильмы из прошлого по световым отпечаткам на древних породах, так же не способна привести к парадоксам, как просмотр видеоленты с записью старой телевизионной программы. Не может возникнуть парадокс и в том случае, если кто-то отправляется в будущее в состоянии летаргии, как Рип ван Винкль или Вуди Аллен в кинофильме «Спящий» или герои романов «Глядя назад» Эдварда Беллами и «Когда спящий проснется» Герберта Уэллса. Не возникает парадокс и тогда, когда кто-то во сне отправляется в прошлое (как в романе Марка Твена «Янки из Коннектикута при дворе короля Артура»), попадает в будушее в перевоплощенном виде или в галактику, где время течет так медленно по сравнению с земным, что по возвращении на Землю герой оказывается в глубоком прошлом – за несколько веков до своей эпохи. Но когда кто-то «реально» путешествует в прошлое или в будущее, взаимодействует с ним и возвращается назад, возникают весьма серьезные трудности.

В некоторых ограниченных ситуациях парадокса удается избежать, если обратиться к «монолитной вселенной» Минковского, в которой история как бы заморожена: пространство – время заменено мгновенной «фотографией», на которой все мировые линии вечны и неизменны. Время в такой картине, хотя оно жестко детерминировано, может в некотором смысле течь вперед и назад, хотя за это приходится платить дорогой ценой. Ганс Рейхенбах, обсуждая проблему путешествия во времени в своей книге «Философия пространства и времени», сформулировал суть возникающих парадоксов следующим образом. Предположим, что чья-то мировая линия может замыкаться, образуя петлю, то есть подходить очень близко к какой-то точке пространства–времени, в которой «владелец» мировой линии успел побывать прежде. Может ли при встрече в пространстве–времени происходить взаимодействие между «двойниками»? Могут ли они, например, разговаривать между собой? Рейхенбах считает, что чисто логически такая возможность вполне допустима. Отвергнуть ее мы можем, приняв следующие две аксиомы, убедительно подтверждаемые всем нашим опытом: (1) каждый человек представляет собой единственную и неповторимую индивидуальность, сохраняющую свое тождество, когда человек с возрастом стареет, и (2) мировая линия любого человека линейно упорядочена, поэтому то, что он считает «теперь», соответствует всякий раз единственной точке на мировой линии. (Хотя Рейхенбах об этом и не упоминает, но нам приходится тут отказаться от всяких представлений о свободе воли. Рейхенбах утверждает, что если мы готовы пожертвовать «всем этим», то петли на мировой линии любого человека не будут приводить к каким-либо парадоксам.)

Используемый Рейхенбахом пример с петлей на мировой линии, не приводящей к парадоксам, сводится к следующему. Однажды вы встречаете человека, который выглядит как вы, но старше вас. Он сообщает вам, что перед вами ваш двойник, совершивший путешествие в прошлое (назад во времени). Вы принимаете его за сумасшедшего и продолжаете идти по своим делам. Через несколько лет вы обнаруживаете способ, позволяющий отправляться в прошлое, и наносите визит своему более молодому двойнику. При встрече вы говорите ему то, что ваш старший двойник некогда сказал вам, когда вы были моложе. Разумеется, ваш более молодой двойник принимает вас за сумасшедшего. Вы расстаетесь с ним. Каждый из вас ведет свою обычную жизнь до тех пор, пока не настает день, когда ваша более молодая «копия» не совершает путешествие назад во времени.

Аналогичную аргументацию в пользу того, что петли на мировых линиях не обязательно должны приводить к противоречию, развивает Хилари Патнам. Он строит

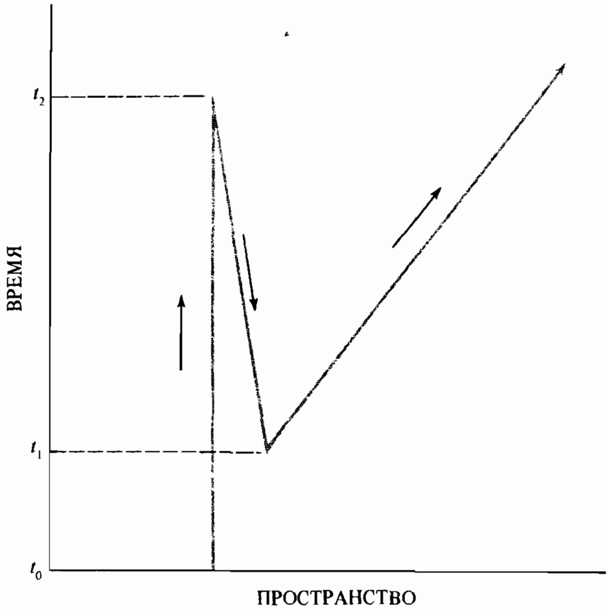


Рис. 1. График Фейнмана для путешественника во времени, отправляющегося в прошлое.

график Фейнмана (рис. 1), на котором вместо рождения и уничтожения пары частиц изображены рождение и уничтожение двойников-людей. Зигзагообразная ломаная – это мировая линия путешествующего во времени Смита. В момент времени t_2 он возвращается назад в t_1, превращается в своего более молодого двойника, после чего продолжает жить как обычно. Как выглядело бы такое событие с точки зрения наблюдателя с нормальной мировой линией? Приложите линейку к пространственной оси и медленно сдвигайте линейку вверх, следя за тем, чтобы она не перекашивалась (оставалась параллельной самой себе). При $t = t_0$ вы видите молодого Смита. При $t = t_2$ Смит постарше внезапно материализуется из воздуха в той же точке пространства, в которой находится анти-Смит, который сидит в своей машине времени и «живет назад». (Если анти-Смит курит, то вы видите, как окурок сигареты, удлиняясь, превращается в целую сигарету и т. д.).

Возможно, что два Смита, движущихся вперед во времени, разговаривают между собой. Наконец, при $t = t_2$ более молодой Смит, анти-Смит (движущийся назад во времени) и машина времени, движущаяся назад во времени, исчезают. Смит постарше и его более старая машина времени продолжают двигаться дальше. Таким образом, мы действительно можем нарисовать пространственно-временную диаграмму этих событий. Патнам утверждает, что это доказывает их логическую непротиворечивость.

Они действительно непротиворечивы, но заметим, что сценарий Патнама, как и сценарий Рейхенбаха, допускает лишь слабое взаимодействие между Смитами, которое и позволяет избегать более глубоких противоречий, возникающих в научно-фантастических произведениях, повествующих о путешествиях во времени. Что произойдет, если Смит постарше вздумает убить Смита помладше? Не согласится ли Патнам любезно нарисовать график в пространстве–времени в этом случае?

Существует только один хороший выход из положения, и сочинители научно-фантастических произведений используют его на протяжении более чем полувека. По данным Сэма Московитца, устройство, позволяющее разрешать парадоксы, связанные с путешествиями во времени, впервые было явно использовано в рассказе Дэвида Р. Даньелза «Ветви времени», появившемся в 1934 г. Основная идея его столь же проста, сколь и фантастична. Люди могут совершать путешествия во времени, перемещаясь в любую точку в будущем своего мира, без каких бы то ни было осложнений, но в тот момент, когда они вступают в прошлое, мир расщепляется на два параллельных мира, в каждом из которых время течет по-своему. Вдоль одной ветви мир развивается так, как если бы никакой петли в пространстве–времени не было. Вдоль другой ветви происходит развитие «новорожденной» вселенной с существенно другой историей. Новорожденной эта вселенная будет для путешественника во времени. А с точки зрения наблюдателя, созерцающего происходящее, например из пятого измерения, мировая линия путешественника просто не переходит с одного листа пространственно-временного континуума на другой, а все вселенные ветвятся в метавселенной, как дерево.

Ветвление путей во времени встречается во многих пьесах, романах и рассказах, принадлежащих перу авторов-нефантастов. Так, Дж. Б. Пристли использует ветвление времени в своей известной пьесе «Опасный поворот», еще раньше это сделал лорд Дансэни в пьесе «Если». Марк Твен обсуждает аналогичную проблему в «Таинственном незнакомце». Хорхе Луис Борхес использует тот же прием в новелле «Сад с расходящимися тропинками». Но отточили сюжет и придали ему подлинный блеск писатели-фантасты.

Посмотрим, как он развивается. Предположим, что вы вернулись во времена Наполеона во вселенной 1 и убили его. Мир разделился на два. Теперь вы находитесь во вселенной 2. Если хотите, то вы можете вернуться в настоящее вселенной 2, в которой Наполеон был убит при загадочных обстоятельствах. Насколько этот мир отличался бы от старого? Обнаружили бы вы своего двойника? Возможно да, возможно нет. Часто в произведениях высказывается опасение, что малейшее изменение в прошлом приводит к новым причинным связям, которые, множась, могут повлечь за собой исторические перемены огромных масштабов. В то же время некоторые авторы склонны считать, что историей движут мощные глобальные силы и даже достаточно заметные изменения в прошлом довольно быстро «затухают» и не сказываются сколько-нибудь заметно на будущем.

В рассказе Рэя Брэдбери «Звук грома» Экельс отправляется в древнюю геологическую эпоху со всяческими предосторожностями, чтобы не вызывать серьезных изменений в прошлом. Например, он дышит с помощью кислородного прибора, чтобы не заразить своими микробами древних животных. Но Экельс случайно наступает на живую бабочку, а вернувшись в свое настоящее, замечает изменения в конторе той фирмы, которая отправляла его в прошлое. В конце концов Экельса убивают за то, что он незаконно изменил будущее.

Вариации на эту тему можно найти в сотнях произведений научной и ненаучной фантастики. Одна из самых грустных историй – новелла лорда Дансэни «Пропал!» (1948 г.). Некий человек с помощью таинственных чар «на восточный манер» отправляется в прошлое в надежде исправить какие-то свои старые ошибки. Столь активное вмешательство изменяет ход истории. Вернувшись в настоящее, странник во времени обнаруживает, что лишился жены и дома. «Я пропал! Пропал! – в отчаянии кричит он. – Не пытайтесь вернуться в прошлое, чтобы исправить свои ошибки. Забудьте и думать об этом!.. Запомните, легче пройти весь Млечный Путь из конца в конец, чем сделать шаг во времени. Его мрачные глубины поглотили меня. Я пропал!»

Нетрудно видеть, что в метакосмосе с ветвящимися путями времени парадокс возникнуть не может. Путешествие в будущее перестает быть проблемой. Если вы вздумаете отправиться на неделю вперед во времени, то вы просто исчезнете в настоящем на неделю и появитесь снова в будущем, став на неделю моложе, чем были. Но если вы отправитесь назад и убьете самого себя в колыбели, то вселенная сразу же расщепится. Вселенная 1 будет продолжать следовать своим путем, но вы исчезнете из нее, когда достигнете определенного возраста и отправитесь в прошлое. Может быть, это будет повторяться раз за разом, и на каждом витке будут рождаться две новые вселенные. Может быть, ваше исчезновение произойдет только один раз. Кто знает? Но в любом случае появляется вселенная 2 с вами и убитым вами младенцем. Вы не исчезнете, свершив свое деяние, так как теперь, став обитателем вселенной 2, вы тем самым стали чужим вселенной 1.

В таком метакосмосе особенно легко фабриковать собственных двойников (и этим прилежно занимались писатели-фантасты). Вы можете отправиться на год назад во вселенную 1, пожить год с самим собой во вселенной 2, затем снова отправиться на год назад навестить двух своих двойников во вселенной 3 и т.д. Ясно, что, повторяя такие витки, вы можете создать сколько угодно двойников самого себя. И все это будут самые настоящие двойники, а не псевдодвойники, как в сценариях Рейхенбаха и Патнама: у каждого из этих двойников есть своя мировая линия. История может стать чрезвычайно запутанной и хаотичной, но события одного типа не могут происходить никогда: я имею в виду логически противоречивые события.

Картина метакосмоса с ветвящимися мирами может показаться сумасшедшей, но даже почтенные физики относятся к ней вполне серьезно. В диссертации Хью Эверетта III «Формулировка квантовой механики на основе понятия «относительного состояния»» (*Review of Modern Physics,* July 1957, p. 454–462) предложен вариант метатеории, в которой вселенная в каждый микромомент времени ветвится на бесчисленные параллельные микромиры, каждый из которых представляет собой некую допустимую комбинацию микрособытий, которая могла бы реализоваться вследствие присущей микроуровню изменчивости. В послесловии к работе Эверетта Джон А. Уилер замечает, что классическим физикам поначалу казались почти столь же неприемлемыми и радикальные понятия общей теории относительности.

«Если существует бесконечно много миров,– писал Фредерик Браун в романе «Что за безумный мир»,– то должны существовать все возможные комбинации событий ... Следовательно, *где-то все должно быть верно* ... Где-то должна быть вселенная, в которой Гекклеберри Финн – реальное лицо, проделывающее в точности то, что он проделывал в романе Марка Твена. Более того, существует бесконечно много миров, в которых Гекклеберри Финн проделывает все возможные вариации того, что Марк Твен *мог бы* заставить его проделывать в своем романе ... И в бесконечно многих мирах условия существования таковы, что у нас нет ни слов, чтобы описать их, ни сил, чтобы мысленно представить их себе».

А что если миры никогда не ветвятся? Предположим, что существует только один, тот самый, в котором мы живем, где все мировые линии линейно упорядочены и все предметы сохраняют свое тождество, то есть остаются такими, какие они есть. Браун рассматривает и такую возможность в своем рассказе «Эксперимент». Профессор Джонсон держит на ладони латунный куб. Время – без шести три. Ровно в три часа Джонсон говорит своим коллегам, что положит куб на платформу созданной им машины времени и отправит на пять минут назад в прошлое. «Следовательно,– поясняет Джонсон,– куб должен был бы без пяти три исчезнуть с моей ладони и появиться на платформе машины, появиться за пять минут до того, как я поместил его туда».

– А как тогда вы можете поместить куб на платформу машины? – спросил Джонсона один из его коллег.

– Очень просто. Когда моя рука приблизится к платформе, куб исчезнет с платформы и появится у меня на ладони, откуда я и переставлю его на платформу.

Без пяти три куб исчезает с ладони профессора Джонсона, перемещенный на пять минут назад в прошлое будущим действием – перемещением куба на платформу машины ровно в три часа.

– Видите? За пять минут до того, как я поместил куб на платформу, он уже там!

– А что если теперь, когда куб уже появился на платформе, за пять минут до того, как вы его поставили туда, вы передумаете и не поставите куб на платформу в три часа?–спросил Джонсона его хмурый коллега.–Не возникнет ли при этом какой-нибудь парадокс?

Профессор Джонсон задумывается над интересной идеей и, решив посмотреть, что же произойдет, не помещает куб на платформу ровно в три часа.

Никакого парадокса не возникает. Куб остается на ладони. Но весь мир, включая профессора Джонсона, его коллег и машину времени, исчезает.

ДОПОЛНЕНИЕ

Автор шуточных стихов Дж. А. Лондон из Великобритании прислал мне свое продолжение лимерика о мисс Антуанетт, в котором от лица шустрой девицы рассказывается, что произошло с ней однажды вечером:

Примчалась однажды домой чуть живая.
Гляжу и не верю, испуг не скрывая:
Кто там на диване? Да это же я!
В ту ночь было тесно на узкой перинке
Двум я, как в картонной коробке ботинкам.

Нед Блок прислал мне в письме другой вариант лимерика, который он узнал от одного студента из Массачусетса:

Двое нежных влюбленных Антон и Анетт
Летят на свиданье быстрее, чем свет:
Стартуют сегодня,
Да, видно, все зря:
Ведь встретиться им суждено лишь вчера.

Многие читатели обратили внимание на две трудности, которые могли бы возникнуть из-за путешествия во времени как в будущее, так и в прошлое. Если путешественники остаются в пространстве–времени на одном и том же месте относительно Вселенной, то Земля не могла бы находиться там, где она была. Путешественники оказались бы либо в безвоздушном пространстве, либо внутри какого-нибудь твердого космического тела. Но коль скоро это тело твердое, то не помешает ли оно путешественникам добраться до нужного места, просто сметая их в сторону? Не произойдет ли при этом взрыв?

Вторая трудность связана с термодинамикой. После того как путешественник во времени стартует, наш мир потеряет некоторое количество массы-энергии. Когда путешественник возвращается, мир приобретает такое же количество массы-энергии. Следовательно, на протяжении того временного интервала, в течение которого путешественник отсутствует, по-видимому, нарушается закон сохранения массы-энергии.

Я уже упоминал об интерпретации квантовой механики, получившей название «множественности миров». Лучше всего она изложена в сборнике работ, выпущенных в 1973 г. под редакцией Брюса Де Витта и Нейла Грэхэма. В предположении, что наш мир постоянно претерпевает ветвление на миллиарды параллельных миров, эта интерпретация позволяет избежать индетерминизма копенгагенской интерпретации квантовой механики, а также многих связанных с ней парадоксов.

Многие физики, склоняющиеся к множественности миров, утверждали, что бесчисленные двойники и параллельные миры, образующиеся при ветвлении, не «реальны», а являются лишь артефактами – искусственными порождениями теории. При такой интерпретации множественности миров эта теория вырождается в более экзотический вариант квантовой механики, утверждающий по существу то же, что и копенгагенская интерпретация. Сам Эверетт сопроводил публикацию своей работы следующим знаменитым примечанием:

> «После того как я разослал оттиски статьи, многие корреспонденты подняли вопрос о «переходе от возможного к реальному», ссылаясь на то, что в «реальности», как свидетельствует наш опыт, не существует такого ветвления состояний наблюдателя и что «реально» всегда существует только одна ветвь. Поскольку это соображение может прийти в голову читателям, я предлагаю следующее объяснение.
>
> Весь вопрос о переходе от «возможного» к «реальному» решается в моей теории очень просто: такого перехода не существует, и такой переход не является необходимым для того, чтобы теория согласовывалась с опытом. С точки зрения моей теории *все* элементы суперпозиции (все «ветви») «реальны», причем ни один элемент не более «реален», чем другой. Нет необходимости предполагать, что все элементы,

кроме одного, каким-то образом уничтожаются, так как каждый элемент суперпозиции в отдельности удовлетворяет волновому уравнению совершенно независимо от того, наличествуют или отсутствуют («реальны» или «нереальны») остальные элементы. Из того, что одна ветвь никак не действует на другую, следует, что наблюдатель не может ничего знать о процессе «ветвления».

Аргументы типа того, что картина мира в такой теории противоречит имеющемуся опыту, поскольку мы не наблюдаем никакого ветвления, похожи на критику теории Коперника на том основании, что подвижность Земли как реальный физический факт несовместима с интерпретацией природы с позиций здравого смысла, поскольку мы не ощущаем движения Земли. И в том, и в другом случае несостоятельность такого рода аргументов становится очевидной, когда удается показать, что сама теория предсказывает наш опыт таким, какой он есть. (В случае теории Коперника понадобилось создание физики Ньютона прежде, чем удалось показать, что обитатели Земли не ощущают и не могут ощущать ее движение.)»

Эстетическая привлекательность интерпретации квантовой механики на основе теории множественности миров общепризнана, однако в нее никто не верит. Правда, несколько ведущих физиков приняли (и продолжают разделять) точку зрения, согласно которой существование чудовищного количества логически возможных миров вполне допустимо. Вот как аргументирует подобную точку зрения Де Витт в статье «Квантовая механика и реальность» (1970 г.), перепечатанной впоследствии в сборнике под редакцией Де Витта и Грэхэма [1.12]:

«Признать столь необычный взгляд на вещи нам, разумеется, мешает то обстоятельство, что принятие такой точки зрения вынуждает нас верить в реальность всех одновременных миров, ... в каждом из которых измерения дали различные результаты. Тем не менее это именно то, в чем хотел бы нас убедить [создатель этой теории] ... Такой мир постоянно делится на чудовищно большое число ветвей, возникающих вследствие аналогичных измерениям взаимодействий между мириадами его компонент. Кроме того, каждый квантовый переход, происходящий в каждой звезде, в каждой галактике, в каждом далеком уголке нашей Вселенной приводит к ветвлению нашего локального мира на Земле на мириады копий.

Я хорошо помню тот шок, который я испытал при первом знакомстве с концепцией множественных миров. Мысль о том, что $10^{100\cdots}$ ваших слегка несовершенных двойников постоянно ветвятся, порождая новых двойников, которые в конце концов становятся совершенно неузнаваемыми, не так-то легко примирить со здравым смыслом».

Джон Уилер сначала поддерживал интерпретацию квантовой механики на основе теории множественности миров, но затем отказался от нее. Следующий отрывок заимствован из работы Уилера «На переднем крае времени» (Центр Теоретической физики, 1978):

«Нельзя не признать, что диссертация Эверетта свидетельствует о недюжинной фантазии автора и весьма поучительна. И мы некогда разделяли его точку зрения. Однако если мы бросим ретроспективный взгляд, то станет ясно, что предложенный Эвереттом ход неверен. Во-первых, такая формулировка квантовой механики порочит квант. Она с самого начала отрицает, что квантовый характер природы может служить путеводной нитью для построения плана всей физики. Эта формулировка говорит вам: «Возьмите для объяснения мира любой гамильтониан – этот, тот или какой-нибудь другой. Я слишком возвышенна, и мне нет дела до того, какой именно гамильтониан вам нужен и есть ли вообще какой-нибудь гамильтониан. Вы даете мне какой угодно мир, и я возвращаю вам множество миров. Не стоит ждать от меня помощи в объяснении этого мира».

Во-вторых, бесконечно много наблюдаемых миров ложатся на плечи физиков тяжким грузом метафизического багажа. Эти миры, по-видимому, нарушают выдвинутое Д. И. Менделеевым требование к любой истинно научной теории, что «она должна быть открыта для разрушения».

Вигнер, Вейцзеккер и Уилер выдвинули более подробные возражения (совершенно различные по духу) против интерпретации квантовой механики на основе понятия относительного состояния, или множественности, миров. Трудно назвать кого-нибудь, кто усматривал бы в этой теории подтверждение детерминизма».

В работе «Вращающиеся цилиндры и возможность глобального нарушения причинности» [1.13] физик Фрэнк Типлер указал на теоретическую возможность построения машины, которая позволила бы путешествовать вперед и назад во времени. Типлер один из немногих оставшихся горячих сторонников теории множественных миров и соавтор спорной книги «Антропный космологический принцип» (The Antropic Cosmological Principle.– Oxford University Press, 1986). Используя вращающийся космос Гёделя и недавние работы по пространственно-временным патологиям в окрестности черных дыр, Типлер представил мысленно массивный бесконечно длинный цилиндр, который вращается так быстро, что его поверхность движется с окружной скоростью, превышающей половину скорости света. Как показывают вычисления Типлера, пространство–время вблизи цилиндра должно быть настолько деформировано, что астронавты могли бы летать вокруг цилиндра по замкнутой орбите в сторону, совпадающую или противоположную направлению его вращения, двигаясь в прошлое или в будущее.

Типлер строил также различные умозрительные соображения относительно построения машины времени с цилиндром конечной длины и массы, но впоследствии пришел к выводу, что такую машину можно построить, используя любую известную форму материи и любые силы. Эти сомнения не помешали Полу Андерсону использовать цилиндр Типлера для путешествия во времени в романе «Автар», а Роберту Форварду написать руководство «Как построить машину времени» (*Omnia*, May 1980). Статью Форварда редакция *Omnia* сопроводила следующим комментарием: «Теория нам уже известна. Необходимо лишь найти удачное инженерное решение».

Свой рассказ о машинах времени я закончу двумя жемчужинами мудрости из юмористического боевика Ирвинга Кори «Профессор»: «Прошлое лежит позади нас, будущее – впереди».

ГЛАВА 2

ГЕКСЫ И ЗВЕЗДЫ

Для древнегреческих математиков, в особенности пифагорейцев, фигурные числа обладали неотразимой привлекательностью (фигурными они называли числа, которые можно было представить, располагая точки на плоскости в виде различных фигур). Среди плоских фигурных чисел наиболее изученными были многоугольные числа. На рис. 2 показано, как можно построить в виде

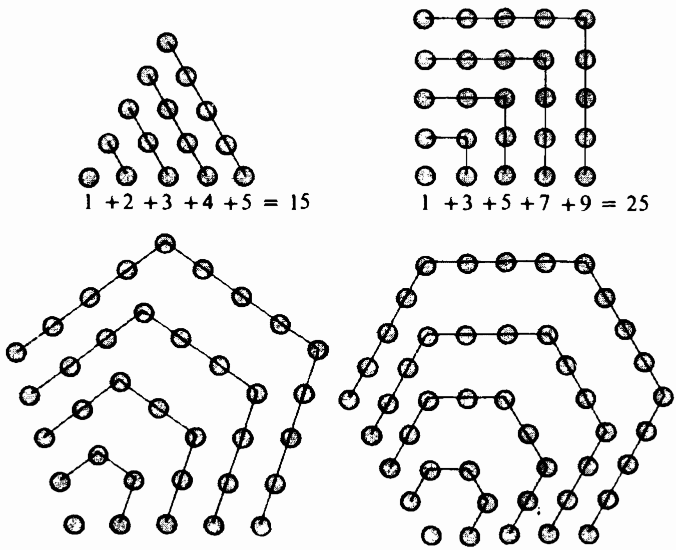


Рис. 2. Построение многоугольных чисел пятого порядка.

частичных сумм арифметической прогрессии многоугольные числа первых четырех типов: треугольные, квадратные, пятиугольные и шестиугольные. Треугольные числа – это частные суммы арифметической прогрессии $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ Квадратные числа образуются при последовательном сложении нечетных чисел $1 + 3 + 5 + + 7 + \ldots$ Пятиугольные числа порождаются арифметической прогрессией $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots$, а шестиугольные – арифметической прогрессией $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots$. Разности этих прогрессий соответственно равны 1, 2, 3 ...

Исследованием фигурных чисел занимается раздел теории чисел, получивший название диофантова анализа. Цель этого раздела математики состоит в нахождении целочисленных решений уравнений. Великие творцы теории чисел затратили немало усилий на изучение свойств многоугольных чисел. Сжатый обзор большинства полученных ими результатов можно найти во втором томе «Истории теории чисел» Леонарда Э. Диксона*.

Начнем с одной классической задачи, которая была решена Леонардом Эйлером в 1730 г. Как найти все числа, которые являются одновременно и квадратными и треугольными? Формула для n-го треугольного числа известна: $(1/2)(n^2 + n)$. Если это выражение задает также некий квадрат, то мы имеем диофантово уравнение $(1/2)(n^2 + n) = m^2$. Метод решения этого уравнения может служить превосходным введением в диофантов анализ. Начальный шаг состоит в преобразовании исходного уравнения к более простому виду, который и явится ключом к решению. Это преобразование можно проделать, например, следующим образом:

1) записать исходное уравнение в виде $n^2 + n = 2m^2$;
2) умножить обе части на 4: $4n^2 + 4n = 8m^2$;
3) прибавить к обеим частям по 1: $4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1$;
4) разложить левую часть на множители: $(2n + 1)(2n + 1) = 2(4m^2) + 1$;
5) ввести новые обозначения: $y = 2n + 1$ и $x = 2m$;
6) записать уравнение в новых переменных: $y^2 = 2x^2 + 1$.

Это – простейший вид так называемого уравнения Пелля, о котором пойдет речь дальше. Решив его в целых числах, мы легко могли бы найти целочисленные значе-

* Dickson L. E. History of the Theory of Numbers. – Carnegie Institute, 1919.

ния для n и m в исходном уравнении. Стандартный алгоритм решения уравнения Пелля состоит в том, чтобы представить квадратный корень из коэффициента при x^2 (в нашем случае этот коэффициент равен 2) в виде непрерывной дроби, а затем принять ее подходящие дроби в качестве значений x и y, удовлетворяющих уравнению Пелля. Этот метод слишком сложен, чтобы излагать его здесь, но заинтересованный читатель найдет его подробное изложение в гл. 22 книги А. Бейлера «Занимательные задачи из теории чисел» [2.2] или в любом хорошем учебнике по диофантову анализу.

Оказывается, что если коэффициент при x^2 не является точным квадратом, то уравнение Пелля допускает бесконечно много решений. Так как 2 – не точный квадрат, существует бесконечно много квадратных треугольных чисел. Их последовательность начинается так: 1, 36, 1225, 41616, 1413721 ... Рекуррентный метод вычисления членов этой последовательности сводится к рецепту: умножить последнее квадратное треугольное число на 34, вычесть из него предыдущее квадратное треугольное число и прибавить 2. Нерекуррентная формула для n-го квадратного треугольного числа имеет вид

$$\frac{[(17+12\sqrt{2})^n + (17-12\sqrt{2})^n - 2]}{32}.$$

При виде входящих в эту формулу иррациональных чисел можно было бы предположить, что необходимо округление (в ту или иную сторону), но в действительности никакого округления не требуется. Эта формула точная. При подстановке в нее любого целого положительного числа вместо n иррациональные числа сами собой исчезают при приведении подобных членов и остается целое значение. Нельзя не удивляться тому, как часто задача о выводе этой формулы встречается в математических журналах, хотя давно известно, что эта формула восходит еще к Эйлеру.

Квадратные треугольные числа, или квадратные треугольники, обладают многими необычными свойствами. Одно из наиболее необычных свойств состоит в том, что каждый квадратный треугольник задает стороны прямоугольного треугольника (выражающиеся целыми числами), у которого один катет на единицу длиннее другого. Пусть v – квадратный корень из квадратного треугольного числа, u – длина стороны соответствующего этому числу треугольника. Алгоритм сводится к решению системы из двух уравнений:

$$u = z - x - 1, \quad v = \frac{1}{2}(2x + 1 - z).$$

Например, если мы возьмем второе квадратное треугольное число 36, то $v = 6$, $u = 8$. Из приведенных выше уравнений находим: $x = 20$, $z = 29$. Следовательно, пифагорова тройка в этом случае имеет вид: 20, 21, 29. Если бы мы взяли первое квадратное треугольное число 1, то наш алгоритм «выдал» бы знакомый прямоугольный треугольник 3, 4, 5. Третье квадратное треугольное число порождает тройку чисел 119, 120, 169. Таким образом, все пифагоровы треугольники с катетами, длины которых равны последовательным целым числам, могут быть получены из квадратных треугольных чисел. Разумеется, ничто не мешает нам пойти обратным путем и вывести все квадратные треугольные числа из пифагоровых треугольников с катетами, длины которых равны последовательным целым числам. Этот простой алгоритм, или любой другой ему эквивалентный, объясняет, каким образом Бейлер смог построить свою таблицу первых 100 пифагоровых треугольников с катетами, отличающимися по длине на 1. Длины катетов 100-го такого треугольника выражаются 77-значными числами. Ни у одного пифагорова треугольника катеты не равны, но такое чудовище, как 100-й треугольник,– почти равнобедренный. Как показал графически Бейлер, если бы меньший катет такого треугольника имел в длину световой год, то большой катет был бы длиннее его на величину столь малую, что разница в длинах была бы в миллионы раз меньше диаметра протона.

Обратимся теперь к двум плоским фигурным числам, которые в классическом смысле не являются многоугольными. Первое из них было известно в прошлом, хотя ему не уделялось должного внимания. Второе, насколько мне известно, не считалось фигурным числом.

Расположив точки, как показано на рис. 3, мы получим так называемые центрированные шестиугольные числа (центрированные – чтобы отличать их от традиционных шестиугольных чисел, которые строятся, исходя из одной вершины – см. рис. 2). Условимся называть такие числа гексами. Как видно из рис. 3, n-й гекс

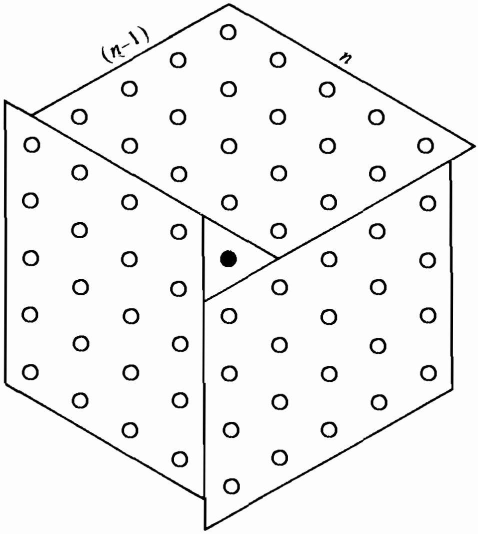


Рис. 3. Формула для n-го гекса: $[3 \times n(n-1)] + 1$.

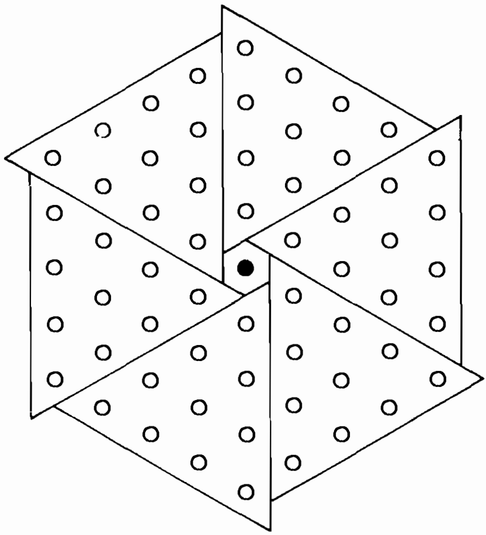


Рис. 4. Гекс: 6 треугольников и 1 точка в центре.

задается формулой $3n(n-1)+1$. Это – сумма трех ромбов, каждый из которых имеет стороны n и $(n-1)$, плюс одна-единственная точка в центре. На рис. 4 показано, что любой гекс можно рассматривать и как сумму шести треугольников плюс центральная точка. Последовательность гексов начинается с чисел 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169 ... Рекуррентный алгоритм получения гексов сводится к рецепту: умножить последний гекс на 2, вычесть из произведения предыдущий гекс и прибавить 6.

Предположим, что мы построили пирамиду гексов из монет, начав с гекса, вдоль стороны которого укладывается 100 монет. Поверх этого гекса мы «водрузим» гекс со стороной из 99 монет, на него «поставим» гекс со стороной из 98 монет и, наконец, увенчаем пирамиду одной монетой – по центру. Пирамида получится высотой в 100 слоев. Сколько в ней монет? Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо знать формулу суммы первых n гексов. Ответ неожиданно прост: n^3. Следовательно, в пирамиде $100^3 = 1\,000\,000$ монет.

Из формулы n^3 следует, что каждый гекс есть разность двух последовательных кубов. Изящное доказательство этого утверждения мы получим, построив куб, например $5 \times 5 \times 5$, из единичных кубов. Извлечем один куб (первый гекс) из верхнего угла. Образуется впадина

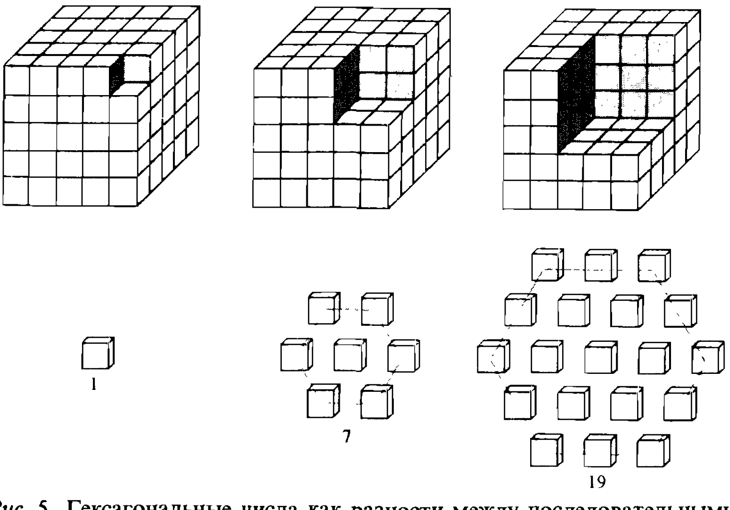


Рис. 5. Гексагональные числа как разности между последовательными кубами.

размером $1 \times 1 \times 1$. К ней примыкают семь кубов (второй гекс). Извлекая их, мы образуем в большом кубе впадину кубической формы размером $2 \times 2 \times 2$. К этой впадине примыкают 19 кубов (третий гекс). Удалив эти 19 кубов, мы получим кубическую впадину размером $3 \times 3 \times 3$ и т. д. (рис. 5).

Если не считать гекса 1, то первый треугольный гекс равен 91, а первый квадратный гекс 169. Читатели, знакомые с методом решения уравнения Пелля, могут доставить себе удовольствие и попытаться найти рекуррентные алгоритмы, порождающие каждую из названных нами бесконечных последовательностей чисел, и найти для n-х членов этих последовательностей прямые, нерекуррентные формулы. Уравнение Пелля для квадратных гексов имеет вид $3x^2 + 1 = y^2$ и решается путем нахождения подходящих дробей для непрерывной дроби, представляющей квадратный корень из 3. Следующий квадратный гекс после 169 равен 32761, за ним – 6355441. Существуют ли гексы, одновременно квадратные и треугольные? Существует ли кубический гекс?

С гексами тесно связаны числа, которые, насколько мне известно, не считались раньше фигурными, хотя «их» можно было видеть в узорах решеток для сливных отверстий или в расположении дырочек на крышках солонок и перечниц. Любителям настольных игр они знакомы как форма досок для китайских шашек. Мы будем называть такие числа звездами. На рис. 6 изображены первые четыре звезды, на рис. 7 – «доказательство» (по принципу: взгляни и убедишься) формулы для n-й звезды. Нетрудно видеть, что звезда состоит из шести ромбов, каждый со сторонами n и $(n - 1)$, плюс центральная точка, или равна $6n(n - 1) + 1$. Звезду можно также

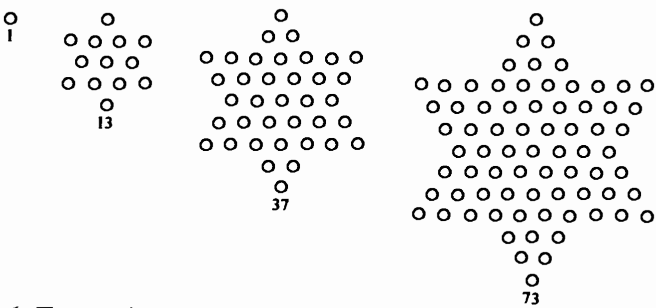


Рис. 6. Первые 4 звезды.

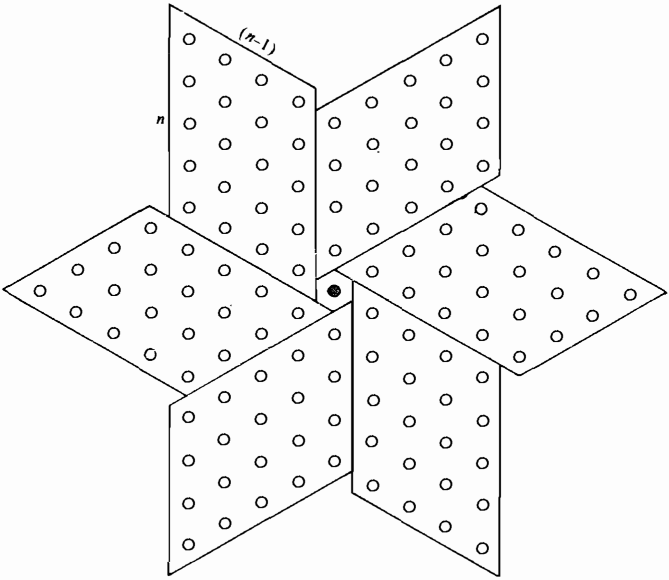


Рис. 7. Формула для n-й звезды: $[6 \times n(n-1)] + 1$.

представить в виде суммы 12 треугольников плюс 1 центральная точка, как на рис. 8.

Последовательность звезд начинается с чисел 1, 13, 37,

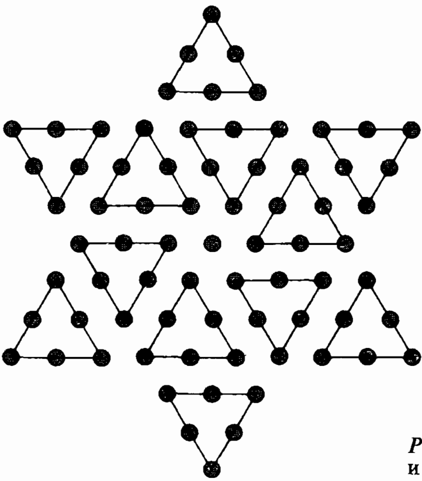


Рис. 8. Звезда: 12 треугольников и 1 точка в центре.

73, 121, 181, 253, 337, 433, 541 ... Очередная $(n+1)$-я звезда получается, если к n-й звезде прибавить $12n$. Гекс состоит из шести треугольников. Добавляя к его шести сторонам еще 6 треугольников, мы превращаем гекс в звезду. Следовательно, любой гекс становится звездой, если его удвоить и вычесть 1. Первые n звезд в сумме дают $2n^3 - n$. Может ли эта сумма быть квадратом? Оказывается, может, но только при $n = 1$ или $n = 169$. Это было установлено в 1973 г. Дж. Гаррисом на основе результатов, приведенных в книге Л. Морделла «Диофантовы уравнения» [2.3].

Первая после 1 треугольная звезда равна 253. Рекуррентный алгоритм получения треугольных звезд сводится к рецепту: умножить треугольную звезду на 194, прибавить 60 и вычесть предыдущую треугольную звезду. Бесконечная последовательность треугольных звезд начинается с чисел 1, 253, 49141, 9533161, 1849384153 ... Прямая (нерекуррентная) формула для n-й треугольной звезды имеет вид

$$\frac{3\left[(7+4\sqrt{3})^{2n-1}+(7-4\sqrt{3})^{2n-1}\right]-10}{32}.$$

Первая квадратная звезда после 1 равна 121. Это – число отверстий в стандартной доске для игры в китайские шашки. Рекуррентный алгоритм вычисления квадратной звезды сводится к рецепту: умножить квадратную звезду на 98, вычесть предыдущую квадратную звезду и прибавить 24. Бесконечная последовательность квадратных звезд начинается с чисел 1, 121, 11881, 1164241, 114083761 ... Для читателей, которые захотят решить уравнение для квадратных звезд $6n(n-1)+1=m^2$, скажу только, что решение этого уравнения сводится к решению уравнения $2x^2+1=3y^2$, где x – квадратный корень из квадратной звезды. Его можно решить, находя чередующиеся по знаку подходящие дроби для квадратного корня из 3/2. Точная нерекуррентная формула для n-й квадратной звезды имеет вид

$$\left[\frac{(5+2\sqrt{6})^n(\sqrt{6}-2)-(5-2\sqrt{6})^n(\sqrt{6}+2)}{4}\right]^2.$$

Одно из наиболее замечательных свойств квадратных звезд состоит в том, что они дают простой алгоритм получения любого числа, представимого в виде суммы двух последовательных квадратов и одновременно в виде суммы трех последовательных квадратов. Наименьшее из таких чисел равно 365 (числу дней в невисокосном году). Оно представимо в виде $13^2 + 14^2$ и $10^2 + 11^2 + 12^2$. Метод получения квадратных звезд прост: нужно взять любую квадратную звезду, которая больше 1, умножить ее на 3 и прибавить 2. Наименьшая квадратная звезда после 1 есть число 121. Умножая его на 3 и прибавляя 2, получаем 365. Следующая квдратная звезда 11881 приводит к числу 35645, которое представимо и в виде $133^2 + 134^2$, и в виде $108^2 + 109^2 + 110^2$. Третья квадратная звезда есть число $3(1164241) + 2 = 3492725 = 1321^2 + 1322^2 = 1078^2 + 1079^2 + 1080^2$. В каждом случае средний член тройки трех последовательных квадратов есть исходная квадратная звезда.

Доказать, что предложенный алгоритм работает во всех без исключения случаях,-приятное упражнение, не требующее особых познаний в теории чисел. Сможете ли вы найти простое доказательство предложенного алгоритма?

В. Милли сообщил мне, что румынский математик М. Гика опубликовал несколько работ по гексам, но я не смог найти ссылок на его труды. Не удалось мне найти и какую-нибудь работу по звездам как таковым, хотя их формулы часто встречаются в связи со многими диофантовыми задачами. О звездах было бы интересно выяснить самые различные вопросы. Ответить на них бывает и легко, и трудно. Например, я не знаю, существуют ли звезды, которые были бы одновременно и квадратными, и треугольными. Так как цифровой корень* звезды равен 1 или 4, а цифровой корень треугольного числа – 1, 3, 6 или 9, мы можем утверждать, что цифровой корень квадратной звезды должен быть равен 1, но это не очень помогает в решении задачи.

Общее уравнение Пелля – ключ ко многим задачам диофантова анализа – имеет вид $ax^2 + 1 = y^2$, где a – целое положительное число. Уравнение Пелля имеет бесконечно много решений в целых числах x и y, если только a – не квадрат (если же a – квадрат, то уравнение Пелля не решается в целых числах). При $a = 2$, как мы уже видели,

---

* Цифровым корнем числа называется остаток от деления его на 9. Более подробно об этом понятии см. в [2.8], гл. 19. – *Прим. перев.*

уравнение Пелля позволяет найти квадратные треугольные числа, а при $a = 3$ – квадратные гексы.

Уравнение $ax^2 + 1 = y^2$ по традиции, идущей от Леонарда Эйлера, принято связывать с именем Джона Пелля, математика, жившего в XVII в. и занимавшегося теорией чисел. В действительности Пелль не имел никакого отношения к уравнению, носящему ныне его имя. Оно было известно еще древним грекам и индийцам. Первое исследование этого уравнения принадлежит Пьеру Ферма, а общее решение было получено Дж. Валлисом и другими математиками. Классическим трудом по теории этого уравнения по праву считается книга Э. Уитфорда «Уравнение Пелля» [2.11]. Приведенные в этой книге таблицы позволяют избегать громоздких вычислений с непрерывными дробями. Как изящно выразился в одном из своих неопубликованных шуточных четверостиший Дж. Линдо,

Чтобы решить уравнение Пелля,
Нужна вся хитрость Макиавелли.
Все стены дробями испишешь, бывало,
Да толку все мало!

Я хочу поблагодарить В. Милли, приславшего нерекуррентные формулы для квадратных и треугольных звезд и других чисел, о которых шла речь в этой главе, а также Дж. Харриса и Дж. Маккея за дополнительную помощь. Неоценимым подспорьем в работе мне был «Справочник по целочисленным последовательностям» Н. Слоуна [2.4]. Это замечательное издание.

ОТВЕТЫ

Требовалось доказать, что если звездное число умножить на 3 и прибавить 2, то полученное число можно представить в виде суммы двух последовательных квадратов и в виде суммы трех последовательных квадратов. Как мы уже знаем, квадратными звездами называются числа вида $6n(n-1)+1 = m^2$, где n и m – целые положительные числа. Если левую часть этого соотношения умножить на 3 и прибавить 2, то она перейдет в выражение $18n(n-1)+3+2 = 18n^2 - 18n + 5$. Оно представимо в виде суммы двух последовательных квадратов: $(3n - 1)^2 + (3n-2)^2$. Если правую часть соотношения, задающего квадратные звезды, умножить на 3 и прибавить 2, то получится $3m^2 + 1$. Это выражение представимо в виде суммы трех последовательных квадратов $(m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2$.

ДОПОЛНЕНИЕ

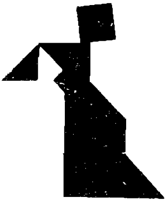
Я спрашивал, может ли гекс быть одновременно и треугольным, и квадратным. Ответ: может, но только один гекс 1. Доказал это математик Ч. Гринстед в работе «О методе решения одного класса диофантовых уравнений» (*Mathematics of Computation,* № 32, July 1978, p. 936–940).

Я спрашивал также, может ли гекс быть кубом. Д. Чесс, С. Хитотумату и В. Джонсон первыми сообщили мне, как легко показать, что гекс не может быть кубом. Как я уже объяснял, каждый гекс равен разности двух последовательных кубов. Таким образом, мой вопрос сводится к задаче: существует ли у уравнения $(x-1)^3 - x^3 = y^3$ целочисленное решение? Записав это уравнение в виде $x^3 + y^3 = (x+1)^3$, мы сразу же увидим, что перед нами частный случай Великой теоремы Ферма при $n = 3$ (n – показатель степени). А как давно показано, уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в целых числах.

Х. Хиндин показал [2.6], что задаче о нахождении всех чисел, которые являются одновременно и гексами и звездами, эквивалентна задача о нахождении пар треугольных чисел, одно из которых вдвое больше другого, или, что то же, пифагоровых троек x, y, z, в которых $y = x + 1$. В таблице, приведенной в заметке Хиндина, перечислены первые десять звезд-гексов, бесконечная последовательность которых начинается с чисел 1, 37, 1261, 42841 ... Хиндин также вычислил первые 15000 звезд и гексов. Результаты расчетов он высылает желающим.

Дж. Харрис в своем письме обращает внимание на то, что каждая звезда имеет цифровой корень (то есть вычет по модулю 9), равный 1 или 4, а ее двумя последними цифрами должны быть 01, 21, 41, 61, 81, 13, 33, 53, 73, 93 или 37. Это позволяет отбросить любую звезду, содержащую каждую из цифр от 1 до 9 по одному разу (такие звезды имели бы цифровой корень, равный 9, или, что то же, 0), а также любую звезду, состоящую из одной и той же повторяющейся цифры. Харрис показал, что любые две последовательные звезды взаимно просты и что каждый простой делитель звезды на единицу больше или на единицу меньше числа, кратного 12.

Несколько читателей в своих письмах сообщили мне, что в первых вариантах неофициальных флагов США тринадцать звезд (по числу штатов) располагались в виде фигурного числа 13. Эта же фигура изображена на купюре достоинством в 1 доллар (над орлом).



ГЛАВА 3

ТАНГРАМЫ, ЧАСТЬ I

> Семь книг Тана ... показывают сотворение мира и происхождение видов по схеме, более дарвиновской, чем у самого Дарвина; развитие человеческой расы прослеживается на протяжении семи стадий вплоть до загадочного духовного состояния, которое слишком лунатично, чтобы заслуживать серьезного рассмотрения.
>
> *Сэм Лойд. «Восьмая книга Тана»*

Задачи на разрезание принадлежат к числу наиболее старых жанров занимательной математики. Плоские фигуры (или объемные геометрические тела) разрезаются на различные части, из которых требуется сложить исходную или какую-нибудь другую фигуру (или тело). Одна из таких игр – китайская головоломка, получившая название «танграм»,– известна в Европе с эпохи Возрождения.

Хотя танграмы внешне похожи на картинки-мозаики, в действительности эти типы игры предъявляют прямо противоположные требования к играющим. Как заметил Р. Рид в своей книге «Танграмы: 330 головоломок» [3.7], при составлении картинки-мозаики вы должны сложить большую картину из нескольких сотен кусочков неправильной формы. Такое занятие не требует особой сообра-

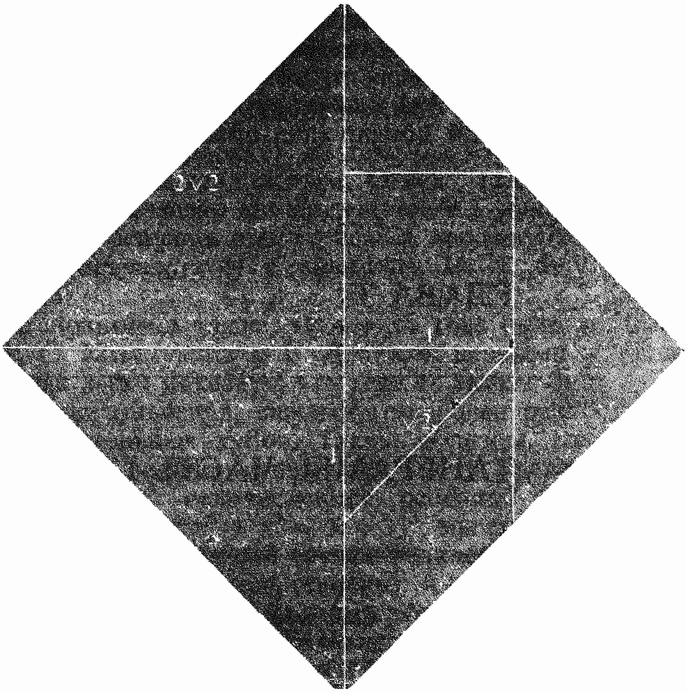


Рис. 9. Семь танов.

зительности, необходимо только терпение и время. Танграмы* состоят всего лишь из семи кусочков-деталей, называемых танами. Эти таны имеют простейшую форму, но позволяют составлять бесконечно много разнообразнейших фигурок-танграмов. Составление таких фигурок предъявляет весьма высокие требования к геометрической интуиции и художественным способностям играющего.

Таны получаются при разрезании квадрата вдоль прямых на два больших треугольника, одного треугольника средних размеров, двух малых треугольников, одного квадрата и параллелограмма (рис. 9). Углы всех танов кратны 45°. Если сторону квадратного тана принять за единицу, то длина стороны любого другого тана выражается одним из четырех чисел 1, 2, $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$.

«Сначала мы испытываем некоторое разочарование

* Фигурки, составляемые из 7 частей исходного квадрата, также называются танграмами. – *Прим. перев.*

при виде убогости фигурок, от которых мы ожидаем так много,– писал известный американский составитель головоломок Сэм Лойд.– Число 7 – на редкость упрямое число, которое невозможно разделить на симметричные половинки, а геометрические фигуры ... с «колючими» углами исключают всякую возможность разнообразия, кривых или изящных линий». Но стоит лишь повозиться с танами, как начинаешь ценить тонкое изящество разбиения квадрата на 7 частей и богатство заложенных в таком разбиении комбинаторных возможностей. Предлагались и другие варианты разбиения квадрата, подражающие танграму (некоторые из таких головоломок время от времени появляются на рынке), но ни один из них не может сравниться в популярности с танграмом. Как и в случае оригами, очарование танграма таится в простоте материала и в кажущейся непригодности его для создания фигурок, обладающих эстетической привлекательностью.

Игра в танграм распадается на три основные категории:

1) поиск одного или нескольких способов построения данной фигурки или изящного доказательства невозможности построения фигурки;

2) нахождение способа, позволяющего с наибольшей выразительностью или юмором (или тем и другим вместе) изобразить силуэты животных, людей и другие узнаваемые предметы;

3) решение различных задач комбинаторной геометрии, возникающих в связи с составлением фигур из 7 танов.

Во многих книгах и даже в нескольких энциклопедиях говорится, что игра в танграм насчитывает около 4000 лет. В 1954 г. в одной из статей я назвал танграм самой древней из головоломок на резрезание и утверждал, что китайцы играли в танграм за несколько тысяч лет до нашего времени. Однако я глубоко заблуждался. Миф о древности танграма создал не кто иной, как Сэм Лойд. В 1903 г., находясь на вершине славы, шестидесятилетний Сэм Лойд выпустил небольшую книжечку под названием «Восьмая книга Тана» [3.8], ставшую ныне библиографической редкостью. Ни одна другая европейская книга по танграмам не шла в сравнение с ней и не оказала столь большого влияния на широкие круги любителей занимательных задач. Помимо сотен новых фигур Лойд придумал совершенно нелепую легенду о происхождении танграма. Это был величайший розыгрыш в истории головоломок, и число вполне интеллигентных людей, принявших ее за чистую монету, сравнимо разве что с числом тех, кто всерьез воспринял выдуманную от начала и до конца Г. Менкеном историю ванны.

«В записках покойного профессора Челленора, попавших в руки автора,– утверждал Лойд,– имеются сведения о том, что семь книг о танграмах, каждая из которых насчитывает ровно тысячу фигур, были составлены в Китае более 4000 лет назад. Эти книги ныне стали столь большой редкостью, что за те сорок лет, которые профессор Челленор провел в Китае, ему лишь раз удалось видеть первое издание первого и седьмого томов (сохранившихся полностью) и несколько разрозненных фрагментов второго тома.

В этой связи уместно напомнить, что части одной из книг, напечатанной золотом на пергаменте, были обнаружены в Пекине английским солдатом, продавшим свою находку за 300 фунтов стерлингов одному собирателю китайской старины, который любезно предоставил некоторые наиболее изысканные фигурки для воспроизведения в этой книге.»

Согласно легенде Лойда, Тан был легендарным китайским мудрецом, которому его соотечественники поклоняются как божеству. Фигуры в своих семи книгах он расположил в соответствии с семью стадиями в эволюции Земли. Его танграмы начинаются с символических изображений хаоса и принципа «инь и ян». Затем следуют простейшие формы жизни, по мере продвижения по древу эволюции появляются фигуры рыб, птиц, животных и человека. По пути в различных местах попадаются изображения того, что создано человеком: орудия труда, мебель, одежда и архитектурные сооружения. Лойд часто цитирует высказывания Конфуция, философа по имени Шуфуце, комментатора Ли Хуанчжан и вымышленного профессора Челленора. Ли Хуанчжан упоминается в связи с тем, что по преданию он знал все фигуры из семи книг Тана прежде, чем научился говорить. Встречаются у Лойда и ссылки на «известные» китайские пословицы типа «Только глупец взялся бы написать восьмую книгу Тана».

Разумеется, все это – чистейшей воды мистификация. Когда Генри Э. Дьюдени, британский «аналог» Сэма

Лойда, в 1908 г. написал статью о танграмах для *The Strand Magazine*, он, ничего не подозревая, честно повторил версию Лойда. Его статья привлекла внимание сэра Джеймса Мюррея, знаменитого лексикографа и составителя «Оксфордского словаря английского языка», и он обратился к своему сыну, обучавшемуся в одном из китайских университетов, с просьбой разузнать подробнее о Тане. Выяснилось, что почтенные китайские профессора ничего не слыхали о Тане и даже не знают слова «танграм». Мюррей сообщил Дьюдени, что в Китае игра известна под названием «чи чиао тю» – «семь хитроумных фигур», или при менее буквальном переводе – «хитроумная головоломка из семи частей».

Мюррей обнаружил, что слово «танграм» впервые встречается в словаре Вебстера издания 1864 г. По мнению Мюррея, само слово «танграм» было придумано в середине прошлого столетия неким американцем, образовавшим неологизм из слова «тан», что означает на кантонском диалекте «китайский», и распространенного суффикса «-грам» (как в словах «анаграмма» или «криптограмма»). Иная теория происхождения слова «танграм» была выдвинута Питером Ван Ноутом в предисловии к новому изданию книги Лойда [3.8]: китайские семьи, живущие на лодках, называются *танка, тан* по-китайски означает «падшая женщина». Американские моряки, покупавшие головоломку у девушек-танка, могли назвать ее танграмом – головоломкой доступных девушек.

Узнав мнение Мюррея о происхождении танграма, Дьюдени воспользовался новыми сведениями и поместил в «Математических развлечениях» [3.2] (на этот раз вполне умышленно) свой розыгрыш. По словам Дьюдени, один американский корреспондент приобрел набор перламутровых танов китайской работы, к которому прилагалась отпечатанная на рисовой бумаге брошюра, содержавшая более 300 фигур. Корреспондента заинтересовал таинственный иероглиф на титульном листе, но все китайцы, к которым он обращался с просьбой объяснить, что означает этот знак, не хотели или не могли ему ничем помочь. Дьюдени воспроизвел иероглиф в своей книге и обратился к читателям за помощью. Мы знаем, что ответили Дьюдени его современники, но Рид, у которого была та же брошюра, без труда разгадал загадку. Иероглиф был просто-напросто подписью под танграмом, изображавшим двух человек. Подпись гласила: «Два человека лицом друг к другу пьют чай. Эта картинка свидетельствует о больших возможностях, таящихся в игре из семи частей».

Никто не знает, когда появились первые танграмы. Самая старая книга, в которой упоминается эта игра, вышла в Китае в 1803 г. под названием «Собрание фигур из семи частей». Возможно, были и более ранние издания. По мнению большинства специалистов, игра возникла в Китае на рубеже XVIII и XIX вв., стала повальным увлечением и затем быстро растространилась на Запад. Первые европейские книги о танграмах, по мнению Рида, вряд ли можно было назвать оригинальными изданиями: по существу они были копиями китайских брошюр на рисовой бумаге. В них даже воспроизводились ошибки, допущенные в иллюстрациях к китайским изданиям.

Одна из первых книг о танграмах на английском языке, первоначально принадлежавшая Чарлзу Лютвиджу Доджсону (более известному как Льюис Кэрролл), оказалась впоследствии в руках Дьюдени. Она называлась «Модная китайская головоломка» и была опубликована в Нью-Йорке в 1817 г. Дьюдени приводит отрывок из нее, в котором говорится, что танграм был любимой игрой Наполеона, который, лишившись трона, в изгнании проводил долгие часы за этой забавой, «упражняя свое терпение и находчивость». Упоминание о любимой игре Наполеона также не подкрепляется никакими свидетельствами и, скорее всего, не соответствует действительности. Лойд сообщает, что в танграм очень любили играть Джон К. Адамс и Густав Доре, хотя я не знаю, на чем основано такое утверждение. Зато достоверно известно, что танграмом очень увлекался Эдгар А. По. Принадлежавший ему комплект «танов», вырезанных из пластин слоновой кости, приобретен Нью-йоркской публичной библиотекой. Французская книга неизвестного автора «Сборник занимательнейших игр, принятых в обществе» (1818 г.) может быть переводом книги из библиотеки Доджсона (хотя возможна и обратная ситуация: Доджсону принадлежал английский перевод этого французского оригинала). Мне не удалось видеть ни того, ни другого издания. В 1817 г. в Америке вышла книга под названием «Китайский философский и математический трангам». «Транграм» – старинное английское слово, означавшее «безделушка», «игрушка» или «головоломка».

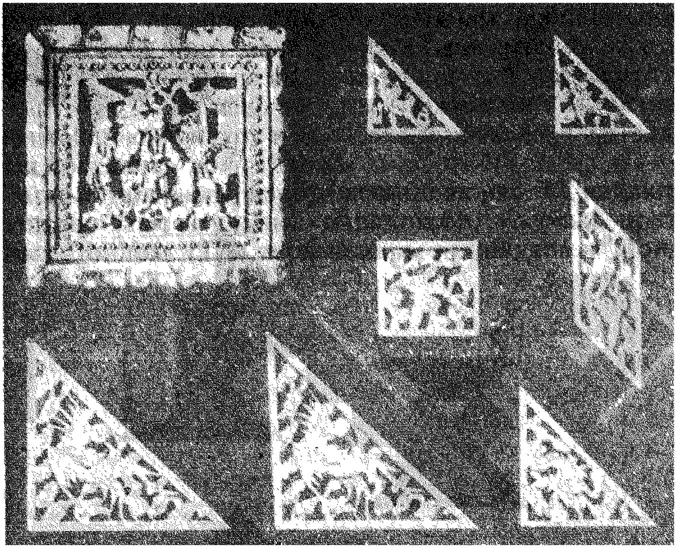


Рис. 10. Танграм из слоновой кости, принадлежавший Эдгару Аллану По.

Сэмюэль Джонсон в своем словаре привел его в ошибочном написании – «транграм», которое продержалось довольно долго, переходя из одного словаря в другой. Возродил ли неизвестный автор забытое слово, которое в дальнейшем перешло в «танграм», или допустил ошибку в написании известного слова «танграм», уже бывшего в употреблении? Сюжет одного из остросюжетных романов (я имею в виду роман «Убивающие ногтями» голландского дипломата и востоковеда Роберта Ван Гулика) строится вокруг фигурок танграма.

Комплект «танов», принадлежавших По, вы видите на рис. 10. Тонкая филигранная резьба по слоновой кости характерна для старинных китайских танграмов. Обратите внимание, что таны хранятся в квадратной коробочке в два слоя, поэтому уложить их – уже означает решить головоломку. В прошлом столетии танграм в Китае считали забавой для взрослых (сейчас в танграм на Дальнем Востоке играют дети) и таны изготовляли различных размеров и из разнообразных материалов. Блюдам, лакированным коробочкам и даже столикам придавали форму танов.

Но довольно истории. Обратимся теперь к задачам,

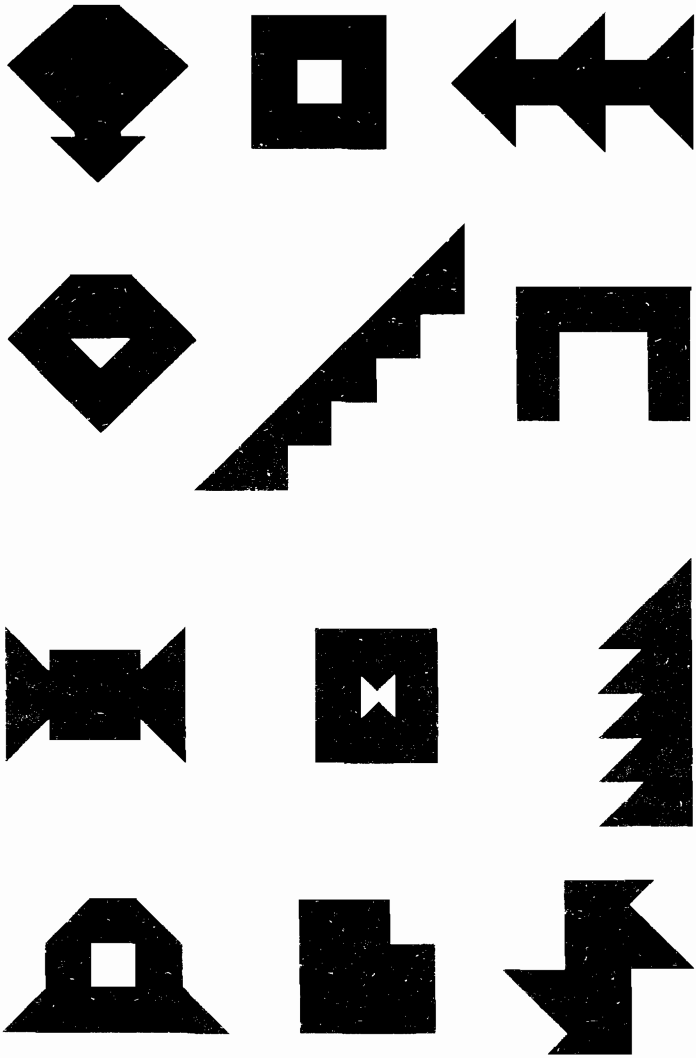


Рис. 11. Какие из этих фигурок невозможно сложить из 7 танов?

возникающим при игре в танграм, которые мы в приведенной выше классификации отнесли к первой группе: составлению заданных фигур. На рис. 11 изображено 12 различных фигур. Испробуйте на них свою геометрическую интуицию. Каждая фигурка должна быть составлена из всех 7 танов. Параллелограмм (единственный асимметричный тан) можно переворачивать любой стороной вверх. Одну из изображенных на рис. 11 фигур составить из танов невозможно. Можете ли вы опознать «невозможную» фигуру и доказать, что ее действительно нельзя составить из 7 танов?

Парные танграмы, изображенные на рис. 12, являются образцами замечательных парадоксов, впервые придуманных Лойдом. (Три первые пары принадлежат Лойду,

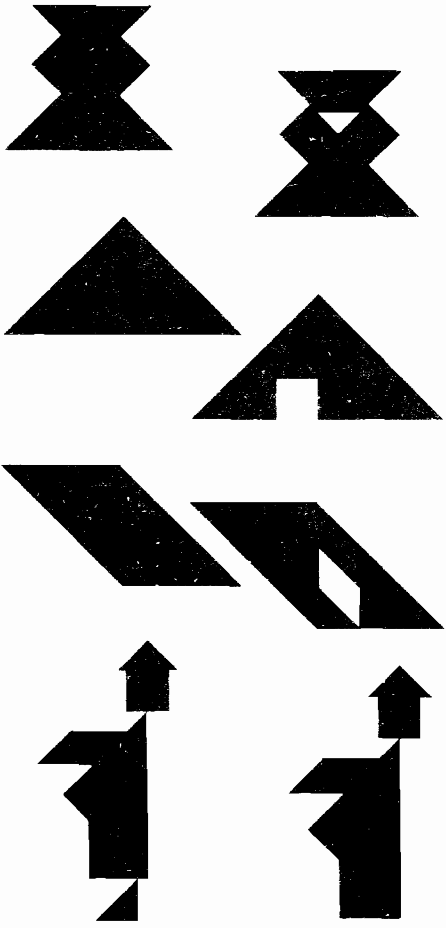


Рис. 12. Парадоксы танграма.

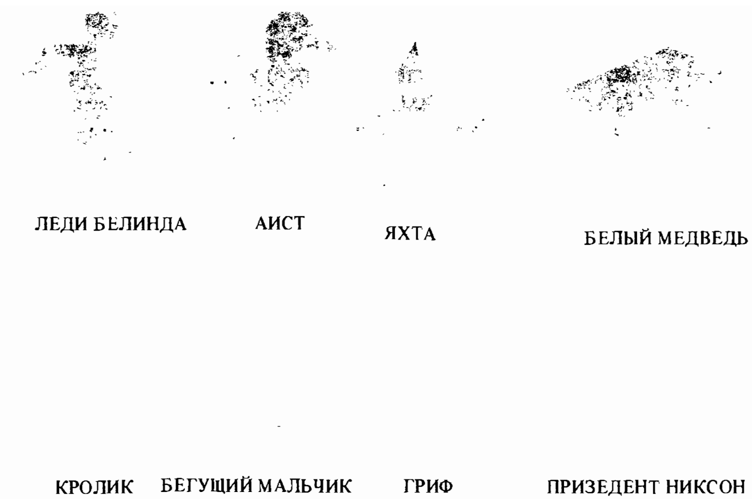


Рис. 13. **Фигурки из 7 танов.**

четвертую пару обнаружил Дьюдени.) Хотя правая фигура в каждой паре кажется точно такой же (с точностью до «недостающего» тана!), как слева, в действительности и правая, и левая фигура в каждой паре составлены из всех 7 танов.

Танграмы на рис. 13 не предназначены для решения. Они служат иллюстрациями второй разновидности игры в танграм – создания забавных и выразительных фигурок. (Должен признаться, что карикатура на президента Никсона принадлежит мне.) «Замечательная особенность танграмных фигурок,– писал Дьюдени,– состоит в том, что они говорят нашему воображению гораздо больше, чем в них заложено. Кто, например, при взгляде на «леди Белинду» не почувствует ее высокомерие? «Нога аиста» кажется тоньше, чем любой из составляющих ее танов. Это – настоящая оптическая иллюзия. Небольшой выступ «паруса» в верхней части «яхты» позволяет воображению легко достроить целую мачту. Если расположить фигуры на белой бумаге так, чтобы таны неплотно примыкали друг к другу, то «швы» между частями фигур в одних случаях сделают их еще более выразительными, а в других почти полностью испортят эффект.

Из двух или нескольких комплектов танов можно создавать еще более сложные фигуры. Несколько таких «двойных танграмов» Дьюдени приводит в своей книге [3.7], остальные заимствованы из книги Рида [3.6]. Однако я согласен с Ридом, когда он пишет: «Играя с 14 танами, трудно отделаться от впечатления, что можно добиться почти правдоподобного сходства с чем угодно. Именно поэтому вы перестаете ощущать удовлетворение, когда вам удается построить очень похожую на настоящую «корову», «парусную лодку», «человеческую фигуру» или что-нибудь еще из семи танов».

Другое дело – объединение двух «тематически» связанных между собой танграмов, каждый из которых составлен из полного комплекта (7 танов). Четыре классических примера парных фигур были предложены еще Лойдом. Это «женщина, толкающая детскую коляску», «бегун, растянувшийся у ног другой фигуры», «два индейца» и «человек с тачкой» (рис. 14). Обратите внимание на то, что и человек, и тележка – танграмы одинаковые с точностью до ориентации.

Для математиков наибольший интерес представляют игры в танграм, которые мы отнесли к третьей группе, а именно: решение комбинаторных задач. Некоторые заме-

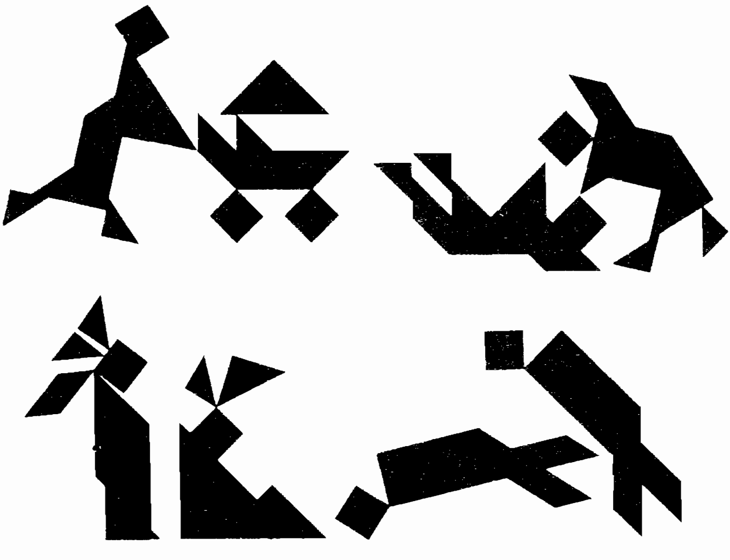


Рис. 14. Двойные танграмы Сэма Лойда.

чательные достижения в этой области принадлежат специалисту по теории графов из университета Ватерлоо Рональду Риду, а также специалисту по вычислительной математике Э. Дейчу. С некоторыми из полученных ими результатов вы познакомитесь в следующей главе. А теперь, чтобы возбудить у читателя аппетит, я приведу две задачи, решения которых будут приведены в гл. 4.

1. Сколько различных выпуклых многоугольников можно построить из 7 танов? В многоугольниках не должно быть никаких «окон». Многоугольники, переходящие друг в друга при поворотах или отражениях, как обычно, не считаются различными. Поскольку все 3-сторонние многоугольники выпуклы и из 7 танов невозможно построить невыпуклый многоугольник с 4 сторонами, решение этой задачи позволяет заодно установить число 3- и 4-сторонних многоугольников. Нетрудно видеть, что возможен только один треугольник (так как углы должны быть кратны 45°, то этот треугольник должен быть прямоугольным равнобедренным). Найти же все выпуклые многоугольники с бóльшим числом сторон не так просто.

2. Сколько различных 5-сторонних многоугольников можно составить из 7 танов?

ОТВЕТЫ

Из семи танов, изображенных на рис. 11, невозможно построить квадрат с квадратной дырой в центре. Два больших треугольника могут располагаться только в противоположных углах. Квадратный тан должен стоять в третьем углу, а параллелограмм касаться четвертой вершины, но тогда не остается места для среднего по величине треугольника.

ГЛАВА 4

ТАНГРАМЫ, ЧАСТЬ II

> Составление картинок из семи кусочков дерева, ... известных под названием танов, ... – одно из самых древних развлечений на Востоке. Можно выложить многие сотни фигурок, изображающих мужчин, женщин, птиц, зверей, рыб, дома, лодки, домашнюю утварь, узоры и т. д., но развлечение это не математическое, и я умышленно ограничиваюсь лишь беглым упоминанием о нем.
>
> *У. У. Роуз Болл. «Математические развлечения и очерки»*

Танграм – не математическая забава? Болл написал эти строки необдуманно. В этой главе мы рассмотрим некоторые нетривиальные комбинаторные задачи, возникающие в связи с семью танами.

Сразу же возникает вопрос: сколько сторон может быть у танграма, составленного из всех 7 танов? Хотя ответ очевиден, он был впервые явно сформулирован Г. Линдгреном в 1968 г. [3.9]. А. Р. Рид изложил ход решения в длинном послании ко мне, из которого я приведу лишь несколько отрывков.

«У всех танов вместе всего 23 стороны, поэтому у такого танграма, который изображен на рис. 15 слева, сторон ровно столько же. В то же время танграмы, части которых примыкают друг к другу только в вершине, не представляют особого интереса с точки зрения математики...» Рид предлагает принять правило, согласно которому танграм должен иметь периметр, топологически эквивалентный окружности, то есть не иметь самопересечений. Такие танграмы Рид называет «собственно

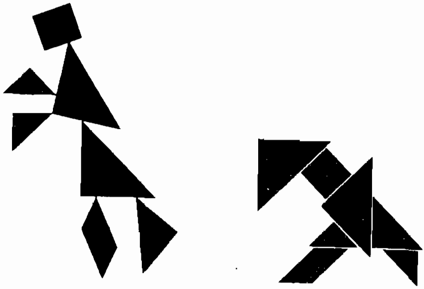


Рис. 15. Несобственно танграм (слева) и собственно танграм (справа). У каждого танграма по 23 стороны.

танграмами». Сколько сторон может быть у собственно танграма? Ответ остается прежним: 23 стороны. Доказательством его правильности служит фигурка наклонившегося вперед человека, изображенная на рис. 15 слева, и почти неисчерпаемое множество других примеров.

Среди собственно танграмов можно выделить важное подмножество, элементы которого Рид называет «точно подогнанными танграмами». Смысл этого термина станет ясен, если провести прямые на всех танах (кроме двух малых треугольников), разбивающие их на 16 прямоугольных равнобедренных треугольников с единичными катетами (рис. 16). Точно подогнанный танграм – это соб-

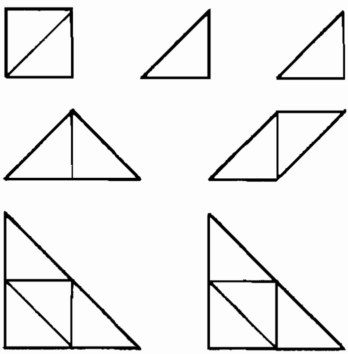


Рис. 16. Семь танов.

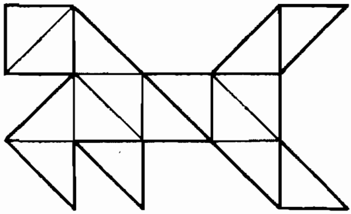


Рис. 17. Точно подогнанный танграм (собака) с 18 сторонами.

ственно танграм, составленный так, что если два тана соприкасаются, то стороны образующих их малых треугольников точно совпадают: либо катет с катетом, либо гипотенуза с гипотенузой. Все выпуклые танграмы точно подогнаны, равно как и многие традиционные фигуры (рис. 17).

Заметим попутно, что точная подгонка характерна для восточной технологии: на Востоке существует тенденция выдерживать размеры домов, мебели и т.д. в пределах целых кратных некоторой основной единицы длины. Например, как мне говорили, японская строительная промышленность одна из наиболее эффективных в мире потому, что строительные пиломатериалы стандартизированы по длине и имеют размеры, кратные основной единице длины (которая называется «мат»).

Помимо точной подгонки Рид вводит еще два ограничения. Точно подогнанный танграм должен быть односвязным (состоять из одного куска), и в нем не должно быть внутренних дыр, в том числе и таких дыр, которые касаются периметра в одной или в нескольких точках. Точно подогнанные танграмы удобно вычерчивать на клетчатой бумаге так, чтобы все целочисленные стороны располагались по линиям сетки. Тогда длины всех диагональных сторон будут целыми кратными числа $\sqrt{2}$ и, следовательно, иррациональными. Это обстоятельство навело Рида на очень красивую задачу: у скольких точно подогнанных танграмов длины *всех* сторон иррациональны? У таких танграмов, если начертить их на клетчатой бумаге, все стороны расположились бы по диагоналям.

Если стороны танграмов, идущие по линиям сетки, измерять катетами, а стороны, идущие по диагоналям,–

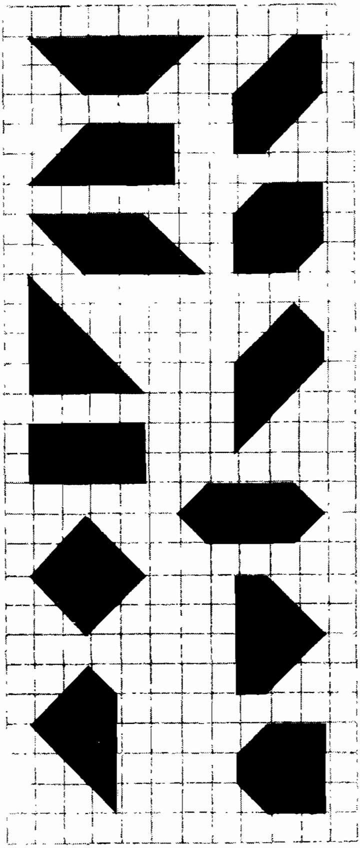


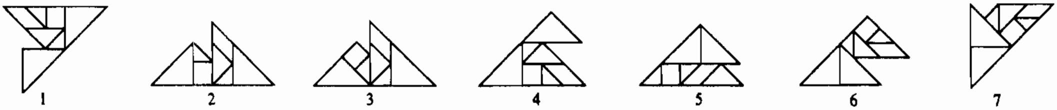
Рис. 18. Тринадцать выпуклых танграмов.

гипотенузами элементарных треугольников, то периметр всех танов, продолжает Рид, насчитывает 30 элементарных отрезков. Но «когда мы прикладываем друг к другу 2 тана, то 2 стороны, по которым они примыкают, оказываются потерянными для периметра, и может случиться, что мы теряем более 2 элементарных отрезков. Кроме того, чтобы построенный танграм оказался связным, 2 тана должны соприкасаться по крайней мере по 6 элементарным отрезкам. Следовательно, мы неизбежно теряем 12 элементарных отрезков и общее число элементарных отрезков в периметре не может превышать 18. Каждая сторона точно подогнанного танграма состоит по крайней мере из одного элементарного отрезка, следовательно, общее число сторон также не превышает 18». Танграм «собака» на рис. 17 служит доказательством того, что точно подогнанные танграмы достигают этого максимального числа сторон.

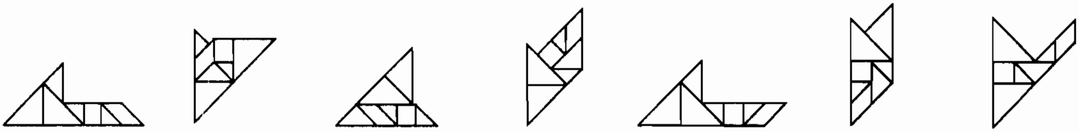
Число собственно танграмов, как нетрудно видеть, бесконечно: вы легко убедитесь в этом, если заметите, что 2 тана могут примыкать друг к другу в бесконечно многих положениях. Но стоит лишь сузить класс рассматриваемых танграмов, как задача о комбинаторном перечислении танграмов определенного типа становится вполне содержательной. Например, сколько существует выпуклых танграмов? Выпуклый танграм – это многоугольник, у которого все внутренние углы меньше 180°. Как доказали в 1942 г. Фу Тзянван и Чуан Чисюн [3.4], существует только 13 выпуклых танграмов. Все они изображены на рис. 18. Если зеркально-симметричные танграмы считать отличными от оригиналов, то общее число различных выпуклых танграмов возрастает до 18. Эти 18 выпуклых танграмов встречаются в китайских книгах о танграмах с решениями, показывающими, что их всех можно составить, не переворачивая асимметричный тан в форме параллелограмма. (На рис. 18 «швы» закрашены с тем, чтобы читатель мог испробовать свои силы в составлении выпуклых танграмов.)

В число 13 танграмов входят все 3- и 4-сторонние многоугольники, которые можно составить из 7 танов. Как мы уже упоминали в предыдущей главе, невыпуклые 4-сторонники в танграме не существуют. (Можете ли вы доказать это утверждение? Указание: 4 внутренних угла 4-сторонника должны были бы быть 3 углами по 45° каждый и 1 углом 225°, а сама фигура должна была бы состоять из 16 равнобедренных прямоугольных треугольников, конгруэнтных малому треугольному тану.) Пятисторонние многоугольники, составленные из танов, могут быть (а могут и не быть) невыпуклыми. Линдгрен спрашивает, сколько пятиугольников, выпуклых и невыпуклых, можно составить из 7 танов?

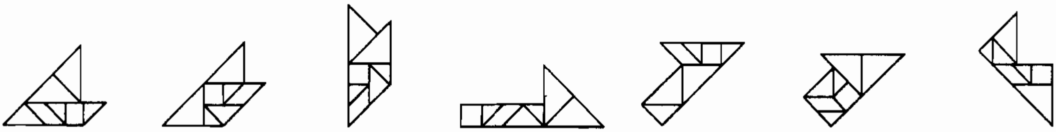
В своей статье, опубликованной в 1974 г. в *Scientific American*, я привел доказательство того, что существует 16 точно подогнанных пятиугольников и два неточно подогнанных пятиугольника. К сожалению, в доказательстве была неточность, которую быстро обнаружили читатели. В течение нескольких месяцев на меня извергался



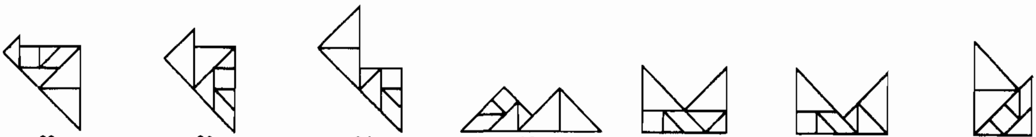
1 2 3 4 5 6 7



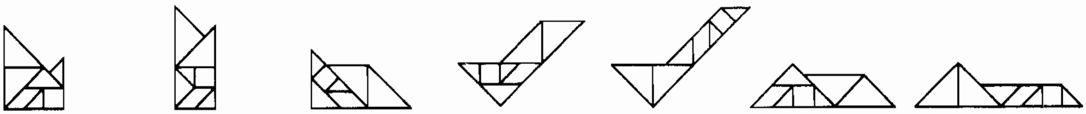
8 9 10 11 12 13 14



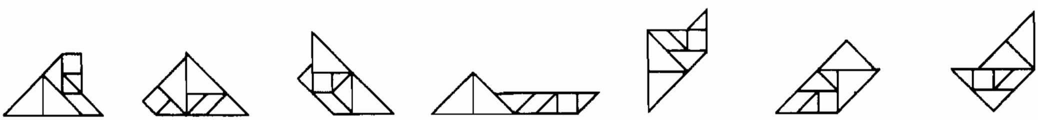
15 16 17 18 19 20 21



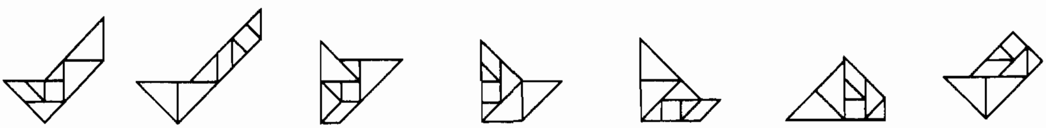
22 23 24 25 26 27 28



29 30 31 32 33 34 35



36 37 38 39 40 41 42



43 44 45 46 47 48 49

поток писем от читателей всех возрастов, которым удалось построить пятиугольники, не входившие в те 18 пятиугольников, которые я привел на рисунке.

Все присылаемые читателями различные пятиугольники я заносил в специальную таблицу до тех пор, пока не достиг максимума из 22 точно подогнанных пятиугольников и 31 неточно подогнанного пятиугольника. Все 53 пятиугольника нашли только два читателя, работавшие независимо друг от друга и не использовавшие компьютеров. Это А. Слюицер из Нортбрука (шт. Иллинойс) и О. Линдгрен из г. Уппсала (Швеция). В 1975 г. доктор И. Такеучи из Института инженеров электриков в Мусасимо (близ Токио) подтвердил существование 50 пятиугольников, составленных из 7 танов. В 1976 г., не зная о программе Такеучи, М. Билер из Кембриджа (шт. Массачусетс) написал программу, которая выдала тот же результат. Полученные Билером 53 пятиугольника вы видите на рис. 19.

Можно было бы поинтересоваться, сколько многоугольников, составленных из семи танов, имеют 6, 7 и более сторон, но, как отметил Рид, на этот вопрос ответить очень легко. При числе сторон n от 6 до 23 существует бесконечно много n-сторонних танграмных многоугольников. Достаточно взглянуть на пятиугольник *28* на рис. 19, и вы увидите, что, сдвигая большой треугольник слева вдоль гипотенузы другого большого треугольника, можно порождать бесконечное число новых шестиугольников. Сколько существует точно подогнанных шестиугольников? Хотя их число конечно, но, насколько мне известно, оно еще не определено.

Разумеется, существует лишь конечное число точно подогнанных танграмов, но сколько их (Рид называет эту величину «числом точно подогнанных») – также далеко не известно. Рид разработал остроумный метод, позволяющий составить программу для определения этого числа, но, судя по оценкам, оно должно быть порядка нескольких миллионов, и поэтому пока такая программа все еще не написана. К сожалению, детали предложенного Ридом метода слишком сложны, чтобы приводить их здесь. Однако тот же метод позволил решить более простую задачу. Рид называет мини-танграмом набор танов, который остается после того, как мы изымаем из стандартного комплекта танов 2 больших треугольника. Задача о нахождении всех точно подогнанных мини-танграмов настолько проще задачи о нахождении всех точно подогнанных танграмов, что Риду удалось составить программу для решения ее и запустить на мини-компьютере. После получаса работы программа выдала результат: точно подогнанных мини-танграмов оказалось 951. Компьютер был присоединен к графопостроителю, который вычертил все мини-танграмы.

Программа Рида предназначена не только для перечисления, но и для решения отдельных танграмов (то есть для указания способа составления их из стандартного комплекта танов). Можно ли составить программу, которая бы «обозревала» любой введенный в компьютер танграм и пыталась найти для него по крайней мере одно решение? Да, такая программа действительно была разработана и опубликована специалистом по численным методам Э. Дейчем. Теоретически возможно написать программу, которая будет систематически перебирать все возможные способы построения данного танграма и выдавать на печать все решения, но сложность такой программы столь велика, что реализовать ее никто не пытался. Программа Дейча совсем другого типа. Это так называемая эвристическая программа, поиск решения она осуществляет во многом так же, как и человек: путем серии проб и ошибок, прослеживанием обратных связей, возвращением на исходную позицию в случае тупикового хода и продолжением поиска до тех пор, пока программа либо находит решение, либо «сдается», признавая свое поражение. Но такое бывает редко: обычно программа решает танграм примерно за 2 с.

Программа начинает поиск решения с обследования периметра танграма, установления длин сторон и углов при вершинах. Затем программа пытается разделить танграм на 2 или на большее число частей. Например, если 2 части какого-то танграма имеют только одну общую точку, то ясно, что каждую такую часть можно рассматривать как отдельный подтанграм. Так, танграм «кролик» имеет два уха – два малых треугольника. Каждое ухо имеет с головой кролика только одну общую точку. Программа мгновенно отождествляет эти два тана, исключает их из дальнейшего анализа и продолжает работать с оставшимся подтанграмом. Если танграм не имеет частей, обладающих попарно только одной общей точкой, то программа пытается разделить его на подтанграмы, продолжая стороны от каждой вершины внутрь фигуры. Во многих случаях продолжение стороны внутрь танграма делит его на подтанграмы, а иногда такое продолжение позволяет найти единственную линию раздела.

После предварительного обследования танграма программа проводит серию эвристических тестов для того, чтобы найти либо способ составления подтанграма из танов, либо возможный подтанграм. Установив способ составления подтанграма из танов, программа исключает подтанграм из дальнейшего анализа и продолжает работать с оставшимся подтанграмом. Тесты ранжированы по их эффективности, поэтому сначала используются наиболее мощные тесты, затем менее мощные и т. д. Если найти решение не удается, то программа возвращается к исходному танграму и проводит следующий тест. Описать здесь программу Дейча более подробно не представляется возможным, но те, кого это заинтересует, смогут найти полное описание программы с примерами и блок-схемами в работе Э. Дейча и К. Хейеса [3.12]. Аналогичная программа была разработана в 1972 г. Э. Миннингом, датским студентом, работавшим с Ж. Коэном, физиком из университета Брандейса.

По очевидным причинам точно подогнанные программы, как правило, решаются (и человеком, и компьютером) труднее, чем неточно подогнанные, но с увеличением числа сторон трудность убывает. Кто-то может подумать, что танграм, который можно составить из стандартного набора танов только одним способом, решается труднее, чем танграм, который можно составить многими способами, но это не так: танграм, в котором таны попарно имеют лишь по одной общей точке, имеет только одно «решение», причем непосредственно очевидное, и в то же время существуют танграмы, которые можно составить многими различными способами. Они принадлежат к числу наиболее трудно решаемых.

Много интересных новых задач возникает в связи с построением танграмов с «дырами». Нетрудно построить квадратную дыру площадью 4 или треугольную дыру площадью 4 или треугольную дыру площадью 2, которая не касается границы, или 2 треугольные дыры площадью 1 и 1/2, которые не касаются друг друга и границы (рис. 20). (Под «касанием» мы всякий раз понимаем существование только одной общей точки.) Можете ли

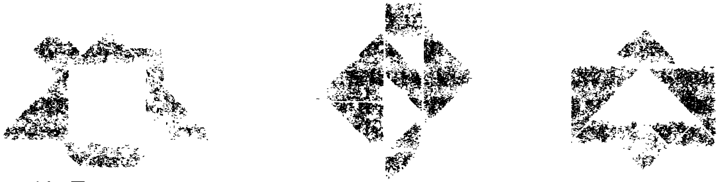


Рис. 20. Танграмы с дырами.

вы, дорогой читатель, построить танграм с 2 квадратными дырами, каждая площадью 1×1, которые бы не касались друг друга и периметра? А танграм с 2 дырами, 1 квадратной и 1 трегольной, каждая площадью 1, которые бы не касались друг друга и периметра? Обе эти задачи нетрудные, но решение следующих задач, которые я придумал для себя, потребовало от меня бóльших усилий. (1) Построить танграм с 3 дырами, 2 треугольными и 1 квадратной, которые бы не касались друг друга и границы. (2) Построить танграм с 3 дырами, 2 прямоугольными и 1 треугольной, которые бы не касались друг друга и границы. Ясно, что 3 дыры, не касающиеся друг друга и периметра, не могут быть все треугольными или все прямоугольными, так же как 2 треугольные дыры не могут быть площадью 1 каждая.

К числу нерешенных задач на составление танграмов с дырами относится так называемая задача о ферме. Формулируется она так: какова наибольшая дыра, которую можно расположить внутри танграма так, чтобы она не касалась его границы? Ответом на этот вопрос служит предел, которого нельзя достичь, но к которому можно подойти сколь угодно близко. (Лучшая из полученных мной оценок предела составляет 10,985...) Сколько сторон может быть у дыры, не касающейся границы танграма? Достоверно известно, что максимальное число сторон равно 13. Какую форму имеют в плане угодья наибольшей по площади «фермы», не касающейся границы квадрата? Прямоугольную? А может быть, треугольную?

Еще один неисследованный тип задач на танграмы – нахождение способа, позволяющего превращать один танграм в другой за наименьшее число ходов. Ход состоит в изменении положения блока, состоящего из одного или нескольких танов, без изменения относительного расположения танов внутри блока. Например, танграм в форме большого квадрата можно за один ход преобразовать в большой треугольник или параллелограмм, а за три хода превратить в прямоугольник 2×4. Как отмечает в своей книге Рид, квадрат можно всего лишь за 2 хода превратить в квадрат 3×3 с вырезанным углом 1×1.

Еще одно направление, открытое для пытливого ума и фантазии,– придумывание конкурентных игр с использованием одного или нескольких комплектов танов. Единственная «танграмная игра», которую я смог обнаружить в книгах на английском языке, состоит в следующем. Каждому из участников вручается комплект танов. Приз получает тот, кто первым сложит каждую из серии предъявленных фигур. Предложенное Ридом понятие точной подогнанности может быть положено в основу целого семейства игр для двух лиц. Я придумал три такие игры. Играя в них, очень удобно помечать середины длинных сторон танов: это облегчает точную подгонку деталей.

1. *Точная сборка.* В качестве исходной позиции выбирают танграм, имеющий форму большого треугольника, квадрата или любого четырехстороннего многоугольника. Игроки делают ходы поочередно. При каждом ходе игрок изменяет положение одного-единственного тана с таким расчетом, чтобы у получившегося танграма число сторон было больше, чем у предыдущего. Первый из игроков, кто не сможет сделать очередной ход, считается проигравшим.

2. *Разборка.* Правила игры остаются прежними, только в качестве исходного выбирается 18-сторонний точно подогнанный танграм, и с каждым ходом число сторон должно убывать. Как и в предыдущей игре, не разрешается делать ход таном, если это приводит к образованию дыры или делит фигуру на части, имеющие только одну общую точку. Обе игры заканчиваются быстро. Так как у точно подогнанного танграма число сторон должно быть не меньше 3 и не больше 18, игра может продолжаться не более 15 ходов. Существуют партии, разыгрываемые ровно за 15 ходов.

3. *Сборка и разборка.* В качестве исходного берут 10- или 11-сторонний точно подогнанный танграм. Один игрок должен увеличивать число сторон с каждым ходом, другой – уменьшать. Один и тот же тан не разрешается трогать два раза подряд. Каждый игрок ведет запись, подсчитывая, на сколько сторон ему удалось увеличить

(или уменьшить) очередным ходом периметр танграма. За каждую новую (если игрок играет «на повышение») или исчезнувшую (если игрок играет «на понижение») сторону сделавший ход получает по одному очку. Выигрывает тот, кто первым наберет 30 очков. Если игрок не может сделать очередной ход, ему засчитывается поражение. Игрок, играющий «на повышение», одерживает победу, если ему удается построить 18-сторонний танграм. Игрок, играющий «на понижение», одерживает победу, если ему удается построить 4- или 3-сторонний танграм. Эта игра продолжается значительно дольше, чем две первые, и нередко принимает неожиданный оборот. Игрок, далеко оторвавшийся по очкам от партнера, уже предвкушая победу, вдруг обнаруживает, что не может сделать последний ход, который должен принести ему выигрыш.

Во всех трех играх полезно записывать число сторон у танграма, возникающего при очередном ходе, так как эти числа легко забываются и приходится тратить время на повторный подсчет сторон. Доска для игры в криббедж очень удобна не только для записи числа сторон танграмов, но и для подсчета очков в игре «Сборка и разборка».

ОТВЕТЫ

Решения четырех задач на составление танграмов с дырами представлены на рис. 21. На танграме, изображенном вверху слева, показано, как можно сделать 2 квадратные дыры единичной площади каждая. На танграме, изображенном вверху справа, также 2 дыры единичной площади, но одна из них квадратная, а другая треугольная. Внизу слева показано, как можно сделать 3 дыры: 1 квадратную и 2 треугольные. (Подгонка танов на этой фигуре очень точная: гипотенуза верхнего треугольника выступает «за габарит» только на 0,121...) У танграма, изображенного внизу справа, 3 дыры: 2 прямоугольные и 1 треугольная.

Рид доказал, что точно подогнанный танграм с одной или несколькими дырами не может иметь более 1 дыры, если дыры не касаются друг друга или границы. Самая маленькая (по площади) дыра по форме и размерам совпадает с малым треугольным таном. Чтобы отделить 2 такие дыры от границы тана, независимо от того, как они расположены (по предположению, дыры не касаются

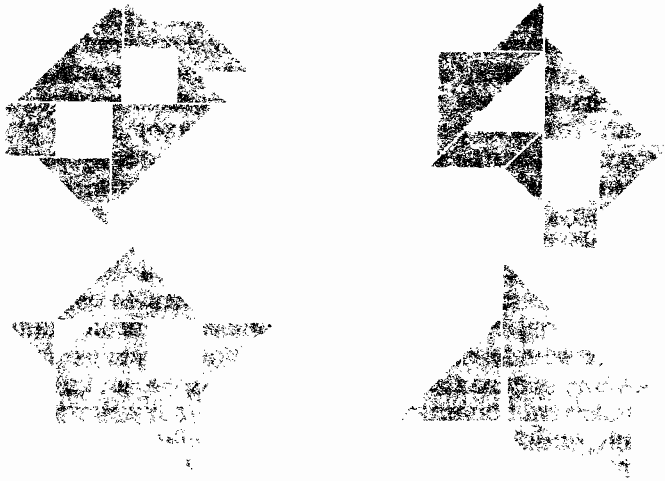


Рис. 21. Решения задач на составление танграмов с дырами.

друг друга), требуется не меньше 17 элементарных треугольников. Так как 7 танов содержат всего 16 элементарных треугольников, построить такой танграм, который мы хотели, невозможно.

Квадрат – единственный точно подогнанный танграм, у которого все стороны иррациональны. Вот как Рид доказывает это. Как я уже говорил в предыдущей главе, у иррационального танграма, начерченного на бумаге в клеточку (с единичным квадратным таном, наложенным на одну из клеток), все стороны образуют углы в 45° с линиями квадратной сетки. Все углы при вершинах та-

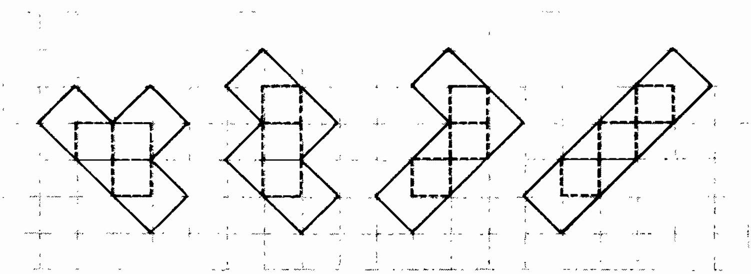


Рис. 22. Доказательство невозможности существования неквадратного тетрамино из 7 танов.

Рис. 23. Решение задачи о ферме.

кого тана должны быть равны либо 90°, либо 270°. Так как длина любой стороны кратна $\sqrt{2}$, а полная площадь равна 8, мы заключаем, что любой иррациональный точно подогнанный танграм должен иметь форму тетрамино, составленного из 4 квадратов со сторонами $\sqrt{2}$.

Существует 5 различных тетрамино. Одно из них, имеющее форму квадрата, как мы знаем, может быть построено из 7 танов. Остальные 4 тетрамино построить нельзя. В этом нетрудно убедиться, если поместить малый квадратный тан в каждое из трех возможных положений (рис. 22) и попытаться затем достроить тетрамино. Первое тетрамино сразу же отпадает, так как оказывается невозможно пристроить два больших треугольных тана. В трех остальных тетрамино при любом положении квадратного тана существует не более 4 способов размещения 2 больших треугольных танов. В каждом случае после того, как выложены малый квадрат и 2 больших треугольника, не остается места для тана в форме параллелограмма. Следовательно, квадрат – единственный иррациональный точно подогнанный танграм.

На рис. 23 показано предложенное мной решение задачи о ферме (с «рекордной» площадью 10,985...).

ДОПОЛНЕНИЕ

Существует не одна сотня головоломок, аналогичных танграму, но с иным разбиением квадратов, прямоугольников, кругов и других фигур. Они описаны в книгах и журнальных статьях. Их производят по всему миру. Некоторые из таких головоломок содержатся в книге

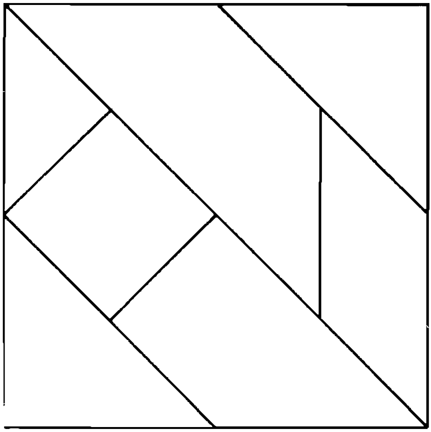


Рис. 24. Разбиение квадрата по Сеи Шонаган.

А. Левиса – первом сборнике механических головоломок, а также в книгах П. Ван Дельфта и Дж. Ботерманса [3.14] и Дж. Слоукума и Дж. Ботерманса [3.16].

Особый интерес представляет небольшая (в ней всего 32 страницы) книжка, выпущенная в Японии в 1742 г. Киото Чобо. Все известные ныне китайские издания вышли позже нее. В книжке Киото Чобо приведены 42 фигуры, которые можно составить из семи частей квадрата, разрезанного так, как показано на рис. 24. Название книжки в переводе с японского означает «Хитроумные части квадрата Сеи Шонагон». (Сеи Шонагон была придворной дамой. Она жила в конце X – начале XI в. и написала знаменитую «Полуночную книгу».) Об авторе «Хитроумных частей», скрывшемся под псевдонимом Ганреи-Кен, ничего не известно. Вряд ли Сеи Шонагон знала о приписываемой ей головоломке.

Фотокопию этой редкой книги любезно прислал мне Сигео Такаги, фокусник из Токио. В отличие от китайских танов части, на которые разрезан исходный квадрат в головоломке Сеи Шонагон, позволяют составить большой квадрат двумя различными способами. Можете ли вы указать другой способ, отличный от показанного на рис. 24? Из частей квадрата, раскроенного по схеме Сеи Шонагон, можно составить квадрат с квадратной дырой в центре, стороны которой параллельны сторонам большого квадрата. Традиционные китайские таны не позволяют строить квадрат с квадратной дырой, где бы она ни находилась.

Р. Рейсс, профессор английского языка в Юго-восточном массачусетском университете, прислал мне изящное доказательство того, что из 7 танов нельзя построить ни один выпуклый многоугольник, кроме квадрата. П. Ван Нот предложил следующие 3 задачи, основанные на составлении 2 конгруэнтных копий какого-нибудь тана.

1. Из 7 танов можно составить 1 большой квадрат. Составьте из 7 танов 2 конгруэнтных малых квадрата.

2. Из 7 танов можно составить 1 большой равнобедренный прямоугольный треугольник. Составьте из 7 танов 2 конгруэнтных равнобедренных прямоугольных треугольника.

3. Из 7 танов можно составить 1 большой ромб. Ван Нот не смог доказать, но убежден, что из 7 танов нельзя составить 2 конгруэнтных ромба.

Интересную нерешенную задачу предложил Дж. Ко-

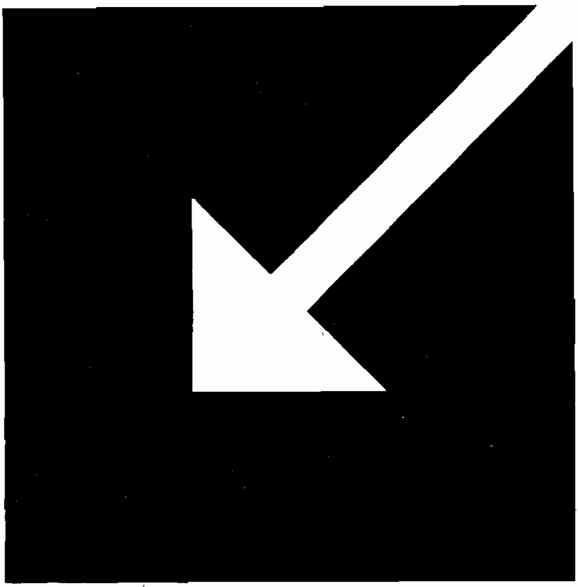


Рис. 25. Танграм-задача.

нуэй, математик из Кембриджского университета. Какова форма танов из «оптимального» набора, то есть 7 выпуклых многоугольников, позволяющих составить наибольшее число различных выпуклых многоугольников?

Рис. 25 заимствован мной из замечательной книги И. Элфферса и М. Шуйта [3.15]. Фигура составлена из традиционных китайских танов.

К. Фульвес, автор многих книг о фокусах, предложил следующий замечательный трюк. Речь идет о парадоксе с двумя танграмами, изображенными на рис. 12 внизу. Вы тайком добавляете к традиционному комплекту из 7 танов третий малый треугольник. Составляете фигуру человека с ногой, используя правый танграм (с «лишним» треугольником в качестве ног). Затем незаметным движением руки вы заставляете «исчезнуть» один из малых треугольников (или просто кладете его себе в карман) и составляете фигуру человека с ногой, но уже по образцу, изображенному слева. Если никому не придет в голову пересчитать таны, может создаться впечатление, будто исчезнувший тан таинственным образом вернулся. Разумеется, аналогичные фокусы можно показывать и с другими парами парадоксальных танграмов.

Несколько предложений было высказано относительно использования двух комплектов танов для настольной игры на специальной доске, аналогичной игре С. Голомба пентамино. Изобретатель одной из таких игр С. Саксон рекомендует шахматную доску размером 6×6 (размеры поля такой доски должны совпадать с размерами квадратного тана). У каждого игрока имеется по комплекту из 7 танов. Игроки по очереди выкладывают на доску по одному тану, ставя его куда угодно, лишь бы вершины тана совпадали с узлами сетки, образуемой границами полей. Проигравшим считается тот, кто при очередном ходе не сможет выложить на доску свой тан. Игра допускает многочисленные вариации. При числе игроков больше двух можно использовать доски бóльших размеров (8×8 и т. д.).

ГЛАВА 5

НЕТРАНЗИТИВНЫЕ ПАРАДОКСЫ

> У меня ровно столько логики, сколько необходимо, чтобы понять простую истину: два утверждения «Я слишком хороша для вас» и «Вы слишком хороши для меня» не могут быть истинными одновременно, в обе стороны.
>
> *Элизабет Барретт. Из письма к Роберту Броунингу*

Если некоторое соотношение R, применимое к элементам некоторого множества x, y (xRy) и y, z (yRz), применимо к элементам x, z (xRz), то говорят, что отношение R транзитивно. Например, отношение «меньше, чем» транзитивно на множестве всех вещественных чисел: если 2 меньше, чем π, а квадратный корень из 3 меньше, чем 2, то мы можем с уверенностью утверждать, что квадратный корень из 3 меньше, чем π. Равенство также транзитивно: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$. В повседневной жизни транзитивны такие отношения, как «раньше, чем», «тяжелее, чем», «выше, чем», «внутри» и сотни других.

Однако нетрудно привести примеры отношений, которые нетранзитивны. Если A – отец B, а B – отец C, то неверно, что A – отец C. Если A любит B, а B любит C, то отсюда не следует, что A любит C. Широко распространенные игры изобилуют транзитивными правилами (например, в карточных играх, если карта A бьет карту B, а карта B бьет карту C, то карта A бьет карту C), но встречаются также игры с нетранзитивными (или интранзитивными) правилами. Взять хотя бы детскую игру, в которой по счету «три» показывают либо кулак («камень»), либо два раздвинутых пальца («ножницы»), либо все пальцы на руке («бумага»). Камень ломает ножницы, ножницы режут бумагу, бумага покрывает камень. В этой игре отношение победитель – побежденный нетранзитивно.

В математике, особенно в теории вероятности и в теории чисел, встречаются время от времени отношения, которые на первый взгляд кажутся транзитивными, но в действительности нетранзитивны. Если нетранзитивность настолько противоречит интуиции, что разум становится в тупик, то мы имеем так называемый нетранзитивный парадокс.

Самый старый и наиболее известный из нетранзитивных парадоксов – парадокс с голосованием на выборах, иногда называемый парадоксом Арроу, в честь Кеннета Дж. Арроу, сыгравшего решающую роль в формулировке и доказательстве «теоремы о невозможности идеальной избирательной системы», за которую ему в числе других в 1972 г. была присуждена Нобелевская премия по экономике. В своей работе «Социальный выбор и индивидуальные ценности» [5.2] Арроу выделил 5 условий, которые, по всеобщему мнению, существенны для демократии, при которой социальные решения принимаются путем выявления предпочтений отдельных индивидуумов, определяемого по результатам голосования. Арроу доказал, что эти 5 условий логически противоречивы: невозможно придумать избирательную систему, которая бы в некоторых случаях не нарушала по крайней мере одно из 5 существенных условий. Короче говоря, идеальная демократическая избирательная система в принципе невозможна.

Пол А. Самуэльсон сформулировал суть открытия Арроу следующим образом: «Усилия лучших умов документально засвидетельствованного периода истории, направленные на поиск идеальной демократии, оказываются поисками химеры из-за внутреннего логического противоречия исходных принципов... Теперь ученые во всем мире, работающие в области математики, политики, философии и экономики, пытаются спасти то, что может быть спасено, от разрушительного открытия Арроу, занявшего в математической политологии такое же место, какое занимает в математической логике открытая Куртом Гёделем в 1931 г. теорема о невозможности построения непротиворечивой математической теории, содержащей аксиомы арифметики».

Прежде чем мы перейдем к парадоксу голосования, рассмотрим наиболее фундаментальный дефект существующей ныне в США системы избрания официальных лиц. Она часто приводит к тому, что соответствующий пост занимает человек, от души ненавидимый большинством избирателей, но имеющий небольшое число весьма активных последователей. Предположим, что 40% избирателей активно поддерживают кандидата *A*. Голоса оппозиции разделились: 30% поддерживают кандидата *B* и 30% – кандидата *C*. На выборах при таком распределении голосов побеждает кандидат *A* несмотря на то, что 60% избирателей настроены против него.

Один из наиболее известных способов избежать столь нежелательных последствий разбиения голосов – ранжирование избирателями кандидатов по своему усмотрению. К сожалению, и этот способ также может порождать иррациональные решения. Матрица, изображенная на рис. 26, изображает известный парадокс, связанный с голосованием, в его простейшей форме. Верхняя строка матрицы свидетельствует о том, что 1/3 избирателей ранжирует кандидатов *A, B, C*, устанавливая между ними порядок *ABC*. Средняя строка показывает, что другая треть избирателей устанавливает другую последовательность преференций: *BAC*. Наконец, нижняя строка соответствует ранжированию кандидатов *CAB*. Вглядитесь в матрицу более внимательно, и вы увидите, что стоит разбить кандидатов попарно, как нетранзитивность тут же поднимает голову. Две трети избирателей предпочитают кандидата *A* кандидату *B*, 2/3 избирателей отдают предпочтение кандидату *B* перед кандидатом *C*, и 2/3 избирателей предпочитают кандидата *C* кандидату *A*. Если бы *A* вел свою избирательную кампанию, конкурируя с кандидатом *B*, то *A* победил бы на выборах. Если бы *B* вел избирательную кампанию, конкурируя с *C*, то победу на выборах одержал бы *B*. Если бы *C* вел избирательную кампанию, конкурируя с *A*, то победил бы *C*. Если вместо кандидатов взять законопроекты, станет ясно, как легко правящая партия может хитростью провести нужное ей решение, выбрав, какую пару законопроектов надлежит первой поставить на голосование.

Парадокс нетранзитивности был открыт маркизом Кондорсе и некоторыми другими авторами в конце XVIII в. и известен во Франции под названием эффекта Кондорсе. Льюис Кэрролл, который написал несколько памфлетов о выборах в Оксфордском университете, переоткрыл парадокс нетранзитивности. Многие из первых сторонников пропорционального представительства не подозревали о его ахиллесовой пяте. Теоретики-политологи не сознавали до конца существование парадокса вплоть до середины 40-х годов, пока Дункан Блэк, экономист из Уэльса, не переоткрыл парадокс нетранзитивности в своей фундаментальной работе о принятии решений комитетами [5.4]. Эксперты и поныне еще далеки от единого мнения относительно того, от какого из пяти условий Арроу следовало бы отказаться во имя усовершенствования системы голосования. Один из удивительных выходов, рекомендуемых многими специалистами по теории принятия решений, состоит в том, что когда возникает тупиковая ситуация, население избирает «диктатора», который ломает сложившуюся ситуацию. Нечто подобное в самом деле наблюдается в действительности. Например, в Великобритании конституционный монарх (лицо случайное в том смысле, что родословная не дает ему никаких преимуществ в выполнении возложенной на него миссии) наделен тщательно ограниченной властью, позволяющей ему выводить страну из тупиковых ситуаций в экстремальных условиях.

Парадокс с голосованием по существу возникает в любой ситуации, в которой решение принимается на основе выбора одной из двух альтернатив, выбираемых из множества трех и более элементов. Пусть A, B и C – трое юношей, сделавших одновременно предложение одной и той же девушке. Строки матрицы, которую мы выписывали для парадокса с голосованием, можно использовать, чтобы показать, как разборчивая невеста ранжирует женихов по трем качествам, которые она считает наиболее важными, например, по уму, физической привлекательности и доходу. Разбив претендентов на ее руку и сердце по парам, несчастная девушка обнаруживает, что отдает предпочтение A перед B, B перед C и C перед A. Нетрудно видеть, что аналогичные конфликты могут возникать и в тех случаях, когда мы выбираем, куда устроиться на работу, отправиться во время отпуска и т.д.

Пол Р. Халмош однажды предложил замечательную интерпретацию матрицы. Пусть A, B и C означают яблочный пирог, пирог с черникой и пирог с вишней. Некий ресторан предлагает посетителям ежедневно только пироги двух сортов. Строки матрицы указывают, как посетитель ресторана ранжирует пироги по каким-то трем качествам, например, по вкусу, свежести и размеру порций. Действуя вполне рационально, замечает Халмош, посетитель отдает предпочтение яблочному пирогу перед пирогом с черникой, пирогу с черникой перед пирогом с вишней и пирогу с вишней перед яблочным пирогом. В автобиографической повести «Приключения математика» [5.19] Ст. Улам говорит о том, что он открыл нетранзитивность такого рода «предпочтений», когда ему было восемь или девять лет, а став взрослым, осознал, что тот же парадокс нетранзитивности препятствует ранжированию выдающихся математиков в линейно упорядоченную последовательность по относительным заслугам.

Эксперты расходятся во мнении относительно того, как часто подобные нетранзитивные упорядочения возникают в повседневной жизни, но некоторые последние исследования в области психологии и экономики указывают на то, что такие упорядочения встречаются чаще, чем можно было бы предположить. Имеются сообщения об экспериментах на крысах, показывающих, что при определенных условиях производимый подопытными крысами выбор одной из двух альтернатив, выделенных из более широкого множества возможных исходов, не-

РАНЖИРОВАНИЕ КАНДИДАТОВ

ИЗБИРАТЕЛИ	1	2	3
$1/3$	A	B	C
$1/3$	B	C	A
$1/3$	C	A	B

КОМАНДЫ	D	E	F
A	8	1	6
B	3	5	7
C	4	9	2

Рис. 26. Парадокс с голосованием (слева) и парадокс с турниром на основе логического квадрата (справа).

транзитивен (см. статью Маккаллоха «Иерархия ценностей, задаваемая топологией нервных сетей» [5.20]).

Аналогичные парадоксы возникают и в случае круговых турниров между командами. Предположим, что 9 теннисистов ранжированы по классу игры номерами от 1 до 9. Лучший теннисист имеет номер 9, самый слабый – номер 1. Матрица, изображенная на рис. 26 справа, – хорошо знакомый нам всем магический квадрат третьего порядка. Пусть строки *A*, *B* и *C* указывают, каким образом 9 игроков разделены на 3 команды: каждая строка соответствует составу команды. В турнире, проводимом по кругу между командами, когда каждый спортсмен из одной команды встречается с каждым спортсменом других команд, как принято считать, побеждает сильнейший. Предположим, что команда *A* нанесла поражение команде *B*, команда *B* одержала победу над командой *C* и команда *C* победила команду *A* (в каждом случае соотношение побед и проигрышей составляет 5 : 4). Тогда назвать сильнейшую команду не представляется возможным. Та же нетранзитивность возникает, если командам соответствуют не строки матрицы *A*, *B*, *C*, а ее столбцы *D*, *E*, *F*.

Много парадоксов такого типа недавно было исследовано М. Мозером и Дж. У. Муном. Некоторые из парадоксов Мозера – Муна лежат в основе поразительных и малоизвестных пари, рассчитанных на простаков. Например, пусть каждая строка (или каждый столбец) матрицы магического квадрата третьего порядка соответствует некоторому набору игральных карт, скажем тузу, шестерке и восьмерке червей (множество *A*), тройке, пятерке и семерке пик (множество *B*) и двойке, четверке и девятке треф (множество *C*), как на рис. 27. Каждое множество рандомизируется (карты тасуются), и входящие в него карты выкладываются на стол рубашкой вверх. Вы предлагаете партнеру вытянуть одну карту из любого множества, после чего вытягиваете карту из другого множества. Выигрывает тот, чья карта окажется старше. Нетрудно доказать, что независимо от того, из какого множества вытянет карту ваш партнер, вы можете выбрать множество, позволяющее вам выиграть с хорошими шансами (5 : 4). Множество *A* «бьет» множество *B*, множество *B* «бьет» множество *C*, и множество *C* «бьет» множество *A*. Вы можете даже предоставить вашей жертве решать каждый раз, какую карту считать

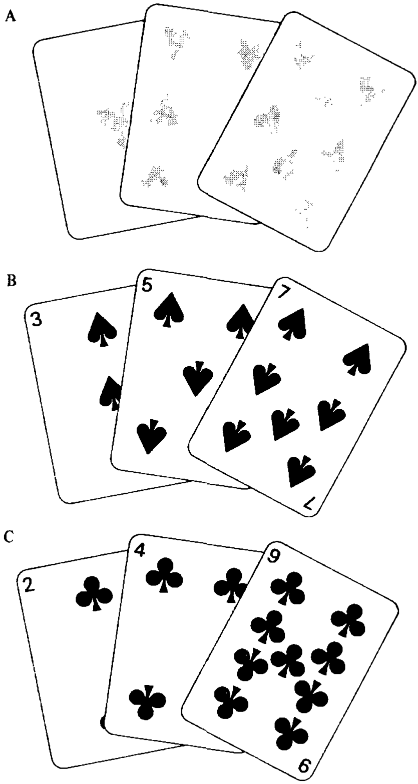
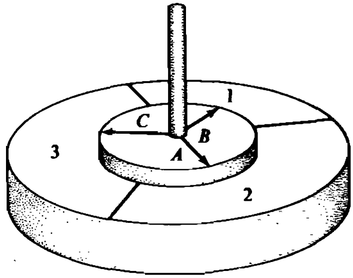


Рис. 27. Нетранзитивное пари, рассчитанное на простака и основанное на использовании магического квадрата: $A \to B \to C \to A$.

выигрышной: старшую или младшую. Если выигрышной считается младшая карта, то вы просто выбираете множество, которое бьет множество, выбранное вашим партнером, идя по нетранзитивному кругу в обратном направлении. В эту игру удобно играть, выбирая по 3 карты из трех различных колод с рубашками разного рисунка. Вы каждый раз тщательно тасуете колоду из 9 отобранных карт и раскладываете их в 3 множества по рисунку рубашек. Ясно, что жульничество в таком пари изоморфно парадоксу с турниром, разыгрываемым по круговой системе.

Нетранзитивность встречается во многих других азартных играх (см., например, описание нетранзитивного набора игральных костей в [5.14]). В некоторых



$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

Рис. 28. Нетранзитивный волчок.

случаях нетранзитивность легко понять. Так обстоит дело, например, с волчком, придуманным Э. Ленардом (рис. 28). Нижняя часть волчка неподвижна, верхняя вращается. Каждый из двух игроков выбирает свою стрелку. Волчок запускается (в любом направлении), и тот, чья стрелка укажет на сектор с бóльшим числом, выигрывает. И снова: *A* побеждает *B*, *B* побеждает *C*, *C* побеждает *A* (в каждом случае шансы на выигрыш 2:1).

В наборе карточек для игры в лото, придуманном Д. Э. Кнутом (рис. 29), нетранзитивность хитроумно скрыта. Каждый из двух игроков выбирает себе карточку. Затем кто-нибудь один называет по очереди наугад без возвращения (как в обычном лото) числа от 1 до 6. Если

A

1	2
3	4

B

2	4
5	6

C

1	3
4	5

D

1	5
2	6

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$

Рис. 29. Нетранзитивные карточки для игры в лото.

названное число находится на карте игрока, то он накрывает его какой-нибудь фишкой. Тот, кто первым заполнит горизонтальную строку, выигрывает. Разумеется, числа в данном случае – не более чем символы; их всегда можно заменить шестью любыми различными символами. Предоставляю читателю вычислить вероятность того, что карта *A* побивает карту *B*, карта *B* побивает карту *C*, карта *C* побивает карту *D* и карта *D* побивает карту *A*. Игра транзитивна при числе участников, равном 3, но шансы на выигрыш 4 возможных триплетов (наборов из 3 карт) оказываются весьма неожиданными.

Одна из наиболее поразительных ситуаций, связанных с нетранзитивными пари, обнаруженная математиком У. Пенни, была приведена в виде задачи в *Journal of Recreational Mathematics* (October 1969, p. 241). Ситуация эта мало известна, и большинство математиков просто не могут поверить в нее, когда впервые слышат об открытии Пенни. Это – заведомо самое красивое надувательство (если надувательство может быть красивым), рассчитанное на простака. Можно подбрасывать монетку, или заключать пари на красное и черное в рулетке, или воспользоваться чем-нибудь еще, лишь бы речь шла о случайном выборе одной из двух равновероятных альтернатив. Предположим, что мы бросаем монетку. Если бросить ее 3 раза, то получится 8 равновероятных исходов (О – «орел», Р – «решка»): ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО и РРР. Один из игроков выбирает себе одну тройку исходов, другой – другую. Затем кто-нибудь из игроков (или оба игрока по очереди) бросает монету до тех пор, пока в серии исходов не появится одна из выбранных троек исходов. Тот, кому принадлежит выпавшая тройка, выигрывает. Например, если игроки выбрали тройки исходов ООР и РОР, а при бросании монеты исходы образовали серию РОООР, то последние три исхода образуют тройку ООР, поэтому выигрывает тот, кто выбрал эту тройку. Короче говоря, выигрывает та тройка, которая в серии бросаний монеты выпадает раньше.

На первый взгляд кажется, что одна тройка появляется с такой же вероятностью, как и другая, но это не так даже для пар исходов. Рассмотрим все возможные пары исходов: ОО, ОР, РО и РР. Пары ОО и ОР появляются в серии испытаний (бросании монеты) с равной вероятностью, так как после выпадения О могут с равной

B \ A	OO	OP	PO	PP
OO		1/2	1/4	1/2
OP	1/2		1/2	3/4
PO	3/4	1/2		1/2
PP	1/2	1/4	1/2	

Рис. 30. Вероятность выигрыша игрока *В*.

вероятностью выпасть и О и Р. Такое же рассуждение показывает, что пары РР и РО также равновероятны. В силу симметрии ОО = РР и ОР = РО. Но вероятность выпадения пары ОР относится к вероятности выпадения пары ОО как 3 : 1, и также относятся вероятности выпадения пар ОР и РР. Рассмотрим теперь пары ОР и РР. Появлению в серии бросаний пары РР всегда предшествует появление пары ОР, за исключением того случая, когда пара РР выпадает в первых же двух бросаниях. В длинной серии испытаний пара РР выпадает в первых же двух бросаниях только в одном случае из четырех, поэтому пара ОР побивает пару ОО с вероятностью 3/4. На рис. 30 вероятности, с которыми второй игрок (*В*) выигрывает, выписаны для всех комбинаций из двух пар.

Еще более удивительной ситуация становится, если мы обратимся к тройкам исходов. Поскольку не имеет значения, какую сторону монеты называть «орлом» и какую «решкой», мы сразу же знаем, что ООО = РРР, РРО = ООР, ОРО = РОР и т. д. Но вычисляя вероятности для «неравных» пар троек, мы обнаруживаем, что игра нетранзитивна: независимо от того, какую тройку исходов выберет первый игрок, второй игрок всегда может выбрать лучшую тройку. На рис. 31 приведены вероятности того, что игрок *В* выигрывает у игрока *А* при всех возможных комбинациях пар троек. Чтобы найти оптимальный ответ игрока *В* на тройку исходов, выбранную игроком *А*, нужно найти столбец, над которым указана тройка, выбранная игроком *А*, затем спуститься по столбцу до клетки с соответствующей вероятностью (набранной не столь жирно, как остальные), после чего посмотреть, какая тройка исходов стоит слева у той строки, которой принадлежит эта клетка.

Обратите внимание, что вероятность выигрыша для игрока *B* в худшем случае равна 2/3 (то есть шансы игрока *B* на выигрыш оцениваются как 2 : 3), но может подниматься до 7/8 (то есть 7 : 8). Понять, откуда берется число 7/8, совсем нетрудно. Рассмотрим тройки РОО и ООО. Если тройка ООО встречается не в самом начале серии бросаний, то ей должна предшествовать Р, а это означает, что тройка РОО встречается раньше, чем ООО. Следовательно, тройка ООО выигрывает только в том случае, если она появляется в самом начале серии. Ясно, что это происходит в одном случае из восьми.

Интересное правило, позволяющее определять лучшую тройку бросаний, открыл Б. Волк из университета

B \ A	ООО	OОР	ОРО	ОРР	РОО	РОР	РРО	РРР
ООО		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
ООР	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
ОРО	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
ОРР	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
РОО	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
РОР	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
РРО	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
РРР	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

Рис. 31. Вероятности выигрыша игрока *B* в игре с тройками исходов.

B \ A	OOOO	OOOP	OOPO	OOPP	OPOO	OPOP	OPPO	OPPP	POOO	POOP	POPO	POPP	PPOO	PPOP	PPPO	PPPP
OOOO		1/2	2/5	2/5	3/10	5/12	4/11	4/11	1/16	3/8	3/8	3/8	1/4	3/8	7/22	1/2
OOOP	1/2				1/2	5/8	4/7	4/7	1/8	9/16	9/16	9/16	5/12	9/16	1/2	15/22
OOPO	3/5	1/3		1/2	3/5		1/2	1/2	5/12	5/12	9/16	9/16	5/14	1/2	7/16	5/8
OOPP	3/5	1/3	1/2		3/7	5/9			5/12	5/12	9/16	9/16	1/2	9/14	7/12	3/4
OPOO	7/10	1/2	2/5	4/7		1/2	1/2	1/2	7/12	7/12	5/14	1/2	7/16	7/16	7/16	5/8
OPOP	7/12	3/8	2/7	4/9	1/2		1/2	1/2	7/16	7/16	1/2		7/16	7/16	7/16	5/8
OPPO	7/11	3/7	1/2	1/3	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	9/16	5/12	7/12	7/12	7/16	5/8
OPPP	7/11	3/7	1/2	1/3	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	9/16	5/12	7/12	7/12		
POOO			7/12	7/12	5/12	9/16	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/3	1/2	3/7	7/11
POOP	5/8	7/16	7/12	7/12	5/12	9/16	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/3	1/2	3/7	7/11
POPO	5/8	7/16	7/16	7/16		1/2	7/16	7/16	1/2	1/2		1/2	4/9	2/7	3/8	7/12
POPP	5/8	7/16	7/16	7/16	1/2	5/14	7/12	7/12	1/2	1/2	1/2		4/7	2/5	1/2	7/10
PPOO	3/4	7/12	9/14	1/2	9/16	9/16	5/12	5/12			5/9	3/7		1/2	1/3	3/5
PPOP	5/8	7/16	1/2	5/14	9/16	9/16	5/12	5/12	1/2	1/2		3/5	1/2		1/3	3/5
PPPO	15/22	1/2	9/16	5/12	9/16	9/16	9/16	1/8	4/7	4/7	5/8	1/2				1/2
PPPP	1/2	7/22	3/8	1/4	3/8	3/8	3/8	1/16	4/11	4/11	5/12	3/10	2/5	2/5	1/2	

Рис. 32. **Вероятности выигрыша игрока *B* в игре с четверками исходов.**

Манитобы. Пусть X – первая выбранная тройка. Превратим ее в двоичное число, заменив каждого О нулем и каждую Р единицей. Разделим получившееся число на 2, округлим частное до ближайшего целого числа, умножим на 5 и прибавим 4. Полученный результат запишем в двоичной системе, а затем «переведем» три последние цифры в тройку букв О и Р.

Нетранзитивность сохраняется и для групп из n исходов при любом $n > 3$. В таблице, составленной Волком, приведены вероятности выигрыша игрока *B* для всех возможных пар четверок бросаний (рис. 32). Как и две предыдущие таблицы, а также таблицы для всех бóльших n, матрица симметрична относительно центра: правый верхний квадрант матрицы совпадает с «вывернутым наизнанку» левым нижним квадрантом, а левый верхний квадрант – с «вывернутым наизнанку» правым нижним квадрантом. Вероятности лучших ответов игрока *B* на выбор игрока *A* набраны светлым шрифтом.

Исследуя распределение вероятностей, Волк обнаружил еще одну разновидность аномалии, столь же удивительную, как нетранзитивность. Эта аномалия имеет отношение к так называемому времени ожидания. Для группы из n исходов временем ожидания называется среднее число бросаний (в длинной серии испытаний) до первого появления данной группы из n исходов. Чем дольше вы ждете автобус, тем меньше вы надеетесь на то, что он когда-нибудь придет. Но у монет нет памяти, поэтому время ожидания для группы из n исходов не зависит от всех предыдущих бросаний. Время ожидания для О и Р равно 2. Для групп из двух исходов время ожидания равно 4 для ОР и РО, 6 для ОО и РР. Для групп из трех исходов время ожидания равно 8 для OOP, ОРР, РОО и РРО; 10 для ОРО и POP и 14 для ООО и PPP. Эти данные не противоречат тому, что нам известно: какая тройка исходов из данной пары имеет бóльшую вероятность выпасть первой. Но стоит нам перейти к четверкам исходов, как противоречия возникают с шестью парами. Например, для четверки РОРО время ожидания равно 20, а для четверки ОРОО – 18. Однако четверка РОРО с вероятностью 9/14, то есть с вероятностью больше 1/2, встречается в серии испытаний раньше четверки ОРОО. Иначе говоря, менее частое событие в длинной серии испытаний с большей вероятностью происходит раньше, чем менее частое событие. В этом нет логического противоречия, но все же нельзя не признать, что среднее время ожидания обладает в данном случае необычными свойствами.

Вычислить вероятность того, что одна группа из n исходов предшествует другой, можно многими способами. Можно суммировать бесконечные ряды, вычерчивать деревья (графы), составлять рекуррентные соотношения, приводящие к системам линейных уравнений, и т. д. Один из наиболее необычных и эффективных методов вычисления таких вероятностей был предложен Дж. Х. Конуэем из Кембриджского университета. Я не имею ни малейшего понятия, как работает алгоритм Конуэя. Знаю только, что ответ он выдает, как по мановению вол-

1000100 = 68
A = OOPOOOP
A = OOPOOOP

0000001 = 1
A = OOPOOOP
B = POOPOOO

1000000 = 64
B = POOPOOO
B = POOPOOO

0100011 = 35
B = POOPOOO
A = OOPOOOP

(AA–AB) : (BB–BA)
(68–1) : (64–35)
67:29

Рис. 33. Алгоритм Дж. Конуэя для вычисления вероятности того, что группа из *n* исходов, выбранная игроком *B*, появится раньше группы из *n* исходов, выбранной игроком *A*.

шебной палочки (легкость и «загадочность» присущи и многим другим алгоритмам Конуэя).

Ключ к алгоритму Конуэя – вычисление четырех двоичных чисел, которые этот математик называет ведущими числами. Пусть *A* означает группу из исходов 7 бросаний ООРОООР, а *B* – группу исходов РООРООО. Мы хотим вычислить вероятность того, что группа *B* встретится раньше, чем группа *A*. Для этого запишем *A* над *A*, *B* над *B*, *A* над *B* и *B* над *A* (рис. 33). Над верхней группой в каждой паре запишем двоичное число, построенное по следующему принципу. Рассмотрим сначала первую пару *AA*. Сосредоточим внимание на первой букве верхней группы и спросим себя, совпадают ли 7 букв, начинающиеся с нее, с нижней группой из 7 букв. В данном случае это так, и мы ставим над первой буквой цифру 1. Сосредоточим теперь внимание на второй букве верхней группы и спросим себя, совпадает ли начинающаяся с нее последовательность из 6 букв с *первыми шестью* буквами нижней строки. В нашем случае не совпадает, и мы ставим над второй буквой цифру О. Совпадает ли последовательность из 5 букв, начинающаяся с третьей буквы верхней группы, с первыми 5 буквами нижней группы? Нет, не совпадает, и мы ставим над третьей буквой цифру 0. Еще один нуль мы ставим над четвертой буквой. При проверке пятой буквы верхней группы *A* мы обнаруживаем, что начинающаяся с нее последовательность ООР совпадает с первыми тремя буквами нижней группы *A*, и поэтому ставим над пятой буквой цифру 1. Над шестой и седьмой буквой мы ставим по цифре 0. Число для группы *A*, ведущей группу *A*, или

AA-число, оказывается равным 1000100. Каждая единица соответствует утвердительному ответу, каждый нуль – отрицательному. Переводя 1000100 из двоичной формы в десятичную, получаем число 68. Это и есть ведущее число пары AA.

На рис. 33 показаны результаты вычисления ведущих чисел для пар AA, BB, AB и BA. Всякий раз, когда группа из n букв О и Р сравнивается с собой, первая цифра ведущего числа, разумеется, равна 1. При сравнении различных групп первая цифра может быть равна, а может не быть равна 1.

Шансы на то, что группа B встретится раньше, чем группа A, определяются отношением $(AA-AB)$: $(BB-BA)$. В нашем примере оно оказывается равным $(68-1):(64-35)=67:29$. В качестве упражнения читатель может попытаться вычислить шансы на то, что тройка РОО встретится раньше тройки ООО. Четыре ведущих числа в этом случае равны $AA=7$, $BB=4$, $AB=0$ и $BA=3$. Подставляя их в приведенную выше формулу, получаем: $(AA-AB):(BB-BA)=(7-0)$: $:(4-3)=7:1$, как и следовало ожидать. Алгоритм Конуэя работает и в том случае, когда группы имеют неравную длину, при условии, если меньшая группа не содержится в большей. Например, если же $A=$ ОО, $B=$ ООР, то A с вероятностью 1 встречается раньше B.

В заключение я хочу привести одну задачу Д. Силвермана, который первым ввел парадокс Пенни в обиход редактируемого тогда им отдела задач в *Journal of Recreational Mathematics* (2, October 1962, p. 241). Читателю не составит особого труда решить эту задачу с помощью алгоритма Конуэя. Для группы РРОО время ожидания равно 16, для группы ООО время ожидания равно 14. Какая из этих групп появится первой и с какой вероятностью?

ОТВЕТЫ

Какая из двух последовательностей орлов и решек РРОО или ООО имеет бо́льшую вероятность появиться первой при повторных бросаниях монеты? Применяя алгоритм Конуэя, находим, что последовательность РРОО появляется раньше последовательности ООО с вероятностью 7/12, или шансы на то, что последовательность РРОО появится раньше, чем ООО, составляют 7 : 5.

Некоторые группы из четырех букв встречаются чаще, чем некоторые группы из трех букв, с еще большей вероятностью. Например, группа РООО встречается чаще, чем группа ООО, с вероятностью 7/8, или 7:1. Это легко понять: группе ООО, если только это не первые три исхода серии испытаний, должна предшествовать Р, а вероятность этого события равна 1/8.

Время ожидания для РРОО и для РООО равно 16, а для ООО оно равно лишь 14. Следовательно, сравнивая частоту появления любой из четверок РРОО и РООО с частотой появления тройки ООО, мы приходим к парадоксу: вероятность того, что менее вероятное событие происходит чаще более вероятного события, больше 1/2.

ДОПОЛНЕНИЕ

Многие читатели обнаружили, что правило Б. Волка для выбора наилучшей тройки *B*, побивающей тройку *A*, эквивалентно приписыванию перед *A* символа, дополнительного к предпоследнему символу в *A*, и зачеркиванию последнего символа. Более половины этих читателей сообщают, что этот же метод остается в силе и для четверок, за исключением двух, в которых О и Р чередуются. В случае четверок символ, приписываемый перед *A*, совпадает с предпоследним.

С октября 1974 г., когда эта статья была напечатана в *Scientific American*, появилось много статей, в которых приводилось доказательство алгоритма Конуэя и указывался способ, позволяющий выбирать оптимальную группу из *n* исходов при всех значениях *n*. Две первые важные статьи на эту тему указаны в библиографии [5.13 и 5.14]. В работе Л. Гибаша и А. Одлизко содержатся ссылки на работы [5.17].

Читатели Д. Сакс и Б. Херст независимо друг от друга заметили, что ведущее число Конуэя, если группа из *n* исходов сравнивается с собой, автоматически дает среднее время ожидания тройки исходов: достаточно просто удвоить ведущее число.

Как мне сообщили, древнекитайские философы подразделяли материю на 5 категорий, образующих нетранзитивный цикл: дерево дает жизнь огню, огонь – земле, земля – металлу, металл – воде и вода – дереву. Научно-фантастическая повесть Р. Рукера «Ленивцы в пространстве – времени» (Rucker R. Spacetime Donuts.–

Unearth, 1978) основана на гораздо более хитроумной нетранзитивной теории: если опуститься на несколько масштабов ниже размеров электронов, то можно вернуться к галактикам той же Вселенной, в которой мы сейчас живем, а если подняться на несколько масштабов выше размеров скоплений галактик, то можно вернуться к элементарным частицам,– не к каким-то большим образованиям, а к тем самым частицам, из которых состоят наши звезды. Слово «материя» утрачивает всякий смысл.

Следующее письмо было опубликовано в журнале *Scientific American* (January 1975):

Уважаемая редакция!

Статья Мартина Гарднера о парадоксальных ситуациях, возникающих из нетранзитивных отношений, возможно, в какой-то мере помогла мне выиграть в Риме пари по поводу исхода назначенного на 30 октября в Заире матча между Али и Форманом на звание чемпиона мира по боксу в тяжелом весе среди профессионалов.

Али, хотя он и утратил за последние годы быстроту реакции и был побежден со счетом 1:4, в предстоящем матче мог иметь психологическое и мотивационное преимущества. Кроме того, математика Гарднера также могла помочь в предсказании исхода встречи: хотя Форман победил Фрэзера, а Фрезер одержал победу над Али, Али все же может победить Формана, так как отношение между этими тремя боксерами может быть нетранзитивным.

Я ранжировал этих трех боксеров по трем критериям: быстроте реакции, силе и технике (в которую входит и психологическая подготовка), основываясь на данных, опубликованных в печати, и получил нетранзитивное соотношение, заслуживающее того, чтобы сделать на него ставку:

	Али	Фрэзер	Форман
Быстрота реакции	2	1	3
Сила	3	2	1
Техника	1	3	2

Сила Формана и его техника побеждают Фрэзера, но техника и быстрота реакции Али побеждают Формана. На это стоит сделать ставку. Однако в будущем Фрэзер все же может победить Али!

Энтони Пил

Во, Швейцария

Д. Силверман в уже упоминавшемся номере *Journal of Recreational Mathematics* предложил игру для двух лиц под названием «слепой Пенниант». Игра основана на использовании нетранзитивных троек в серии бросаний нефальшивой монеты. Игроки *одновременно* выбирают по тройке исходов бросаний, не зная о выборе конкурента. Тот игрок, чья тройка первой выпадет в серии бросаний, выигрывает. Какова оптимальная стратегия? Ответить на этот вопрос нелегко. Полное решение, использующее матрицу игры 8 × 8, приводится в *The College Mathematics Journal* (January 1987, p. 74–76) как решение задачи 299.

ГЛАВА 6

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С КАРТАМИ

Игральные карты – необычайно благодарный материал для создания всякого рода математических фокусов, головоломок и других развлечений. В этой главе мы познакомимся с некоторыми новыми карточными задачами и играми и увидим, как легко они приводят к весьма важным областям комбинаторной теории.

Рассмотрим следующий комбинаторный способ наглядного изложения одной важной теоремы из теории чисел. Извлечем из колоды все карты одной масти (например, пики) и расположим в порядке возрастания их значений от туза до короля (валет, дама и король соответствуют значениям 11, 12 и 13). Выложим их, не нарушая последовательности, в ряд на стол лицевой стороной вниз так, чтобы туз оказался на левом конце ряда. Затем начнем переворачивать карты по следующим правилам, каждый раз двигаясь слева направо.

1. Перевернем каждую карту.

2. Перевернем каждую вторую карту. (Карты двойка, четверка, шестерка, восьмерка, десятка и дама в результате этой операции окажутся перевернутыми вниз лицом.)

3. Перевернем каждую третью карту.

4. Перевернем аналогичным образом каждую четвертую, пятую и т.д. карту. При последнем проходе перевернем только одну карту – последнюю справа.

Взглянем на то, что у нас получилось. Все карты, кроме туза, четверки и девятки, лежат вниз лицом, как на рис. 34. Случайно ли это или наш результат представляет собой проявление какого-то общего правила? Неплохое упражнение для работы в классе – изготовить 100 небольших карточек с числами от 1 до 100, расставить их по порядку номеров вдоль края классной доски и применить к ним описанную выше процедуру перевертывания. Нужно ли говорить, что по окончании всей процедуры на нас будут «смотреть» только числа-квадраты 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100. Это – слишком большая выборка для того, чтобы совпадение можно было считать случайным. Следующий шаг должен состоять в доказательстве того, что сколь бы большой ни была «колода» карточек, процедуру переворачивания выдерживают только квадраты.

Простое доказательство этого утверждения основано на одной из самых старых и фундаментальных теорем теории чисел: целое положительное число имеет нечетное количество делителей (к делителям относится 1 и самое число) тогда и только тогда, когда число является квадратом. В этом нетрудно убедиться. Большинство делителей любого числа встречаются парами. Рассмотрим число 72. Его наименьший делитель входит в число 72 раза, что дает нам пару делителей 1 и 72. Следующий за 1 делитель 2 входит в число 36 раз, что дает нам пару делителей 2 и 36. Аналогично $72 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$. *Единственным* делителем числа, не об-

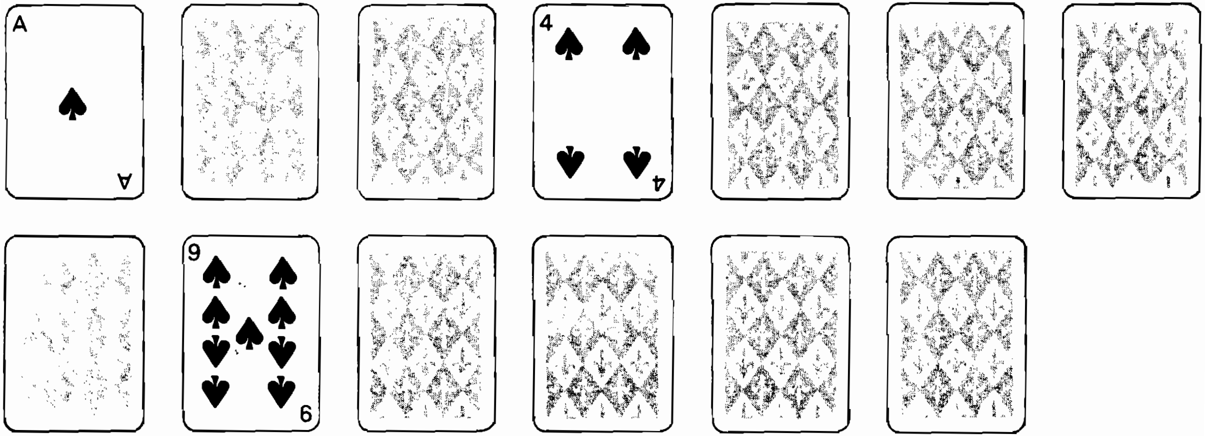


Рис. 34. Карточный алгоритм получения квадратов.

разующим пару ни с каким другим делителем, является делитель, равный квадратному корню из числа. Следовательно, все неквадраты имеют четное число делителей, а все квадраты – нечетное число делителей.

Каким образом применить все эти теоретико-числовые познания к картам, выложенным в ряд? Рассмотрим 8 карт пиковой масти из нашего первого примера с переворачиванием карт. Так как число 8 не квадрат, у него четное число делителей: 1, 2, 4, 8. Вы переворачиваете его 4 раза: когда переворачиваете каждую карту, каждую вторую, каждую четвертую и каждую восьмую карту. После четного числа переворачиваний карта, первоначально лежавшая вниз лицом, остается лежать вниз лицом. А так как все карты с числами, не являющимися квадратами, переворачиваются четное число раз, по окончании всей процедуры с переворачиваниями они остаются лежать вниз лицом. Нечетное число раз поворачиваются и остаются вверх лицом только карты с нечетным числом делителей, то есть с квадратами. Существует ли лучший способ запечатлеть эту фундаментальную теорему теории чисел в памяти старшеклассника, чем продемонстрировать ему такое доказательство на картах?

Посмотрим теперь, каким образом карты можно использовать для моделирования одной комбинаторной задачи, которую Д. Летер однажды облек в следующую форму. Некий мистер Смит исполняет обязанности управляющего мотелем. Все n номеров в его мотеле расположены в ряд. Свободных номеров нет. Смит психолог и намеревается исследовать, как влияют на постояльцев все возможные варианты размещения. Каждое утро он производит новую перестановку. Погода стоит отвратительная, почти целый день идет дождь. Чтобы свести до минимума неприятности, причиняемые гостям переселением, Смит ежедневно просит обменяться местами обитателей только двух соседних номеров. Существует ли простой алгоритм, позволяющий получить все возможные перестановки с помощью транспозиции (переселения обитателей двух соседних номеров) на каждом шагу?

Задача о мотеле легко моделируется с помощью карт. Выложим в ряд карты пиковой масти от туза до короля. Они соответствуют мотелю с 13 номерами. Число перестановок из n элементов равно n! Наша задача состоит в том, чтобы, меняя местами каждый раз только две соседние карты, получить все возможные перестановки за ($n! - 1$) шагов. (Мы вычитаем единицу из $n!$, так как начинаем с какой-то «готовой» перестановки карт – той самой, которая лежит на столе.) Во многих задачах перебор всех перестановок n элементов требует использования компьютера. Если такой перебор можно осуществить с помощью одних лишь транспозиций, то это позволяет существенно сократить машинное время.

Оказывается, что для решения этой задачи существует простой и изящный алгоритм. Он позволяет осуществлять с помощью компьютера перестановку n элементов быстрейшим из возможных способов. Открыл его польский математик Гуго Штейнгауз. Алгоритм этот изложен в его книге «Сто задач» (задача об абаке), впервые опубликованной в Польше в 1958 г. [6.12*]. В начале 60-х годов алгоритм Штейнгауза был почти одновременно переоткрыт Г. Троттером и С. Джонсоном, опубликовавшими свои работы независимо друг от друга.

Решение задачи для 13 карт потребовало бы $13! - 1 = 6\,227\,020\,799$ шагов (понятно, почему столь желательны быстродействующий алгоритм и его компьютерная реализация!). Поэтому мы начнем с меньших множеств. Найти решение для 3 карт легко, но уже при переходе к 4 картам возникают трудности. Кроме того, мы хотим получить не просто метод получения всех перестановок для какого-то заданного числа элементов, а общий метод, применимый к любому числу элементов.

Для двух карт ($n = 2$) решение тривиально (см. рис. 35, *A*): мы просто перекладываем двойку справа налево. При $n = 3$ мы записываем каждую из предыдущих перестановок по три раза: 12, 12, 12; 21, 21, 21. Затем с помощью процедуры «зигзаг» дописываем к ним тройку (рис. 35, *B*): тройка в исходной позиции находится в крайнем правом положении, затем совершает колебание влево, достигнув крайнего правого положения, замирает, после чего совершает колебание в крайнее правое положение. В результате полного колебания (туда и обратно) мы получаем перестановки 123, 132, 312, 321, 231 и 213. Если начать с туза, двойки и тройки, можно заметить,

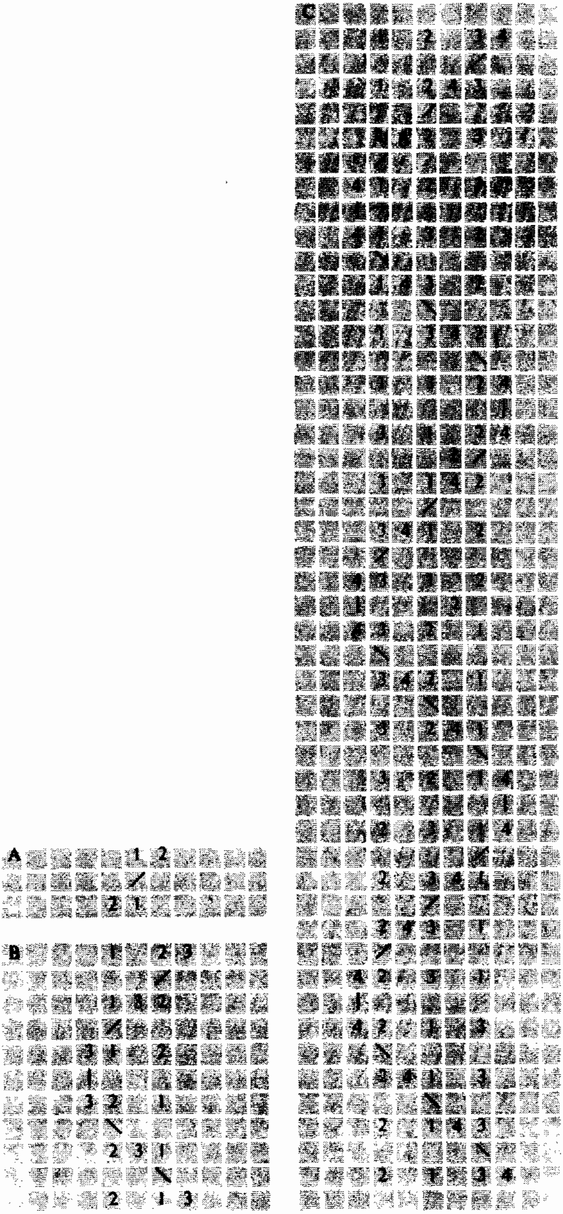


Рис. 35. Рекуррентный алгоритм решения задачи о мотеле.

что каждая перестановка получается из предыдущей с помощью транспозиции – перекладывания двух соседних карт. При $n = 4$ каждая перестановка серии $n = 3$ повторяется по 4 раза. (Перестановки серии $n - 1$ необходимо повторить по n раз.) Затем в игру вступает четверка и описывает зигзаг – колебание справа налево и слева направо, как в предыдущем случае (рис. 35, *C*).

Алгоритм Штейнгауза можно задать с помощью нерекуррентной процедуры, но описанную выше рекуррентную процедуру проще понять. Трудность при описании алгоритма для произвольного n связана с тем, что, когда совершающая челночный рейс карта замирает в крайнем левом или в крайнем правом положении, местонахождение пары карт, перекладываемых при очередном ходе, меняется весьма причудливым образом. Приводимый нами вариант алгоритма носит рекуррентный характер, так как при каждом n нам приходится использовать результаты, полученные при $n - 1$. Алгоритм работает при любых n. При $n = 5$ мы получаем $5! = 120$ перестановок, начиная с 12345, 12354, 12534, 15234, 51234, 51243, 15243... и кончая 21345. Заметим, что перестановка двух первых цифр в последней перестановке возвращает нас к исходной перестановке. Так происходит при всех n: используемая нами процедура циклическая, и следующий шаг после $n!$ шагов восстанавливает исходную перестановку. Заметим также, что после $n!/2$ шагов карты располагаются в обратном порядке.

Я признателен Д. Кнуту за карточный вариант изложения рекуррентной процедуры, а также за историю алгоритма. В подготавливаемом к печати четвертом томе задуманной им серии «Искусство программирования для ЭВМ» будет рассмотрен описанный выше алгоритм и показано, что «таблица обращения» этого алгоритма эквивалентна так называемому отраженному коду Грея со смешанными основаниями. Вся задача в целом является частным случаем более общей «задачи о мотеле», которую в свою очередь можно рассматривать как частный случай задачи, называемой Лемером «задачей о бродячем взломщике».

Несколько лет назад Дж. Конуэй изобрел серию карточных задач и игр, основанных на перестановке множества элементов за счет обращения порядка расположения элементов в некоторых его подмножествах по различным правилам. Например, выберите из колоды 13 карт пиковой масти, перетасуйте и возьмите в левую руку лицевой стороной к себе. Запомните значение ближайшей к вам карты (условимся называть ее верхней картой). Предположим, что это девятка пик. Назовите вслух или про себя число 9 и большим пальцем правой руки снимите по очереди («наслаивая» одну карту на другую) 9 карт. Этим вы автоматически измените порядок их следования на противоположный. Положите 9 снятых карт поверх остальных карт в левой руке. Верхней окажется какая-то другая карта. Запомните ее значение, произнесите его вслух или про себя и повторите все с самого начала. Иначе говоря, если значение верхней карты равно n, то вы отсчитываете n карт, располагаете их в обратном порядке и кладете поверх оставшихся в левой руке. Игра заканчивается, когда верхней картой оказывается туз, так как туз («единица») порождает петлю с периодом 1, состоящую в повторном отсчитывании (снятии) одного туза и возвращении его на место.

Всегда ли игра должна непременно заканчиваться появлением туза? Да, хотя иногда ждать туза придется довольно долго. Оказаться втянутым в цикл до появления туза невозможно. Если игра продолжается достаточно долго, а туз все не появляется, то в конце концов сверху может оказаться король. Но коль скоро такое происходит, при очередном обращении порядка следования карт король оказывается снизу. А если король «опускается на дно», то извлечь его оттуда невозможно. Но вот игра продолжается, и сверху оказывается дама. Если такое происходит, то при очередном обращении порядка следования карт она оказывается на 12-м месте сверху – как раз над королем – и остается на этом месте навсегда. Метод математической индукции позволяет доказать, что то же самое должно произойти затем с валетом, с десяткой и т. д. (каждая карта опускается «в глубину» на место, соответствующее ее значению, и остается там «навсегда»), пока самым последним (а может быть, и раньше) сверху не окажется туз, после чего игра завершается. Итак, после того как все старшие карты побывают на самом верху, следующая по старшинству карта (меньшего значения) может «выплыть» наверх только один раз.

В общем виде игра Конуэя проводится с одной или несколькими группами («подколодами») из n карт каждая. Если верхней оказывается карта, пребывавшая в глубине подколоды на k-м месте, то Конуэй называет это *k-свопом* («k-переменой»). Значение появившейся наверху карты показывает, сколько карт нужно отсчитать, попутно изменяя порядок их следования на обратный, и положить поверх оставшихся. Ту же процедуру, но с подкладыванием отсчитанных карт под оставшиеся, Конуэй называет *k-дропом* («k-сбрасыванием»).

Когда имеется только одна подколода, $k = 1$ (верхняя карта) и отсчитанные карты идут наверх, Конуэй называет игру *топсвопсом*. Именно эту игру мы и анализировали выше. Если имеется одна подколода, $k = 1$ и отсчитанные карты отправляются вниз, Конуэй называет игру *топдропсом*. В топдропсе определяется значение верхней карты, затем отсчитывают нужное число карт, после чего их в обратном порядке подкладывают снизу. Игра топдропс менее интересна, чем топсвопс: вы сразу начинаете с цикла, длинного или короткого, который может содержать или не содержать туза.

Если имеется одна подколода и $k = n$ (нижняя карта), то игра подразделяется на ботсвопс или ботдропс в зависимости от того, куда отправляются отсчитанные карты – поверх оставшихся или под них. Игра в ботсвопс довольно скучна: если вы играете с 13 картами пиковой масти и король не находится в самом низу, то немедленно возникает 2-цикл (то есть цикл длины 2). Предположим, что в самом низу подколоды находится четверка пик. Она будет оставаться там, пока вы повторно обращаете порядок расположения 4 верхних карт. Если в самом низу находится король, то он перейдет на самый верх и вы снова окажетесь втянутым в аналогичный 2-цикл, основанный на новой нижней карте.

Игра в ботдропс (определение значения нижней карты, отсчет соответствующего количества карт с одновременным изменением порядка их следования на противоположный и подкладывание отсчитанных карт под оставшиеся) более интересна. «Поупражнявшись немного в этой игре, – пишет Конуэй, – вы, возможно, сочтете, что в ней всегда возникает циклическая последовательность КДКДКД... (К – король, Д – дама), но в действительности так происходит не всегда. В редких случаях возникают и другие циклы». (Можете ли вы указать хотя бы один редкий цикл?) Разумеется, при игре в ботдропс, как и во всех остальных играх, отложенную для игры группу карт необходимо предварительно хорошенько перетасовать.

Анализ игры существенно усложняется, если в ней участвуют не один, а несколько игроков. Например, предположим, что у каждого из двух игроков имеется группа из 13 карт. У одного игрока карты пиковой масти, у другого – червовой. Партнеры играют в топсвопс следующим образом. Каждый тасует свою подколоду. Игрок *А* называет свою верхнюю карту, после чего игрок *B* отсчитывает соответствующее число своих карт и, поменяв порядок их следования на противоположный, помещает отсчитанные карты поверх оставшихся своих карт. Затем *B* называет *свою* верхнюю карту, *A* отсчитывает соответствующее число своих карт и, изменив порядок их следования на противоположный, кладет их поверх оставшихся своих карт. Игра продолжается, игроки по очереди называют свои верхние карты.

Конуэй сообщает об одном интересном наблюдении: как только верхней картой оказывается туз, верхние карты образуют цикл, который начинается с туза, затем идет некоторая последовательность карт, за ней снова туз (либо тот же самый, либо другой), затем та же последовательность в обратном порядке. Например, первый туз, оказавшийся сверху, может породить цикл 1–3–2–6–4–1–4–6–2–3–1. Обратите внимание на то, что последовательность карт 3–2–6–4 между первыми двумя появлениями тузов (1) повторяется в обратном порядке 4–6–2–3 между вторым и третьим появлением тузов. Недоказанное предположение (или по крайней мере предположение, бывшее недоказанным, когда я услышал о нем от Конуэя) состоит в том, что в игре в топсвопс среди верхних карт всегда появляется туз. Неизвестно, может ли в этой игре возникнуть цикл без туза, хотя известно, что если цикл содержит туз, то туз входит в цикл ровно 2 раза.

Не следует думать, будто карточные игры Конуэя тривиальны. Они тесно связаны с теорией перестановок множеств и не только позволяют доказывать (и формулировать) глубокие теоремы, но и имеют отношение к практическим задачам, возникающим в, казалось бы, далеких областях.

В заключение мне хотелось бы привести три необычные комбинаторные задачи с картами. Первая задача

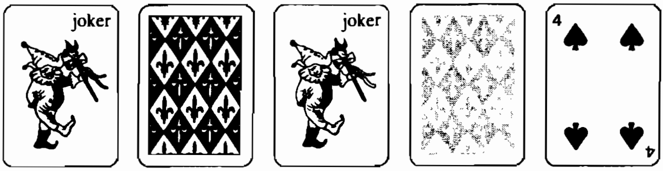


Рис. 36. Задача Рансома: все ли карты с цветными рубашками джокеры?

чрезвычайно трудная, вторая – простая, но изящная, а третья решается сравнительно легко, если подобрать к ней правильный ключ.

1. Задача Лангфорда. В гл. 5 моей книги «Математические фокусы» [6,13 *] рассмотрена одна комбинаторная задача, впервые поставленная Ч. Дадли Лангфордом, которую можно «промоделировать» на множестве карт, включающем пары всех значений от 1 до n. Если ту же задачу распространить и на тройки значений, то наименьшее n, для которого решение известно, равно 9.

Вот в чем состоит задача. Извлеките из колоды карт все карты трех мастей от туза до девятки. Попытайтесь разложить эти 27 карт в ряд так, чтобы между первой и второй картой любого значения k было ровно k карт и между второй и третьей картой любого значения k также было ровно k карт. Например, между первой и второй семеркой должно быть 7 карт (не считая самих семерок), и между второй и третьей семеркой также должно быть 7 карт (также не считая самих семерок). Это правило применимо ко всем значениям карт от 1 (туз) до 9 (девятка).

2. Задача Силвермана. Эту игру-головоломку изобрел Дэвид Л. Силверман. Извлеките из колоды все карты пиковой и червовой масти. Разложите пики в ряд в порядке возрастания значений от туза не левом фланге до короля на правом. Под каждой картой пиковой масти положите карту червовой масти, выбрав ее так, чтобы сумма значений двух карт, верхней и нижней, была равна квадрату. Докажите, что задача допускает единственное решение.

3. Задача Рансома. Эту задачу любезно сообщил мне канадский фокусник-любитель и собиратель головоломок Том Рансом. Пять карт разложены в ряд так, как показано на рис. 36. Рубашки всех карт, как справедливо замечает Рансом, либо цветные, либо черные. Все ли карты с цветными рубашками джокеры?

Задача состоит не в том, чтобы ответить на этот вопрос,– требуется определить минимальное число карт, которые необходимо перевернуть прежде, чем вы сумеете ответить на вопрос. Иначе говоря, задача Рансома состоит в следующем. Предположим, что одинаково возможны все мыслимые варианты невидимых сторон карт (у каждого джокера рубашка может быть черной или цветной, карта, лежащая вверх рубашкой, цветной или черной, может быть, а может не быть джокером и т. д.). Сколько карт вам понадобится перевернуть прежде, чем вы сумеете ответить на вопрос: «Все ли карты с цветными рубашками джокеры?»

На первый взгляд кажется, что задача Рансома не имеет решения. В действительности решение существует, но требует довольно тонких рассуждений. Самое удивительное состоит в том, что оно тесно связано со старым анекдотом о трех профессорах, едущих в поезде по Шотландии. Из окна вагона профессора видят пасущуюся на склоне холма черную овцу.

– Как интересно! – замечает астроном.– Все овцы в Шотландии черные.

– Совершенно необоснованный вывод,– возражает ему физик.– Мы можем лишь заключить, что *некоторые* овцы в Шотландии черные.

– Ваше утверждение нуждается в уточнении,– вступает в беседу логик.– Мы вправе лишь утверждать, что по крайней мере одна овца в Шотландии с одной стороны черного цвета.

ОТВЕТЫ

Три комбинаторные задачи имеют следующие решения.

1. Карты от туза (1) до девятки (9) трех мастей требуется разложить в ряд так, чтобы между первой и второй картой любого значения k было ровно k других карт и между второй и третьей картой любого значения k также было ровно k других карт. Не считая решений, отличающихся только обратным порядком следования карт, задача допускает следующие три решения:

1, 8, 1, 9, 1, 5, 2, 6, 7, 2, 8, 5, 2, 9,
6, 4, 7, 5, 3, 8, 4, 6, 3, 9, 7, 4, 3;

1, 9, 1, 2, 1, 8, 2, 4, 6, 2, 7, 9, 4, 5,
8, 6, 3, 4, 7, 5, 3, 9, 6, 8, 3, 5, 7;

1, 9, 1, 6, 1, 8, 2, 5, 7, 2, 6, 9, 2, 5,
8, 4, 7, 6, 3, 5, 4, 9, 3, 8, 7, 4, 3.

Третье решение было найдено без помощи компьютера в 1966 г. Ю. Левиным, ныне математиком в университете Аделфи, и впервые опубликовано в 1968 г. Левин доказал, что решение для троек карт существует, только когда n (наибольшее значение карт) имеет цифровой корень 1, 8 или 9 (то есть когда n при делении на 9 дает остаток 1, -1 или 9 – сравнимо с 1, -1 или 9 по модулю 9), и что 9 – наименьшее из n, при которых решение существует. Левин нашел также решения для бо́льших n, следующих за 9, а именно для $n = 10$, 17, 18 и 19, и высказал предположение, что решения, удовлетворяющие его условию, существуют при всех бо́льших значениях.

Д. Розелль и Т. Томассон мл., рассмотревшие ту же задачу в 1971 г., привели в своей работе результаты численных расчетов на компьютере, подтверждающие, что при $n = 8$ решения не существует, и получили при $n = 9$ то же решение, которое было ранее найдено Левиным. Исчерпывающий компьютерный поиск решений при $n = 9$ и $n = 10$ был проведен Д. Бароном, сообщившим о своих результатах на конференции по комбинаторике, состоявшейся в Венгрии (1969 г.). Барон нашел 3 решения при $n = 9$ и 5 решений при $n = 10$. Ни одного решения задачи Лангфорда не удалось найти для случая, когда каждое значение карт представлено не в трех, а в большем числе экземпляров.

2. Решение задачи Силвермана о подборе для каждой карты пиковой масти соответствующей карты червовой масти с таким расчетом, чтобы сумма значений карт в каждой паре была равна квадрату, имеет следующий вид: 1–8, 2–2, 3 – король, 4 – дама, 5 – валет, 6–10, 7–9, 8–1, 9–7, 10–6, валет–5, дама–4, король–3. Как замечает Силверман, девятка, десятка и валет должны иметь своими парами соответственно семерку, шестерку и пятерку. Это предопределяет подбор остальных пар. Действительно, так как шестерка червей «вышла из игры», парой для тройки пик может быть только король червей. Аналогичным образом, так как пятерка червей уже вошла в пару с валетом пик, подходящей парой для четверки пик может быть только червовая дама. Остальные три вакансии в червовом ряду заполняются однозначно, что доказывает единственность решения.

3. В задаче Рансома требуется определить минимальное число карт (из общего набора из 5 карт), которое необходимо перевернуть, чтобы ответить на вопрос: все ли карты с цветной рубашкой джокеры? Обозначим карты, изображенные на рис. 36, слева направо латинскими буквами от A до E. Карту D необходимо перевернуть, так как иначе мы не можем узнать, джокер ли это или не джокер, а карту E необходимо перевернуть, чтобы узнать, цветная ли у нее рубашка. Возникают 4 возможных случая:

1) D – джокер, у E черная рубашка;
2) D – джокер, у E цветная рубашка;
3) D – не джокер, у E черная рубашка;
4) D – не джокер, у E цветная рубашка.

В случаях 2, 3 и 4 ответ на вопрос «Все ли карты с цветными рубашками джокеры?» отрицателен. Никаких других карт для этого переворачивать не нужно. В случае 1 ответ утвердителен, но, немного подумав, легко понять, что переворачивание трех остальных карт не противоречит утвердительному ответу. Карта B несущественна для ответа, так как у нее черная рубашка. Видеть рубашку каждого из джокеров также несущественно: ведь в действительности не спрашивается, черная ли у джокера рубашка. Если же рубашка у джокера цветная, то ответ по-прежнему утвердительный. Большинство людей, глядя на разложенные в ряд 5 карт, испытывают также непреодолимое желание посмотреть, какая у джокеров рубашка, и считают, что для ответа на вопрос нужно перевернуть карты A, S, D, E.

Казалось бы, из сказанного можно сделать вывод о том, что для ответа на вопрос достаточно перевернуть карты D и E. Но это не так! Вспомним замечание осторожного логика из анекдота о трех профессорах: увидев из окна вагона черную овцу на склоне холма, логик заключил, что по крайней мере одна овца в Шотландии черная, по крайней мере с одной стороны. Стоит кому-нибудь подумать, будто ему удалось решить задачу, как Рансом переворачивает карту B и показывает, что у нее цветная рубашка! Это, конечно, противоречит утвердительному ответу на вопрос «Все ли карты с цветной рубашкой джокеры?» Таким образом, правильное решение гласит: чтобы ответить на вопрос, необходимо перевернуть карту B, а также карты D и E.

Задача Рансома имеет еще один вариант, на который обратил внимание приятель Рансома Р. Лайонз: чтобы те, кто пытается решить задачу, не забывали точную формулировку вопроса («Все ли карты с цветной рубашкой джокеры?»), Рансом записывает вопрос на обычной каталожной карточке и кладет эту карточку над игральными картами, разложенными в ряд. И эту карточку также необходимо перевернуть, чтобы убедиться в том, какая у нее оборотная сторона – цветная или черная!

ДОПОЛНЕНИЕ

Комбинаторные задачи с игральными картами вызвали поток писем от читателей, некоторые из них заслуживают особого внимания. А. Хадселл и С. Вандерстил с помощью мини-компьютера решили обобщенную задачу Силвермана. Если наибольшее значение карт не превышает 13, то решения существуют только при $n = 3$, 5, 8, 9, 10, 12 и 13, причем каждое решение единственно. При всех n от 14 до 31 решения неединственны. Число решений при $n \geqslant 14$ соответственно равно 2, 4, 3, 5, 15, 21, 66, 37, 51, 144, 263, 601, 1333, 2119, 2154, 2189, 3280...

А. Папаиконому, биоинженер из Амстердама, исследовав общую задачу для квадратов, обратился к общей задаче с кубами. К своему удивлению, он обнаружил, что если при некотором n решение существует, то оно единственно. Последовательность n, для которых решение существует, начинается с 7, 19, 26, 37, 44, 56, 63... Папаиконому нашел простой рекуррентный метод, позволяющий получать члены этой последовательности и строить решения.

Р. Силвер из Сан-Кристобаля, исследуя ботдропс на циклы, обнаружил, почему эта игра обычно заканчивается циклом дама-король: других 2-циклов, равно как и 3- и 4-циклов, не существует. Что же касается 5-циклов, то хотя они и существуют, вероятность попасть в такой цикл мала. Например, если отобранные карты идут в последовательности (снизу вверх) 10, валет 2, 3, ... и верхняя карта оказывается тузом, то отобранные карты при игре в ботдропс образуют 5-цикл.

Г. Уилф, из университета Пенсильвании сообщил о сделанном им замечательном открытии, позволяющем доказать, что игра в топсвопс конечна. Будем говорить, что карта занимает свое «естественное положение», если ее значение совпадает с номером места, занимаемого ею в последовательности отложенных карт. Например, если отложенные карты (обращенные к вам лицом) располагаются в последовательности (сверху вниз) 7, 2, валет, 8, 5, король, 6, туз, 9, 10, 3, дама, 4, то 5 карт (2, 5, 9, 10, дама) занимают свое естественное положение. Записав значения этих 5 карт в виде показателей степеней двойки и сложив степени, мы получим число, которое я предлагаю назвать числом Уилфа: $2^2 + 2^5 + 2^9 + 2^{10} + 2^{12} = 5668$. При любом ходе в игре топдропс число Уилфа должно только возрастать.

«Это число возрастает потому,– сообщает Уилф,– что на карты, занимающие естественную позицию и находящиеся слишком глубоко в недрах колоды, никак не влияет операция обращения последовательности снятых карт, и они даже после операции сохраняют свое естественное положение. Судьба карт, вовлеченных в операцию обращения порядка следования, менее ясна, за исключением одного: карта, которая была верхней перед очередным ходом, после хода занимает свою естественную позицию, а двойка в степени, равной значению карты,– величина достаточно большая, чтобы выдержать любые изменения, проистекающие от вышерасположенных карт. (Любая степень двойки больше, чем сумма всех предыдущих степеней двойки, ровно на единицу. Этот факт лежит в основе двоичной системы счисления.)

Так как числа монотонно возрастают и не могут превосходить 16 328, игра должна завершиться не более чем через конечное число ходов (заведомо не превышающее 16 382). Как показывает более тщательный анализ, игра с n картами завершается не более чем через 2^{n-1} ходов».

В этой связи возникает интересный нерешенный вопрос: при каком расположении 13 карт число ходов при игре в топсвопс максимально?

Упрощенный вариант задачи Рансома с 4 картами (без шутки Рансома с использованием «двусторонней карты») используется психологами как объект исследования (см., например, [9]).

Реакция на открытие того, что у карты с обеих сторон может быть рубашка (трюковая «двусторонняя карта»), варьируется в широких пределах. Дж. Снайдер свое письмо начинает так: «Минутку! Подождите! Дайте подумать! Не так быстро! Минутку! Так просто вы меня не проведете!» Стовер послал Вазону в Лондонский университетский колледж набор из 5 запечатанных карт для анализа. Когда Вазон впоследствии получил информацию о том, что он обнаружил бы, если бы вынул из конвертов карты и обследовал бы их оборотные стороны («рубашку»), ему принесли очередное письмо от Стовера, которое гласило: «Прошу извинить! Я ошибся!»

По мнению некоторых читателей, формулировка задачи допускает неоднозначное толкование в том месте, где говорится о «минимальном числе карт», которые требуется перевернуть. Задача состоит в том, чтобы определить наименьший набор карт, которые требуется перевернуть, чтобы во всех возможных случаях гарантировать правильный ответ на вопрос «Все ли карты с цветной (красной) рубашкой джокеры?» (Задачу лучше всего демонстрировать на картах с красной или синей рубашкой.) Если нам не важно, правилен ли наш ответ или нет, то очевидно, что «ответить» на вопрос мы можем, не переворачивая ни одной карты. В некоторых случаях переворачивание одной карты гарантирует правильный ответ. Нам же требуется определить минимальное множество карт, переворачивая некоторые мы заведомо гарантируем правильный ответ во всех случаях.

С разрешения Дж. Вейнрича я воспроизвожу здесь письмо, полученное от него в декабре 1974 г.:

«Уважаемый мистер Гарднер!

Хочу обратить Ваше внимание на еще два варианта (третий и четвертый) интерпретации вопроса Рансома «Все ли карты с цветными «спинками» джокеры?»

3) Словарь “American Heritage Dictionary”, определяет слово «джокер» как «нечто ведущее себя неожиданным образом». Ясно, что карта (*B*), у которой лицевая сторона отпечатана черной краской, а «спинка» красная, по определению является джокером. Следовательно, если у *B* не красная рубашка, то это никак не сказывается при ответе на вопрос Рансома; если же у *B* рубашка красная, то в этом заведомо есть элемент неожиданности и карту *B* надлежит считать джокером, но это, как Вы объяснили, не влияет на ответ. Таким образом, для того, чтобы узнать, все ли карты с красной рубашкой джокеры, нет необходимости переворачивать карту *B*.

4) Тот же словарь определяет слово "card" (игральная карта, «тип», «чудак») как «забавный или эксцентричный человек». Если у карты *B* Рансома красная «спинка», то он просто подшутил над нами, заслужив тем самым, чтобы мы назвали его самого «картой». А коль скоро Рансом карта, его можно перевернуть (или по крайней мере повернуть) и посмотреть, загорела ли у него спина. Можно считать доказанным, что Рансом во всяком случае несомненный джокер, и поэтому для ответа на вопрос нам нет необходимости знать, красная ли у него спина. Но Рансом не джокер, если отпечатанная с лицевой стороны черной краской карта *B* – обычная, нетрюковая карта. В этом случае нам необходимо проверить, какого цвета спина у Рансома.

Таким образом, перевернуть придется три или четыре карты: карты *D* и *E* в любом случае, карту *B* (для того, чтобы выяснить, джокер ли Рансом), и самого Рансома (если *B* – нетрюковая карта).

Более или менее искренне Ваш
Джеймс Д. Вейнрич

P. S. Не принадлежит ли Рансом к представителям тех народов, у которых спина покрыта густой черной «шерстью» и может считаться черной? Если нет, то позволительно предположить, что спина у него цветная, и тогда отпадет необходимость переворачивать его, если *B* – трюковая карта. Обратите внимание на то, что в последнем случае спина у Рансома может быть и черной, и цветной одновременно..

ГЛАВА 7

МАШИНЫ, СОЧИНЯЮЩИЕ МЕЛОДИЮ

> Математика и музыка! Наиболее ярко выраженные противоположности человеческого мышления! И тем не менее они тесно взаимосвязаны!

Любое произведение искусства в некотором тривиальном смысле можно рассматривать как комбинацию конечного числа дискретных элементов. Более того, точную комбинацию элементов можно представить в виде последовательности цифр или, если угодно, одного многозначного числа.

Возьмем какую-нибудь поэму. Поставим в соответствие каждой букве алфавита, каждому знаку препинания определенное число (различным буквам и знакам должны соответствовать различные символы). Какую-нибудь цифру, например нуль, условимся считать разделителем чисел. Ясно, что при таком соответствии одна длинная строка цифр («стринг») может рассматриваться как кодированная запись поэмы. Если книги в какой-нибудь огромной библиотеке содержат все возможные комбинации слов и знаков препинания, как в знаменитой новелле Хорхе Луиса Борхеса «Вавилонская библиотека», то где-то среди книг должна находиться любая поэма, которая когда-либо была или может быть написана. Все эти поэмы могут быть закодированы в виде числовых последовательностей и снабжены индексами-номерами. Если располагать достаточно большим запасом времени – миллиардами миллиардов лет, то можно разыскать любую великую поэму, какую вы только пожелаете. Существуют ли алгоритмы, позволяющие отыскивать еще не написанные гениальные произведения?

Другой пример – живопись. Расчертим живописное полотно на матрицу мелких клеток. Точный цвет каждой клетки легко кодируется числом. Сканируя клетки ряд за рядом, мы получаем последовательность чисел, описывающих нашу картину. Так как числа не подвержены разрушительному воздействию времени, произведение живописи может быть воссоздано по цифровой записи до тех пор, пока эта запись не утрачена. Компьютеры будущего смогут воспроизводить картины, которые будут больше похожи на оригиналы, чем сохранившиеся к тому времени сами оригиналы, так как за многие десятилетия оригиналы физически утратят до некоторой степени свой первоначальный вид. Если в каком-нибудь огромном музее хранятся все возможные комбинации цветных клеток для матриц, не превышающих определенного размера, то где-то в этом необъятном собрании должна храниться любая картина, которая когда-либо была или может быть написана. Существуют ли алгоритмы, позволяющие компьютеру обследовать каталог такого музея – перечень кодовых номеров всех картин и обнаруживать среди них еще не написанные гениальные произведения живописи?

Еще один пример – симфония. Любая симфония представляет собой фантастически сложное нерасторжимое единство дискретного и непрерывного: звучание скрипки или тромбона может непрерывно сдвигаться вверх и вниз по шкале, но фортепиано не позволяет извлекать звуки с интервалом в четверть тона. Однако из анализа Фурье нам известно, что все звучание симфонии от первого до последнего звука можно представить одной-единственной кривой на экране осциллографа. «Эта кривая, – писал Джейм Джинс в своей книге «Наука и музыка» [7.10], – *и есть* симфония, ни больше, ни меньше, и звучание симфонии, благородное или кричащее, ласкающее слух или неприятное, утонченное или вульгарное, зависит от качества это кривой».

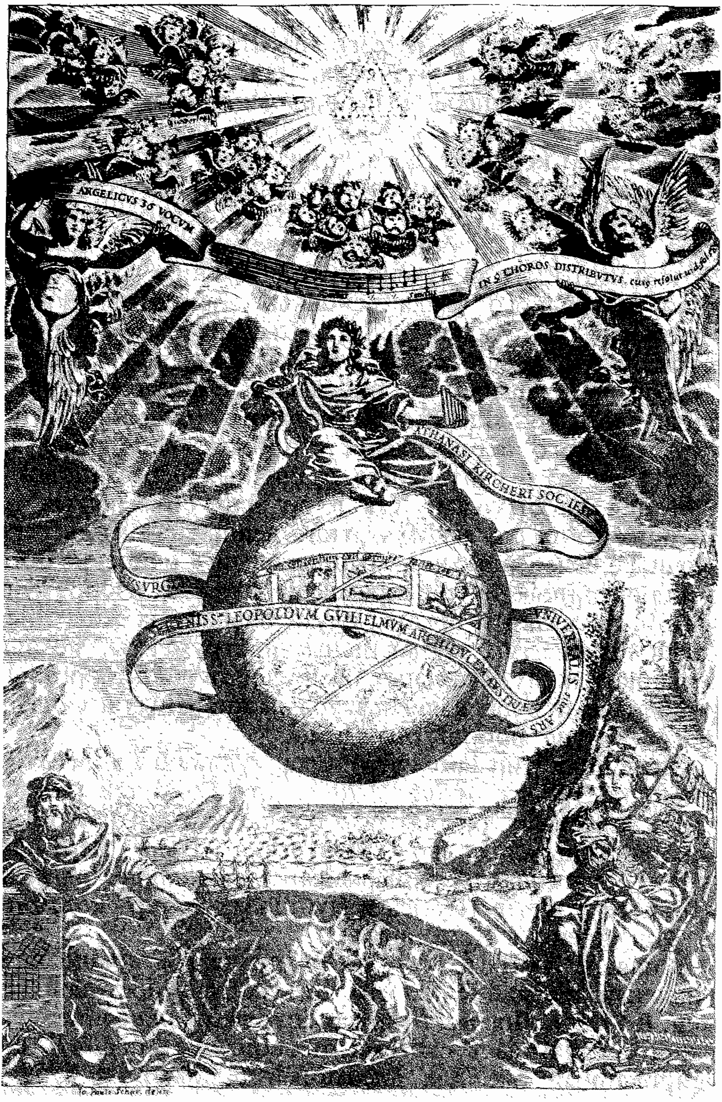
На долгоиграющей пластинке симфония представлена одной длинной пространственной кривой. Поскольку кривую можно кодировать числами со сколь угодно большой точностью, симфонию можно квантифицировать, то есть перевести на язык количественных, числовых характеристик, и записать в виде последовательности чисел. Огромная библиотека компьютерных магнитных лент с записями всех возможных комбинаций звуков симфонического оркестра содержала бы любую симфонию, которая когда-либо была или могла быть написана. Существуют ли алгоритмы, позволяющие компьютеру сканировать хранящиеся в такой библиотеке числовые последовательности и выбирать гениальные произведения симфонической музыки?

Такие алгоритмы были бы настолько сложны, что человек вряд ли смог бы когда-нибудь приблизиться к их формулировке, но нас сейчас интересует не это. Существуют ли такие алгоритмы в принципе? Стоит ли искать их мелкие фрагменты, так сказать, собирать их из отдельных битов, по кусочкам? Рассмотрим одну из простейших задач из области прекрасного – поиск правил, которым подчиняется сочинение простой мелодии. Существует ли алгоритм, позволяющий человеку или компьютеру сочинить приятную мелодию, следуя лишь некоторому набору комбинаторных правил?

Если ограничить мелодию конечной длиной и конечным числом чистых тонов и ритмов, то число возможных мелодий конечно. Джон С. Милль в своей автобиографии вспоминает, что в юности ему доставила немало мучений мысль об исчерпаемости музыкальных произведений. Предположим, что наша мелодия состоит из 10 нот, выбранных из 8 нот, образующих одну октаву. Число мелодий в этом случае равно числу десятибуквенных слов, которые можно составить из 8 различных букв (буквы могут повторяться). Это число составляет $8^{10} = 1\,073\,741\,824$. При подсчете мелодий мы не учитывали вариации ритмов, создающих различные мелодии. Большинство из 8^{10} мелодий однообразны (например, одна «мелодия» звучит так: ми, ми, ми, ми, ми,ми, ми, ми), но некоторые мелодии очень красивы. Существуют ли правила, позволяющие композитору или компьютеру отбирать приятные для слуха комбинации звуков?

Попытки сформулировать такие правила и воплотить их в механическом устройстве, сочиняющем мелодии, имеют богатую историю. Начало ей положил пятисот-

Рис. 37. Фронтиспис сочинения Кирхера "*Musurgia universalis*" (1650). Художник И. Пауль Шор. Вот как описывается эта аллегорическая картина в книге Дж. Годвина «Афанасий Кирхер: человек эпохи Возрождения и поиск утраченного знания» [7.9]: «От символа Троицы исходят лучи, озаряющие девять ангельских хоров, которые распевают канон для 36 голосов (Романо Микели), и Землю. Земной шар опоясан Зодиаком. На нем восседает Музыка, держащая лиру Аполлона и свирель Марсия. На фоне ландшафта изображены танцующие русалки и сатиры, пастух, слушающий эхо, и Пегас, крылатый конь Муз. Слева



мы видим Пифагора, легендарного отца теории музыки. Одной рукой он указывает на чертеж к своей знаменитой теореме, а другой – на кузнецов, которые, ударяя молотами по наковальне, привели Пифагора к открытию соотношения между высотой тона и массой. Справа изображена муза (Полимния?) с птицей, сидящей у нее на голове, – возможно, одна из 9 дочерей Пиэра, превращенных в соро́к за попытку состязаться с музами. Все эти фигуры окружены античными и современными музыкальными инструментами».

страничный трактат немецкого иезуита Афанасиуса Кирхера «Универсальная музургия, или великое искусство созвучий и диссонансов» (*Musurgia universalis*), увидевший свет в 1650 г. (рис. 37). Кирхер был убежденным последователем испанского средневекового мистика Рамона Луллия, сочинение которого «Великое искусство» было основано на нелепой идее, будто всякое значимое новое значение в любой области человеческой деятельности может быть получено путем перебора всех комбинаций небольшого числа основных элементов. Вполне естественно, что Кирхер вслед за Луллием рассматривал музыкальную композицию как комбинаторную задачу. В своей «Музургии» он описывает принадлежащий в основе своей Луллию способ создания полифонии путем относительного перемещения столбцов (наподобие палочек Непера) и считывания различных перестановок и сочетаний по строкам. Как и во всех объемистых сочинениях Кирхера, в «Музургии» ценные сведения перемешаны с нелепейшими измышлениями. Сочинение богато иллюстрировано гравюрами, на которых изображены голосовые связки и органы слуха различных животных, записи пения птиц, музыкальные инструменты, механические детали музыкальных шкатулок, водяные орга́ны с приводимыми в движение фигурами животных и людей и многие другие любопытные вещи.

Описанная Кирхером вертушка Луллия была действительно построена около 1670 г. для Сэмюэля Пеписа, автора известных дневников, в библиотеке которого имелась восхищавшая его «Музургия». Ныне вертушка Луллия, «чудесная музарифмика» (*musarithmica mirifica*), находится в музее Пеписа в его альма матер – колледже Св. Магдалены в Кембридже.

В начале XVIII в. методы механической композиции привлекли внимание многих немецких теоретиков музыки. В 1739 г. Лоренц Мицлер опубликовал сочинение, в котором излагалась система, позволявшая строить фигурированный бас для ансамблей барокко. В 1757 г. ученик Баха Иоганн Ф. Кирнбергер выпустил в Берлине книгу под названием «Готовый сочинитель полонезов и менуэтов», в которой для рандомизации выбора использовалась игральная кость. В другой своей книге (1783 г.) Кирнбергер распространил свои методы на симфонии и другие музыкальные формы.

К концу XVIII в. сочинение мелодий с помощью таблиц и рандомизирующих «устройств» типа игральных костей или волчков превратилось в весьма распространенную забаву. В 1779 г. австрийский композитор Максимилиан Штадлер выпустил наборы таблиц тактов для сочинения менуэтов и трио с помощью игральных костей. Почти в то же время лондонский музыкальный издатель Уэлкер опубликовал «табличную систему, посредством которой любое лицо, даже совершенно не сведущее в музыке, может сочинить десять тысяч менуэтов в самой приятной манере и без единой ошибки». Авторство аналогичных сочинений необоснованно приписывалось таким известным композиторам, как Карл Филип Эммануил Бах (сын Иоганна Себастьяна Баха) и Йозеф Гайдн. Сочинение "Haydn. Gioco filarmonico" («Филармоническая шутка»), выпущенное в 1790 г. в Неаполе, как обнаружил математик Томас Г. О'Берн из Глазго, оказалось плагиатом: приведенные в нем таблицы тактов до мелочей совпадали с теми, которые некогда опубликовал Штадлер.

Самая известная работа, объяснявшая, как с помощью двух игральных костей сочинять сколько угодно немецких вальсов, «вовсе не зная музыки», была впервые опубликована в Амстердаме и Берлине в 1792 г. – через год после смерти Моцарта, которому молва приписывала авторство этого сочинения. Большинство музыковедов – исследователей творчества великого музыканта считают подобное мнение лишенным оснований, хотя Моцарт любил математические задачи-головоломки и в его архиве сохранились записи, свидетельствующие об интересе композитора к музыкальным перестановкам. (Примерно через год в Бонне вышла брошюра с описанием способа, позволяющего «сочинять» контрдансы с помощью бросания игральной кости. Авторство ее также приписывали Моцарту. Брошюра о контрдансах была переиздана в 1957 г. в Амстердаме.)

"Musikalisches Würfelspiel" («Музыкальная игра в кости») Моцарта, как обычно принято называть брошюру о сочинении вальсов, неоднократно издавалась на других языках. В 1806 г. она вышла в Лондоне под названием «Музыкальная игра Моцарта в изящном футляре, в которой предлагается простая система, позволяющая сочинять неограниченное число вальсов, рондо, матросских танцев и рилей». В 1941 г. венгерский композитор и пианист Александр Ласло издал ту же брошюру под названием «Композитор, играющий в кости», оркестровав музыку для камерных ансамблей и оркестров. В 1956 г. система, о которой идет речь, появилась в Западной Германии в транскрипции Б. Шотта. Фотокопии таблиц с тактами Шотта содержит инструкция к «Игре в музыкальные кости», выпущенной в 1974 г. «Кэрусел паблишин корпорейшн» (Брайтон, шт. Массачусетс). В комплект, поступивший в продажу, входили также две игральные кости и пачка нотной бумаги.

«Моцартовская» система состоит из набора коротких тактов, перенумерованных числами от 1 до 176. Две игральные кости бросаются 16 раз. С помощью таблицы, в каждом из 8 столбцов которой перечислено по 11 номеров, первые 8 бросаний определяют первые 8 тактов вальса. Вторая таблица используется для 8 последующих бросаний, и найденные с ее помощью такты завершают вальс из 16 тактов. Карты составлены с таким расчетом, что вальс начинается с основного тона, или основной ноты, затем модулирует к доминанте и в заключение возвращается к основной ноте. Так как все такты, перечисленные в 8 столбцах каждой карты, имеют много общего, 11 вариантов выбора (11 сумм очков от 2 до 12, выпадающих при одновременном бросании двух игральных костей) существуют только для 14 тактов. Это позволяет системе порождать 11^{14} вальсов, выдержанных в отчетливо различимой моцартовской манере. Число 11^{14} столь велико, что любой вальс, который вы получите, бросая кости, и исполните с вероятностью, близкой к единице, будет вальсом, не звучавшим никогда прежде.

Первая коммерческая запись вальсов, «сочиненных по моцартовской системе», была осуществлена О'Берном. И рандомизация, и исполнение мелодий были поручены «Солидаку», небольшому и довольно медленному экспериментальному компьютеру, спроектированному и построенному между 1959 и 1964 гг. фирмой «Барр энд Страуд» (Глазго), главным математиком которой был О'Берн. «Солидак» был первым компьютером, построенным в Шотландии. О'Берн запрограммировал его так, что он исполнял пьесы в тембре кларнета. В 1967 г. «Барр энд Страуд» выпустила долгоиграющую запись избранных вальсов и контрдансов. (Эта запись ныне безвозвратно утрачена.) О'Берн известен также как автор превосходной книги по занимательной математике [7.11]. Пользуясь случаем, я выражаю ему свою признательность за неоценимую помощь при подготовке этой главы.

В начале XIX в. были изобретены новые методы механического производства мелодий. Итальянский композитор Антонио Калегари использовал две игральные кости для сочинения пьес для фортепиано и арфы. Свою систему он изложил в книге, опубликованной в Венеции в 1801 г. и переведенной впоследствии на французский язык. Около 1805 г. в Лондоне вышла книга «Мелографикон» (без указания автора и даты выпуска) с подзаголовком: «Новое сочинение по теории музыки, позволяющее сочинять бесчисленное множество мелодий, благодаря которому молодые люди, имеющие вкус к поэзии, обретают возможность перелагать свои стихи на музыку для голоса и фортепиано без необходимости научных познаний в этом виде искусства». В «Мелографиконе» было четыре части. В каждой части излагался алгоритм сочинения музыки для стихотворных текстов с определенным метром и схемой рифм. Игральные кости неизвестному автору не понадобились: читателю просто предлагалось выбрать любой такт из группы *A*, любой такт из группы *B* и т.д. до последней буквы алфавита (в пределах соответствующей части).

Фотография другого набора (с игральными костями) для сочинения музыки помещена на вклейке в «Оксфордском компаньоне музыки», но без указания даты, изобретателя и места выпуска. По-видимому, в этом наборе использовались 32 кости, грани которых были особым образом размечены и указывали ноты, интервалы, аккорды, модуляции и т.д. В комплекте были также фигурки людей из слоновой кости, но, как гласит подрисуночная надпись, «назначение их трудно понять».

В 1822 г. в издаваемом в Бостоне музыкальном журнале *The Euterpiad* появилось объявление о новой машине под названием «Калейдакустикон». Тасуя карты, эта машина могла создавать 214 млн. вальсов. «Компониум» – орга́н, исполнявший свои собственные композиции, был изобретен М. Винкелем из Амстердама и вызвал сенсацию на Парижской выставке в 1824 г. Слушатели не могли поверить, что «Компониум» действительно «сочиняет» исполняемые им произведения. Машину обследовали ученые из Французской академии.

«Если в указанный инструмент ввести тему с вариациями, – гласил их отчет, – которую изобретатель предварительно зафиксировал по собственному методу, то он разлагает вариации на части и воспроизводит все их возможные перестановки. Ни одна из варьируемых им мелодий не длится больше минуты. Если предположить, что одна из таких мелодий исполняется непрерывно, то с учетом заложенных в инструменте принципов варьируемости он мог бы исполнять ее, не воспроизводя в точности одну и ту же комбинацию, ... необычайно долго на протяжении столь большого числа лет, что цифрами выразить это число еще можно, хотя ему нет названия в обычном языке».

Отчет, скрепленный подписью физика Жана Б. Био, был опубликован в английском музыкальном журнале *The Harmonicon* (1824, **2**, p. 40–41). Машина Винкеля вдохновила венского изобретателя барона Дж. Джулиани на создание аналогичного устройства, конструкция которого подробно описана в том же томе журнала (р. 198–200).

В 1865 г. в *The Euterpiad* появилось объявление о новой системе механического создания мелодий, названной ее создателем Дж. Клинтоном «Сочинитель кадрилей». Тасуя колоду специальных («сочинительских») карт, пианист мог доставить любителям кадрилей «удовольствие, которого с лихвой хватает на целый вечер, ибо, по самым скромным подсчетам, он может предложить их вниманию 428 000 000 кадрилей».

Математик из Колумбийского университета Дж. Шиллингер в 1940 г. опубликовал разработанную им математическую систему музыкальной композиции в виде отдельной книжечки под названием «Калейдофон» (Шиллингер умер в 1943 г.). По некоторым сведениям Джордж Гершвин, работая над оперой «Порги и Бесс», пользовался системой Шиллингера. В 1940 г. Эйтор Вила-Лобос с помощью той же системы превратил силуэт Нью-Йорка в пьесу для фортепиано (рис. 38). Капитальный труд Л. Даулинга и А. Шоу «Система музыкальной композиции Шиллингера» (в двух томах) был издан в 1941 г. Карлом Фишером [7.12]. В примечании на с. 673 эксцентрического сочинения Шиллингера «Математическая основа искусств» [7.13] говорится о том, что он вынашивал планы создания машин, пишущих музыку, и даже защитил свои замыслы патентами, но ничего не сказано об их воплощении.

В 50-е годы Дж. Р. Пирс и другие применили к музы-

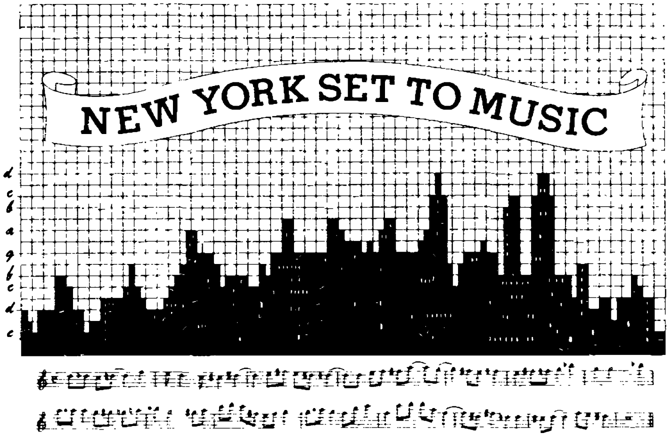


Рис. 38. Силуэт Нью-Йорка, положенный на музыку Э. Вила-Лобосом по системе Шиллингера.

кальной композиции идеи теории информации. В пионерской статье «Теория информации и мелодия» химик Ричард К. Пинкертон [7.1] привел граф, названный им «тривиальным сочинителем мелодий». Бросая монету, чтобы определить выбор ветви при продвижении по этому графу, вы можете сочинять простые мелодии. Большинство из них монотонны, но никак не монотоннее, замечает Пинкертон, чем, например, мелодия песни “A Tisket, a Tasket”.

В 60-е и 70-е годы распространение компьютеров и развитие электронных синтезаторов, способных порождать звучания самых различных, в том числе и весьма необычных, тембровых окрасок, открыли новую эру в машинной композиции музыки. Современные компьютерные программы по своим возможностям далеко превосходят грубые устройства, применявшиеся для сочинения мелодий в далеком прошлом. Предположим, что кто-то захотел сочинить мелодию в стиле Шопена. Он производит с помощью компьютера анализ всех произведений, когда-либо написанных Шопеном, и заносит в память компьютера набор «вероятностей перехода», то есть величин, показывающих, с какой вероятностью в мелодиях Шопена за одной, двумя, тремя и т. д. нотами следует та или иная другая нота. Разумеется, следует иметь в виду характер мелодии, которую хочет сочинить наш композитор, ритмы, положение каждой ноты в мелодии, общий мелодический рисунок и многое другое. Короче говоря, компьютер производит случайный выбор в рамках заданной общей структуры с учетом правил и весов, определяемых характерными для Шопена переходами. В результате мы получаем мелодию, по существу представляющую собой звуковой эквивалент цепи Маркова, но ранее неизвестную и действительно напоминающую мелодии Шопена. Компьютер может быстро «сочинить» несколько сотен таких пьес, из которых вам останется лишь выбрать наиболее приятную для вашего слуха.

Современная литература по компьютерной композиции растет не по дням, а по часам, причем речь идет не только о сочинении музыки в традиционных стилях, но и

SIMP-ТАБЛИЦА А	SIMP-ТАБЛИЦА Б
1 В частности	1 гиперповерхность в пространстве состояний
2 С другой стороны,	2 постоянный поток эффективной информации
3 Однако	3 отличительная особенность выбранных критериев
4 Аналогично,	4 инициация развития критической подсистемы
5 Таким образом,	5 комплексная программа испытаний
6 Нетрудно видеть, что	6 траектория в конфигурационном пространстве
7 Как показывают приведенные выше соображения,	7 нагруженный несущий элемент
8 Например,	8 включение дополнительных внутренних связей
9 Итак,	9 независимый принцип функционирования
0 Что касается нашей конкретной задачи, то	0 первичное отношение между подсистемной и технологией подсистемы

Рис. 39. Генератор общеупотребительных (псевдо) научных фраз фирмы «Хониуэлл», работающий по системе SIMP (упрощенной интегральной модульной прозы).

о музыке, в полной мере использующей способность компьютера синтезировать самые причудливые звуки, даже отдаленно не напоминающие звучание известных инструментов. Микротоны, таинственные, непривычные тембры, невероятно сложные ритмы и гармонии – все это легко осуществимо с помощью компьютера. Компьютер – это универсальный музыкальный инструмент. В принципе он может воспроизвести любой звук, который только способно воспринять человеческое ухо. Кроме того, компьютер можно запрограммировать так, чтобы он, сочиняя музыку, одновременно исполнял ее.

Какой же вывод можно сделать из всего сказанного? Компьютеры «сочиняют» довольно посредственную му-

SIMP-ТАБЛИЦА В	SIMP-ТАБЛИЦА Г
1 находит широкое применение и требует	1 более тонкой аппаратурной реализации.
2 сводит до минимума затраты при условии	2 оборудования четвертого поколения.
3 указывает на пределы применимости	3 тестирования четвертого поколения
4 свидетельствует о необходимости более тщательного анализа	4 проектирования на основе системного подхода.
5 чрезвычайно усложняется, если не принять во внимание условие	5 предварительного отбора данных по определенным критериям.
6 подразумевает более основательное использование теории	6 гибкого, изменяющегося в зависимости от условий описания.
7 открывает весьма интересные перспективы	7 интеграции и специализации.
8 признает значимость других систем и необходимость	8 более строгой стандартизации основных модулей.
9 позволяет эффективно использовать	9 функционирования в режиме дискретного времени.
0 требует применения	

зыку, лишенную «игры» и свободного дыхания, не остающуюся в памяти, хотя иногда их музыка бывает написана в манере какого-нибудь выдающегося композитора. Однако до сих пор никому еще не удавалось найти алгоритм, который порождал бы простую мелодию, столь же приятную для культурных людей, как, скажем, одна из традиционных популярных песен. Мы просто не знаем, какое волшебство происходит в мозгу композитора, создающего замечательную мелодию. Более того, мы даже не знаем, в какой мере достоинства, признаваемые за той или иной мелодией, связаны с нашим культурным фоном или даже с наследственными чертами. Но одно все же можно сказать, не вдаваясь в более глубокий анализ: хорошая мелодия – это смесь предсказуемого и элементов неожиданности. Но в каких пропорциях составляется эта смесь и как она достигается, неизвестно никому, даже самим композиторам.

О'Берн обратил мое внимание на то, как сильно многие системы музыкальной композиции напоминают генератор фраз обиходного научного (или псевдонаучного) жаргона (рис. 39). Перед вами такой генератор, разработанный фирмой «Хониуэлл Инкорпорейтед». Выберите любое четырехзначное число, например 8751. Прочтите фразу 8 из таблицы (модуля) А, фразу 7 из таблицы Б, фразу 5 из таблицы В и фразу 1 из таблицы Г и вы получите предложение на языке SIMP (Simplified Integrated Modular Prose – упрощенная интегрированная модульная проза). «Добавив еще несколько четырехзначных чисел, вы получите целый абзац на языке SIMP. Освоив основную технику, вы ощутите потенциальное богатство языка SIMP, переставляя модули в последовательности ГАВБ, БАВГ или АГВБ. Возможно, в этих более сложных конфигурациях кое-где вам придется поставить дополнительную запятую».

SIMP звучит очень похоже на подлинную техническую прозу, но при более внимательном анализе обнаруживается, что кое-чего в ней все же недостает. Компьютерные мелодии менее бессодержательны, они скорее напоминают случайные абстрактные узоры калейдоскопа, но все же им недостает чего-то существенного (хотя никто не может сказать, чего именно). Сочинить хорошую простую мелодию гораздо труднее, чем оркестровое произведение в авангардистской манере, настолько перегруженное случайными звукосочетаниями и диссонансами, что невольно затрудняешься повторить слова, некогда сказанные Марком Твеном (или Биллом Наем?) о музыке Вагнера: «Она лучше, чем звучит».

Когда композитор сочиняет мелодию, которая становится такой же популярной, как... (в этот пробел вы можете вставить название вашей любимой песни), происходит колоссальный прорыв вперед. Произойдет ли когда-нибудь нечто подобное с компьютером? Если да, то когда? Эксперты расходятся во мнениях относительно того, сможет ли компьютер когда-нибудь создать великую поэму, нарисовать гениальную картину или сыграть шахматную партию на уровне гроссмейстера.

ДОПОЛНЕНИЕ

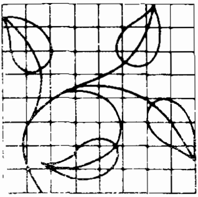
Компания «Карусель», выпустившая набор для создания мелодий по системе Моцарта с помощью игральной кости, позднее выпустила аналогичный набор под названием «Сочинитель мелодий с помощью игральной кости Скотта Джоплина». Пользуясь теми же таблицами тактов и игральной костью, желающие могли без счета производить мелодии в стиле Скотта Джоплина.

В 1977 г. математик Дж. Браун издал в Англии интересную книгу – «Справочник по мелодиям и музыкальным темам» Дéниса Парсонса [7.14]. Парсонс обнаружил, что почти каждую мелодию можно отождествить до смешного простым методом. Поставим звездочку вместо первой ноты. Если вторая нота выше первой, то вслед за звездочкой поставим букву *U* (up – вверх), если ниже, то поставим букву *D* (down – вниз), а если вторая нота по высоте такая же, как первая, то поставим букву *R* (repeat – повторить). Проделаем то же самое и со всеми последующими нотами, пока не получим последовательность длиной до 16 букв. Этой последовательности оказывается вполне достаточно, чтобы идентифицировать мелодию. Например, последовательность **UDDUUUU* позволяет безошибочно определить мелодию известной песни «Белое Рождество». В книге Парсонса в алфавитном порядке перечисляются около 15000 различных последовательностей (соответствующие музыкальные произведения разделены на две группы – классических и популярных). Рядом с каждой последовательностью указаны название произведения, композитор и дата создания.

Идея генератора случайных фраз (случайных выборок слов и фраз для создания литературных произведений в стихах и прозе) не нова. В «Рациональных развлечениях» – четырехтомном сочинении Г. Хупера (4-е издание вышло в Лондоне в 1794 г.) – один раздел второго тома был посвящен изложению метода, позволяющего с помощью бросания игральной кости писать латинские вирши. Сам метод намного старше. Аналогичная рандомизация используется в современных компьютерных программах, предназначенных для сочинения «поэм» и различного рода подражательной прозы.

Учителя начальной школы используют аналогичный прием (они называют его «нанизыванием») при обучении чтению. Детям предлагаются простые схемы – предложения с пропусками, в которые они вставляют слова. В номере *New York Times Book Review* от 4 июня 1978 г. был опубликован составленный Р. Хоганом список наиболее ходовых слов, позволяющий каждому желающему написать впечатляющую литературно-критическую статью. (По-видимому, кому-нибудь придется взять на себя составление аналогичного словаря для критиков, специализирующихся по изобразительному искусству, если только такой словарь уже не составлен.) Журнал *Mad Magazine* (October 1974) опубликовал в 12 столбцах составленный Ф. Джекобсом словарь наиболее употребительных слов и фраз для авторов рассказов, публикуемых в газетах. Т. Кох предложил там же (March 1982) аналогичное пособие для авторов юмористических произведений, а Джекобс (September 1982) – словарь и перечень наиболее употребительных фраз для авторов песен в стиле «кантри» или «дикого Запада».

О том, как Р. Фосс использовал введенное Бенуа Мандельбротом понятие фрактала для компьютерной композиции музыки, я рассказал в *Scientific American* (April 1978). Там же приведены и все ссылки на литературу.



ГЛАВА 8

АНАМОРФНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Анаморфное изображение – термин, незнакомый большинству людей; более того, он незнаком и большинству художников. Происходит он от греческих *ana* – снова и *morphē* – форма и означает реалистическое изображение, настолько сильно деформированное проективным преобразованием, что оно становится трудноузнаваемым. Деформацию можно компенсировать, как бы «сформировав заново» изображение, если такую искаженную картину рассматривать под некоторым углом к его плоскости или в надлежаще искривленном зеркале. Таким зеркалом, называемым анаморфоскопом, обычно служит полированный цилиндр или конус. Появление неискаженного изображения столь неожиданно, что те, кто наблюдает подобный эффект впервые, как правило, вскрикивают от удивления.

Дойдя до этого места, читатель непременно захочет остановиться и изготовить самодельный цилиндрический анаморфоскоп, чтобы с его помощью рассматривать приводимые далее анаморфные изображения. Лучший результат получается в том случае, если основание цилиндра точно совпадает с кругом на рисунке. Однако основание цилиндра может быть немного больше или меньше этого круга. В качестве анаморфоскопа можно использовать любую отмытую от этикетки небольшую металлическую консервную банку. Подойдет также прозрачная цилиндрическая бутылочка, если внутрь ее вставить свернутую в цилиндр черную бумагу. Еще лучше взять отрезок хромированной водопроводной трубы. Алюминиевая фольга недостаточно гладка и жестка, а из синтетической пленки с блестящим металлическим покрытием можно изготовить великолепный анаморфоскоп, обернув ее вокруг подходящего по размерам цилиндра. Из этого же материала удобно сделать и конический анаморфоскоп.

На заре эпохи Возрождения европейские художники, только начинавшие овладевать перспективой, были увлечены простейшей разновидностью анаморфного изображения: растянутыми картинами, которые при наблюдении под определенным углом давали правильное (неискаженное) изображение. Первые три известных примера такого рода изображений встречаются в записных книжках Леонардо да Винчи, и это не удивительно, так как именно ему принадлежат первые существенные достижения в геометрической перспективе. Разумеется, все поверхности, рассматриваемые под косыми углами, анаморфно искажаются, хотя обычно мы не сознаем этого. Дверь, видимая под некоторым углом, выглядит как трапеция, но наш мозг, опираясь на опыт, воспринимает ее как наклоненный прямоугольник. Людям, не привыкшим смотреть телепередачи, изображенные на экране телевизора, если они сидят сбоку, кажется вытянутым. Тем же из нас, кто привык к телевизору, изображение на экране кажется неискаженным, так как мы научились вносить поправки. Когда художники эпохи Возрождения научились придавать плоским изображениям на холсте иллюзию глубины, они одновременно открыли и обратное: изображение, растянутое по тем же законам перспективы, обретает гротескную форму.

Наиболее известным примером анаморфного изображения служит фрагмент картины Ханса Холбейна «Испанские послы» (1533) (рис. 40). Зажмурив один глаз и наклоняя страницу с репродукцией картины от себя так, чтобы левый нижний угол ее был направлен вам в открытый глаз и находился от него на расстоянии около 15 см, вы увидите у ног послов череп. Увидеть череп можно и другим способом: если расположить зеркало на высоте около 7–8 см над левым нижним углом страницы и, глядя в зеркало обоими глазами, наклонять его к себе до тех пор, пока не появится изображение черепа в нормальном виде. По-видимому, картина Холбейна должна была висеть у верхнего конца лестницы, и вид возникающего на глазах черепа должен был поражать воображение тех, кто поднимался по ней.

Другой пример косого анаморфного изображения —

Рис. 40. Картина Ханса Хольбейна «Испанские послы» с косым анаморфным изображением черепа.

старинная загадочная картинка, некогда опубликованная в газете Сэмом Лойдом (рис. 41). В ней «запрятан» портрет Джорджа Вашингтона в зрелые годы. Можете ли вы обнаружить этот портрет? (На этой же картинке изображена головоломка Сэма Лойда: квадратный пирог Вашингтона требуется разрезать на 6 квадратных кусков не обязательно одинаковых размеров.) «Косые изображения» такого рода иногда встречаются в детских книжках и в рекламных объявлениях. Порой текст бывает настолько растянут, что прочесть его удается, только держа страницу под косым углом к лучу зрения. Этот же метод иногда используется в дорожных знаках: слово «СТОП» располагается под таким углом, что его в нормальном

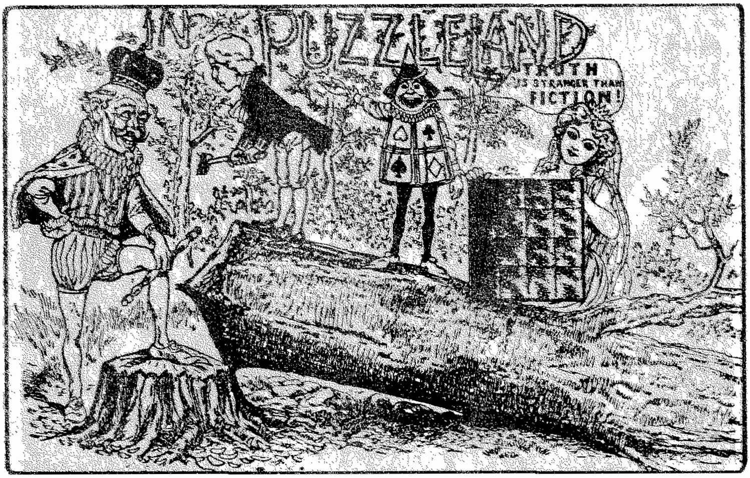


Рис. 41. Загадочная картинка Сэма Лойда со скрытым анаморфным изображением.

ракурсе видит только водитель, приближающийся к перекрестку.

Геометрический метод построения косых изображений был подробно изложен в первом большом трактате об анаморфных рисунках «Курьезная перспектива» Жана Ф. Нисерона [8.11]. Сначала картину расчерчивают на квадратные клетки. Затем матрицу растягивают, превращая ее в трапецию, после чего художник копирует картину, заполняя трапециевидные клетки и тщательно следя за возможно более точным соответствием содержимого каждой растянутой клетки содержимому квадратного оригинала. Чем мельче разбиение исходной картины на квадратные клетки, тем точнее копия.

Точная форма трапециевидной матрицы зависит от положения глаза, когда он воспринимает форму как обычный квадрат. Полная трехмерная структура достаточно сложна, но оказывается, что существует простой способ построения трапеции, если желательное положение глаза задано. Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8 единицам длины, расчерченный на 64 квадратные клетки. Мы хотим исказить большой квадрат так, чтобы он оставался квадратом для глаза, находящегося на расстоянии 25 единиц от середины верхнего края картины и на расстоянии 7 единиц над плоскостью картины (рис. 42). Построение производится следующим образом. Пусть XY — ширина большого квадрата и FB — перпендикуляр, восстановленный из середины XY, длиной 25 единиц, BE — перпендикуляр к FB длиной 7 единиц. Проведем отрезки XB, YB и YE. Тем самым мы получим отрезок CD — нижнее основание трапеции. Остальные линии, проведенные из точек B и E к концам единичных отрезков на XY, определяют те линии, которые должны быть проведены к XY, чтобы завершить разбиение искаженной матрицы на 64 трапециевидные клетки. Ни точка E, ни точка B не указывают положение глаза. Глаз находится на расстоянии 7 единиц над горизонтальной плоскостью бумаги. Перпендикуляр, опущенный из глаза, пересекает отрезок FB в точке G. Построение основано на предположении о том, что точка G находится от точки F на расстоянии по крайней мере 8 единиц.

Другой способ построения анаморфного изображения состоит в том, чтобы, зажмурив один глаз, «косо смотреть» на бумагу другим глазом и рисовать изображение так, чтобы оно выглядело неискаженным. Этот способ более удобен, чем рисование с помощью зеркала, так как в зеркале ваша рука движется вдоль одной из координатных осей в направлении, противоположном тому, в котором ваша рука движется по бумаге, поэтому

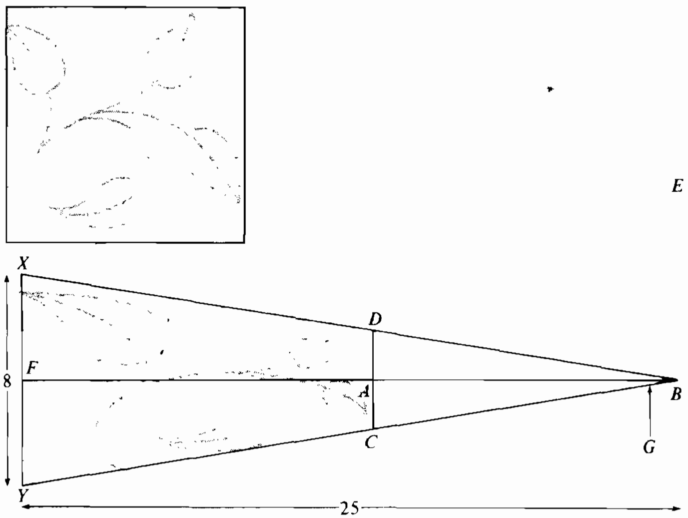


Рис. 42. Геометрическое построение косых анаморфных изображений.

вашим рефлексам трудно справляться со столь двойственной задачей. Простой фотографический метод построения косых анаморфных изображений состоит в проецировании нормального изображения (с помощью фотоувеличителя или проектора для слайдов) на бумагу с таким расчетом, чтобы лучи падали на экран под тем углом, под которым следует рассматривать анаморфное изображение.

Хотя нет никаких данных, позволяющих утверждать, что древние греки забавлялись анаморфными изображениями, античные зодчие иногда умышленно деформировали колонны храмов, чтобы компенсировать искажения, которые возникают, когда кто-нибудь рассматривает здание с близкого расстояния перед фронтоном. Из аналогичных соображений художники эпохи Возрождения деформировали фрески: те, кто рассматривали их вблизи, видели менее искаженное изображение. «Косые» картины иногда скрыто вписывались в обычную стенную роспись или растягивались вдоль стен коридоров с тем, чтобы видеть их можно было при входе или при выходе. Нередко косые изображения помещали в короба с отверстием в стенке, позволявшим рассматривать их под нужным углом.

В XVII и XVIII вв. анаморфные картинки для цилиндрических и конических зеркал были модными забавами и в Европе, и на Востоке. Обычно их выполняли неизвестные художники. В продажу они, как правило, поступали в комплекте с изящным анаморфоскопом. Иногда анаморфные изображения скрывали политический протест, но встречались среди них и порнографические или непристойные изображения. Примеры эротических анаморфных изображений приведены в книге «Китайское эротическое искусство» М. Бэрдли и др. [8.12]. Эти наиболее древние из известных образцов анаморфной живописи ныне являются предметом вожделения собирателей. В декабре 1973 г. 10 картин маслом с анаморфными цилиндрическими и коническими изображениями работы французских художников XVIII в. были проданы за 10 800 долларов на аукционе в Нью-Йорке известной фирмой «Сотби». По нынешним ценам такое приобретение следует считать выгодным. Херберт Танненбаум, торговец предметами искусства из Нью-Йорка, в 1939 г. обнаружил эти картины в одной антикварной лавке в Амстердаме и приобрел, даже не зная, что это такое. Одна из

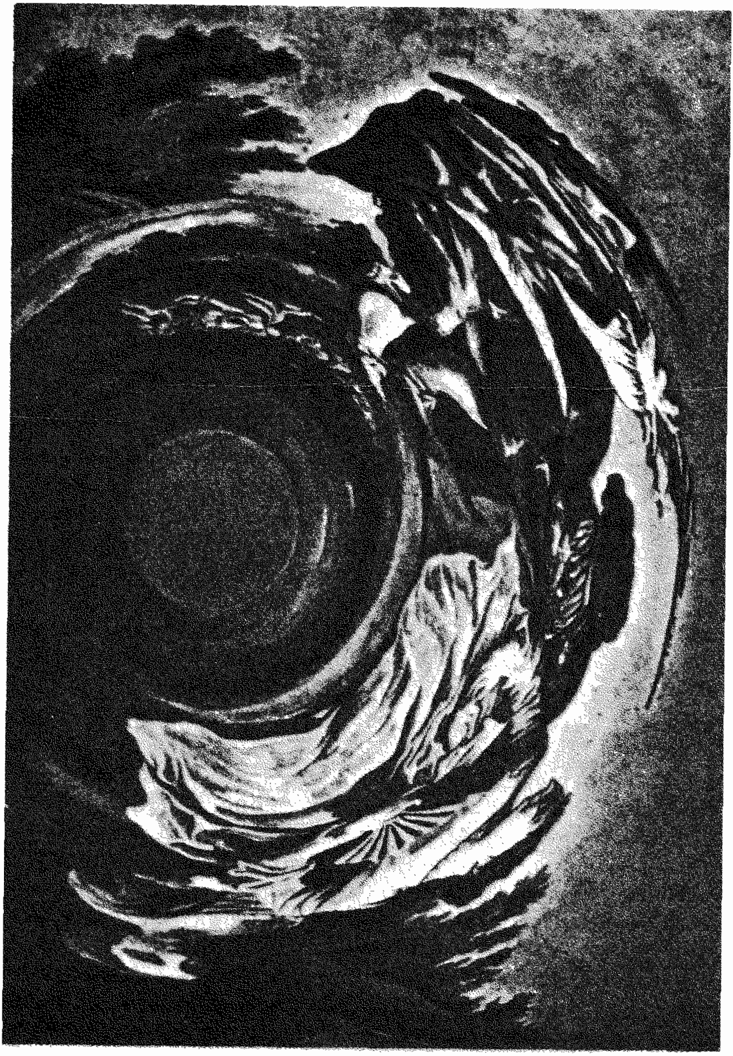


Рис. 43. «С нежной песней» – цилиндрическое анаморфное изображение (картина маслом из коллекции Танненбаума).

картин, входивших в коллекцию Танненбаума, изображена на рис. 43.

Изображение, которое вы видите на рис. 44, при

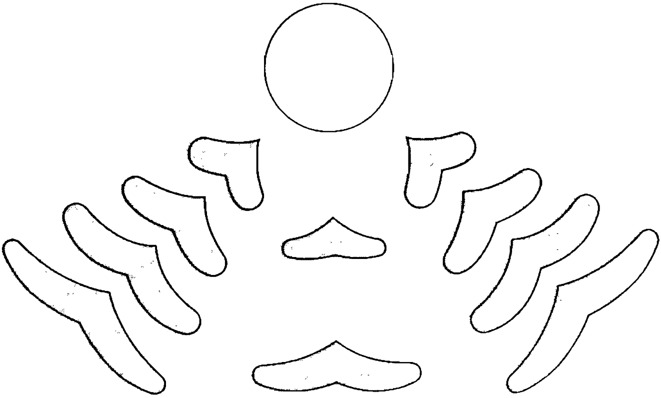


Рис. 44. Цилиндрическое анаморфное изображение.

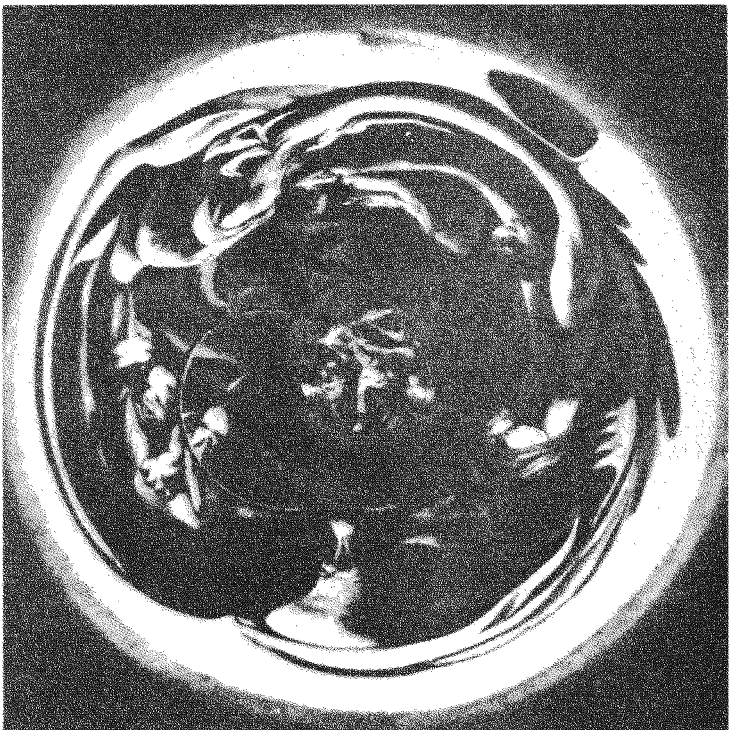


Рис. 45. «Венера и Адонис» – коническое анаморфное изображение (картина маслом). Фото А. Ньюмана.

отражении в цилиндрическом зеркале превращается в десятку червей.

Чтобы изготовить цилиндрический анаморфоскоп, можно вырезать кружок из пленки с металлическим покрытием, разрезать его по радиусу и, свернув в конус («воронку»), склеить налегающие края или скрепить их липкой лентой. Изображение на рис. 45 предназначено для рассматривания в коническом зеркале, радиус диска, из которого изготовлен конус, составляет около 2,5 см. Размер перекрывающихся секторов следует подобрать так, чтобы основание конуса совпало с кружком на рис. 45. Поставьте конус на рисунок и рассматривайте отражение в коническом зеркале сверху одним глазом. Восстановленное изображение невелико: оно целиком умещается в круге, на который проектируется при разглядывании сверху конус. Если нажать на вершину конуса пальцем или скрепкой, то конус станет более жестким и зеркальное отражение будет более четким. Идеальное изображение вы получите в том случае, если предельно точно изготовите твердый конус с гладкой зеркальной поверхностью.

Как и в случае косых изображений, деформировать картину для рассматривания в цилиндрическом или коническом зеркале можно тремя способами. На рис. 46 и 47 воспроизведены геометрические построения из упоминавшегося выше трактата Нисерона. Методы точного построения искаженной матрицы достаточно сложны; интересующемуся читателю лучше всего справиться о деталях по трактату Нисерона.

Обратите внимание на то, что отражение в коническом зеркале буквально выворачивает изображение «наизнанку»: точка A, находившаяся в центре оригинала на рис. 47, оказывается на границе (окружности) искаженного рисунка, а исходная граничная окружность переходит во внутреннюю окружность искаженного изображения.

Когда Сальвадор Дали создавал серию эротических анаморфных картин (репродукции этих картин продавались в Швейцарии вместе с цилиндрическим анаморфоскопом), он просто смотрел в цилиндрическое зеркало и рисовал то, что видел, на плоскости, на которую опиралось зеркало. Как уже говорилось, рисовать так отнюдь не легко, так как в зеркале ваша рука движется в противоположную сторону: вы видите в зеркале, что

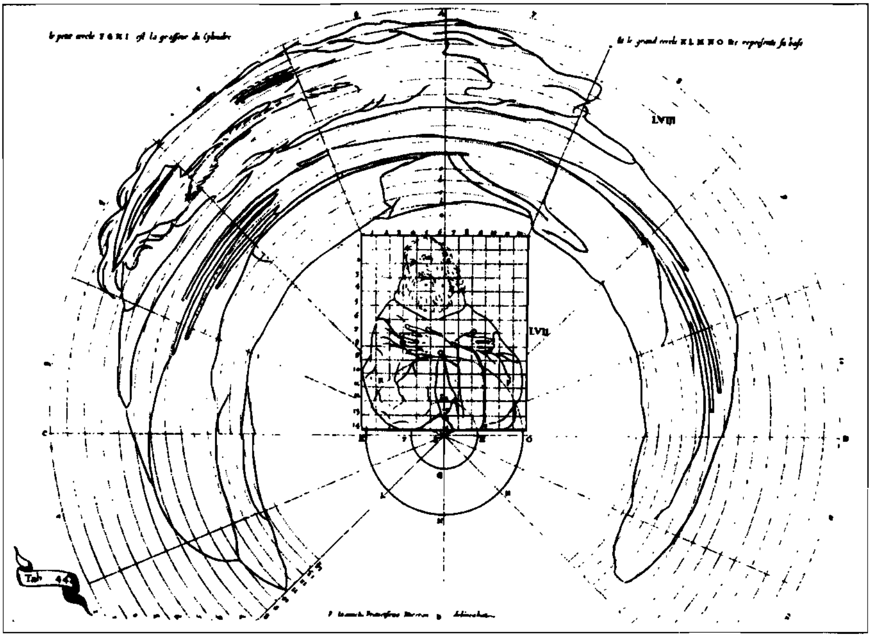


Рис. 46. Построение цилиндрического анаморфного изображения по Жану Ф. Нисерон

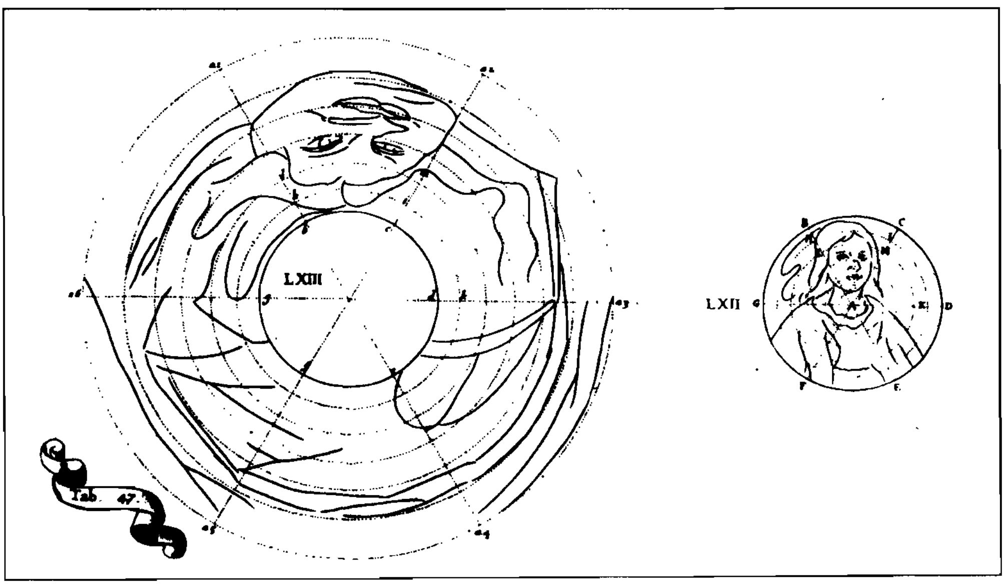


Рис. 48. Цилиндрическая анаморфная фотография Алена Фонтена.

ваша рука движется снизу вверх, а для этого в действительности она должна двигаться сверху вниз.

Грубые анаморфные фотоснимки можно получить, обернув негатив наполовину вокруг прозрачного цилиндра и пропуская свет под косым углом сквозь цилиндр из точечного источника вне и позади цилиндра, чтобы спроецировать картину на фотобумагу, подложенную под основание цилиндра. Снимки более высокого качества получают, проецируя картину на точно изготовленное цилиндрическое зеркало с тем, чтобы она отразилась на фотобумагу, подложенную под основание зеркального цилиндра (рис. 48). Для проецирования можно воспользоваться увеличителем или 35-миллиметровым проектором для слайдов с диафрагмой при линзах, наводя на резкость по изображению на мольберте. Весь свет от увеличителя, который не падает непосредственно на цилиндр, необходимо экранировать черным картоном с прямоугольным отверстием. Аналогичным образом получают и снимки изображений для конических зеркал. Коническое зеркало должно быть большим (около 15 см в диаметре). Картина проецируется на конус сверху через круглое отверстие в черном экране, не пропускающем лишний свет.

Фотографы называют анаморфной любую линзу, растягивающую или сжимающую изображение вдоль одной координатной оси, и анаморфным – деформированное изображение, которое дает такая линза. В 1953 г. фирма «XX век – Фокс» ввела в практику кинопроката широкий экран и выпустила первый широкоформатный фильм «Халат». Анаморфные линзы съемочного аппарата сжали широкоформатное изображение на стандартную 35-миллиметровую пленку, а анаморфные линзы проектора растянули изображение на широкий экран. Большинство современных кинокартин снимаются и проецируются на экран с помощью сложных систем анаморфных линз. Аналогичные системы позволяют приспособить широкоэкранные кинокартины к возможностям видеозаписи.

Психологи, занимающиеся изучением восприятия, экспериментировали с трехмерными анаморфными моделями стульев, столов и других объектов. При рассматривании под определенным углом искаженные модели казались нормальными. Комната Эймса – это сильно деформированная комната, которая кажется нормальной, если ее разглядывать через небольшое отверстие в стене. Человек, перемещающийся по такой комнате, кажется наблюдателю то увеличивающимся, то уменьшающимся – см. [8.13]. Зодчие XVII в. не знали комнаты Эймса, но иногда позволяли себе поиграть с ложной перспективой. Самый удивительный пример использования ложной перспективы, который и поныне можно видеть во дворце Спада в Риме, – анаморфная аркада, спроектированная Франческо Борромини около 1638 г. Посетителю кажется, что он видит длинный коридор, у выхода из которого за его пределами стоит большая статуя. В действительности длина деформированного коридора всего лишь 8,5 м, а высота статуи около 90 см. Иллюзия достигается за счет того, что высота входа 5,7 м, а ширина 3 м, в то время как высота выхода 2,4 м, а ширина 1 м (этот трюк хорошо знаком тем, кто проектирует аппаратуру для эстрадных фокусников).

Существует множество других видов плоских анаморфных изображений: картины, которые нужно отражать в зеркальных сферах, определенным образом расположенных n-сторонних пирамидах и других многогранниках, и картины, предназначенные для рассматривания сквозь искажающие линзы различных типов. Волнистые зеркала в комнатах смеха дают анаморфные изображения. А что такое хорошая карикатура, как не сложная система анаморфных искажений, позволяющих нашему разуму считать портрет более похожим на оригинал, чем сам оригинал похож на себя? Существуют и другие, в определенном смысле экстремальные, способы, позволяющие до неузнаваемости трансформировать картину, а потом снова восстановить ее (упомянем лишь голограмму или передачу телевизионного изображения), но термин «анаморфные» лучше всего сохранить за преобразованиями координат, в особенности тех трех типов, которые были рассмотрены нами выше. Картографы не используют термин «анаморфный», хотя многие способы, которыми они проецируют земную поверхность на плоскость, – цилиндрическая, коническая и другие проекции, представляют собой преобразования координат, тесно связанные с анаморфными изображениями.

Ботаники используют термин «анаморфный» для обозначения тех радикальных изменений, которые претерпевают некоторые виды растений в различной окружающей среде. Зоологи понимают под анаморфными изменениями эволюционные модификации форм животных. Д'Арси У. Томсон посвятил целую главу своего классического труда «О росте и формах» [8.14], снабдив ее большим количеством иллюстраций, анаморфным преобразованиям типа рассмотренных нами косых анаморфизмов или отражений в цилиндрическом зеркале, позволяющих переводить рыб одного вида в другой, казалось бы, совсем непохожий. Череп человека при анаморфном преобразовании, мало отличающемся от тождественного, переходит в череп шимпанзе или павиана.

Способность нашей зрительной системы исправлять анаморфные искажения наводит на мысль о том, что при распознавании зрительных образов основную роль играют топологически инвариантные, а не метрические свойства. Наша зрительная система не только использует перевернутые изображения на сетчатой оболочке глаз для создания у нас ощущения прямого (а не перевернутого) трехмерного внешнего мира, но и корректирует анаморфные искажения, вносимые роговицей и хрусталиком. Человек, страдающий сильно выраженным астигматизмом, впервые надев очки, исправляющие дефект его зрения, воспринимает мир искаженным, так как его мозг продолжает по инерции вносить поправки на старые искажения. Требуется несколько недель, прежде чем человек начинает видеть мир нормально. Проводились эксперименты, в которых подопытные люди носили специальные очки, вызывавшие в поле зрения сильные топологические преобразования. Через несколько недель после начала эксперимента головные боли у подопытных проходили, и они снова начинали видеть мир нормально. Когда же по завершении эксперимента подопытные сняли очки, мир снова стал казаться им деформированным, хотя, к счастью, привыкание длилось недолго.

Гамлет советовал некоторым актерам держать зеркало в соответствии с природой. Какое оно, зеркало гениальной пьесы, романа, произведения живописи или кинофильма – искажающее или, быть может, это волшебный анаморфоскоп, придающий безобразному, бесформенному миру приятный для глаза вид? Являются ли философские системы и религии, даже воззрения последователей каких-нибудь экзотических мелких культов анаморфными искажениями истины или их также надлежит считать анаморфоскопами, призванными придать смысл бессмысленной реальности? «Иисус возносил молитвы, дабы исправить анаморфоз Бога», – писал Томас Джефферсон.

Для постороннего наблюдателя любая система взглядов и убеждений представляется искаженной истиной, напоминающей гротескное анаморфное изображение. Для последователя этой системы, видящего мир в особым образом искривленном зеркале своей системы восприятий, все выглядит нормально. Существует ли какая-нибудь метафизическая система, которая отражала бы мир, как плоское, прямо стоящее зеркало? Увы! Каждый истинно верующий убежден, что именно его анаморфоскоп таков.

ОТВЕТЫ

Хотя никаких задач и домашних заданий в главе об анаморфных изображениях не было, на рис. 41 осталась нерешенной задача на разрезание. В свое время в журнальной публикации я не привел ее решения и хочу сделать это теперь. Перед нами одна из шуток Лойда: неявно предполагается, что квадрат нужно разделить вдоль тех самых линий, которыми он расчерчен. А вот как решает эту задачу Сэм Лойд в своей знаменитой «Энциклопедии 5000 головоломок» [8.15]: «Разрезать квадрат на 6 квадратов проще всего, если предварительно разметить его на 9 одинаковых квадратов. Тогда самый большой из 6 квадратов будет состоять из 4 малых квадратов, и останется еще 5 малых квадратов».

Решение Сэма Лойда не только простейшее, но и единственное. Подробное обсуждение общей задачи о разрезании квадратов на меньшие квадраты (не обязательно одинакового размера) см. в [8.16], гл. «Стеганое одеяло миссис Перкинс».

ГЛАВА 9

РЕЗИНОВЫЙ ЖГУТ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

1. Резиновый жгут. Червяк находится на одном конце резинового жгута, который может неограниченно растягиваться (рис. 49). Первоначально жгут имеет в длину ровно 1 км. Червяк ползет к другому концу жгута с постоянной скоростью 1 см/с. В конце каждой секунды жгут скачком удлиняется на 1 км. Таким образом, к концу первой секунды червяк проползает 1 см, а длина резинового жгута становится равной 2 км. К концу второй секунды червяк проползает еще 1 см, а длина жгута становится равной 3 км, и т. д.

Жгут растягивается равномерно, как резиновая лента. Растягивается только жгут: единицы длины и времени

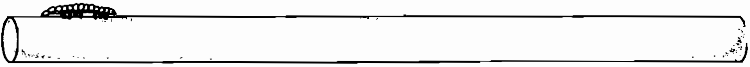


Рис. 49. Червяк, ползущий по растягивающемуся резиновому жгуту.

остаются неизменными. Наш «червяк», по предположению, идеальный: он имеет точечные размеры и не подвержен смерти. Резиновый жгут также идеален: его можно растягивать сколько угодно. Доберется ли червяк когда-нибудь до другого конца резинового жгута? Если да, то через сколько времени и какой длины будет жгут к тому моменту, когда червяк финиширует? Эту замечательную задачу в духе парадокса Зенона об Ахилле и черепахе придумал Д. Уилкин из Новой Каледонии. Впервые она была опубликована в декабре 1972 г. в разделе занимательных задач французского ежемесячника *Science et Vie*, который с присущим ему блеском ведет Пьер Берлокен.

2. Печать с древнешотландскими письменами. Феликс Кеннастон, персонаж одного из замечательных романов

Рис. 50. Печать древней Скотеи.

Джеймса Б. Кабелла «Соль шутки», созерцая половину печати с древнешотландскими письменами, впадал в гипнотический транс, сопровождаемый видениями. В конце романа Кеннастон обнаруживает, что печать с таинственными письменами не что иное, как сломанная крышка от сосуда для взбивания мороженого, а письмена «выдуманы кем-то просто так, из головы». Таких знаков нет ни в одном алфавите. Это лишенные всякого смысла «кружочки, точки и дуги». Художник, придумавший их, нарисовал поперек крышки трещину, чтобы стилизовать ее под старину.

Изображение «печати» приводится во всех изданиях книги Кабелла. Вы видите эту печать на рис. 50. Помню, я много лет ломал над ней голову в тщетных попытках расшифровать надпись. Придуманная самим Кабеллом, она отнюдь не является шифром. Можете ли вы прочитать ее?

Большинство литературных критиков не жалуют Кабелла своей благосклонностью, но у него есть группа преданных почитателей, которые поддерживают «Общество Джеймса Бранча Кабелла» и официальный орган этого общества – журнал *Kalki*. Именно из его шестого выпуска за 1968 г. я и узнал тайну «древней» печати.

3. Выбор целых чисел. Два математика пьют пиво. После того как официант приносит им по бокалу, приятели выясняют, кому из них платить. Для этого каждый записывает на листке бумаги любое целое число. Числа сравнивают. Тот, кто записал большее число, платит за двоих, если его число отличается от другого более чем на 1. Если же разность между числами равна 1, то платит за двоих, причем два раза подряд, тот, кто записал меньшее число. Если оказывается, что оба приятеля выбрали одно и то же число, то они задумывают новые числа.

В «безалкогольном» варианте та же игра выглядит так. Тот, кто записывает меньшее число, получает одно очко, если разность чисел не меньше 2. Если разность чисел равна 1, то игрок, записавший меньшее число, получает два очка. Например, если выбраны числа 12 и 20, то выбравший число 12 получает одно очко. Если выбраны числа 12 и 13, то выбравший число 12 получает два очка.

Игра честная, но какая стратегия оптимальна в том смысле, что ни одна другая стратегия не может победить ее в длинной серии игр, а если следовать любой другой стратегии, то всегда найдется контрстратегия, позволяющая одержать над ней победу.

На этот вопрос существует удивительный ответ. За недостатком места я не смогу привести здесь доказательство его правильности, но укажу оптимальную стратегию и те работы, в которых желающие смогут найти доказательство. Эту игру придумали Н. Мендельсон и И. Капланский, а обратил мое внимание на нее П. Халмош.

4. Три окружности. Начертите на листке бумаги в различных местах три непересекающиеся окружности трех различных размеров. К каждой паре окружностей проведите 2 общие касательные. Если прежде вам не доводилось встречать эту красивую теорему, то вы будете удивлены, обнаружив, что точки пересечения 3 пар общих касательных к окружностям лежат на одной прямой (рис. 51).

Как и следовало ожидать, теорема о трех окружностях может быть доказана многими различными способами,

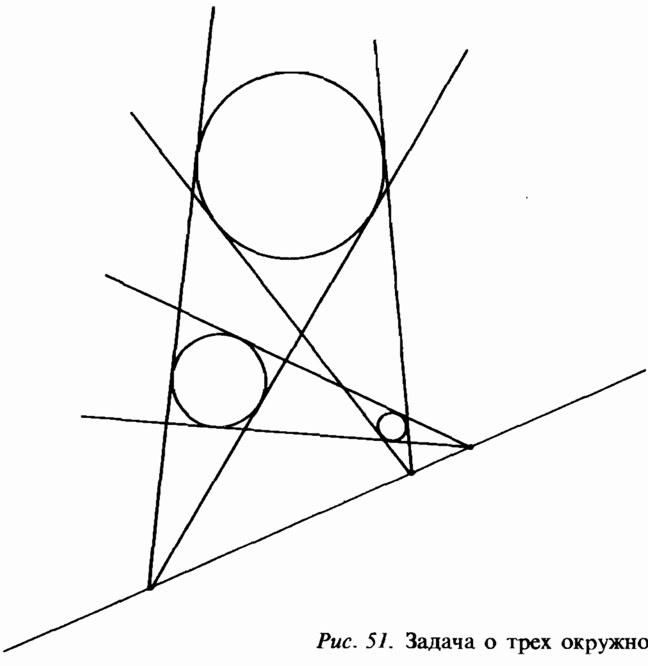


Рис. 51. Задача о трех окружностях.

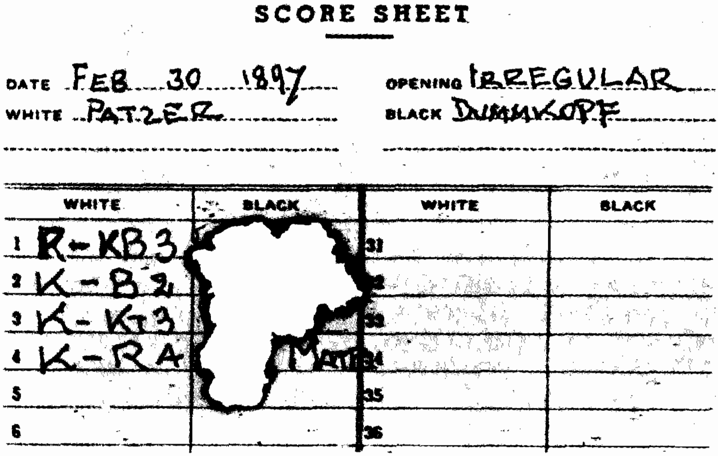


Рис. 52. Какими были ходы черных?

если на чертеже провести некоторые вспомогательные линии. В журнале *Popular Computing* (December 1974) сообщалось, что теорема о трех окружностях допускает изящное доказательство, если от двумерной плоскости перейти к ее трехмерному обобщению. Ссылаясь на старую книгу, в которой они нашли задачу, издатели журнала сообщают, что когда теорему о трех окружностях показали Дж. Свиту, профессору механики Корнеллского университета, скончавшемуся в 1916 г., тот некоторое время смотрел на чертеж, а потом заявил: «Да это же совершенно самоочевидно!»

Какое изящное доказательство усмотрел профессор Свит?

5. Поврежденный бланк. На рис. 52 вы видите бланк с записью шахматной партии, сыгранной в Немецком шахматном клубе в 1897 г. Кто-то по неосторожности прожег бланк сигарой или сигаретой и скрыл от нас ходы черных, которые закончились их победой на четвертом ходе (ходы белых в левой колонке в традиционной шахматной нотации выглядят так: 1.f3 2.Кр f2 3.Кр g3 4.Кh4). Можете ли вы восстановить всю партию?

Я хочу поблагодарить Р. Баннера (Ньюпорт-Бридж, шт. Калифорния), приславшего мне эту забавную задачу.

В своем письме Баннер сообщает, что почерпнул ее, как ему помнится, из одного английского журнала, издававшегося в 20-е годы.

6. Самопорожденные числа. Д. Капрекар – индийский математик. Он мал ростом, но велик разумом и сердцем. Более сорока лет он занимается замечательными исследованиями по занимательной теории чисел, время от времени получая стипендии от различных индийских университетов. Капрекар часто печатает свои работы в индийских математических журналах, выступает на конференциях и опубликовал более двух десятков книг на ломаном английском (все они невелики по объему).

За пределами Индии Капрекар более всего известен как автор открытия, совершенного более двадцати лет назад. Я имею в виду открытую им «постоянную Капрекара». Выберите любое четырехзначное число, в котором не все цифры одинаковы. Расположите цифры сначала в порядке убывания, затем, переставив их в обратном порядке, образуйте новое число и вычтите новое число из старого. Повторяя тот же процесс с разностями (не более чем за 7 шагов), вы придете к постоянной Капрекара 6174, которая будет затем воспроизводить себя. Производя перестановки цифр и вычитания, нули следует сохранять. Например, начав с числа 2111 и вычитая из него 1112, вы получите число 0999. На следующем шаге перестановка цифр даст число 9990, из которого вы вычтите 0999, и т. д.

Нас сейчас будет интересовать один замечательный класс чисел, открытый Капрекаром в 1949 г. и названный им самопорожденными числами. Им посвящено несколько книг Капрекара. За пределами Индии о самопорожденных числах практически ничего не известно, хотя в 1974 г. о них (под другим названием) появилась статья в журнале “*The American Mathematical Monthly*” [9.1]. В статье доказывалось, что существует бесконечное множество самопорожденных чисел.

Что же такое самопорожденные числа? Чтобы ответить на этот вопрос, лучше всего начать с основной процедуры, которую Капрекар называет цифросложением. Выберем любое целое число и прибавим к нему сумму его цифр. Например, если мы выберем число 47, то сумма его цифр $4 + 7 = 11$ и $47 + 11 = 58$. Новое число 58 называется порожденным числом, а исходное число 47 –

его генератором. Процесс можно повторять неограниченно, образуя порождаемую цифросложением последовательность 47, 58, 71, 95 ...

Найти нерекуррентную формулу для частичной суммы членов этой последовательности, которая бы задавала частичную сумму в зависимости от ее первого и последнего члена, не удалось никому, но существует простая формула для суммы всех цифр в последовательности, порождаемой цифросложением. Нужно просто вычесть первое число из последнего и прибавить сумму цифр последнего числа. «Разве это не удивительный новый результат? – спрашивает Капрекар в одной из своих книжек. – Доказательство этого правила очень просто, и я полностью записал его для себя. Но стоит увидеть доказательство, как теряется прелесть всей процедуры, поэтому я решил не приводить его здесь».

Может ли порожденное число иметь более одного генератора? Да, но лишь в том случае, если оно превышает 100. Наименьшее число, имеющее более одного генератора (Капрекар называет такие числа соединениями), равно 101. У него два генератора: 91 и 100. Наименьшее число – соединение с тремя генераторами равно 10 000 000 000 001. Оно порождено числами 10 000 000 000 000, 9 999 999 999 901 и 9 999 999 999 892. Наименьшее число с четырьмя генераторами, открытое Капрекаром 7 июня 1961 г., имеет 25 знаков: единица, после которой следует 21 нуль и число 102. С тех пор Капрекару удалось открыть, как он предполагает, наименьшие числа – соединения с 5 и 6 генераторами.

Самопорожденное число – это просто число, у которого нет генератора. По словам Капрекара, «оно порождает самое себя». Существует бесконечно много самопорожденных чисел, но встречаются они гораздо реже, чем порожденные числа. В пределах первой сотни имеется всего 13 самопорожденных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86 и 97. Простые самопорожденные числа называются самопростыми. Хорошо известное «циклическое» число 142 857 (при умножении его на числа от 1 до 6 всегда получается произведение, записанное теми же 6 цифрами, только переставленными в циклическом порядке) принадлежит к числу самопорожденных чисел. Самопорожденными являются и такие числа, как 11 111 111 111 111 111 111 и 3 333 333 333. В этом столетии

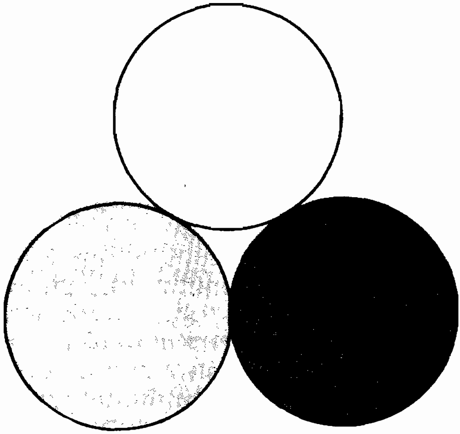


Рис. 53. Задача о раскраске карты, моделируемая с помощью фишек для игры в покер.

самопорожденными были 1906, 1917, 1919, 1930, 1941, 1952, 1963 и 1974 годы.

Рассмотрим теперь степени числа 10. Число 10 порождено числом 5, число 100 – числом 86, 1000 – числом 977, 10 000 – числом 9968 и 100 000 – числом 99 959. Почему миллионер столь заметная фигура в обществе? Потому, отвечает Капрекар, что 1 000 000 – самопорожденное число. Следующая за миллионом степень десятки, которая является самопорожденным числом, – это 10^{16}.

Никто пока не открыл нерекуррентную формулу, позволяющую получать все самопорожденные числа, но у Капрекара есть простой алгоритм, позволяющий проверить любое число на самопорожденность (то есть установить, является ли данное число самопорожденным или нет). Попробуйте самостоятельно придумать такой алгоритм. Если вам это удастся, то для вас не составит особого труда определить, какой год после 1974 будет ближайшим самопорожденным числом.

7. Цветные фишки для покера. Какое наименьшее число фишек для покера трех различных цветов можно расположить на плоской поверхности так, чтобы любые соприкасающиеся фишки не были одного цвета? Как показано на рис. 53, наименьшее число фишек, удовлетворяющих условиям задачи, равно 3.

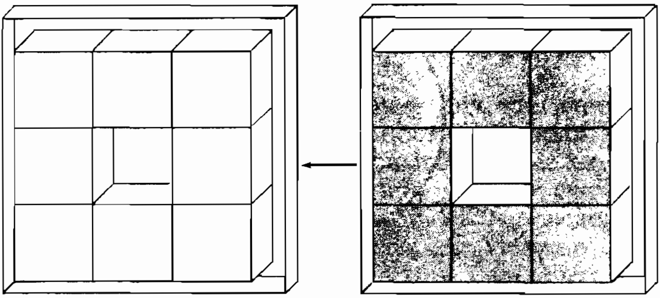


Рис. 54. Головоломка с перекатывающимися кубиками.

Наша задача состоит в следующем: определить, какое наименьшее число фишек одинакового размера и 4 различных цветов можно расположить на плоской поверхности так, чтобы любые 2 соприкасающиеся фишки были различного цвета.

8. Перекатывающиеся кубики. Для этой красивой комбинаторной задачи, придуманной Дж. Харрисом (Санта-Барбара, шт. Калифорния), вам понадобятся 8 единичных кубиков. Одну грань каждого такого кубика выкрасьте в любой яркий цвет по своему усмотрению, а другую грань – в черный цвет. (Разумеется, 2 грани каждого куба вы можете пометить любым способом по своему усмотрению.) Поместите кубики в коробочку 3×3 или поставьте их на матрицу 3×3 так, чтобы средняя клетка оставалась пустой, а все черные грани были обращены вверх (рис. 54).

Ход состоит в перекатывании кубика через одно из четырех нижних ребер на пустую клетку (кубик совершает при перекатывании четверть оборота вокруг ребра).

Требуется перевернуть все 8 кубиков цветной гранью вверх и расположить так, чтобы центральная клетка была снова свободной. Сделать это нужно за минимальное число ходов. При записи решения пользуйтесь сокращенными обозначениями *U* (вперед, на себя), *D* (назад, от себя), *L* (влево) и *R* (вправо). Все решения начинайте с триады *URD* (любой другой вариант начала симметричен этой триаде).

ОТВЕТЫ

1. Независимо от параметров задачи (начальной длины резинового жгута, скорости червяка и величины, на которую резиновый жгут растягивается в конце каждого единичного интервала времени) червяк достигнет другого конца жгута за конечное время. Аналогичное утверждение остается в силе и в том случае, если жгут растягивается не дискретно, а непрерывно, с постоянной скоростью, но когда растяжение происходит в дискретном режиме, задача легче поддается анализу.

Очень интересно узнать, как червяк доползет до другого конца резинового жгута. Наш жгут растягивается равномерно, как резиновая лента. Мы как бы разглядываем жгут под все бо́льшим увеличением. Червяк все время ползет, не останавливаясь ни на миг. Должен ли он непременно достичь другого конца жгута? Не обязательно: можно неуклонно стремиться к цели, но так никогда и не достичь ее. Продвижение червяка выражается бесконечной последовательностью отрезков, длина которых составляет все меньшую долю от длины жгута. Суммарная длина этих отрезков представима в виде ряда. Он может быть бесконечным и тем не менее сходиться к какой-то точке, расположенной на значительном удалении от того конца жгута, к которому ползет червяк. Именно так обстоит дело, например, в том случае, когда в конце каждой секунды длина жгута удваивается.

Если же жгут удлиняется так, как говорится в условии задачи – на 1 км в конце каждой секунды, то червяк доползет до другого конца резинового жгута. Действительно, в 1 км 100 000 см, поэтому к концу первой секунды червяк успевает проползти 1/100 000 начальной длины жгута. За вторую секунду червяк проползает (от того места, куда он добрался к концу первой секунды) 1/200 000 новой длины жгута (напомним, что в конце первой секунды длина жгута увеличилась на 1 км и стала равной 2 км). За третью секунду червяк проползает 1/300 000 длины жгута (ставшей к тому времени равной 3 км), и т. д. Продвижение червяка в долях полной длины веревки равно

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Ряд, заключенный в скобки, хорошо известен: это знаменитый гармонический ряд. Он расходится, и поэтому сумма его может быть сколь угодно велика. Частная сумма гармонического ряда никогда не бывает целым числом. Но как только она становится больше 100 000, приведенное выше выражение превышает единицу, а это означает, что червяк доползает до конца жгута. Число членов n в частичной сумме гармонического ряда равно числу секунд, истекших после отправления червяка в путь. Так как червяк ползет со скоростью 1 см/с, число n равно длине жгута (к концу n-й секунды) в километрах.

Это число с точностью до одной минуты равно

$$e^{100\,000-\gamma} \pm 1,$$

где γ – постоянная Эйлера. Выраженная в километрах, эта величина дает длину резинового жгута, существенно превосходящую диаметр известной Вселенной, а выраженная в секундах – интервал времени, существенно превосходящий возраст Вселенной по современным оценкам. (Вывод этой формулы см. в [9.2].)

Некоторое представление о том, сколь огромных размеров достигнет длина резинового жгута, когда червяк, наконец, достигнет конца своего пути, дает следующее замечание читателя X. Роршаха. Если жгут в начальном состоянии имел поперечное сечение в 1 км^2, то в конце он представляет собой «пунктир» из отдельных атомов, выстроенных вдоль прямой, причем расстояния между соседними атомами во много раз превосходят размеры известной ныне Вселенной. Время, затраченное червяком на его многотрудное путешествие, существенно больше возраста Вселенной.

2. Секрет печати с древнешотландскими письменами раскрыл Дэвид Келлер [9.3]: чтобы прочитать «древнешотландский» текст, достаточно просто перевернуть печать на 180°. «Дополнительные трудности, – пишет Келлер, – возникают при разбиении текста на слова и в связи с тем, что некоторые буквы заменены довольно причудливыми символами». Надпись на печати гласит: «Джеймс Бранч Кабелл написал эту книгу так, что всякий, кто захочет, прочтет повествование о человеке, снедаемом вечно неудовлетворенной жаждой прекрасного. Эттарре остается всегда недостижимой и является ему только во сне. От всех она ускользает в последний момент, и исчезновения ее весьма разнообразны».

3. Трудно поверить, но оптимальная стратегия в игре с выбором целых чисел состоит в том, чтобы ограничить свой выбор числами 1, 2, 3, 4 и 5. Выбор этих чисел должен производиться случайно с относительными частотами 1/16 для чисел 1 и 5, 4/16 для числа 3 и 5/16 для чисел 2 и 4. Какое из этих чисел выбрать с указанной частотой, можно решить с помощью игрушечного волчка.

Доказательство оптимальности этой стратегии см. в [9.4] и [9.5].

У. Стромквист в своем письме предлагает следующим образом использовать игральную кость: «После нескольких бокалов пива вы вряд ли сможете отличить пятерки от шестерок, поэтому если при любом бросании кости выпадет 5 или 6 очков, вам придется повторить бросание. Таким образом, вы сможете реально использовать только 2/3 кости, поэтому результат (отбрасывая все дроби) естественно умножить на 2/3 и лишь потом записать. Например, наибольшая сумма, которая может выпасть при бросании двух костей (без необходимости повторного бросания), равна 8 очкам, поэтому самое большое число, которое вы можете выбрать, составляет 2/3 от 8, то есть равно 5. Таким образом, в партии из 16 игр вы должны выбрать число 1 один раз, число 2 пять раз, число 3 четыре раза, число 4 пять раз и число 5 один раз».

Нетрудно видеть, что рекомендации Стромквиста как раз и обеспечивают необходимые частоты для оптимальной стратегии.

4. Предложенное Дж. Свитом доказательство теоремы о трех окружностях (требовалось доказать, что точки пересечения общих касательных к трем парам окружностей лежат на одной прямой) приведено в решении к задаче 62 книги Л. А. Грэхема [9.6]. Представьте себе, что перед вами не окружности, а три сферы различных радиусов, на которые вы смотрите сверху. Касательные к каждым двум сферам – это «края» (образующие) конуса, в который плотно вставлены обе эти сферы. Конусы лежат на плоскости, на которой покоятся сферы, поэтому вершины конусов также лежат в одной плоскости.

Представьте себе теперь, что на три сферы сверху положена плоская пластинка. Ее нижняя поверхность, касательная ко всем трем сферам, касается и всех трех конусов. Следовательно, эта вторая плоскость также должна содержать три вершины конусов. А поскольку три вершины принадлежат двум плоскостям, они должны лежать на линии пересечения этих плоскостей, то есть на прямой.

К. Огилви сообщил мне, что включил задачу о трех окружностях в свою книгу «Геометрические экскурсии» [9.7]. Огилви также был убежден, что доказательство теоремы с помощью трех конусов охватывает все возможные случаи, но однажды во время занятий по геометрии в колледже Гамильтона один из студентов обратил его внимание на то, что такое доказательство неприменимо, когда одна малая сфера находится между двумя большими. В этом случае невозможно провести две пересекающиеся плоскости, которые были бы касательными ко всем трем сферам.

Многие читатели прислали другие доказательства теоремы о трех окружностях. Б. Берк, Р. Фельвер, К. Холвенстат, Д. Шир и Р. Веро независимо друг от друга предложили повернуть чертеж так, чтобы прямая (на которой лежат точки пересечения общих касательных к каждой из трех пар окружностей) расположилась горизонтально над окружностями. Тогда окружности можно рассматривать как три одинаковые сферы, находящиеся внутри взаимно пересекающихся труб одинакового круглого сечения и изображенных в перспективе. Касательные к окружностям при такой интерпретации становятся параллельными образующими трех труб. Так как все трубы должны лежать на какой-то плоскости, их параллельные образующие при перспективном изображении имеют точки схода, расположенные на линии горизонта, то есть на одной прямой.

Требование, чтобы круги не пересекались, можно отбросить: теорема о трех окружностях допускает более общую формулировку в терминах «центров подобия» (вместо касательных); она выполняется для кругов, которые целиком расположены один внутри другого. Я обязан Д. Килеру сведениями о том, что теорема о трех известна в геометрии как теорема Монжа: она названа так в честь французского математика и друга Наполеона Гаспара Монжа, доказавшего ее в 1798 г. Р. Арчибальд в заметке, опубликованной в *The American Mathematical Monthly* [9.8], показал, что теорему о трех окружностях знали еще древние греки (эти сведения мне также сообщил Килер).

Д. Слитор обнаружил, что теорема о трех окружностях на плоскости имеет аналог – теорему о четырех сферах в трехмерном пространстве. Разобьем четыре сферы на тройки. Таких троек всего 4. В каждой тройке сферы попарно касаются 3 конусов, вершины которых лежат на одной прямой. Так как эти 4 прямые пересекаются в 6 точках, все 4 прямые должны лежать в одной плоскости. Следовательно, вершины всех 6 конусов должны лежать в одной плоскости. Теорема о трех окружностях допускает обобщения и на случай евклидовых пространств более высокой размерности. (См. статью Р. Уокера «Теорема Монжа в многих измерениях» [9.9].)

О теореме Монжа для трех окружностей на плоскости упоминает в своей автобиографии Герберт Спенсер. «Эту истину, – пишет он, – я никогда не мог созерцать, не испытывая потрясение от ее красоты и в то же время удивление и благоговейный трепет перед тем, что ничем не связанные между собой круги должны всегда быть опутаны сетью соотношений, которые кажутся просто непостижимыми».

5. Восстановленная запись шахматной партии имеет следующий вид:

1. f3 e5 или e6
2. Крf2 Фс6
3. Крg3 Ф:f3 + (шах)
4. Крh4 Се7 × (мат)

Некоторым читателям показалось, что им удалось найти второе решение. Первый ход черных: d4. Второй ход черных: либо g6, h5, либо Крf6. (Первые два хода черных взаимозаменяемы.) Третьим ходом черные ставят шах Фd6 +, а затем, как казалось авторам этого решения, мат ходом Фf4 ×. К сожалению, последний ход черных белые могут парировать ходом g4.

6. Предложенный Д. Капрекаром метод проверки числа N на самопорожденность состоит в следующем. Сложив цифры числа N, найдем его цифровой корень. Затем сложим цифры результата и будем поступать так до тех пор, пока не получим однозначное число. Если цифровой корень нечетный, то прибавим к нему 9 и разделим на 2. Если цифровой корень четный, то просто разделим его на 2. Частное и в том, и в другом случае обозначим C.

Вычтем C из N. Проверим, не порождает ли полученная разность число N. Если не порождает, то вычтем 9 из последнего результата и проверим снова. Продолжая вычитать девятки, будем каждый раз проверять, не по-

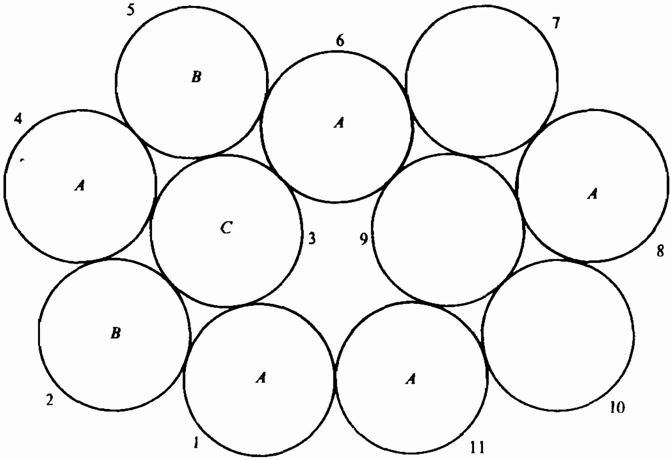


Рис. 55. Решение задачи о цветных фишках для игры в покер.

рождает ли очередная разность число N. Если мы не получим генератор числа N за k шагов, где k – число знаков в N, то N – самопорожденное число.

Например, мы хотим проверить на самопорожденность число 1975. Его цифровой корень (4) четен, поэтому, разделив 4 на 2, мы получаем $C = 2$. Разность $1975 - 2 = 1973$ не порождает число 1975. Вычитаем девятку: $1973 - 9 = 1964$. Число 1964 также не порождает число 1975. Но $1964 - 9 = 1955$, а число 1955 плюс сумма его цифры $1 + 9 + 5 + 5 = 20$ дает число 1975. Следовательно, 1975 – порожденное число, и 1955 – его генератор. Так как 1975 – четырехзначное число, нам понадобился еще только один шаг, чтобы полностью решить вопрос о самопорожденности числа 1975. Этот простой алгоритм позволяет без труда установить, что следующим самопорожденным годом после 1974 будет 1985 г. В этом столетии после 1985 г. останется еще только один год: 1996.

Относительно прогресса, достигнутого в задаче получения нерекуррентной формулы для суммы ряда, возникающего при цифросложении, см. статью К. Столярского [9.10]. Самая ранняя из упоминаемых им работ выполнена во Франции еще в 1906 г.

7. Нетрудно доказать, что фигура из 11 кружков (рис. 55) требует по крайней мере 4 красок для того, чтобы никакие 2 соприкасающихся круга не были одного цвета. Предположим, что этому условию можно удовлетворить, взяв только 3 краски. «Раскрасим» кружки *1, 2, 3* в цвета *A*, *B* и *C*, как показано на рис. 55. Тем самым мы определим цвет кружков *4, 5* и *6*. Кружок *7* можно раскрасить двумя способами, но при любом из них кружок *11* оказывается окрашенным в тот же цвет, что и кружок *1*, с которым кружок *1* соприкасается. Следовательно, трех красок недостаточно, чтобы удовлетворить условиям задачи.

Несколько читателей прислали доказательство, что 11 – минимальное число кругов. Доказательство А. Швенка опубликовано в [9.11] как решение части задачи E2527.

Наименьшее число красок, необходимое для правильной раскраски одинаковых сфер (то есть такой раскраски, при которой любые две соприкасающиеся сферы выкрашены в различные цвета), неизвестно, хотя круг возможных ответов сужен до 5, 6, 7, 8 или 9. Этой задаче, а также многим другим нерешенными задачам на раскрашивание посвящена статья «Раскраска кругов» Б. Джексона и Г. Рингеля [9.12].

8. В статье «Задачи с перекатывающимися кубиками и одной вакансией» [9.13] Дж. Харрис дал 38-ходовое решение своей задачи о перекатывающихся кубиках. Около десяти читателей, составив компьютерные программы, обнаружили единственное минимальное решение этой задачи с 36 ходами. (Решения, получающиеся из другого решения обращением порядка всех операций, поворотами и отражениями, считаются неотличимыми от исходного решения.) Минимальное 36-ходовое решение имеет следующий вид:

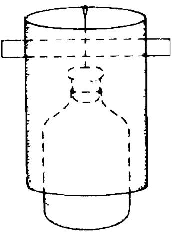
URD LLD RRU LDL URD RUL DLU URD RUL DRD LUL DRU

В заключение своей статьи Харрис ставит трудную задачу также о 8 кубиках на матрице 3 × 3. Кубики раскрашены так, что, когда они расставлены на матрице и центральная клетка свободна, все видимые грани окрашены в красный цвет, а все невидимые грани не окрашены. Всего имеется 24 красные грани и 24 неокрашенные грани. Требуется перекатить кубики так, чтобы они снова расположились на тех же 8 клетках с пустой центральной клеткой, но все красные грани стали невидимыми, а все неокрашенные грани – видимыми.

Харрис привел 84-ходовое решение, но позднее число ходов удалось снизить до 74. В мае 1981 г. я получил письмо от Хикоэ Эномото, Киёси Исихата и Сатору Каваи, сотрудников факультета теории информации Токийского университета. Составленная ими компьютерная программа нашла следующее минимальное (70-ходовое) решение:

DRUUL	*DDRUU*
LDLDR	*ULURD*
RULDR	*DLULD*
RURDL	*ULURD*
RDLUR	*DLURU*
LDRUL	*DLURD*
RULDL	*DRRUL*

Две более ранние головоломки Харриса и описание одной игры на доске с перекатывающимися кубиками см. в моей книге [9.14]. Биографические сведения о Харрисе см. в книге Ст. Леви «Хакеры: герои компьютерной революции» [9.15].



ГЛАВА 10

ШЕСТЬ СЕНСАЦИОННЫХ ОТКРЫТИЙ

В последнее десятилетие американцы проявляют все больший интерес к оккультизму и псевдонауке. Как надлежит рассматривать это явление – как нечто обособленное или каким-то образом связанное с уровнем осведомленности широких кругов американского общества об успехах науки? Как показывает анализ, интерес к потустороннему, таинственному и необъяснимому и степень осведомленности о достижениях современной науки взаимосвязаны гораздо сильнее, чем полагает большинство людей. Информация о важных научных открытиях вытесняется со страниц газет и журналов, из радио- и телепередач, уступая место сообщениям о случаях полтергейста, беснования, излечения с помощью бесконтактного психического воздействия, высадке на Земле в доисторические времена пришельцев из других миров, об исчезновениях судов и самолетов в Бермудском треугольнике, проявлениях эмоций у растений, «говорении на иноязыках» и т. д.

Этот эффект усугубляется еще и тем, что редакции научных журналов буквально захлебываются в потоке поступающих работ: от принятия статьи до ее публикации проходит несколько лет. И все это время автор неопубликованной статьи о важном научном открытии вынужден хранить свой результат в тайне от коллег-соперников, которые могут похитить его и опубликовать первыми.

Как редактор отдела популярного журнала я хочу прокомментировать шесть наиболее важных открытий 1974 г., о которых по тем или иным причинам не были в достаточной мере оповещены ни ученые-специалисты, ни широкие круги непрофессионалов. Самой большой сенсацией за последние годы в области чистой математики, несомненно, явилось открытие контрпримера знаменитой проблеме четырех красок. Как помнят читатели *Scientific American*, в связи с этой проблемой была высказана гипотеза, что для правильной раскраски любой плоской карты (напомним, что правильной называется такая раскраска, при которой любые две страны, имеющие общую границу, раскрашены в различные цвета) необходимо и достаточно четырех красок. Нетрудно построить карты, для правильной раскраски которых требуется ровно четыре краски, а топологи давно доказали, что пяти красок достаточно для правильной раскраски любой карты. Однако остававшийся «разрыв» в одну краску долгое время не удавалось заполнить лучшим математическим умам. Большинство математиков склонялось к мнению, что гипотеза о возможности правильной раскраски четырьмя красками верна и когда-нибудь будет доказана. Некоторые математики видели в гипотезе четырех красок пример утверждения, неразрешимого в смысле Гёделя. Г. Кокстер был одним из немногих, кто считал, что гипотеза четырех красок неверна. Интуиция не подвела ученого: в ноябре 1974 г. У. Макгрегор, специалист по теории графов из Уоппингерс-Фоллз (шт. Нью-Йорк), построил карту со 100 областями, которую невозможно

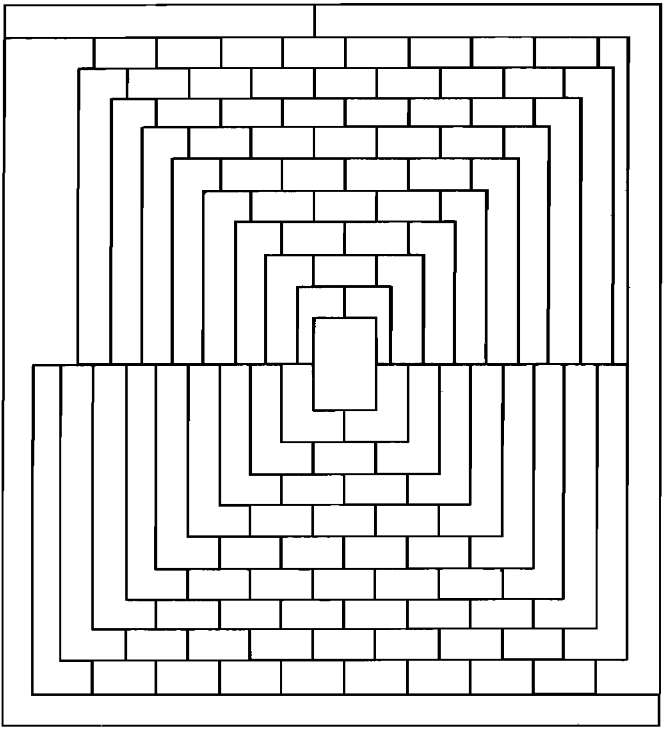


Рис. 56. Карта, опровергнувшая гипотезу четырех красок.

правильно раскрасить менее чем 5 красками (рис. 56). Статья Макгрегора с сообщением о его открытии опубликована в одном из номеров *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, за 1978 г.

В теории чисел наибольший интерес вызвало полученное в 1974 г. доказательство того, что если трансцендентное число e возвести в степень $\pi\sqrt{163}$, то получится целое число. Индийский математик С. Рамануджан высказал предположение о том [10.1], что e в степени $\pi\sqrt{163}$ – целое число. Производя вычисления «на руках», он нашел, что эта степень равна 262 537 412 640 768 743,999 999 999 999... Вычисления были громоздкими, а Рамануджану не удалось проверить, что следующий знак также будет девяткой. Современные компьютеры позволили получить гораздо больше девяток. Например, французская программа 1972 г. выдала 2 млн. девяток. К сожалению, никто не смог доказать, что последовательность девяток продолжается неограниченно (тогда число e в степени $\pi\sqrt{163}$, разумеется, было бы целым) или что это число иррационально или равно целому числу с правильной дробью.

В мае 1974 г. Дж. Брилло из Университета Аризоны придумал остроумный способ, позволяющий использовать для вычисления $e^{\pi\sqrt{163}}$ постоянную Эйлера. Это позволило ему доказать, что это число в точности равно 262537412640768744. Каким образом простое число 163 превращает выражение $e^{\pi\sqrt{163}}$ в целое число, до конца не понятно. Подробное изложение метода Брилло планирует опубликовать *Mathematics of Computation.*

В конце 1974 г. появились слухи, будто число π вскоре будет вычислено с 6 млн. десятичных знаков. Неспециалисту число знаков после запятой может показаться впечатляющим, но по сравнению со специальным компьютером, построенным в 1973 г. для игры в шахматы Лабораторией искусственного интеллекта при Массачусетском технологическом институте,–это не более чем легкое машинное «покашливание». Ричард Пинклиф, спроектировавший машину с помощью экс-чемпиона мира по шахматам Михаила Ботвинника из СССР, назвал свою машину Мак-Хик потому, что та довольно часто играет «икая», как бы в состоянии сильной интоксикации.

В отличие от большинства программ для игры в шахматы Мак-Хик – обучающаяся машина, извлекающая уроки из допущенных ошибок, хранящая в памяти записи всех сыгранных ею партий и тем самым непрерывно улучшающая свою игру. В начале 1974 г. Пинклиф начал играть с Мак-Хиком то за белых, то за черных. Партия продолжалась в среднем около 1,5 с. Машина работала безостановочно около 7 месяцев.

В конце этого периода Мак-Хик выдал замечательный результат. Он установил, что с высокой вероятностью пешка на h4 сулит белым выигрыш. Это было совершенно неожиданно, так как по традиции начальный ход пешкой h2–h4 считался слабым. Разумеется, Мак-Хик не мог провести исчерпывающий анализ всех возможных ответных ходов. Но при построении «дерева игры» для дебюта Мак-Хик продлил каждую ветвь дерева до положения, которое любой шахматный мастер, не колеблясь, счел бы настолько безнадежным для черных, что черные сразу бы сдались.

Со стороны представителей мирового шахматного Олимпа на Пинклифа оказывается сильнейшее давление с целью заставить его демонтировать Мак-Хил и уничтожить записи проанализированных компьютером партий. Особую настойчивость проявляют русские. Из одного надежного источника мне стало известно, что на встрече Киссинджера и Брежнева в июне 1974 г. должно было обсуждаться влияние, которое окажет на шахматный мир совершенное Мак-Хиком открытие.

Судя по сообщениям печати, Бобби Фишер заявил, что еще в возрасте одиннадцати лет он разработал неприступную защиту против хода h2–h4. Фишеру предложили сыграть с Мак-Хиком. Фишер согласился при условии, если компьютер будет играть тихо и ему (Фишеру) устроители встречи гарантируют гонорар в 25 млн. долларов независимо от того, выиграет он или проиграет.

Реакцию шахматных гроссмейстеров на открытие Мак-Хика можно считать слабой по сравнению с теми ударными волнами, которые заходили среди физиков после того, как в 1973 г. было установлено, что в специальной теории относительности имеется логический изъян. Решающий «мысленный эксперимент» описать совсем нетрудно. Представьте себе метровый стержень, который подобно ракете мчится в пространстве в направлении своей продольной оси. Параллельно траектории стержня расположена пластина, в которой прорезано круглое отверстие метрового диаметра. Пластина движется в направлении, перпендикулярном продольной оси стержня (рис. 57). Нас интересует идеальная схема эксперимента, поэтому мы будем считать, что и стержень и пластина имеют нулевую толщину. Оба объекта движутся так, что столкновение между ними неминуемо. В момент столкновения центр стержня и центр круглого отверстия совпадают.

Предположим, что пластина – фиксированная инерциальная система отсчета и что метровый стержень движется со столь большой скоростью, при которой его длина претерпевает лоренцовское сокращение в 10 раз. Тогда в выбранной нами системе отсчета стержень имеет длину 10 см и, следовательно, легко проходит сквозь отверстие

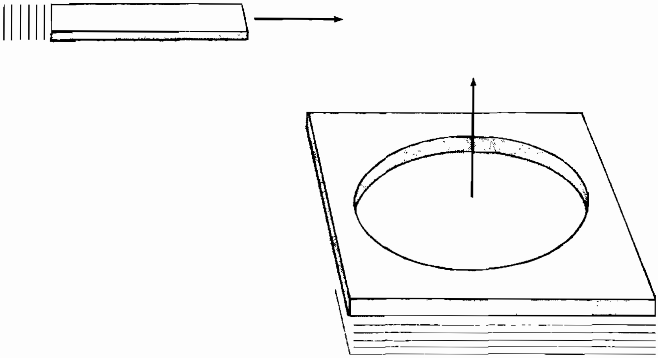


Рис. 57. Мысленный эксперимент, опровергающий специальную теорию относительности.

быстро поднимающейся пластины. (Скорость, с которой поднимается пластина, несущественна.)

Рассмотрим теперь ситуацию с точки зрения инерциальной системы, связанной с метровым стержнем. Пластина движется относительно него в противоположном направлении по горизонтали, поэтому диаметр ее отверстия, параллельный стержню, претерпевает лоренцовское сокращение в 10 раз и становится равным 10 см. Но метровый стержень не пройдет сквозь эллиптическое отверстие длиной 10 см (и шириной 1 м) без столкновения. Таким образом, две ситуации не эквивалентны, и тем самым нарушается основное исходное предположение специальной теории относительности.

Физики давно знают, что общая теория относительности подтверждена довольно слабо, но специальная теория относительности благополучно выдержала столько экспериментальных проверок, что внезапный провал не мог не вызвать изумления. Х. Прингль, английский физик, придумавший роковой *мысленный эксперимент*, сообщил о нем в короткой заметке, опубликованной летом 1974 г. в журнале *Review of Modern Physics*, но широкая публика еще не смогла оценить в полной мере далеко идущие последствия совершенного им открытия.

Когда в 1974 г. компания «Макгроу-Хилл» выпустила факсимильное издание двух считавшихся утерянными книг с рабочими записями и набросками Леонардо да Винчи, новые материалы привлекли всеобщее внимание. Достоянием широкой публики стали такие ранее неизвестные изобретения да Винчи, как шарикоподшипники с коническим шипом (считалось, что такая фиксация вращающейся оси впервые была применена в 20-е годы нашего столетия в гироскопах Сперри), червячный винт (изобретение которого приписывалось одному часовщику, жившему в XVIII в.) и многие другие технические устройства, в том числе двухколесный велосипед с цепной передачей.

Если учесть необычайную рекламу, выпавшую на долю двухтомного издания «Макгроу-Хилл», то трудно понять, почему широкой публике ничего не было сообщено об открытии одного рисунка, которого недоставало в первой книге заметок. Эта книга, известная как «Мадридский кодекс I» (она была найдена десятью годами ранее в Национальной библиотеке в Мадриде), содержит систематическое (на 382 страницах) изложение теоретической и прикладной механики (см. статью Л. Рети «Леонардо о подшипниках и шестернях» [10.2]). Относительно содержания утерянной страницы строились различные домыслы. А. Макарони из Католического университета в Милане высказал предположение, что, поскольку недостающая страница должна была находиться в разделе, посвященном гидравлическим устройствам, на ней скорее всего должны быть изображены какие-то типы смывного механизма.

Недостающую страницу обнаружил Р. Пац-и-Бикуспид, заведующий отделом рукописей Мадридской библиотеки. Он же нашел и те две рабочие книги Леонардо да Винчи, о которых мы уже упоминали. Недостающая страница была вырвана из рукописи и вклеена в трактат XV в. о приготовлении благовоний.

На рис. 58 воспроизведена фотокопия найденной страницы. Как нетрудно видеть, профессор Макарони был прав в своих предположениях, что именно Леонардо да Винчи является изобретателем туалета с клапанным смывным устройством.

Давно известно, что Леонардо да Винчи изобрел складное сиденье в туалете и предложил конструкцию ватерклозета с непрерывной подачей воды по каналам внутри стен, вентиляционной шахтой с выходом на крышу и противовесом, обеспечивающим плотное закрывание двери. Однако изобретение унитаза со смывным клапанным механизмом ранее приписывалось крестнику королевы Елизаветы сэру Дж. Харрингтону, который

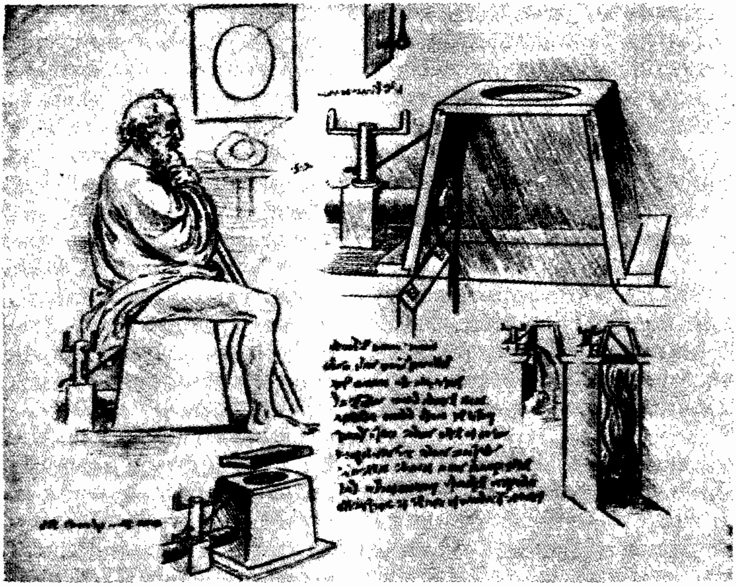


Рис. 58. Рисунок Леонардо да Винчи (публикуется с разрешения Нью-Йоркской публичной библиотеки).

весьма занимательно описал свое изобретение в книге «Метаморфоза Аякса» (1596) – клозетной сатире, за что он был лишен права появляться при дворе. Хотя его «Аякс» действительно был построен в Келстоне неподалеку от Бата, широкое распространение он получил лишь через двести лет.

Первый английский патент на туалет с клапанным смывным устройством был выдан в 1775 г. часовых дел мастеру А. Каммингсу. Современный механизм с шаровым поплавком, автоматически отмеряющим очередную порцию воды в бачке после очередного смыва, восходит к патентам, выданным в начале XIX в. на имя англичанина Т. Краппера, занимавшегося изготовлением водопроводной фурнитуры. Более подробно об истории сантехники см. в [10.3] и [10.4].

Хотя в 1974 г. наиболее респектабельные издательства выпустили сотни книг по парапсихологии, никто не удосужился оповестить широкую публику о сенсационном «пси»-открытии – создании простого мотора, работающего на пси-энергии. Этот мотор был построен в 1973

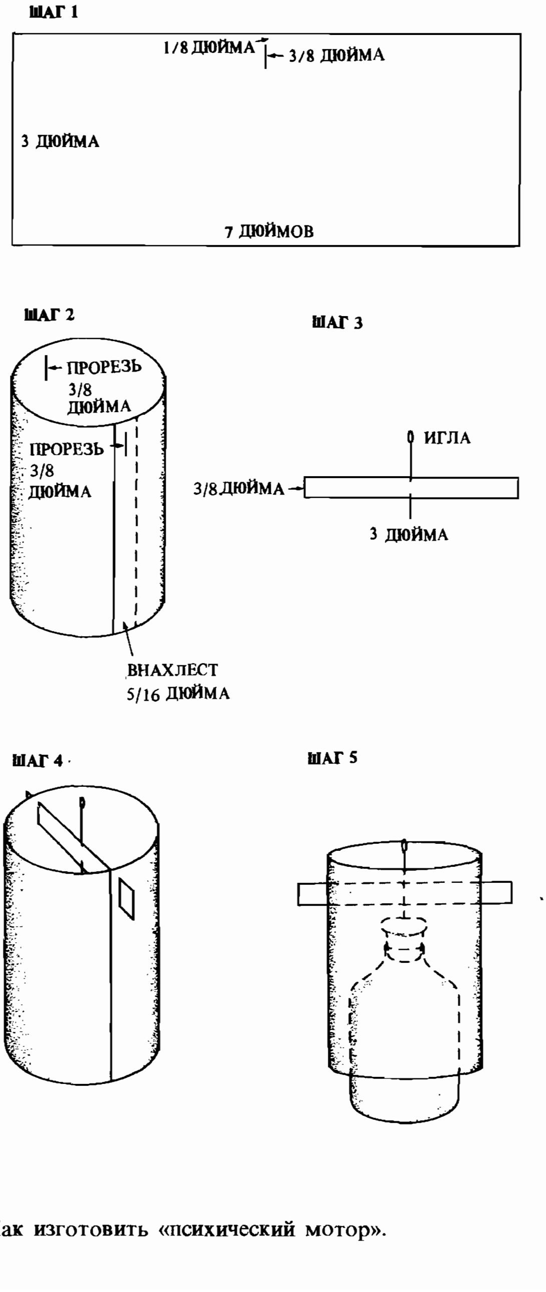


Рис. 59. Как изготовить «психический мотор».

г. Р. Риповым, парапсихологом из Праги, основателем Международного института по исследованию ауры млекопитающих. Когда Генриетта Бердбрейн, американский эксперт по кирлианской фотографии, посетила Прагу в начале 1974 г., доктор Рипов научил ее, как построить «психический мотор». Миссис Бердбрейн неоднократно демонстрировала это устройство во время своих лекций, но, насколько мне известно, единственное сообщение о нем было опубликовано в бостонском ежемесячнике *East West Journal* (May 1974, p. 21).

Разумеется, читателям также не терпится построить и испытать модель «психического мотора». Первый шаг – вырезать из старого лотерейного билета (облигации или другой устаревшей ценной бумаги) прямоугольник размером 3 дюйма на 7. Прорежьте в прямоугольнике тонкую щель точно в указанном месте (рис. 59, *шаг 1.*). Прорезь должна иметь в длину 3/8 дюйма и располагаться в центре полоски на расстоянии 1/8 дюйма от верхнего края. Сверните полоску в цилиндр так, чтобы ее края заходили друг на друга ровно на 5/16 дюйма, и склейте их (*шаг 2*). Прорежьте вторую щель в центре двойного слоя прямо напротив первой щели. Обе прорези должны иметь одинаковые размеры и находиться на одинаковом расстоянии от верхнего края.

Из каталожной карточки или куска такого же по весу тонкого картона вырежьте прямоугольную полоску размером 3/8 дюйма на 3 дюйма. Проткните тонкой острой иглой эту полоску в середине так, как показано на рис. 59 (*шаг 3*). Острие иглы должно выступать из нижнего края полоски не более чем на 1/4 дюйма. Проденьте концы полоски в прорези цилиндра (*шаг 4*), следя за тем, чтобы полоска не изогнулась. Установите иглу на пробке узкой бутылки высотой не меньше 4 дюймов (*шаг 5*). Существенно, чтобы пробка бутылки была стеклянной (что лучше всего) или по крайней мере из очень твердого гладкого пластика.

Продвигая полоску сквозь прорези то в одну, то в другую сторону, отрегулируйте устройство так, чтобы цилиндр висел прямо и зазор между ним и бутылкой был всюду одинаковым. Ножницами подрежьте выступающие из прорезей в цилиндре концы полоски так, чтобы каждый конец выступал ровно на 1/4 дюйма.

Поставьте моторчик на Библию, расположив ее на столе так, чтобы корешок верхним концом был направ-

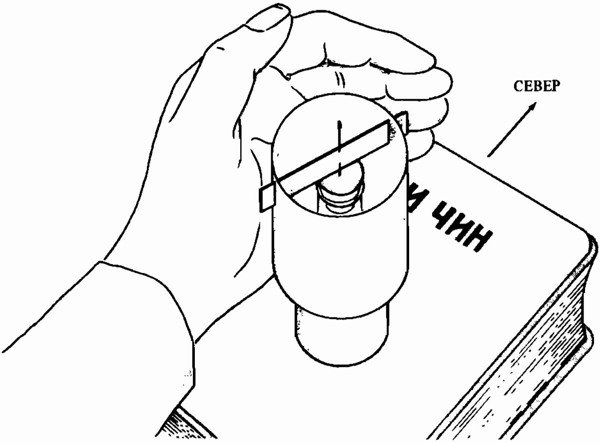


Рис. 60. Как приложить энергию к «психическому мотору».

лен на север. Сядьте перед моторчиком лицом на север. Сложив любую руку «чашечкой» (рис. 60), поднесите ее как можно ближе к цилиндру, не касаясь его. Делать это надо в комнате, где тихо и воздух спокоен. Отвлекитесь от посторонних мыслей и сосредоточьте свою умственную энергию на моторчике. Сильно, с «посылом», мысленно прикажите ему начать вращаться либо по часовой стрелке, либо против нее. Наберитесь терпения. Обычно требуется по крайней мере минута на то, чтобы пси-энергия от вашей ауры возымела действие. Как только это произойдет, цилиндр начнет медленно вращаться. Следует иметь в виду, что интенсивность пси-поля у различных людей неодинакова: у одних оно сильнее, у других слабее. Многое зависит от вашего психического состояния. Иногда моторчик отказывается вращаться, иногда начинает вращаться, как только вы сосредоточиваетесь. Как показывают эксперименты, для большинства людей легче заставить моторчик вращаться против часовой стрелки за счет пси-энергии, подводимой правой рукой, а по часовой стрелке – за счет пси-энергии, подводимой левой рукой. Иногда пси-энергия становится отрицательной, и моторчик вращается в сторону, противоположную желаемой. Впрочем, судя по выступлениям доктора Дж. Райна, пси-эффекты труднонаблюдаемы, капризны и непредсказуемы.

В настоящее время мотор Рипова исследуется во многих лабораториях мира. Русские специалисты считают, что энергия, приводящая во вращение мотор,–это психокинетическая энергия, позволяющая экстрасенсу Ури Геллеру из Израиля на расстоянии гнуть серебряные ложки, русской Нинель Кулагиной удерживать в воздухе шарик от пинг-понга, а бруклинский экстрасенс Дин Крафт благодаря ей заставляет конфеты вылетать из вазочки и авторучки ползать по скатерти. Когда Кулагина подносит к моторчику Рипова обе руки, цилиндр взлетает в воздух на несколько метров. Миссис Бердбрейн готовит к печати сборник о роторе Рипова (так в Праге называют изобретенный Риповым мотор), в который войдут статьи 12 ведущих парапсихологов мира.

Дж. Ранди, фокусник, утверждает, что с помощью трюка он может заставить моторчик быстро вращаться в любую сторону. Разумеется, это не объясняет, почему ротор Рипова действует столь эффективно в руках тысяч людей, не имеющих ни малейшего представления о трюках, к которым прибегают профессиональные фокусники.

ДОПОЛНЕНИЕ

Глава, которую вы только что прочитали, была впервые опубликована в апрельском номере *Scientific American* за 1975 г. Это–первоапрельская шутка. Мне казалось, что всерьез ее никто не воспримет: слишком много в ней абсурдных идей и ссылок на иностранные фамилии. Однако после ее публикации я получил более тысячи писем от читателей, не понявших, что их просто разыграли.

Карту, якобы опровергавшую гипотезу четырех красок, мне прислал У. Макгрегор (это подлинное имя). Я опубликовал ее с его разрешения. Сотни читателей прислали мне копии этой карты, раскрашенной в 4 цвета. Авторы некоторых писем сообщали, что им потребовалось несколько дней, прежде чем удалось правильно раскрасить карту в четыре цвета. Проблема четырех красок теперь окончательно решена. Доказательство гипотезы о том, что любую карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, в 1976 г. нашли В. Хакен и К. Аппель с помощью компьютерной программы (см. [10.5]). Удастся ли когда-нибудь найти простое изящное доказательство, не требующее обращения к компьютеру?

Когда Н. Рот опубликовал свою статью «Раскрашивание карт» в [10.6], многие читатели сообщили ему, что в журнале *Scientific American* была приведена карта, опровергавшая гипотезу четырех красок. В письме, опубликованном в майском номере *Scientific American* за 1975 г., Рот отмечал, что моя заметка, «по-видимому, была исключительно удачной первоапрельской шуткой».

В 1977 г. в газете *Vancouver Sun* появилось сообщение о том, что один английский математик заявил, будто ему удалось (положительно) решить проблему четырех красок (утверждение оказалось неверным). В номере от 17 января 1977 г. было опубликовано письмо одной читательницы, в котором, в частности, говорилось следующее:

«Чтобы внести полную ясность, я хотела бы обратить ваше внимание на то, что гипотеза четырех красок еще в ноябре 1975 г. была опровергнута У. Макгрегором, специалистом по теории графов... Он построил карту с 110 областями («странами»), которую невозможно правильно раскрасить менее чем 5 красками».

Следующее письмо, подписанное «Иван Гуфванов III», якобы математиком из Висконсинского университета, сначала слегка перепугало редакцию *Scientific American*, но потом сотрудники ее поняли, что это письмо – тоже шутка. Оно гласило: «Настоящим ставлю вас в известность о том, что мой адвокат в ближайшее время вступит с вами в контакт для обсуждения иска за причинение мне ущерба на сумму 25 млн. долларов.

В разделе «Математические игры» вашего журнала (April 1975) Мартин Гарднер написал, что проблема четырех красок решена. Я работал над решением этой проблемы 25 лет. Полученные результаты я изложил в статье, которую думаю направить в *American Mathematical Monthly*. Меня несколько смущал объем статьи: он превышает 300 страниц. Мне удалось доказать, что гипотеза четырех красок неверна и что любую карту можно правильно раскрасить пятью красками. Прочитав в статье Гарднера, что кто-то опубликует решение проблемы четырех красок раньше меня, я уничтожил свою статью. Но на прошлой неделе я узнал из журнала *Time*, что статья Гарднера была первоапрельской шуткой. Я не читал статью Гарднера целиком, а ограничился только тем фрагментом ее, в котором говорилось о проблеме четырех красок, и поэтому не мог понять, что передо мной розыгрыш. Теперь же, уничтожив всю рукопись своей статьи, а в ней, повторяю, было более 300 страниц, я не могу восстановить некоторые важные детали доказательства, так как работа над решением проблемы четырех красок велась долгие годы и кое-что я успел забыть. Поэтому я считаю, что публикацией статьи Гарднера вы причинили мне ущерб.

Считаю, что статья Гарднера самая непрофессиональная из всех статей, которые мне когда-либо приходилось читать в вашем журнале или в других периодических изданиях. Такого рода публикации не соответствуют тому уровню, который вы, как мне кажется, стремитесь поддерживать в своем журнале. Я не только возбуждаю против вас судебное дело, но и навсегда выхожу из числа подписчиков вашего журнала и попрошу всех моих друзей и знакомых последовать моему примеру».

В Италии известный математик Бениамино Сегре опубликовал серьезную работу [10.7*], в которой воспроизвел карту Макгрегора и показал, каким образом ее можно было бы правильно раскрасить в четыре краски. «Таким образом, контрпример к гипотезе четырех красок – ложен», – был вывод статьи Сегре.

В осеннем номере журнала *Manifold* за 1975 г. (выпускаемого студентами-математиками Варвикского университета) были опубликованы такие строки, которые следовало распевать на мотив песенки «О мистер Портер, что же мне делать?»:

О мистер Гарднер!
Как вы могли?
Зря растревожили жалящих ос,
Что ни геометр – тот же вопрос:
«Правда, что красок проблему решили?
Пять красок хватит, а не четыре!»
О мистер Гарднер!
Вот что наделала ваша шутка,
Глупая, злая, дурацкая «утка»!

Число e в степени $\pi\sqrt{163}$ действительно равно приведенному мною 18-значному числу минус 0,00000000000075... Джон Брилло, которому я приписал эту шутку, – довольно прозрачный псевдоним известного специалиста по теории чисел Джона Бриллхарта. Ссылка на работу Рамануджана вполне оправданна. В ней этот индийский математик рассматривает семейство замечательных почти целых чисел, которому принадлежит и число $e^{\pi\sqrt{163}}$, но, разумеется, Рамануджан прекрасно знал о том, что ни одно из интересовавших его чисел не было целым. Как заметили многие читатели, нетрудно доказать, что такие числа трансцендентны.

Значение числа $e^{\pi\sqrt{163}}$ с 39 знаками после запятой приведено в работе Д. Лемера [10.8]. Вслед за группой девяток идет цифра 2. (См. также [10.9].)

Описание шахматной программы Мак-Хик, якобы составленной Р. Пинклифом, – шуточная пародия на шахматную программу Мак-Хэк, составленную Р. Гринблаттом * из Массачусетского технологического института.

* Пинклиф означает «розовый лист», Гринблатт – «зеленый лист». – *Прим. перев.*

Парадокс специальной теории относительности, который я приписал Х. Принглю («прототипом» которого был английский физик Х. Дингль, утверждавший, будто теория относительности опровергнута знаменитым парадоксом близнецов), хорошо известен. Он сформулирован в виде задачи в [10.10], а более подробно рассмотрен в [10.11], [10.12] и [10.13].

Стационарный внешний наблюдатель увидит, как метровый стержень проходит (хотя и без зазора) в отверстие. Если стержень и пластина имеют конечную толщину, то стержень должен быть чуть короче диаметра отверстия, чтобы конец его не застревал при прохождении сквозь пластину. С точки зрения наблюдателя, на пластине стержень претерпевает лоренцево сокращение, но, кроме того, стержень кажется такому наблюдателю повернутым и поэтому приближается к отверстию под некоторым углом. В результате *задний* конец стержня с точки зрения наблюдателя, связанного с пластиной, проходит сквозь отверстие раньше, чем передний конец стержня, поэтому стержень проходит сквозь отверстие с небольшим зазором, как и прежде. С точки зрения наблюдателя, связанного со стержнем, лоренцеву сокращению подвергнется пластина, отчего отверстие примет эллиптическую форму, но при этом пластина будет казаться повернутой. В этом случае отверстие *сначала* пройдет над передним концом наклоненного стержня, причем без всякого зазора. Когда мы говорим о «сокращении» или «повороте»–это не более чем дань нашему привычному языку. Если перейти на язык четырехмерного неевклидова пространства–времени, то объекты обретают свои формы и ориентации. Написав в свое время популярную книгу о теории относительности, я, к своему стыду, получил более сотни писем от физиков, указывавших, какую глупую ошибку я «проглядел».

Тем, кто любит объяснять этот парадокс, возможно, захочется испытать свои силы на разрешении следующего его варианта. Предположим, что метровый стержень скользит со скоростью, близкой к скорости света, по поверхности огромной металлической пластины, в которой на пути стержня прорезано отверстие диаметром чуть больше длины стержня. Наш мысленный эксперимент протекает в идеальных условиях: мы предполагаем, что трение отсутствует и что стержень и пластина бесконечно тонкие. Когда стержень оказывается над отверстием, гравитация (или какая-то другая сила) тянет его вниз и он проваливаетя сквозь отверстие. С точки зрения наблюдателя, связанного со стержнем, пластина скользнет под ним, и отверстие оказывается искаженным лоренцевым сжатием в такой мере, что это мешает стержню пройти сквозь отверстие. В этом случае стержень и пластина не могут поворачиваться относительно друг друга. Как стержень пройдет сквозь отверстие? (Пожалуйста, не пишите мне писем по этому поводу: ответ я знаю!)

«Рисунок Леонардо да Винчи» выполнен в действительности Антони Равиелли, художником-графиком, известным своими иллюстрациями к книгам по спорту, физике и математике. Один из ранних вариантов этого рисунка навел меня на мысль о первоапрельской колонке. Много лет назад приятель Равиелли заключил шуточное пари с одним писателем о том, что именно Леонардо да Винчи изобрел клапанное сливное устройство, используемое в современном туалете. По настоянию приятеля Равиелли выполнил «рисунок Леонардо» коричневой тушью на тонированной под старину бумаге. Рисунок Равиелли «контрабандой» попал в Нью-Йоркскую публичную библиотеку, получил свой регистрационный номер и был заключен в официальный библиотечный конверт. Увидев все эти атрибуты, удостоверявшие «подлинность» рисунка Леонардо да Винчи с изображением смывного механизма, писатель счел себя проигравшим и уплатил пари.

Аугусто Макарони – шаржированный вариант имени Аугусто Маринони, специалиста по Леонардо да Винчи из Католического университета в Милане, а Рамон Пац-и-Бикуспид – шутливый «псевдоним» Рамона Пац-и-Ремолара, которому действительно удалось найти две недостававшие книги с записями Леонардо да Винчи. Приведенные мной даты из истории туалета – подлинные, включая ссылку на Т. Краппера. Не выдумана и книга У. Рейборна [10.4] – она действительно существует.

Долгие годы я считал книгу Рейборна остроумным розыгрышем на темы, связанные с историей сантехники, пока Х.Л. Менкен не написал свою псевдоисторию современной ванной. Я исходил из двух соображений. (1) В книге Рейборна утверждалось, что выражения “to take crap” – оправляться (в уборной), “crap” – чепуха, безделица происходят от фамилии Краппера, хотя сленговые выражения “crap” и “crapping case” указаны в «Словаре сленга», изданном в Лондоне еще в 1873 г. (2) Рейборн написал небольшую книгу под названием «Выше бюст: история возвышения Отто Тетцлинга и развития бюстгальтера». Выяснилось, однако, что и Томас Краппер, и Отто Титцлинг были реальными людьми и ни одна из книг Рейборна не является чистым розыгрышем.

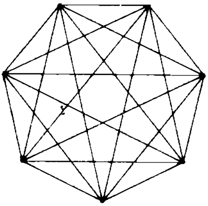
Ротор Рипова – не что иное, как модификация психического мотора, описанного в издававшемся Гуго Гернсбеком сенсационном журнале *Science and Invention* (November 1923, p. 651). В марте 1924 г. читателям этого журнала были вручены специальные призы за лучшее объяснение причин, заставляющих цилиндр вращаться. Приводить цилиндр во вращение может легкое дуновение ветерка в комнате, конвективные токи воздуха от теплой ладони и токи воздуха от дыхания. Эти три причины комбинируются непредсказуемым образом. Те, кто верит в свои психокинетические способности, может попытаться заставить моторчик вращаться: в одних случаях цилиндр вращается в задуманную экспериментатором сторону, в других – в противоположную.

Н. Фодор в своей «Энциклопедии психической науки» [10.14] в статье «Мотор, движимый флюидами» приписывает изобретение бумажного моторчика некоему графу де Тромлину, но не сообщает никаких сведений о нем и не указывает, когда тот изобрел моторчик.

Миссис Генриетта Бердбрейн – лицо вымышленное, но периодическое издание *East West* в Бостоне действительно существует, и те читатели, которые вздумают заглянуть в указанный мной выпуск, обнаружат в нем восторженный отчет С. Криппнера о психологическом моторе, который демонстрировал ему в Праге Роберт Павлита. Павлите посвящена глава в [10.15].

Многие читатели прислали юмористические объяснения действия психического моторчика, выдержанные в духе самого розыгрыша. Например, Марк Дж. Хагман обнаружил, что скорость вращения ротора зависит от содержимого бутылки с ликером, использованной им в качестве подставки для игры: при понижении уровня ликера в бутылке скорость вращения ротора увеличивалась.

В заключение этого дополнения я хотел бы поделиться с читателями мудрым советом, который дал мне мой брат Джим. Каждый автор научно-популярного произведения, сознающий свою ответственность перед широкой аудиторией, должен постоянно иметь в виду три слова: «Точность превыше всего».



ГЛАВА 11

ПОЛИЭДР ЧАСАРА

Математик из Висконсинского университета Д. Кроу открыл удивительное соответствие между остовами n-мерных кубов и решением классической головоломки, известной как «Ханойская башня». О его открытии я писал в свое время [11.11]. Недавно профессор Кроу сделал новое открытие. Исследуя структуру остова хитроумного геометрического тела, известного под названием полиэдра Часара, Кроу обнаружил замечательный изоморфизм между задачей о семицветной карте на торе, «наименьшей конечной проективной плоскостью», решением старой головоломки о тройках девушек, выбираемых из группы в 7 девушек, решением задачи о турнире по бриджу между 8 командами и построением магического квадрата нового типа, получившего название «квадрат Рума».

Очевидно, что полиэдр, приводящий к столь многим не связанным между собой (на первый взгляд) занимательным задачам, сам по себе представляет огромный интерес. Полиэдр Часара – единственный известный многогранник (не считая тетраэдра), у которого нет диагоналей. (Под диагональю мы понимаем отрезок прямой, соединяющий любые две вершины многогранника, или полиэдра, если эти вершины не соединены ребром.) Рассмотрим, например, тетраэдр. У него 4 вершины, 6 ребер, 4 грани и ни одной диагонали: каждую пару вершин соединяет ребро.

Остовы полиэдров изоморфны графам, то есть множествам точек (вершин), соединенных линиями (ребрами). Если в множестве из n вершин каждая пара вершин соединена ребром, то граф называется полным графом с n вершинами. Ясно, что остов любого полиэдра, не имеющего диагоналей, должен быть полным графом. Так как у любого полиэдра число вершин не может быть меньше 4, полный граф с 4 вершинами – простейший из полных графов, соответствующих остову полиэдра.

Теперь нам необходимо с особой тщательностью сформулировать точные определения. Простым полиэдром называется полиэдр, топологически эквивалентный сфере, все грани которого – простые полигоны (многоугольники). Полигон называется простым, если он топологически эквивалентен кругу. (Если мысленно представить себе, что полиэдры имеют эластичные грани, то простой полиэдр при надувании превращается в шар.) Такое определение сразу исключает столь непростые структуры, как 2 полиэдра, имеющие общее ребро или общую вершину, звездчатые полиэдры с пересекающимися гранями, тела со сквозными отверстиями или полостями и т. д. Представьте себе полиэдр с поверхностью, как у куба, у которого в центре одной из граней приклеен куб меньших размеров. Такой полиэдр можно раздуть в сферу, но является ли он простым? Нет, так как одна из его граней топологически эквивалентна кольцу.

Тетраэдр – единственный простой полиэдр, не имеющий диагоналей. Возникает интересный вопрос. Определим тороид как полиэдр, все грани которого – простые полигоны, в то время как само тело топологически эквивалентно сфере с одним или несколькими сквозными отверстиями. Можно ли построить тороид без диагоналей?

Ответ на этот вопрос не был известен вплоть до конца 40-х годов, когда венгерскому топологу Акошу Часару удалось построить такой полиэдр. Остов его – полный граф с 7 вершинами, представленный в симметричной форме на рис. 61 слева. Этот граф изоморфен остову 6-мерного симплекса (6-мерного аналога тетраэдра). Так как любые 2 вершины соединены ребром, у полиэдра, о котором идет речь, 21 ребро и 14 треугольных граней.

Нетрудно изготовить бумажную модель полиэдра

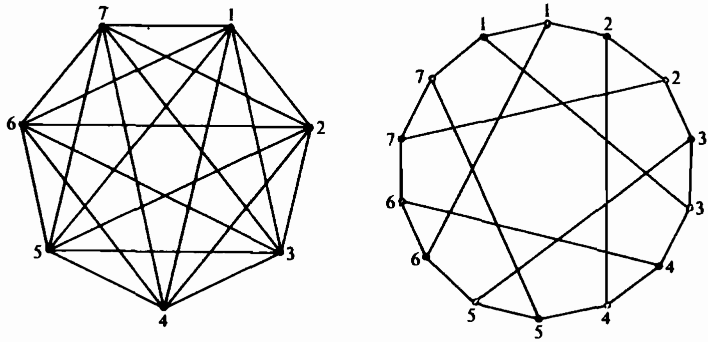


Рис. 61. Остов полиэдра Часара (слева) и двойственная ему семицветная карта на торе (справа).

Часара. Для этого следует вычертить на хорошей бумаге (или на тонком картоне) 2 «выкройки», изображенные на рис. 62, и вырезать их. Раскрасьте 7 темных треугольников с обеих сторон. Сложите выкройки так, чтобы каждая штриховая линия стала «хребтом», а каждая сплошная линия – «долиной».

Затем, взяв выкройку нижней части, согните 2 самых больших треугольника к центру и склейте их липкой лентой вдоль ребер *A*. Затем переверните бумагу, согните 2 самых маленьких треугольника к центру и склейте липкой лентой вдоль ребер *B*. У вас получится полное основание.

Шестигранный «конический» верх вы получите, склеив липкой лентой выкройку вдоль ребер *C*. Водрузите верхнюю часть на основание так, как показано на рисунке полной модели. Сделать это можно двумя способами. Выберите тот, при котором светлые треугольники совмещаются с темными. Склейте липкой лентой конструкцию вдоль 6 ребер, по которым верх примыкает к основанию.

До сих пор не известен ни один другой тороид, не имеющий диагоналей. Используя элементарный диофантов анализ (решая соответствующие уравнения в целых числах), Кроу доказал, что если другой тороид без диагоналей существует, то он имеет по крайней мере 12 вершин и 6 сквозных отверстий. Ход его рассуждений сводился к следующему.

Для простых полиэдров справедлива знаменитая формула, выведенная Леонардом Эйлером, которая устанав-

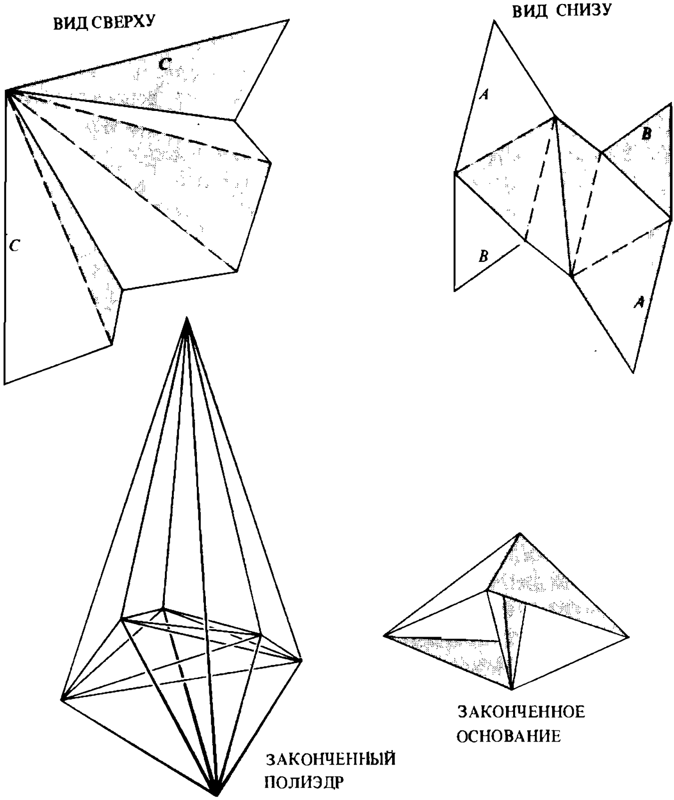


Рис. 62. **Выкройки и образцы для конструирования полиэдра Часара.**

ливает зависимость между числом вершин (v), ребер (e) и граней (f) полиэдра:

$$v - e + f = 2.$$

Эта формула легко доказывается и легко обобщается на случай тороидов. Если h – число сквозных отверстий («дыр»), то

$$v - e + f = 2 - 2h.$$

Остов тороида без диагоналей представляет собой полный граф, а для любого полного графа число его ребер и число его вершин связаны между собой соотношением

$$e = \frac{1}{2}v(v - 1).$$

Число граней и число ребер тороида без диагоналей (все грани которого должны быть треугольниками, так как любая нетреугольная грань имела бы по крайней мере одну диагональ) связаны между собой соотношением

$$f = 2e/3.$$

Подставляя полученные выражения для e и f в формулу $v - e + f = 2 - 2h$ и упрощая полученное выражение, получаем

$$12h = v^2 - 7v + 12,$$

откуда

$$h = \frac{(v - 3)(v - 4)}{12}.$$

Значения v и h должны быть целыми числами. Кроме того, мы знаем, что v должно быть больше 3. Если $v = 4$, то $h = 0$. Эти значения v и h соответствуют тетраэдру. Если $v = 5$ или 6, то h принимает нецелые значения и мы заключаем, что тороидов с 5 и с 6 вершинами, не имеющих диагоналей, не существует. Если $v = 7$, то $h = 1$. Эти значения v и h соответствуют полиэдру Часара. Следующее решение в целых числах – $v = 12$, $h = 6$. Можно ли построить тороид при этих значениях v и h, пока неизвестно. Неизвестно также, существует ли тороид при $v = 15$, $h = 11$ и $v = 16$, $h = 13$. Далее, как отмечает Кроу, число дыр превышает число вершин, что, по-видимому, позволяет исключить из рассмотрения все тороиды с бóльшим числом вершин.

Полиэдр Часара имеет одно сквозное отверстие. Если бы наша модель была сделана не из бумаги, а из резины, то, надув ее, мы могли бы придать полиэдру Часара форму свернутой в кольцо трубы – бублика, или тора. Двадцать одно ребро полиэдра образовали бы полный граф с 7 вершинами на поверхности тора. Ни одно из ребер не пересекалось бы с другим (любые два ребра могут иметь только общую вершину, но не внутреннюю точку). Это доказывает, что полный граф с 7 вершинами имеет тороидальный индекс пересечения – равный 0. (Более подробно об индексах пересечения см. в [11.12].)

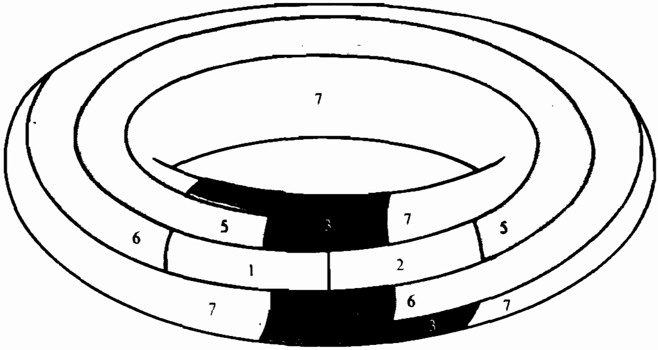


Рис. 63. Семицветная карта на торе (области *3, 4* и *7* обернуты вокруг тора).

Предположим теперь, что мы перешли от полного графа на торе к дуальному графу. Для этого внутрь каждой из 14 треугольных граней следует поставить точку – вершину дуального графа, соединить каждую такую вершину ребрами с 3 вершинами, расположенными в 3 соседних гранях. Так как каждое новое ребро пересекает одно старое, число новых ребер остается прежним – 21. Что же касается числа граней и вершин, то они «меняются местами». Новый граф в симметричной плоской форме изображен на рис. 61, справа. По причинам, которые вскоре станут ясными, Кроу одни вершины сделал серыми, другие – черными, расположил их в чередующемся порядке на окружности и перенумеровал. «Грани» дуального графа увидеть труднее: вы можете нарисовать 7 областей, каждая из которых окружена 6 ребрами.

Дуальный граф также можно начертить на торе, причем ребра его не будут пересекаться. Построив такой граф, мы получим знакомую семицветную карту на поверхности тора (рис. 63). Обратите внимание на то, что любые две из 7 шестиугольных областей имеют общее ребро. Это означает, что для правильной раскраски карты на торе (при которой любые две области, имеющие общую границу, окрашены в различные цвета) требуется 7 красок. На плоскости для правильной раскраски карты необходимо не более 4 красок, а на торе – не более 7.

В качестве самостоятельного упражнения мы рекомендуем читателю выбрать по точке внутри каждой области на торе и посмотреть, получится ли из карты дуальная ей карта, если воспользоваться той же самой процедурой. Соединим все выбранные точки попарно ребрами. Каждое ребро должно пересекать только одно звено границы, новые ребра не должны пересекать друг друга. Разумеется, некоторые линии должны наворачиваться на тор (по меридиану). Если вам удастся соблюсти все требования, то новый граф окажется изоморфным полному графу с 7 вершинами и остову полиэдра Часара.

А вот как Кроу использовал граф, дуальный остову полиэдра Часара, для решения следующей задачи. В доме живут 7 девушек. Каждый день трое из них отправляются в город. Как следует разбить девушек на тройки, чтобы к концу недели две девушки оказались в составе ровно одной из 7 троек?

Граф, изображенный на рис. 61, справа, дает 2 решения задачи. Согласно одному решению, нужно отметить каждую черную вершину и записать (неупорядоченную) тройку чисел у серой вершины, соединенной с ней ребром. Согласно другому решению, нужно написать числа у черных вершин, соединенных ребрами с серыми вершинами. Тройки чисел имеют следующий вид:

Черные вершины	Серые вершины
124	126
235	237
346	341
457	452
561	563
672	674
713	715

Каждый столбец чисел называется системой троек Штейнера или конечной проективной плоскостью порядка 2. Системы Штейнера и проективные плоскости играют необычайно важную роль в современной комбинаторной теории, но мы (к величайшему сожалению) упоминаем о них лишь вскользь.

Поскольку граф семицветной карты на торе дуален остову полиэдра Часара и каждая из его 14 вершин соответствует одной из 14 граней модели полиэдра Часара (черные вершины соответствуют белым граням, серые – темным), мы можем столь же легко извлечь 2 решения из модели. В нашей модели ни одна грань не имеет общей границы с гранью того же цвета. Если перенумеровать грани в соответствии с нумерацией вершин графа, то тройки чисел на трех белых гранях, примыкающих к каждой темной грани, дают одно решение, а тройки чисел на трех темных гранях, примыкающих к каждой белой грани, дают второе решение.

Другой способ получить те же два набора троек чисел с помощью модели состоит в том, чтобы перенумеровать вершины модели числами от 1 до 7 в каком угодно порядке. Числа у трех вершин каждой темной грани дадут один набор троек, а числа у трех вершин каждой белой грани – другой набор троек. Эти два решения эквивалентны двум выписанным выше столбцам троек, хотя числа могут не совпадать: не следует забывать о том, что числа – не более чем произвольные символы вершин симметричного графа. Чтобы убедиться в эквивалентности полученных решений, достаточно произвести некоторые перестановки чисел, например поменять местами все 1 и все 5, все 5 и все 3 и т. д.

Полученные любым из указаных методов два решения тождественны в том смысле, что любое из них может быть сведено к другому с помощью перестановки элементов. Иначе говоря, существует только одно фундаментальное решение. Следующая по старшинству система троек Штейнера имеет порядок 9. Для нее также существует единственное решение: 9 девушек отправляются в город группами по трое в течение 12 дней; любые две девушки входят ровно в одну тройку. Сумеете ли вы найти это решение?

Кроу установил, что два варианта решения, найденные нами для системы Штейнера порядка 7, связаны между собой необычным образом. Ни одна тройка не входит в обе системы, и если две пары девушек в одной системе троек появляются с одной и той же третьей девушкой (например, в первой системе девушки 1 и 2 образуют тройку с девушкой 4 и девушкой 3 и 6 также образуют тройку с девушкой 4), то во второй системе те же пары образуют тройки с различными девушками (5, 6). В тех случаях, когда выполняются эти свойства, два решения называются ортогональными.

Система троек Штейнера порядка n возможна только при $n \equiv 1$ или $n \equiv 3 \pmod 6$, то есть при n, дающих остатки 1 и 3 при делении на 6. Каждая ортогональная пара систем Штейнера порядка n, продолжает объяснять Кроу, дает решение следующей задачи об игре в бридж

	1	2	3	4	5	6	7
1	1,8			5,7		3,4	2,6
2	3,7	2,8			6,1		4,5
3	5,6	4,1	3,8			7,2	
4		6,7	5,2	4,8			1,3
1	2,4		7,1	6,3	5,8		
6		3,5		1,2	7,4	6,8	
7			4,6		2,3	1,5	7,8

Рис. 64. Наименьший нетривиальный квадрат Рума.

для $n + 1$ команд. Предположим, что имеется 8 команд игроков в бридж и 7 столов. Каждая команда должна сыграть ровно один раз с каждой из остальных команд и побывать ровно по одному разу за каждым столом.

Вот как по совету Кроу следует организовать турнир. Прежде всего начертим квадратную матрицу 7 клеток на 7. Рассмотрим пару чисел 1, 2. В первой системе эта пара образует тройку с числом 4, во второй – с числом 6, поэтому мы вписываем числа 1, 2 в клетку на пересечении столбца 4 и строки 6 (рис. 64). Рассмотрим теперь другую пару чисел – 1, 3. В первой системе эта пара образует тройку с числом 7, во второй – с числом 4, поэтому пару 1, 3 мы вписываем в клетку на пересечении столбца 7 и строки 4. Аналогичную процедуру мы проделываем со всеми парами чисел. На заключительном шаге мы составляем пары из числа 8 с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и вписываем их по порядку в клетки, стоящие на диагонали от левого верхнего угла до правого нижнего. Каждый столбец соответствует столу, каждая строка – раунду, разыгрываемому одновременно за четырьмя из семи столов. Все условия, требуемые для нашего турнира, соблюдены.

Построенная нами матрица называется квадратом Рума порядка 8. Каждый такой квадрат представляет собой некоторое распределение четного числа объектов $(n + 1)$ по квадратной матрице со стороной в n клеток. Каждая клетка либо пуста, либо содержит ровно 2 различных объекта. Кроме того, каждый объект встречается ровно один раз в каждой строке и в каждом столбце и каждая (неупорядоченная) пара объектов должна находиться ровно в одной клетке.

Наименьший квадрат Рума тривиален. Это квадрат порядка 2, состоящий из одной клетки, в которую вписаны числа 1, 2. Для 4 или 6 объектов квадраты Рума не существуют, поэтому порядок 8 дает нам наименьший нетривиальный квадрат Рума.

Многие годы я думал, что квадраты получили название “Room square” потому, что объекты приходится размещать по клеткам, или «комнатам»: room по-английски – комната, помещение. Однако оказалось, что они названы в честь Томаса Дж. Рума, математика, который в 1955 г. посвятил им короткую заметку. С тех пор специалисты по комбинаторике занимаются исследованием этих квадратов. Позднее выяснилось, что квадраты Рума применялись организаторами турниров по бриджу еще до 1900 г., но математики обратили на них внимание только после заметки Рума.

Но и это еще не все! Г. Кокстер при подготовке 12-го исправленного и дополненного издания классической книги У. У. Роуза Болла [11.13] объяснил, каким образом систему троек Штейнера порядка 7 можно использовать для построения «аналлагматического замощения» порядка 8. Рассмотрим шахматную доску порядка 8 (то есть 8×8 клеток). Если сравнить любые две ее горизонтали, поместив их рядом, то выяснится, что либо все клетки в одной горизонтали совпадают с соседними по вертикали клетками другой горизонтали, либо все соседние по вертикали клетки двух горизонталей не совпадают по цвету. Теперь мы хотим раскрасить 64 клетки в 2 цвета так, чтобы выполнялось следующее условие: для любых

Рис. 65. Шахматная доска Адамара.

двух горизонталей ровно половина соседних по вертикали клеток совпадает по цвету и ровно половина не совпадает.

Квадраты, о которых сейчас идет речь, известны под названием матриц Адамара в честь французского математика Жака Адамара, занимавшегося исследованием таких матриц в 90-е годы прошлого столетия. Если отвлечься от тривиального случая матриц порядка 2, то матрицы Адамара возможны только для порядков, кратных 4. Неизвестно также, при всех ли порядках, кратных 4, матрицы Адамара существуют.

На рис. 65 показано, как наша первая система троек Штейнера порождает матрицу Адамара для шахматной доски. В задаче речь идет о 8 воспитанницах и 8 днях. Перенумеруем строки и столбцы так, как показано на рис. 65. Восьмая воспитанница – старшая в группе, которая ежедневно выводит на прогулку по 3 воспитанницы, на восьмой день все 8 воспитанниц отправляются в город. В каждый из дней (дням соответствуют строки) цвет клеток указывает, какие 3 воспитанницы (плюс старшая воспитанница) отправляются в город. Расписание (решение задачи) имеет вид матрицы Адамара!

Существует простой метод, позволяющий порождать матрицы Адамара для всех порядков, которые являются степенями двойки (рис. 66). Матрица Адамара порядка 2 вкладывается в 3 угла квадрата порядка 4, а четвертый (правый нижний) угол заполняется негативом матрицы порядка 2, то есть матрицы, у которой все 4 клетки перекрашены в противоположные цвета. Та же процедура

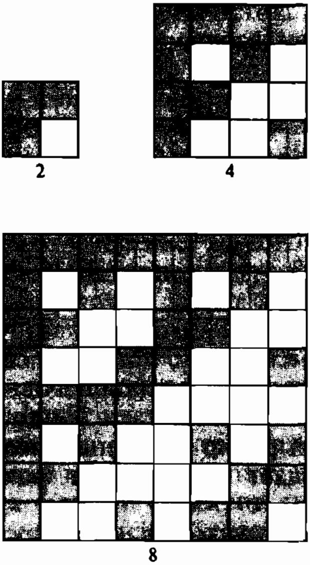


Рис. 66. Матрицы Адамара для степеней двойки.

с матрицами порядка 4 порождает матрицу Адамара порядка 8 и т.д.

Этот способ допускает обобщение. Если даны 2 матрицы Адамара порядков *m* и *n*, то матрицу порядка *mn* можно построить, просто заменяя каждую клетку одного цвета в матрице порядка *m* матрицей порядка *n*, а каждую клетку другого цвета в матрице порядка *m* – негативом матрицы порядка *n*. Получившаяся большая матрица называется тензорным произведением меньших матриц. Будет ли число *m* больше, меньше или равно *n*, не имеет значения. Например, если у вас есть матрица Адамара порядка 12, то тензорное произведение двух таких матриц даст вам матрицу Адамара порядка 144.

Матрицы Адамара – отнюдь не математический курьез или забава. Они применяются при построении двоичных кодов с исправлением ошибок. Эти приложения описаны в уже упоминавшейся книге Роуза Болла [11.13], дополненной Кокстером столь основательно, что она по существу представляет собой новую книгу. Когда в 1969 г. космический корабль «Маринер» передавал на Землю снимки Марса, передача осуществлялась с помощью кода с исправлением ошибок, основанного на матрице Адамара порядка 8.

В заключение вернемся еще раз к полиэдру Часара и поставим интересную задачу. Тороид Часара не может быть построен, если все его грани имеют форму равносторонних треугольников. Предположим, что тороид с одним сквозным отверстием построен только из конгруэнтных треугольных граней (все грани – равносторонние). Какое минимальное число граней он может иметь? Б. Стюарт из университета штата Мичиган, рассматривает эту задачу в своей книге «Приключения среди тороидов» [11.14].

Стюарт приводит способ построения такого тора с 54 гранями, 27 вершинами и 81 ребром. Один из его студентов, Курт Шмукер, построил тороид с одним сквозным отверстием и 48 треугольными равносторонними гранями. Минимально ли это число – еще одна увлекательная «тороидальная» задача, решение которой пока неизвестно.

ОТВЕТЫ

Единственное решение для системы троек Штейнера порядка 9 порождается матрицей

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

Строки (*abc*, *def*, *ghi*) дают 3 тройки. Столбцы (*adg*, *beh*, *cfi*) дают еще 3 тройки. Главная и побочная диагонали (*aei*, *ceg*) и треугольники из коротких диагоналей (*bfg*, *cdh*, *afh*, *bdi*) завершают список, состоящий из 12 троек.

Порядки систем троек Штейнера при делении на 6 дают остатки 1 или 3. Следующая («по старшинству») система троек Штейнера имеет порядок 13 и допускает 2 решения. Система Штейнера порядка 15 должна иметь 80 решений.

Модель К. Шмукера – тороид с 1 сквозным отверстием и 48 конгруэнтными равносторонними треугольными гранями каждый может легко построить сам. Она состоит из соединенных в кольцо 8 правильных октаэдров (каждый октаэдр примыкает к другому полной гранью) (рис. 67). Шмукер обнаружил, что такие кольца можно составить из 8 одинаковых копий любого платонова тела, кроме тетраэдра. Сколько бы мы тетраэдров не брали,

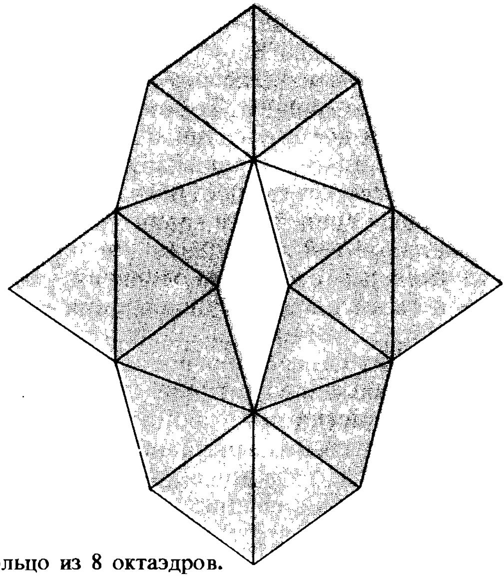


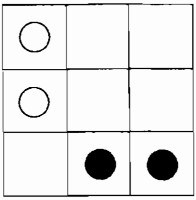
Рис. 67. Кольцо из 8 октаэдров.

составить из них кольцо оказывается невозможным, даже если они будут пересекаться. Это доказал Дж. Мейсон в работе «Можно ли склеить правильные тетраэдры гранью к грани так, чтобы получилось кольцо?» [11.15].

ДОПОЛНЕНИЕ

Когда я в журнальном варианте этой главы кратко упомянул о матрицах Адамара, мне еще не было известно об их применении в кодах для передачи телеметрических данных, разработанных С. Голомбом, и об использовании таких кодов при зондировании Марса с борта космического корабля «Маринер». Разработка кодов явилась результатом сотрудничества Голомба с Лабораторией реактивного движения Калифорнийского технологического института (см. библиографию в [11.3]). Порядок матрицы Адамара больше 2 должен быть кратен 4, но еще неизвестно, существуют ли матрицы Адамара всех порядков, кратных 4. Как сообщил мне Голомб, матрицу Адамара порядка 268 построил Кануэ Савада [11.16]. Следующий наименьший порядок, относительно которого неизвестно, существует ли для него матрица Адамара, равен 428.

Матрицы Адамара широко применяются при обработке изображений. «Преобразование Адамара» (аналогичное «преобразованию Фурье») порождает математическую голограмму реального изображения. Голомб был первым, кто понял, что классические комбинаторные проблемы размещения объектов нередко позволяют находить оптимальные решения проблем, связанных с обработкой информации, и что стоит заняться поиском технических проблем, для которых комбинаторные схемы размещения объектов служат решением.



ГЛАВА 12

ДОДЖЕМ И ДРУГИЕ ПРОСТЫЕ ИГРЫ

Рассмотрим игру двух лиц, обладающую следующими особенностями. (1) Это игра с полной информацией, то есть после каждого хода оба игрока располагают полным знанием структуры игры. (2) Игроки делают ходы поочередно. (3) Решения принимаются не случайным образом. (4) Игра заканчивается после конечного числа ходов выигрышем одного игрока. (Ничья невозможна.)

Нетрудно видеть, что выигрышная стратегия должна существовать либо для первого, либо для второго игрока. Если первый игрок (назовем его A) не имеет выигрышной стратегии, то он должен проиграть. Но тогда выигрышная стратегия должна существовать для второго игрока (обозначим его B). Останется ли это рассуждение в силе, если мы отменим условие, согласно которому игра должна заканчиваться за конечное число ходов?

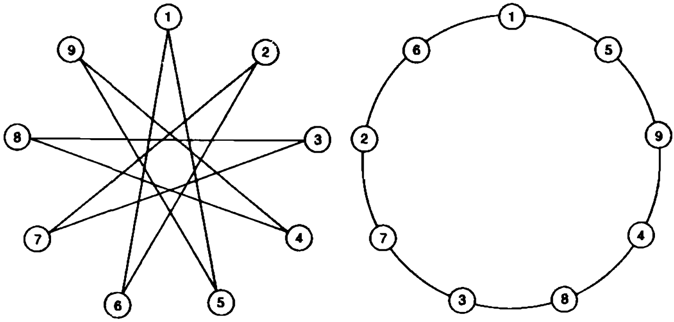


Рис. 68. Звездный ним (слева) и выигрышная стратегия для него (справа).

Интересно отметить, что все зависит от того, примем мы или не примем «аксиому выбора». Эта знаменитая аксиома утверждает, что из любого (конечного или бесконечного) набора непустых множеств, не имеющих общих элементов, можно построить новое множество, выбирая из каждого множества по одному элементу. В 30-е годы Стефан Банах, Станислав Мазур и Станислав Улам открыли бесконечную игру, в которой ни A, ни B не имеют выигрышной стратегии, если принять аксиому выбора. Некоторые комментаторы были склонны усматривать в этом подтверждение унитарианской догмы о том, что существует «самое большее» один Бог: ведь если бы существовало два бога, то, вздумай они играть в такую игру, ни у одного из них не было бы выигрышной стратегии, поэтому ни один из них не мог бы выиграть и, следовательно, его нельзя было бы считать всемогущим!

Но это, как говорится, попутные замечания. Сейчас мы займемся некоторыми новыми неслучайными играми для двух лиц. Правила этих игр чрезвычайно просты, и для каждой игры выигрышная стратегия либо неизвестна, либо может быть известна. Во все игры, кроме одной, играть нужно фишками, расставляемыми на специальных досках, которые нетрудно начертить на листе картона или плотной бумаги. Фишки должны быть двух различных цветов. Можно воспользоваться также пуговицами, камешками или любыми другими мелкими предметами – всем, чем угодно читателю, который пожелает сыграть в предлагаемые ниже игры и проанализировать их.

На рис. 68 вы видите пример почти тривиальной игры, близкой игре «ним», но со стратегией, которая видна не сразу. Играют в эту игру на звездообразной фигуре, изображенной на рис. 68, слева. Поставьте по одной фишке на каждую из 9 вершин звезды. Игроки *A* и *B* делают ходы по очереди, снимая при каждом ходе либо одну, либо две фишки, соединенные отрезком прямой. Тот, кто снимает последнюю фишку, выигрывает.

У игрока *B* при игре в звездный ним есть выигрышная стратегия, использующая симметрию игровой доски. Представьте себе, что отрезки прямых, соединяющие вершины звезды, – это нити. Тогда всю конфигурацию можно развернуть в окружность, топологически эквивалентную нитяной звезде. Если *A* снимает с окружности 1 фишку, то *B* снимает 2 фишки с противоположного участка окружности. Если *A* берет 2 фишки, то *B* снимает с противоположного участка окружности 1 фишку. В обоих случаях на окружности остаются две группы из 3 фишек. Какую бы фишку (или какие бы фишки) ни взял *A* из одной группы, *B* берет соответствующую фишку (или фишки) из другой группы. Ясно, что последняя фишка достанется игроку *B*. Сыграв несколько партий на круге и переводя каждый ход в эквивалентный ему ход на звезде, читатель вскоре почувствует, как можно использовать симметрию звезды для достижения выигрыша.

В конце 60-х годов Дж. Леутуэйт из шотландского города Терсо изобрел замечательную игру с искусно скрытой стратегией «парных ходов», обеспечивающей второму игроку заведомый выигрыш. На доске размером 5×5 квадратных клеток в шахматном порядке расстав-

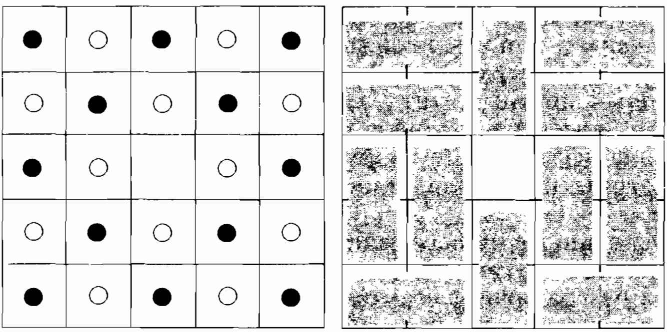


Рис. 69. Игра Дж. Луитуэйта (слева) и стратегия парных ходов для нее (справа).

ляют 13 черных и 12 белых фишек, после чего любая из черных фишек, например стоящая на центральном поле, снимается (рис. 69, слева).

Игрок *A* ходит белыми фишками, игрок *B* – черными. Ходы делаются по вертикали и горизонтали. Проигравшим считается тот из игроков, кто первым не сможет сделать очередной ход. Если доску раскрасить подобно шахматной доске, то станет ясно, что каждая фишка со своего поля переходит на поле другого цвета и что ни одну фишку нельзя заставить ходить дважды. Следовательно, игра для каждого игрока не может продолжаться более 12 ходов. Но она может окончиться и раньше выигрышем для любого игрока, если только *B* не будет придерживаться рациональной стратегии.

Рациональная стратегия для *B* состоит в том, чтобы мысленно представить себе всю матрицу (за исключением пустой клетки), покрытую 12 неперекрывающимися костями домино. Как именно они разложены на доске, не имеет значения. На рис. 69, справа показан один из способов покрытия доски костями домино. Какой бы ход ни сделал *A*, *B* просто делает ход на ту кость домино, которую только что покинул *A*. При такой стратегии у *B* всегда есть ход после очередного хода *A*, поэтому *B* заведомо выигрывает за 12 или за меньшее число ходов.

В игру Леутуэйта можно играть не только фишками на доске, но и квадратными плитками или кубиками, передвигаемыми внутри плоской коробочки, на дне которой начерчена матрица. Предположим теперь, что в правила игры внесена поправка, позволяющая любому игроку в любое время ходить любым числом (от 1 до 4) фишек, стоящих на одной горизонтали или вертикали, если первая и последняя фишки в выбранной им горизонтали или вертикали «его» цвета. Перед нами великолепный пример того, как тривиальное (на первый взгляд) изменение правила приводит к резкому усложнению анализа игры. Леутуэйту не удалось найти выигрышную стратегию ни для одного из игроков в этом варианте игры.

Основанные на перемещении единичных квадратов по квадратной матрице игры открывают перед исследователем безграничные возможности для анализа неизученных возможностей. Леутуэйт предложил еще одну увлекательную игру, которую он назвал «меандр». В исходной позиции 24 одинаковые квадратные плитки

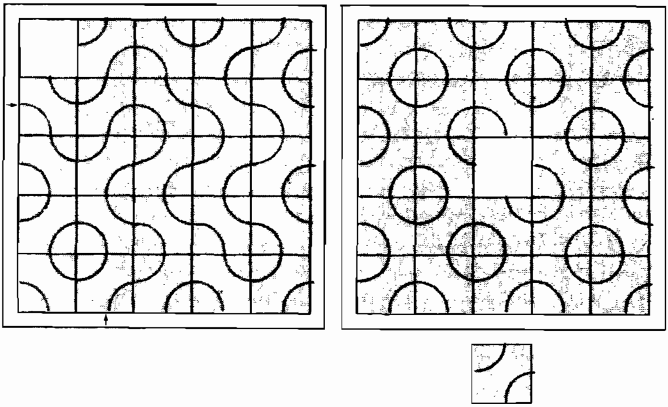


Рис. 70. Меандр. Пример узора, составленного на доске (слева), и отдельная квадратная плитка (сверху). Возможный исход игры в меандр (справа).

раскладывают на доске так, как показано на рис. 70, слева. Игроки делают ходы поочередно, перемещая один квадрат или «столбик» из двух, трех или четырех квадратиков, расположенных по горизонтали или вертикали. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выигрывает, сложив узор, в котором по крайней мере 3 плитки образуют непрерывную линию (или путь), соединяющую два края доски (либо противоположные, либо смежные, сходящиеся в одном углу). На рис. 70, справа изображен такой узор («победная линия» указана стрелками сверху и справа). Игра меандр, по-видимому, слишком сложна для того, чтобы ее можно было проанализировать без компьютера, а возможно и с помощью компьютера.

В 1972 г. Колин Во, бывший тогда студентом-математиком Кембриджского университета, изобрел интересную игру, которую назвал «доджем», так как фишке одного игрока часто приходится “to dodge” – увертываться от ударов со стороны фишек противника. Играть в доджем можно на доске любых размеров. Но даже на доске 3 × 3 игра достаточно сложна, чтобы быть интересной.

В начальной позиции на доску ставят 2 черные и 2 белые фишки так, как показано на рис. 71, вверху. Черные располагаются у южного края доски, белые – у западного. Игроки поочередно делают ход фишкой на одно поле

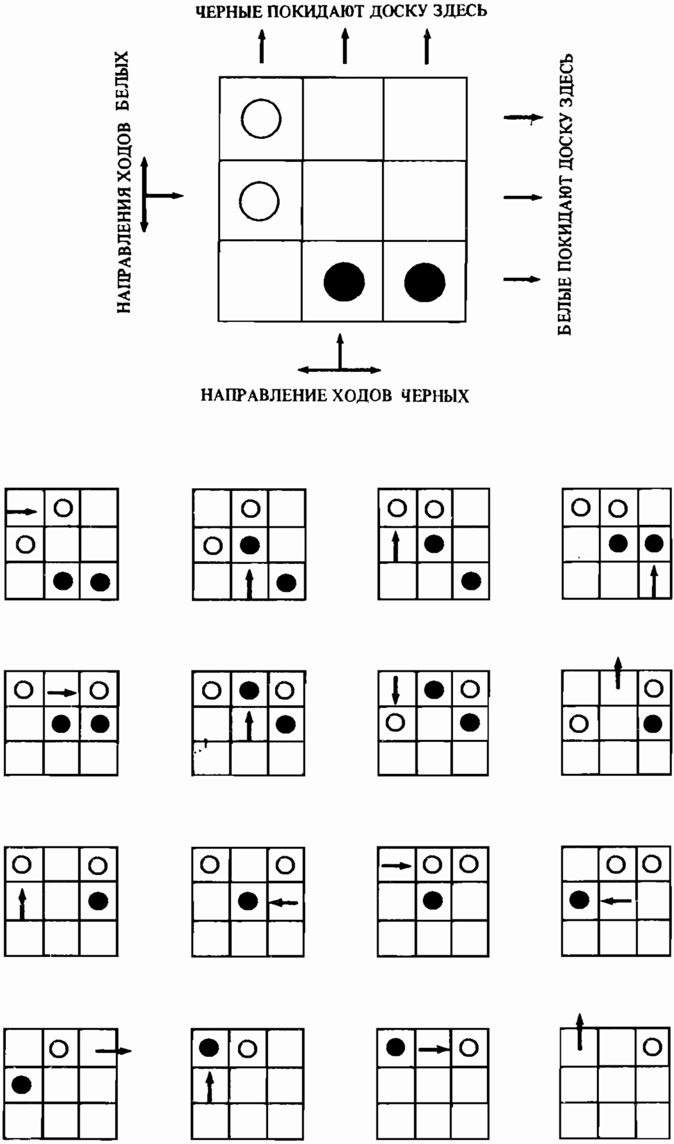


Рис. 71. Игра доджем Колина Во (вверху). Партия в доджем, выигран ная черными.

вперед, влево или вправо, если эти поля не заняты фишками любого цвета или путь фишке не преграждает край доски. Каждый игрок стремится переместить свои фишки к дальнему от себя краю доски. Иначе говоря, черные могут перемещаться на север, запад или восток и стремятся покинуть доску через ее северный край. Белые могут перемещаться на восток, север или юг и стремятся покинуть доску через ее восточный край.

Запирать фишки противника не разрешается. Каждый игрок должен оставлять своему противнику возможность для ответного хода, допускаемого правилом игры. Игроку, запершему фишки противника, засчитывается поражение. Выигрывает тот из игроков, чьи фишки раньше покинут доску. На рис. 71, внизу показана типичная партия, которую выиграли черные.

Во уверяет меня, что на доске 3×3 для первого игрока существует выигрышная стратегия. Насколько мне известно, анализ игры на досках большего порядка не производился. На доске $n \times n$ у каждого игрока $n - 1$ фишек расставлены в исходной позиции, соответственно вдоль западного и южного края доски. Поле в юго-западном углу доски свободно. Лучше всего взять 7 шашек или пешек одного цвета, а 7 – другого и играть на обычной шахматной доске 8×8.

По-прежнему не поддается анализу ставшая ныне классической игра Пита Хейна гекс (см. гл. 8 [12.6]). Оптимальную стратегию для гекса удалось найти только для небольших досок. Для читателей, которые незнакомы с этой игрой, скажу, что играют в гекс на доске в форме ромба $n \times n$, сложенного из правильных шестиугольников (на рис. 72 изображена доска для игры в гекс 4×4). Белые начинают игру, ставя белую фишку на любое поле. Игроки делают ходы по очереди, ставя фишки своего цвета на свободные поля. Брать фишку противника не разрешается. Выигрывает игрок, которому удается выстроить цепочку из фишек своего цвета от одного из «своих» краев доски до другого. Белые выстраивают цепочку из белых фишек между северным краем доски и южным, черные выстраивают цепочку из черных фишек между восточным краем доски и западным.

Нетрудно видеть, что при игре в гекс ничья невозможна. Существует знаменитое доказательство Дж. Нэша (который изобрел гекс независимо от П. Хейна) существования выигрышной стратегии для первого игро-

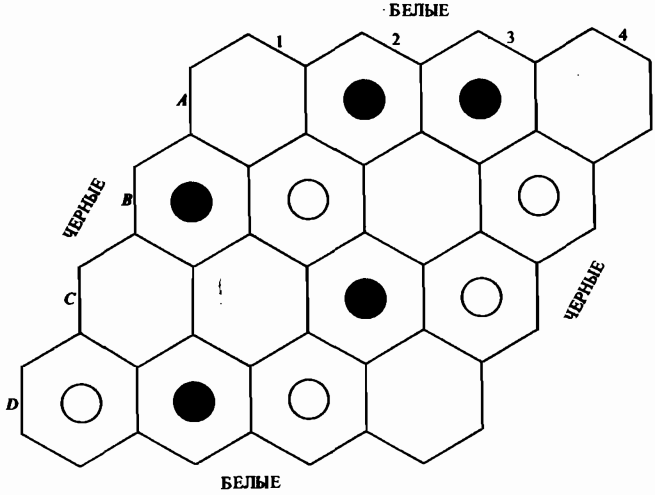


Рис. 72. Игра в рекс (обращенный гекс). Белые начинают и выигрывают.

ка на ромбической доске любых размеров, хотя в нем не содержится ни малейших намеков относительно того, какой может быть эта стратегия.

Предположим, что белые разрешают черным указать то поле, на котором им, белым, следует поставить белую фишку первым ходом. Могут ли в этом случае белые выиграть, если будут действовать рационально? Модифицированный вариант гекса известен под названием гекса Бека в честь Анатолия Бека, предложившего и исследовавшего эту игру. В гл. 5 своей книги [12.2], рассказывая о традиционном варианте гекса, Бек показал, что черные всегда выигрывают, если белые по их указанию первым ходом занимают поле, стоящее в остром углу ромбической доски. Иначе говоря, такой ход заведомо проигрышен для белых, хотя доказательство Бека также не позволяет конструктивно найти выигрышную стратегию черных. Тем не менее, как гласит подстрочное примечание, “it wrecks Beck’s hex” – она побивает гекс Бека.

А что можно сказать о мизере, или обращенном гексе, известном под названием рекс, в котором первый, кто соединит «свои» края доски цепочкой из фишек своего цвета, проигрывает? Как это часто бывает при анализе игр двух лиц, «расколоть» обратную игру оказывается гораздо труднее. Выигрышная стратегия в общем случае неизвестна, хотя Р. Уиндер в неопубликованной работе показал, что в игре рекс выигрышная стратегия на досках четного порядка существует для первого игрока, а на досках нечетного порядка – для второго. Позднее Р. Эвансу удалось развить доказательство Уиндера, продолжив его еще на один шаг: Эванс показал, что на досках четного порядка существует выигрышная стратегия, если белые первым ходом занимают поле в остром углу ромбической доски.

Рекс на доске порядка 2 тривиален. Исчерпывающий анализ этой игры удается также провести и в случае ромбической доски 3 × 3. Играть в рекс на доске порядка 4 настолько сложно, что выигрышная стратегия до сих пор не сформулирована, хотя известно, что занятие поля в остром углу ромбической доски при рациональной дальнейшей игре обеспечивает победу. Композицию, изображенную на рис. 72, Эванс предлагает в качестве задачи (речь идет об игре в рекс на доске порядка 4). Можете ли вы определить единственно правильный ход белых?

А вот еще более простая игра, для которой неизвестна общая стратегия. Играют в нее на доске $1 \times n$ (ряд из n квадратов), все фишки одинаковы. Игроки A и B делают ходы по очереди, ставя каждый раз на доску по 1 фишке до тех пор, пока кому-нибудь из них не удастся выстроить цепочку из трех идущих подряд фишек. Может ли что-нибудь быть проще? A всегда может выиграть при нечетном n, заняв первым ходом центральное поле, а затем занимая поля, симметричные тем, что занимает игрок B. Однако при четном n все обстоит не так просто. В большинстве случаев при четном n игрок A, по-видимому, может выиграть, но не обязательно, и исключения не следуют какой-нибудь закономерности. Возьмем, например, $n = 6$. Не хотите ли вы проанализировать игру на доске 1×6 с тем, чтобы выяснить, кто выиграет?

Дж. Конуэй заметил, что эта игра эквивалентна игре, которую я назвал «крэм $1 \times n$» [12.7] – cram (*англ.*) – давка, толкотня. Единственное отличие состоит в том, что играть нужно костями тримино, а не домино. Установить изоморфизм нетрудно. Ясно, что в описанной выше игре опасно ставить свою фишку рядом с другой фишкой или через одно поле от нее, так как и тот, и другой ход позволяет противнику выиграть на следующем же ходу. Поэтому оба хода мы должны запретить. Проще всего потребовать, чтобы при каждом ходе игрок занимал три поля, расположенных подряд по горизонтали или по вертикали. В свою очередь это требование эквивалентно требованию выкладывать на доску при каждом ходе тримино. (Средний квадрат в тримино соответствует занятию одного поля, а квадраты на концах обусловлены двумя новыми правилами.) Выигрывает тот из игроков, который последним выкладывает тримино на доску. (Для полной эквивалентности мы должны разрешить игрокам выкладывать тримино и у края доски так, что один квадрат будет выступать за игровое поле.) Разумеется, в игру можно играть иначе: выстроить в ряд n фишек и, делая ходы по очереди, забирать каждый раз по 3 соседние фишки.

Этот триплетный вариант крэма рассмотрен в классической статье Р. Гая и С. Смита «G-значения различных игр» [12.1]. Так как эта игра получила код 007, ее стали называть игрой Джеймса Бонда. Элвин Берлекамп произвел (с помощью компьютера) анализ игры до очень больших четных n, не обнаружив никакой периодичности в числах Гранди. Это означает, что никому не удалось даже подойти к общему правилу. Не решена проблема существования выигрышной стратегии и в мизерном варианте крэма $1 \times n$ с тримино (независимо от четности n).

Улам предложил обобщить разыгрываемый с помощью фишек вариант крэма, в котором на доску выкладываются тримино, на случай квадратной матрицы. Игроки по очереди выкладывают на доску по одному тримино. Выигрывает тот, кто сумеет выложить 3 кости тримино либо в ряд по вертикали или горизонтали, либо по диагонали. Как и в предыдущем варианте, доски нечетного порядка позволяют указать тривиальную стратегию, так как первый игрок, заняв центральное поле, затем продолжает делать ходы, симметричные ходам противника, пока тот не сдастся. На досках четного порядка анализ сложнее: в случае доски порядка 4 он тривиален, но для досок порядка 6 или 8 неизвестно даже, для которого из двух игроков существует выигрышная стратегия. На рис. 73 изображена позиция, присланная мне Уламом, в которой игрок, делающий следующий ход, проигрывает.

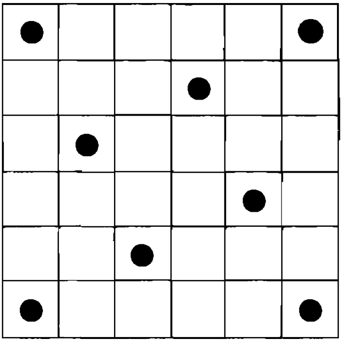


Рис. 73. Вариант игры в крэм с тримино, предложенный Ст. Уламом.

И в этом случае мы можем играть в эквивалентную игру, поочередно выставляя на доску полимино, в нашем случае – квадраты из 9 клеток, но в действительности такой вариант не слишком удобен, так как нам придется допустить, чтобы эти квадраты не только выходили за пределы доски, но и находили друг на друга двумя клетками (угловой и примыкающей к стороне). Никто даже не приступал к поиску общей стратегии для этой игры ни в прямой, ни в обращенной форме (мизер).

ОТВЕТЫ

Ответы на 2 приведенные в этой главе задачи гласят: в игре крэм с тримино на доске 1×6 выигрывает второй игрок, а белые выигрывают при игре в рекс (обращенный гекс) на доске 4×4, заняв поле на пересечении горизонтали *C* и диагонали 1. Выигрышная стратегия для первого игрока на доске 4×4 при игре в рекс неизвестна, а выигрышная стратегия парных ходов для второго игрока на доске 5×5 была найдена Д. Силверманом. Для досок более высокого порядка вопрос о существовании выигрышных стратегий остается открытым.

Игра Дж. Леутуэйта допускает очевидное обобщение на прямоугольные доски любых форм и размеров. Если прямоугольник имеет нечетное число клеток, то выигрывает второй игрок; если число клеток четно, то выигрывает первый игрок. (В последнем случае при выкладывании на доску костей домино покрывать следует и клетку, первоначально бывшую пустой.)

К. Фульвес предложил вместо расчерчивания (для наглядности) доски на кости домино использовать незаметную для партнера разметку фишек, позволяющую выставлять их на доску в ориентации, которая разрешает группировать их в пары. Например, небольшая дырочка на ободке пешки или шашки позволит вам ориентировать эти фигуры так, чтобы отверстия каждой пары были направлены друг на друга. Вы сможете играть, как бы выкладывая домино на доску, но не запоминая схему покрытия доски костями домино.

ДОПОЛНЕНИЕ

Д. Фремлин и Д. Ребертус независимо друг от друга составили компьютерные программы и проверили, что при игре в додж порядка 3 выигрывает первый игрок. Белые выигрывают только в том случае, если поставят свою фишку в угол. Полный анализ игры порядка 3 приведен в [12.5]. Для игры в додж порядка 4 анализ не проводился.

Дж. Бейдлер из университета Скрэнтона нашел с помощью компьютера, что вариант игры Улама с тримино на стандартной доске 6 × 6 заканчивается выигрышем первого игрока только в том случае, если он делает первый ход на одну из 4 центральных клеток. Бейдлер обобщил игру на случай прямоугольных досок и получил результаты, представленные на рис. 74. Числа указывают координаты поля (номера горизонтали и вертикали), на которое должен пойти первый игрок, чтобы выиграть. Если игра идет в обращенном (мизерном) варианте, то,

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2,2	•	2,3	•	2,4	2,5	2,5	•	2,6	3,3
4		3,3	•	3,4	4,1	•	•	3,8		
5			3,3	4,1	3,4	3,5	3,5			
6				4,4						

Рис. 74. Результаты, полученные Дж. Бейдлером при анализе варианта игры Ст. Улама с тримино.

как установил Бейдлер, второй игрок выигрывает на досках 3×3, 3×4, 3×5 и 4×4. Бейдлер доказал, что при игре в крэм с тримино в мизерном варианте на доске $1 \times n$ при $n < 19$ первый игрок выигрывает при $n = 4, 5, 7, 8, 11, 14, 15, 17$ и 19, а второй – при всех остальных значениях n.

ГЛАВА 13

МОЗАИКИ ИЗ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

> Множество стен и полов Альгамбры в Испании, выложенных плитками всех цветов и оттенков, свидетельствуют о том, что мавры достигли высокого мастерства в искусстве заполнения плоскости подобными фигурами, плотно, без зазоров пригнанными друг к другу. Жаль, что религия запрещала им изображать людей и животных!
>
> *М. К. Эшер*

Представьте себе, что у вас имеется неограниченный запас одинаковых по форме деталей. Если ими можно покрыть всю плоскость без зазоров и наложений, то о таких фигурках говорят, что ими можно вымостить, или выложить, плоскость, а плоскость, выраженную фигурами, называют мозаикой. С древнейших времен такие мозаики использовались во всем мире для украшения полов, стен, в узорах для мебели, ковров, обоев, одежды и других предметов. Голландский художник М. К. Эшер с необычайной изобретательностью покрывал плоскость фигурами сложной конфигурации, напоминающими своими очертаниями птиц, рыб, животных и других живых существ (рис. 75).

Разумеется, плитки, которыми выкладывают мозаику,

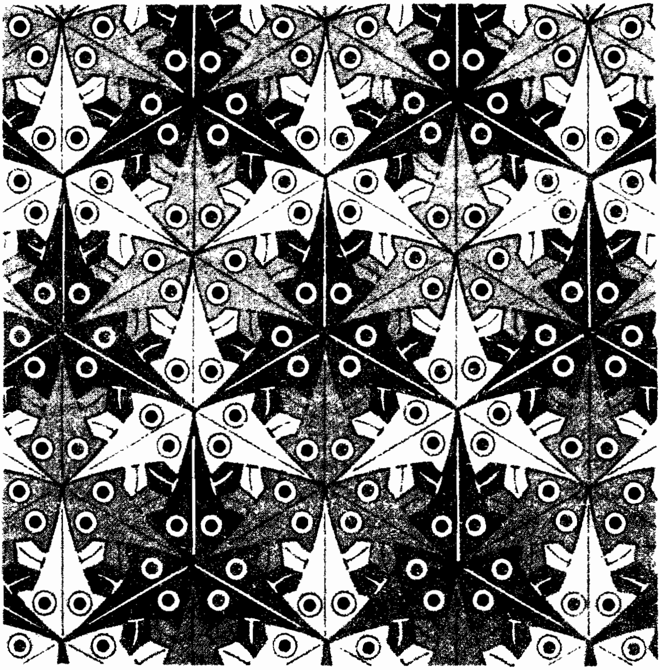


Рис. 75. Мозаика М. Эшера.

могут иметь бесконечно много форм, но если наложить на конфигурацию плиток весьма жесткие ограничения, то задача классификации и перечисления мозаик становится обозримой. Геометров особенно интересовали многоугольные плитки. Необычайно трудные задачи возникают при рассмотрении даже простейших из них. В этой главе нас будет интересовать только одна задача: найти все выпуклые многоугольники, которыми можно выложить плоскость. Эта задача долгое время оставалась нерешенной, и лишь в 1967 г. Ричард Б. Кершнер из университета Джона Гопкинса обнаружил 3 ранее неизвестные многоугольные плитки, которыми можно покрыть всю плоскость без зазоров и наложений, восполнив тем самым пробел, допущенный всеми его предшественниками.

Прежде всего выясним, сколько правильных многоугольников позволяют вымостить плоскость. Ответ на этот вопрос был известен еще древним грекам, которые доказали, что заполнить плоскость без зазоров и наложе-

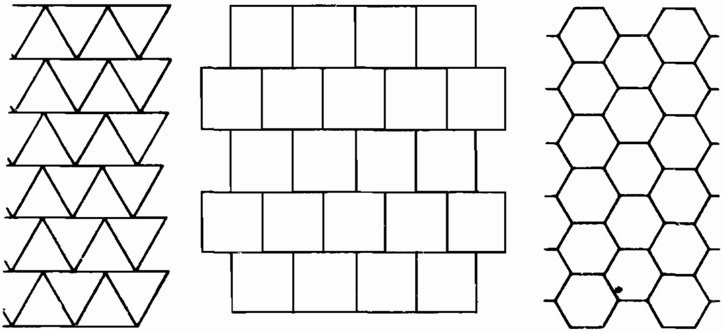


Рис. 76. Три правильных многоугольника, которыми можно выложить плоскость.

ний можно только тремя правильными многоугольниками: равносторонним треугольником, квадратом и правильным шестиугольником. Шестиугольные мозаики, столь знакомые каждому, кто видел пчелиные соты или кафельный пол в ванной, образуют жесткий узор, ни один элемент которого не может быть смещен относительно другого (рис. 76). Узоры, образуемые равносторонними треугольниками или квадратами, допускают бесчисленные вариации: ряды треугольников или квадратов можно сдвигать вдоль линий решетки.

Если отказаться от требования, чтобы выпуклый многоугольник был правильным, то задача о мозаиках становится более интересной. Было доказано, что ни одним выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, невозможно покрыть плоскость без зазоров и перекрытий. Следовательно, исследованию подлежат только многоугольники с 3, 4, 5 и 6 сторонами.

В случае треугольника все обстоит просто: любым треугольником можно выложить плоскость. Для этого достаточно сложить два одинаковых треугольника так, как показано на рис. 77,—у вас получится параллелограмм. Прикладывая друг к другу копии параллелограмма, вы выстроите бесконечную полосу с параллельными сторонами. Наконец, этими полосами вы заполните всю плоскость.

С четырехугольником ситуация столь же проста, хотя и гораздо более удивительна. Любым четырехугольником можно выложить плоскость! Как и в случае треугольников, возьмем два одинаковых четырехугольника.

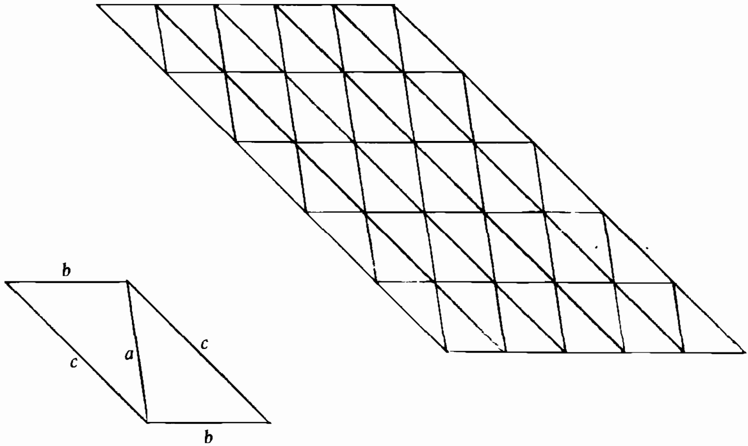


Рис. 77. Любым треугольником можно выложить плоскость.

Перевернув один четырехугольник и сложив их соответственные стороны, вы получите шестиугольник (рис.78). Каждая сторона такого шестиугольника непременно равна и параллельна противоположной стороне. Такой шестиугольник с помощью простой трансляции (изменяющей его положение на плоскости, но оставляющей

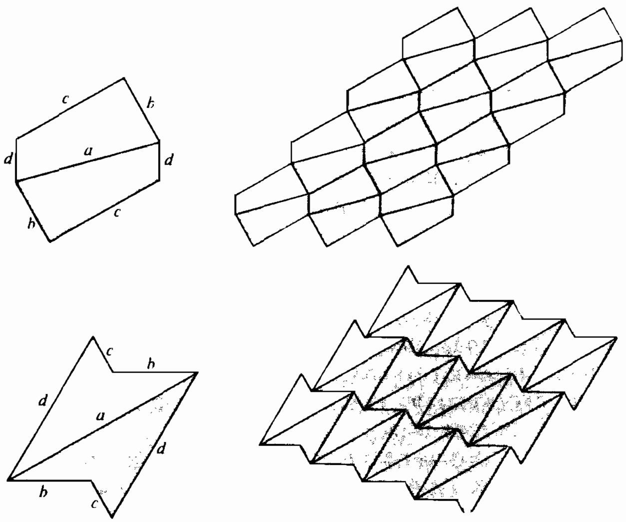


Рис. 78. Любым четырехугольником можно выложить плоскость.

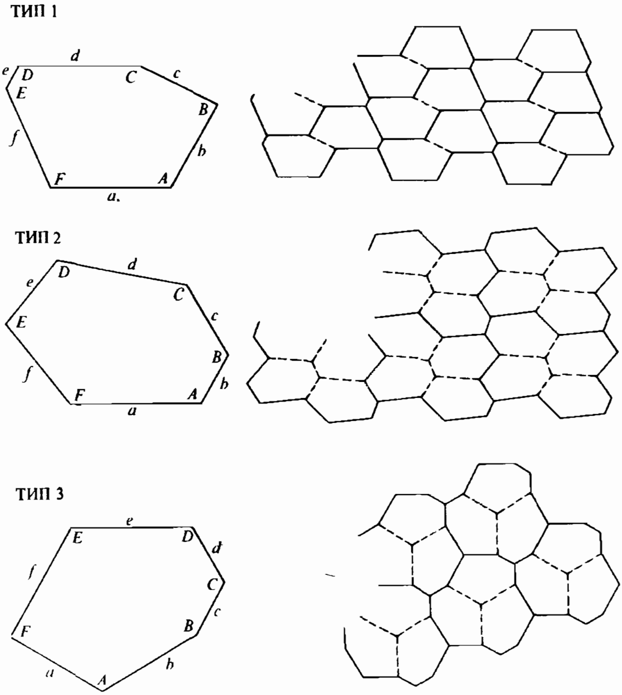


Рис. 79. Три типа выпуклых шестиугольников, которыми можно выложить плоскость.

неизменной его ориентацию) порождает орнамент (или мозаику), заполняющий всю плоскость. Четырехугольник не обязательно должен быть выпуклым. В точности таким же способом можно построить мозаику и из любого невыпуклого четырехугольника.

Мозаики из шестиугольников были исследованы в 1918 г. К. Рейнхардтом, он показал в своей диссертации, что выпуклые шестиугольники, которыми можно выложить плоскость, делятся на 3 класса. В статье «О замещении плоскости» (1969) Кершнер описывает эти три класса следующим образом [13,3].

Обозначим стороны и углы шестиугольника так, как показано на рис. 79. Выпуклый шестиугольник замощает плоскость в том и только в том случае, если он принадлежит к одному или нескольким следующим классам:

1) $A + B + C = 360°$,
и $a = d$;

2) $A + B + D = 360°$,
и $a = d$, $c = e$;

3) $A = C = E = 120°$,
и $a = b$, $c = d$, $e = f$.

На рис. 79 показаны примеры выпуклых шестиугольников, которыми можно выложить плоскость, и фрагменты получающейся при этом мозаики. Более тонкими («серыми») линиями показаны контуры «фундаментальной области», которая при трансляции заполняет без зазоров и наложений всю плоскость. Обратите внимание, что тип 2 требует отражения, если шестиугольник асимметричен.

Аналогичная классификация выпуклых пятиугольников, которыми можно вымостить плоскость, приводит к 8 типам. Пять из них были обнаружены Рейнхардтом. Кершнер описывает их, обозначая углы и стороны пятиугольника так, как показано на рис. 80. Выпуклым пятиугольником можно выложить плоскость, если он принадлежит к одному или нескольким следующим классам:

1) $A + B + C = 360°$,

2) $A + B + D = 360°$,
и $a = d$;

3) $A = C = D = 120°$,
и $a = b$, $d = c + e$;

4) $A = C = 90°$,
и $a = b$, $c = d$;

5) $A = 60°$, $C = 120°$,
и $a = b$, $c = d$.

Примеры пятиугольников каждого типа и фрагментов выложенных из них мозаик изображены на рис. 80. Тонкими линиями показаны контуры фундаментальных областей. Отражение используется только в мозаиках из пятиугольников типа 2.

«Тут либо метод [Рейнхардта], либо его стойкость духа изменили ему,– пишет Кершнер,– и он завершил свою диссертацию утверждением о том, что в принципе классификацию пятиугольников можно было бы довести до конца, развивая изложенные выше соображения, но прослеживание их во всех деталях было бы слишком громоздко. К тому же не исключена возможность, что

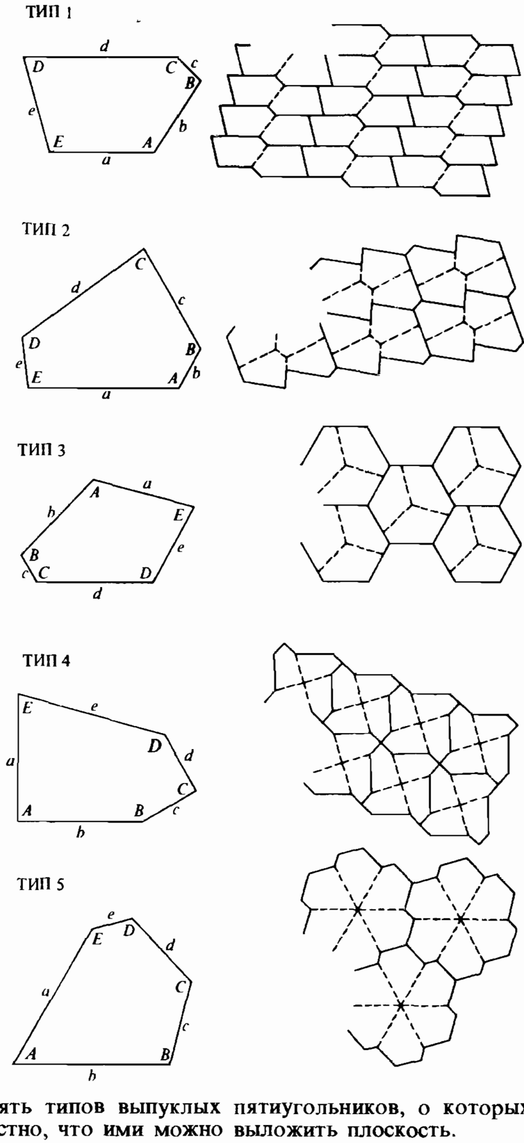


Рис. 80. Пять типов выпуклых пятиугольников, о которых в 1918 г. было известно, что ими можно выложить плоскость.

никаких новых типов пятиугольников при этом обнаружено не будет. Совершенно ясно, что и Рейнхардт, и все другие геометры были убеждены в полноте списка пятиугольников, составленного Рейнхардтом.

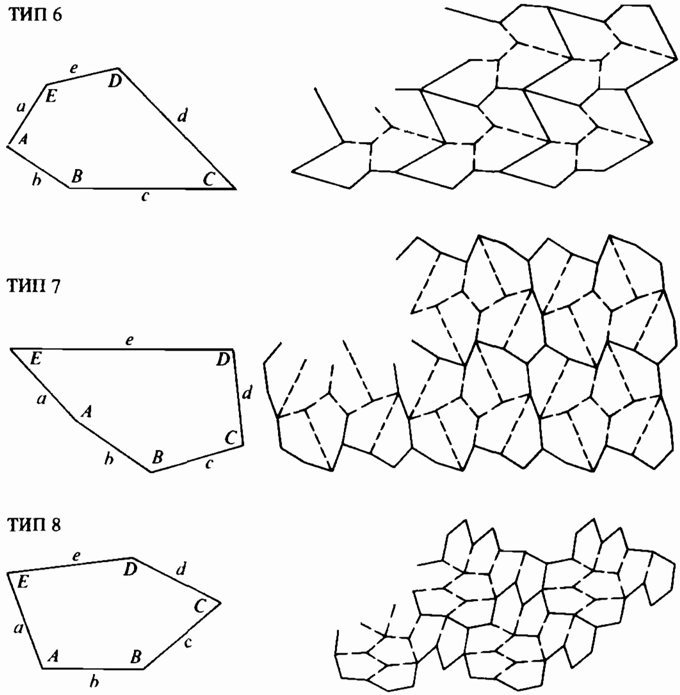


Рис. 81. Выпуклые пятиугольники трех новых типов, которыми можно выложить плоскость (открыты Кершнером в 1967 г.).

По причинам, которые мне трудно объяснить, я очень интересовался этой проблемой на протяжении почти 35 лет. Каждые 5 или 10 лет я предпринимал так или иначе попытку решить ее. И лишь 2 года назад я, наконец, открыл метод, позволяющий классифицировать возможные пятиугольники более удобным способом, чем метод Рейнхардта. С помощью моего метода человек в силах (хотя и ценой большого напряжения) довести классификацию до конца. Результатом предпринятого мной исследования явилось открытие трех дополнительных типов пятиугольников, ... которыми можно замостить плоскость. Все эти замощения поистине удивительны. Открытие их существования служит для меня источником глубокого удовлетворения».

Пятиугольники трех дополнительных типов (рис. 81) Кершнер описывает следующим образом (в мозаиках, построенных из пятиугольников типа 7 и типа 8, используется отражение):

6) $A + B + D = 360°$, $A = 2C$,
и $a = b = e$, $c = d$;

7) $2B + C = 2D + A = 360°$,
$a = b = c = d$;

8) $2A + B = 2D + C = 360°$,
$a = b = c = d$.

В статье Кершнера не приводится доказательство того, что других выпуклых пятиугольников, которыми можно заполнить плоскость без зазоров и наложений, не существует «по той убедительной причине», как указывается в редакционном введении, «что полное доказательство потребовало бы целой книги весьма большого объема».

Следует иметь в виду, что Кершнер умышленно нарисовал мозаики из найденных им пятиугольников как можно более нерегулярными в пределах каждого типа (это позволяло ему нагляднее продемонстрировать природу каждой мозаики).

Наиболее регулярной мозаикой из шестиугольников является знакомая всем структура пчелиных сот. Нетрудно видеть, что она принадлежит ко всем трем типам шестиугольников.

Если шестиугольники в мозаике типа пчелиных сот разделить пополам, то получится мозаика из пятиугольников типа 1 (рис. 82, *A*). В мозаике, изображенной на рис. 82, *B*, 6 пятиугольников образуют розетку в форме цветка. Эти пятиугольники принадлежат к типам 1, 5 и 6. Самая замечательная из мозаик, сложенных из пятиугольников, представлена на рис. 82, *C*: она составлена из разносторонних пятиугольников. Они принадлежат к типам 2 и 4. Обратите внимание на то, как четверки пятиугольников можно двумя способами сгруппировать в вытянутые шестиугольники. Семейства таких шестиугольников заполняют всю плоскость во взаимно ортогональных направлениях. Камни мостовых на некоторых улицах Каира выложены в виде этой красивой мозаики. Тот же узор часто встречается и в настенных мозаиках, украшающих мавританские постройки. Эта же замечательная мозаика используется во многих работах Эшера.

Равносторонний пятиугольник нетрудно построить с помощью циркуля и линейки (рис. 83). Постройте отре-

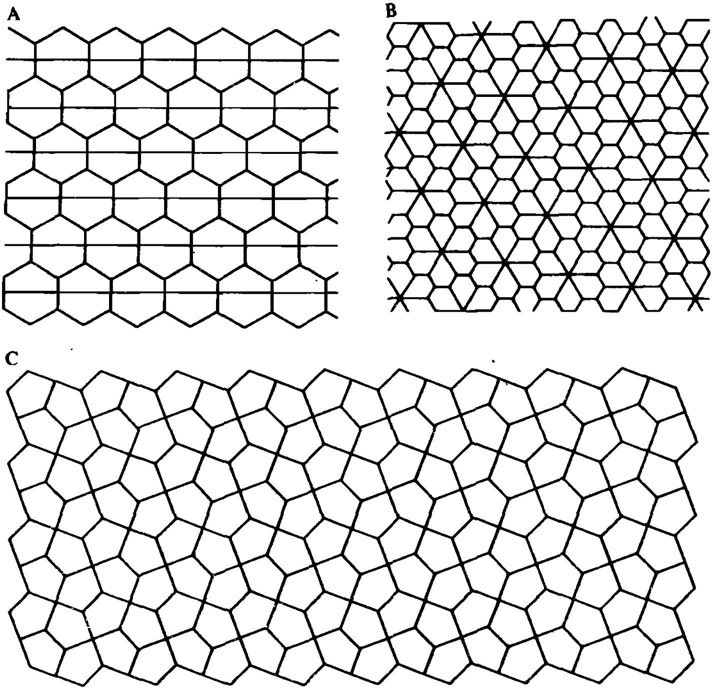


Рис. 82. Мозаики из выпуклых пятиугольников с необычной симметрией.

зок AB – сторону пятиугольника. Восставьте перпендикуляр CD из середины отрезка AB и проведите прямые CE и CF под углом 45° к AB. С центром в точке A и радиусом AB сделайте циркулем засечку на CE в точке P.

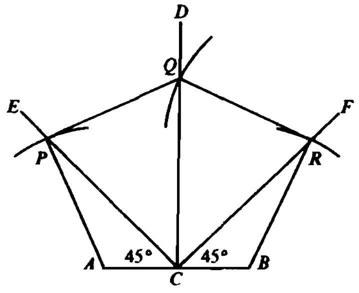


Рис. 83. Как построить плитку для замощения плоскости в форме равностороннего пятиугольника.

Проделайте то же самое построение с другой стороны (с центром в точке B) и получите на CF засечку R. Сохраняя раствор циркуля равным отрезку AB, сделайте засечку из точки R на перпендикуляре CD в точке Q.

Углы при вершинах P и R – прямые. Угол при вершине Q – чуть больше 131°, а углы при вершинах A и B – чуть больше 114°. Длина диагонали QB в $\sqrt{2}$ раз больше стороны пятиугольника. Площадь пятиугольника, как нетрудно доказать, равна площади квадрата со стороной, равной отрезку CR.

Среди бесконечного множества мозаик на плоскости из конгруэнтных невыпуклых многоугольников специалисты по комбинаторной геометрии в последние годы уделяют особое внимание мозаикам из полиомино и их «двоюродных братьев и сестер» – полиамондов и полигексов. (Полиомино – фигуры, составленные из квадратов, имеющих общие стороны, полиамонды – из равносторонних треугольников и полигексы – из правильных шестиугольников.) Возникло много интереснейших задач. Одни из них решены, другие еще ждут своего решения. С ними мы познакомимся в следующей главе.

ДОПОЛНЕНИЕ

После публикации журнального варианта этой главы в 1975 г. я получил замечательное письмо от Р. Э. Джеймса III, специалиста по вычислительной математике. Он прислал необычную мозаику (рис. 84) вместе с описанием прямоугольника, из которого она сложена (в обозначениях Кершнера): $A = 90°$, $C + D = 270°$, $2D + E = 2C + B = 360°$, и $a = b = c + e$. «Вы согласны, что Кершнер пропустил эту мозаику?» – спрашивал меня Джеймс.

Кершнер действительно пропустил эту мозаику. Проблема построения исчерпывающей классификации вопреки надеждам Кершнера осталась нерешенной. Должен сказать, что Кершнер воспринял удар с достоинством и юмором. В письме к нему я обратил внимание на то, что открытие Джеймса может служить иллюстрацией прагматического аспекта математического доказательства: ни одно доказательство нельзя считать таковым, пока оно не получает признания среди специалистов. В ответном письме Кершнер иронически заметил:

«В связи с вашими философскими замечаниями по поводу природы доказательства хочу обратить ваше

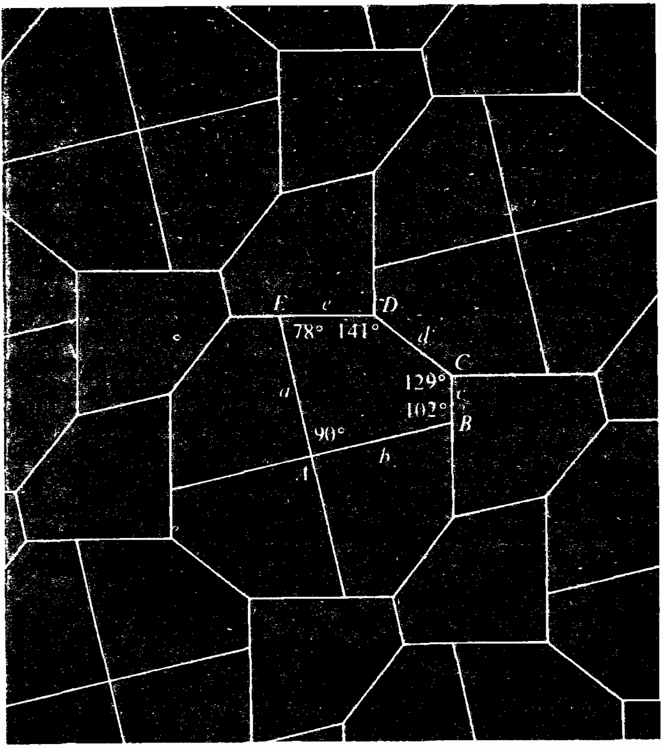


Рис. 84. Замечательная новая мозаика из конгруэнтных выпуклых пятиугольников, построенная Р. Джеймсом III.

внимание на одно высказывание столь выдающегося авторитета, какого вы, несомненно, имеете в моем лице. В книге «Анатомия математики» (написанной мной в соавторстве с Л. Уилкоксом) [13, 17] я утверждал следующее:

«Следует сказать, что не существует простого критерия правильности доказательства, который позволил бы отличить псевдодоказательства от истинного доказательства. История математики знает немало поразительных примеров, когда доказательства, на протяжении столетий считавшиеся общеприятными, уступали разуму какого-нибудь проницательного математика, которому удавалось найти пробел в традиционном ходе рассуждения. И в наше время почти каждый год на страницах математических журналов появляются работы, в которых показывается, что то или иное утверждение в предыдущей работе было не только неверно доказано (то есть не было доказано), но и само по себе неверно. Все это мы говорим для тех, кто считает, будто в доказательстве заключена некая магия, делающая его неуязвимым и неизменным на вечные времена».

Должен признаться, что когда я писал эти строки, мне отнюдь не приходила в голову возможность столь ярко проиллюстрировать их на своем собственном примере».

Мозаику Джеймса можно варьировать способами, которые в 1978 г. были проанализированы в работе Д. Шаттшнейдер из Моравского колледжа (шт. Пенсильвания). Основной узор мозаики Джеймса мог быть открыт еще в средние века мавританскими мастерами или даже был известен древним грекам и римлянам, но вполне возможно, что он впервые предстал перед взором человека лишь после того, как Джеймс нанес его на бумагу!

Открытие мозаик нового типа из пятиугольников не закончилось на мозаике Джеймса. М. Райс, домашняя хозяйка из Сан-Диего, не имеющая математического образования, если не считать обычного минимума, преподаваемого в средней школе, занялась систематическим поиском новых мозаик. В 1976 г. она открыла десятый тип мозаик (рис. 85), затем в том же году еще 2 мозаики и в следующем году обнаружила последнюю, типа 13, мозаику из пятиугольников. Мозаика типа 14 была построена в 1985 г. Р. Стейном, выпускником Дортмундского университета (ФРГ). Его мозаика украсила обложку ноябрьского номера журнала *Mathematical Magazine* за 1985 г. (заметка о новой мозаике опубликована в том же номере на с. 308). Насколько мне известно, больше новых типов мозаик никто не открывал, хотя доказательством полноты имеющегося перечня мозаик мы по-прежнему не располагаем. Не существует и полного списка невыпуклых пятиугольников, которыми можно выложить плоскость.

В статье, написанной Д. Шаттшнейдером в 1978 г., [13.6] содержится краткий обзор фантастических достижений миссис Райс. Более подробный вариант обзора приведен в другой его статье [13.9]. Там же помещены три мозаики в духе Эшера (с пчелами, рыбами и цвета-

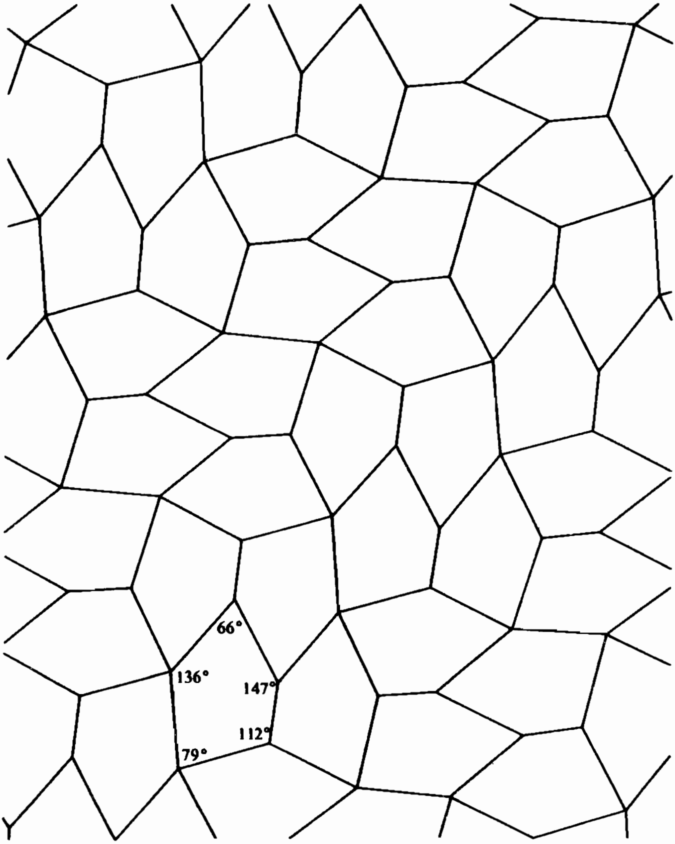


Рис. 85. Десятая мозаика из выпуклых пятиугольников, построенная Марджори Райс.

ми), основанные на новых мозаиках миссис Райс, и фотография коврика с изображением мозаики Джеймса. Мозаика с пчелами воспроизведена на обложке издания [13.9].

ГЛАВА 14

МОЗАИКИ ИЗ ПОЛИОМИНО, ПОЛИАМОНДОВ И ПОЛИТЕКСОВ

Я часто задумывался над тем, почему меня так влечет к периодическим узорам... Почему я столь одинок в этой области? Почему никого из моих товарищей по профессии не привлекают, как меня, эти сцепленные между собой фигурки?

М. К. Эшер

Предыдущая глава была посвящена замощению бесконечной плоскости конгруэнтными неперекрывающимися выпуклыми многоугольниками. В этой главе мы познакомимся с еще более обширной областью мозаик из невыпуклых многоугольников.

Полиомино – фигуры, составленные из единичных квадратов, которые примыкают друг к другу полными сторонами. Впервые математический мир узнал о них в 1953 г. от С. В. Голомба. Выпущенная им небольшая монография [14.9] является основным источником сведений об этих фигурах для любителей занимательной математики. Некоторые из моих ранних публикаций о полиомино вошли в мои предыдущие книги.

Ясно, что мономино (один единичный квадрат) и домино позволяют замостить всю плоскость. То же можно сказать и о двух разновидностях тримино. Небольшого размышления достаточно, чтобы понять простую истину: каждая из 5 тетрамино покрывает всю плоскость, образуя периодическую мозаику, в которой все плитки одинаково ориентированы, то есть ни одну из фигур тетрамино не нужно поворачивать или заменять ее зеркальным отражением (переворачивать на другую сторону).

Каждая из 12 пентамино может замостить всю плоскость. Но лишь 3 из них (T-, U- и R-пентамино) запол-

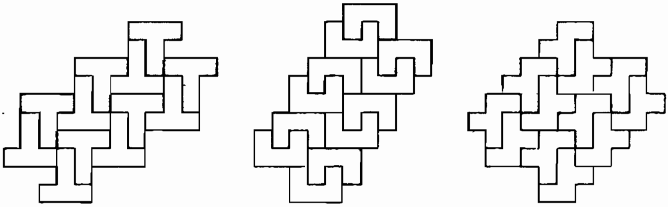


Рис. 86. Три пептамино, образующих мозаику в прямом и в перевернутом виде.

няют плоскость при простой трансляции (без поворотов и отражений). Три пентамино заполняют всю плоскость, если каждую из них дополнить перевернутым двойником, образовав тем самым новую фигуру – декамино, покрывающую плоскость при трансляции (рис. 86).

Существует 35 различных гексамино. Каждым из них можно замостить всю плоскость без отражения. Некоторые гексамино заполняют плоскость при простой трансляции. Те гексамино, которые не покрывают плоскость при трансляции, можно объединить в пары с перевернутым двойником. Образующимся при этом додекамино можно покрыть всю плоскость при трансляции.

Дж. Х. Конуэй давно проявлял интерес к способности полиомино и других многоугольников покрывать всю плоскость без зазоров и перекрытий. Столкнувшись с необходимостью исследовать 108 гептамино, Конуэй понял, что справиться с подобной задачей без общего критерия, который бы позволял «быстро отбрасывать большинство фигур, даже не нанося их на миллиметровку», будет весьма затруднительно.

Открытый Конуэем критерий весьма эффективен и применим к любому многоугольнику. Он основан на схеме замощения плоскости шестиугольниками (схема изображена на рис. 87, в середине, а элеметарный шестиугольник – слева). Обратите внимание на то, что стороны *a* и *b* равны и параллельны и что в мозаике сторона *a*

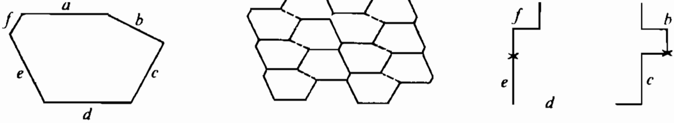


Рис. 87. Критерий Конуэя для периодической мозаики без отражений.

одного шестиугольника примыкает к стороне *d* другого шестиугольника, имеющего ту же ориентацию. Кроме того, каждая из четырех других сторон примыкает к соответствующей стороне шестиугольника-двойника, повернутого на 180°.

Имея это в виду, нетрудно понять, на чем основан критерий Конуэя. Выбрав некоторый многоугольник, мы проверяем, нельзя ли разделить его периметр на 6 частей – *a, b, c, d, e* и *f*, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) две противоположные стороны *a* и *b* «параллельны» в том смысле, что они конгруэнтны и одинаково ориентированы;

2) каждая из 4 остальных сторон *b, c, e,* и *f* симметрична относительно своего центра, то есть переходит в себя при повороте на 180° относительно своей середины.

Если многоугольник удовлетворяет этим двум требованиям, то им можно замостить всю плоскость, образовав периодическую мозаику. Переворачивать элементы такой мозаики на другую сторону не нужно. Каждый многоугольник вместе со своим перевернутым двойником образуют пару, которая покрывает плоскость без зазоров и наложений при простой трансляции.

Суть процедуры ясна из следующего примера, предложенного Конуэем (рис. 87, справа). Две менее жирные («серые») линии соответствуют «параллельным» сторонам *a* и *b*. Крестиками помечены стороны *b, c, e* и *f*. Каждая из этих 4 сторон обладает центральной симметрией. Следовательно, два таких многоугольника – «прямой» и «опрокинутый» – покрывают всю плоскость. «Опрокинутый» многоугольник повернут на 180°С относительно «прямого» без отражения. Пара таких многоугольников покрывает плоскость при трансляции. Следует иметь в виду, добавляет Конуэй, что любая из 6 сторон может быть «пустой» (не существовать). Критерий обладает большой общностью и применим к треугольникам, четырехугольникам, пятиугольникам и любым многоугольникам с бóльшим числом сторон.

Выяснилось, что из 108 гептамино 101 удовлетворяет критерию Конуэя. Это означает, что каждое из 101 гептамино в паре со своим повернутым на 180° двойником образует удвоенную фигуру, покрывающую плоскость при трансляции. Семь гептамино, не удовлетворяющих критерию Конуэя, изображены на рис. 88. Ясно,

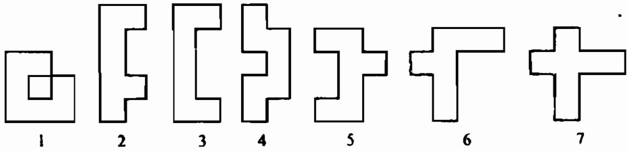


Рис. 88. Семь гентамино, не удовлетворяющих критерию Конуэя для периодических мозаик.

что первая фигура не может замостить плоскость, так как отверстие внутри нее остается незаполненным. Четвертое гептамино вместе со своим повернутым на 90° двойником образует пару, заполняющую плоскость, как показано на рис. 89, слева внизу.

Пятое гептамино Конуэй считает наиболее интересным. Заполнить им плоскость можно тремя способами: образовав группы из двух фигур – прямой и повернутой

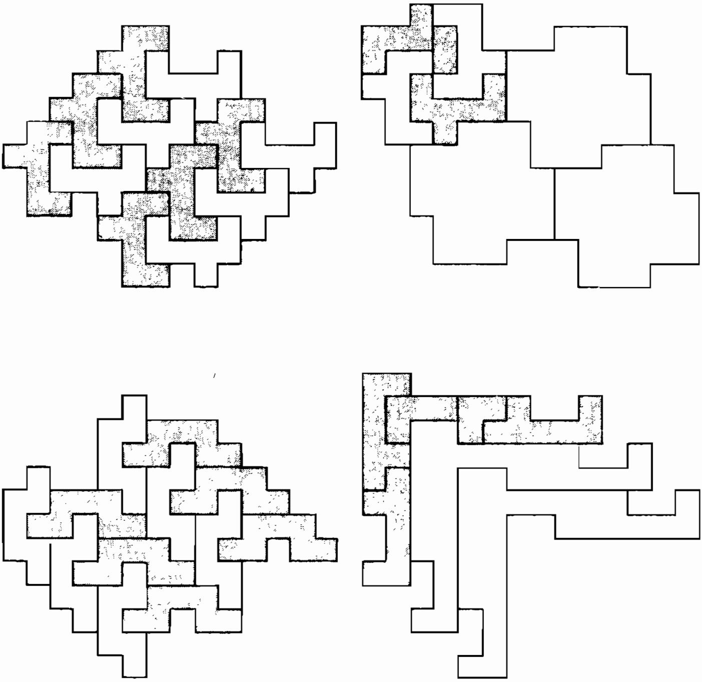


Рис. 89. Периодическая мозаика из 5 гептамино (вверху), 4 гептамино – 2 прямых и 2 повернутых на 90° (слева внизу) и 2 гептамино – прямое и зеркально отраженное (справа внизу).

на 90° или прямой и ее зеркальным отражением, а также четверной фигурой – из 4 экземпляров прямой фигуры. (Два из способа заполнения плоскости показаны на рис. 89, вверху справа).

Второе гептамино из этой группы заполняет плоскость без своего зеркального отражения. Наименьшая фигура из гептамино этого «фасона», способная замостить плоскость при трансляции, содержит 4 таких гептамино, ориентированных различным образом; два из них прямые, два – зеркально отраженные (рис. 89, внизу справа). Это полиомино наименьшего порядка (единственное среди гептамино), покрывающее плоскость только со своим зеркальным отражением.

Третье, шестое и седьмое гептамино не могут быть плитками: ими нельзя покрыть плоскость (или, что то же, из них нельзя сложить мозаику). Доказать это – задача несложная, хотя и довольно трудоемкая. Сначала нужно перепробовать все возможные варианты «стыковки» двух фигур, отбросить те комбинации, при которых возникают дыры или пространство, не заполняемое третьей фигурой. Обнаружив все «совместимые» пары, необходимо затем испробовать все возможные способы присоединения к ним третьей фигуры, при которых остается место для четвертой. Так вы доходите до группы из n гептамино, такой, что независимо от того, как они сочетаются друг с другом, к ней нельзя присоединить еще одно гептамино. Доказать это я предоставляю читателю.

Хотя третьим гептамино нельзя замостить плоскость, из таких гептамино и квадратов 3×3 можно построить удивительную мозаику. Нарежьте из тонкого картона таких гептамино и квадратов 3×3 и попробуйте самостоятельно сложить из них мозаику.

Насколько мне известно, попытку выделить среди 369 октамино те, из которых нельзя сложить мозаику, предпринял только Д. Берд (Англия). Разумеется, 6 октамино с дырами могут быть сразу же исключены, но Берд включил в свой список еще 20 октамино. Таким образом, общее число пентамино, непригодных для заполнения плоскости, доведено им до 26 (рис. 90).

Существует ли общий алгоритм, позволяющий для любого полиомино решить, можно ли заполнить им плоскость или нет? Критерий Конуэя позволяет распознать некоторые полиомино, из которых можно составлять мозаики, но если полиомино не удовлетворяет

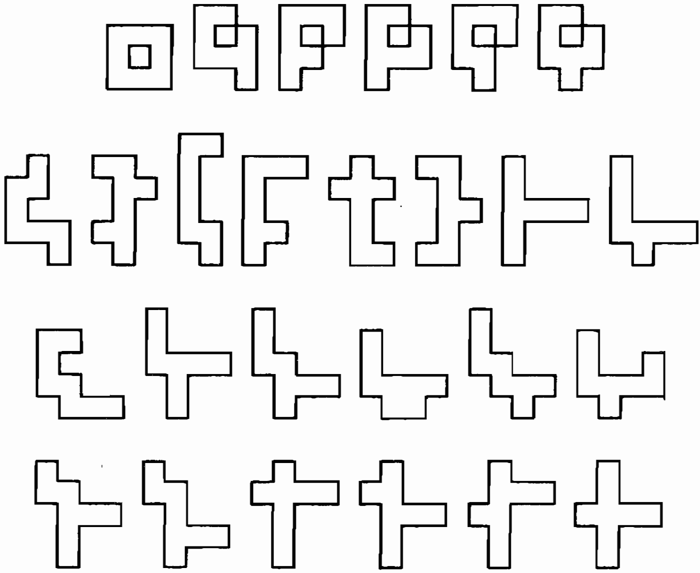


Рис. 90. Двадцать шесть октамино, из которых невозможно сложить мозаику.

критерию Конуэя, то им все же иногда можно (а иногда нельзя) заполнить плоскость другими способами. Конуэй предполагает, что общего алгоритма для распознавания полиомино, годных для замощения плоскости, не существует, но его гипотеза пока не доказана. Крупным шагом вперед к установлению неразрешимости общего алгоритма стал результат, полученный Голомбом [14.4]. Голомб рассмотрел вопрос о том, существует ли процедура, позволяющая для любого данного конечного набора различных полиомино (в предположении, что каждое полиомино имеется в неограниченном количестве экземпляров) определить, можно ли из него сложить мозаику или нет. Голомб показал, что рассматриваемая им задача эквивалентна задаче о покрытии плоскости конечным набором квадратов с раскрашенными сторонами при условии, что соседние квадраты должны примыкать друг к другу сторонами одного цвета. Так как Хао Ван с коллегами еще раньше доказал, что последняя задача неразрешима [14.10], соответствующая задача также неразрешима.

Голомб в [14.4] рассмотрел замощение таких подмножеств на плоскости, как полуплоскость, квадрант, прямые и ломаные полосы, прямоугольники. Полученные результаты по гексамино Голомб представил в виде сводной таблицы.

Если мозаика не содержит фрагмента, покрывающего плоскость при трансляции, то такая мозаика называется непериодической. Один из забавных способов построения непериодической мозаики из конгруэнтных многоугольников – построение из них увеличенной копии фундаментального многоугольника. Ясно, что из таких увеличенных многоугольников в свою очередь можно построить еще бо́льшую копию и, продолжая этот процесс, постепенно заполнить всю плоскость. Многоугольники, обладающие свойством самовоспроизведения в большем масштабе, Голомб назвал делящимися [14.1], [14.10].

Менее разработана по сравнению с полиомино теория полиамондов (фигур, составленных из равносторонних треугольников, примыкающих друг к другу полными сторонами). (О полиамондах см. [14.9] и гл. 18 и 24 [14.11].) Берд, Г. Бишоп, Кларк, Дж. Харрис, У. Филпотт и другие установили, что всеми октоамондами можно выложить плоскость. Насколько мне известно, 160 нонаамондов (полиамондов порядка 9) не были пока

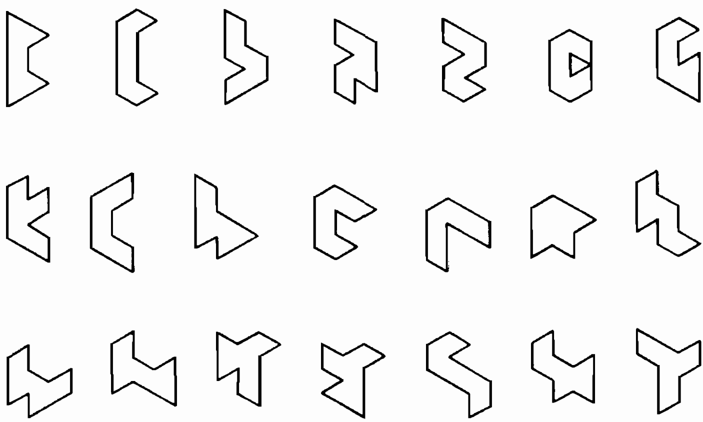


Рис. 91. Двадцать один нонаамонд, из которых, по-видимому, невозможно сложить мозаику.

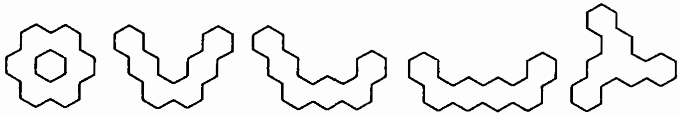


Рис. 92. Пять гексагексов, из которых, по-видимому, невозможно сложить мозаику.

обследованы, хотя Берд и Кларк считают, что нельзя замостить плоскость 21 нонаамондом, представленным на рис 91.

Полигексы – фигуры, составленные из конгруэнтных правильных шестиугольников (см. главу о них в [14.12]), привлекли еще меньше внимания, чем полиамонды. Берд и Бишоп установили, что всеми полигексами до порядка 5 включительно можно покрывать плоскость. По мнению Берда, из 82 гексагексов мозаики нельзя составлять только из 5 (рис. 92).

После того как установлено, что данный многоугольник пригоден для замощения плоскости, возникает вопрос, сколькими различными способами можно осуществить замощение. Вопрос этот иногда оказывается весьма непростым. А. Белл [14.3] предпринял попытку построить классификацию мозаик, которые можно сложить из L-тетрамино, и получил 19 схем, но не претендует на полноту.

В небольшой, щедро иллюстрированной книжке П. Макмагона [14.13] объясняется, как простую мозаику из какого-нибудь многоугольника можно легко превратить в более сложную. Необходимо лишь выбрать две прямолинейные стороны, которые во всей мозаике идут последовательно («рядом»), и заменить прямолинейную границу искривленной (криволинейные границы фигур допускаются), соблюдая при этом определенные требования симметрии. Именно таким приемом пользовались исламские мастера, создавшие великолепные геометрические мозаики Альгамбры и Тадж-Махала.

Трудность подгонки границ фундаментального многоугольника под контуры фигур, напоминающих живые существа, Эшер описывает так: «Пограничная линия между двумя соседними фигурами выполняет двойную функцию, и поэтому провести ее очень сложно. Узнаваемым становится одновременно и то, что находится по одну сторону от нее, и то, что находится по другую

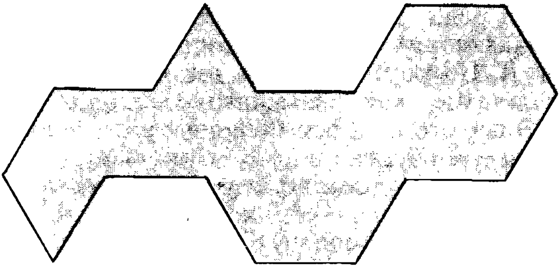


Рис. 93. Головоломка Р. Пенроуза с полиамондом.

сторону. Но ни человеческий глаз, ни человеческий мозг не могут делать два дела одновременно, поэтому происходит быстрое и непрестанное перескакивание с одной стороны границы на другую».

Теория мозаик, помимо очевидной пользы для художников по интерьерам, тканям, обоям и т. д., находит применение в промышленности. При штамповке конгруэнтных деталей из тонких листов металла, пластика, картона, кожи и других материалов мозаика с плотно прилегающими фигурами представляет собой оптимальную схему раскроя сырья без потерь. Необычная книга по искусству получилась бы у того, кто вздумал бы собрать схемы раскроя материалов, используемые в современном производстве,– от простых мозаик из прямоугольников (почтовые марки, денежные купюры, игральные карты) до сложных мозаик из криволинейных фигур (детали различных машин и механизмов).

Теория мозаик потенциально применима к решению задач-головоломок на составление картинок из деталей той или иной (обычно весьма причудливой) формы. В 1958 г. английский специалист по математической физике Р. Пенроуз для собственного удовольствия принялся преобразовывать мозаику из параллелограммов в мозаики из полиамондов порядка 18. Некоторые из его находок стали великолепными головоломками. Взять хотя бы полиамонд «груженая тачка» (рис. 93). Вырезав из картона 12 одинаковых «тележек», попробуйте составить из них фигуру, которая бы заполняла всю плоскость при трансляции. Сделать это не так-то просто!

П. Пенроуз ныне занимает кафедру математики Роуза Болла в Математическом институте Оксфордского университета. Среди физиков он особенно известен своими работами по теории относительности и космологии. Он и его отец Л. Пенроуз первыми открыли «невозможные объекты», такие, как знаменитая лестница Пенроуза, которую Эшер столь эффектно воплотил в своей литографии «Подъем и спуск».

Лет десять назад стало известно, что существуют множества многоугольников, которые вместе не покрывают периодически, а образуют непериодические мозаики. Несколько лет назад Р. Робинсон построил множество из 6 многоугольников, покрывающих плоскость только непериодически. Пенроуз впоследствии нашел множество из 4, а затем даже из 2 многоугольников. Существует ли такая фигура, конгруэнтные копии которой могут покрывать плоскость только непериодически? Это один из наиболее глубоких вопросов современной теории мозаик. Что же касается непериодических мозаик, то это уже совсем другая история.

ОТВЕТЫ

Один из способов замощения плоскости копиями какого-нибудь гептамино и квадратами 3 × 3 показан на рис. 94. Существуют и другие способы.

Схема построения мозаики из «тачки» Р. Пенроуза

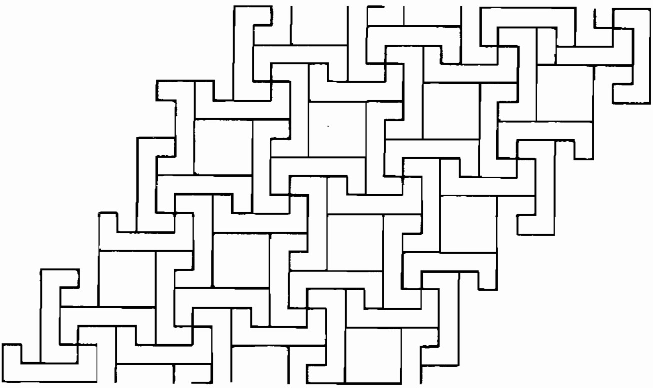


Рис. 94. Мозаика из гептамино и квадратов.

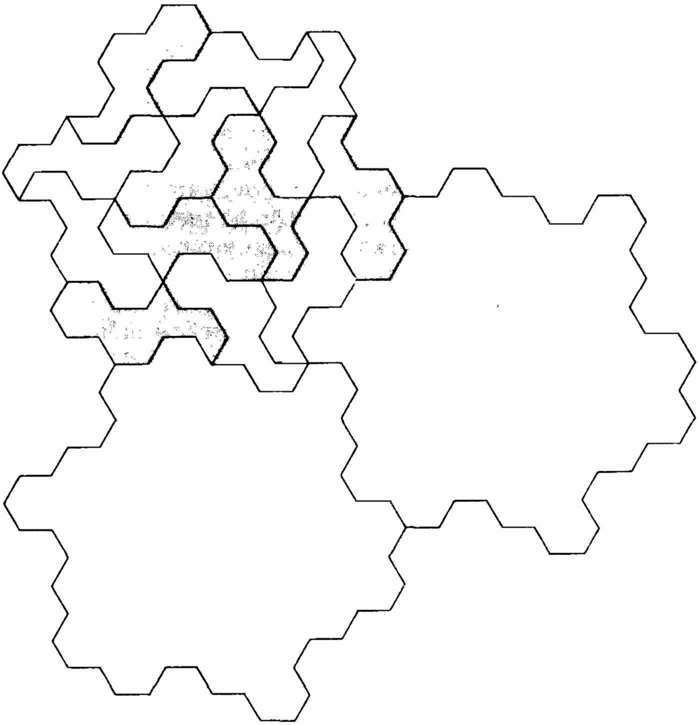
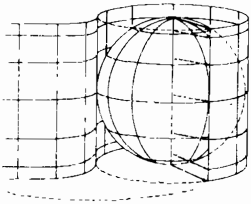


Рис. 95. Как заполняют плоскость полиамонды Пенроуза.

изображена на рис. 95. Копии шестиугольной области (состоящей из 12 полиамондов в 12 различных ориентациях) образуют периодическое покрытие плоскости, напоминающее «соты» из правильных шестиугольников. Хотя схема этой мозаики (ее узор) единственная, выделить фундаментальную область на бесконечной плоскости можно многими различными способами.



ГЛАВА 15

НЕОБЫЧНЫЕ КАРТЫ

Спросили как-то у Колумба:
«Земля имеет форму тумбы?»
«О нет! Хотя от вас не скрою,
Мне странно, что Земля сфероид».

Е. К. Бентли

Если бы Земля была плоской, как полагали Мартин Лютер, Жан Кальвин и отцы католической церкви, то это избавило бы картографов от многих забот и хлопот. Карты плоской Земли, составленные в первые 6 веков новой эры, не были связаны со сколько-нибудь серьезными геометрическими проблемами. Среди церковных деятелей нашлось несколько ученых мужей, разделявших взгляды Пифагора, Платона, Аристотеля и Архимеда о шарообразности Земли, но большинство клириков усматривало в подобных воззрениях ересь.

Карты эпохи раннего Средневековья следовали заветам Священного писания. Они были либо прямоугольными, чтобы сохранить «четыре угла», упоминаемые в книге пророка Исайи и в Апокалипсисе, либо имели круглую или овальную форму, чтобы сохранить «круг земной», упоминаемый в книге того же пророка Исайи. Никакой надобности в меридианах и параллелях, разумеется, не возникало. Иерусалим находился в самом центре земли, как сказано в книге пророка Иезекииля. Верх карты соответствовал направлению на восток. Там располагался Эдем. Суша была окружена «большой водой», покрывавшей некогда Землю, а затем отступившей, и источниками «четырех ветров», дувших с большим непостоянством в сторону Иерусалима (о «четырех ветрах» упоминается в книге пророка Даниила и в Апокалипсисе).

После VIII в. шарообразность Земли стала более приемлемой для церкви и нашла своих поборников в лице столь выдающихся католических мыслителей, как Фома Аквинский и Данте Алигьери, но не пользовалась особым расположением у протестантов, хотя в эпоху Возрождения быстро восстановила утраченные было позиции. Развитие торговли, путешествия, в особенности дальние морские экспедиции,– все это настоятельно требовало усовершенствования географических карт. Обрела остроту и актуальность весьма непростая геометрическая задача: как отобразить на плоскость часть земной поверхности, чтобы все расстояния остались неискаженными?

Эта задача неразрешима. Поверхность цилиндра или конуса можно без искажений отобразить на плоскость, отобразить же на плоскость поверхность сферы, сохранив расстояние между любыми двумя точками, невозможно. Ничто не мешает развернуть на плоскость боковую поверхность цилиндра или конуса, но даже малую область сферической поверхности невозможно раскатать на плоскости без трещин, складок или искажений. Любая плоская карта всей Земли или какой-то ее части непременно что-то искажает. Поэтому перед картографами стоит весьма непростая задача: научиться строить карты с минимальными (или, еще лучше, нулевыми) искажениями тех свойств, для передачи которых предназначается карта. Разумеется, желательно, чтобы и другие свойства деформировались как можно меньше. Прежде чем обратиться к методам составления необычных карт, своего рода картографическим курьезам, бегло познакомимся с некоторыми классическими методами картографии.

Одно из наиболее желательных свойств любой карты – сохранение углов между любыми двумя линиями (угол между любыми двумя линиями на карте должен быть таким же, как угол между прототипами этих линий на земной поверхности). Сохранение углов особенно удобно для мореплавания, так как оно означает, что наблюдаемый угол между любыми двумя ориентирами равен углу, измеряемому на карте с помощью транспортира. Кроме того, на карте, сохраняющей углы, остаются неизменными и площади малых областей. Карты, сохраняющие углы, называются конформными. Проще всего построить конформную карту с помощью стереографической поверхности. На рис. 96 показано, как поверхность

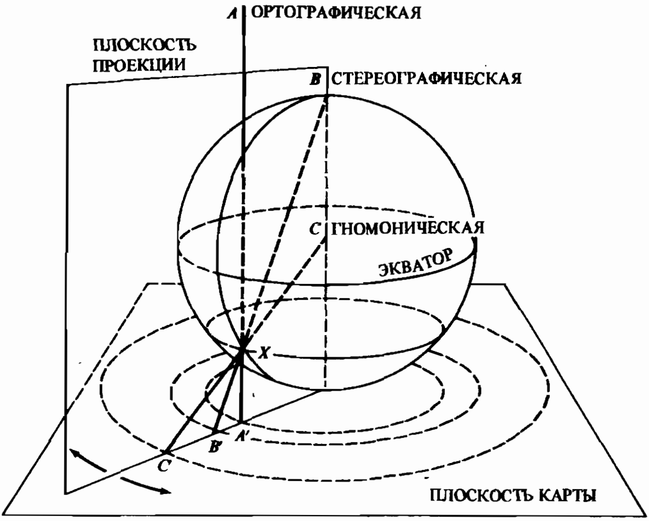


Рис. 96. Три азимутальные проекции: ортографическая (*A*), стереографическая (*B*) и гномоническая (*C*).

сферы проектируется из точки *B* (на сфере) на плоскость, касательную к сфере в диаметрально противоположной точке. Проекция называется экваториальной, полярной или косой в зависимости от того, где находятся антиподы: на экваторе, полюсах или в какой-нибудь другой точке земной поверхности. За конформность приходится платить дорогой ценой: искажением масштаба, возрастающим с увеличением расстояния от центра карты.

Если проектирование на касательную плоскость происходит из центра земного шара, то проекция называется гномонической, так как она имеет непосредственное отношение к конструкции солнечных часов с гномоном. Любая дуга большого круга на поверхности земного шара переходит в прямую на гномонической карте. Гномоническая карта не обладает конформностью, но навигаторы ценят ее за одно важное свойство, отсутствующее у всех других проекций сферы на плоскость: прямая между любыми двумя точками на гномонической карте соответствует дуге большого круга на поверхности Земли и, следовательно, является геодезической, то есть кратчайшей дугой между этими двумя точками.

Так как точку, из которой производится проектирование (центр проекции), можно выбирать внутри, на поверхности и вне сферы, существует бесконечное множество различнейших проекций. Если центр проекции находится в бесконечности (все проектирующие лучи параллельны), то проекция называется ортографической. Глядя на Луну с Земли (или на Землю с Луны), наблюдатель видит Луну (или Землю) по существу в ортографической проекции. У края ортографической карты расстояния сильно искажены. Ортографическая карта не сохраняет ни площадей, ни углов, но, если вычертить ее тщательно и достаточно искусно, создает сильную иллюзию шарообразной Земли. Перспективные карты, начерченные с точки зрения наблюдателя, находящегося над земной поверхностью, наименее точны в передаче многих ее свойств, но наиболее точно соответствуют нашему зрительному восприятию сферы.

Поверхность сферы совершенно не обязательно проектировать на плоскость. Проектировать ее можно, например, на цилиндры и конусы, «надетые» на сферу. Построив проекцию, цилиндрическую или коническую поверхность разрезают и развертывают на плоскость. Проектирующие лучи параллельны плоскости, высекающей большой круг там, где соприкасаются сфера и цилиндр (рис. 97). Карта, которая получается после

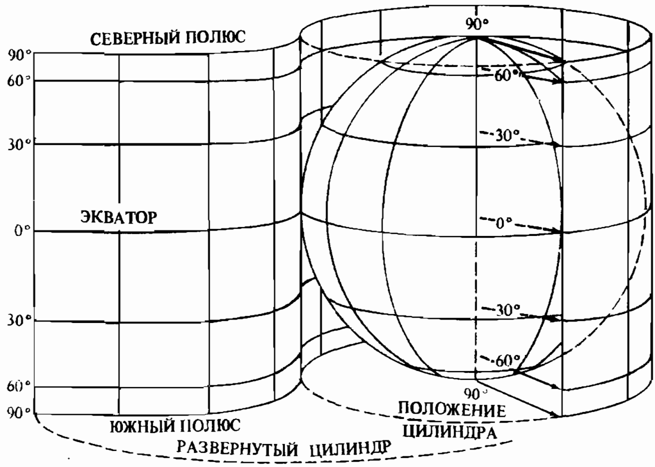


Рис. 97. Метод цилиндрической проекции, позволяющий получать карты с сохранением площадей.

развертывания цилиндра, обладает замечательным свойством, весьма желательным для самых различных целей, а именно: сохраняет площадь. Все замкнутые кривые охватывают области, площадь которых равна площади прототипов этих областей на поверхности сферы. Поэтому цилиндрическая проекция позволяет составить верное представление об относительной площади двух областей, воспроизводя все площади уменьшенными в одно и то же число раз. Если цилиндр касается Земли вдоль экватора, то все меридианы и параллели на карте переходят в прямые, пересекающиеся под прямыми углами.

Сохраняющая площади цилиндрическая карта не обладает конформностью и сильно искажает расстояния и форму областей. Нетрудно доказать, что ни одна карта не может одновременно быть конформной и сохранять площади. Было предложено огромное число других проекций, сохраняющих площадь. В современных атласах чаще всего встречаются сохраняющие площади карты, построенные с помощью цилиндрической проекции, предложенной Карлом Б. Мольвейде в 1805 г.

Другая цилиндрическая проекция принадлежит Герхарду Меркатору, фламандскому картографу XVI в. Это знаменитая конформная проекция, носящая ныне его имя (проекция Меркатора). Представьте себе, что поверхность земного шара проколота в северном и южном полюсе и обе дырочки растянуты, отчего поверхность Земли превратилась в цилиндр, после чего цилиндр растянут так, чтобы изображение земной поверхности на нем стало конформным, разрезан вдоль одного из меридианов и развернут на плоскость. Ясно, что вблизи полюсов масштаб чудовищно искажен. На школьных картах мира Гренландия значительно больше Южной Америки, в действительности же Гренландия по своим размерам существенно уступает Южной Америке. (Чтобы свести до минимума такие вариации масштаба, в современных атласах используется модификация проекции Меркатора – так называемая проекция Миллера.) Несмотря на столь существенные искажения, проекция Меркатора обладает одним замечательным свойством, делающим ее весьма ценной для навигаторов: проведя прямую через любые две точки на карте, вы получите локсодрому, или линию постоянного румба, соединяющую эти две точки. Локсодромой (или локсодромией)

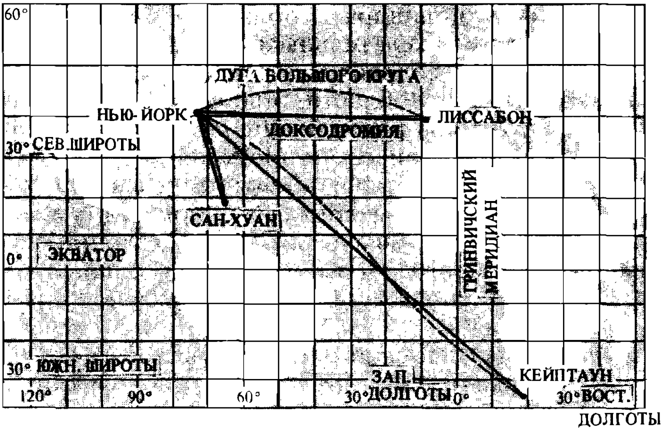


Рис. 98. Конформная проекция Меркатера. На карту нанесены локсодромы, или линии равных румбов, из Нью-Йорка.

называется линия, образующая постоянный угол с параллелями и меридианами (рис. 98). Представьте точку на глобусе, которая в начальный момент времени находится на экваторе, а затем движется на север так, что стрелка компаса все время указывает в одном и том же направлении. На карте, построенной с помощью стереографической проекции на плоскость, касательную к поверхности Земли в северном полюсе, локсодрома имеет вид логарифмической спирали.

Локсодрома не является кратчайшим путем между двумя точками, но для точек, отстоящих друг от друга на достаточно близкое расстояние, мало отличается от геодезической. Кроме того, прокладывая маршрут по локсодроме, штурман достигает еще одного практического преимущества: ему не приходится то и дело вводить поправку в курсовой угол. На дальних маршрутах навигаторы обычно прокладывают геодезическую по гномонической проекции, а затем разбивают ее на более короткие отрезки линий постоянного румба по карте, построенной в проекции Меркатора, с тем, чтобы уменьшить число поправок, вносимых в показания компаса.

Но довольно о классических проекциях. Поговорим о необычных проекциях, приводящих к более ощутимым искажениям. Начнем с двухточечной эквидистантной проекции. Выбираются две точки A и B, строится карта, на

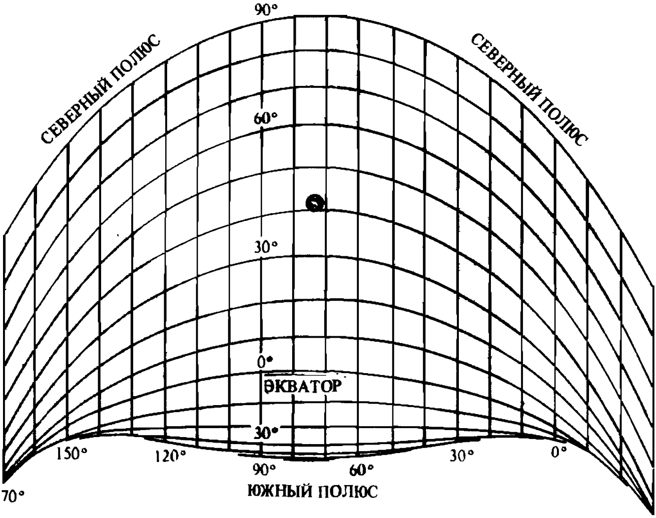


Рис. 99. Карта из отчета Э. Гильберта, указывающая для любой точки на поверхности Земли направление на Мекку банковских воротил -- Уолл-стрит.

которой все расстояния от *A* и *B* до любой другой точки выдержаны в одном масштабе, то есть без искажений. Такая карта очень удобна для того, кто «путешествует» из пунка *A* в пункт *B*. Независимо от того, насколько извилист маршрут, можно в любой момент измерить с помощью линейки, на каком расстоянии от точки *A* и от точки *B* находится путешественник. Предположим, что в качестве двух точек *A* и *B* на эквидистантной карте мира выбраны северный и южный полюсы. Как выглядит такая двухточечная эквидистантная карта?

А вот еще одна необычная карта специального назначения – карта, «ориентированная на Мекку». Она предназначена для того, чтобы любой мусульманин, где бы он ни находился, взглянув на нее, мог точно знать, в какой стороне от него находится Мекка, чтобы обратиться в ту сторону лицом при совершении молитв. Один из способов построения такой карты состоит в построении стереографической проекции поверхности Земли на плоскость, касательную к поверхности в точке, где находится Мекка. Так как карта конформна, направление на Мекку можно определить, измеряя угол между меридианом и прямой, проведенной через то место, где находится мусульманин, и Мекку. К сожалению, меридианы на такой карте искривлены, что затрудняет точное измерение угла. Однако ничто не мешает построить ориентированную на Мекку карту, на которой все меридианы будут прямыми, тогда угол можно будет измерять с помощью транспортира. Такая карта, на которой Мекка заменена другим священным местом – Уолл-стритом,– приведена в отчете о картографических курьезах, написанном для внутреннего пользования фирмы «Лаборатории Белла» математиком Эдгаром Н. Гильбертом (рис. 99). Вся верхняя граница карты («параллель», соответствующая 90° северной широты) представляет собой не что иное, как северный полюс.

В отчете Гильберта приведены и другие необычные карты. Одну из них в форме кардиоиды (сердца) придумал Иоганн Вернер (рис. 100). Эта карта сохраняет площади. Она пользовалась широкой известностью в

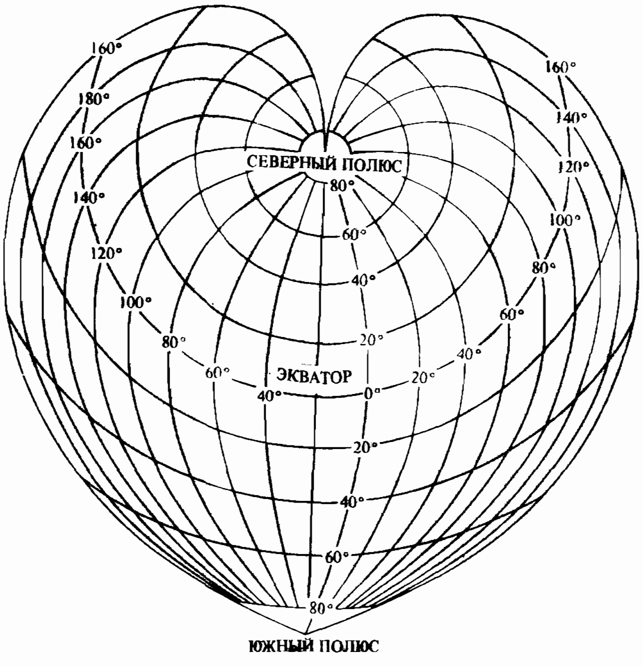


Рис. 100. Карта И. Вернера в форме кардиоиды. При такой проекции площадь сохраняется.

XVI в., но теперь, как пишет Гильберт, «незаслуженно забыта. Сильно искаженные части карты лежат далеко от основных масс суши. Искривленные параллели придают карте приятную иллюзию округлости ... Параллели представляют собой дуги окружностей, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга, с центром в северном полюсе. Меридианы, проведенные для указания расстояний вдоль параллелей, такие же, как на сфере».

Скопление материков на карте Вернера отражает неравномерное распределение суши по поверхности Земли. Тихий океан столь велик, что если смотреть на земной шар из точки, расположенной над проливом Ламанш, то взгляду откроется около 80% всей суши, а противоположное полушарие будет почти сплошь покрыто водой. Удивительна ли «кривобокость» земного шара? Гильберт попытался ответить на этот вопрос, заменяя континенты небольшими неперекрывающимися круглыми шапочками. Предположим, что N таких шапочек случайным образом распределены по сфере. Какова вероятность того, что центры всех N окружностей лежат в одном полушарии? Вероятность такого события, как показал Гильберт в работе «Вероятность покрытия сферы N круглыми шапочками», равна $2^{-N}(N^2 - N + 2)$. При $N = 7$ континентам эта вероятность составляет 11/32. Следовательно, в «кривобокости» Земли нет ничего удивительного. Читатель может доставить себе удовольствие и подсчитать вероятность того, что центры первого, второго или третьего континентов лежат в одном полушарии.

Самая необычная из карт Гильберта была построена с помощью обратного проектирования на сферу конформной карты мира, полученной с помощью конической проекции. Эта конформная карта получила название «двойной карты мира». На рис. 101 показано, как выглядит глобус, если смотреть на него сверху из точки, находящейся на расстоянии около 5 радиусов от его центра. Когда в кабинет к Гильберту приходят гости, он очень любит спрашивать, что не так в его глобусе. Если посетитель не замечает в глобусе ничего необычного, то Гильберт поворачивает глобус на один полный поворот. «Даже такая подсказка не всегда помогает»,– пишет он. В действительности почти каждая точка на его глобусе имеет двойника в другом полушарии! Однако не слиш-

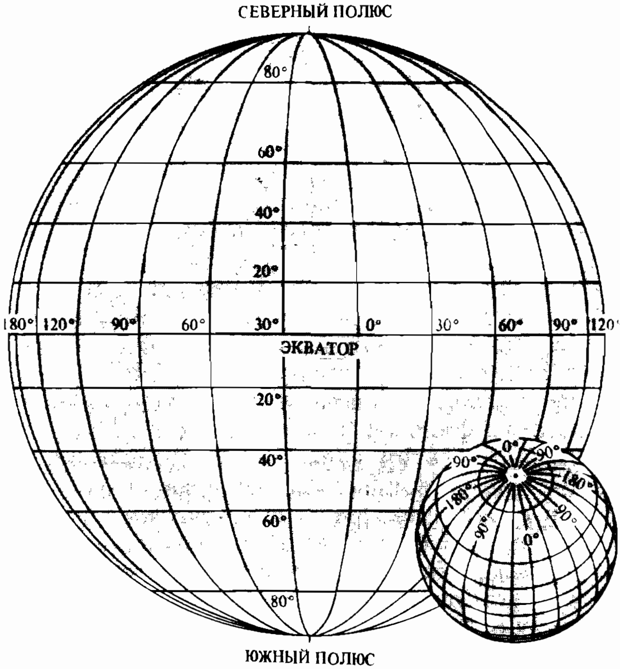


Рис. 101. Глобус «двойного мира» Гильберта (вид сбоку и со стороны сверху).

ком искушенному географу трудно заметить, что перед ним гораздо более широкая картина, чем он видит обычно, глядя на одно полушарие глобуса.

Теперь, когда мы располагаем компьютерной графикой, стало возможным составлять программы, которые так искажают поверхность земного шара, что площадь области на карте выражает ту или иную величину: количество осадков за год, закупочные цены и т. д. Сами области на карте остаются узнаваемыми несмотря на сильные искажения. Знакомым примером такого рода карт может служить карта-шутка, отражающая представление коренного жителя Нью-Йорка о территории Соединенных Штатов, хотя ее многочисленные варианты были «составлены» еще в докомпьютерную эру. Одним из ведущих специалистов по таким картам особого назначения является Вальдо Р. Тоблер, географ из Мичиганского университета. В статье «Непрерывное преобразование, полезное при разбиении на округа» [15, 7] он описывает компьютерную программу, позволяющую создать карту, на которой величина области позволяет судить о численности населения, и показывает, как такая карта могла бы быть использована при планировании избирательных округов. В 1973 г. один географ, питавший слабость к галстукам-бабочкам, был удостоен награды – обрамленной в рамку карты мира, выполненной в форме столь милого его сердцу галстука. Для программы Тоблера составление такой фигурной карты не представляло проблемы.

Разрезанная карта (как я их называю) – это карта мира, спроектированная на тот или иной узор из квадратов, треугольников или многоугольников. Если такие фрагменты сложить, то образуется карта с разрывами любой части земного шара. Одну такую конформную карту составил философ и математик Ч. Пирс. Земная поверхность спроектирована на этой карте на восемь равнобедренных треугольников, которые можно рассматривать как грани октаэдра, сплющиваемого до тех пор, пока длина его пространственной диагонали не обратилась в нуль. Вершинам нулевой диагонали на карте Пирса соответствуют северный и южный полюсы.

Б. Кахилл из Окленда (шт. Калифорния) запатентовал свою карту-бабочку в 1913 г. В 30-е годы на нее появилась мода. Мир на карте Кахилла спроектирован на 8 граней (в форме равносторонних треугольников) правильного октаэдра. Кахилл предложил несколько вариан-

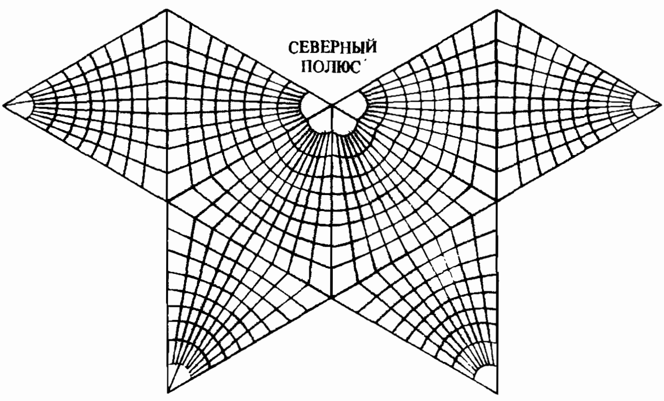


Рис. 102. Карта-бабочка Б. Дж. Кахилла.

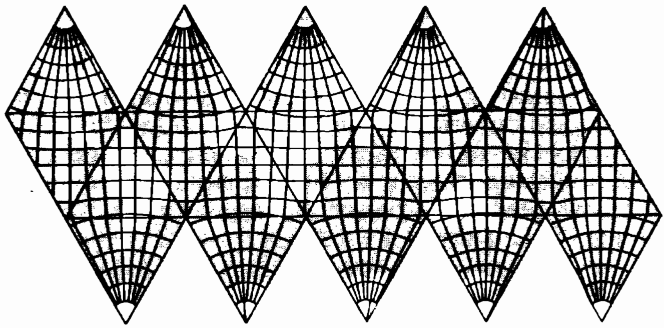


Рис. 103. «Линкаглобус» И. Фишера, складывающийся в икосаэдр.

тов своей карты-бабочки, основанных на различных проекциях, но все они состояли из 8 треугольных «граней», которые можно было соединять в любом порядке (рис. 102).

Карта димаксион Р. Бакминстера Фуллера была проекцией земного шара на 14 граней (6 квадратов и 8 равносторонних треугольников) кубоктаэдра. Дж. Пил, бывший в то время редактором журнала по науке, был настолько увлечен димаксионом, что попросил картографа Р. Харрисона начертить развертку кубоктаэдра. Художники журнала *Life* дорисовали цветную карту на развертке, и она украсила обложку одного из номеров (March 1, 1943). Успех превзошел все ожидания. Маленький кубоктаэдр, висящий на нити и вращающийся от дуновения ветерка, можно было видеть повсюду и в домах, и в лабораториях.

Примерно в то же время аналогичная идея пришла в голову выдающемуся экономисту из Йэльского университета Ирвингу Фишеру: он задумал осуществить гномоническую проекцию поверхности Земли на 20 треугольных гранях икосаэдра. На рис. 103 вы видите развертку этого платонова тела в том виде, в котором она появилась в занимательном введении в картографию «Карты мира и атласы» И. Фишера и О. Миллера [15.2]. Создал карту уже известный нам картограф Харрисон.

Попробуйте вырезать гномоническую проекцию Фишера из плотной бумаги или тонкого картона и сложить из развертки икосаэдрический глобус или разрезать ее на отдельные треугольники и сложить из них икосаэдр различными способами. Если полюсы оказываются в противоположных вершинах, то экватор переходит в прямую. Фишер выпустил на рынок несколько вариантов своего линкаглобуса и написал статью о преимуществах его перед традиционным глобусом в *Geographical Review* (October 1943). Разумеется, поверхность земного шара можно проектировать и на другие правильные тела, но искажения особенно заметны на кубе и тетраэдре. Псевдоглобус в виде додекаэдра выглядит очень мило, но грани его нельзя использовать в качестве плиток для замощения плоскости, так как правильными пятиугольниками невозможно покрыть всю плоскость без зазоров и наложений.

По-видимому, идеальным многогранником для разрезания «на карты» является икосаэдр, и ныне это признал сам Фуллер. В 1954 г. он стал держателем авторских прав на карту мира «Димаксион небо–океан». От линкаглобуса Фишера эта карта отличается тем, что северный и южный полюсы на ней принадлежат противоположным граням и слегка смещены относительно центров граней. Вариант этой карты, предназначенный для вырезания, выпущен фирмой «Карты димаксион» наряду с различными вариантами развертки икосаэдра. В пояснительной записке Фуллер излагает философию и методику построения проекции.

Мы познакомились лишь с очень незначительной частью весьма и весьма многочисленных карт специального назначения, придуманных и изготовленных хитроумными картографами. Харрисон однажды начертил карту мира, на которой не было нанесено ничего, кроме рекомендуемых маршрутов для морских судов. При взгляде на эту карту издалека вы отчетливо могли различить все континенты, но, взглянув на нее с близкого расстояния, обнаруживали, что на ней не обозначена ни одна береговая линия. В одном из бостонских издательств желающие могут побывать внутри глобуса диаметром 9 м. Если бы он был прозрачным, то при взгляде на него извне мы увидели бы все материки в зеркальном отражении. Но с точки зрения наблюдателя, находящегося внутри глобуса, очертания всех континентов имеют нормальный вид.

Основной догмат небольшой и весьма странной секты «корешанити», достигшей наибольшего расцвета в конце прошлого столетия в Америке, сводится к утверждению о том, что мы живем на внутренней поверхности полой Земли, а весь космос с помощью инверсии «загнан внутрь» и заполняет полость в сферической оболочке. Секта была основана баптистом С. Тидом из Утики (шт. Нью-Йорк). Вертикальные («перевернутые») карты Тида опубликованы в его фундаментальном научном труде «Клеточная космогония» (1870) и на страницах журнала «Огненный меч», издававшегося сектой до 1949 г. Как Тид объяснял, почему мы не можем видеть обратную сторону Земли, направив телескоп просто вверх? Преподобный Тид предусмотрел специальные законы оптики, описывающие распространение света по изогнутым путям.

Космос Тида не был должным образом оценен философами науки. Выполнив над Вселенной операцию инверсии и введя новые законы физики, вы получаете мир, вывернутый наизнанку, отделаться от которого не так-то просто, если не воспользоваться столь решительным средством, как «бритва Оккама».

Существует еще одна весьма обширная группа эксцентрических карт, которую мы не рассматривали: карты несуществующих, воображаемых стран. На таких картах мир предстает перед нами таким, каким он мог бы быть, если бы какие-нибудь крупные войны закончились не так, как они закончились в действительности, а иначе. На картах, рожденных игрой воображения, нанесены страна Оз, Ад, Рай, Пуактезм, Нарния, Барсум, Средиземлие, Атлантида и многие другие фантастические страны и области земного шара. Дж. Пост собрал 98 из них в своем великолепном «Атласе фантазии» [15.6]. В этой связи нельзя не упомянуть морскую карту, которой пользуется Звонящий в колокол в Пароксизме 2 «Охоты на Снарка» Льюиса Кэрролла:

Необъятную карту по сходной цене
Приобрел он простора морского:
Только море, а суши не видно нигде,
Но команде не нужно другого.
Ясно каждому, если только он в здравом уме,
Карта эта – ну, проще простого!

«Ни к чему нам Меркатор,
Параллель и экватор,
Тропик Рака и меридиан!

Ведь их нет и в помине
Ни в морях, ни в пустыне!» –
Молвил вместе со всеми седой капитан.

Восхвалять неустанно
Мы должны капитана.
Сколь удачна покупка его!
Островов и проливов
Тьма на картах унылых,
А на нашей так нет ничего!

В заключение своей книги о картах мира и глобусах [15.2] Фишер и Миллер приводят 36 великолепных вопросов (и ответов) по географии. Мы выбрали лишь 8 из них. Попробуйте ответить на эти вопросы, не заглядывая в карту.

1. Вы плывете на судне в 5 милях от входа в Панамский канал и держите курс на запад, приближаясь к каналу. В водах какого океана находится ваше судно?
2. Вы летите из Детройта на юг. Какое иностранное государство встретится на вашем пути раньше всех других?
3. Что ближе к Майами: Калифорния или Бразилия?
4. Что расположено севернее: Венеция или Галифакс?
5. Что расположено южнее: Венеция или Владивосток?
6. Чья территория больше: Японии или Великобритании?
7. Какие 4 штата в США сходятся в одной точке?
8. Как проходит геодезическая (дуга большого круга) из Токио к Панамскому каналу: западнее или восточнее Сан-Франциско?

Все иллюстрации к этой главе выполнены Р. Харрисоном. Его же ценными советами я пользовался в работе над текстом.

ОТВЕТЫ

Двухточечная эквидистантная карта мира, если за точки *A* и *B* выбраны любые 2 точки-антиподы, имеет вид прямой. Следующая задача была о распределении материков по поверхности земного шара. Если 1, 2 или 3 непересекающиеся круглые шапочки случайно распределены по поверхности сферы, то вероятность того, что их центры окажутся в одном полушарии (подчеркиваю, в любом одном полушарии, не обязательно северном или южном), равна 1.

Ответы на вопросы по географии:

1. В водах Тихого океана.
2. Первой на вашем пути встретится Канада.
3. Калифорния.
4. Венеция.
5. Владивосток.
6. Японии.
7. Аризона, Колорадо, Нью-Мексико, Ута.
8. Восточнее.

В связи с вопросом 7 я узнал в 1984 г., что автострада «Четыре угла» проходит в нескольких сотнях ярдов от того места, где сходятся границы 4 штатов. К общей вершине «четырех углов», где местные индейцы продают сувениры, от автострады проложена специальная дорога.

ДОПОЛНЕНИЕ

Уже после того как я опубликовал журнальный вариант этой главы, мне стало известно о многих других картах мира в необычных проекциях. Мои открытия были столь многочисленны, что я могу лишь кратко прокомментировать некоторые из них. Я уже упоминал о карте-шутке, отражающей представление среднего жителя Нью-Йорка о географии соединенных Штатов. На этой карте Нью-Йорк, Калифорния и Флорида занимают огромные территории, а остальные штаты изображены совсем крошечными. В конце 70-х годов датский писатель и изобретатель Пит Хейн выпустил в Дании свое очередное изобретение – так называемый «Датский глобус». На этом глобусе занимаемая Данией площадь увеличена, чтобы показать, какой большой предсталяется их страна датчанам.

В 1985 г. я вырезал из книжного обозрения *The New York Review of Books* (February 14) объявление о карте Америк, на которой Южная Америка расположена вверху, в США и Канада – внизу. «Печатная машина обычно отводит США место наверху, – гласило объявление. – Быть наверху означает занимать более высокое положение, чем другие, превосходить что-то. Такое толкование рождает неправильные ассоциации и поэтому вредно. «Перевернутая карта» вносит поправку в перспективу».

Профессор Тоблер, о котором я уже упоминал, сообщил мне о своей неопубликованной карте в виде листа Мёбиуса. Земля проектируется на полосу (как проекция Меркатора, растянутая в горизонтальном направлении), полоса перекручивается на пол-оборота, а затем концы ее склеиваются. Две растянутые точки полюсов переходят в край (единственный) односторонней поверхности. Карта Тоблера обладает следующим замечательным свойством: булавка, протыкающая ее в любой точке, выходит «с другой стороны» в точке-антиподе! Кто, кроме тополога, спрашивает Тоблер, мог бы ожидать такого подобия в свойствах сферы и листа Мёбиуса?

ГЛАВА 16

ШЕСТОЙ СИМВОЛ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

1. Какой символ следующий? Можете ли вы дорисовать шестой символ к тем 5, которые вы видите на рис. 104?

2. Какой символ отличен от остальных? Всякий, кому доводилось проверять свой коэффициент умственного развития (I, Q), несомненно, помнит тесты, в которых требуется определить, какой из предъявляемых символов «чужероден». Иногда символы отличаются друг от друга по столь большому количеству признаков, что даже самые сообразительные из обследуемых становятся в тупик, тщетно пытаясь отгадать, какой из символов показался наиболее отличным составителю теста.

Раздражение, обычно вызываемое неоднозначностью задания, побудило Т. Рансома (Торонто) придумать великолепную пародию на такого рода тесты. Вглядитесь

Рис. 104. Как выглядит седьмая фигура в этом ряду?

внимательно в 5 символов, изображенных на рис. 105, и выберите тот, который, по-вашему, наиболее необычен.

3. Как разрезать пирог? Пирог испекли в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратом в основании. Предположим, что пирог заморозили сверху и с боков и что замерзшая корочка имеет пренебрежимо малую (нулевую) толщину. Мы хотим разрезать пирог на n частей, равных по объему и по площади замороженной корочке. Схема разрезания традиционна: при взгляде сверху разрезы, как спицы, расходятся от центра квадрата. Плоскость каждого квадрата перпендикулярна плоскости основания пирога.

При $n = 2$, 4 или 8 задача легко решается разрезанием пирога на 2, 4 или 8 конгруэнтных тел. Но предположим, что $n = 7$. Через какие точки на периметре пирога следует провести разрезы? Решив эту задачу при $n = 7$, вы легко обобщите решение для случая произвольного n.

Эта замечательная задача приведена на с. 38 классической книги Г. С. М. Кокстера «Введение в геометрию» [16.1]. Кокстер не дает решения, но читатель без труда найдет его самостоятельно. Общее решение удивительно просто.

4. Два криптарифма. Два приводимых ниже изящных криптарифма придумал А. Уэйн. Ранее они не публиковались. Первый из них – на французском, второй – на немецком языке. (Первый криптарифм означает: «двадцать плюс пять плюс пять равно тридцати», второй: «один

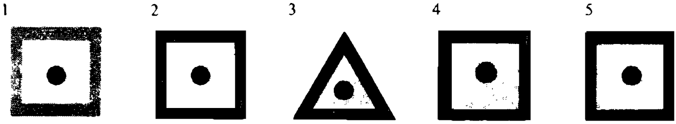


Рис. 105. Тест на проверку коэффициента интеллектуального развития (I. Q.), предложенный Т. Рансомом: какой символ больше всего непохож на других?

плюс один плюс один плюс один равно четырем».) Каждая буква кодирует ровно одну десятичную цифру. Кроме того, мы придерживаемся обычного соглашения о том, что число не должно начинаться с нуля. Оба криптарифма имеют единственное решение:

$$
\begin{array}{r}
\text{VINGT}\\
+\ \ \text{CINQ}\\
\text{CINQ}\\
\hline
\text{TRENTE}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{EIN}\\
+\ \ \text{EIN}\\
\text{EIN}\\
\text{EIN}\\
\hline
\text{VIER}
\end{array}
$$

5. «Сонет» Льюиса Кэрролла. В 1887 г. Льюис Кэрролл в письме к девочке по имени Мод Станден привел шестистрочное стихотворение, которое он назвал «анаграмматическим» сонетом. (Слово «сонет» Льюис Кэрролл использовал в старом смысле: так некогда называли любое короткое стихотворение.) «В каждой строке – 4 стопы,– сообщал Кэрролл в письме к Мод.– Каждая стопа – анаграмма, то есть устроена так, что если переставить ее буквы, то получится новое слово». Большинство анаграмм, продолжает Кэрролл, были придуманы для «милых девочек», с которыми ему довелось познакомиться прошлым летом в Истберне. Длина слов – от 3 до 7 букв. Использовать собственные имена не разрешается». Вот «сонет» Кэрролла:

As to the war, try elm. I tried.
The wig cast in, I went to ride.
"Ring? Yes". We rang. "Let's rap".
We don't.
"O shew her wit!" As yet she won't.
Saw eel in Rome. Dry one: he's wet.
I am dry. O forge! Th'rogue! Why
a net? *

В большинстве случаев правильное слово-анаграмму угадать нетрудно. Например, первая стопа "As to" может

---

* Те из читателей, кто не владеет английским языком или не желает участвовать в спорах кэрролловедов относительно того, какие слова имел в виду Льюис Кэрролл, составляя свой анаграмматический сонет, могут придумать слова-анаграммы на своем родном языке. – *Прим. перев.*

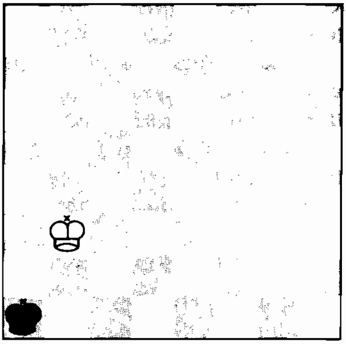


Рис. 106. Где стоит третья фигура и что это за фигура?

дать "oast" (печь для сушки солода) или "stoa" (портик с колоннадой и задней стеной), но Кэрролл скорее всего имел в виду более распространенное слово "oats" (овес). Однако для нескольких стоп задуманное Кэрроллом слово не вполне ясно. Своего решения сонета-анаграммы Кэрролл не оставил, и среди современных кэрроллианцев нет единого мнения относительно того набора из 24 слов, которые имел в виду Кэрролл. Каждый может попытаться составить свой собственный список слов и сравнить его с тем, который мы приводим в ответе.

6. Задача о трех фигурах.

На доске, изображенной на рис. 106, вы видите только двух королей. Задача состоит в том, чтобы добавить к ним третью фигуру. Позиция на доске после выставления новой фигуры должна удовлетворять следующим условиям:

1) ни один король не должен быть под шахом;

2) позиция должна быть достижимой, то есть такой, которая может возникнуть в шахматной партии, разыгрываемой с соблюдением всех правил;

3) из анализа предыдущих ходов, проводимого в случае необходимости, должно следовать, что ни белые, ни черные не могут сделать ни хода.

Обратите внимание на точную постановку задачи: добавление третьей фигуры должно приводить не к двойному пату, а только к позиции, в которой ни белые, ни черные не могут сделать хода. Задача допускает единственное решение.

Эта тонкая шахматная задача появилась в журнале *The Problemist* (September 1974, p. 471). Ее автором считается Г. Гуссерль из Израиля. Мое внимание к этой задаче привлек Н. Гутман. В первоначальном варианте требовалось найти минимальное число дополнительных фигур, которые нужно выставить на доску так, чтобы были выполнены условия (1)–(3). Я упростил задачу, сообщив читателю, что минимальное число фигур равно 1.

ОТВЕТЫ

1. Шестой символ изображен на рис. 107 (тонкими вертикальными линиями указаны оси симметрии). Справа от каждой оси начерчены цифры от 1 до 6, а слева – их зеркальные отражения.

2. В тесте Т. Рансома для проверки I. Q. первый символ отличается от всех остальных тем, что у него не черная («серая») граница. Второй символ отличается тем, что у него черная граница и черное пятно, третий – тем, что он не квадрат, четвертый – тем, что у него серое внутреннее пятно. Пятый символ отличается тем, что какое бы его свойство мы ни выбрали, среди четырех других символов всегда найдется по крайней мере еще один, который обладает таким же свойством. Именно поэтому пятый символ больше всего отличается от других символов, он «наиболее необычен». Наше утверждение можно сформулировать иначе: различия между первыми четырьмя символами однотипны, они имеют общую основу, в то время как пятый символ отличается от них совершенно иначе, что делает его совсем другим, или «наиболее необычным».

Ситуация с символами Рансома напоминает старый анекдот о психиатре, столкнувшемся с самым необычным случаем в своей практике: у пациента не оказалось ни малейших признаков никаких неврозов. Мне кажется, что Рансом обнаружил новую изящную модель семантического парадокса, который часто встречается, но редко удостаивается объяснения.

3. Чтобы разрезать пирог, замороженный сверху и с

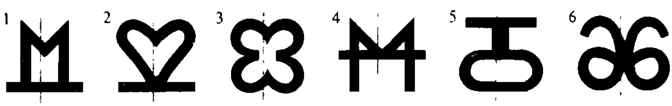


Рис. 107. Решение задачи о недостающем (шестом) символе.

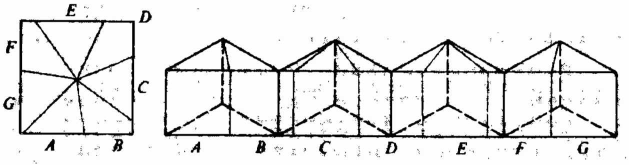


Рис. 108. Решение задачи о разрезании квадратного пирога.

четырех боковых сторон, на n частей, равных по объему и по площади замороженной корочки, следует разделить периметр на n равных частей и разрезать пирог как обычно – от центра (рис. 108). Чтобы понять, почему такой способ разрезания приводит к желаемому результату, воспользуемся одним приемом, предложенным Н. Нельсоном и Ф. Фишем в их работе «Классическая задача о разрезании пирога» [16.2]. Представьте себе, что пирог разрезан по диагоналям на 4 конгруэнтные треугольные призмы и что эти призмы расставлены в ряд, как показано на рис. 108. Основание четырехзубчатого тела равно периметру пирога. Разделим пирог на 7 одинаковых порций A, B, C, D, E, F, G, как показано 7 тонкими линиями. Эти линии соответствуют 7 плоскостям разрезов в решении.

Нетрудно видеть, что площадь замороженной корочки у всех порций одинакова. Ясно, что суммы площадей одного или двух прямоугольников, образующих замороженную боковую корочку каждой порции, равны. Верхние корочки всех порций (состоящие из одного или двух треугольников) также равны, так как суммы длин оснований этих треугольников равны и все треугольники имеют одинаковую высоту. Наконец, объемы всех порций равны, так как равны их высоты, а основания имеют одинаковую площадь.

Решение допускает очевидное обобщение на случай любого числа n порций. Однако предложенный алгоритм непримени́м к пирогу с замороженной корочкой конечной толщины из-за сложностей, связанных с подсчетом объема угловых областей.

Ст. Уоршоу из лаборатории Лоуренса обобщил задачу о разрезании пирога. Он показал, что алгоритм, предложенный выше для квадратного пирога, примени́м к пирогу с основанием в форме любого многоугольника, образованного касательными к одной и той же окружности. В число таких многоугольников входят все треугольники и ромбы, все правильные многоугольники (а также их предельный случай – круг) и все многоугольники с неравными сторонами, если только эти стороны касаются одной и той же окружности. Уоршоу сделал поистине удивительное открытие. Оказывается, предложенное им обобщение позволяет решить весьма сложную и важную задачу: как разделить на части с заданными пропорциями дискретную сетку при компютерном моделировании гидродинамических течений. Решение (после того, что нам уже известно) очевидно.

4. Криптарифм на французском языке имеет решение $94851 + 6483 + 6483 = 107817$, а криптарифм на немецком языке – $821 + 821 + 821 + 821 = 3284$.

Многие читатели обратили внимание на то, что число 1 по-немецки называется eins, а не ein, как написано в немецком криптарифме. У. Гиссен первым добавил, что с учетом этого замечания криптарифм на немецком языке по-прежнему допускает единственное решение: $1329 + 1329 + 1329 + 1329 = 5316$.

5. Попытку решить анаграмматический сонет Льюиса Кэрролла первыми предприняли С. Уильямс и Ф. Мадан в изданном ими «Справочнике по сочинениям преподобного Ч. Л. Доджсона» [16.3]. Некоторые из допущенных ими ошибок были исправлены в пересмотренном издании «Справочника по Льюису Кэрроллу» Р. Грина [16.4]. Дальнейшую критику и различного рода догадки см. в статье «Объяснения к сонету» Ф. Бенема в журнале Общества Льюиса Кэрролла *Jabberwocky* (Summer 1974).

Опираясь на перечисленные выше источники, я с помощью С. Брауна составил список тех слов-анаграмм, которые вероятнее всего имел в виду Льюис Кэрролл.

1. As to: *oats* (не *oast* и не *stoa*).
2. The war: *wreath* (не *thawer*).
3. Try elm: *myrthle*.
4. I tried: *tidier*.
5. The wig: *weight*.
6. Cast in: *antics* (не *sciant, actins* или *nastic*).
7. I went: *twine*.
8. To ride: *editor* или *rioted*.
9. Ring? Yes: *syringe*.
10. We rang: *gnawer*.
11. Let's rap: *plaster* (не *staples, persalt, palters, psalter* или *platers*).

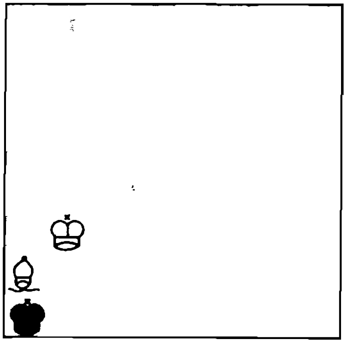


Рис. 109. Решение задачи о третьей фигуре.

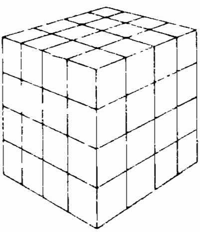
12. We don't: *wonted.*
13. O shew: *whose.*
14. Her wit: *writhe* (не *wither* и не *whiter*).
15. As yet: *yeast.*
16. She won't: *snoweth.*
17. Saw eel: *weasel.*
18. In Rome: *merino* (не *moiren* и не *minore*).
19. Dry one: *yonder.*
20. He's wet: *seweth* (не *thewes* и не *hewest*).
21. I am dry: *myriad.*
22. O forge: forego.
23. Th' rogue: *tougher* (не *rougeth*).
24. Why a net: *yawneth.*

Письмо Кэрролла с анаграмматическим сонетом впервые появилось в сборнике «Шесть писем Льюиса Кэрролла», опубликованного частным образом в 1924 г. Оно вошло как письмо XLV в книгу «Избранные письма Льюиса Кэрролла к его маленьким друзьям», изданную Ивлин М. Хэтч [16.5].

А теперь некоторые свежие новости о номере 16. Можете ли вы переставить буквы в словах "she won't" так, чтобы получилась другая общераспространенная фраза из двух слов?

6. Единственное решение шахматной задачи о 3 фигурах состоит в том, чтобы поставить белого слона на поле a2, как показано на рис. 109. Черные, очевидно, не могут сделать ни одного хода, а белые не могут сделать ход, так как сначала должны пойти черные. Доказать, что в изображенной на рис. 109 позиции ход должны сделать черные (и, следовательно, мат поставлен черным), можно с помощью элементарного ретроспективного анализа, который я предоставляю читателям.

Многим читателям осталось непонятно, почему шахматная задача о третьей фигуре не имеет многих решений (например, почему белого слона нельзя заменить белой пешкой). В действительности все остальные решения, кроме изображенного на рис. 109, должны быть отвергнуты, так как ни одно из них не исключает возможность того, что очередной ход должны сделать белые. Но это означает, что не выполняется условие (3) задачи, согласно которому ни белые, ни черные не должны иметь возможность сделать ни одного хода. Например, предположим, что черный король стоит на поле b1. Белые, продвинув свою пешку вперед, объявляют шах черным. Черный король отходит на a1. Следующий ход белых. Данное решение – единственное, для которого с помощью ретроспективного анализа можно показать, что в позиции, изображенной на доске, ход должны сделать черные, доказав, что позиция представляет собой пат черным.



ГЛАВА 17

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ И КУБЫ

> В дни моей юности я в свободное время (которое, как мне кажется, можно было бы употребить с большей пользой) развлекался тем, что составлял ... магические квадраты.
>
> *Бенджамин Франклин*

В изучении магических квадратов и кубов произошло два важных события: были вычислены все магические квадраты порядка 5 и построены первые совершенные магические кубы. Я счастлив, что первым опубликовал оба результата. Для того чтобы по достоинству оценить масштаб этих двух достижений, совершим краткий экскурс в историю магических квадратов.

Хотя некоторые выдающиеся математики посвятили свои работы магическим квадратам и полученные ими результаты оказали влияние на развитие теории групп, структур, латинских квадратов, определителей, разбиений, матриц, сравнений и других нетривиальных разделов математики, с наибольшим энтузиазмом построением магических квадратов занимались любители. Знаменитому квадрату Франклина (хитроумной матрице 16×16), который Бенджамин Франклин назвал «самым магическим из всех магических квадратов, когда-либо составленных магом», посвящено множество статей и монографий. Литература по магическим квадратам вообще обширна, но бо́льшая часть работ написана непрофессионалами, которым посчастливилось обнаружить изящную симметрию взаимосвязанных числовых узоров, образующих магический квадрат.

Вряд ли кому-нибудь из читателей необходимо напоминать о том, что стандартный магический квадрат представляет собой квадратную матрицу положительных целых чисел от 1 до N^2, расположенных в таком порядке, при котором сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали равна одному и тому же числу, называемому постоянной магического квадрата или просто магической постоянной. Число N называется порядком магического квадрата. Нетрудно видеть, что магическая постоянная равна сумме всех чисел, деленной на N, или

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + N^2)/N = (1/2)(N^3 + N).$$

Тривиальный квадрат порядка 1 есть просто число 1. Разумеется, такой квадрат единствен. Точно так же легко доказать, что магический квадрат порядка 2 не существует.

Расположить натуральные числа от 1 до 9 в магический квадрат 3×3 можно 8 различными способами. Однако по традиции зеркально симметричные магические квадраты и квадраты, переходящие друг в друга при поворотах, не считаются различными. Если учесть это замечание, то останется единственный магический квадрат порядка 3. Чтобы оценить красоту этой жемчужины – самого древнего из всех экспонатов комбинаторной кунсткамеры, рассмотрим все способы, которыми его магическую постоянную можно разложить в сумму трех различных положительных целых чисел. Таких разложений существует ровно 8:

$$\begin{gathered}9+5+1,\\ 9+4+2,\\ 8+6+1,\\ 8+5+2,\\ 8+4+3,\\ 7+6+2,\\ 7+5+3,\\ 6+5+4.\end{gathered}$$

В магическом квадрате 3×3 магической постоянной 15 должны быть равны суммы трех чисел по 8 направлениям: по 3 строкам, 3 столбцам и 2 диагоналям. Так как число, стоящее в центре, принадлежит 1 строке, 1 столбцу и 2 диагоналям, оно входит в 4 из 8 троек, дающих в сумме магическую постоянную. Такое число только одно: это 5. Следовательно, число, стоящее в центре магического квадрата 3×3, уже известно: оно равно 5.

Рассмотрим число 9. Оно входит только в 2 тройки чисел. Мы не можем поместить его в угол, так как каждая угловая клетка принадлежит 3 тройкам: строке, столбцу и диагонали. Следовательно, число 9 должно стоять в какой-то клетке, примыкающей к стороне квадрата в ее середине. Из-за симметрии квадрата безразлично, какую из сторон мы выберем, поэтому впишем девятку над числом 5, стоящим в центральной клетке. По обе стороны от девятки в верхней строке мы можем вписать только числа 2 и 4. Какое из этих двух чисел окажется в правом верхнем углу и какое в левом, опять-таки не имеет значения, так как одно расположение чисел переходит в другое при зеркальном отражении. Остальные клетки заполняются автоматически. Проведенное нами простое построение магического квадрата 3×3 доказывает его единственность.

Заполненный магический квадрат 3×3 в форме, представленной на рис. 110, был известен еще древним китайцам под названием Ло шу. По преданию, он впервые появился на панцире священной черепахи, выползшей на берег из реки Ло в XXIII в. до н.э., но современные

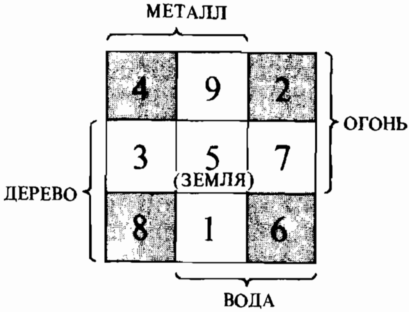


Рис. 110. Магический древнекитайский квадрат Ло шу.

китаеведы прослеживают Ло шу лишь до IV в. до н. э. С того времени и вплоть до X в. этот магический квадрат был мистическим символом огромного значения. Четные числа древние китайцы отождествляли с «инь» – женским началом, нечетные с «ян» – мужским. Пятерка в центральной клетке по их представлениям соответствовала земле, вокруг которой в строгом равновесии между инь и ян размещались 4 других элемента: числа 4 и 9 символизировали металл, 2 и 7 – огонь, 1 и 6 – воду и 3 и 8 – дерево.

Существует 880 магических квадратов порядка 4 (квадраты, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, различными не считаются). Впервые они были перечислены Бернаром де Бесси в 1693 г. Существует множество классификаций магических квадратов порядка 4, основанных на различных принципах. Одна из лучших классификаций была предложена Генри Э. Дьюдени, изложившим свою систему в превосходной статье о магических квадратах в первых заводах 14-го издания «Британской энциклопедии». В последующих заводах статья Дьюдени была заменена замечательной исторической статьей Ш. Каммана. В последнем (пятнадцатом) издании помещена малосодержательная микростатья о магических квадратах.

Сколько существует магических квадратов порядка 5? Наилучшая оценка была получена в 1938 г. А. Канди [17.13]. По подсчетам Канди, общее число магических квадратов порядка 5 достигает 13 288 952. Точное число не было известно до 1973 г., когда полный перебор магических квадратов был осуществлен компьютерной программой, разработанной Р. Шрёппелем, математиком и программистом из “Information International”. Программа использует стандартную процедуру обратного считывания и состоит примерно из 3500 «слов». Прогон ее на компьютере PDP-10 занимает около 100 ч машинного времени. Окончательное сообщение, написанное М. Билером, появилось в октябре 1975 г.

Оказалось, что оценка Канди существенно занижена. С точностью до поворотов и отражений существует 275 305 224 магических квадратов порядка 5. Шрёппель предпочитает делить это число на 4 и считает, что существует 68 826 306 магических квадратов порядка 5. Дело в том, что помимо 8 вариантов каждого квадрата, получаемых с помощью поворотов и отражений, существуют еще 2 варианта, порождаемых следующими 2 преобразованиями, которые сохраняют магичность:

1) перестановка первого и пятого столбцов с последующей перестановкой верхней и нижней строк;

2) перестановка 1-й и 2-й строк и 4-й и 5-й строк с последующей перестановкой 1-го и 2-го столбцов и 4-го и 5-го столбцов.

Эти 2 преобразования в сочетании с 2 отражениями и 4 вращениями порождают $2 \times 4 \times 2 \times 2 = 32$ варианта (или 32 формы) квадрата, которые можно назвать изоморфными. При таком определении изоморфизма общее число различных магических квадратов становится равным 68 826 306.

Это число можно еще сильнее уменьшить, если рассмотреть еще одно хорошо известное преобразование. Если каждое число в магическом квадрате вычесть из $N^2 + 1$ (в случае квадратов порядка 5 – из 26), то получится квадрат, который называется дополнением к исходному. Он также магический. Если в центральной клетке квадрата порядка 5 стоит число 13, то дополнение изоморфно исходному квадрату. Если в центральной клетке стоит число, отличное от 13, то в результате перехода к дополнению возникает новый магический квадрат. Если изоморфизм понимать в расширенном смысле, относя к числу операций, не нарушающих изоморфизм, операцию взятия дополнения, то общее число различных магических квадратов порядка 5 понизится примерно до 35 млн.

Задача о построении классификации магических квадратов порядка 5 сколько-нибудь осмысленными способами своей грандиозностью потрясает воображение. Дьюдени как-то писал, что некоторые способы разбиения магических квадратов на классы представляются ему столь же полезными, как и разбиение людей на тех, кто нюхает табак, и тех, кто табак не нюхает. Тем не менее некоторые попытки построения классификации приводят к неожиданным результатам. Вот, например, сколько существует магических квадратов порядка 5, в центральные клетки которых вписаны числа от 1 до 13:

1–1 091 448,
2–1 366 179,
3–1 914 984,
4–1 958 837,
5–2 431 806,
6–2 600 879,
7–3 016 881,
8–3 112 161,
9–3 472 540,
10–3 344 034,
11–3 933 818,
12–3 784 618,
13–4 769 936.

Заметим, что когда числа в центральной клетке возрастают от 1 до 8, количество магических квадратов каждого типа монотонно возрастает, но затем происходят 2 сбоя для 9 и 10 и для 11 и 12. Магических квадратов с числом 11 в центральной ячейке существует больше, чем квадратов с числом 12 в центральной клетке. Точно так же магических квадратов с числом 9 в центральной клетке больше, чем магических квадратов с числом 10. Оба сбоя вызвали большое удивление. Разумеется, те же аномалии встречаются и при подсчете количеств квадратов, у которых в центральной клетке стоят числа от 14 до 25, так как у каждого квадрата порядка 5, кроме квадрата, у которого в центральной клетке стоит число 13, существует дополнение: квадратов с 1 в центральной клетке столько же, сколько их с числом 25 в центральной клетке, и аналогичное утверждение справедливо для любого числа в центральной клетке, кроме числа 13.

На рис. 111 изображен магический квадрат порядка 5 типа, который можно считать более магическим, чем любой другой квадрат. Этот квадрат ассоциативен: любые два числа, симметричные относительно центра, в сумме дают $N^2 + 1$. Кроме того, он пандиагонален (иногда его называют «насик» или «дьявольский магический квадрат»). Это означает, что суммы элементов, стоящих в вершинах ломаных диагоналей, постоянны (и равны

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Рис. 111. **Пандиагональ-ассоциативный магический квадрат порядка 5.**

65). Иначе говоря, если замостить всю плоскость этим магическим квадратом, то, очертив в любом месте квадрат размером 5 клеток на 5, мы непременно получим магический квадрат, хотя и не обязательно ассоциативный (рис. 112). Для того чтобы квадрат был ассоциативным, в его центральной клетке должно стоять число 13.

Квадрат Ло шу ассоциативен, но не пандиагонален. Магический квадрат порядка 4 может быть либо пандиагональным, либо ассоциативным, но не может быть пандиагональным и ассоциативным одновременно. Магические квадраты порядка 5 – наименьшие из квадра-

1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	3	12	21	10	19	3	12	21	10	19	3
9	18	2	11	25	9	18	2	11	25	9	18	2	11	25
1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	3	12	21	10	19	3	12	21	10	19	3
9	18	2	11	25	9	18	2	11	25	9	18	2	11	25

Рис. 112. **Циклические перестановки магического квадрата порядка 5.**

тов, обладающих двумя свойствами одновременно. С точностью до поворотов и отражений 3600 квадратов порядка 5 пандиагональны, а если исключить варианты, получающиеся при циклических перестановках строк и столбцов, то 144 квадрата пандиагональны. Иначе говоря, существуют 144 бесконечные мозаики из магических квадратов порядка 5 такого типа, как на рис. 112; каждая из таких мозаик содержит 25 пандиагональных квадратов порядка 5. Из 144 мозаик только 16 содержат квадрат, который не только пандиагонален, но и ассоциативен. Все это, кстати сказать, было известно до того, как Шрёппель составил свою компьютерную программу.

Из 16 ассоциативных пандиагональных квадратов порядка 5 у четырех 1 стоит в первой клетке, у четырех – в третьей, у четырех – в седьмой и у четырех – в восьмой. Средневековых мусульманских мастеров особенно интересовали пандиагональные квадраты с 1 в центральной клетке. Разумеется, такие квадраты не были ассоциативными, но мусульмане считали 1 в центральной клетке символом единства Аллаха. Они испытывали перед этим символом столь сильный благоговейный трепет, что нередко оставляли клетку, предназначенную для 1, пустой.

Понятие магического квадрата допускает естественное обобщение на случай 3 и большего числа измерений. Совершенным магическим кубом называется кубическая матрица из целых положительных чисел от 1 до N^3, такая, что сумма чисел в любых N клетках, выстроенных в ряд, постоянна. Такой ряд может быть параллелен одному из ребер кубической матрицы, двум главным диагоналям любого сечения матрицы, параллельного «граням», или четырем пространственным диагоналям. Магическая постоянная кубической матрицы равна

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + N^3)/N^2 = (1/2)(N^4 + N).$$

Ясно, что существует единственный совершенный куб порядка 1 и что не существует ни одного совершенного куба порядка 2. Существуют ли магические кубы порядка 3? К сожалению, тройка чуть-чуть «не дотягивает» до допустимого порядка. Я не знаю, кто первым доказал, что магические кубы порядка 3 не существуют, но Ричарду Л. Мейрсу удалось найти очень простое доказательство этого утверждения. Рассмотрим любое сечение куба 3×3. Пусть A, B, C – числа, стоящие в его верхней строке, D, E, F – числа, стоящие в его нижней строке, и X – число в центральной клетке. Так как числа, стоящие на диагоналях и в центральном столбце, должны в сумме давать 3 (42), мы можем записать равенство

$$3X + A + B + C + D + E + F = 3 \cdot 42.$$

Вычитая из него $A + B + C + D + E + F = 2 \cdot 42$, получаем $3X = 42$, или $X = 14$. Так как число 14 не может стоять в центре любого сечения, параллельного граням куба, такой куб не может существовать.

Разочарованные несуществованием совершенных кубов порядка 3 любители магических кубов решили ослабить требования и определить разновидность полусовершенных кубов, которые, по-видимому, существуют во всех порядках больше 2. Так называются кубы, в которых магическими являются только прямые, параллельные ребрам куба, и 4 пространственные диагонали. Назовем их кубами Эндрюса в честь У. Эндрюса, посвятившего им две главы в своей пионерской работе «Магические квадраты и кубы» (1917). Куб Эндрюса порядка 3 должен быть ассоциативным с числом 14 в центральной клетке. Таких кубов (с точностью до поворотов и отражений) существует всего 4. Все они приведены в книге Эндрюса, хотя он не сознавал, что ими исчерпываются все основные типы.

Не существует ни одного совершенного куба порядка 4. Насколько мне известно, первое доказательство этого утверждения было опубликовано Шрёппелем в «Меморандуме по искусственному интеллекту № 239» (MIT, 1972). Первый шаг в доказательстве сводится к следующей лемме: в любом (параллельном граням или диагональном) сечении 4×4 сумма чисел, стоящих в углах, должна быть постоянной. Пусть Q – величина этой постоянной. Обозначим 16 клеток другими буквами (рис. 113). Тонкими линиями указаны 6 четверок чисел, которые охватывают все 16 клеток. Так как каждая угловая клетка принадлежит одновременно трем прямолинейным отрезкам (строке, столбцу и диагонали), сумма $3A + 3D + 3M + 3P$ плюс каждая из остальных клеток, взятая по одному разу, должна быть равна $6Q$. Вычитая из этой величины суммы элементов четырех строк, мы получаем $2A + 2D + 2M + 2P = 2Q$, что в свою очередь сводится к равен-

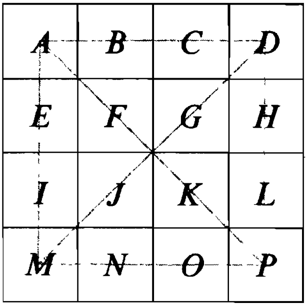


Рис. 113. Доказательство леммы 1, предложенное Р. Шрёппелем.

ству $A + D + M + P = Q$. Тем самым наша первая лемма доказана.

Рассмотрим теперь 8 углов куба. Докажем, что для любых двух вершин, соединенных ребром, сумма чисел, стоящих в угловых клетках, равна $Q/2$. Обозначим две вершины, соединенные ребром, через A и B. Пусть C, D и E, F – вершины, соединенные двумя ребрами, параллельными AB (рис. 114). Тогда числа, стоящие в клетках $ABCD$, $EFBA$ и EFDC, расположены в угловых клетках сечений 4×4, поэтому их сумма равна $3Q$. Соберем подобные члены:

$$2A + 2B + 2C + 2D + 2E + 2F = 3Q$$

и разделим обе части полученного равенства на 2:

$$A + B + C + D + E + F = Q/2.$$

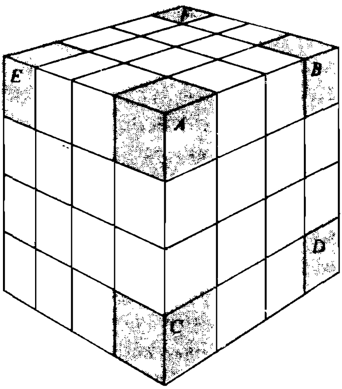


Рис. 114. Доказательство леммы 2, предложенное Р. Шрёппелем.

Вычитая из этого равенства $C + D + E + F = Q$, получаем $A + B = Q/2$. Тем самым наша вторая лемма доказана.

Рассмотрим теперь вершину B. Она соединена ребрами с вершинами A, D, F. Так как $A + B = F + B = D + B$, мы можем вычесть по B из каждой части каждого равенства и доказать, что $A = F = D$. Поскольку последнее равенство невозможно, наше доказательство на этом завершается.

Существует ли совершенный магический куб порядка 5? Ни один куб порядка 5 пока не известен. Шрёппель положил начало исследованиям кубов порядка 5, доказав (с помощью алгебраических и комбинаторных соображений), что если такой куб существует, то в его центральной клетке должно стоять число 63.

Существуют совершенные магические кубы порядка 8. Метод, позволяющий строить их миллионами, был открыт весной 1970 г. Майерсом, тогда еще шестнадцатилетним школьником из Джонсвилла (шт. Пенсильвания). Майерс прислал мне короткую заметку о своем открытии, в которой сообщал, что свой первый куб он построил, «истратив 3 месяца, 7 теорий и 31 лист миллиметровки». Должен признаться, что поначалу я не оценил по достоинству всей значимости его притязаний. Он не прислал ни одного магического куба, и в ответном письме я рекомендовал Майерсу математический журнал, который смог бы воздать должное его работе.

Затем я услышал о кубах Майерса в декабре 1972 г. от Дж. Стейба, математика из университета Дрекселя в Филадельфии, куда Майерс поступил на первый курс. Стейб прислал мне куб порядка 8 (рис. 115), и хотя он всячески превозносил симметрии куба и сообщил некоторые подробности относительно того, как Майерс совершил свое открытие (используя суперпозицию трех латинских квадратов и восьмеричную систему счисления), я все же не оценил тогда важности открытия куба. Я слишком быстро просмотрел книгу Эндрюса [17.2], отмечая ссылки на магические кубы порядка 3 и больше, но упустил из виду, что эти кубы были только полусовершенными. И лишь когда мне стало ясно, что у Эндрюса речь идет о полусовершенных кубах, я принялся усердно изучать послание Стейба и полностью осознал всю значимость того, что сделал Майерс.

Сумма 8 чисел, стоящих в изображенном на рис. 115

1

19	497	255	285	432	78	324	162
303	205	451	33	148	370	128	414
336	174	420	66	243	273	31	509
116	402	160	382	463	45	291	193
466	8	266	236	89	443	181	343
218	316	54	472	357	135	393	107
185	347	85	439	262	232	490	12
389	103	361	139	58	476	214	312

2

134	360	106	396	313	219	469	55
442	92	342	184	5	487	233	267
473	59	30	215	102	392	138	364
229	263	9	491	346	188	438	88
371	145	415	125	208	302	36	450
79	429	163	321	500	18	288	254
48	482	196	290	403	113	383	157
276	242	512	30	175	333	67	417

3

306	212	478	64	141	367	97	387
14	496	226	260	433	83	349	191
109	399	129	355	466	52	318	224
337	179	445	95	238	272	2	484
199	293	43	457	380	154	408	118
507	25	279	245	72	422	172	330
412	122	376	150	39	453	203	297
188	326	76	426	283	249	503	21

4

423	89	331	169	28	506	248	278
155	377	119	405	296	198	460	42
252	282	24	502	327	185	427	73
456	38	300	202	123	409	151	373
62	436	190	352	493	15	257	227
366	144	386	100	209	307	81	479
269	239	481	3	178	340	94	448
49	487	221	319	398	112	354	132

5

381	159	401	115	194	292	46	464
65	419	173	335	510	32	274	244
34	452	206	304	413	127	369	147
286	286	498	20	161	323	77	431
140	362	104	390	311	213	475	57
440	86	346	186	11	469	231	261
471	53	315	217	108	394	136	358
235	285	7	465	344	182	444	90

6

492	10	264	230	87	437	187	345
216	310	60	474	363	137	391	101
183	341	91	441	268	234	488	6
395	105	359	133	56	470	220	314
29	511	241	275	418	68	334	176
289	195	461	47	158	384	114	404
322	164	430	80	253	287	17	499
126	416	146	372	449	35	301	207

7

96	446	120	338	463	1	271	237
356	130	400	110	223	317	51	465
259	225	495	13	192	350	84	434
63	477	211	305	368	98	368	142
425	75	325	167	22	504	250	284
149	375	121	411	298	204	454	40
246	280	28	508	329	171	421	71
458	44	294	200	117	407	153	379

8

201	299	37	455	374	152	410	124
501	23	281	251	74	428	166	328
406	120	378	156	41	459	197	295
170	332	70	424	277	247	505	27
320	222	468	50	131	353	111	397
4	462	240	270	447	93	339	177
99	385	143	365	460	62	308	210
351	189	435	81	228	258	16	494

Рис. 115. Сечение магического квадрата порядка 8 Р. Майерса [компьютерная распечатка публикуется с разрешения У. Госпера].

кубе Майерса в любом столбце или строке, параллельной любому из горизонтальных ребер куба, равна 2052. Куб Майерса ассоциативен. Сумма любых двух чисел, симметричных относительно центра, равна 513. Отсюда следует, что не только сумма чисел в углах при вершинах куба равна 2052, но и (как отметил Стейб) сумма чисел в угловых клетках при вершинах любого прямоугольного параллелепипеда с центром, совпадающим с центром куба, равна тому же числу. Если и этого недостаточно, то куб можно разрезать на 64 кубика порядка 2, и сумма восьми чисел в угловых клетках при вершинах каждого из таких кубов окажется постоянной!

Эти замечательные симметрии позволяют осуществить огромное число перемещений клеток в кубе, порождающих изоморфные варианты исходного куба. Ясно, что каждый такой вариант можно подвергать поворотам и зеркальным отражениям различными способами. Представьте себе такой куб, в котором каждая из его 512 клеток заменена таким же кубом в одном из его тысяч вариантов, или ориентаций. В клетку 1 мы поместим куб, который начинается с 1. В клетку 2 мы поместим куб, который начинается с $8^3 + 1 = 513$, в клетку 3 – куб, который начинается с числа $(2 \times 8^3) + 1 = 1025$ и т. д. В результате мы получим совершенный магический куб порядка 64. Из кубов порядка 64 мы в свою очередь строим совершенные магические кубы порядка 512. Та же процедура остается в силе и для кубов всех старших порядков, равных степеням числа 8.

Сколько существует магических кубов порядка 8? Выбирая для суперпозиции различные латинские квадраты, Майерс может строить миллионы отличающихся друг от друга и от приведенного на рис. 115 кубов, но некоторые из них могут оказаться неассоциативными. Число латинских квадратов порядка 8 было подсчитано (их миллиарды), но число латинских кубов неизвестно, поэтому проблемы подсчета числа даже одних лишь кубов порядка 8, порождаемых процедурой Майерса, выглядит устрашающе.

Является ли число 8 наименьшим порядком, при котором существуют совершенные магические кубы? Существуют ли магические кубы порядков, отличных от степеней числа 8? Оба вопроса остаются открытыми.

ДОПОЛНЕНИЕ

При работе над этой главой я считал, что Р. Майерс был первым, кто построил совершенный магический куб порядка 8. Вскоре стало известно, что я заблуждался (разумеется, это не умаляет достоинств достижения Майерса).

В. Мили обратил мое внимание на построение совершенного магического куба порядка 8, предложенное в конце 30-х годов Дж. Россером и Р. Уокером. Построенный ими куб пандиагонален в том смысле, что если циклически переставлять любое из 3 семейств сечений, параллельных его граням, то куб остается совершенным магическим кубом. Куб Россера и Уокера не был опубликован, но построение его изложено в рукописи, хранящейся в библиотеке Корнеллского университета. В этой рукописи авторы показывают, что совершенные пандиагональные кубы существуют при всех порядках, кратных 8, и всех нечетных порядках больше 8. Кратко предложенный Россером и Уокером метод построения куба порядка 8 изложен в книге Роуза Болла [17.14].

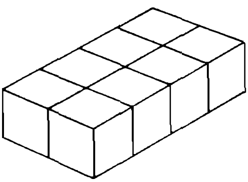
Но и Россер и Уокер не были первыми, кто построил совершенный магический куб порядка 8. Дж. Молдон, математик из колледжа Амхерста, сообщил мне о замечательной работе Ф. Барнарда [17.1]. По мнению Барнарда, первый такой куб был построен неизвестным автором, сообщившим о своем открытии в газете *The Commercial* от 11 марта 1875 г., выходившей в Цинциннати. (Подробности см. в гл. 5 [17.9].) Молдон прислал мне предложенный им способ построения совершенного ассоциативного магического куба порядка 7 и совершенных ассоциативных пандиагональных магических кубов порядков 9 и 11.

Первый пандиагональный куб порядка 8, по-видимому, построен Ч. Планком, который поведал о своем методе в редкой и малоизвестной книге «Теория путевых насиков», изданной в 1908 г. частным образом в английском городе Рэгби. Планк показал, что в k-пространстве, где $k \geqslant 2$, наименьший совершенный пандиагональный куб имеет порядок 2^k, а наименьший совершенный пандиагональный и к тому же ассоциативный (сумма любой пары чисел, симметричных относительно центра, постоянна) куб имеет порядок $2^k + 1$. Мы видели, что этот результат верен для магических квадратов, для которых $k = 2$. В трехмерном пространстве наименьший совершенный пандиагональный куб имеет порядок 8, а наименьший куб, который к тому же и ассоциативен, имеет порядок 9. Куб Майерса ассоциативен, но не пандиагонален.

Первая известная мне публикация о совершенном магическом кубе порядка 7 принадлежит Г. Лангману [17.15]. После журнальной публикации этой главы в январе 1976 г. десятки читателей прислали мне такие кубы, а также методы построения кубов порядка 9, 11 и выше. Некоторые читатели попытались также исследовать магические кубы в пространстве размерности больше 3. Перечень статей о магических кубах опубликован в *Journal of Recreational Mathematics* (см. библиографию к статье Дж. Хендрикса в [17.12]).

Насколько мне известно, еще никому не удалось найти совершенный магический куб порядка 5, 6 или 10, а также доказать, что такие кубы не существуют.

Все 880 магических квадратов порядка 4 приведены в книге Бенсона и Якоби [17.9] о магических квадратах наряду с обширным новым материалом. В их же книге приведен и фантастический тримагический квадрат порядка 32, построенный капитаном Бенсоном в 1949 г. Этот квадрат остается магическим не только когда каждое его число возводят в квадрат, но и когда каждое его число возводят в куб. Простейший из известных квадратов такого типа имел порядок 64, но капитан Бенсон сумел уменьшить порядок вдвое.



ГЛАВА 18

УПАКОВКА БЛОКОВ

"Pack my box with five dozen liquor jugs". *

Пангрfalsamма неизвестного автора

Панграмма – это попытка вместить как можно больше различных букв в как можно более короткое осмысленное предложение. Не разрешается использовать имена

* «Упакуйте в мой ящик пять дюжин кувшинов ликера» (*англ.*).

собственные и инициалы (например, «Шварц» или «Я. Ю. Янг»), а также «странные», не используемые в обычном языке слова.

Любителями словесных игр построено множество полных панграмм, использующих все 26 букв английского алфавита, но, как правило, полные панграммы оказываются не очень изящными и темными по смыслу. Такова, например, полная панграмма “Vext cwm fly zing jabs kurd qoph” Д. Боргмана. Она означает, что в пещере, находящейся где-то в горах Уэльса, некое разозленное насекомое с пронзительным жужжанием пронзило своим жалом девятнадцатую букву древнееврейского алфавита, начертанную неким курдом. С точки зрения любителей криптографии, любая полная панграмма весьма примечательна тем, что ее можно записать с помощью простого шифра, в котором каждая буква заменена какой-то другой буквой (различным буквам исходного текста соответствуют различные буквы зашифрованного текста): “ABCDE FGHIJ KLMNO PQRST UVWXY Z”.

Различие между составлением панграмм и решением задач комбинаторной геометрии, связанных с упаковкой, не столь велико, как может показаться. При составлении панграмм ограничениями являются формальные правила орфографии и грамматики, при решении задач комбинаторной геометрии класс возможных решений ограничивают правила математики. По крайней мере о двух выдающихся математиках Огастесе Де Моргане и Клоде Э. Шенноне достоверно известно, что они проводили немало времени за составлением панграмм, и я знаю многих не столь знаменитых математиков, также охотно предающихся этому увлечению.

В математике задачей на упаковку принято называть задачу, в которой заданное множество математических объектов требуется как можно более экономно упаковать в заданном пространстве по заданным правилам. Например, специалисты по вычислительной технике работают над созданием наиболее быстрых алгоритмов, позволяющих упаковывать числа в ячейки памяти так, чтобы сумма чисел в каждой ячейке не превосходила некоторого заданного предела. Такие алгоритмы необходимы для эффективного хранения и эффективной обработки информации. С точки зрения геометрии такую задачу можно рассматривать как задачу об одномерной упаковке—

упаковке стержней различной длины в длинные трубы, в которые стержни плотно входят.

В развитом индустриальном обществе возникают задачи, связанные с упаковкой трехмерных объектов в заданную область: это и хранение продукции на складах, и размещение грузов на судах, в самолетах и автофургонах, и размещение предметов в ящиках для отправки в магазины, и многое другое. Именно возрастающая потребность в алгоритмах упаковки побуждает в последние годы многих математиков уделять все больше времени решению задач, связанных с упаковкой.

Мы рассмотрим лишь простейшие задачи на упаковку геометрических тел – задачи на упаковку «кирпичей», или блоков (прямоугольных параллелепипедов), в «ящик» (другой прямоугольный параллелепипед). Для еще большего упрощения задачи мы предположим, что все три измерения (длина, ширина и высота) и кирпичей и ящика выражаются целыми числами и что объем ящика в точности равен суммарному объему кирпичей, которые требуется уложить в него. Как замечает Д. Кларнер в своей статье «Задачи об упаковке кирпичей» [18.3], для многих является полной неожиданностью, что даже при столь сильных упрощениях существуют задачи, изящные и не так-то легко поддающиеся решению. Говоря об изяществе задач об упаковке, Кларнер имеет в виду следующее. Если кирпичи можно упаковать в ящик, то задача считается изящной в том случае, если схема расположения кирпичей кажется простой, хотя в действительности найти ее трудно. Если кирпичи нельзя упаковать в ящик, то задача считается изящной в том случае, если существует простой, но использующий какие-нибудь тонкие соображения способ, позволяющий доказать неразрешимость задачи. Кларнер, работающий ныне в университете Небраски в Линкольне, – один из основоположников теории упаковки. Большей частью того, о чем идет речь ниже, я обязан ему.

В начале 60-х годов голландский математик Николас Г. де Брёйн был поражен тем, что его семилетний сын не мог уложить в ящик $6 \times 6 \times 6$ 27 кубиков размером $1 \times 2 \times 4$ каждый. Объем ящика и суммарный объем 27 кубиков равны, и упаковка, казалось бы, не должна была вызывать никаких затруднений, но, как ни старался сынишка, в конце упаковки всегда оставалась по крайней мере одна дыра, в которую кубик не входил. Занявшись

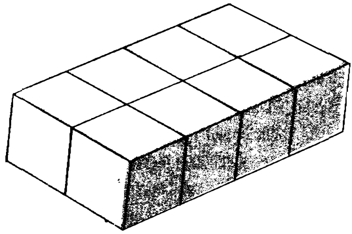


Рис. 116. Канонический «кирпич».

исследованием этой задачи, де Брёйн пришел к интересным выводам. Полученные им результаты были сначала опубликованы в виде задач в одном венгерском журнале, а затем подытожены де Брёйном в статье «Заполнение ящиков кирпичами» [18.1].

Де Брёйн называет кирпич гармоническим, если его длина, ширина и высота выражаются целыми числами и их можно упорядочить так, что каждое измерение, начиная со второго, кратно предыдущему. На языке алгебры это означает, что гармонический кирпич имеет размеры $a \times ab \times abc$, где a, b и c – целые положительные числа. Кирпич $1 \times 2 \times 4$, конечно же, гармонический. Он называется каноническим кирпичом, так как является не только простейшим гармоническим кирпичом с тремя различными измерениями, но и по своим пропорциям близок к обычному кирпичу, используемому в строительном деле (рис. 116).

Де Брёйну удалось доказать, что набор одинаковых гармонических кирпичей размером $a \times ab \times abc$ плотно заполняет ящик в том и только в том случае, если ящик имеет размеры $ax \times aby \times abcz$. Под плотной, или идеальной, упаковкой мы понимаем такую, при которой не остается пустот. Кирпичи плотно заполняют ящик, если ими можно выложить пространственную мозаику без пробелов и наложений в объеме ящика. Де Брёйн доказал, что плотная упаковка возможна только в том случае, если размеры ящика кратны размерам кирпича. Иначе говоря, если кирпичами можно заполнить ящик, то это, в частности, можно сделать и с помощью тривиальной укладки, то есть такой укладки, при которой все кирпичи (и ящик) ориентированы одинаково. (Разумеется, ящик может быть заполнен кирпичами и при нетривиальной укладке.) Если кирпичи негармонические, то существуют ящики, которые могут быть заполнены ими только одним способом. Например, пятью негармоническими кирпичами $1 \times 2 \times 3$ можно заполнить ящик $1 \times 5 \times 6$, но те же кирпичи, если их расположить параллельно друг другу, «не влезут» в тот же ящик.

Результаты де Брёйна допускают обобщение на случай гиперкирпичей в евклидовых пространствах любой размерности больше 3 и для двумерных «кирпичей» (прямоугольников). Канонический плоский кирпич – домино 1×2 – заполняет прямоугольник только в том случае, если одна сторона прямоугольника имеет длину, которая выражается четным числом. Ясно, что тогда возможна тривиальная упаковка.

Обратимся теперь к задаче, с которой никак не мог справиться сынишка де Брёйна. Так как 6 не кратно 4, из работы де Брёйна следует, что каноническим кирпичом нельзя заполнить кубический ящик порядка 6. Существует ли простое доказательство неразрешимости этой задачи?

Существует и, более того, является обобщением старинной головоломки о шахматной доске 8×8 с двумя вырезанными диаметрально противоположными угловыми полями: можно ли покрыть такую доску 31 костью домино? Неразрешимость этой головоломки становится очевидной, как только вы поймете, что 2 недостающих поля одного цвета. Следовательно, на шахматной доске с вырезанными угловыми полями 32 поля одного цвета и 30 – другого. Кость домино накрывает 2 поля противоположных цветов, поэтому после того, как мы выложим на доску 30 костей домино, всегда останутся 2 поля одного цвета, а их невозможно накрыть 1 костью домино.

Тот же принцип проверки на четность примени́м и к задаче об упаковке куба. Представим себе, что куб порядка 6 разделен на 27 кубов порядка 2 и что кубы порядка 2 раскрашены так, как показано на рис. 117. Независимо от того, как ориентирован канонический кирпич внутри куба, мы получаем 4 черные и 4 белые клетки. Но у куба черных клеток на 8 больше, чем белых. Следовательно, после того, как 26 кирпичей будут уложены, останутся 8 клеток одного цвета. Ясно, что последний кирпич не может заполнить эти клетки.

Можно ли упаковать 125 канонических кирпичей в ящик размером $10 \times 10 \times 10$? Нет, невозможно. Доказать это можно так же, как мы доказали неразрешимость предыдущей задачи. Более того, приведенное нами

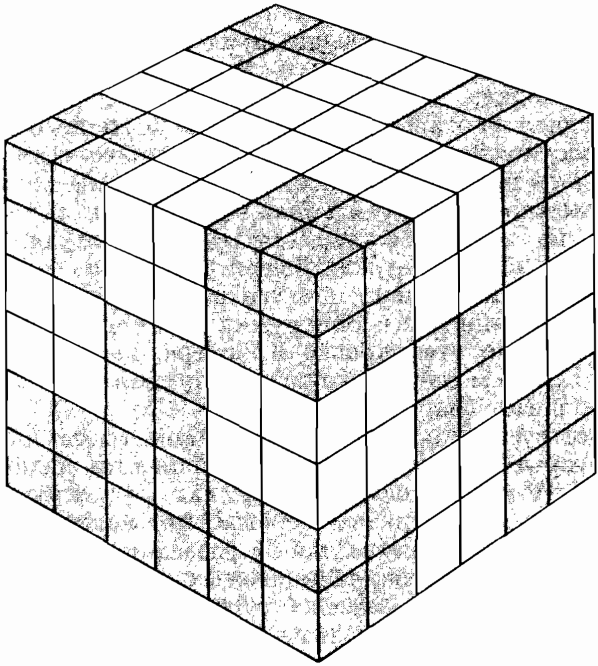


Рис. 117. Схема раскраски для задачи об упаковке куба порядка 6.

доказательство в действительности применимо к любому кубу с ребром, длина которого выражается четным числом и не кратна 4. Можно ли упаковать 250 кирпичей $1 \times 1 \times 4$ в куб порядка 10? Как показывает приведенное выше доказательство, ответ на этот вопрос отрицательный. Иногда для более изящного доказательства куб требуется раскрасить более чем в два цвета, но и двумя цветами удается сделать удивительно много.

Вот, например, замечательная задача на составление мозаик, придуманная Кларнером. Раскрашивая клетки в два цвета, но не в шахматном порядке, нетрудно доказать, что она неразрешима. Перед вами квадрат 25×25, который вы хотите замостить (без зазоров и перекрытий) смесью квадратов 2×2 и квадратов 3×3. Доказательство неразрешимости этой задачи я приведу в «Ответах».

В одной из теорем Кларнера вводится понятие спайности. Если прямоугольник допускает замощение одинаковыми прямоугольниками, то всегда существует способ замостить его так, что он распадается (или может быть разрезан) на два меньших прямоугольника, каждый из которых также может быть замощен. Такой прямоугольник обладает спайностью.

Обладает ли эта теорема трехмерным аналогом? Тот же вопрос можно поставить несколько иначе: если ящик может быть заполнен одинаковыми кирпичами, то всегда ли его можно разрезать на 2 ящика меньших размеров, каждый из которых может быть заполнен теми же кирпичами? Как обнаружил Кларнер, ответ на этот вопрос, как ни удивительно, должен быть отрицательным. Наименьший ящик (его обнаружил Д. Сингмастер), для которого верно утверждение Кларнера, имеет размеры $5 \times 5 \times 12$: его можно упаковать кирпичами $1 \times 3 \times 4$, но он не обладает спайностью.

Существует ли бесконечно много ящиков без спайности, которые можно заполнить кирпичами заданного размера? И в этом случае ответ, как ни удивительно, отрицателен. Кларнер был первым, кто показал, что в евклидовом пространстве любой размерности бесконечное множество ящиков, заполняемых кирпичами заданного размера, имеет конечное подмножество заполняемых ящиков, которыми можно заполнить любые другие ящики. Кроме того, Кларнер показал, что для каждого кирпича существует конечное множество заполняемых ящиков без спайности. В 1971 г. венгерские математики Д. Катона и Д. Сас уточнили результаты Кларнера, предложив конструктивное доказательство с указанием границ изменения некоторых величин.

Много новых красивых задач возникает в том случае, когда вместо одинаковых кирпичей используют смесь кирпичей различных размеров (как в задаче Кларнера). Одна из простейших задач о заполнении куба $3 \times 3 \times 3$, по сведениям Кларнера, впервые была опубликована в какой-то голландской книге в 1970 г. Этот куб требуется заполнить 6 кирпичами $1 \times 2 \times 2$ и 3 единичными кубами (рис. 118). Задача выглядит до смешного простой, но многие из тех, кто пытался решить ее, обнаружили, к своему удивлению, что она упорно сопротивляется их усилиям. Рекомендуем читателям изготовить набор кирпичей, склеив их из кубиков или вырезав из дерева. Это облегчит вам поиск решения.

Задача допускает единственное (с точностью до поворотов и отражений) решение, требующее, чтобы 3

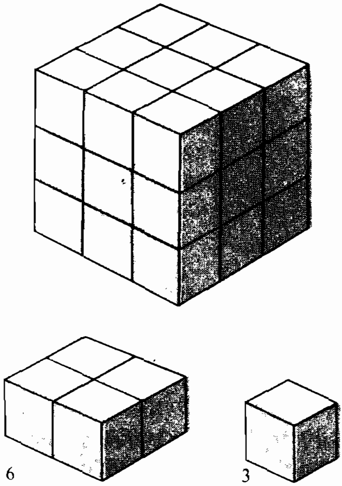


Рис. 118. Задача об упаковке куба $3 \times 3 \times 3$.

единичных куба располагались на пространственной диагонали большого куба (рис. 119). Чтобы доказать это, рассмотрим сначала любое сечение 3×3. Если раскрасить его клетки в шахматном порядке, то 5 клеток окажутся окрашенными в один цвет, а 4 – в другой. Как бы мы ни поместили кирпич $1 \times 2 \times 2$, в каждом сечении он займет 0, 2 или 4 клетки, причем клеток одного цвета будет ровно столько, сколько другого. В результате каждое из 9 сечений должно иметь 1 и только 1 клетку, занятую единичным кубом. (Ни одно сечение не может

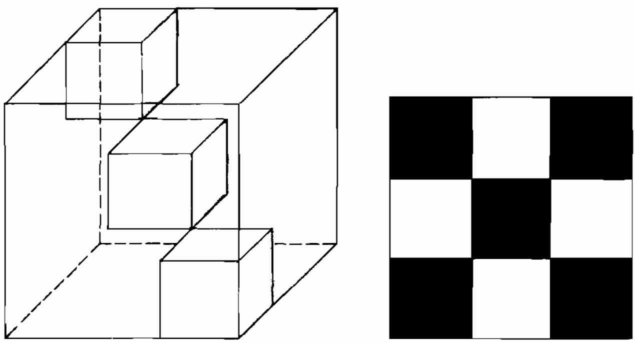


Рис. 119. Ключ к решению задачи об упаковке куба $3 \times 3 \times 3$.

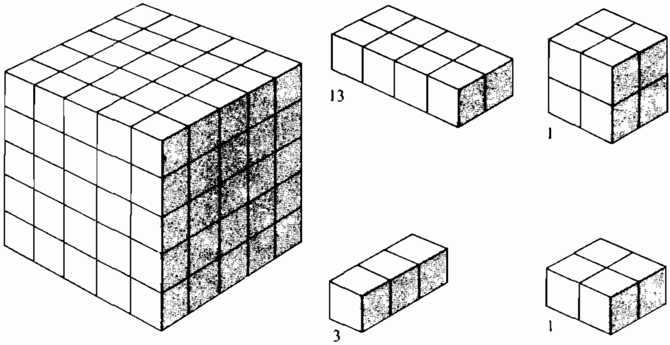


Рис. 120. Куб Дж. Конуэя, который может быть упакован 18 гармоническими кирпичами.

содержать все 3 куба, так как тогда некоторые сечения остались бы совсем без кубов.) Кроме того, в каждом сечении единичный куб должен находиться либо в центре, либо в одном из углов. Единственный способ удовлетворить этим требованиям состоит в том, чтобы разместить кубы вдоль пространственной диагонали большого куба, после чего размещение 6 кирпичей производится автоматически.

Дж. Конуэй несколько лет назад поставил перед собой цель придумать более трудную задачу об упаковке. Решить задачу с кубом Конуэя, хотя она кажется такой же легкой, как задача об упаковке куба $3 \times 3 \times 3$, столь трудно, что некоторым не удается самим найти решение до тех пор, пока им не подсказывают довольно хитроумный ключ.

Куб Конуэя существует в многочисленных вариантах. Особой любовью автора пользуется куб, заполняемый 18 гармоническими кирпичами (рис. 120). Задача – упаковать их в ящик $5 \times 5 \times 5$, или, что то же, построить из них куб порядка 5. Пытаться решить эту задачу методом проб и ошибок – способ довольно безнадежный.

Возвращаясь к упаковке одинаковых кирпичей, можно задать общий вопрос. Предположим, что ящик заполняется каким-то набором кирпичей не полностью. Сколько кирпичей войдет в него (определить максимум)? Даже в том случае, когда речь идет о гармонических кирпичах, это чрезвычайно трудная задача, хотя первые шаги в ее решении были сделаны в статье Р. Бруальди и Т. Форретера [18.4], опубликованной в 1974 г.

Авторы определяют представляющее множество R как совокупность таких клеток в ящике, что независимо от расположения кирпича он занимает по крайней мере 1 клетку из R. Когда R сведено до минимума, говорят, что оно обладает минимальной кардинальностью. Бруальди и Форретер показали, что максимальное число одинаковых (не обязательно гармонических) кирпичей, которое войдет в ящик, не больше минимальной кардинальности множества R.

В двумерном пространстве максимальное число гармонических кирпичей (домино) неизменно равно минимальной кардинальности множества R, но для пространств более высокой размерности это неверно. Рассмотрим канонические кирпичи и кубические ящики. Куб порядка 4 – наименьший куб, заполняемый кирпичами, причем упаковка его, разумеется, тривиальна. Куб порядка 6, как мы видели, заполнить кирпичами невозможно, но все кирпичи, кроме одного, легко помещаются внутри него.

А как обстоит дело с кубом порядка 5? Он состоит из 125 единичных кубов. Число 125 не кратно 8, поэтому куб порядка 5 каноническими кирпичами заполняется не полностью. Войдет ли в него 15 таких кирпичей (суммарный объем – 120 единичных кубов)? Иначе говоря, можно ли построить куб порядка 5 из 15 канонических кирпичей и 5 единичных кубов? Минимальная кардинальность множества R равна 15, но, как вы ни старайтесь, поместить 15 кирпичей внутрь куба вам не удастся. После того как внутри куба окажутся 14 кирпичей, оставшиеся 13 единичных клеток не позволяют пристроить последний кирпич. Бруальди и Форретер, раскрасив единичные клетки большого куба, сумели доказать неразрешимость задачи, хотя и весьма сложным способом. Однажды, когда я размышлял над их доказательством, мне пришла в голову одна счастливая идея. Она-то и привела к следующему простому доказательству от противного.

Предположим, что 15 кирпичей заполняют куб порядка 5. Полная поверхность такого куба составляет $6 \times \times 25 = 150$ квадратных единиц. Так как каждая грань состоит из нечетного числа единичных квадратов, одну единичную клетку у каждой грани должен занимать единичный куб. (К любому сечению, параллельному грани, может примыкать не более чем один единичный куб, так как таких сечений 15, а единичных кубов только

5.) Следовательно, грани канонических кирпичей могут занимать не более $150 - 6 = 144$ квадратных единиц поверхности куба. Но каждый кирпич должен выходить на поверхность только одним из своих 1×2 концов. Следовательно, прямоугольниками 1×4 и 2×4 должно быть занято $144 - (15 \times 2) = 114$ квадратных единиц поверхности куба. Но число 114 не делится на 4. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение ложно.

Аналогичное доказательство получается при рассмотрении трех плоских сечений. Каждое сечение – это матрица 5×5. Три сечения содержат 75 единичных клеток. Одна клетка в каждом квадрате 5×5 должна быть сечением единичного куба. (Этим кубом может быть либо один и тот же для всех 3 сечений единичный куб в центре куба порядка 5, либо 2 или 3 единичных куба, расположенных в надлежаще выбранных клетках большого куба.) Каждый из 15 канонических кирпичей должен занимать по 2 клетки, то есть всего 30 клеток. Вычитая 33 клетки из общего числа (75) клеток, получаем 42 клетки, которые должны быть заняты сечениями по 4 или по 8 клеток. Но так как число 42 не кратно 4, это невозможно.

Следующий куб, который представляет для нас интерес, имеет порядок 7. Поместить в него 41 канонический кирпич нетрудно, но займут ли кирпичи 42 клетки в плоском сечении, оставив 7 дыр для заполнения единичными кубами? Ответ, как ни странно, неизвестен. Форретер предложил этот вопрос в качестве нерешенной задачи (E2524) в *American Mathematical Monthly* (Marck 1975). Хотя каждый канонический кирпич должен пересекать по 2 клетки в каждом плоском сечении, после необходимых вычитаний остаются клетки, общее число которых кратно 4. Следовательно, использованное выше доказательство невозможности упаковки в этом случае неприменимо.

Бруальди и Форретер обнаружили много частных случаев, в которых максимальное число гармонических кирпичей равно минимальной кардинальности представляющего множества R. Например, равенство достигается в том случае, если наименьшие грани кирпичей покрывают каждую грань ящика. Для канонических ящиков равенство достигается и в том случае, если одно из измерений ящика выражается четным числом. Однако общая задача еще далека от своего решения.

Я думаю, что эту главу лучше всего закончить следующим отрывком из статьи Кларнера: «И в заключение – слово предостережения! Пускаясь в эксперименты с маленькими деревянными блоками, вы подвергаете себя серьезному риску, поскольку ваши друзья, близкие и коллеги могут подумать, что вы впали в детство и вас нужно изолировать! Хороший защитный прием состоит в том, чтобы всегда иметь под рукой несколько экземпляров головоломки Конуэя. Это позволит вас отвлечь их внимание и благополучно скрыться.»

ОТВЕТЫ

Читателям предлагалось доказать, что квадрат 25×25 невозможно замостить смесью квадратов 2×2 и 3×3. Доказательство Д. Кларнера начинается с раскраски большого квадрата в 2 цвета полосами (рис. 121). Как бы мы ни расположили квадрат 2×2 на квадрате 25×25, он накроет 2 окрашенные и 2 белые клетки. Так как окрашенных клеток в большом квадрате на 25 больше, чем белых, этот избыток останется неизменным независимо от того, как и сколько квадратов 2×2 мы разместили на большом квадрате. Если большой квадрат можно замостить смесью квадратов 2×2 и 3×3, то должен существовать способ размещения квадратов 3×3, при котором они накрывают на 25 цветных клеток больше, чем белых.

Ясно, однако, что куда бы мы ни поместили квадрат 3×3, он накрывает либо 6 цветных и 3 белые клетки, либо 6 белых и 3 цветные клетки. И в том и в другом случае разность между числом цветных и белых клеток равна 3. Но число 25 не кратно 3, поэтому квадратами 3×3 невозможно покрыть избыток в 25 цветных клеток. Следовательно, замостить квадрат 25×25 смесью квадратов 2×2 и 3×3 невозможно.

Кларнер показал в общем случае, что если некоторый прямоугольник может быть замощен квадратами $a \times a$ и $b \times b$, то его всегда можно разрезать на 2 прямоугольника (один из которых может быть пустым), таких, что один прямоугольник допускает замощение только квадратами $a \times a$, а другой – только квадратами $b \times b$.

Вторая задача заключалась в том, чтобы из 18 кирпичей указанных размеров сложить куб $5 \times 5 \times 5$. При решении задач такого рода обычно стремятся исполь-

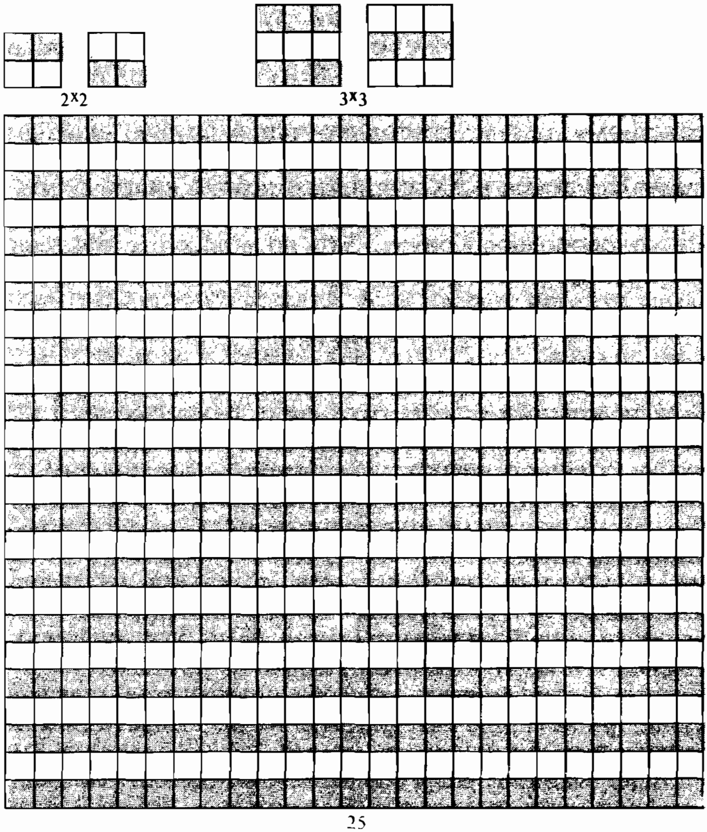


Рис. 121. Предложенное Д. Кларнером доказательство невозможности замощения квадрата 25 × 25 смесью квадратов 2 × 2 и 3 × 3.

зовать сначала более крупные блоки, а меньшими заполнить пробелы. В данном случае такая стратегия пагубна. Если вы попытаетесь решать эту задачу методом проб и ошибок, то, по-видимому, вскоре обнаружите, что оставшиеся 3 малых блока вам некуда пристроить. Задача трудна именно потому, что эти 3 блока должны образовывать единую конфигурацию, а вероятность найти ее на ощупь ничтожно мала.

Существенно больше шансов на успех имеет систематический подход к решению этой задачи методами комбинаторной геометрии. Раскрасив в шахматном порядке сечение 5 × 5, мы обнаружим, что оно содержит 13 клеток одного и 12 клеток другого цвета (рис. 122). Рассмотрим все кирпичи за исключением 3 самых малых. Независимо от того, как расположен кирпич, ему в каждом сечении должно принадлежать четное число клеток (0, 2, 4 или 8). Половина из них одного цвета, половина – другого.

Так как в каждом сечении число клеток нечетно, 1 или 3 из них должны принадлежать кирпичу $1 \times 1 \times 3$. Кроме того, этот кирпич должен быть расположен так, что эта клетка должна быть такого же цвета, как и центральная клетка. Если кирпич $1 \times 1 \times 3$ занимает 3 клетки сечения, то 2 из них должны быть такого же цвета, как центральная клетка.

Независимо от того, как расположен малый блок, он занимает 5 сечений. Следовательно, 3 таких блока, если они попадают во все 15 сечений (а они должны попасть), должны располагаться так, чтобы никакие 2 из них не были представлены в одном и том же сечении. Сделать это можно только одним способом и одновременно удовлетворить правилам раскраски. Как только малые блоки займут свои места, расположить вокруг них более крупные блоки не составит особого труда (это можно сделать более чем 500 способами).

Дж. Конуэй, изобретатель этой головоломки с упаковкой куба, мог бы вместо малого куба $2 \times 2 \times 2$ взять еще один кирпич $1 \times 2 \times 4$. Тогда число канонических кирпичей, входящих в ящик $5 \times 5 \times 5$, было бы максимальным. Однако куб $2 \times 2 \times 2$ был выбран Конуэем отнюдь не случайно: этот куб забавным образом уводит решающего в сторону от правильного решения. Суще-

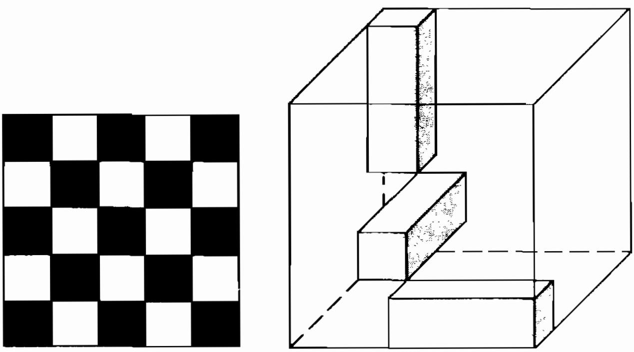


Рис. 122. Ключ к решению головоломки Дж. Конуэя с упаковкой куба.

ствует вариант головоломки с 29 кирпичами $1 \times 2 \times 2$ и 3 кирпичами $1 \times 3 \times 3$. Покажется ли большинству людей этот вариант более простым или сложным, сказать трудно. Принцип, положенный в основу куба Конуэя, допускает обобщение в том смысле, что 3 кирпича $1 \times 1 \times (2n - 1)$ образуют единственную конфигурацию в кубическом ящике с ребром $2n + 1$, позволяющую заполнить остальную часть ящика кирпичами $1 \times 2 \times 2$.

ДОПОЛНЕНИЕ

В гл. 18 была поставлена нерешенная задача об упаковке канонических кирпичей ($1 \times 2 \times 4$) в кубы с ребром длиной n, где $n > 3$. При четном n куб можно (тривиальным образом) заполнить только при условии, если n кратно 4. Я привел простое доказательство того, что если n четно и не кратно 4, то упаковать куб плотно невозможно: 1 кирпич придется оставить.

При нечетном n возникает более интересная ситуация. Каждая пластина $n \times n$ непременно должна содержать единичную дыру; следовательно, максимальное число кирпичей, которые может вместить куб нечетного порядка n, равно $(n^3 - n)/8$. При каких n может быть достигнута эта максимальная плотность упаковки?

Когда я работал над этой главой, невозможность упаковки была доказана только для куба порядка 5. Впоследствии это доказательство было обобщено Д. Карнером, и ныне оно покрывает ровно половину нечетных n, а именно распространяется на кубы с ребрами длиной $\pm 1 \pmod 8$. Многие читатели сумели доказать невозможность упаковки куба порядка 7, но не обобщили свое доказательство на все числа, сравнимые с $-1 \pmod 8$.

Теперь задача полностью решена. Р. Амманн из Лоуэлла (шт. Массачусетс) первым доказал невозможность максимальной упаковки для всех нечетных n, кроме $n \equiv \pm 1 \pmod 8$. Затем Амманн установил максимальную упаковку для куба порядка 15 и, обобщив свой результат, получил максимальную упаковку для всех нечетных n, сравнимых с $\pm 1 \pmod{16}$.

Ф. Барнс из Англии независимо от Амманна доказал невозможность упаковки при указанных выше нечетных n и высказал предположение о том, что максимальная упаковка существует для куба порядка 15 и всех n, сравнимых с $\pm 1 \pmod{16}$. Получив сообщение о работе Амманна, Барнс проверил правильность полученных в ней результатов. Кроме того, Амманну удалось показать, что все возможные кубы вмещают количество кирпичей, которое ровно на 1 отличается от максимальной упаковки. Есть надежда на то, что эти результаты будут опубликованы.

Ни Амманн, ни Барнс не занимают никаких академических постов. Амманн – программист, работающий в областях, не связанных с математикой. Барнс, хотя он и читал лекции по математике в Мичиганском университете и в университете города Рединга, последние два года зарабатывает на жизнь, пилотируя в рекламных целях воздушные шары, наполненные горячим воздухом.

Уже после того, как приведенные выше примечания были опубликованы мной в *Scientific American* (October 1976), М. Матер доказал, что в кубический ящик порядка 7 невозможно упаковать 42 канонических кирпича (см. его решение задачи E2524 в *The American Mathematical Monthly*, **83**, November 1976, p. 741–742). Матер получил более общий результат, доказав, что $2n(2n + 1)$ кирпичей размером $1 \times 2 \times (n + 1)$ можно упаковать в куб с ребром $2n + 1$ в том и только в том случае, если n четно или равно 1.

Д. Кларнер изобрел метод построения куба порядка 7 из 41 канонического кирпича, названный им методом «разделяй и властвуй». Куб $7 \times 7 \times 7$ разрезают на 3 подъящика: $2 \times 7 \times 7$, $3 \times 5 \times 7$ и $4 \times 5 \times 7$. Нетрудно упаковать 12 кирпичей в ящик $2 \times 7 \times 7$ и еще легче упаковать 17 кирпичей в ящик $4 \times 5 \times 7$. Сложить из 12 кирпичей прямоугольный параллелепипед $3 \times 5 \times 7$ не так просто, но возможно. Остается 9 дыр. Правда, при одном расположении остается 3 дыры $1 \times 1 \times 3$.

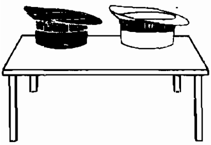
Кларнер называет «атомным» любой (не обязательно кубический) ящик, который не может быть оптимально упакован методом «разделяй и властвуй». Иначе говоря, ни одна оптимальная упаковка такого ящика не распадается на ящики меньших размеров, допускающие оптимальную упаковку. Самые интересные задачи об упаковке связаны именно с атомными ящиками. Можно спросить: как велико (конечно или бесконечно) множество атомных ящиков, которые можно упаковать каноническими кирпичами?

Вопрос этот пока открыт. Несколько лет назад Кларнер доказал, что в случае *замощения* ящика (заполнения его без полостей) для каждого кирпича существует конечное множество ящиков с целочисленными ребрами, которые являются атомными. Некоторое время спустя Кларнер придумал аналогичную теорему для оптимальной упаковки с дырами, полагая, что для любого данного кирпича существует конечное число атомных ящиков, которые допускают оптимальную упаковку этим кирпичом.

«Как я заблуждался!» – пишет Кларнер. С тех пор ему удалось доказать, что для кирпича $1 \times 2 \times 2$ существует бесконечно много атомных кубических ящиков, которые он упаковывает оптимально.

Относительно упаковки канонических кирпичей в некубические ящики многое остается неизвестным. Кларнер сообщил мне, что его студенту У. Саттерфилду удалось доказать невозможность построения куба $5 \times 5 \times 7$ из 21 кирпича. (Это простое, остроумное доказательство пока не опубликовано. Оно основано на противоречии, возникающем при проверке четности.) То же самое простое доказательство показывает, что 27 каноническими кирпичами невозможно упаковать ящик $5 \times 5 \times 9$. Можно ли обобщить это доказательство на случай $3n$ таких кирпичей и показать, что ими нельзя упаковать ящик $5 \times 5 \times n$? Нет, отвечает Кларнер, это доказательство неприменимо при всех нечетных n больше 9.

«Остается открытым вопрос о том, – пишет он, – существует ли какое-нибудь нечетное число n, при котором $3n$ канонических кирпичей можно упаковать в ящик $5 \times 5 \times n$. Так как 6 канонических кирпичей можно упаковать в ящик $5 \times 5 \times 2$, ясно, что если $3k$ таких кирпичей можно упаковать в ящик $5 \times 5 \times k$ при некотором нечетном k, то то же самое можно сделать и при всех числах, бóльших k».



ГЛАВА 19

ИНДУКЦИЯ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Вселенная, насколько она нам известна, устроена так, что истинное в каком-то одном случае истинно во всех случаях некоторого описания; трудность состоит лишь в том, чтобы найти такое описание.

Джон С. Миль. «Система логики»

Представьте себе, что мы живем на ковре с необычайно сложным узором. Ковер может быть конечным, а может неограниченно простираться во все стороны. Одни фрагменты узора кажутся случайными, как абстрактная экспрессионистская живопись, другие — строго геометрические. Часть ковра может производить впечатление совершенно иррегулярной, но при рассмотрении ее в более широком обрамлении она оказывается фрагментом узора, обладающего тонкой симметрией.

Задача описания узора затрудняется тем, что ковер покрыт толстым слоем пластика, прозрачность которого меняется от точки к точке. В одних местах пластик совершенно прозрачен, и мы отчетливо различаем сквозь него узор; в других лишен прозрачности. Кроме того, лист пластика имеет переменную твердость. Где-то пластик можно соскоблить, отчего узор становится виднее, где-то он упорно сопротивляется всем попыткам сделать его более прозрачным. Свет, проходя сквозь лист пластика, преломляется самым причудливым образом, поэтому чем больше мы уменьшаем толщину пластика, тем сильнее трансформируется первоначальный узор. Повсюду — причудливая смесь порядка и беспорядка. Едва заметные решетки с изящными симметриями покрывают весь ковер, но как далеко простирается каждая из них, нам остается лишь догадываться. Неизвестно, сколь велика толщина пластика. Нам нигде не удается соскоблить его полностью и достичь поверхности ковра, если таковая существует.

Наша метафора завела нас слишком далеко по одной причине: узоры реального мира в отличие от узоров воображаемого ковра непрестанно меняются (ковер как бы скатывается с одного конца и развертывается с другого). Тем не менее в общих чертах сравнение с ковром позволяет продемонстрировать некоторые трудности, с которыми сталкиваются при попытке понять эффективность естественных наук те, кто занимается философией науки.

Индукция – это процедура, с помощью которой «ковроведы», изучая отдельные части ковра, пытаются догадаться, как выглядят еще не обследованные его участки. Предположим, что ковер покрыт миллиардами крохотных треугольников. Всякий раз, когда встречается синий треугольник, у него в одном из углов оказывается красное пятнышко. Просмотрев тысячи синих треугольников и убедившись, что они все до единого помечены красным пятнышком, «ковроведы» высказывают гипотезу, согласно которой красное пятнышко есть у всех синих треугольников. Каждый вновь наблюдаемый синий треугольник с красным пятнышком подтверждает замеченную ими закономерность. В отсутствие контрпримеров убеждение «ковроведов» в правильности открытой ими закономерности растет по мере того, как увеличивается число подтверждающих примеров.

Переход от «некоторых» синих треугольников ко «всем» синим треугольникам, разумеется, является нарушением логики. Работая в рамках дедуктивной системы, невозможно быть полностью уверенным в том, как выглядит еще не обследованная часть ковра. С другой стороны, индуктивные умозаключения позволяют получать правильные выводы, и философы по-разному пытаются обосновать индукцию. Джон С. Милль обосновывает индукцию ссылкой на регулярность узоров ковра. Он сознает, что в его рассуждениях содержится круг, так как заключение «ковроведов» о том, что ковер покрыт узором, сделано на основании неполной индукции. Однако Милль не считает этот круг порочным, и многие современные философы (я назову лишь двух из них – Р. Брейтуэйта и М. Блека) придерживаются такого же мнения. Бертран Расселл в своем последнем большом труде пытался заменить расплывчатый тезис Милля об однородности природы чем-то более точным. Он сформулировал 5 постулатов о структуре мира, достаточных, по его мнению, для обоснования индукции.

Ганс Рейхенбах предложил наиболее известное из нескольких прагматических обоснований. По мнению Рейхенбаха, если и существует какой-то способ догадываться о том, как выглядят недоступные наблюдению части ковра, то это индукция. Если отказывает индукция, то отказывает и все остальное, поэтому естественные науки должны использовать единственное средство познания окружающего мира, которым они располагают. «Такой ответ не содержит в себе логического противоречия,– пишет Расселл,– но не могу сказать, чтобы он казался мне весьма удовлетворительным».

Такого же мнения придерживается и Рудольф Карнап. Он считает, что все способы обоснования индукции логически корректны, но тривиальны. Если под «обоснованием» понимать то, как мы «обосновываем» математическую теорему, то прав Давид Юм: никакого обоснования не существует. Если же «обоснование» понимать в более слабом смысле, причем не в одном, а в нескольких вариантах, то, разумеется, обоснование (неполной) индукции можно отстаивать. Более интересная задача, подчеркивает Карнап, состоит в том, чтобы выяснить, возможно ли построить индуктивную логику.

Построение индуктивной логики было надеждой и мечтой Карнапа. Он предвидел такое развитие науки в будущем, при котором ученый, работающий в области естественных наук, сможет излагать гипотезу вместе со всеми имеющимися у него экспериментальными или наблюдательными данными на формализованном языке. Затем, используя индуктивную логику, исследователь сможет сопоставить своей гипотезе некоторую вероятность, называемую степенью подтверждения. Значение этой вероятности не может быть окончательным или заданным раз и навсегда: оно может увеличиваться, уменьшаться или оставаться неизменным по мере накопления новых данных. Карнап считает, что представители естественных наук уже мыслят в терминах индуктивной логики, но в терминах расплывчатых, не формулируя их явно. Однако по мере усовершенствования средств научного исследования значение степени подтверждения становится известным со все большей точностью. Возможно, что в конце концов нам удастся создать своего рода индуктивный анализ, который будет иметь практическое значение, облегчая нескончаемый поиск законов природы.

В своем труде «Логические основания теории вероятностей» [19.11] и в последующих работах Карнап пытался заложить основы индуктивной логики. Насколько ему удалось осуществить свой замысел, вопрос спорный. Некоторые философы (например, Дж. Кемени) разделяют взгляды Карнапа и продолжают развивать избранный им подход. Другие (главным образом К. Поппер и Т. Кун) рассматривают весь проект как основанный на недоразумении.

Один из почитателей Карнапа К. Гемпель разумно заметил, что прежде чем мы попытаемся приписать подтверждениям какие-нибудь количественные величины, нам необходимо на качественном уровне понять, что именно следует понимать под «подтверждающим наблюдением». Именно здесь, при попытке придать точный смысл этому выражению, мы и сталкиваемся с наиболее серьезными трудностями.

Рассмотрим знаменитый парадокс Гемпеля о воронах.

Мы попытаемся пояснить суть этого парадокса с помощью 100 игральных карт. На рубашке (оборотной стороне) некоторых из них нарисована ворона. Гипотеза, которая подлежит проверке, состоит в утверждении: «Все карты, на которых нарисованы вóроны, черной масти». Вы перетасовываете всю колоду и раскладываете карты вверх картинкой (лицевой стороной). После того как вы выложите 50 карт и не обнаружите ни одного контрпримера, гипотеза, очевидно, станет для вас более правдоподобной. По мере того как все больше карт с воронами на рубашке будет выложено вверх картинкой и окажутся черной масти, степень подтверждения будет стремиться к 1 (достоверности) и, наконец, может стать равной 1.

Сформулируем ту же гипотезу иначе: «Все карты нечерной масти – не вороны (то есть на их рубашке не изображена ворона)». Это утверждение логически эквивалентно исходному. Если вы проверите истинность нового утверждения на другой перетасованной колоде из 100 карт, держа их вверх картинкой и переворачивая поочередно, то всякий раз, выкладывая на стол карту нечерной масти и не обнаружив на рубашке нарисованную ворону, вы тем самым подтверждаете свою гипотезу о том, что все карты нечерной масти «не вороны». Так как ваша гипотеза логически эквивалентна гипотезе «Все карты черной масти – вороны», то вы подтверждаете и эту, эквивалентную, гипотезу. Выложив на стол все карты и не обнаружив ни одной карты красной масти с вороной на рубашке, вы полностью подтвердите гипотезу о том, что все карты с вороной на рубашке черной масти.

К сожалению, изложенная выше процедура неприменима к реальному миру, где она просто «не работает». Утверждение «Все вороны черные» логически эквивалентно утверждению «Все нечерные предметы – не вороны». Мы оглядываемся вокруг и замечаем какой-то желтый предмет. Ворона ли это? Нет, это масленка. Цветок заведомо подтверждает (хотя и слабо), что все нечерные предметы не вороны, однако трудно понять, какое отношение и масленка, и цветок имеют к утверждению «Все вороны черные». Если все это имеет отношение, то одновременно подтверждается, что все вороны белые или любого другого цвета, кроме желтого. Ситуация еще более усугубляется тем, что утверждение «Все вороны черные» логически эквивалентно утверждению «Любой предмет либо черный, либо не ворона». И это подтверждается любым черным предметом (будь то ворона или не ворона) или любой не вороной (как черной, так и нечерной). И то, и другое представляется абсурдным.

Не меньшей известностью пользуется парадокс Нелсона Гудмана о «зелубом» цвете. Предмет считается «зелубым», если он имеет зеленый цвет, например, до 1 января 2000 г., а затем становится голубым. Подтверждается ли закономерность «Все изумруды зелубые» наблюдением зеленых изумрудов? Некий пророк предвещает, что конец света наступает 1 января 2000 г. Казалось бы, каждый день существования мира подтверждает предсказание пророка, однако никто не считает, что от этого оно становится более вероятным.

Ситуация еще более усугубляется тем, что существуют случаи, когда подтверждения делают гипотезу менее вероятной. Предположим, что вы выкладываете на стол карты из тщательно перетасованной колоды и переворачиваете их, чтобы подтвердить гипотезу, согласно которой карт зеленой масти не существует. Первые 10 карт оказываются обычными игральными картами, но затем вы неожиданно обнаруживаете карту синей масти. Это – одиннадцатый подтверждающий случай, но теперь ваша уверенность в правильности исходной гипотезы сильно поколеблена. Пол Бернет привел еще несколько аналогичных примеров. Предположим, что обнаружен человек ростом 29 м 70 см. Сообщение о таком человеке является подкрепляющим примером для гипотезы «Все люди ростом меньше 30 м», тем не менее обнаружение такого человека *ослабляет* гипотезу. Обнаружение человека нормальных размеров в невероятном месте (например, на спутнике Сатурна Титане) – еще один пример подтверждающего наблюдения, ослабляющего ту же гипотезу.

Подтверждения могут даже привести к опровержению гипотезы. Предположим, что 10 карт всех значений от туза до десятки перетасованы и выложены в ряд вверх рубашкой. Гипотеза состоит в том, что ни одна карта со значением *n* не находится на *n*-м месте от левого конца ряда. Вы переворачиваете первые 9 карт. Каждая перевернутая вами карта подтверждает гипотезу. Но если ни одна из 9 перевернутых карт не является десяткой, то, взятые вместе, эти 9 карт опровергают гипотезу.

А вот еще один пример. На столе 2 кучки по 3 карты в каждой. В одной из кучек валет, дама и король червей, в другой – валет, дама и король треф. Обе кучки тщательно перетасованы. Смит вытягивает одну карту из червовой кучки. Джонс одну карту из трефовой кучки. Гипотеза состоит в том, что пара выбранных карт состоит из дамы и короля. Вероятность этого равна 2/9. Взглянув на свою карту, Смит видит, что вытащил короля. Не называя вытянутую им карту, Смит заявляет, что извлек карту, подтверждающую гипотезу. Почему? Как показывает вычисление условной вероятности, если Смиту известно, что он вытянул короля, то вероятность того, что гипотеза верна, повышается с 2/9 до 3/9 (= 1/3). Но теперь Джонс видит, что он (Джонс) извлек короля, и делает заявление, аналогичное заявлению Смита. Каждая карта в отдельности является подтверждающим примером. Взятые же вместе, карты опровергают гипотезу.

Карнап сознавал, что такого рода трудности существуют. Он проводил четкое различие между «степенью подтверждения» – величиной вероятности, получаемой на основе всех имеющихся данных, и тем, что он называл «значимостью подтверждения», учитывающей, как новые наблюдения изменяют оценку подтверждения. Значимость подтверждения не сводится к вероятностям. Это гораздо более сложная характеристика, включающая множество аргументов, противоречащих интуиции. В гл. 6 своих «Логических оснований» [19.11] Карнап анализирует группу тесно связанных между собой парадоксов значимости подтверждения, легко моделируемых с помощью игральных карт.

Например, может представиться такой случай, когда данные подтверждают каждую из двух гипотез в отдельности, но не подтверждают те же две гипотезы, взятые вместе. Рассмотрим 10 карт, половина из которых с синими рубашками, половина – с зелеными. Предположим, что зеленые рубашки имеют следующие карты: червовая дама, червовая десятка, червовая девятка, король пик и пиковая дама, а синие рубашки – король червей, червовый валет, десятка пик, девятка пик и восьмерка пик. Перетасуем эти 10 карт тщательно и выложим их в ряд вверх рубашкой.

Гипотеза *A* состоит в утверждении, что свойство быть картой «с картинкой» (королем, дамой или валетом) в большей степени присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой. Как показывает простая проверка, из 5 карт с зеленой рубашкой 3 карты с картинкой, тогда как из 5 карт с синей рубашкой картинку имеют только 2 карты. Гипотеза *B* состоит в утверждении, что свойство быть картой красной масти (бубновой или червовой) также в большей степени присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой. Вторая проверка подтверждает эту гипотезу: среди карт с зелеными рубашками имеются 3 карты красной масти, а среди карт с синими рубашками – только 2. Интуитивно кажется, что свойство одновременно быть картой красной масти и картой с картинкой в большей мере присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой, но это не так: только одна карта красной масти с картинкой имеет зеленую рубашку, в то время как среди карт с синими рубашками таких карт две!

Нетрудно придумать сценарии как фантастические, так и реалистические, по которым могут возникать аналогичные ситуации. Некая женщина хочет выйти замуж за человека, который был бы богат и добр. Среди ее знакомых есть лысые холостяки и холостяки с пышной шевелюрой. Будучи по профессии статистиком, наша дама производит выборочную инспекцию. Проект *A* устанавливает, что богаты 3/5 холостяков с шевелюрой и только 2/5 лысых холостяков. Проект *В* обнаруживает, что добры 3/5 холостяков с шевелюрой и только 2/5 лысых холостяков. Действуя опрометчиво, наша героиня могла бы прийти к поспешному выводу о том, что ей следует выйти замуж за холостяка с пышной шевелюрой, но если распределение качеств соответствует распределению карт с картинкой и карт красной масти из предыдущего примера, то ее шансы выйти замуж за богатого и доброго человека были бы вдвое выше, сделай она ставку на лысых женихов.

В рамках другого исследовательского проекта установлено, что 3/5 пациентов, принимавших некоторое лекарство, сохраняют иммунитет к простудным заболеваниям на протяжении 5 лет по сравнению с 2/5 членов контрольной группы, получавшими вместо лекарства плацебо*. Второй проект показал, что 3/5 пациентов, получавших некоторое лекарство, обрели иммунитет к кариесу зубов на 5 лет по сравнению с 2/5 членов контрольной группы, получавших плацебо. Объединенная статистика могла бы в этом случае показать, что доля тех, кто приобрел на 5 лет иммунитет к простудным заболеваниям и кариесу, среди получавших плацебо вдвое выше, чем среди получавших лекарство.

Удивительным примером того, как гипотеза может подтверждаться двумя независимыми исследованиями и опровергаться совместными результатами, может служить следующая игра. Ее можно моделировать с помощью игральных карт, но для разнообразия мы воспользуемся 41 фишкой для игры в покер и 4 шляпами (рис. 123). На столе *А* в черной шляпе лежат 5 цветных и 6 белых фишек. Рядом, в серой шляпе, лежат 3 цветные и 4 белые фишки. На столе *Б* в черной шляпе лежат 6 цветных и 3 белых фишки, а в серой шляпе – 9 цветных и 5 белых фишек. Содержимое шляп изображено наглядно и представлено в виде таблиц, помещенных в нижней части рис. 123.

Вы подходите к столу *А* с намерением вытянуть цветную фишку. Из какой шляпы вам следует ее извлечь: из черной или из серой? В черной шляпе 5 из 11 фишек цветные, поэтому вероятность извлечь цветную фишку из

* Физиологически нейтральное вещество, неотличимое по виду от лекарственного препарата. – *Прим. перев.*

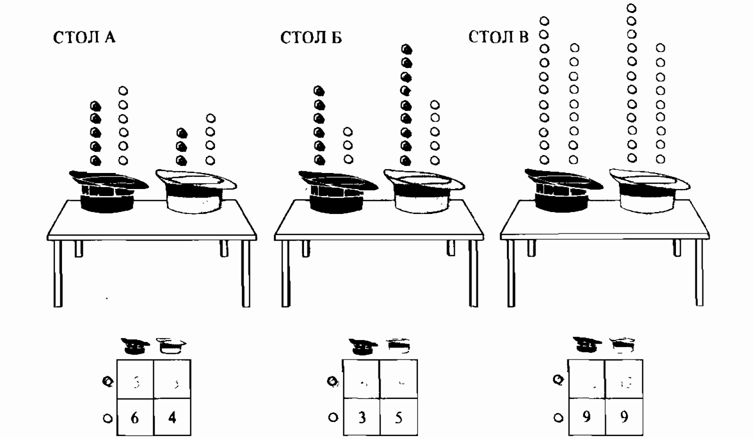


Рис. 123. Парадокс Э. Симпсона.

черной шляпы равна 5/11. Это больше, чем 3/7 – вероятность извлечь цветную фишку из серой шляпы. Ясно, что, выбрав черную шляпу, вы имеете больше шансов вытащить цветную фишку.

На столе *Б* вам также выгоднее выбрать черную шляпу: в ней 6 из 9 фишек цветные, поэтому вероятность извлечь из нее цветную фишку составляет 6/9 (= 2/3). Это больше, чем вероятность 9/14 извлечь цветную фишку из серой шляпы.

Предположим теперь, что фишки из двух черных шляп на столах *А* и *Б* сложены в одну черную шляпу, а фишки из двух серых шляп – в одну серую шляпу (стол *В*). Если вы захотите извлечь цветную фишку, то скорее всего выберете черную шляпу. Самое удивительное состоит в том, что ваш выбор неверен! Теперь в черной шляпе из 20 фишек цветных 11, поэтому вероятность извлечь цветную фишку из черной шляпы равна 11/20, в то время как вероятность извлечь цветную фишку из серой шляпы равна 12/21, что больше 11/20.

К. Блай, обнаруживший эту ситуацию в работе Э. Симпсона, опубликованной в 1951 г., назвал ее парадоксом Симпсона. В действительности парадокс оказался более старым, но название сохранилось. Нетрудно видеть, каким образом парадокс Симпсона мог бы возникнуть в реальном исследовании. Например, в двух сериях испытаний, проводимых независимо друг от друга, могли

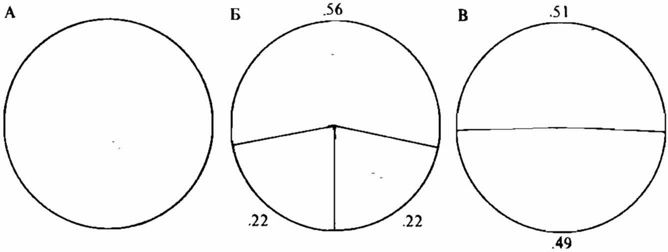


Рис. 124. Парадокс К. Блайта с тремя волчками.

бы быть получены данные, позволяющие полагать, что некоторый лекарственный препарат оказывает на мужчин более сильное действие, чем на женщин, в то время как совместные данные привели бы к обратному выводу.

Кому-нибудь из читателей, возможно, покажется, что подобного рода ситуации носят слишком искусственный характер, чтобы их можно было встретить в реальном статистическом исследовании. Однако парадокс Симпсона действительно встретился в одном статистическом исследовании, недавно проведенном с целью выяснения, не отдается ли при отборе кандидатов в аспирантуру при Калифорнийском университете в Беркли преимущество представителям одного пола перед другим. (Результаты этого исследования подробно изложены в [19.9].)

Блай придумал еще один парадокс, поверить в который еще труднее, чем в парадокс Симпсона. Парадокс Блая можно моделировать с помощью 3 наборов игральных карт или 3 специальным образом изготовленных («мошеннических») игральных костей с определенным распределением вероятностей выпадения граней. Мы будем моделировать парадокс Блая с помощью 3 волчков, изображенных на рис. 124, их легко изготовить каждому, кто вздумает проверить этот парадокс экспериментально.

Волчок *А* с неразделенной круговой шкалой – самый простой. Независимо от того, где останавливается стрелка, он порождает одну и ту же величину, равную 3. Волчок *Б* порождает значения 2, 4 или 6 с вероятностями 0,56; 0,22 и 0,22. Волчок *В* порождает значения 1 или 5 с вероятностями 0,51 и 0,49.

Вы выбираете один волчок, а ваш приятель – другой. Каждый из вас запускает стрелку, и тот, у кого стрелка покажет на большее число, считается выигравшим. Предположим, что позднее, когда вы наберетесь опыта, вам предоставится возможность сменить волчок. Какой волчок вам следовало бы выбрать? Если сравнивать волчки попарно, то мы обнаружим, что *А* выигрывает у *Б* с вероятностью $1 \times 0{,}56 = 0{,}56$; *А* выигрывает у *В* с вероятностью $1 \times 0{,}51 = 0{,}51$ и *Б* выигрывает у *В* с вероятностью $(1 \times 0{,}22) + (0{,}22 \times 0{,}51) + (0{,}56 \times 0{,}51) = 0{,}6178$. Ясно, что лучше всего выбрать волчок *А*, позволяющий получить более высокий результат, чем 2 других волчка с вероятностью, превышающей 1/2. Наихудший выбор – волчок *В*, так как с вероятностью, превращающей 1/2, он дает менее высокие результаты, чем волчки *А* и *Б*.

А теперь о самом главном. Предположим, что вы играете с двумя партнерами и что вам предоставлено право первым выбрать волчок. Затем все три волчка запускаются, и тот из игроков, у кого стрелка волчка покажет на наибольшее число, объявляется победителем. Вычисление вероятностей выпадения различных чисел обнаруживает необычайный факт. Наихудшим выбором является волчок *А*, наилучшим – волчок *В*! Волчок *А* обеспечивает выигрыш с вероятностью $0{,}56 \times 0{,}51 = 0{,}2856$, то есть меньше 1/3. Волчок *Б* обеспечивает выигрыш с вероятностью $(0{,}44 \times 0{,}51) + (0{,}22 \times 0{,}49) = 0{,}3322$, то есть почти 1/3. Наконец, волчок *В* обеспечивает выигрыш с вероятностью $0{,}49 \times 0{,}78 = 0{,}3822$, или чуть больше 1/3.

Задумаемся над тем, к каким разрушительным последствиям для статистических исследований приведет парадокс Блая. Предположим, что лекарства от некоторой болезни по эффективности подразделяются на 6 категорий, которым мы сопоставим числа от 1 до 6 (большее число соответствует более высокой эффективности). Лекарство *А* равномерно эффективно и оценивается 3 баллами (волчок *А*). Эффективность лекарства *В* варьируется со временем: на протяжении 0,51 времени испытания его эффективность оценивается 1 баллом, а 0,49 времени – 5 баллами (волчок *В*). Если фармацевтическая промышленность выпускает только лекарства *А* и *В* и врач желает максимизировать шансы пациента на выздоровление, то он, очевидно, отдаст предпочтение лекарству *А*.

А что произойдет, если в аптеке появится препарат *Б* с распределением вероятностей, соответствующим волчку *Б*? Сбитый с толку врач, встав перед проблемой выбора одного из трех лекарств, отдаст предпочтение лекарству *В* перед лекарством *А*.

Блай изыскал способ еще сильнее драматизировать свой парадокс. Представим себе, что некий статистик каждый вечер обедает в ресторане, в котором посетителю предлагают на десерт яблочный пирог и вишневый пирог. Свои оценки от дегустации того и другого пирога статистик выставляет по шестибалльной системе – от 1 до 6. Яблочный пирог неизменно удостаивается одной и той же оценки в 3 балла (волчок *A*). Оценки вишневого пирога варьируются так же, как показания стрелки волчка *B*. Естественно, что ваш статистик всегда выбирает яблочный пирог.

Изредка в меню ресторана появляется пирог с черникой. Выставляемые статистиком оценки варьируются так же, как показания стрелки волчка *Б*. Между официанткой и статистиком происходит следующий разговор.

Официантка. Принести вам яблочный пирог?
Статистик. Нет. Я вижу, у вас сегодня пирог с черникой. Принесите мне лучше вишневый пирог.

Официантка скорее всего воспримет такой ответ как шутку, хотя в действительности статистик действует вполне рационально, пытаясь максимизировать свою среднюю оценку (так называемое математическое ожидание оценки). (Ошибка! См. «Дополнение».) Разве существует еще какой-нибудь парадокс, который более наглядно продемонстрировал бы, какие трудности необходимо преодолеть последователям Карнапа, чтобы продвинуться на пути к реализации его программы?

ДОПОЛНЕНИЕ

Многие читатели совершенно справедливо упрекнули меня за небрежность, допущенную при описании парадокса К. Блая о статистике и трех пирогах. Утверждение о том, что статистик пытался максимизировать математическое ожидание оценки (то есть среднюю оценку), принадлежит мне, а не Блаю. По словам Блая, статистик максимизировал свой шанс получить самый вкусный пирог. Различие между тем и другим тонкое, но существенное. И врач, и статистик стоят перед выбором: максимизировать свою среднюю оценку в длинной серии испытаний или свой шанс получить самый вкусный пирог либо наиболее эффективное лекарство в данном конкретном случае.

Сформулируем ту же мысль несколько иначе. Любитель пирогов из парадокса Блая минимизирует свое сожаление по поводу неудачного выбора пирога: вероятность увидеть на чужом столе пирог лучшего качества, чем на своем собственном. Его медицинский двойник, как подсказывает П. Черник, стремится избежать неприятного поворота в развитии событий, когда неудовлетворенный пациент обращается к другому врачу и получает более эффективное решение. «К кому ближе физик, работающий в лаборатории,– спрашивает Дж. Мавродес,– к тому, кто запускает волчки в парадоксе Блая, или к статистику, так любящему пироги?.. Я не знаю ответа на этот вопрос».

Дж. Гамильтон мл. предложил свою версию диалога между статистиком и официанткой.

Официантка. Какой пирог вы предпочитаете выбрать сегодня – *А* или *Б*?
Статистик. Ставлю на *А*.
Официантка. А как насчет шансов *А* и *В*?
Статистик. Ставлю на *А*.
Официантка. Я вижу, что вы решительно предпочитаете пирог *А* всем остальным.
Статистик. Ничего подобного. В действительности наибольшая вероятность быть самым вкусным пирогом у *В*.
Официантка. Пошутили и хватит. Какой пирог вы хотите заказать – *А* или *В*?
Статистик. Ни тот, ни другой. Принесите мне, пожалуйста, кусочек пирога *Б*.

Парадоксы подтверждения не являются, конечно, парадоксами в смысле противоречий. Перед нами парадоксы в более широком смысле – результаты и ситуации, противоречащие интуиции и делающие бессмысленными первые попытки Дж. Милля и других авторов дать определение того, что́ надлежит понимать под «подтверждающим примером». Философы, занимающиеся изучением парадоксов, знают о статистической теории отнюдь не понаслышке. Именно потому, что статистическая теория требует проведения столь многих тонких различий, задача формулировки индуктивной логики сопряжена со столь большими трудностями.

Р. Джеффри приводит в своей «Логике принятия решений» [19.12] забавный вариант парадокса Гудмана о «зелубом» цвете. Назовем «дальчиком» любую девочку, родившуюся до 2000 г., или любого мальчика, родившегося после 2000 г., и «мевочкой» – любого мальчика, родившегося до 2000 г., или любую девочку, родившуюся после 2000 г. До сих пор все дальчики были женского пола, а все мевочки – мужского. Следовательно, рассуждая по индукции, мы приходим к заключению о том, что (*А*) первый дальчик, родившийся после 2000 г., будет женского пола и (*Б*) первая мевочка, родившаяся после 2000 г., будет мужского пола. Но первый дальчик, который родится после 2000 г., будет мальчиком, что противоречит выводу (*А*). Аналогичным образом первая девочка, которая родится после 2000 г., будет девочкой, что противоречит выводу (*Б*).

ГЛАВА 20

ЧИСЛА КАТАЛАНА

Если бесконечная последовательность положительных целых чисел достаточно проста, как, например, геометрическая прогрессия со знаменателем, равным 2 (1, 2, 4, 8, 16, ...), или последовательность квадратов (1, 4, 9, 16, 25, ...), то закономерность ее образования легко распознаваема. Почти каждый математик «узнает» числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) или треугольные числа (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...). Но если последовательность незнакома, то на поиск рекуррентной (или нерекуррентной) формулы ее общего члена нередко приходится затрачивать много времени, причем успех поисков отнюдь не гарантирован. (Формула рекуррентна, если для вычисления последующего члена необходимо знать предыдущие члены; нерекуррентная формула позволяет получать n-й член непосредственно, не обращаясь к предыдущим членам.)

Трудно поверить, но первый «Справочник по целочисленным последовательностям» [20.7] был опубликован только в 1973 г. Составитель его Н. Слоун, сотрудник фирмы Bell Laboratories, собрал и упорядочил более 2300 целочисленных последовательностей, расположив их в порядке возрастания первых, вторых и т.д. членов. Математику, встретившему загадочную целочисленную последовательность, теперь не нужно затрачивать часы на поиск производящей ее формулы – достаточно просто заглянуть в справочник Слоуна. С высокой вероятностью он найдет там свою последовательность вместе со списком рекомендуемой литературы, по которой сможет установить природу интересующего его «зверя».

Числовая последовательность, о которой пойдет речь в этой главе, значится в «Справочнике» Слоуна под номером 577: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ... Числа, образующие эту последовательность, называются числами Каталана. Они не так известны, как числа Фибоначчи, но не менее вездесущи, обладая удивительной способностью возникать в самых неожиданных местах, особенно при решении комбинаторных задач. В 1971 г. Г. Гулд, математик из университета Западной Вирджинии, приватно издал и распространил библиографию из 243 названий по числам Каталана; во многих случаях авторы даже не подозревали, что имеют дело с последовательностью, известной на протяжении более двух столетий. В 1976 г. Гулд расширил свою библиографию, доведя общее число ссылок до 450. И действительно, последовательность Каталана – вероятно, наиболее часто встречающаяся последовательность, все еще недостаточно известная, что вынуждает математиков, не имеющих доступа к «Справочнику» Слоуна, затрачивать огромное количество энергии на переоткрытие давным давно выделенных формул.

Первым, кто открыл числа Каталана, был Леонард Эйлер, задавший себе вопрос: сколькими способами можно разделить данный выпуклый многоугольник на треугольники с помощью непересекающихся диагоналей? В качестве примеров можно взять треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 125). Заметим, что в любом случае, независимо от способа разбиения n-угольника на треугольники, число диагоналей всегда равно $n-3$, а число треугольников равно

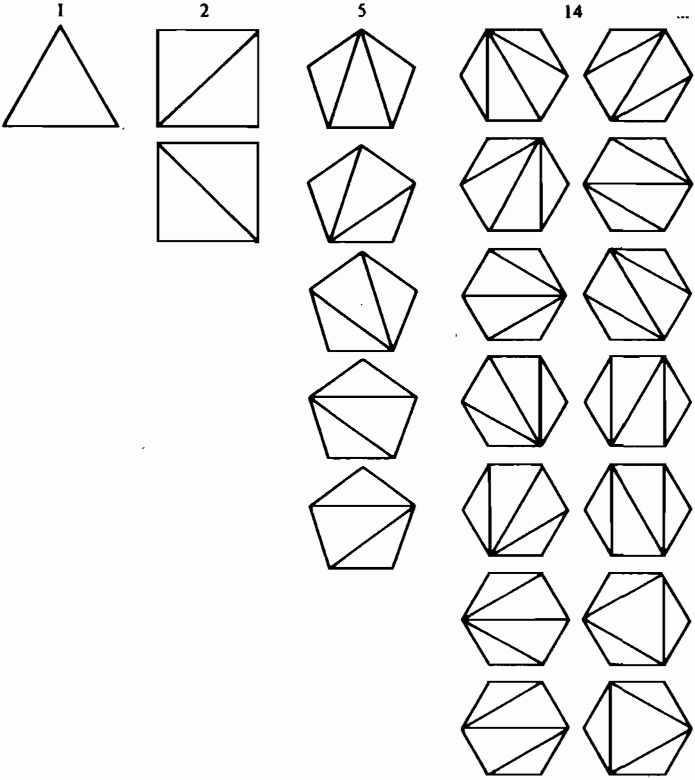


Рис. 125. Задача Леонарда Эйлера о триангуляции многоугольников.

$n - 2$. Нетрудно доказать, что эти соотношения выполняются в общем случае. Числа возможных триангуляций для треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников совпадают с первыми четырьмя членами последовательности Каталана.

Используя рассуждения по индукции, которые он описывает как «весьма трудоемкие», Эйлер получает следующую формулу для n-го члена последовательности Каталана:

$$\frac{2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4n - 10)}{(n - 10)!}.$$

Числа, стоящие в числителе, имеют вид $4N - 10$, где

N – целое положительное число, которое больше 2. Восклицательный знак в знаменателе означает факториал – произведение всех положительных целых чисел от 1 до числа, стоящего перед восклицательным знаком. Например, при $n = 6$ (число сторон шестиугольника) формула Эйлера дает

$$\frac{2 \times 6 \times 10 \times 14}{5!} = 14.$$

Необычно простые рекуррентные формулы получаются, если перед последовательностью Каталана поставить еще одну единицу: 1, 1, 2, 5, 14, ... Пусть k – последнее число подпоследовательности, а n – положение (номер) следующего члена. Тогда следующее число Каталана задается формулой

$$\frac{k(4n - 6)}{n}.$$

Иоганн Андреас фон Зегнер, современник Эйлера (XVIII в.), придумал весьма причудливый рецепт построения последовательности Каталана в той же форме. Запишите в обычном порядке конечную подпоследовательность, затем под ней – те же числа, но в обратном порядке. Умножьте каждое верхнее число на число, стоящее под ним, и сложите все произведения. В результате вы получите следующее число Каталана. Например:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 1 & 2 & 5 & 14 \\ \times & & & & & \\ & 14 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$$

Эйлерова триангуляция многоугольников изоморфна многим, казалось бы, никак не связанным с ней задачам. Эжен Шарль Каталан, бельгийский математик, в честь которого названа последовательность, решил в 1838 г. следующую задачу. Предположим, что у нас имеется цепочка из n букв, заданных в определенном порядке. Мы хотим расставить $(n - 1)$ пар скобок так, чтобы внутри каждой пары (одной «открывающей», левой, скобки и одной «закрывающей», правой, скобки) было 2 «терма». Этими парными термами могут быть любые две буквы,

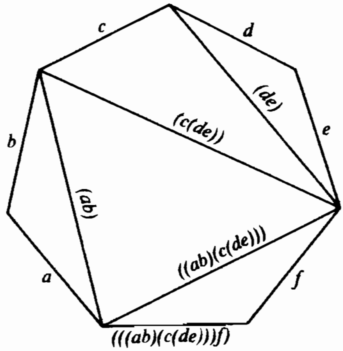


Рис. 126. Триангуляция семиугольника с «вставленным» (внутренним) треугольником и расстановка скобок.

буква и соседняя группа символов, заключенная в скобки, или две соседние группы символов, заключенные в скобки. Сколькими способами можно расставить скобки в цепочке букв?

Для двух букв *ab* скобки можно расставить только 1 способом: (*ab*). Для трех букв *abc* существуют 2 варианта расстановки скобок: ((*ab*) *c*) и (*a*(*bc*)). Для 4 букв скобки можно расставить 5 способами: ((*ab*)(*cd*)), (((*ab*)*c*)*d*), (*a*(*b*((*cd*))), (*a*((*bc*)*d*)) и ((*a*(*bc*))*d*). Числа 1, 2 и 5, показывающие, сколькими способами можно расставить скобки, совпадают с первыми 3 числами Каталана. Это совпадение сохраняется и при переходе к следующим членам последовательности Каталана.

Г. Фордер в своей работе о числах Каталана [20.1] предложил простой способ установления взаимно однозначного соответствия между триангулированными многоугольниками и выражениями с расставленными скобками. В качестве примера рассмотрим триангулированный семиугольник (рис. 126). Обозначим его стороны (кроме основания) латинскими буквами от *a* до *f*. Каждую диагональ, стягивающую соседние стороны, обозначим теми буквами, которые присвоены этим сторонам, заключив их в скобки. Остальные диагонали обозначим аналогичным образом, заключив в скобки обозначения двух других сторон треугольника. Последним обозначим основание. Выражение для основания однозначно определено разбиением многоугольника на треугольники. Применив этот способ к многоугольникам, изображенным на рис. 125, вы получите выражения с

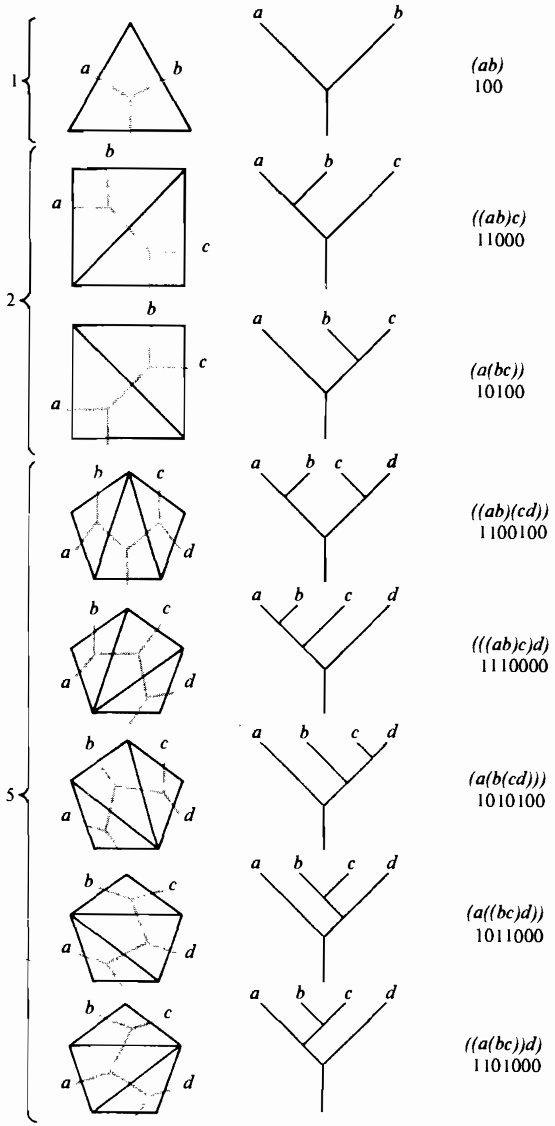


Рис. 127. Триангуляция и тривалентные деревья.

расставленными скобками, приведенные на рис. 127, справа.

Английский математик А. Кэли доказал, что числа Каталана указывают количества плоских, тривалентных посаженных деревьев. Деревом называется связный граф (вершины, соединенные ребрами), не содержащий замкнутых петель. Плоским принято называть граф, который может быть изображен на плоскости без самопересечений. Дерево считается посаженным, если у него есть «ствол», свободный конец которого называется «корнем». Таким образом, мы можем начертить граф, напоминающий дерево, которое растет из земли. Граф называется тривалентным, если в каждой вершине (кроме корня дерева и свободных концов ветвей) сходятся по три ветви.

Графы с такой структурой изображены на рис. 127. Объяснения почти излишни. «Серыми» линиями слева показано, как каждая триангуляция соответствует посаженному тривалентному дереву, а справа помещено само дерево. Нетрудно видеть, каким образом разбиение ветвей дерева на группы соответствует расстановке скобок в выражении. Под каждым выражением указано двоичное число, получающееся при замене каждой левой скобки единицей и каждой буквы нулем (все правые скобки опускаются). Такие двоичные числа являются традиционными «стенографическими записями» разбиений многоугольников и соответствующих им деревьев. Правые скобки мы опускаем потому, что их расположение восстанавливается однозначно, если известно, где стоят левые скобки и по какому принципу производится группировка символов.

Польский математик Ян Лукасевич изобрел изящный способ, позволяющий сопоставлять каждому дереву двоичное число (рис. 128). Нарисуем дерево с 4 свободными («висячими») концами ветвей. Свободным концам поставим в соответствие по 0, а всем вершинам, в которых сходятся 3 ветви, поставим в соответствие по 1. Представим себе, что червь ползет сначала по стволу, а затем по ветвям дерева и спускается по стволу на землю. Путь червя показан штриховой линией на рис. 128. Достигнув каждой вершины, червь «называет вслух» присвоенное ей двоичное число. При повторном прохождении вершины ее двоичная метка не называется. После того как червь спустится на землю, названные им нули и

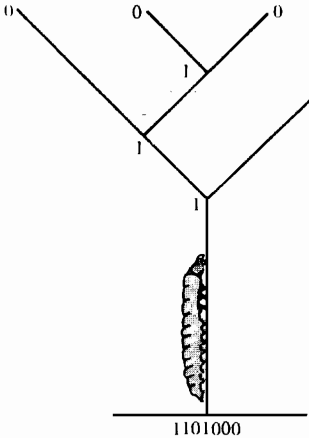


Рис. 128. Червяк, маршрут которого порождает двоичное число дерева.

и единицы (взятые в той последовательности, в которой они были названы) образуют двоичное число 1101000 – то самое, которое соответствует выражению с расставленными скобками, изоморфному данному дереву.

В 1964 г. было установлено, что числа Каталана позволяют пересчитывать нормальные посаженные деревья (то есть посаженные деревья с *n* вершинами, в число которых входят висячие концы ветвей, но не входит корень). Числа Каталана показывают также, сколько существует деревьев с *n* ребрами (вершина в таком дереве может иметь любую валентность, то есть из вершины может исходить любое число ребер).

Установить взаимно однозначное соответствие между деревьями с *n* ребрами и посаженными тривалентными деревьями можно многими способами. Простейший из таких способов был предложен Ф. Бернхартом (рис. 129). Условимся изображать тривалентные деревья так, чтобы из каждой вершины валентности 3 выходило 3 ветви: вниз, вверх и вправо. Представим себе, что каждое горизонтальное ребро стягивается в точку и исчезает. Если на правом конце такого ребра есть тривалентная вершина, то она перемещается влево и сливается с левым концом исчезающего ребра. Все вертикальные ребра сохраняются. Это простое преобразование переводит все посаженные тривалентные деревья с *n* концами в поса-

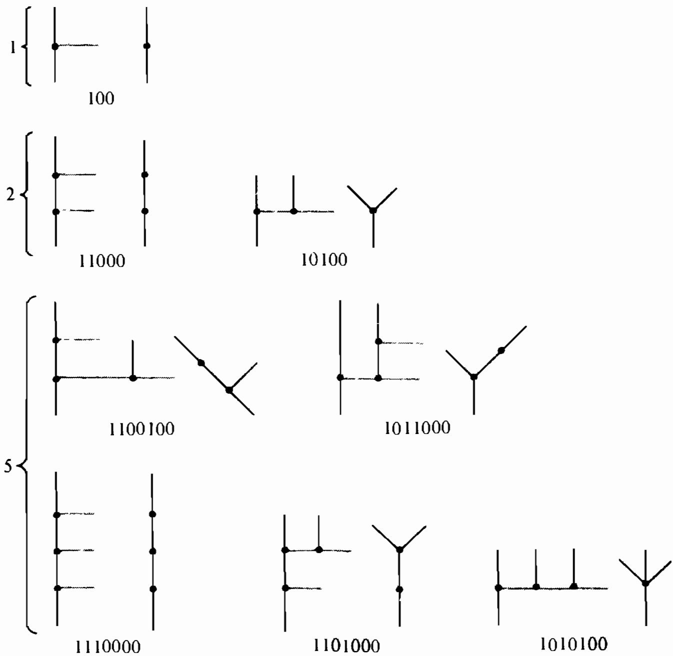


Рис. 129. Преобразование тривалентных деревьев в нормальные деревья.

женные деревья с *n* ребрами (ни одно такое дерево не оказывается при этом пропущенным).

Червяк, совершающий «обход» новых деревьев, изображенных на рис. 129, справа, получит то же двоичное число, которое соответствовало старому дереву, если процедуру изменить следующим образом. Червяк стартует из нижней вершины, а не из корня. Каждый раз, когда он проползает ребро, двигаясь вверх, ребро получает метку 1. Каждый раз, когда он проползает ребро, двигаясь вниз, ребро получает метку 0.

Рассмотрим шахматные доски со сторонами 2, 3, 4, ... клеток. Все поля, расположенные к северу и к западу от главной диагонали закрасим в темный цвет (рис. 130). Наша ладья двигается из левого нижнего поля a1 в правое верхнее поле h8. Ходить на поля, закрашенные в темный цвет, не разрешается. Кроме того, ладья может двигаться только на север или на восток. Сколько различных траекторий существует для такой ладьи на доске $n \times n$?

Ответ дают числа Каталана. Выпишем под каждой доской двоичное число для посаженного тривалентного дерева с n концами. Читая его слева направо, будем перемещать ладью на 1 поле вправо всякий раз, когда нам встретится единица, и на 1 поле вверх всякий раз, когда нам встретится 0. (Последняя двоичная цифра опускается). Такой алгоритм порождает некоторую допустимую траекторию, и, перебирая все двоичные числа, соответствующие посаженным тривалентным деревьям с n концами, мы получаем все маршруты ладьи.

А вот 7 более занимательных задач, решенных Каталаном. Для первых 5 из них я покажу, как соответствующие двоичные числа (с отброшенным последним знаком) позволяют получить решение.

1. Два человека A и B выставили свои кандидатуры на выборах. Каждый из них получает по n голосов. Каким образом могут быть набраны $2n$ голосов, чтобы кандидат A никогда не отставал от кандидата B?

2. Выложите в ряд на стол три фишки: красную, синюю и зеленую. Положите на красную фишку стопку из n игральных карт вниз рубашкой (значения карт должны возрастать снизу вверх). Карты разрешается

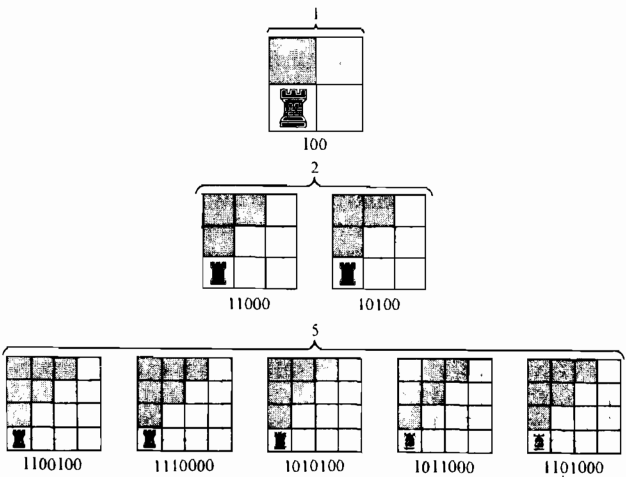


Рис. 130. Числа Каталана и подсчет числа траекторий ладьи.

перекладывать по одной за один раз с красной фишки на синюю или с синей фишки на зеленую. (Никаких других ходов делать не разрешается). Комбинируя ходы этих двух типов, вы за $2n$ ходов перекладываете все карты на зеленую фишку. Сколько перестановок карт в стопке на зеленой фишке вы можете получить при заданном n (числе карт)? (1 соответствует перекладыванию карты с красной фишки на синюю, 0 – перекладыванию карты с синей фишки на зеленую.)

3. Пьяный выходит из дверей бара и бредет прямо. Он ступает размеренно (делая шаги равной величины), но каждый шаг с равной вероятностью делает как вперед, так и назад. Сколькими способами он может сделать $2n$ шагов, которые снова приведут его к дверям бара? (1 соответствует шагу вперед, 0 – шагу назад.)

Задаче о случайном блуждании можно придать и другие формы. Король начинает двигаться с первой горизонтали и перемещается за один ход на 1 поле вперед или назад по вертикали, возвращаясь после $2n$ ходов на исходное поле. Начертите пространственно-временной график его перемещений, откладывая время на горизонтальной оси. Зигзагообразную ломаную, которая у вас получится, можно рассматривать как профиль горного хребта с основанием длиной $2n$ километров и пиками, вздымающимися на целое число километров над основанием. Маршруты перемещений короля описывают все возможные горные хребты такого типа.

4. Четное число ($2n$) солдат, из которых нет и двух одинакового роста, выстроены в 2 одинаковые шеренги A и B. Сколькими способами можно осуществить такое построение, если требуется, чтобы солдаты в каждой шеренге были выстроены по росту (от самого низкорослого до самого высокого) и чтобы солдат, стоящий в шеренге B, был выше своего напарника (стоящего на таком же месте) из шеренги A? (Перенумеруйте солдат по росту числами 1, 2, 3, ... – большему росту должен соответствовать больший номер – и цифры в двоичных числах слева направо. Единицы соответствуют шеренге A, нули – шеренге B. Задачу нетрудно смоделировать с помощью игральных карт.)

5. Билет стоит 50 центов. В очереди за билетами стоят $2n$ посетителей. У половины из них при себе по 1 доллару, у другой половины – по 50 центов. У кассира сначала нет сдачи. Сколькими способами можно расположить посе-

тителей в очереди, если требуется, чтобы кассир любому из посетителей мог дать сдачи? (1 соответствует обладателю 50 центов, 0 – обладателю 1 доллара).

6. Гексафлексагоны – забавные игрушки. Их делают из прямых или фигурных полосок бумаги, особым образом сложенных в виде правильных шестиугольников. При перегибании гексафлексагона его наружная сторона скрывается внутри и на поверхность выходит то, что было скрыто в недрах игрушки. (См. о флексагонах в моей книге [20.8].) При перегибании правильный гексафлексагон проходит различные состояния. Общее число таких состояний для всех разновидностей правильных гексафлексагонов с n «гранями» задается числом Каталана. Например, гексагексафлексагон (6 граней) может быть изготовлен 3 способами. Общее число состояний, в которых он может находиться, есть число Каталана 42.

Если мы отбросим состояния и спросим, сколькими существенно различными способами можно изготовить правильный гексафлексагон с n гранями, то ответ на вопрос дает последовательность, члены которой задают число триангуляций выпуклых многоугольников (повороты и отражения исключаются). Эта замечательная последовательность (в «Справочнике» Слоуна она числится под номером 942) начинается так: 1, 3, 4, 12, 27, 82, 228, 773, 2282, 7528, ...

В неопубликованных работах Бернхарта и других любителей флексагонов описываются способы, которые позволяют отобрать изменения состояний при перегибании флексагона с n гранями с помощью построения маршрутов обхода границ треугольников, возникающих при триангуляции $(n + 1)$-угольника.

7. За круглым столом сидит четное число людей. Каждый из них протягивает руку, и они попарно берутся за руки так, чтобы сцепленные руки одной пары не пересекались со сцепленными руками другой пары. Число пар задано. Сколькими способами людей за столом можно разбить на пары? Сформулируем задачу более точно. Расставим на окружности $2n$ точек. Сколькими способами их можно попарно соединить непересекающимися хордами?

Можете ли вы указать простой геометрический способ установления взаимно однозначного соответствия между этой задачей и теми задачами, которые были приведены выше?

Нерекуррентная формула для n-го числа Каталана имеет различный вид в зависимости от того, в каком порядке перенумерованы числа Каталана. Формула получается наиболее простой, если последовательность Каталана начинается с чисел 1, 2, 5, ... При такой нумерации n-е число Каталана определяется формулой

$$\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Если последовательность Каталана начинается с чисел 1, 1, 2, 5, ..., то нечетные числа Каталана (бóльшие единицы) стоят на всех местах (и только на таких местах), номер которых есть некоторая степень двойки. Таким образом, четвертое, восьмое, шестнадцатое и т. д. числа Каталана нечетны. Это лишь одно из многих необычных свойств последовательности Каталана, которые были открыты.

Считаю своим долгом предупредить читателя о возможной ошибке. Работая с комбинаторными задачами, нетрудно спутать последовательность Каталана с другой тесно связанной с ней последовательностью 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, ... Как отмечает Гулд в своей библиографии (которая помимо литературы о числах Каталана включает перечень работ по выписанной выше последовательности), когда структура последовательности достаточно сложная, нетрудно пропустить пятнадцатый член (с $n = 4$) и ошибочно предположить, что вы имеете дело с последовательностью Каталана. Члены новой последовательности получили название чисел Белла в честь Эрика Т. Белла, посвятившего им многие свои публикации. Числа Белла «пересчитывают» разбиения n элементов. Например, число схем рифмующихся строк в стихотворении из n строк есть не что иное, как число Белла. Четверостишие может быть зарифмовано 15 возможными способами. Четырнадцатистрочный сонет, если отбросить традиции, может быть зарифмован 190 899 322 различными способами (четырнадцатое число Белла). «Но кто же станет писать сонеты, – возразите вы, – у которых строки рифмуются по схеме *aaaaaaaaaaaaaa*?» А почему бы и нет? Разрешив себе рифмовать одно и то же слово, Дж. Кабелл написал сонет именно с такой схемой рифмующихся строк (каждая строка заканчивалась словом «love» (любовь)) и поместил его в гл. 14 своей книги «Юрген» [20.9]. Думаю, не случайно сонетом из 14 строк открывается 14-й раздел гл. 14.

1	*a*				
	1				
2	*aa*	*ab*			
	1	2			
5	*aaa*	*aab*	*aba*	*abb*	*abc*
	1	2	3	4	5
15	*aaaa*	*aaab*	*aaba*	*abaa*	*abbb*
	1	2	3	4	5
	aabb	*abba*	*abab*	*aabc*	*abac*
	6	7	8	9	10
	abca	*abbc*	*abcb*	*abcc*	*abcd*
	11	12	13	14	15

Рис. 131. Числа Белла и схемы рифмующихся строк.

На рис. 131 показано, как числа Белла «нумеруют» схемы рифмующихся строк в стихотворениях объемом от 1 до 4 строк. Рифмующиеся строки соединены сверху дугами. Обратите внимание на то, что пересечение дуг впервые встречается, только когда мы переходим к четверостишию (схема № 8). Дж. Гроуни, построившая эту таблицу для своей докторской диссертации в 1970 г., называет схемы рифм без пересечений «плоскими схемами». Числа Белла задают общее количество всех схем рифмующихся строк. Числа Каталана «пересчитывают» подпоследовательность плоских схем.

Последовательность Белла указана в «Справочнике» Слоуна под номером 585. Но с этой последовательностью связана также и другая история, которую мы расскажем в другой раз.

ОТВЕТЫ

Требовалось доказать, что если $2n$ точек на окружности хордами попарно соединить всеми возможными способами, то общее число таких хорд есть число Каталана. На рис. 132 показано, как Ф. Бернхарт устанавливает взаимно однозначное соответствие между расположением хорд и посаженными нормальными деревьями с $(n + 1)$ ребрами. На рис. 132 приведены также двоичные числа. Так как количество таких деревьев, как

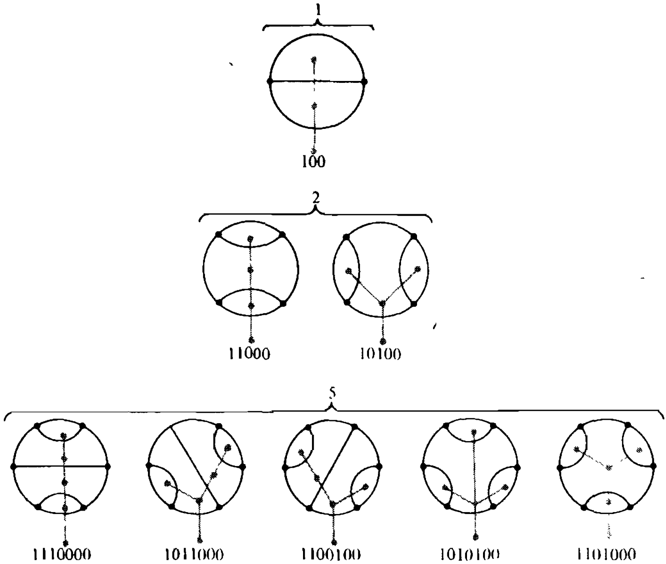


Рис. 132. Соответствие между непересекающимися хордами и деревьями.

мы уже знаем, определяется числами Каталана, та же последовательность «пересчитывает» и схемы расположения хорд. Для того чтобы придать схемам бóльшую наглядность, небольшие хорды изображены в виде искривленных дуг.

Представьте себе, что и окружности, и хорды – это упругие нити. Разорвем окружность в самой верхней точке и распрямим ее. Тогда задача о хордах перейдет в следующую задачу: требуется соединить всеми возможными способами попарно дугами $2n$ точек на прямой так, чтобы дуги не пересекались. Эта задача эквивалентна задаче о нахождении всех плоских схем рифмующихся строк для стихотворения из $2n$ строк, разбитого на n куплетов (рифмующиеся строки могут быть разделены нерифмующимися).

Замкнув снова концы разорванной окружности, но не вверху, как прежде, а внизу, мы получим «вывернутый наизнанку» вариант исходной задачи. Перед нами как бы возникнет озеро с $2n$ домами по периметру, между которыми всеми возможными способами проложены непересекающиеся дорожки, соединяющие дома попарно. (Все дорожки, соединяющие одну и ту же пару домов, считаются неотличимыми. Можно представить себе, что каждая пара домов соединена упругой нитью, которую можно выводить из плоскости, растягивать или сжимать и располагать на плоскости вне озера.)

Двоичные числа мы получим, представив себе внутри каждого круга в самом низу червяка, обращенного передним концом на запад. Червяк ползет против часовой стрелки и присваивает хорде метку 1 всякий раз, когда он встречает ее впервые, и 0, когда он встречает ее повторно. Вся процедура разворачивается и в обратном порядке. Если задано двоичное число, то червяк присваивает вершинам на окружности метки 1 и 0. Существует только один способ соединить каждую 1 с 0, не пересекая при этом хорду.

ДОПОЛНЕНИЕ

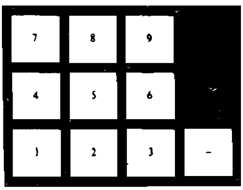
Журнальная публикация главы о числах Каталана вызвала поток писем, в которых читатели сообщали о других приложениях этих чисел и о других их свойствах. Должен заметить, что я и не ставил перед собой такую недостижимую цель, как перечисление всех свойств чисел Каталана и всех их приложений.

В. Хоггарт мл., редактор журнала *The Fibonacci Quarterly*, сообщил, как легко обнаружить числа Каталана в треугольнике Паскаля. Для этого необходимо лишь опускаться по центральному столбцу (1, 2, 6, 20, 70, ...) и из каждого числа вычитать соседнее (справа или слева – безразлично, так как строки треугольника Паскаля симметричны относительно центрального столбца). В результате действительно возникает последовательность Каталана!

П. Стокмайер обратил мое внимание на работу Дж. Левина «Заметка о числе пар непересекающихся маршрутов» [20.10]. Стокмайеру же я обязан следующей красочной интерпретацией результата Левина. Представьте себе двоих людей, находящихся в одном и том же узле квадратной решетки. Оба одновременно делают шаг, выбирая направление (на север или на восток) случайным образом. Когда их маршруты пересекаются, очерченный маршрутами контур ограничивает какую-то фигуру полиомино. Числа Каталана показывают, сколько различных полиомино может очертить 1 человек за n шагов. Доказанная Левиным теорема лежит в основе многих последующих публикаций, таких, как работа Л. Шапиро «Треугольник Каталана» [20.11].

Шапиро прислал мне также оттиск другой своей работы «Краткое доказательство тождества Тушара для чисел Каталана» [20.12]. Полученный им результат можно интерпретировать следующим образом. Расставим на окружности n точек. Каждую точку окрасим в красный или в зеленый цвет либо соединим ее линией с другой точкой. Линии не должны пересекаться. Числа Каталана показывают, сколько существует различных схем расположения точек на окружности при каждом n.

Числам Белла была посвящена моя статья в *Scientific American* (May 1978). Она войдет как отдельная глава в одну из моих последующих книг.



ГЛАВА 21

ИГРЫ И ЗАБАВЫ С МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОМ

Если бы вам предоставилась возможность отправиться на машине времени в древние Афины на встречу с Аристотелем, то чем бы вы могли особенно удивить его? (Я имею в виду какой-нибудь миниатюрный прибор или устройство, умещающееся в вашем кармане.) Думаю, что наибольшее удивление у Аристотеля вызвал бы карманный микрокалькулятор. Арабские цифры на индикаторе, светодиоды, миниатюрные схемы, изоморфные булевой алгебре логики (напомню, что именно Аристотель заложил основы формальной логики), и, прежде всего, необычайная скорость вычислений и мощь поразили бы Аристотеля больше, чем любой из окружающих нас миниатюрных приборов.

Революционные последствия появления этих чудесных маленьких «считалок» только начинают сказываться. Среди инженеров и ученых логарифмическая линейка уже стала такой же «древностью», как абак. Печально, что математикам прошлого приходилось затрачивать годы упорного труда на вычисление логарифмов и тригонометрических функций. Современному инженеру быстрее вычислить значения этих функций с помощью микрокалькулятора, чем искать их в справочниках или находить приближенные значения с помощью логарифмической линейки.

Среди учителей математики спор о «новой математике» постепенно уступил место спору о том, как надлежит использовать микрокалькулятор в преподавании элементарной математики. Почти все согласились, что на уровне средней школы и выше микрокалькулятор и другие современные вычислительные средства были бы великим благом. «Недостойно просвещенного человека,—писал Лейбниц (один из создателей механического компьютера),—тратить часы на рабский труд вычислений».

Избавившись от скучных утомительных вычислений, начинающий, несомненно, с большей охотой займется изучением основных понятий и структур математики. Нашей системе образования не делает чести признание, которое обычно приходится слышать математику, раскрывающему непосвященному тайны своей профессии: «А я так не могу даже правильно подвести баланс в моей чековой книжке». Стали бы вы жаловаться поэту или прозаику на то, что испытываете трудности с правописанием?

Преподаватели математики спорят не о ценности микрокалькулятора как средства познания окружающего мира и превосходного помощника при изучении математики. Нет, споры идут лишь о том, когда лучше всего знакомить учащихся с микрокалькулятором. Большинство педагогов-математиков полагают, что знакомить ребенка с микрокалькулятором следует не раньше, чем ребенок научится складывать, вычитать, умножать и делить «на бумаге». Но коль скоро учащийся овладел четырьмя арифметическими действиями, нет и не может быть никаких причин, по которым он не мог бы приносить микрокалькулятор с собой в класс или даже пользоваться им на экзамене. Технический прогресс не остановить никакими запретами. Уже сейчас поговаривают о микрокалькуляторах, встроенных в парты, как некогда чернильницы.

Любитель занимательной математики, приобретя любую модель самого дешевого микрокалькулятора, вскоре бывает вынужден признаться, что даже не представляет, как прежде мог обходиться без такого замечательного помощника. Рассмотрим хотя бы следующий криптарифм:

```
  THIS
    IS
 ------
 **TOO
HARD*
------
******
```

Вряд ли найдется несколько задач, которые были бы более «зубодробительными», чем эта*, не будь у вас под рукой микрокалькулятора. Ясно, что буква S не может быть 2, 3, 4, 7, 8 или 9 (в противном случае буквы S и O были бы неразличимы), а буква I не может быть 0, 1 или совпадать с S. Производя вычисления «на пальцах», легко убедиться, что сочетание букв IS должно означать сочетание цифр 72, 57, 68 или 79. Но дальше нет никаких «путеводных нитей», и большинству людей, если они хотят проверить за разумное время возможные значения букв T и H, приходится обращаться к микрокалькулятору. (Относительно криптарифма мы придерживаемся обычных соглашений. Каждая буква означает только одну цифру, различные буквы соответствуют различным цифрам, звездочки могут означать любые цифры, и ни одно число не может начинаться с нуля.)

Карманные микрокалькуляторы стимулируют интерес и к серьезной и к занимательной математике в самых различных отношениях, которых я коснусь здесь лишь весьма бегло. Если у микрокалькулятора есть клавиша для записи в память и он может хранить частичные суммы сходящегося ряда, то перед тем, как доказывать существование предела, очень полезно угадать, чему же равна сумма ряда. Например, возьмем ряд

$$1/1 + 3/2 + 5/4 + 7/8 + 9/16 + \dots ,$$

в котором числители образуют последовательность

* Недаром этот криптарифм в переводе с английского означаст «это слишком трудно». – *Прим. перев.*

нечетных чисел, а каждый знаменатель вдвое больше предыдущего. Частичная сумма первых 10 членов ряда равна 5,95 ... По-видимому, ряд сходится к 6. Является ли число 6 пределом ряда?

Наберите любое число и, повторно нажимая клавишу извлечения квадратного корня, проследите за тем, как быстро результаты сходятся к 1. Предположим, что после каждого извлечения квадратного корня вы удваиваете результат прежде, чем в очередной раз нажмете на клавишу «квадратный корень». Будет ли в этом случае предел равен 2? Нет, в действительности предел равен 4. Если вместо того, чтобы удваивать результат, вы будете умножать его каждый раз на m, то предел окажется равным m^2. Обобщите это наблюдение: попробуйте (если ваш микрокалькулятор это может) извлекать повторно корень n-й степени, умножая всякий раз результат на m. Можете ли вы написать формулу для предела и доказать, что она правильна? (Этой задачей я обязан Д. Моррану.)

Состязательным играм между двумя или бо́льшим числом участников, использующих микрокалькуляторы, посвящено несколько книг, но лишь в немногих играх микрокалькулятор нужен для каких-либо иных целей, кроме быстрого подсчета соответствующих величин. «Игра с клавиатурой» Л. Ярдро является приятным исключением. Она появилась в январе 1976 г. в специальном выпуске журнала *Creative Computing*, посвященном играм и занимательным задачам.

Игра с клавиатурой начинается с того, что первый игрок набирает какое-нибудь целое положительное число, например 100. Второй игрок нажимает клавишу

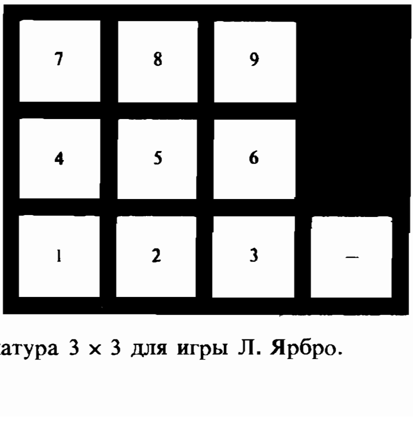


Рис. 133. Клавиатура 3 × 3 для игры Л. Ярбро.

«минус» (вычитание), затем любую клавишу на массиве клавиш 3×3 (рис. 133) и, наконец, клавишу «знак равенства». Игроки делают ход поочередно, вычитая различные однозначные числа (кроме 0). Игра заканчивается, когда кто-нибудь из игроков проигрывает, получив отрицательное число.

Игра была бы тривиальной, если бы не одно условие. При каждом ходе после самого первого вычитания очередной игрок должен нажать клавишу, соседнюю с той, которую перед тем нажал его партнер (соседнюю по вертикали, горизонтали или в диагональных направлениях). Например, если один игрок нажал клавишу 5, то его партнер может вычесть любое однозначное число, кроме 5. Если предыдущий игрок нажал клавишу 4, то следующий игрок может нажать только одну из клавиш 1, 2, 5, 7 и 8. Если была нажата клавиша 3, то затем может быть нажата одна из клавиш 2, 5, 6 и т. д.

Не будь этого условия, первый игрок легко мог бы выиграть, выбирая в качестве исходного числа какое-нибудь число, кратное 10, и вычитая при очередном ходе правую цифру числа, стоящего на индикаторе. Но при дополнительном условии (выборе одной из соседних клавиш) игра становится интересной. Более того, у нее возникает неожиданное решение: оказывается, что второй игрок (который производит первое вычитание) всегда может выиграть, независимо от того, какое исходное число выберет его партнер. Если первый игрок выбирает число больше 15, то второй игрок выигрывает, нажимая либо клавишу 1, либо клавишу 3 (какую именно – безразлично) до тех пор, пока разность не станет равной числу, не превышающему 13, и соблюдая осторожность при последующих ходах. Полную выигрышную стратегию и варианты игры, при которой допускается и число 0, читатель найдет в статье Ярбро, о которой я упоминал выше.

Микрокалькулятор имеет еще одну область применения – в «индустрии развлечений». Это незаменимое техническое устройство для различного рода трюков и фокусов. Большинство из них такого рода, что у зрителей создается впечатление, будто здесь не обошлось без сверхчувствительного восприятия. Вот один из трюков, который особенно нравится детям. Попросите ребенка набрать число 98765432 и разделить его на 8. К своему удивлению ваш помощник увидит на индикаторе результат: 12345679. Все цифры выстроились по порядку, только цифра 8 (наш делитель) куда-то таинственно исчезла!

Попросите вашего малолетнего помощника назвать его любимую цифру. Предположим, что он назовет цифру 4. Вы тотчас же говорите: «Прекрасно! Умножь-ка число, которое ты видишь на индикаторе (12345679), на 36». Ваш помощник будет сильно удивлен, когда увидит на индикаторе 44444444 (или 9 четверок – в зависимости от вместимости индикатора). Число, на которое нужно умножить 12345679, всегда равно произведению числа 9 и названного любимого числа. Математическая основа этого трюка проста: $111111111/9 = 12345679$. Так как $9 \times 12345679 = 111111111$, множитель вида $9n$ (n – любимая цифра) всегда даст число, состоящее из одних лишь цифр n.

Другие «магические числа» получаются при делении чисел, записанных одними лишь единицами, на однозначные числа, отличные от 9 (единицы «наращиваются» до тех пор, пока частное не перестанет иметь дробный остаток). Например, $111111/7 = 15873$. Умножая 15873 на $7n$, где n – цифра, получаем число, состоящее из одних лишь цифр n. Еще один пример: $111111/33 = 3367$. Умножая 3367 на $33n$, получаем число, состоящее из одних лишь цифр n.

Следующий фокус я называю фокусом из 1001 ночи, так как он основан на свойстве числа 1001. Попросите кого-нибудь заказать любое трехзначное число ABC и, повторив его дважды, ввести полученное шестизначное число $ABCABC$ в микрокалькулятор. Пока зритель будет проделывать все это, вы стоите спиной к нему и не видите, какое число он набирает.

Затем вы заявляете: «Внутренний голос говорит мне, что ваше число должно делиться на несчастливое число 13. Проверьте, пожалуйста, так ли это, и сообщите, прав ли я».

Ваш компаньон быстро производит деление. Разумеется, его число делится на 13.

«Странно, – продолжаете вы, – но мой внутренний голос говорит мне, что число, которое вы видите сейчас перед собой на индикаторе микрокалькулятора, должно делиться на счастливое число 11». Ваш партнер снова производит проверку, и снова вы оказываетесь правы.

«А теперь, – заявляете вы, – мне почему-то кажется, что число на индикаторе делится на еще более счастливое число 7». И это ваше предсказание сбывается!

После этого вы просите своего партнера получше присмотреться к числу на индикаторе. Это *ABC* – то самое число, которое он задумал.

Этот фокус «получается» в 100 случаях из 100: умножая любое трехзначное число *ABC* на 1001, вы, конечно же, получаете число *ABCABC*. А так как 1001 разлагается в произведение простых множителей 13, 11 и 7, то, деля последовательно число *ABCABC* на эти 3 числа, вы непременно приходите к исходному числу *ABC*.

Один из самых старых, но по-прежнему один из лучших фокусов с отгадыванием чисел особенно интересен тем, что связан со знаменитой теоремой, которая восходит к книге, написанной по преданию в IV или V в. китайским математиком и поэтом Сун цзу (или Сун цзе). Одна из задач, приведенных в этой книге, состояла в том, чтобы найти наименьшее натуральное (целое положительное) число, которое бы при делении на 3, 5 и 7 давало бы остатки 2, 3 и 2. Сун цзе привел ответ: 23. Кроме того, он дал в стихотворной форме общее правило – «тай йен» (великое обобщение), позволяющее находить решение этой задачи.

Отгадывание любого числа от 1 до 315 по остаткам от деления на 5, 7 и 9 встречается в средневековом трактате по арифметике (1202) Леонардо Фибоначчи, итальянского математика, в честь которого получили свое название числа Фибоначчи. Фокусы с отгадыванием чисел по остаткам от деления были популярны и в средние века и в эпоху Возрождения. Их можно показывать с любыми делителями, лишь бы те были взаимно простыми (не имели общих делителей) и выбранное число было не больше, чем произведение этих делителей. (Подчеркнем, что делители не обязательно должны быть простыми. Например, в качестве делителей можно выбрать числа 3 и 4. При этом загадываемое число не должно превышать 12.) Так как микрокалькулятор позволяет быстро производить вычисления и с более чем однозначными числами, посмотрим, как получается наш фокус с делителями 7, 11 и 13 – нашими счастливыми числами и несчастливым числом. Их произведение равно 1001, поэтому мы спокойно можем просить зрителей задумать любое число от 1 до 1000.

Фокус выглядит особенно эффектно, если никто из зрителей не догадывается, что вы пользуетесь микрокалькулятором. Вручите кому-нибудь из зрителей листок бумаги и карандаш, а сами отойдите в дальний конец комнаты и сядьте там спиной к зрителям. Незаметно достаньте микрокалькулятор из кармана и положите на колено.

Попросите вашего партнера задумать любое число – не больше 1000, разделить его на 7 и сообщить вам остаток от деления. Затем попросите его разделить задуманное число на 11 и 13 и также сообщить вам остатки. Как по остаткам найти задуманное число?

Пусть a, b, c – три остатка. Задуманное число может быть вычислено как остаток после выполнения следующих операций:

$$\frac{715a + 364b + 924c}{1001}.$$

Три коэффициента следует запомнить или выписать на полоске бумаги, наклеив ее на корпус микрокалькулятора. Для вычисления остатка вам надлежит проделать следующие простые действия.

1. Пока ваш партнер делит задуманное им число на 7, введите число 715. Умножьте его на остаток, который назовет ваш партнер. Если у вашего микрокалькулятора нет регистра памяти, то запишите полученное произведение (равно как и два последующих произведения) для дальнейшего сложения. Если у вашего микрокалькулятора есть регистр памяти, то введите полученное произведение в память.

2. Пока ваш партнер делит задуманное им число на 11, введите число 365. Умножьте на него названный партнером остаток и сложите полученное произведение с предыдущим результатом.

3. Наконец, пока ваш партнер делит задуманное число на 13, введите число 924. Умножьте на него названный партнером остаток и прибавьте к предыдущей сумме. Число на индикаторе вашего микрокалькулятора теперь сравнимо с числом, задуманным вашим партнером, по модулю 1001, то есть равно остатку от деления задуманного числа на 1001. Если число на индикаторе меньше 1001, то это число совпадает с задуманным. Если же число на индикаторе микрокалькулятора больше 1001, то его можно свести к задуманному, вычитая из него 1001 до

тех пор, пока число на индикаторе не станет меньше 1001.

Как была выведена формула? Вывод ее лучше всего пояснить на примере, поэтому мы воспользуемся более простым вариантом, принадлежащим Сун цзу. Делители в этом случае равны: $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, поэтому задуманное число должно быть не больше 105.

Коэффициент при a равен наименьшему кратному произведения bc, которое на 1 больше кратного числа a. Для нахождения этого коэффициента существуют определенные правила, но в тех случаях, когда делители невелики, как сейчас, нужный коэффициент легко найти путем прямого перебора. Необходимо просто выписать подряд кратные числа bc (35, 70, 105, ...) и перебирать их одно за другим до тех пор, пока вы не дойдете до кратного, которое при делении на 3 дает остаток 1. Это кратное – число 70.

Аналогичную форму имеют и два остальных коэффициента. Второй коэффициент равен наименьшему кратному числа ac, которое на 1 больше кратного числа b. Этот коэффициент равен 21. Третий коэффициент есть наименьшее кратное числа ab, которое на 1 больше кратного числа c. Этот коэффициент равен 15. Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы написать формулу

$$\frac{70a + 21b + 15c}{105}.$$

В знаменателе стоит число abc. Этот древний вариант фокуса и поныне пользуется популярностью математиков – любителей математических фокусов. Он позволяет задумывать любое число от 1 до 100, а формула достаточно проста, чтобы все необходимые вычисления можно было проделывать «в уме». Что касается вычислений, то их можно упростить еще больше, если заменить $70a$ на $-35a$, так как $-35a \equiv 70a \pmod{105}$. При этом общий итог (сумма) становится меньше, и для достижения окончательного ответа число 105 приходится вычитать из суммы произведений, стоящих в числителе формулы, не так много раз.

Лежащая в основе такого рода фокусов теорема получила название «китайская теорема об остатках» в честь Сун цзу. В общем случае ее можно сформулировать следующим образом. Даны конечное множество взаимно простых натуральных чисел больше 1 (d_1, d_2, ..., d_n) и такой же по величине набор неотрицательных целых чисел (r_1, r_2, ..., r_n), каждое из которых удовлетворяет неравенству $r_i < d_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда существует единственное число по модулю x (x – произведение всех чисел d), такое, что при делении на d_i оно дает остаток r_i при всех i.

Китайская теорема об остатках – одна из наиболее ценных теорем теории сравнений. Она позволяет не только доказывать более глубокие теоремы, но и решать многие практические вопросы. Древние астрономы и астрологи пользовались китайской теоремой об остатках при вычислении солнечного, лунного и планетных циклов. Ойстен Оре в своей «Теории чисел и ее истории» [21.9] приводит несколько примеров применения китайской теоремы об остатках в старинных головоломках и в алгоритме решения задачи, возникающей при сплетении жил в телефонном кабеле. В 1967 г. Э. Берлеками воспользовался китайской теоремой об остатках при разработке быстрого алгоритма компьютерной факторизации многочленов. (Полезные сведения читатель найдет в разделе 4.6.2 «Искусства программирования для ЭВМ» Д. Кнута [21.10]. При доказательстве своей знаменитой теоремы о неразрешимости Гёдель также использовал китайскую теорему об остатках.)

Другая замечательная теорема из теории чисел, восходящая к Фибоначчи, лежит в основе фокуса с предсказанием, придуманного Ф. Майлзом. Напишите на листке бумаги числа 1, 6 и 8 и поверните его чистой стороной вверх, чтобы никто не видел, чтó вы написали. Предложите кому-нибудь из зрителей воспользоваться микрокалькулятором и получить 3 «случайные» цифры с помощью следующего метода. Пусть ваш партнер запишет какое угодно число, а под ним – еще одно любое число. Под этими двумя числами он должен написать их сумму, затем прибавить сумму ко второму числу и записать результат строкой ниже. Такую процедуру (прибавление очередной суммы к предыдущему числу с использованием микрокалькулятора, когда числа станут достаточно большими) следует повторять до тех пор, пока на листе не окажется выписано 20 чисел. Попросите вашего партнера разделить последнее число на предпоследнее (или, если ему так нравится, предпоследнее на последнее) и обратить внимание на первые 3 знака получившейся десятичной дроби. Почти заведомо это будут те самые цифры, которые вы записали на листке бумаги.

Фокус основан на использовании обобщенной последовательности Фибоначчи, которую, сам того не подозревая, генерирует ваш помощник: отношение между ее соседними членами стремится в пределе к золотому сечению 1,61803 ... Неважно, какое именно число делится на какое,–величина, обратная золотому сечению, равна 0,618033 ... Один знакомый мне фокусник любит показывать этот фокус, раскладывая на столе вверх рубашкой 4 игральные карты. Перевернув шестерку, туза и восьмерку, он с озабоченным видом принимается что-то искать: ему явно недостает пустой («нулевой») карты, которая не входит в обычную колоду. Затем он переворачивает четвертую карту, и она оказывается пустой! Если же четвертая цифра оказывается отличной от нуля, то он говорит зрителям: «Видите, мне не везет».

Ни одну статью об играх с микрокалькулятором нельзя считать полной, если в ней хотя бы бегло не упоминается о многочисленных трюках, основанных на том, что многие цифры на индикаторе, если их рассматривать в перевернутом виде, своими очертаниями напоминают буквы. Такого рода шутки были впервые опубликованы в журналах для фокусников, но обрели известность только после статьи в журнале *Time* (June 24, 1974, p. 56–58). Трюк состоит в том, что задается вопрос, затем производятся вычисления, и окончательный результат, если повернуть микрокалькулятор на 180°, читается на индикаторе как словесный ответ.

Один из первых перевертышей такого рода был связан с вопросами относительно непрекращающихся стычек и конфликтов между арабами и израильтянами. После ввода соответствующих данных в микрокалькулятор на индикаторе проявлялось число 71077345. Перевернув его «вверх тормашками», вы могли прочитать название нефтяной компании SHELLOIL. Кнут предложил наиболее интересный с точки зрения математика вариант того же сюжета: 337 арабов и 337 израильтян сражаются за территорию, имеющую форму квадрата со стороной 8424 м. Естественно, мы должны просуммировать квадраты чисел 337 и 8424. Существует ли другое представление числа 71077345 в виде суммы двух квадратов? Оказывается существует: $5324^2 + 6537^2$. Опубликовано несколько книг, посвященных исключительно такими головоломками.

Мои собственные достижения в этой области публиковались только в журналах для фокусников. Что общего между Конгрессом и исполнительницами танца живота? Умножьте простое число 2417 на число месяцев в году, разделите на число букв в слове «конгресс» и умножьте на число букв в словах George Washington. Затем поверните микрокалькулятор на 180° и прочитайте ответ. Для большей точности прибавьте к числу на индикаторе 1,0956, а затем вычтите 0,1776.

Число 1776 – не только дата провозглашения независимости США, оно обладает еще и следующим любопытным свойством. Выберите любую цифру N. Нажав 3 раза подряд клавишу N, наберите трехзначное число NNN. Умножьте его на 16 и разделите на N. У вас всегда получится 1776.

ОТВЕТЫ

Решение криптарифма имеет вид

$$\begin{array}{r} 4379 \\ \times \quad 79 \\ \hline 39411 \\ +\ 30653 \\ \hline 345941 \end{array}$$

Задача заимствована из книги Дж. Мадахи «Математика на каникулах» [21.11].

Другие задачи имеют следующие решения.

Доказать, что сумма ряда

$$1/1 + 3/2 + 5/4 + 7/8 + \ldots$$

равна 6. Разделив каждый член ряда на 2, получим

$$2/2 + 3/4 + 5/8 + 7/16 + \ldots$$

Вычтем полученный ряд из исходного:

$$\begin{array}{r} {}^{1}/_{1} + {}^{3}/_{2} + {}^{5}/_{4} + {}^{7}/_{8} + {}^{9}/_{16} + \ldots \\ - \qquad {}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{4} + {}^{5}/_{8} + {}^{7}/_{16} + \ldots \\ \hline 1 + 1 + {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} + \ldots \end{array}$$

Сумма геометрической прогрессии $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + + ...$ равна 2, поэтому разность рядов равна 3. Так как эта разность равна половине исходного ряда, его сумма равна 6.

Если взять любое натуральное число и начать извлекать из него корень n-й степени и умножать каждый раз на m, то предел L окажется равным

$$m^{n/(n-1)}.$$

Д. Морран доказывает это следующим образом. Предположим, что величина $mL^{1/n}$ стремится к отличному от нуля пределу L. В пределе $mL^{1/n} = L$, или $m^n L = L^n$, откуда $L^n - m^n L = 0$, $L(L^{n-1} - m^n) = 0$, $L = m^{n/(n-1)}$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Уже после того, как появился журнальный вариант этой главы, любители математических фокусов изобрели сотни новых трюков, игр и фокусов, использующих микрокалькулятор, а также более сложные фокусы, требующие для своего осуществления компьютерных программ. Я хочу привести один такой фокус, доступный каждому. Изобрел его К. Фульвес.

Повернитесь к зрителям спиной и попросите кого-нибудь из них выбрать строку, столбец, главную или побочную диагональ в квадрате на клавиатуре микрокалькулятора, образованном 9 клавишами с цифрами. Попросите зрителя ввести 3 набранные им цифры в микрокалькулятор. Затем попросите его выбрать другую строку, столбец или любую из диагоналей в том же квадрате. Пусть он умножит число на индикаторе на трехзначное число, составленное из вновь выбранных цифр, взятых снова в любом порядке.

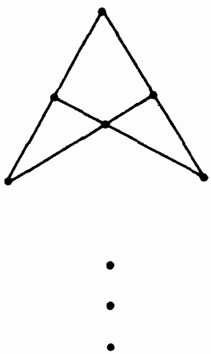
Стоя по-прежнему спиной к зрителю, попросите вашего помощника выбрать любую отличную от нуля цифру в произведении и назвать вам (в любом порядке) остальные цифры. В ответ вы называете ему выбранную им цифру.

Этот фокус основан на том, что 3 однозначных числа, стоящих в любой строке, любом столбце или на любой из двух диагоналей в сумме дают число, кратное 3. При любой перестановке этих чисел их сумма остается неизменной. Следовательно, любое трехзначное число, составленное из выбранных цифр, заведомо кратно 3.

Произведение двух таких чисел кратно 9, сумма цифр в таком произведении также кратна 9 и останется кратной 9 при любой перестановке цифр.

Когда зритель называет цифры, вы складываете их, «отбрасывая девятки», когда сумма превышает 9. Делается это так. Как только сумма становится больше 9, вы складываете ее цифры и получаете однозначное число. После того как зритель назовет последнюю цифру, вы вычитаете полученную сумму из 9. Полученная разность равна выбранной зрителем цифре, если только она отлична от нуля. Если разность равна 0, то зритель выбрал цифру 9.

Если вам необходимо проверить фокус, то Фульвес предлагает следующую вариацию. Попросите зрителя вместо того, чтобы вычеркивать цифру, задумать любую цифру (кроме 0) и добавить ее к числу на индикаторе. Пусть затем зритель назовет вам в любом порядке цифры получившейся суммы, а вы назовете, какую цифру он задумал.



ГЛАВА 22

ЗАДАЧИ О ПОСАДКЕ ДЕРЕВЬЕВ

> Я не прошу тебя о многом,
> Лишь помоги разбить мне сад:
> Девять деревьев в шесть рядов,
> Чтоб было по три древа в ряд.
>
> *Джон Джексон*

На оборотной стороне бумажного доллара изображен орел на Государственной печати Соединенных Штатов, над ним 13 пятиконечных звезд (символов 13 Штатов,

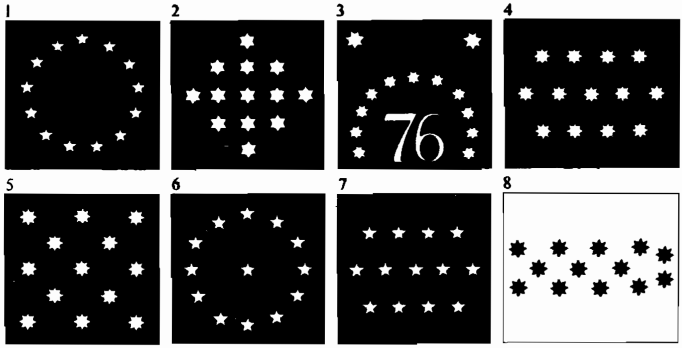


Рис. 134. Варианты расположения 13 звезд на первых флагах Соединенных Штатов Америки.

первоначально входивших в состав федерации), образующих шестиконечную звезду. Этот рисунок показывает, что 13 – первое нетривиальное (большее 1) фигурное число такого типа, который известен под названием звездных чисел (см. гл. 2).

Разумеется, расположить 13 точек на плоскости в соответствии с требованиями симметрии, эстетическими соображениями или запросами занимательной математики можно многими другими способами. Нас пока будут интересовать две далеко не тривиальные нерешенные задачи, связанные с расположением 13 точек на плоскости. Но прежде чем мы перейдем к ним, посмотрим, как колонисты располагали 13 ярких звезд на своих самых первых флагах.

Согласно распространенной легенде, первый флаг со звездами и полосами был вышит Бетси Росс по эскизу Джорджа Вашингтона. Рассказывают, будто свою работу Бетси передала Вашингтону и еще нескольким деятелям в мае или июле 1776 г. в доме, расположенном где-то на Арч-стрит в Филадельфии. Шаблон для звезд Бетси Росс изготовила, сложив лист бумаги и вырезав одним взмахом ножниц правильную пятиконечную звезду. Тринадцать звезд, как гласит легенда, были расположены на синем поле по кругу, символизируя рыцарей Круглого стола короля Артура. Это был первый флаг из числа изображенных на рис. 134. В 1976 г., когда отмечалось двухсотлетие провозглашения независимости Соединенных Штатов, этот флаг был изображен на почтовой марке достоинством в 13 центов. Его же можно видеть на знаменитых картинах «Вашингтон форсирует реку Делавар» Арчибальда М. Уилларда, «Дух 1776 г.» и картинах Генри Мослера, воспроизведенных во многих американских школьных учебниках.

Увы, эта легенда ныне полностью дискредитирована. Ее единственным источником был внук Бетси Росс, который, по его словам, слышал легенду, когда ему было 11 лет. Ни одного флага с 13 звездами, расположенными по кругу, не сохранилось, и нет никаких оснований предполагать, что такой флаг существовал во времена войны за независимость. Многие историки сомневаются в том, что флаги со звездами и полосами вообще развевались над американцами, сражавшимися за свою независимость.

Звезды на флаге *2* (рис. 134) расположены по эскизу Дж. Халберта, капитана роты из Лонг Айленда (1775). Никаких данных о том, что такой флаг существовал, не имеется. Никому не известно, кто первым предложил американский флаг со звездами и полосами. Историки не располагают надежными данными о первых флагах.

Мы достоверно знаем, что 14 июня 1777 г. Второй континентальный конгресс принял резолюцию, согласно которой «флаг Соединенных Штатов состоит из тринадцати полос красных и белых, которые чередуются; союз символизируют тринадцать звезд, белых на синем фоне, представляющих новое созвездие». В резолюции ничего не говорится ни о числе лучей у звезд, ни о расположении звезд, ни о том, полос какого цвета должно быть (на 1) больше, чем другого. Именно поэтому с 1777 по 1795 г. государственный флаг Соединенных Штатов существовал в многочисленных и самых причудливых вариациях. Некоторые флаги в нарушение резолюции Конгресса имели красные и синие или белые и синие полосы, а также синие звезды на белом поле.

Звезды были пяти-, шести-, семи- или восьмиконечные, и расположение их также варьировалось в широких пределах. В качестве иллюстрации можно привести хотя бы флаг вооруженного формирования (милиции) города Беннингтона (1776) (флаг *3* на рис. 134). Флаги *4* и *5* встречаются на рисунках одного голландского художника по флагам; возможно, эти флаги были подняты в 1779 г. на некоторых кораблях Дж. Джонсом. На пятом флаге поле вытянуто по горизонтали. Такая геометрия часто встречалась среди флагов в 1777–1795 гг. (Обратите

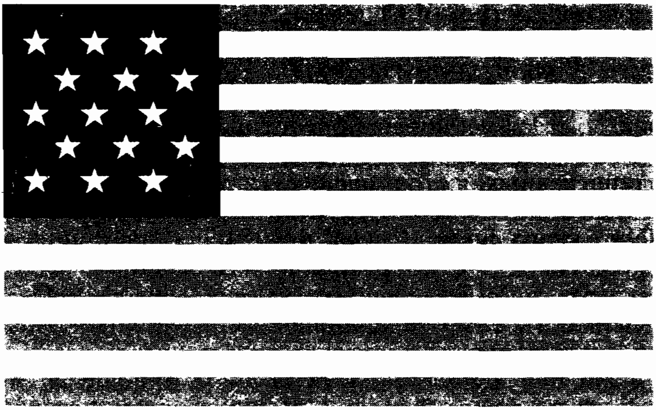


Рис. 135. Флаг 1794 г. с 15 полосами и 15 звездами.

внимание на то, что на втором флаге квадрат из звезд повернут на 45°.) Флаг *6*, по-видимому, принадлежал Мэрилендскому полку, флаг *7* некогда развевался над Бостоном (оба флага относятся к 1781 г.). Флаг *8*, по-видимому, осенял в 1781 г. милицию Северной Каролины.

В 1794 г. после того, как Вермонт и Кентукки стали штатами, Конгресс решил добавить 2 новые звезды и 2 новые полосы, расположив звезды так, как показано на рис. 135. По мнению одного конгрессмена, изменение флага было «пустяком, который не должен привлекать внимание Конгресса». Другой конгрессмен назвал проект нового флага «вопиющим образчиком фривольности». Но, как бы то ни было, билль о флаге был утвержден, и в следующем году флаг стал официальным символом Соединенных Штатов. Именно такой флаг мог развеваться над фортом Мак-Генри во время войны 1812 г., и именно это обстоятельство побудило Фрэнсиса Скотта Кея на создание стихотворения «Знамя, усеянное звездами».

В 1817 г., после того как к союзу присоединились еще 5 штатов, Конгресс принял решение вернуться к 13 полосам и добавлять по 1 звезде всякий раз, когда в состав Соединенных Штатов будет приниматься новый штат. Флаг с 20 звездами в прямоугольнике 4 × 5 был провозглашен официальным флагом в 1818 г. С тех пор по 1913 г. флаг Соединенных Штатов подвергался изменениям 24 раза (каждое изменение было связано с добавлением новой звезды). Звезды обычно были пятиконечными и располагались рядами в шахматном порядке, но встречались и многие другие конфигурации, в том числе и звезды, выстроенные в форме звезд с различным числом лучей. В 1913 г. после присоединения Нью-Мексико и Аризоны флаг на протяжении последующих 46 лет не претерпел никаких изменений, его 48 звезд были расположены на поле 7×7, нечетные ряды примыкали к левому краю поля. Когда в 1959 г. Гаваи приобрели статус штата, это потребовало изменений, и флаг приобрел тот вид, который он имеет сейчас: звезды расположены в шахматном порядке чередующимися рядами по 6 и 5 звезд.

С расположением n точек на каком-нибудь поле связаны множество задач, в том числе и занимательных. Самые старые и наиболее популярные из них известны как задачи о посадке деревьев. Такое название связано с тем, что в старинных книгах по занимательной математике эти задачи излагались вместе с историей о фермере, который хотел посадить в своем саду определенное число (n) деревьев так, чтобы те выстроились в r рядов по k деревьев в каждом ряду. Трудность задач заключалась в том, что число рядов должно было быть по возможности больше. Как ни удивительно, но общая задача об определении наибольшего числа рядов при заданных n и k весьма далека от своего решения даже при $k = 3$ или $k = 4$.

«Эти задачи о посадке деревьев, – писал Г. Дьюдени [22.8], – всегда доставляли множество хлопот. Они являются головоломками в подлинном смысле слова, ибо никому еще не удавалось найти прямой и надежный способ решения этих задач. Они требуют проницательности, остроумия и терпения, а иногда и немного того, что принято называть удачей. Возможно, когда-нибудь какой-то гений откроет ключ ко всей загадке».

При $k = 2$ задача тривиальна: если n точек расположены на плоскости так, что никакие 3 из них не лежат на прямой, то любая пара точек образуют ряд из 2 точек. При $k = 3$ задача не только становится нетривиальной, но и оказывается связанной с такими важными математическими понятиями, как сбалансированные блочные планы, тройки Киркмана – Штейнера, конечные геометрии, эллиптические функции Вейерштрасса, кубические кривые, проективные плоскости, коды с исправлением ошибок и многими другими. Последней из значительных работ на эту тему была статья «Задача о саде» С. Берра, Б. Прюнбаума и Н. Слоуна [22.4]. То, о чем я расскажу в этой главе, во многом заимствовано.

Первое нетривиальное упоминание о задачах, связанных с посадкой деревьев, мы находим в старинной (1821) книге Джона Джексона «Рациональные развлечения в зимние вечера» [22.9]. По свидетельству Дьюдени, бывшего обладателем этой книги, в ней было приведено 10 задач о посадке деревьев. Математик Дж. Дж. Сильвестр работал над общей задачей с конца 60-х годов XIX в. до самой своей смерти, последовавшей в 1897 г. У темпераментного Сильвестра была весьма бурная карьера. Он отказался от степени в Кембридже из-за того, что исповедовал иудаизм, но получил ученую степень в Тринити колледже (колледже Св. Троицы) Дублинского университета. В течение 13 месяцев был профессором Вирджинского университета, пока ссора с одним студентом не вынудила его подать в отставку. В университете Джона Гопкинса Сильвестр основал *American Journal of Mathematics*. Одна из его книг называется «Законы стихосложения» (он очень любил поэзию). На протяжении многих лет в Англии Сильвестр работал стряпчим.

Максимальные решения для деревьев, посаженных по 3 в ряд, для n (числа деревьев) от 3 до 11 показаны на рис. 136. Обратите внимание на то, что вплоть до $n = 9$ максимальное число рядов превышает n. Нетрудно построить 8 рядов с 9 точками (для этого достаточно расположить точки в квадрат 3×3), но добавить еще 2 ряда несравненно труднее. В своей книге Джексон привел эту задачу вместе с четверостишием, которое я выбрал эпиграфом к этой главе. Решение, основанное на знаменитой теореме проективной геометрии, известной под названием теоремы Паппа, ныне молва приписывает Исааку Ньютону.

Задачу с 11 точками Дьюдени (задача 213 его книги [22.8]) приводит как «военную головоломку». В своей лекции о задачах, связанных с посадкой деревьев, Слоун упростил фабулу Дьюдени, перенеся действие во времена первой мировой войны: 11 турок окружены 16 русскими, каждый русский солдат делает 1 выстрел, и его пуля убивает навылет 3 турок. Сколько было турок? Замечательное решение этой задачи (11 точек, расположенных в

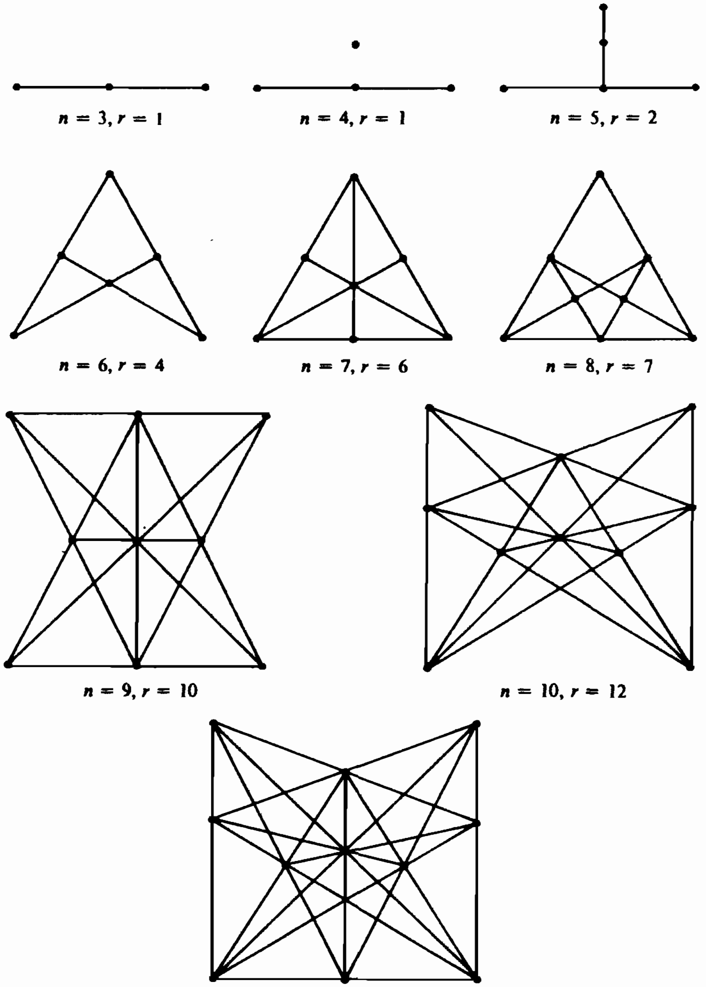


Рис. 136. Некоторые решения задачи «по 3 в ряд».

16 рядов по 3 точки в каждом), по словам Дьюдени, было построено около 1897 г. преподобным Уилкинсом. (Может быть, кому-нибудь из читателей известны какие-то подробности об этом человеке?) Слоун сообщил мне, что, по его сведениям, это единственное практическое применение «задачи о саде», хотя сам некогда изобрел

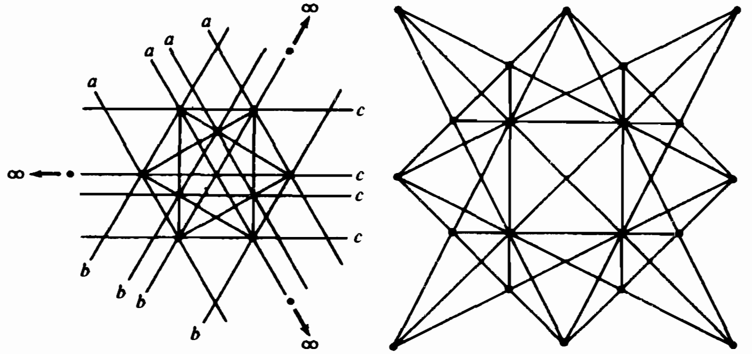


Рис. 137. Двенадцать точек, расположенные в 19 рядов по 3 в ряд (слева), и предложенное Сэмом Лойдом решение задачи «по 4 в ряд».

«остановочный триод со свистком» на n булавках, которые по каким-то необъяснимым причинам было необходимо располагать по 3 в ряд.

Двенадцать точек можно выстроить в 19 рядов. Этот результат впервые был анонсирован Р. Макмилланом в 1946 г. [22.1]. Максимальность полученного Макмилланом решения была доказана в статье Бьерра-Грюнбаума-Слоуна [22.4]. На рис. 137, слева, конфигурация изображена в симметричном виде (точки расположены по 3 в ряд, а одна точка удалена в бесконечность). Такая конфигурация, если ее спроектировать, порождает стандартное решение, но это трудно показать на небольшом листе бумаги. Представьте себе, что вы разглядываете конфигурацию в перспективе одним глазом, расположенным ниже и справа от нее. Каждое из 3 семейств 4 параллельных линий (обозначенных буквами a, b и c) сходятся в 3 точках, лежащих на горизонте и образующих девятнадцатый ряд.

Решение известно только для еще одного случая «по 3 точки в ряд» – при $n = 16$. Берр, Грюнбаум и Слоун доказали, что максимальное число рядов равно 37. Таким образом, наименьшее число точек, для которого задача остается нерешенной, – это $n = 13$. Наиболее известный результат с 22 рядами показан на рис. 138. Одна из точек бесконечно удаленная. Если конфигурацию рассматривать в перспективе слева, то 6 параллельных горизонтальных линий по 2 точки на каждой сойдутся в 13-й точке. Иначе говоря, конфигурацию можно спроектировать на стандартное решение, но показать это можно

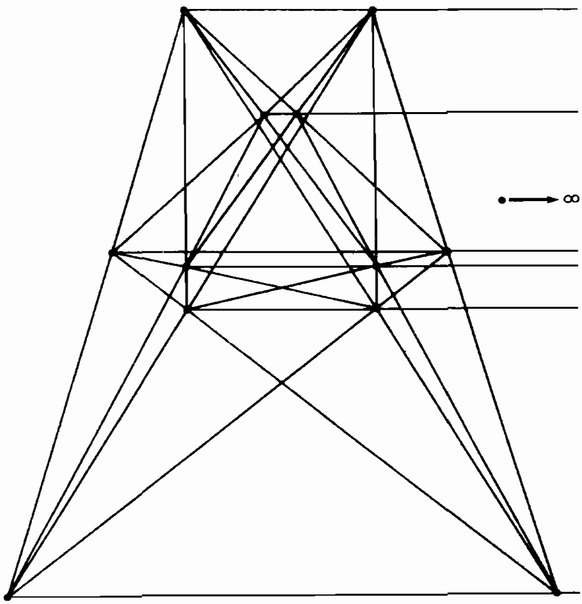


Рис. 138. Тринадцать точек (1 точка бесконечно удаленная), расположенные по 3 в ряд.

только на очень большом листе бумаги. Наиболее известные результаты при n от 14 до 20 содержат 26, 31, 37, 40, 46, 52 и 57 рядов.

Когда число точек в каждом ряду возрастает до 4, задача становится более трудной. При $k = 3$ максимальные решения были найдены до $n = 12$, а $n = 13$ остается пока наименьшим числом точек, для которого решение неизвестно. Примеры наилучших конфигураций при n от 4 до 12 представлены на рис. 139. Эти решения заимствованы из доклада Грюнбаума «Новые взгляды на некоторые старые вопросы комбинаторной геометрии» [22.5], прочитанном на Международном коллоквиуме по комбинаторным теориям, состоявшемся в Риме в 1973 г. Наилучшие решения при n от 13 до 20 содержат 9, 10, 12, 15, 18, 19 и 21 ряд.

В случае $n = 10$ существует много топологически различных решений (см. гл. 2 моей книги [22.10]), что позволило Дьюдени и его американскому сопернику Сэму Лойду придумать более 10 задач-головоломок. При

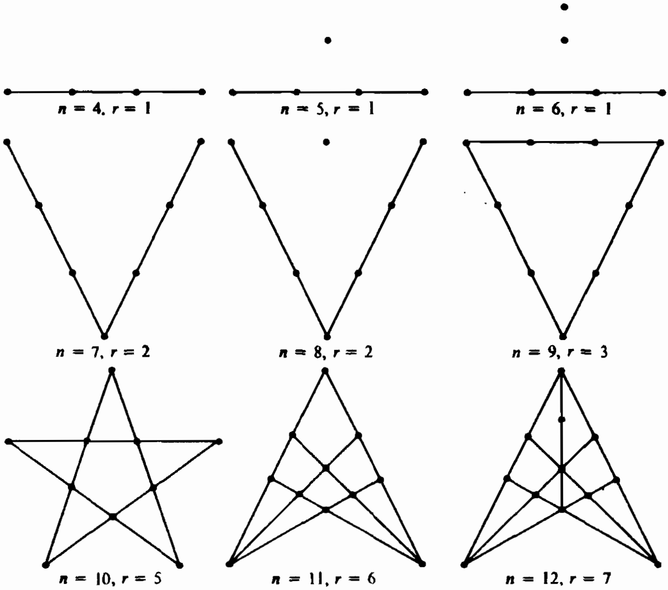


Рис. 139. Несколько решений задачи «по 4 в ряд».

$n = 16$ наилучший результат (15 рядов) представляет изящную конфигурацию из 3 вложенных друг в друга пятиугольников, построенных вокруг центральной точки (рис. 140). В [22.11], где расположениям точек посвящена задача 21, Дьюдени признается, что не может доказать максимальность решения с 15 рядами, но «уповает, что это действительно так». Вызывает удивление, что никому не удалось получить решение с 17 рядами, которое

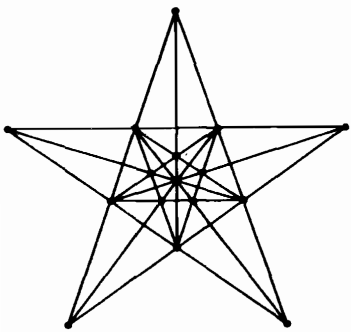


Рис. 140. «Цветок Дьюдени»: 16 точек, расположенных в 15 рядов.

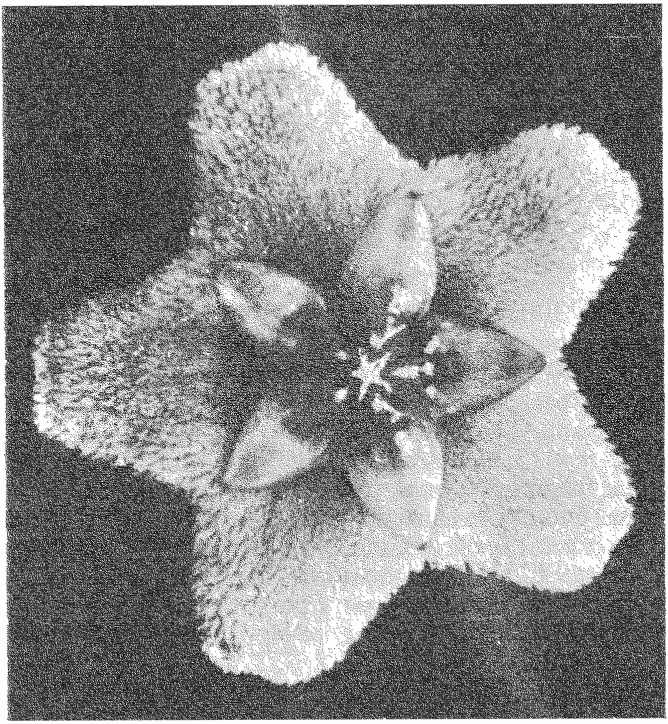


Рис. 141. Узор из точек на цветке ваточника (*Hoya carnosa*).

отличалось бы от «пятиугольников» с добавленной семнадцатой точкой, выпадающей из общей схемы.

Симметрия с осью 5-го порядка просматривается и на фотографии цветка *Hoya carnosa* из семейства ваточников. Продолжим мысленно стороны наружных лепестков до вершин (рис. 141). Три самых больших семейства вершин с симметрией 5-го порядка с центром цветка порождают конфигурацию из 15 рядов по 4 точки в каждом ряду. Это – наиболее известное решение для 20 точек.

Число рядов по 4 точки начинает превышать число точек при $n = 21$ (специалисты полагают, что максимальное число рядов равно 23), но при числе точек n, равном 18, 19 или 20, возможны решения с числом рядов, равным n. На рис. 142 показано решение Грюнбаума с 19 рядами для 19 точек. Решение при $n = 20$ с 18 рядами было дано Сэмом Лойдом (рис. 137, справа). Году в 1945-м Мак-

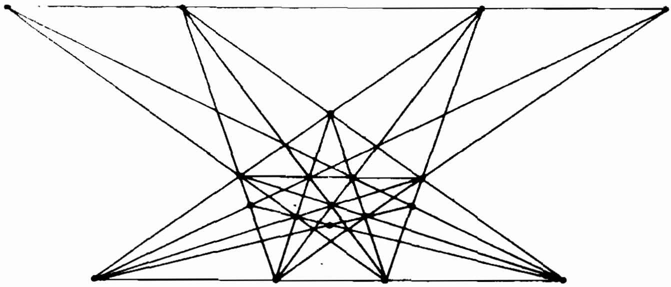


Рис. 142. Девятнадцать точек, расположенные в 19 рядов по 4.

миллан нашел простое симметричное решение с 20 рядами для 20 точек. Впоследствии оно было переоткрыто Грюнбаумом, которому не были известны результаты Макмиллана. Можете ли вы найти это решение?

При $n = 13$ никому не удавалось получить решение, которое было бы лучше решения с 9 рядами, изображенного на рис. 143. Оно принадлежит Дьюдени, который приводит его в ответе к задаче 149 в своей книге [22.12].

О рядах с 5 и бóльшим числом точек опубликовано очень мало. По сведениям Грюнбаума, наилучшие результаты при $k = 5$ и числе точек n от 5 до 20 соответственно равны 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 6, 7, 9, 10 и 11. Я не знаю, для каких из этих результатов доказана их максимальность. Известна конфигурация из 35 симметрично расположенных точек, образующих 35 рядов по 5 точек в каждом. Грюнбаум высказывает предположение, что не существует меньшего примера, в котором число рядов по 5 точек превышало бы число точек. Мне неизвестны работы, где задача о посадке деревьев обобщалась бы на пространство размерности 3 и выше.

Берр, Грюнбаум и Слоун предположили, что за исключением значений n (7, 11, 16 и 19) формула для максимального числа рядов по 3 точки при общем числе точек, равном n, имеет вид

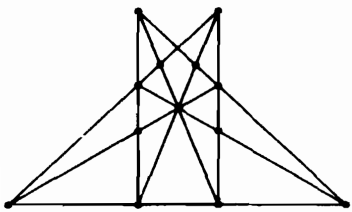


Рис. 143. Тринадцать точек, расположенные в 9 рядов по 4.

$$1 + \left[\frac{n(n-3)}{6}\right].$$

Квадратные скобки означают целую часть, то есть округление до ближайшего целого числа. Если эта гипотеза верна, то 13 звезд можно было бы расположить не более чем в 22 ряда. Что же касается рядов, содержащих более трех точек, то для них даже нет хорошей гипотезы.

ОТВЕТЫ

На рис. 144 показано, как расположить 20 точек в 20 рядов по 4 точки в каждом. Заметим, что лепестки цветка ваточника располагались почти по такой же схеме. К сожалению, маленький пятиугольник в центре цветка почти не виден из-за своих размеров.

ДОПОЛНЕНИЕ

Самым большим сюрпризом для меня стали два письма, авторы которых предлагали исправить конфигурацию на рис. 144. Т. ван Теселинг и Д. Макклин сумели улучшить результат, построив решения с 21 рядом! Ре-

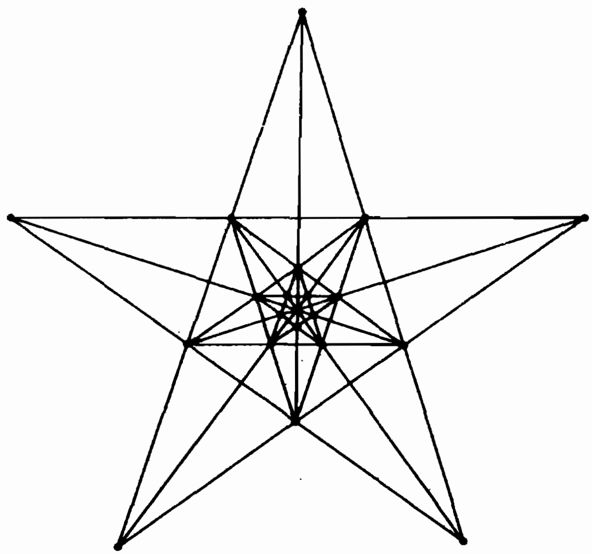


Рис. 144. Двадцать точек, расположенные в 20 рядов.

шение Теселинга, чтобы его можно было уместить на странице, требует 3 бесконечно удаленных точек. Решение Макклина – не требует.

Опубликованные мной конфигурации обладают осевой (билатеральной) симметрией. Л. Лопов первым заметил, что конфигурации Макклина можно придать асимметрию, сдвинув одну точку. Лопов обнаружил второе решение, более компактное и также симметричное. Оно приведено на рис. 145. Доказательства того, что решение с 21 рядом максимально, не существует.

Интересную задачу поставил Т. Уилкокс из Англии: найти наименьшую прямоугольую шахматную доску, на которой решение задачи о деревьях можно промоделировать, расставив пешки. Например, доска 7 × 7 – наименьшая, на которой 10 пешек можно расставить в 5 рядов по 4 пешки в каждом. Эта задача была опубликована (вместе с решением) в *Games* (July 1982).

Конфигурации решений часто используются при решении комбинаторных задач о турнирах и комитетах. Нельзя не упомянуть еще о двух областях, где находят применение решения задач о деревьях, высаженных в ряд.

Можно ли расставить последовательные целые числа, начиная с 1, по вершинам заданной конфигурации так, чтобы сумма чисел по всем рядам была постоянной? Если можно,то найдите все решения. Если нельзя, то докажите, что решение не существует.

Можно ли придумать интересные игры типа игры в крестики-нолики, в которых 2 игрока ставили бы поочередно фишки на точки конфигурации и выигрывал бы тот, кто первым выстроил бы свои фишки в ряд, а проигрывал бы тот, кто был бы вынужден первым достраивать чужой ряд? Т. Берн, по-видимому, первым начал исследовать игры такого типа [22.2].

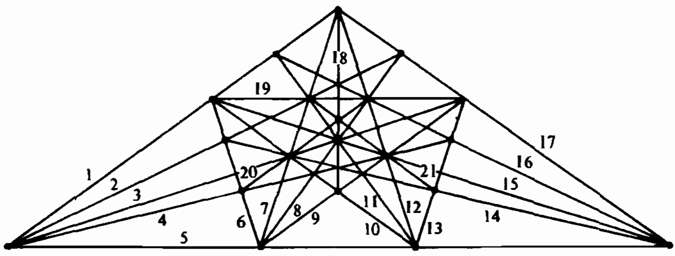


Рис. 145. Двадцать точек, расположенные в 21 ряд.

ЛИТЕРАТУРА

Глава 1

1. Travelers in Time. Philip Van Doren Stern, ed. – Doubleday, 1947.
2. Science Fiction Adventures in Dimension. Groff Conklin, ed. – Vanguard, 1953.
3. Putnam H. It Ain't Necessary So. – *The Journal of Philosophy*, October 25, 1962, **59**, 658–671; перепечатано в книге; Putnam H. Philosophical Papers, Vol. I – Cambridge University Press, 1975.
4. Smart J. J. C. Is Time Travel Possible? – *The Journal of Philosophy*, 1963, **60**, 237–241.
5. Priestly J. B. Time and Fiction in Drama. – In: Man and Time. – Doubleday, 1964.
6. Graves J. C., Roper J. E. Measuring Measuring Rods. – *Philosophy of Science*, January 1965, **32**, 39–56.
7. Earman J. On Going Backward in Time. – *Philosophy of Science*, September 1967, **34**, 211–222.
8. Feinberg G. Particles That Go Faster Than Light. – *Scientific American*, February 1970, 69–77.
9. Benford G. A., Bock D. L., Newcomb W. A. The Tachyonic Antitelephone. – *Physical Review D2*, July 15, 1970, 263–265.
10. Marder L. Time and the Space-Traveler. – Allen and Unwin, 1971.
11. Schulman L. S. Tachyon Paradoxes. – *American Journal of Physics*, May 1971, **39**, 481–484.
12. DeWitt B. S., Graham N., ed. The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics. – Princeton University Press, 1973.
13. Tipler F. J. Rotating Cylinders and the Possibility of Global Causality Violation. – *Physical Review D9*, April 15, 1974, 2203–2206.
14. Lewis D. The Paradoxes of Time Travel. – *American Philosophical Quaterly*, 1976, **13**, 145–152.
15. "Time and the Nth Dimension", "Lost and Parallel Worlds". – In: The Visual Encyclopedia of Science Fiction. Brian Ash, ed. – Harmony, 1977.
16. "Time Travel", "Time Paradoxes", "Alternate Worlds", "Parallel Worlds". – In: The Science Fiction Encyclopedia. Peter Nicholls, ed. – Doubleday, 1979.
17. "Time Travel and Other Universes". – In: The Science in Science Fiction, Chapter 5. Peter Nicholls, ed. – Knopf, 1983.

Глава 2

1. Whitford E. E. The Pell Equation. – Columbia University Press, 1912.
2. Beiler A. H. Recreations in the Theory of Numbers. – Dover, 1964.
3. Mordell L. J. Diophantine Equations. – Academic Press, 1969, p. 271.
4. Sloane N. J. A. A Handbook of Integer Sequences. – Academic Press, 1973.
5. "Diophantine Analysis and Fermat's Last Theorem". – In: Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements. – W. H. Freeman and Company, 1983.
6. Hindin H. J. Stars, Hexes, Triangular Numbers, and Pythagorean Triples. – *Journal of Recreational Mathematics*, 1983–1984, **16**, 191–193.
7. Whitcombe A. Figurate Numbers: The Other Alternative. – *Mathematics in School*, September 1986, 40–42. Центральные фигурные числа автор рассматривает как альтернативу вершинным фигурным числам.

8. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. - М.: Мир, 1971.

Главы 3 и 4

1. "Professor Hoffman" (псевдоним Анжело Джона Льюиса). Puzzles Old and New. – F. Warne, 1893.
2. Dudeney H. E. Amusements in Mathematics. – Nelson, 1917.
3. Hartswick F. G. The Tangram Book. – Simon and Schuster, 1925.
4. Fu Tsiang Wang, Chuan Chih Hsiung. A Theorem on the Tangram. – *American Mathematical Monthly*, November 1942, **49**, 596 - 599.
5. Van Gulik R. The Chinese Nail Murders. – Harper and Row, 1961.
6. Read R. C. Tangrams: 330 Puzzles. – Dover, 1965.
7. Bell R. C. Tangram Teasers. – Newcastle-upon-Tyne, 1965.
8. Van Note P. Tangrams. – Charles E. Tuttle, 1966.
9. Dudeney H. E. 536 Puzzles and Curious Problems. – Scribner's, 1967.
10. Loyd S. The Eighth Book of Tan. – Dover, 1968. (Reprint of 1903 edition.)
11. Lindgren H. Tangrams. – *Journal of Recreational Mathematics*, July 1968, **1**, 184 - 192.
12. Seymour D. Tangramath. – Creative Publications, 1971.
13. Cameron W. A Tangram Tale. – Brockhampton Press, 1972.
14. Deutsch E. S., Hayes K. C., Jr. A Heuristic Solution to the Tangram Puzzle. – In: Machine Intellegence 7. Bernard Meltzer and Donald Michie, eds. – Wiley, 1972.
15. Johnson S. The Fun with Tangram Kit. – Dover, 1977.
16. Van Delft P., Boltermans J. Creative Puzzles of the World. – Adrams, 1978.
17. Elffers J., Schuyt M. Tangrams. – Abrams, 1979.
18. Slocum J., Boltermans J. Puzzles Old and New. – Plenary, 1986.

Глава 5

Парадоксы нетранзитивности голосования и турниров

1. Arrow K. J. Social Choice and Individual Values. – Wiley, 1951.
2. Luce D. R., Raiffa H. Games and Decision. – Wiley, 1957.
3. Black D. The Theory of Committees and Elections. – Cambridge University Press, 1958.
4. Riker W. H. Voting and the Summation of Preferences: An Interpretive Bibliographical Review of Selected Developments During the Last Decade. – *The American Political Science Review*, December 1961, **55**.
5. Moon J. W. Topics on Tournaments. – Holt, Rinehart and Winston, 1968.
6. Farquharson R. Theory of Voting. – Yale University Press, 1969.
7. Brams S. J. Paradoxes in Politics. – Free Press, 1976.
8. MacKay A. F. Arrow's Theorem: The Paradox of Social Choice. – Yale University Press, 1980.

Нетранзитивные пари о бросании игральных костей и рулетке

9. Tenney R. L., Foster C. C. Nontransitive Dominance. – *Mathematics Magazine*, May 1976, **49**, 115 – 120.
10. Frauenthal J. C., Miller A. B. A Coin Tossing Game. – *Mathematics Magazine*, September 1980, **53**, 239 – 243.
11. Gardner M. Lucifer at Las Vegas. Problem 27 in: Science Fiction Puzzle Tales. – Clarkson Potter, 1981.
12. "Nontransitive Dice and Other Probability Problems". Chapter 5 in: Gardner M. Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements. – W. H. Freeman and Company, 1983.
13. Honsberger R. Sheep Fleecing with Walter Funkenbusch. – In: Mathematical Gems III. – Mathematical Association of America, 1985.

Алгоритм Конуэя

14. Guibas L. J., Odlyzko. String Overlaps, Pattern Matching, and Nontransitive Games. – *Journal of Combinatorial Theory*, March 1981, **30**, 183–208.
15. Collings S. Coin Sequence Probabilities and Paradoxes. – *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*. November/December 1982, 227–232.

Другие приложения

16. Ulam S. Adventures of a Mathematician. – Scribner, 1976.
17. McCulloch W. S. A Hierarchy of Values Determined by Topology of Nervous Nets. – *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1945, 7, p. 89–93.

Глава 6

Задача о мотеле

1. Trotter H. F. Algorithm 115. – *Communications of the ACM*, 1962, **5**, p. 434–435.
2. Johnson S. M. Generation of Permutations by Adjacent Trasposition. – *Mathematics of Computation*, July 1963, **17**, p. 282–285.
3. Steinhaus H. One Hundred Problems in Elementary Mathematics. – Basic, 1964. Имеется перевод: Штейнгауз Г. Сто задач. – М.: 1959.
4. Lehmer D. H. Permutation by Adjacent Interchanges. – *The American Mathematical Monthly*, February 1965, **72**, p. 36–46.
5. Hu T. C., Tien B. N. Generating Permutations with Nondistinct Items. – *The American Mathematical Monthly*, October 1976, **83**, p. 629–631.

Задача Лангфорда

6. Levine E. The Existence of Perfect 3-Sequences. – *The Fibonacci Quarterly*, November 1968, **6**, p. 108–112.
7. Baron G. Über Verallgemeinerung des Langford'schen Problem. – In: Combinatorial Theory and Its Applications I. Paul Erdös et al., eds. Proceedings of the Conference in Balatonfüred, 1969. – North Holland, 1970, p. 81–92.
8. Roselle D. P., Thomasson T. C., Jr. On Generalized Langford Sequences. – *Journal of Combinatorial Theory*, September 1971, **11**, p. 196–199.

Задача Рансома

9. Wason P., Johnson-Laird P. The Psychology of Reasoning. – Harvard University Press, 1972.
10. Wason P. The Psychology of Deceptive Problems. – *New Scientist*, August 15, 1974, p. 382–385.
11. Gardner H. The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution, Chapter 13. – Basic, 1985.

Глава 7

1. Pinkerton R. C. Information Theory and Melody. – *Scientific American*, February 1956, p. 77–86.
2. The Ars Magna of Ramon Lull. – In: Gardner M. Logic Machines and Diagrams. – McGraw-Hill, 1958.
3. Hiller L. A., Jr., Isaacson I. M. Experimental Music. – McGraw-Hill, 1959.
4. Hiller L. A., Jr. Computer Music. – *Scientific American*, December 1959, p. 109–120.

5. Music by Computers.–Wiley, 1969.
6. Cybernetic Serendipity: The Computer and the Arts. Jasia Reichardt, ed.–Frederick A. Praeger, 1969.
7. Scholes P.A. Composition Systems and Mechanisms.–In: The Oxford Companion to Music. J.O. Ward, ed.–Oxford University Press, 1970.
8. O'Beirn T.H. From Mozart to the Bagpipe with a Small Computer.–*Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, January 1971, 7, p. 3–8.
9. Godwin J. Athanasius Kircher.–Thomas and Hudson, 1979.
10. Jeans J. Science and Music.–Dover, 1968.
11. O'Beirn T.H. Puzzles and Paradoxes.–Oxford University Press, 1965.
12. Dowling L., Shaw A. The Schillinger System of Musical Composition.–1941.
13. Schillinger J. The Mathematical Basis of the Arts.–Philosophical Library, 1948.
14. Parsons D. The Directory of Tunes and Musical Themes.–London, 1977.
15. Kircher A. Musurgia universalis.–Rome, 1650.

Глава 8

1. The Magic Mirror: An Antique Optical Toy.–McLoughlin Brothers, ca. 1900. Dover reprint, 1979.
2. Speaking of Pictures: Distotred Paintings Must Be Seen in Special Mirrors to Make Sense.–*Life*, September 12, 1949, **27**, p. 18–19.
3. Clerici F. The Grand Illusion.–*New Arts Annual*, 1954, **23**, p. 98–180.
4. Baltrusaitis J., Anamorphoses: Ou Magic Artificielle Des Effets Merveilleux.–Olivier Perrin Editeur, 1969.
5. Fontaine A. Anamorphic Art.–*Lithopion*, Fall 1972, **7**, p. 50–59.
6. Elffers J., Leeman F., Schuyt M. Anamorphoses: Games of Perception and Illusion in Art.–Abrams, 1976.
7. Hughes R. Fun-Fair Illusions.–*Time*, October **4**, 1976, p. 92–93.
8. "Portrait of a Man Standing Before a Balustrade".–Abrams, 1977.
9. Kuchel P.W. Anamorphoscopes: A Visual Aid for Circle Inversion.–*The Mathematical Gazette*, June 1979, **63**, p. 82–89.
10. Walker J. Anamorphic Pictures.–*Scientific American*, July 1981.
11. Niceron J.F. La Perspective Curieuse.–Paris, 1638.
12. Beurdeley M. et al. Chinese Erotic Art.–Charles E. Tuttle Co., 1969.
13. Ittelson W.H., Kilpatrick F.P. Experiments in Perception.–*Scientific American*, August 1951.
14. Thompson D.W. On Growth and Form.–Cambridge UP, 1961.
15. Loyd S. Cyclopedia of 5000 Puzzles.–Morningside Press, 1914.
16. Гарднер М. Математические новеллы.–М.: Мир, 1974. Гл. 15.

Глава 9

1. *The American Mathematical Monthly*, April 1974, p. 407.
2. Boas R.P., Jr., Wrench J.W., Jr., Partial Sums of the Harmonic Series.–*The American Mathematical Monthly*, October 1971, **78**, p. 864–870.
3. Keller D.M. The Sigil of Scoteia.–Kalki, 1968, p. 2.
4. Mendelsohn N.S. A Psychological Game.–*The American Mathematical* Monthly, February 1946, **53**, p. 86–88.
5. Herstein I.N., Kaplansky I. Matters Mathematical.–Harper and Row, 1974, p. 212–215.
6. Graham L.A. Ingenious Mathematical Problems and Methods.–Dover, 1959.
7. Ogilvy C.S. Excursions in Geometry.–Oxford University Press, 1969.
8. Archibald R.C.–*The American Mathematical Monthly*, 1915, **22**, p. 65.

9. Walker R. Monge's Theorem in Many Dimensions. – *The Mathematical Gazette*, October 1976, **60**, p. 185–188.
10. Stolarsky K. B. The Sum of a Digitadition Series. - *Proceedings of the American Mathematical Society*, August 1976, **59**, p. 1–5.
11. Schwenk A. J. – *The American Mathematical Montnly*, June 1976, **83**, p. 485–486.
12. Jackson B., Ringel G. Coloring of Circle. – *The American Mathematical Monthly*, January 1984, **91**, p. 42–49.
13. Harris J. Single Vacancy Rolling Cube Problems. – *Journal of Recreational Mathematics*, Summer 1974, 7, p. 220–224.
14. Gardner M. Mathematical Carnival. – Knopf, 1975.
15. Levy S. Hackers: Heroes of the Computer Revolution. – Doubleday, 1984.

Глава 10

1. Ramanujan S. – *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. 1913–1914, **45**, p. 350.
2. Reti L. Leonardo on Bearings and Gears. – *Scientific American*, February 1971.
3. Wright L. Clean and Decent: the Fascinate Story of the Bathroom and Water Closet. – Routledge and Kegan Paul, 1960.
4. Reyburn W. Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper. – Prentice-Hall, 1971.
5. The Solution of the Four – Color – Map Problem. – *Scientific American*, October 1977, p. 108–121.
6. Roth N. K. Map Coloring. – *Mathematics Teacher*, December 1975.
7. Segre B. – Rendiconti, 1975, **59**, p. 411–412.
8. Lehmer D. H. – *Mathematical Tables and Aids to Computation*, January 1943, **1**, p. 30–31.
9. Good I. J. – *Pi Mu Epsilon Journal*, Fall 1972, **5**, p. 314–315.
10. Taylor E. F., Wheeler J. A. Spacetime Physics. – W. H. Freeman, 1966.
11. Gamow G. Mr. Tompkins in Wonderland. – MacMillan, 1947.
12. Rindler W. – *American Journal of Physics*, 1961, **29**, 365 ff.
13. Shaw R. – *American Journal of Physics*, 1962, **30**, 72 ff.
14. Landsberg P. T. – *The Mathematical Gazette*, 1964, **47**, 197 ff.
15. Fodor N. Encyclopedia of Psychic Science. – Citadel, 1966.
16. Ostrander S., Schroeder L. Psychic Discoveries behind the Iron Curtain. – Prentice-Hall, 1970.

Глава 11

1. Császár A. A Polyhedron without Diagonals. – *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 1949–1950, **13**, p. 140–142.
2. Stewart B. M. Adventures Among the Toroids. – Published by the author, 1952. 2d rev. ed., 1984.
3. Golomb S. W., Baumert L. D. The Search for Hadamard Matrices. – *The American Mathematical Monthly*, January 1963, **70**, p. 12–17.
4. Crowe D. W. Euler's Formula for Polyhedra and Related Topics. – In: Excursions in Mathematics. Anatole Beck et al., eds. – Worth, 1969.
5. Crowe D. W. Steiner Triple Systems Heawood's Torus Coloring, Császár's Polyhedron, Room Designs, and Bridge Tournaments. – *Delta*, Spring 1972, **3**, p. 27–32.

Квадраты Рума

6. Room T. G. A New Type of Magic Square. – *The Mathematical Gazette*, 1955, **39**, p. 307.

7. Mullin R.C., Nemeth E. On Furnishing Room Squares. – *Journal of Combinatorial Theory*, November 1969, 7, p. 266–272.
8. O'Shaughnessy C.D. On Room Squares of Order $6m + 2$. – *Journal of Combinatorial Theory*, November 1972, **13**, Series A, p. 306–314.
9. Wallis W.D. Solution of the Room Square Existence Problem. – *Journal of Combinatorial Theory*, November 1974, **17**, Series A, p. 379–383.
10. Mullin R.C., Wallis W.D. The Existence of Room Squares. – *Aequationes Mathematicae*, 1975, **13**, p. 1–7.
11. Gardner M. The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions. – Simon & Schuster, 1959.
12. Gardner M. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Amusements. – W.H. Freman and Company, 1986.
13. Rouse Ball W.W. Mathematical Recreations and Essays. – University of Toronto Press, 1974.
14. Stewart B.M. Adventures among the Toroids. – 1970.
15. Mason J.H. Can Regular Tetrahedra Be Glued Together Face to Face to Form a Ring? – *The Mathematical Gazette*, October 1972, **56**, p. 194–197.
16. Sawade K. – *Graphs and Combinatorics*, 1985, **1**, p. 185–187.

Глава 12

1. Guy R.K., Smith C.A.B. The G-Values of Various Games. – *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, July 1956, **52**, p. 514–526.
2. Beck A. The Game of Hex. – In: Excursions into Mathematics. Beck et al., eds. – Worth, 1969.
3. Evans R.J. A Winning Opening in Reverse Hex. – *Journal of Recreational Mathematics*, Summer 197, 7, p. 189–192.
4. Evans R.J. Reverse Cram with Block Sizes not Exceeding 13. – *Delta*, 1976, **6**, p. 57–76.
5. "Dodgem". – In: Berlekamp E.R., Conway J.H., Guy R.K. Winning Ways. – Academic Press, 1982, p. 685–688.
6. Gardner M. Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions. – Simon & Schuster, 1959.
7. Gardner M. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments. – W.H. Freeman and Company, 1986.

Глава 13

1. Kershner R.B. On Paving the Plane. – *The American Mathematical Monthly*, October 1968, **75**, p. 839–844.
2. Kershner R.B. On Paving the Plane. – *APL Technical Digest*, July – August 1969, **8**, p. 4–10.
3. Kershner R.B. The Laws of Sines and Cosines for Polygons. – *Mathematics Magazine*, May 1971, **44**, p. 150–153.
4. Dunn J.A. Tesselations with Pentagons. – *The Mathematical Gazette*, December 1971, **55**, p. 366–369; December 1972, **56**, p. 332–335.
5. Clemens S.R. Tesselations of Pentagons. – *Mathematics Teaching*, June 1974, p. 18–19; Parker J., ibid., March 1975, p. 34.
6. Schattschneider D. Tiling the Plane with Congruent Pentagons. – *Mathematics Magazine*, January 1978, **51**, p. 29–44. Reprinted in: MacMahon P.A. Collected Papers, Vol. 2. – MIT Press, 1986.
7. Niven I. Convex Polygons that Cannot Tile the Plane. – *The American Mathematical Monthly*, December 1978, **85**, p. 785–789.
8. Klamkin M.S., Liu A. A Note on a Result of Niven on Impossible Tesselations. – *The American Mathematical Monthly*, October 1980, **87**.
9. Schattschneider D. In Praise of Amateurs. – In: The Mathematical Gardner. David A. Klarner, ed. – Prindle, Weber and Schmidt, 1981.

10. Hirschhorn M. D., Hunt D. C. Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane. – *Journal of Combinatorial Theory*, May 1985, **39**, p. 1–18.
11. Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. – W. H. Freeman and Company, 1987. Chapter 9, "Tilings by Polygons".

Замощение плоскости невыпуклыми многоугольниками

12. Hatch G., Simonds D. Tesselations with Equilateral Reflex Polygons. – *Mathematics Teaching*, September 1978, p. 32–34.
13. Palmer M. Tesselations of Non-convex Pentagons. – *Mathematics Teaching*, March 1979, p. 8–11.
14. Grünbaum B., Shephard G. C. Spiral Tilings and Versatiles. – *Mathematics Teaching*, September 1979, p. 50–51.
15. Schattschneider D. The Incredible Pentagonal Veesatile. Designd by Marjorie Rice. *Mathematics Teaching*, December 1980, p. 52–53.
16. Solution to Problem 67D, posed by H. Martin Cundy, based on results by Doris Schattschneider. - *The Mathematical Gazette*, December 1983, **67**, p. 307-309.
17. Kershner R. B., Wilcox L. R. The Anatomy of Mathematics. - Ronald Press, 1950.

Глава 14

1. Golomb S. W. Replicating Figures in the Plane. – *Mathematical Gazette*, December 1964, **48**, p. 403–412.
2. Golomb S. W. Tiling with Polyominoes. – *Journal of Combinatorial Theory*, September 1966, **1**, p. 280–296.
3. Bell A. W. Tesselation of Polyominoes. - Mathematical Reflections – ed. by members of the Association of Teachers of Mathematics. – Cambridge University Press, 1970.
4. Golomb S. W. Tiling with Sets of Polyominoes. - *Journal of Combinatorial Theory*, July 1970, **9**, p. 60–71.
5. Schattschneider D. Will it Tile? Try Conway Criterion! – *Mathematics Magazine*, September 1980, **53**, p. 224–233.
6. Grünbaum B., Shepard G. C. Tiling with Congruent Tiles. – *Bulletin of the American Mathematical Society*, November 1980, **3**, p. 951–973.
7. Fontaine A., Martin G. E. Polymorphic Polyominoes. – *Mathematics Magazine*, November 1984, **57**, 275–283.
8. Tilings by Polygons. - In: Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns, Chapter 9. – W. H. Freeman and Company, 1987.
9. Golomb S. W. Polyominoes. – Scribner's, 1965.
10. Gardner M. Unexpected Hanging. – Simon & Schuster, 1969.
11. Gardner M. Sixth Book of Mathematical Games. – University of Chicago Press, 1983.
12. Gardner M. Mathematical Magic Show. – Knopf, 1971.
13. MacMahon P. A. New Mathematical Pastimes. – Cambridge UP, 1921.

Глава 15

1. Peirce C. S. Quincuncial Projections of the Sphere. – *American Journal of Mathematics*, 1879, **2**, p. 394–396.
2. Fisher I., Miller O. M. World Maps and Globes. – Essential Books, 1944.
3. Robinson A. H. Elements of Cartography. – Wiley, 1960.
4. Gilbert E. N. The Probability of Covering a Sphere with N Circular Caps. – *Biometrika*, 1965, **52**, p. 323.
5. Lambert J. H. Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps. Translated and introduced by W. R. Tobler. - University of Michigan Publication, 1972, p. 8.

6. Post J. B. Atlas of Fantasy. – Mirage Press, 1973.
7. Tobler W. R. A Continuous Transformation Useful in Districting. – *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1973, **119**, p. 215–220.
8. Gilbert E. N. Distortion in Maps. – *SIAM Review*, January 1974, **16**.
9. Hill G. Cartographical Curiosities. – British Museum Publications, 1978.

Глава 16

1. Coxeter H. S. M. Introduction to Geometry. – Wiley, 1967.
2. Fisch F. N. The Classical Cake Problem. – *The Mathematics Teacher*, November 1973, **66**, p. 659–661.
3. Williams S. H., Madan F. Handbook of the Literature of the Rev. C. L. Dodgson. – Oxford University Press, 1931.
4. Green R. L. Lewis Carroll Handbook. – Oxford University Press, 1962.
5. Hatch E. M. A Selection from the Letters of Lewis Carroll to his Child – Friends. – Folcroft, 1973.

Глава 17

1. Barnard F. A. P. Theory of Magic Squares and Cubes. – In: The Memoires of the National Academy of Sciences, 1888, 4, p. 209–270.
2. Andrews W. S. Magic Squares and Cubes. – Open Court, 1917. Dover reprint, 1960.
3. Rosser J. B., Walker R. J. The Algebraic Theory of Diabolic Magic Squares. – *Duke Mathematical Journal*, December 1939, **5**, p. 705–728.
4. Gardner M. The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. – Simon and Schuster, 1961.
5. Fults J. L. Magic Squares. – Open Court, 1974.
6. Wynne B. E. Perfect Magic Cubes of Order 7. – *Journal of Recreational Mathematics*, 1975–1976, **8**, p. 285–293.
7. Benson W. H., Jacoby O. New Recreations with Magic Squares. – Dover, 1976.
8. Adler A., Shuo – Yen r. Li. Magic Cubes and Prouhet Sequences. – *The American Mathematical Monthly*, October 1977, **84**, p. 618–627.
9. Benson W. H., Jacoby O., Magic Cubes. – Dover, 1981.
10. Moran J. The Wonders of Magic Squares. – Vintage, 1982.
11. Hirayama A., Abe G. Researches in Magic Squares. – Osaka Kyoikutosho Co, Osaka, 1983.
12. Hendricks J. R. Ten Magic Tesseracts of Order Three. – *Journal of Recreational Mathematics*, 1985–1986, **18**, p. 125–134.
13. Candy A. L. Construction, Classification and Census of Magic Squares of Order Five. – Lincoln, 1938 (Private publication).
14. Rouse Ball W. W. Mathematical Recreations and Essays. – Dover, 1987.
15. Langman H. Play Mathematics. – Hafner, 1962.

Глава 18

1. Bruijn N. G. de. Filling Boxes with Bricks. – *The American Mathematical Monthly*, January 1969, **76**, p. 37–40.
2. Katona G., Szász D. Matching Problems. – *Journal of Combinatorial Theory*, February 1971, **10**, p. 60–92.
3. Klarner D. A. Brick – Packing Puzzles. – Journal of Recreational Mathematics, Spring 1973, **6**, p. 112–117.
4. Brualdi R. A., Foregger T. H. Packing Boxes with Harmonic Bricks. – *Journal of Combinatorial Theory*, October 1974, **17**, p. 81–114.

5. Bruijn N.G. de, Klarner D.A. A Finite Basis Theorem for Packing Boxes with Bricks. – Philips Research Reports, 1975, **30**, p. 337–343.
6. Honsberger R. Mathematical Gems 2, Chapter 8. – Mathematical Association of America, 1976.
7. Hoffman D.G. Packing Problems and Inequalities. – The Mathematical Garbner. David A. Klarber, ed. – Prindle, Weber, and Schmidt, 1981.

Глава 19

Теория подтверждения

1. Berent P. Disconfirmation by Positive Instances. – *Philosophy of Science*, Desember 1972, **39**, p. 522.
2. Swinburne R. An Introduction to Confirmation Theory. – Methuen, 1973.
3. Salmon W.C. Confirmation. – *Scientific American*, May 1973, p. 75–83.
4. Schlesinger G. Confirmation and Confirmability. – Oxford UP, 1974.

Парадокс Симпсона

5. Blyth C.R. On Simpson's Paradox and the Sure – Thing Principle. – *Journal of the American Statistical Association*, June 1972, **67**, p. 364–381.
6. Beckenbach E.F. Baseball Statistics. – *Mathematics Teacher*, May 1979, **72**, p. 351–352.
7. Falk R., Bar – Hille. M., Magic Possibilities of the Weighted Average. – *Mathematics Magazine*, March 1980, **53**, p. 106–107.
8. Wagner C. Simpson's Paradox in Real Life. – *American Statistician*, February 1982, **36**, p. 46–48.
9. Bickel P.J., Hammel E.A., O'Connell J.W. Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkeley. – *Science*, February 1985, **187**, p. 398–404.
10. Knapp T.R. Instances of Simpson's Paradox. – *The College Mathematics Journal*, June 1985, **16**, p. 209–211.
11. Carnap R. Logical Foundations of Probability. – University of Chicago Press, 1950.
12. Jeffrey R.C. The Logic of Decision Making. – University of Chicago Press, 2d ed., 1983.

Глава 20

1. Forder H.G. Some Problems in Combinatorics. – *The Mathematical Gazette*, October 1961, **45**, p. 199–201.
2. de Bruijn N.G., Morselt B.J.M. A Note on Plane Trees. – *Journal of Combinatorial Theory*, January 1967, **2**, p. 27–34.
3. Adler R., Kubota K.K. Prime and Prime Power Divisibility of Catalan Numbers. – *Journal of Combinatorial Theory*, November 1973, **15**, p. 243–256.
4. Kuchinsky M. Catalan Structures and Correspondences. Master's thesis (University of West Virginia), privately published by author in Morgantown, 1977.
5. Campbell D. The Computation of Catalan Numbers. – *Mathematical Magazine*, September 1984, **57**, p. 195–208.
6. Sloane N.J.A. A Handbook of Integer Sequences. – Academic Press, 1973.
7. Gardner M. Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. – Simon and Schuster, 1959.
8. Cabell J.B. Jurgen. – Grosset and Dunlap, 1919.
9. Levine J. Note on the Number of Paires of Non-Intersecting Routes – *Scripta Mathematica*, Winter 1959, **24**, p. 335–338.

10. Shapiro L. A Catalan Triangle. - *Discrete Mathematics*, 1976, **14**, p. 83-90.
11. Shapiro L. A Short Proof of an Identity of Touchard's Concerning Catalan Numbers. - *Journal of Combinatorial Theory*, May 1976, **20**, p. 375-376.

Глава 21

1. Judd W. Games Calculators Play. - Dymax, 1974; Warner Books, 1976.
2. Schlossberg E., Brockman J. The Pocket Calculator Games Book. - William Morrow. Vol. 1, 1975; Vol. 2, 1977.
3. Rogers J.T, The Calculating Book: Fun and Games with Your Pocket Calculator. - Random House, 1975.
4. Steinbocker D. Calcu/Letter. - Pyramid Books, 1975.
5. Frost M.D. Compute-the-Words Puzzles. - Privately published, 1975.
6. Thiagarajan S., Stolovich H. Games with a Pocket Calculator. - Dymax, 1976.
7. Sherwood J.C. The Conjurer's Calculator. - Mickey Hades, 1976.
8. Gardner M. The Magic Calculator. - *The New York Times Magazine*, January 18, 1976, p. 71.
9. Ore O. Number Theory and Its history. - McGraw-Hill, 1948.
10. Knuth D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 2. Seminumerical Algorithms. - Addison - Wesley, 1969.
11. Madachy J.S. Mathematics on Vacation. - Scribner's, 1966.

Глава 22

1. Macmillan R.H. An Old Problem. - *The Mathematical Gazette*, 1946, **30**, p. 109.
2. O'Beirn T.H. New Boards for Old Games. - *New Scientist*, January 11, 1962, **269**, p. 98-99.
3. Grünbaum B. Arrangements and Spreads, - American Mathematical Society, 1972.
4. Burr S.A., Grünbaum B., Sloane N.J.A. The Orchard Problem. - *Geometriae Dedicata*, 1974, **2**, p. 397-424.
5. Grünbaum B. New Views on Some Old Questions of Combinatorial Geometry. - *Theorie Combinatorie*, 1976, **1**, p. 451-468.
6. Burr S.A. Planting Trees. - In: The Mathematical Gardner. Klarner D.A., ed. - Prindle, Weber, and Schmidt, 1981.
7. Ruberg S.J. The Tree Planting Problem on a Sphere. - *Mathematics Magazine*, January 1981, **53**, p. 41-42.
8. Dudeney H.E. Amusements in Mathematics. - Dover, 1958.
9. Jackson J. Rational Amusement for Winter Evenings. - London, 1821.
10. Gardner M. Mathematical Carnival. - Knopf, 1975.
11. Дьюдени Г. Кентерберийские головоломки. - М.: Мир, 1979.
12. Dudeney H.E. 536 Puzzles & Curious Problems. - Scriber's 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5
Глава 1. Путешествие во времени 8
Глава 2. Гексы и звезды 25
Глава 3. Танграмы, часть I 37
Глава 4. Танграмы, часть II 49
Глава 5. Нетранзитивные парадоксы 67
Глава 6. Комбинаторные задачи с картами 84
Глава 7. Машины, сочиняющие мелодию 102
Глава 8. Анаморфные изображения 117
Глава 9. Резиновый жгут и другие задачи 132
Глава 10. Шесть сенсационных открытий 148
Глава 11. Полиэдр Часара 165
Глава 12. Доджем и другие простые игры 179
Глава 13. Мозаики из выпуклых многоугольников 191
Глава 14. Мозаики из полиомино, полиамондов и полигексов 205
Глава 15. Необычные карты 216
Глава 16. Шестой символ и другие задачи 232
Глава 17. Магические квадраты и кубы 240
Глава 18. Упаковка блоков 254
Глава 19. Индукция и вероятность 271
Глава 20. Числа Каталана 284
Глава 21. Игры и забавы с микрокалькулятором 300
Глава 22. Задачи о посадке деревьев 313
Литература 328